Механика

УДК 539.37 **DOI: 10.14529/mmph200106**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕЛИНЕЙНО НАСЛЕДСТВЕННОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЙ

А.В. Хохлов
Научно исследовательский институт механики, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Построено точное решение квазистатической краевой задачи, аналогичной классической задаче Ламе для полого цилиндра в теории упругости, но для цилиндра из физически нелинейного реономного материала, подчиняющегося определяющему соотношению вязкоупругости Работнова с двумя произвольными материальными функциями, и для произвольных, зависящих от времени давлений, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра. Предполагается, что давления меняются медленно – так, чтобы влиянием инерционных членов можно было пренебречь, деформированное состояние предполагается плоским (т. е. труба бесконечно длинной или конечной, но с нулевыми осевыми перемещениями точек торцов), а материал – однородным, изотропным и несжимаемым. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены через одну функцию времени, которая находится в результате решения выведенного нелинейного функционального уравнения, содержащего материальные функции ОС и заданную нагрузку. Из построенного решения краевой задачи следует, что эта функция времени является непосредственно измеряемой в эксперименте функцией. Это позволяет использовать полученное решение для определения материальных функций нелинейного определяющего соотношения Работнова по данным испытания толстой трубки.

Ключевые слова: вязкоупроугопластичность; физическая нелинейность; определяющее соотношение вязкоупругости Работнова; задача Ламе; поле напряжений; ползучесть; идентификация.

Введение

Данная статья продолжает цикл работ [1–7] по системному аналитическому исследованию физически нелинейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругопластичности вида

$$\varepsilon_{ij}(t) = \tfrac{3}{2}\Phi(L(t))\,\sigma(t)^{-1}[\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}] + \tfrac{1}{3}\Phi_0(L_0(t))\delta_{ij}, \qquad (1)$$

$$L(t) := \mathbf{\Pi}\sigma,\; L_0(t) := \mathbf{\Pi_0}\sigma_0, \quad \mathbf{\Pi}y = \int_0^t \Pi(t-\tau)\,dy(\tau),\; \mathbf{\Pi_0}y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau)\,dy(\tau), \qquad (2)$$

с произвольными материальными функциями (МФ) $\Pi(t)$, $\Phi(x)$, $\Pi_0(t)$, $\Phi_0(x)$ (Π и Π_0 – функции сдвиговой и объемной ползучести, Φ и Φ_0 – функции нелинейности). Его цель – выявление комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них; разработка способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). ОС (1) – один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [8–13]

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\,d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\,\varphi'(\varepsilon(\tau))d\varepsilon(\tau),\; t > 0, \qquad (3)$$

на сложное напряженное состояние, получающийся в предположении изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров и пренебрежения влиянием третьих инвариантов. ОС (1) описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и (малых) деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в произвольной точке тела (в предположении независимости объемной деформации $\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$). В (1) $\varepsilon = (\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij})^{0,5}$, $\sigma = (\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij})^{0,5}$ – интенсивности деформаций и напряжений (вторые инварианты девиаторов $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$ и $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$), напряжение и время предполагаются обезразмеренными, входные процессы $\boldsymbol{\sigma}(t)$ – кусочно-гладкими при $t \ge 0$.

Одноосный вариант ОС (3) был предложен Ю.Н. Работновым [8–13] для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\, d\sigma(\tau) = \mathbf{\Pi}\sigma, \qquad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\, d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \qquad t > 0, \tag{4}$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$. В (4) и (3) функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $R(t)$, связаны интегральным уравнением

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau)\, d\tau = t, \tag{5}$$

выражающим условие взаимной обратности операторов (4) (и (3)). В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости («QLV»), а его автором считается Я.Ч. Фанг (Y.C. Fung) [14–23]. В работах [8–13, 24–27] и др. ОС (3) прилагалось к описанию одномерного поведения стеклопластиков, графита, металлов и сплавов, композитов, а в [14–23] – связок, сухожилий и других биологических тканей. Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в статьях [2, 4–6].

Конкретная цель данной статьи – построение точного решения квазистатической краевой задачи, аналогичной классической задаче Ламе для полого цилиндра в теории упругости, но для цилиндра из физически нелинейного реономного материала, подчиняющегося определяющему соотношению вязкоупругости Работнова (1) с произвольными материальными функциями, и для произвольных, зависящих от времени давлений, заданных на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

1. Ограничения на материальные функции ОС Работнова

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция нелинейного оператора действия функции φ и линейного интегрального оператора $\mathbf{R}$ из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) (т. е. (1)), для любых возрастающих МФ Φ и Φ_0, имеет вид

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0 \varphi_0(\theta), \ \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \ s_{ij}(t) = \tfrac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1} e_{ij}(t), \tag{6}$$

где функции релаксации $R(t)$ и $R_0(t)$ связаны с Π и Π_0 интегральными уравнениями вида (5).

