УДК 517.956.223+517.575 DOI: 10.14529/mmph200202

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА $\mathcal{N}_2$ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: karachik@susu.ru

Рассмотрен класс задач типа Неймана, зависящий от натурального параметра *k*, для полигармонического уравнения в единичном шаре. Задачи этого класса обобщают как известную задачу Дирихле, так и задачу Неймана. В ряде работ для класса таких задач было найдено множество необходимых условий разрешимости этой задачи и было выдвинуто предположение, что наиболее полный вариант найденных необходимых условий является также и набором достаточных условий разрешимости задачи. Для задачи $\mathcal{N}_1$ этот факт был известен. В настоящей работе для задачи $\mathcal{N}_2$, для однородного m-гармонического уравнения в единичном шаре, доказывается предположение о совпадении найденного ранее множества необходимых условий с достаточными условиями разрешимости этой задачи. Сначала с помощью замены переменных задача $\mathcal{N}_2$ сводится к более простой задаче Дирихле $\mathcal{N}_0$, решение которой считается известным. Затем находятся условия, при которых сделанная замена переменных обратима. Найденные здесь условия связаны с наличием у решения задачи Дирихле членов первого порядка малости в ее разложении в окрестности нуля. Затем используются ранее полученные результаты о связи значения m-гармонической в единичном шаре функции в центре шара со значениями нормальных производных этой функции на границе шара. Полученные условия разрешимости преобразуются к условиям, связанным со значениями интегралов по сфере от полиномов от нормальных производных искомого решения на единичной сфере, коэффициенты которых являются элементами арифметического треугольника Неймана. Найденные условия совпадают с полученными ранее необходимыми условиями разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$.

Ключевые слова: задача типа Неймана; полигармоническое уравнение; условия разрешимости.

Введение. Пусть $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, а $\partial S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера, где $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$. В работе [1] были найдены необходимые условия разрешимости следующего класса краевых задач типа Неймана $\mathcal{N}_k$, зависящего от параметра $k\in\mathbb{N}_0$ для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u=f(x),\quad x\in S; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k}\Big|_{\partial S}=\varphi_1(x),\frac{\partial^{k+1}u}{\partial\nu^{k+1}}\Big|_{\partial S}=\varphi_2(x),\ldots,\frac{\partial^{k+m-1}u}{\partial\nu^{k+m-1}}\Big|_{\partial S}=\varphi_m(x),\ x\in\partial S, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, $m\in\mathbb{N}$. Класс задач $\mathcal{N}_k$ является частным случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [2]. Задача $\mathcal{N}_0$ является задачей Дирихле, которая, безусловно разрешима, а задача $\mathcal{N}_1$ совпадает с задачей Неймана [3, 4]. В работе [5] А.В. Бицадзе выписал необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_1$ при $m=1,2$ и показал, что она решается в квадратурах.

Исследования разрешимости некоторых постановок задач типа Неймана в единичном шаре, кроме перечисленных выше работ, можно найти также для бигармонического уравнения (в частности задачи $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$) в работах [6–11], а для полигармонического уравнения в работах [12, 13]. В работе [14] для краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными в граничных условиях получено достаточное условие фредгольмовости этих задач и приведена формула их индекса. В [15] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения при полиномиальных данных и приведены формулы, позволяющие легко строить полиномиальные решения задачи.

Задача $\mathcal{N}_2$. Исследуем частный случай задачи (1)–(2) – задачу $\mathcal{N}_2$ для однородного полигармонического уравнения, которую можно переписать в виде

$$\Delta^m u = 0,\ x \in S;\quad \Lambda^{[2]}u\,|_{\partial S} = \varphi_1(x), \ldots, \Lambda^{[m+1]}u\,|_{\partial S} = \varphi_m(x),\ x \in \partial S\,, \tag{3}$$

где $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $t^{[m]} = t(t-1)\ \ldots (t-m+1)$ – m-я факториальная степень t, причем $t^{[0]} = 1$, и справедливо равенство $\Lambda^{[i]}u = \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}$ на ∂S. Рассмотрим m-гармоническую в S функцию $v = \Lambda^{[2]}u$. Относительно этой функции получим следующую задачу:

$$\Delta^m v = 0,\quad x \in S,\ v\,|_{\partial S} = \varphi_1(x), (\Lambda-2)v\,|_{\partial S} = \varphi_2(x), \ldots, (\Lambda-2)^{[m-1]}v\,|_{\partial S} = \varphi_m(x),\ x \in \partial S,$$

приводящуюся к задаче Дирихле, которая безусловно разрешима, и решение которой будем считать известным и таким, что $v \in C^{m-1}(\bar{S})$.

