УДК 514.752 DOI: 10.14529/mmph200105

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ЗАМКНУТОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С БИЕКТИВНЫМ ГАУССОВЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ УРОВНЯ

В.Г. Шармин, Д.В. Шармин
Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация
E-mail: d.v.sharmin@utmn.ru

Строение замкнутых и незамкнутых регулярных гиперповерхностей с инъективным гауссовым отображением достаточно хорошо изучено. При решении ряда задач дифференциальной геометрии может оказаться, что искомая гиперповерхность с биективным гауссовым отображением будет нерегулярной. В настоящей статье изучаются глобальные свойства нерегулярных замкнутых гиперповерхностей в четырехмерном евклидовом пространстве, особое множество которых является объединением замкнутых ориентируемых двумерных многообразий. В работе используются: теория Морса, свойства полярного преобразования относительно гиперсферы, теорема Гаусса–Бонне, методы классической дифференциальной геометрии гиперповерхностей и поверхностей, коразмерность которых больше 1. Доказано, что при некоторых условиях компонентами особого множества рассматриваемых гиперповерхностей могут быть только торы и сферы, причем вдоль сферы касаются друг друга выпуклая и седловая компоненты регулярности. Выяснено, что замкнутая нерегулярная гиперповерхность с «отсекаемыми» краями и биективным гауссовым отображением состоит из двух локально выпуклых компонент, гомеоморфных трехмерному шару, и одной седловой компоненты, гомеоморфной топологическому произведению двумерной сферы на отрезок. Построены примеры замкнутых невыпуклых гиперповерхностей с биективным гауссовым отображением.

Ключевые слова: евклидово пространство; гауссово отображение; невыпуклая замкнутая нерегулярная гиперповерхность; эйлерова характеристика; функция уровня.

Введение

Строение замкнутых и незамкнутых регулярных гиперповерхностей с инъективным гауссовым отображением достаточно хорошо изучено. При решении ряда задач дифференциальной геометрии может оказаться, что искомая гиперповерхность с инъективным гауссовым отображением будет нерегулярной.

В работе [1] проведена классификация поверхностей без параболических точек, гауссово отображение которых обладает некоторыми специальными свойствами, в трехмерном пространстве Лоренца–Минковского.

В статье [2] получена полная классификация квазиминимальных поверхностей Лоренца с поточечным 1-типа гауссовым отображением в псевдоевклидово 4-пространство.

В работе [3] изучены некоторые характеристики поверхностей вращения с поточечным 1-типа гауссовым отображением в четырехмерном евклидовом пространстве.

Локальным и глобальным свойствам замкнутых невыпуклых гиперповерхностей, имеющих геометрические особенности, с биективным сферическим отображением посвящены работы А.Л. Вернера [4], А.А. Дудкина [5] и В.Г. Шармина [6].

В настоящей статье изучено топологическое строение замкнутых нерегулярных гиперповерхностей специального вида с биективным гауссовым отображением в четырехмерном евклидовом пространстве.

Основные определения и примеры

Определение 1. Контингенция гиперповерхности $\vec{r}(u_1, u_1, ..., u_n)$ в данной точке $\vec{r}(u_{1_0}, u_{2_0}, ..., u_{n_0})$ – это множество предельных положений лучей, имеющих начало в точке $\vec{r}(u_{1_0}, u_{2_0}, ..., u_{n_0})$ и проходящих через точку $\vec{r}(u_1, u_1, ..., u_n) \neq \vec{r}(u_{1_0}, u_{2_0}, ..., u_{n_0})$, при $(u_1, u_1, ..., u_n) \to (u_{1_0}, u_{2_0}, ..., u_{n_0})$.

Замечание. В регулярной точке контингенция совпадает с касательной гиперплоскостью.

Определение 2. Типом седлообразности гиперповерхности V^n класса C^2 евклидова пространства E^{n+1} в точке $M \in V^n$ называется пара чисел (*p*, *q*), где *p* – число положительных главных кривизн, а *q* – число отрицательных главных кривизн в рассматриваемой точке.