Из трех материальных функций φ, Π, R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимых МФ. На функции ползучести и релаксации в ОС (3) и (1) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости: $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0;\infty)$, функции Π и Π_0 – возрастающими и выпуклыми вверх [28–30], а R и R_0 – убывающими и выпуклыми вниз на $(0;\infty)$, $R(t)$ и $R_0(t)$ могут иметь интегрируемую особенность или δ-сингулярность в т. $t=0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ – дельта-функция). Из этих условий следует существование пределов $R(+\infty) = \inf R(t) \ge 0$, $R(0) = \sup R(t) > 0$ ($R(0) = +\infty$, если R не ограничена сверху) и $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \ge 0$ ($y(0) := y(0+)$ – обозначение предела функции $y(t)$ справа в т. $t=0$).

На МФ φ и φ_0 в ОС (3) и (6) и на МФ $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [5, 7]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на

$(0;\omega)$, $\omega>0$, а $\varphi_0(u)$ – на множестве $(\omega_-;0)\bigcup(0;\omega_+)$ (где $\omega_-\omega_+<0$), причем $\varphi(0+)=0$ и $\varphi_0(0+)=\varphi_0(0-)=0$ (иначе входному процессу $\varepsilon(t)\equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Из возрастания $\varphi(u)$ и $\varphi_0(u)$ следует существование и возрастание (и непрерывная дифференцируемость) обратных функций $\Phi(x)=\varphi^{-1}$, $x\in(0;X)$, $X:=\sup\varphi(u)$, и $\Phi_0(x)=\varphi_0^{-1}$, $x\in(\underline{x};\overline{x})$, где $\underline{x}=\inf\varphi_0(u)=\varphi_0(\omega_-+0)$, $\overline{x}=\sup\varphi_0(u)=\varphi_0(\omega_+-0)$, и обратимость ОС (1). Аналогично, обратимость ОС (1) следует из возрастания Φ и Φ_0. Величины $\overline{x}$, $\underline{x}$ и X, их конечность или бесконечность, – важные характеристики МФ, существенно влияющие на свойства теоретических кривых ОС (1) [1–7]. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии функции Φ_0 и φ_0 нечетны и $\underline{x}=-\overline{x}$, $\omega_-=-\omega_+$. Примеры семейств функций, которые можно (и удобно) использовать для задания МФ Φ, Φ_0 или φ, φ_0, приведены в [3–7].

В частности, для задания выпуклой вверх МФ φ и φ_0 с конечным $\overline{x}$ удобно использовать функции вида:

$$\varphi(u)=w\sum\nolimits_1^m\gamma_k\varphi_k(u)=w\sum\nolimits_1^m\gamma_k(1-e^{-\lambda_k u}),\ w^{-1}=\sum\nolimits_1^m\gamma_k\lambda_k$$

(множитель w введен для выполнения условия нормировки $\varphi'(0)=1$). При $\lambda_k>0$, $\gamma_k>0$ все ограничения на МФ φ выполнены, так как они выполнены для каждого слагаемого $\varphi_k(u)$ и сохраняются для комбинаций с положительными коэффициентами. Для задания выпуклой вниз МФ φ можно использовать суммы с положительными показателями экспоненты.

2. Постановка краевой задачи и вывод разрешающего уравнения

Рассмотрим задачу об определении напряжений и деформаций в толстостенной трубе из наследственного несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному ОС Работнова, под действием переменных внутреннего и внешнего давлений. Инерционными членами пренебрегаем, полагая, что давления меняются медленно (квазистатическая постановка). Будем использовать цилиндрическую систему координат. В силу несжимаемости материала девиатор тензора деформации совпадает с ним, а ОС Работнова (1) редуцируется к одномерному ОС $\varepsilon=\Phi(\mathbf{\Pi}\sigma)$ с двумя произвольными МФ (Φ и Π или φ и R), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию пропорциональности девиаторов:

$$s_{ij}(t)=\tfrac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t),\ \sigma=\mathbf{R}\varphi(\varepsilon). \quad (7)$$

Первое уравнение ОС (6) не используется, и среднее напряжение будет найдено из решения краевой задачи, как обычно бывает при использовании условия несжимаемости.

Пусть r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы ненагруженного цилиндра (при $t=0$), $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – заданные давления на внутренней и внешней поверхностях цилиндра при $t>0$, т. е. краевые условия имеют вид

$$\sigma_r|_{r_1}=-p_1(t),\ \sigma_r|_{r_2}=-p_2(t),\ \sigma_{r\theta}|_{r_1}=\sigma_{rz}|_{r_1}=0,\ \sigma_{r\theta}|_{r_2}=\sigma_{rz}|_{r_2}=0. \quad (8)$$

Задача осесимметрична, и потому в любой точке (r,θ,z) в любой момент времени все компоненты перемещений, деформаций и напряжений не зависят от угла θ и

$$\sigma_{r\theta}\equiv 0,\quad \sigma_{\theta z}\equiv 0,\quad u_\theta(t)\equiv 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_\theta(r,t)=r^{-1}(u_{\theta,\theta}+u_r)=u/r,\ \varepsilon_r(r,t)=u_{r,r}=\partial u/\partial r,\ \varepsilon_z(r,t)=u_{z,z}, \quad (10)$$

где введено обозначение $u:=u_r(r,t)$ для радиального перемещения.