Рассмотрим уравнение $v = \Lambda^{[2]}u$ относительно функции $u(x)$ в m-гармонических в S функциях. Докажем, что это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда m-гармоническая в S функция $v(x)$ в своем разложении в окрестности нуля не имеет членов нулевого и первого порядка малости, а значит задача $\mathcal{N}_2$ разрешима. Действительно, если уравнение $v = \Lambda^{[2]}u$ разрешимо, то раскладывая функции $u(x)$ и $v(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$ и $v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$, учитывая единственность этого разложения и возможность почленного дифференцирования ряда для однородных многочленов $u_i(x)$ и $v_i(x)$ степени i получаем равенство $v_i(x) = \Lambda^{[2]}u_i(x)$. Значит, так как $\Lambda^{[2]}u_i(x) = 0$ при $i = 0{,}1$, то получаем необходимость условий $v_0(x) = v_1(x) \equiv 0$. Достаточность этих условий следует из формулы

$$u(x) = -\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t} + \int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t^2} + c_0(x) + c_1(x),$$

где $c_i(x)$ – произвольные однородные полиномы степени i. Правая часть этой формулы корректна, поскольку $v(x) = O(|x|^2)$, $|x| \to 0$, а значит, несобственные интегралы сходятся. Проверим, что $\Lambda^{[2]}u = v$. Действительно, так как

$$\Lambda v(tx) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} v(tx) = t\sum_{i=1}^{n} x_i v_{x_i}(tx) = tD_t v(tx),$$

и $\Lambda^{[2]}c_i(x) = 0$, то будем иметь

$$\Lambda^{[2]}u = -(\Lambda-1)\int_0^1 D_t v(tx)\,dt + \Lambda\int_0^1 \Big(\frac{1}{t}D_t v(tx) - \frac{1}{t^2}v(tx)\Big)dt =$$

$$= -(\Lambda-1)(v(x)-v(0)) + \Lambda\Big(\frac{1}{t}v(tx)\,\Big|_0^1 + \int_0^1 \Big(\frac{1}{t^2}v(tx) - \frac{1}{t^2}v(tx)\Big)dt\Big) =$$

$$= -(\Lambda-1)v(x) + \Lambda v(x) = v(x).$$

Поэтому при условиях $v_0(x) = v_1(x) \equiv 0$ m-гармоническая в S функция $u(x)$ существует и для нее выполнены граничные условия (3). Что и требовалось доказать.

Вспомогательные утверждения. В работе [16] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой m-гармонической в S функции $v \in C^{m-1}(\bar{S})$ верно равенство

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \left(h_0^{(m-1)} + h_1^{(m-1)} \Lambda + \ldots + h_{m-1}^{(m-1)} \Lambda^{[m-1]} \right) v \, ds_x,$$

где числа $h_i^{(m-1)}$ – коэффициенты многочлена $H_{m-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)} \lambda^i$ (считаем $H_0 = 1$), такого что

$$H_{[m-1]}(\lambda) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} (\lambda - 2) \ldots (\lambda - 2m + 2). \quad . \tag{4}$$

Следует заметить, что если рассмотреть дискретную производную многочлена $P(\lambda)$ в виде $P^{(1)}(\lambda) = P(\lambda+1) - P(\lambda)$, то из (4) будем иметь

$$h_i^{(m-1)} = \frac{1}{i!} \left(H_{[m-1]} \right)^{(i)} (0). \tag{5}$$

Из теоремы 1 вытекает, что для функции $w(x) = \Lambda u(x)$, при m-гармонической в S функции $u(x)$, верна формула

$$w(0) = \frac{1}{\omega_n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \int_{\partial S} \sum_{i=1}^{m} p_i^{(m)} \Lambda^{[i]} u \, ds_x,$$

где числа $p_i^{(k)}$ находятся из равенств

$$p_i^{(k)} = (-1)^{k-i} \binom{2k-i-1}{i-1} \frac{(2k-2i+1)!!}{2k-2i+1}. \tag{6}$$

Эти числа составляют целочисленный треугольник Неймана $\mathbb{P}$ [1]

$$\mathbb{P} = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & -1 & & 1 & \\ 3 & & -3 & & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Преобразуем равенство $v(0) = \Lambda^{[2]} u(0)$ к аналогичному виду. Для факториальных полиномов $P_{[k]}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{(k)} \lambda^{[i]}$, соответствующих $P_k(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^{k} p_i^{(k)} \lambda^i$, верно представление [17]

$$P_{[k]}(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^{k} p_i^{(k)} \lambda^{[i]} = (\lambda, -2)_k \equiv \lambda(\lambda-2)\ldots(\lambda-2k+2), \tag{7}$$

где $(a,b)_l = a(a+b) \cdots (a+(l-1)b)$ – обобщенный символом Похгаммера.