Если гиперплоскость в евклидовом пространстве E^{n+1} задана уравнением $A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + ... + A_{n+1} \cdot X_{n+1} - 1 = 0$, то ее полюсом относительно некоторой гиперсферы S^n является точка с координатами $(A_1, A_2, ..., A_{n+1})$.

Определение 3. Гиперповерхность $V^{n^*} \subset E^{n+1}$ называется полярной для гиперповерхности $V^n \subset E^{n+1}$ относительно некоторой гиперсферы S^n, если каждая ее точка X^* есть полюс гиперплоскости α_X, касательной в точке $X \in V^n$ (либо гиперплоскости, содержащей контингенцию в точке $X \in V^n$ для особых точек).

Определение 4. Пусть регулярная гиперповерхность задана погружением $f : W^n \to E^{n+1}$ и $\omega \in W^n$. Окрестность Ω точки ω называется канонической, если среди касательных гиперплоскостей в точках множества $f(\Omega)$, отличных от точки $f(\omega)$, нет параллельных касательной гиперплоскости в точке $f(\omega)$. Если сужение отображения *f* на Ω является вложением, то $f(\Omega)$ называется канонической окрестностью точки $f(\omega)$, а точка $f(\omega)$ – регулярной в смысле А.В.Погорелова [7, с. 208].

Определение объекта исследования. Рассмотрим гиперповерхность $V^3 \subset E^4$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) V^3 является замкнутой невыпуклой гиперповерхностью, заданной топологическим погружением $\vec{r} : S^3 \to E^4$, причем вектор-функция $\vec{r}$ является непрерывно-дифференцируемой;

2) на гиперповерхности V^3 существует непустое множество особых точек V^2, в которых $rank(d\vec{r}) = 2$, причем это множество является образом объединения конечного числа попарно непересекающихся замкнутых ориентируемых двумерных подмногообразий гиперсферы S^3, и особенность на гиперповерхности V^3 является геометрической, регулярные компоненты V^3 принадлежат классу $C^k, k \geq 2$;

3) гиперповерхность V^3 допускает взаимно однозначное гауссово отображение в следующем смысле: в каждой точке V^3 существует единственная гиперплоскость, содержащая контингенцию гиперповерхности в этой точке, и можно так выбрать поле нормалей $\vec{n}$ к этим гиперплоскостям, что с помощью этих нормалей будет осуществляться гомеоморфизм V^3 на S^3;

4) гиперповерхность V^3 является огибающей построенного поля гиперплоскостей;

5) сферический образ каждой компоненты V_i^2 особого множества V^2 гиперповерхности V^3 является регулярной поверхностью на гиперсфере S^3;

6) для любой компоненты V_i^2 поверхности V^2 в каждой точке величины K_1 и K_2 не равны нулю, где K_1 и K_2 кривизны в направлениях векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$, образующих базис нормальной плоскости двумерной поверхности V_i^2, причем вектор $\vec{n}$ принадлежит векторному полю, определенному в пункте 3.

Замечание. С помощью векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$ вычисляются вторые квадратичные формы поверхности V_i^2, которые используются для нахождения величин K_1 и K_2. Гауссова кривизна поверхности равна сумме величин K_1 и K_2.

Построим пример гиперповерхности в E^4, удовлетворяющей условиям 1–6.

Рассмотрим на плоскости E^2 замкнутую кривую l с четырьмя точками возврата, имеющую биективное сферическое отображение и состоящую из четырех дуг: две дуги – части двух ветвей гиперболы, симметричные относительно мнимой оси, две другие – это дуги окружностей одного радиуса, обращенные выпуклостью внутрь ограниченной компоненты множества $E^2 \setminus l$. В точках возврата касательные к окружности и гиперболе совпадают. Вращая эту кривую вокруг мнимой оси гиперболы в евклидовом пространстве E^3, получим замкнутую невыпуклую поверхность с биективным сферическим отображением, состоящую из одной седловой компоненты и двух выпуклых компонент и имеющую два ребра возврата.

Будем вращать полученную поверхность в пространстве E^4 вокруг плоскостей симметрии. При вращении вокруг плоскости, не пересекающей ребра возврата, получим гиперповерхность в , имеющую взаимно однозначное сферическое отображение и состоящую из двух седловых компонент с типами седлообразности (2, 1) и (1, 2). Особое множество представляет собой тор Клиффорда, т.е. тор в E^4, гауссова кривизна во всех точках которого равна нулю.