Будем считать трубу бесконечно длинной (очень длинной) или конечной, но закрепленной на торцах так, что осевое перемещение $u_z=0$ и касательные напряжения на торцах отсутствуют: $\sigma_{z\theta}=0$ и $\sigma_{rz}=0$. Если труба бесконечно длинная, она находится в состоянии плоской деформации, все координатные линии цилиндрической системы координат не искривляются и, в силу наличия дополнительной группы симметрий (сдвигов вдоль оси z и отражений в плоскостях, перпендикулярных ей) u_r и σ_z, не зависят от z и справедливы равенства:

$$\sigma_{rz}\equiv 0\,,\ \varepsilon_{z\theta}\equiv 0\,,\ \varepsilon_{r\theta}\equiv 0\,,\ \varepsilon_{z}\equiv 0\,,\ u_z\equiv 0\,,\ \varepsilon_{rz}=\tfrac{1}{2}(u_{r,z}+u_{z,r})\equiv 0\,,\ \varepsilon_{\theta z}=\tfrac{1}{2}(u_{\theta,z}+r^{-1}u_{z,\theta})\equiv 0\,, \quad (11)$$

(помимо (9)). Если труба конечной длины, то в зависимости от характера граничных условий на торцах возможно наличие сдвиговых напряжений и деформаций вблизи торцов. Но если на торцах заданы указанные условия $u_z=0$, $\sigma_{z\theta}=0$ и $\sigma_{rz}=0$, то она находится в состоянии плоской деформации и выполняются равенства (11). Из (9) и (11) следует, что тензоры деформаций и напряжений диагональны: $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{diag}\{\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,0\}$, $\boldsymbol{\sigma}:=\mathbf{diag}\{\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z\}$, причем зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид: $u_r(r,t)$, $\varepsilon_r(r,t)$, $\varepsilon_\theta(r,t)$, $\sigma_r(r,t)$, $\sigma_\theta(r,t)$, $\sigma_z(t)$.

Система уравнений равновесия среды в цилиндрической системе координат

$$\sigma_{r,r}+r^{-1}\sigma_{r\theta,\theta}+\sigma_{rz,z}+r^{-1}(\sigma_r-\sigma_\theta)+F_r=0\,,$$

$$\sigma_{r\theta,r}+r^{-1}\sigma_{\theta,\theta}+\sigma_{\theta z,z}+2r^{-1}\sigma_{r\theta}+F_\theta=0\,,$$

$$\sigma_{rz,r}+r^{-1}\sigma_{\theta z,\theta}+\sigma_{z,z}+r^{-1}\sigma_{rz}+F_z=0\,,$$

в силу симметрий поля напряжения (9) и (11) эквивалентна лишь одному уравнению в проекции на радиус, принимающему вид

$$\sigma_{r,r}+r^{-1}(\sigma_r-\sigma_\theta)=0\,. \quad (12)$$

Второе уравнение выполнено тождественно, так как $\sigma_{r\theta}\equiv 0$, $\sigma_{\theta z}\equiv 0$, $\sigma_{\theta,\theta}=0$ (все эти свойства сохраняются и в задаче с осевой нагрузкой, равномерно распределенной по торцам). Третье уравнение принимает вид $\sigma_{rz,r}+r^{-1}\sigma_{rz}=0$ (так как $\sigma_{z,z}=0$), общее решение этого обыкновенного ДУ имеет вид $\sigma_{rz}=C(t,z)r^{-1}$, $r_1\le r\le r_2$, $t\ge 0$, но из нулевых краевых условий (8) для $\sigma_{rz}(r,z,t)$ при $r=r_1$ и $r=r_2$ получаем $C(t,z)\equiv 0$ и $\sigma_{rz}\equiv 0$.

Условие несжимаемости материала $\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=0$ в силу $\varepsilon_z\equiv 0$ принимает вид

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta=0\,. \quad (13)$$

Используя (10), получим обыкновенное ДУ $\partial u/\partial r+u/r=0$ для $u(r,t)$, откуда

$$u=C(t)r^{-1},\ r_1\le r\le r_2\,,\ t>0\,. \quad (14)$$

Произвольная функция $C(t)$ выражается через радиальное перемещение точек внутренней или внешней поверхности трубы: $C(t)=r_1u(r_1,t)=r_1u_1(t)$ или $C(t)=r_2u(r_2,t)=r_2u_2(t)$). Из (14) и (10) все ненулевые компоненты тензора деформации выражаются через одну неизвестную функцию $C(t)$:

$$\varepsilon_\theta(r,t)=u/r=C(t)r^{-2}\,,\ \varepsilon_r(r,t)=\partial u/\partial r=-C(t)r^{-2}\,. \quad (15)$$

Воспользуемся ОС Работнова (7), связывающим интенсивности напряжений и деформаций и компоненты девиаторов. Так как деформации сдвига отсутствуют (оси главные) и $\varepsilon_z\equiv 0$, то девиатор тензора деформации имеет вид $\mathbf{e}=\mathbf{diag}\{\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,0\}$, а интенсивность деформаций –

$$\varepsilon=\tfrac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2+\varepsilon_r^2+\varepsilon_\theta^2)]^{0,5}=\tfrac{2}{3}[\varepsilon_r^2+\varepsilon_\theta^2-\varepsilon_r\varepsilon_\theta]^{0,5}=\tfrac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|\,r^{-2} \quad (16)$$

(в зависимости от соотношения предысторий давлений $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$ возможен любой знак $C(t)$). Девиатор тензора напряжений в любой точке тоже диагонален в силу тензорной линейности ОС:

$$\mathbf{s}:=\mathbf{diag}\{\sigma_r-\sigma_0,\sigma_\theta-\sigma_0,\sigma_z-\sigma_0\}\,,$$

где $\sigma_0(r,t)=(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z)/3$ – среднее напряжение. Так как по (7) девиаторы пропорциональны, то из $e_z\equiv 0$ следует $\sigma_z-\sigma_0\equiv 0$ (при тех t, когда $\varepsilon(t)\ne 0$, т.е. $C(t)\ne 0$), т. е.

$$\sigma_z=\sigma_0\,,\text{ или } \sigma_z=(\sigma_r+\sigma_\theta)/2\,. \quad (17)$$

Тогда $|\sigma_r-\sigma_0|=|\sigma_\theta-\sigma_0|$, $|\sigma_r-\sigma_z|=|\sigma_\theta-\sigma_z|=0,5|\sigma_r-\sigma_\theta|$ и потому выражение для интенсивности напряжений упрощается:

$$\sigma=\tfrac{\sqrt{2}}{2}[(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2)]^{0,5}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}[(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+0,5(\sigma_r-\sigma_\theta)^2]^{0,5}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_r-\sigma_\theta|\,.$$

Из условия пропорциональности девиаторов (7)

$$\sigma_r-\sigma_0=\tfrac{2}{3}\varepsilon_r\sigma/\varepsilon\ ,\ \sigma_\theta-\sigma_0=\tfrac{2}{3}\varepsilon_\theta\,\sigma/\varepsilon\ ,$$

где по (15) и (16)

$$\varepsilon_r/\varepsilon=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}C(t)/|C(t)|=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sgn}C(t)\ ,\quad \varepsilon_\theta/\varepsilon=\tfrac{\sqrt{3}}{2}C(t)/|C(t)|=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sgn}C(t)\ .$$

Итак,

$$\sigma_r-\sigma_0=-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sgn}C(t)\sigma\ ,\quad \sigma_\theta-\sigma_0=\tfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sgn}C(t)\sigma\ , \tag{18}$$

где в силу (7) и (16) интенсивность напряжений равна

$$\sigma=\mathbf{R}\varphi(\varepsilon)=\mathbf{R}\varphi(\tfrac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|\,r^{-2})\ . \tag{19}$$

Уравнение равновесия в проекции на радиус (два других выполнены автоматически в силу симметрий поля напряжения (9)) имеет вид (12). Вычитая формулы (18) друг из друга, найдём $\sigma_r-\sigma_\theta=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\sigma$ и подставим это выражение в (12): $\sigma_{r,r}=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\sigma r^{-1}$, т. е.

$$\sigma_{r,r}=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\mathbf{R}[r^{-1}\varphi(\tfrac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|\,r^{-2})] \tag{20}$$

(так как умножение на функцию от r коммутирует с линейным наследственным оператором $\mathbf{R}$).

Проинтегрируем уравнение (20) от r_1 до r, пользуясь перестановочностью операторов интегрирования по r и по τ, и сделаем замену переменной $x=\tfrac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|\,\rho^{-2}$:

$$\sigma_r(r)-\sigma_r(r_1)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\mathbf{R}\Big[\int_{r_1}^{r}\rho^{-1}\varphi(\tfrac{2}{\sqrt{3}}|C|\,\rho^{-2})\,d\rho\Big]=-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\mathbf{R}\Big[\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}|C|r_1^{-2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}|C|r^{-2}}\varphi(x)x^{-1}dx\Big]\,.$$

Введём обозначения $\bar{r}:=r/r_1$, $q:=(r_1/r_2)^2\in(0;1)$, $y(t):=\tfrac{2}{\sqrt{3}}C(t)r_1^{-2}$ (в силу (16) $|y(t)|=\varepsilon(r_1)$ – интенсивность деформаций при $r=r_1$ и $|y(t)|=\varepsilon(r_2)/q$), и

$$F(s):=\int_0^s\varphi(x)x^{-1}dx\ ,\ s>0\ . \tag{21}$$

Тогда $C(t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1^2$ и $\sigma_r(\bar{r})+p_1=-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}y(t)\mathbf{R}\Big[\int_{|y(t)|}^{|y(t)|/\bar{r}^2}\varphi(x)x^{-1}dx\Big]$, т. е.

$$\sigma_r(\bar{r})=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}y(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|)-F(|y(t)|/\bar{r}^2)]\ ,\ \bar{r}\in[1,r_2/r_1]\ ,\ t\geq 0\ . \tag{22}$$

Если существует правая производная $\varphi'(0+0)$ или хотя бы $\varphi(x)=A|x|^\alpha+o(|x|^\alpha)$, $\alpha>0$, при $x\to 0+0$, то несобственный интеграл (21) (возможно, имеющий особенность в точке $x=0$) сходится, $F(s)$ непрерывна справа в точке $s=0$ и $F(0+)=0$ (а при $\alpha\geq 1$ еще и $F'(0+)=0$). Из возрастания $\varphi(x)$ и условия $\varphi(0)=0$ (тогда $\varphi(x)>0$) следует *возрастание* $F(s)$ на интервале $s>0$: $F'(s)=\varphi(s)s^{-1}>0$.