Если же плоскость вращения пересекает ребра возврата, то получим гиперповерхность, состоящую из трех компонент: двух локально выпуклых, гомеоморфных трехмерному шару, и одной седловой компоненты, гомеоморфной цилиндру $S^2 \times I$. Особое множество – два непересекающихся многообразия, каждое из которых гомеоморфно двумерной сфере.

Топологическое строение компонент особого множества

Теорема 1. Полная кривизна $\iint_{V_i^2} K d\sigma$ компоненты V_i^2 особого множества V^2 гиперповерхности V^3, удовлетворяющей условиям 1–6, является неотрицательной.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\iint_{V_i^2} K d\sigma < 0$.

По определению объекта исследования величины K_1 и K_2 не обращаются в ноль в точках многообразия V_i^2. В силу предположения хотя бы одна из них строго отрицательна. Для определенности положим $K_2 < 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение на V_i^2

$$b_{11} du_1^2 + 2b_{12} du_1 du_2 + b_{22} du_2^2 = 0, \qquad (1)$$

где b_{11}, b_{12}, b_{22} – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности V_i^2 в направлении вектора $\vec{m}$.

Так как по теореме Гаусса–Бонне эйлерова характеристика компоненты V_i^2 строго отрицательна, то любое дифференциальное уравнение на этом многообразии должно иметь особые точки [8, с. 232]. В особых точках дифференциального уравнения (1) имеем $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$. Получили противоречие с условием 6 определения основного объекта исследования.

Следствие 1. Компонентой V_i^2 особого множества V^2 гиперповерхности V^3, удовлетворяющей условиям 1–6, может быть либо двумерная сфера, либо двумерный тор.

Следствие 2. Если компонента V_i^2 есть двумерная сфера, то величины K_1 и K_2 положительны.

Связь рода компоненты особого множества с типом касающихся вдоль нее регулярных компонент гиперповерхности V^3

Теорема 2. Если компонента V_i^2 особого множества V^2 гиперповерхности V^3 гомеоморфна сфере, то вдоль нее касаются друг друга эллиптическая и седловая компоненты.

Доказательство. Компоненту V_i^2 в дальнейшем будем обозначать S^2. Пусть ω есть окрестность особой точки $M \in S^2$ такая, что ее полярный образ ω^* является канонической окрестностью точки M^* на полярной гиперповерхности V^{3^*}. Окрестность ω можно выбрать так, что граница канонической окрестности $\partial\omega*$ точки M^* будет пересекать полярный образ S^{2^*} компоненты S^2 особого множества V^2 по замкнутой кривой, делящей $\partial\omega*$ на две области u_1^2 и u_2^2, а множество S^{2^*} будет делить ω^* на области u_1^3 и u_2^3 [6, с. 94, лемма 2].

Через точку M не проходят касательные гиперплоскости к V^3 в точках $X \neq M$ множества $S^2 \cap \omega$, поскольку величины K_1 и K_2 в точке $M \in S^2$ положительны. Поэтому на касательной гиперплоскости к гиперповерхности V^{3^*} в точке M^* нет точек из $S^{2^*} \cap \omega*$, т. е. $T_{M^*}V^{3^*} \cap (S^{2^*} \cap \omega^*) = M^*$.

Точка M^* – полярный образ точки M, принадлежащей особому множеству рассматриваемой гиперповерхности V^3. Согласно результатам работы [6, с. 96, лемма 5], точка M^* является параболической точкой на гиперповерхности V^{3^*}. Тогда множество $T_{M^*}V^{3^*} \cap \omega^*$представляет собой один конус и лежит либо в области u_1^3, либо в области u_2^3. Отсюда следует, что касательная плоскость к гиперповерхности V^{3^*} в точке M^* имеет с одной из замкнутых областей $\bar{u}_1^3$ либо $\bar{u}_2^3$ только одну общую точку M^*, т. е. либо u_1^3, либо u_2^3 является локально выпуклой в окрестности края. Тогда соответствующая область на гиперповерхности V^{3^*} в окрестности точки M, принадлежащая ее краю, является выпуклой. Из этого и локального результата о строении в окрестности особой точки гиперповерхности с инъективным сферическим отображением [6, с. 95, теорема 2] следует, что вдоль компоненты S^2 касаются друг друга локально выпуклая и седловая компоненты.

Следствие 3. Если вдоль компоненты V_i^2 особого множества V^2 гиперповерхности V^3, удовлетворяющей условиям 1 – 6, касаются друг друга две седловых компоненты, то поверхность V_i^2 гомеоморфна тору.

Гиперповерхности с «отсекаемыми» краями гладких компонент

Пусть для гиперповерхности V^3, удовлетворяющей условиям 1–6, существует прямая l, такая, что для любой регулярной компоненты V_i^3 каждая компонента ее края V_j^2 является «отсекаемой», т.е. существует гиперплоскость E_j^3, перпендикулярная прямой l, и $E_j^3 \cap V_j^2 = \varnothing$. При этом многообразие $\tilde{V}_i^3$ с плоскими краями, полученное «отсечением» связных компонент края регулярной гиперповерхности V_i^3, гомеоморфно V_i^3. Предположим, что каждая гиперповерхность V_i^3 имеет не более двух компонент связности края, и существует хотя бы одна регулярная компонента со связным краем. Пусть точки, в которых касательные гиперплоскости к V^3 перпендикулярны l, принадлежат $\operatorname{int} \bigcup_i \tilde{V}_i^3$.

Для каждого многообразия $\tilde{V}_i^3$ построим функцию уровня f_l относительно прямой l. Построенная функция является допустимой функцией Морса [9, с. 206]. Легко видеть, что множество критических точек этой функции, рассматриваемой на $\operatorname{int} \bigcup_i \tilde{V}_i^3$, состоит только из двух точек, причем эти точки являются невырожденными критическими точками.

Замечание. Для изучения топологических свойств и типа седлообразности компоненты V_i^3 достаточно изучить топологические свойства и тип седлообразности компоненты $\tilde{V}_i^3$.

Лемма 1. Если индекс особой точки равен k, то тип седлообразности компоненты $\tilde{V}_i^3$ равен $(3-k, k)$.

Доказательство. В окрестности критической точки $p \in \tilde{V}_i^3$ индекса k функцию f_l можно задать следующим образом [9, с. 192, лемма Морса]:

$$f_l(u_1,u_2,u_3)=f_l(p)-\sum_{i=0}^{k}u_i^2+\sum_{i=k+1}^{3}u_i^2, \qquad (2)$$

при этом касательная гиперплоскость в точке p перпендикулярна прямой l. Тогда уравнение (2) можно рассматривать как уравнение соприкасающегося параболоида с типом седлообразности $(3-k,k)$ поверхности $\tilde{V}_i^3$ в точке p с осью l.

Лемма 2. Компонента $\tilde{V}_i^3$ со связным краем содержит критическую точку, индекс которой равен нулю, причем эта компонента является локально выпуклой.

Доказательство. Так как число Бетти группы гомологий $H_0(\tilde{V}_i^3,Z)$ равно единице, то в силу неравенств Морса [9, с. 212, теорема 3.7] функция f_l имеет на $\tilde{V}_i^3$ хотя бы одну критическую точку индекса ноль. В силу леммы 1 и постоянства типа седлообразности на регулярной компоненте, $\tilde{V}_i^3$ является локально выпуклой.

Лемма 3. На гиперповерхности V^3 с допустимой функцией уровня f_l не существует компоненты со связным краем, гомеоморфной полноторию.

Доказательство. Поскольку полноторий не является локально выпуклой компонентой, то на нем должна существовать точка с типом седлообразности (2, 1) или (1, 2). С другой стороны, по лемме 2 на этой компоненте существует точка индекса ноль, в которой тип седлообразности равен (3, 0).

Теорема 3. Компонента $\tilde{V}_i^3$ со связным краем гомеоморфна трехмерному шару, содержит ровно одну критическую точку функции f_l и является локально выпуклой.