При $r=r_2$ в (22), используя второе краевое условие (8), получим интегральное уравнение для определения $y(t)$ (и всех компонент напряжений и деформаций):

$$p_1-p_2=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}y(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|)-F(q|y(t)|)]\ ,\ t>0\ .$$

В силу возрастания $F(s)$ всегда справедливо неравенство $F(|y(t)|)-F(q|y(t)|)>0$ (так как $q\in(0;1)$). Поскольку функция релаксации положительна, то в любой момент времени функция $f(t)=\mathbf{R}[F(|y(t)|)-F(q|y(t)|)]$ положительна и потому знак $\operatorname{sgn}y(t)$ совпадает с $z(t):=\operatorname{sgn}(p_1(t)-p_2(t))$. Таким образом,

$$p_1-p_2=\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|)-F(q|y(t)|)]\ ,\ \ q:=(r_1/r_2)^2\in(0;1)\ ,\ t>0\ . \tag{23}$$

Применяя к (23) обратный к $\mathbf{R}$ линейный оператор $\mathbf{\Pi}$, получим функциональное уравнение для функции $Y:=|y(t)|$:

$$F(|y(t)|)-F(q|y(t)|)=P(t)\ ,\quad P(t):=\sqrt{3}\mathbf{\Pi}[z(p_1-p_2)]=\sqrt{3}\mathbf{\Pi}\,|p_1-p_2|\ ,\ t>0\ . \tag{24}$$

Здесь $P(t)$ – известная функция времени, если заданы функция ползучести и нагрузка. Очевидно, уравнение (24) можно свести к дифференциальному уравнению (задаче Коши) для $y(t)$.

3. Выражения для полей деформаций и напряжений

После определения (в общем случае приближённого) $y(t)$ и $C(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1^2$ из уравнения (24) находятся поля перемещений, деформаций и напряжений по (14), (15) и (22):

$$u_r(r,t)=C(t)r^{-1}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1^2r^{-1}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1/\overline{r}\,,\quad u_\theta\equiv 0\,,\quad u_z\equiv 0\,; \tag{25}$$

$$\varepsilon_r(r,t)=-C(t)r^{-2}=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1^2r^{-2}=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)\overline{r}^{-2}\,, \tag{26}$$

$$\varepsilon_\theta(r,t)=-\varepsilon_r(r,t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)\overline{r}^{-2}\,, \tag{27}$$

$$\sigma_r(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|\,y(t)\,|)-F(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)]\,, \tag{28}$$

где $z(t):=\operatorname{sgn}(p_1(t)-p_2(t))$, $\overline{r}:=r/r_1\in[1,r_2/r_1]$. Интенсивности деформаций и напряжений:

$$\varepsilon(r,t)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}|\,C(t)\,|\,r^{-2}=|\,y(t)\,|\,r_1^2r^{-2}=|\,y(t)\,|/\overline{r}^2\,,\ \sigma(r,t)=\mathbf{R}\varphi(\varepsilon)=\mathbf{R}\varphi(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)\,. \tag{29}$$

Напряжения σ_θ и $\sigma_z=(\sigma_r+\sigma_\theta)/2$ можно выразить из уравнения равновесия (12), но проще использовать (18): $\sigma_\theta=\sigma_r+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\sigma=\sigma_r+\frac{2}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\varphi(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)$, т. е.

$$\sigma_\theta(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\big[F(|\,y(t)\,|)-F(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)\big]+\tfrac{2}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\varphi(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)\,,$$

$$\sigma_\theta(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\big[F(|\,y(t)\,|)-F(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)+2\varphi(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2\big]\,, \tag{30}$$

$$\sigma_z(r,t)=(\sigma_r+\sigma_\theta)/2=\sigma_r+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}C(t)\sigma=\sigma_r+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\varphi(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)\,,$$

т. е.

$$\sigma_z(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\big[F(|\,y(t)\,|)-F(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)+\varphi(|\,y(t)\,|/\overline{r}^2)\big] \tag{31}$$

В силу (17) среднее напряжение $\sigma_0=\sigma_z$ и $\sigma_2=\sigma_z=(\sigma_1+\sigma_3)/2$.

Можно доказать, что, если разность давлений $p_1(t)-p_2(t)$ положительна и нестрого возрастает, то функции $Y:=|\,y(t)\,|$ и $y(t)$ тоже возрастают (строго), и потому $u_r(r,t)$ и $\varepsilon_\theta(r,t)$ положительны и возрастают по времени, а деформация $\varepsilon_r(r,t)$ отрицательна и убывает (в силу формул (25)–(27)).

Существенно, что функция $y(t)$, полностью определяющая поля перемещений и деформаций в любой момент времени, может быть найдена не только в результате решения уравнения (24), но и является *непосредственно измеряемой в эксперименте функцией, поскольку* она пропорциональна относительному изменению внешнего радиуса трубы и кольцевой деформации на поверхности (см. формулы (25) и (27) при $r=r_2$). Это позволяет использовать полученное решение краевой задачи (25)–(31) для идентификации ОС (7).