Доказательство. В соответствии с леммами 2 и 3, $\tilde{V}_i^3$ является локально выпуклой компонентой, гомеоморфной трехмерному шару, на которой функция уровня имеет критические точки. Эйлерова характеристика этой компоненты равна единице.

Докажем, что на рассматриваемой компоненте не существует двух критических точек функции уровня f_l.

Предположим, что на $\tilde{V}_i^3$ функция f_l имеет две критические точки индексов 0 и 3, тогда $\tilde{V}_i^3$ является деформационным ретрактом объединения нульмерной и трехмерной клеток [9, с. 210, теорема 3.3]. Так как эйлерова характеристика есть гомотопический инвариант, получаем, что для компоненты $\tilde{V}_i^3$ она равна нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4. Компонента $\tilde{V}_i^3$ с краем, состоящим из двух компонент связности, гомеоморфна $S^2\times I$, и функция f_l не имеет на ней критических точек.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3. При доказательстве используется тот факт, что вместо функции уровня f_l можно рассматривать функцию уровня $(-f_l)$. Тогда, если критическая точка функции f_l имеет индекс k, то для функции $(-f_l)$ эта же точка будет иметь индекс ($3-k$) [9, с. 211].

Следствие 4. На гиперповерхности V^3 существуют ровно две компоненты локальной выпуклости, гомеоморфные трехмерному шару, на каждой из которых функция уровня f_l имеет ровно одну критическую точку.

Теорема 5. Компонента V_i^3, гомеоморфная $S^2\times I$, является седловой.

Доказательство. Предположим противное. Отсечем края этой компоненты. Получим цилиндр $S^2\times I$ с краями, лежащими в 3-плоскостях. Пересечем этот цилиндр трансверсально 2-плоскостью, параллельной прямой l. Тогда, с одной стороны, в пересечении должна получиться локально выпуклая кривая, а, с другой стороны, эта кривая не должна быть локально выпуклой, так как компонента V_i^3 обращена выпуклостью внутрь гиперповерхности V^3 [6, с. 96, лемма 6].

Теорема 6. Гиперповерхность V^3 с отсекаемыми краями регулярных компонент состоит из трех компонент: двух локально выпуклых, гомеоморфных трехмерному шару, и одной седловой компоненты, гомеоморфной цилиндру $S^2 \times I$.

Доказательство. Гиперповерхность V^3 не может состоять только из двух компонент локальной выпуклости, гомеоморфных трехмерному шару, так как это противоречит теореме 2. Следовательно, она содержит хотя бы одну седловую компоненту, гомеоморфную $S^2 \times I$. Если бы седловых компонент было не менее двух, то нашлись бы две седловых компоненты, которые касались бы друг друга вдоль некоторого множества, гомеоморфного сфере, что опять противоречит теореме 2.

Литература

1. Baba-Hamed, C. On the Gauss Map of Surfaces of Revolution in the Three-Dimensional Minkowski Space / C. Baba-Hamed, M. Bekkar // Tsukuba J. Math. – 2013. – Vol. 36, no. 2. – P. 193–215.

2. Milousheva, V. Quasi-Minimal Lorentz Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map in Pseudo-Euclidean 4-space / V. Milousheva, N.C. Turgay // Journal of Geometry and Physics. – 2016. – Vol. 106. – pp. 171–183.

3. Dursun, U. Surfaces in the Euclidean Space E^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map / U. Dursun, G.G. Arsan // Hacet. J. Math. Stat. – 2011. – Vol. 40, no. 5. – P. 617–625.

4. Вернер, А.Л. Конусы со взаимно однозначным сферическим отображением / А.Л. Вернер // Ученые записки Ленинградского государственного педагогического института им. А.И. Герцена. – 1967. – Т. 328. – С. 44–75.

5. Дудкин, А.А. Замкнутые невыпуклые поверхности с биективным сферическим отображением, вложенные в E^3 / А.А. Дудкин // Современная геометрия. – 1981. – С. 19–39.

6. Шармин, В.Г. Замкнутые невыпуклые гиперповерхности с биективным сферическим отображением в E^4 / В.Г. Шармин // Вопросы глобальной и римановой геометрии. – 1983. – С. 92–96.

7. Бакельман, И.Я. Введение в дифференциальную геометрию «в целом» / И.Я. Бакельман, А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор. – М.: Наука, 1973. – 440 с.

8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 239 с.

9. Хирш, М. Дифференциальная топология / М. Хирш. – М.: Мир, 1979. – 280 с.

Поступила в редакцию 7 сентября 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 1, pp. 37–43

DOI: 10.14529/mmph200105

STUDYING GLOBAL PROPERTIES OF A CLOSED NON-REGULAR HYPERSURFACE WITH A BIJECTIVE GAUSSIAN MAPPING USING THE LEVEL FUNCTION

V.G. Sharmin, D.V. Sharmin
Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation
E-mail: dsharmin@mail.ru

The structure of closed and non-closed regular hypersurfaces with an injective Gaussian mapping is thoroughly studied. When solving some problems of differential geometry, the desired hypersurface with a bijective Gaussian mapping may prove to be non-regular. In this paper, we study global properties of non-regular closed hypersurfaces in four-dimensional Euclidean space. A singular set of these surfaces is the sum total of closed oriented two-dimensional manifolds. The paper uses the Morse theory, the properties of the polar transformation with respect to the hypersphere, the Gauss–Bonnet theorem, the methods of the classical differential geometry of hypersurfaces and surfaces, the codimension of which is greater than 1. It is proved that under certain conditions the components of the singular set of the hypersurfaces under consideration can be only tors and spheres. In this case, the convex and saddle components of the regularity are tangent relative of each other along the sphere. It is found that a closed non-regular hypersurface with "cut off" borders and with bijective Gaussian mapping consists of two locally convex components homeomorphic to a three-dimensional ball, and one saddle component homeomorphic to the topological product of a two-dimensional sphere on the closed interval. The article provides examples of closed non-convex hypersurfaces with a bijective Gaussian mapping.

Keywords: Euclidean space; Gaussian mapping; non-convex closed non-regular hypersurface; Euler characteristic; level function.

References

1. Baba-Hamed C., Bekkar M. On the Gauss Map of Surfaces of Revolution in the Three-Dimensional Minkowski Space. *Tsukuba J. Math.*, 2013, Vol. 36, no. 2, pp. 193–215. DOI: 10.21099/tkbjm/1358776999

2. Milousheva V., Turgay N.C. Quasi-Minimal Lorentz Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map in Pseudo-Euclidean 4-space. *Journal of Geometry and Physics*, 2016, Vol. 106, pp. 171–183. DOI: 10.1016/j.geomphys.2016.03.023

3. Dursun U., Arsan G.G. Surfaces in the Euclidean Space E^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Hacet. J. Math. Stat.*, 2011, Vol. 40, no. 5, pp. 617–625.

4. Verner A.L. Konusy so vzaimno odnoznachnym sfericheskim otobrazheniem (Cones with a One-to-one Spherical Mapping). *Uchenye zapiski Leningradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. A. I. Gertsena*, 1967, Vol. 328, pp. 44–75. (in Russ.).

5. Dudkin A.A. Zamknutye nevypuklye poverkhnosti s biektivnym sfericheskim otobrazheniem, vlozhennye v E^3 (Closed Non-convex Surfaces with Bijective Spherical Mapping, Nested in E^3). *Sovremennaya geometriya*, 1981, pp. 19–39. (in Russ.).

6. Sharmin V.G. Zamknutye nevypuklye giperpoverkhnosti s biektivnym sfericheskim otobrazheniem v E^4 (Closed non-convex hypersurfaces with bijective spherical mapping in E^4). *Voprosy global'noy i rimanovoy geometrii*, 1983, pp. 92–96. (in Russ.).

7. Bakel'man I.Ya., Verner A.L,, Kantor B.E. *Vvedenie v differentsial'nuyu geometriyu "v tselom"* (Introduction to differential geometry "in general"). Moscow, Nauka Publ., 1973, 440 p. (in Russ.).

8. Arnol'd V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary differential equations). Moskow, Nauka Publ., 1975, 239 p. (in Russ.).

9. Hirsch M.W. *Differencial topology*. Springer-Verlag, 1976, 222 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9449-5

Received September 7, 2018