Полученное общее решение краевой задачи при любых МФ позволяет решать задачи для многослойных (составных) труб из разных материалов, следующих ОС Работнова (с разными парами материальных функций), и определять контактные давления слоёв. Отметим также, что если положить $\Pi(t)=\mathrm{const}$, $\Pi_0(t)\equiv 0$, то ОС (1) вырождается в ОС для упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ $\Phi(x)$, т. е. приводит к теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина, а построенное в этой статье решение задачи для трубы превращается в классические решения [31–33].

Заключение

В статье построено точное решение квазистатической краевой задачи, аналогичной классической задаче Ламе для полого цилиндра в теории упругости, но для цилиндра из физически нелинейного несжимаемого реономного материала, подчиняющегося определяющему соотношению Работнова (1) с двумя произвольными материальными функциями, и для произвольных (медленно меняющихся) зависимостей давлений от времени, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражаются по формулам (25)–(31), (11) через одну функцию времени, которая находится в результате решения выведенного нелинейного функционального уравнения (24), содержащего материальные функции ОС и заданную нагрузку. Из построенного решения краевой задачи следует, что эта функция времени может быть найдена не только из уравнения (24), но и является непосредственно измеряемой в эксперименте функцией (она пропорциональна относительному изменению внешнего радиуса трубы и кольцевой деформации на поверхности). Это позволяет использовать полученное решение (25)–(31) для определения материальных функций нелинейного определяющего соотношения Работнова по данным испытания толстой трубки (если испытания показывают, что принятые при постановке задачи предположения достаточно хорошо выполняются для материала).

В последующих статьях планируется детально исследовать свойства напряженно-деформированного состояния (25)–(31) в случае задачи о ползучести толстой трубы из физически нелинейного наследственного материала под действием постоянных давлений, сравнить их со свойствами решения задачи в рамках линейной теории вязкоупругости, получить общее выражение для времени разрушения трубы (с использованием деформационного критерия разрушения и критериев, учитывающих историю деформирования, предложенных в [34]), вывести уравнение кривой длительной прочности, разработать методику идентификации ОС Работнова и построить решения аналогичных краевых задач в менее ограничительных предположениях: 1) с учетом инерционных членов в уравнениях равновесия (чтобы получить возможность моделировать виброползучесть при периодически меняющемся внутреннем давлении); 2) с заданием произвольной осевой силы (а не нулевого осевого перемещения) на торцах для описания испытаний образца на совместное действие давления и заданной продольной силы; 3) отказаться в постановке задачи от постулата несжимаемости материала, заменив его на условие постоянства коэффициента Пуассона $\Pi_0(t) = c\Pi(t)$ или на постулат об упругом изменении объёма (когда $\Pi_0 = \text{const} = 1/K$, $\Phi_0(x) = x$ в ОС (1) и $\sigma_0 = K\varepsilon_0$) [5, 7, 30]; 4) построить решения этих задач для составных (многослойных) труб с разными сочетаниями вязкоупругих свойств слоев и цилиндрических баллонов с полусферическими «торцами» под давлением (ползучесть и т. п.).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_а).

Литература

1. Хохлов, А.В. Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти / А.В. Хохлов // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.

2. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А.В. Хохлов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – № 3(72). – С. 93–123.

3. Хохлов, А.В. О способности нелинейного определяющего соотношения Работнова для наследственных материалов моделировать диаграммы деформирования с падающим участком / А.В. Хохлов // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80, № 4. – С. 477–493.

4. Хохлов, А.В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией ramp-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова / А.В. Хохлов // Механика композитных материалов. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 687–708.

5. Хохлов, А.В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова / А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 407–436.

6. Хохлов, А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 2. – С. 29–47.

7. Хохлов, А.В. Свойства кривых объемной, осевой и поперечной ползучести при одноосном растяжении, порождаемых нелинейным соотношением вязкоупругости Работнова / А.В. Хохлов // Проблемы прочности и пластичности. – 2019. – Т. 81, № 2. – С. 146–164. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-146-164

8. Работнов, Ю.Н. Равновесие упругой среды с последействием / Ю.Н. Работнов // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.

9. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

10. Дергунов, Н.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории / Н.Н. Дергунов, Л.Х. Паперник, Ю.Н. Работнов // ПМТФ. – 1971. – № 2. – С. 76–82.

11. Работнов, Ю.Н. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах / Ю.Н. Работнов, Л.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 1. – С. 74–87.

12. Работнов, Ю.Н. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии / Ю.Н. Работнов, Л.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1973. – № 5. – С. 779–785.

13. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

14. Fung, Y.C. Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation / Y.C. Fung // Biomechanics: Its Foundations and Objectives (Eds. Y.C. Fung, N. Perrone, and M. Anliker): сб. науч. тр. – Prentice Hall, New Jersey, 1972. – P. 181–208.

15. Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues / Y.C. Fung. – N.-Y.: Springer, 1993. – 568 p.

16. Linear and Quasi-Linear Viscoelastic Characterization of Ankle Ligaments / J.R. Funk, G.W. Hall, J.R. Crandall, W.D. Pilkey // Journal of Biomechanical Engineering. – 2000. – Vol. 122, Iss. 1. – pp. 15–22.

17. Sarver, J.J. Methods for Quasi-Linear Viscoelastic Modeling of Soft Tissue: Application to Incremental Stress-Relaxation Experiments / J.J. Sarver, P.S. Robinson, D.M. Elliott // Journal of Biomechanical Engineering. – 2003. – Vol. 125, Iss. 5. – P. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247

18. Abramowitch, S.D. An Improved Method to Analyze the Stress Relaxation of Ligaments Following a Finite Ramp Time Based on the Quasi-Linear Viscoelastic Theory / S.D. Abramowitch, S.L.-Y. Woo // Journal of Biomechanical Engineering. – 2004. – Vol. 126, Iss. 1. – P. 92–97.

19. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling / A. Nekouzadeh, K.M. Pryse, E.L. Elson, G.M. Genin // Journal of Biomechanics. – 2007. – Vol. 40, Iss. 14. – P. 3070–3078.

20. DeFrate, L.E. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model / L.E. DeFrate, G. Li // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2007. – Vol. 6, Iss. 4. – P. 245–251.

21. Duenwald, S.E. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment / S.E. Duenwald, R. Vanderby Jr, R.S. Lakes // Acta Mechanica. – 2009. – Vol. 205. – P. 23–33.

22. Lakes, R.S. Viscoelastic Materials / R.S. Lakes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.

23. De Pascalis, R. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model / R. De Pascalis, I.D. Abrahams, W.J. Parnell // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2014. – Vol. 470, Iss. 2166. – 20140058.

24. Ломакин, В.А. Моделирование процесса деформации нелинейных вязко-упругих сред / В.А. Ломакин, М.А. Колтунов // Механика полимеров. – 1967. – № 2. – С. 221–227.

25. Суворова, Ю.В.Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния / Ю.В. Суворова, С.И. Алексеева // Механика композитных материалов. – 1993. – № 5. – С. 602–607.

26. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях / Ю.В. Суворова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 174–181.

27. Алексеева, С.И. Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями / С.И. Алексеева, М.А. Фроня, И.В. Викторова // Композиты и наноструктуры. – 2011. – № 2. – С. 28–39.

28. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности / А.В. Хохлов // Вестник Самар-

ского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 326–361.

29. Хохлов, А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики её идентификации / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 3. – С. 81–104.

30. Хохлов, А.В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления / А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Vol. 25, no. 2. – С. 259–280.

31. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.

32. Ильюшин, А.А. Упруго-пластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с.

33. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.

34. Хохлов, А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 121–135.

Поступила в редакцию 7 октября 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 1, pp. 44–54

DOI: 10.14529/mmph200106

EXACT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR STRAIN AND STRESS FIELDS IN A THICK TUBE MADE OF PHYSICALLY NON-LINEAR ELASTO-VISCOPLASTIC MATERIAL UNDER GIVEN INTERNAL AND EXTERNAL PRESSURES

A.V. Khokhlov
Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

We construct the analytic solution of the quasi-static boundary value problem for a hollow cylinder (a thick tube) under given pressure similar to the Lame problem in the elasticity theory but for a cylinder made of physically non-linear elasto-viscoplastic material governed by the Rabotnov constitutive equation with an arbitrary material functions. We assume that pressure values preset on an internal and external surfaces of the thick tube depend on time but change slowly enough to neglect inertia terms in the equilibrium equations. We also suppose that a material is homogeneous, isotropic and incompressible and a plain strain state is realized, i. e. the tube is long enough or zero axial displacements are given on the edge cross sections of the tube. We derive explicit closed form expressions for displacement, strain and stress fields via the unknown function of time and obtain functional equation to determine this function implying radii of the tube, pressure values dependence on time and material functions of the Rabotnov constitutive equation are given. It follows from the exact solution of the boundary value problem that this unknown function of time can be simply measured in pressure tests of tubular specimen. This observation allows to use the solution constructed for identification of the Rabotnov constitutive equation.

Keywords: elastoviscoplasticity; physical non-linearity; the Rabotnov constitutive equation; the Lame problem; stress field; creep; identification.

References

1. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2017, Vol. 72, no. 5, pp. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016

2. Khokhlov A.V. Analysis of Creep Curves General Properties under Step Loading Generated by the Rabotnov Nonlinear Relation for Viscoelastic Plastic Materials. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no. 3(72), pp. 93–123. (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123

3. Khokhlov A.V. O sposobnosti nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya rabotnova dlya nasledstvennykh materialov modelirovat' diagrammy deformirovaniya s padayushchim uchastkom (On the Ability of the Rabotnov Non-linear Relation for Hereditary Materials to Simulate Stress-strain Curves with a Decreasing Segment). *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2018, Vol. 80, no. 4, pp. 477–493. (in Russ.). DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-477-493.

4. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, Vol. 54, Iss. 4, pp. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1

5. Khokhlov A.V. Simulation of Hydrostatic Pressure Influence on Creep Curves and Poisson's Ratio of Rheonomic Materials under Tension using the Rabotnov Non-Linear Hereditary Relation. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 407–436. (in Russ.). DOI: 10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407_436.07

6. Khokhlov A.V. Svoystva semeystva diagramm deformirovaniya, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Yu.N. Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov (Properties of Stress-strain Curves Family Generated by the Rabotnov Non-linear Relation for Viscoelastic Materials). *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 2, pp. 29–47. DOI: 10.1134/S0572329919020077

7. Khokhlov A.V. Svoystva krivykh ob"emnoy, osevoy i poperechnoy polzuchesti pri odnoosnom rastyazhenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem vyazkouprugosti Rabotnova (General Properties of the Creep Curves for Volumetric, Axial and Lateral Strain Generated by the Rabotnov Non-linear Viscoelasticity Relation under Uni-axial Loadings). *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2019, Vol. 81, no. 2, pp. 146–164. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-146-164

8. Rabotnov Yu.N. Ravnovesie uprugoy sredy s posledeystviem (Equilibrium of Elastic Medium with Heredity). *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1948, Vol. 12, no. 1, pp. 53–62. (in Russ.).

9. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsiy* (Creep Problems in Structural Members), Moscow, Nauka Publ., 1966, 752 p. (in Russ.).

10. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analysis of behavior of graphite on the basis of nonlinear heredity theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, Vol. 12, no. 2, pp. 235–240. DOI: 10.1007/BF00850695

11. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev Y.I. Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric materials. *Polimer mechanics*, 1971, Vol. 7, no. 1, pp. 63–73. DOI: 10.1007/BF00856616

12. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E. I. Description of creep of composition materials under tension and compression. *Polymer Mechanics*, 1973, Vol. 9, pp. 690–695. DOI: 10.1007/BF00856259

13. Rabotnov Yu.N. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publishers, 1980, 387 p.

14. Fung, Y.C. Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation. In "*Biomechanics: Its Foundations and Objectives*" (Eds. Y.C. Fung, N. Perrone, and M. Anliker). Prentice Hall, New Jersey, 1972, pp. 181–208.

15. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. N.-Y.: Springer, 1993, 568 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2257-4

16. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and Quasi-Linear Viscoelastic Characterization of Ankle Ligaments. *Journal of Biomechanical Engineering*. – 2000. – Vol. 122, Iss. 1. – pp. 15–22. DOI: 10.1115/1.429623

17. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for Quasi-Linear Viscoelastic Modeling of Soft Tissue: Application to Incremental Stress-Relaxation Experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2003, Vol. 125, Iss. 5, pp. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247

18. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An Improved Method to Analyze the Stress Relaxation of Ligaments Following a Finite Ramp Time Based on the Quasi-Linear Viscoelastic Theory. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2004, Vol. 126, Iss. 1, pp. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528

19. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanics*, 2007, Vol. 40, Iss. 14, pp. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019

20. DeFrate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2007, Vol. 6, Iss. 4, pp. 245–251. DOI: 10.1007/s10237-006-0056-8

21. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive Equations for Ligament and other Soft Tissue: Evaluation by Experiment. *Acta Mechanica*, 2009, Vol. 205, pp. 23–33. DOI: 10.1007/s00707-009-0161-8

22. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 462 p.

23. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2014, Vol. 470, Iss. 2166. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058

24. Lomakin V.A., Koltunov M.A. Simulation of the deformation processes of nonlinear viscoelastic media. *Polymer Mechanics*, 1967, Vol. 3., Iss. 2, pp. 147–150. DOI: 10.1007/BF00858852

25. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nonlinear model of an isotropic hereditary medium in state of complex stress. *Mech Compos Mater.*, 1994, Vol. 29, Iss. 5, pp. 443–447. DOI: 10.1007/BF00611945

26. Suvorova Yu.V. Yu.N. Rabotnov's nonlinear hereditary-type equation and its applications. *Mechanics of Solids*, 2004, Vol. 39, no. 1, pp. 132–138.

27. Alexeeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analysis of viscoelastic properties of polymer based composites with carbon nanofillers. *Composites and nanostructures*, 2011, no. 2, pp. 28–39.

28. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriey nasledstvennosti (Analysis of Creep Curves Produced by the Linear Heredity Theory under Cyclic Stepwise Loadings). *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2017, Vol. 21, no. 2, pp. 326–361. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1533

29. Khokhlov A.V. Two-Sided Estimates for the Relaxation Function of the Linear Theory of Heredity via the Relaxation Curves during the Ramp-Deformation and the Methodology of Identification. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, no. 3, pp. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105

30. Khokhlov A.V. Applicability Indicators of the Linear Viscoelasticity Theory using Creep Curves under Tensile Load Combined with Constant Hydrostatic Pressure. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2019, Vol. 25, no. 2, pp. 259–280. (in Russ.). DOI: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09

31. Nadai A.L. *Theory of flow and fracture of solids. Vol. 1*. New York, McGraw-Hill, 1950, 572 p.

32. Il'yushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugo-plasticheskie deformatsii polykh tsilindrov* (Elastic-plastic Deformations of Hollow Cylinders). Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1960, 227 p. (in Russ.).

33. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* (Applied Theory of Plasticity and Creep). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 400 p. (in Russ.).

34. Khokhlov A.V. Fracture criteria under creep with strain history taken into account, and long-term strength modeling. *Mechanics of Solids*, 2009, Vol. 44, no. 4, pp. 596–607. DOI: 10.3103/S0025654409040104

Received October 7, 2019