Лемма 1. При $k, s \in \mathbb{N}$ справедливо следующее равенство

$$\lambda^{[k]} \lambda^{[s]} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \lambda^{[k+i]} k^{[s-i]}.$$

Доказательство. Проведем индукцию по s. При $s = 1$ лемма верна

$$\lambda^{[k]} \lambda^{[1]} = \lambda^{[k]} (\lambda - k + k) = k \lambda^{[k]} + \lambda^{[k+1]}.$$

Пусть лемма верна при некотором целом $s \geq 1$. Тогда

$$\lambda^{[k]} \lambda^{[s+1]} = (\lambda - s) \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \lambda^{[k+i]} k^{[s-i]} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} k^{[s-i]} \Big(\lambda^{[k+i+1]} +$$

$$+ (k+i-s) \lambda^{[k+i]} \Big) = \sum_{i=1}^{s+1} \binom{s}{i-1} k^{[s-i+1]} \lambda^{[k+i]} + \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} k^{[s-i+1]} \lambda^{[k+i]} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s+1} \left(\binom{s}{i-1} + \binom{s}{i} \right) k^{[s+1-i]} \lambda^{[k+i]} = \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} \lambda^{[k+i]} k^{[s+1-i]}.$$

Шаг индукции доказан, а значит, лемма верна.

Замечание 2. Если в формуле из леммы 1 заменить индекс суммирования $i \to s-i$, то будем иметь

$$\lambda^{[k]}\lambda^{[s]} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \lambda^{[k+s-i]} k^{[i]}.$$

Первое условие разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$**.** В силу леммы 1 при $s=2$ имеем $\lambda^{[k]}\lambda^{[2]} = k^{[2]}\lambda^{[k]} + 2k\lambda^{[k+1]} + \lambda^{[k+2]}$ и, значит, по теореме 1 можно записать

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)}\Lambda^{[i]}v(x)\,ds_x = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)}\Lambda^{[i]}\Lambda^{[2]}u(x)\,ds_x =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)}\left(\Lambda^{[i+2]} + 2i\Lambda^{[i+1]} + i^{[2]}\Lambda^{[i]}\right)u(x)\,ds_x =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\left(\sum_{i=2}^{m+1} h_{i-2}^{(m-1)} + 2\sum_{i=2}^{m}(i-1)h_{i-1}^{(m-1)} + \sum_{i=2}^{m-1} i(i-1)h_i^{(m-1)}\right)\Lambda^{[i]}u(x)\,ds_x.$$

Если добавить нулевые члены $h_m^{(m-1)}$ во вторую сумму и нулевые члены $h_m^{(m-1)}$ и $h_{m+1}^{(m-1)}$ в третью, то будем иметь

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=2}^{m+1}\left(h_{i-2}^{(m-1)} + 2(i-1)h_{i-1}^{(m-1)} + i(i-1)h_i^{(m-1)}\right)\Lambda^{[i]}u(x)\,ds_x.$$

Используя формулу (5) найдем

$$h_{i-2}^{(m-1)} + 2(i-1)h_{i-1}^{(m-1)} + i(i-1)h_i^{(m-1)} = \frac{1}{(i-2)!}\Big(H_{[m-1]}(\lambda) +$$

$$+2\left(H_{[m-1]}\right)^{(1)}(\lambda) + \left(H_{[m-1]}\right)^{(2)}(\lambda)\Big)^{(i-2)}(0) = \frac{1}{(i-2)!}\times$$

$$\times\left(H_{[m-1]}(\lambda) + \left(H_{[m-1]}\right)^{(1)}(\lambda) + \left(H_{[m-1]}\right)^{(1)}(\lambda+1)\right)^{(i-2)}(0) = \frac{1}{(i-2)!}\times$$

$$\times\left(H_{[m-1]}(\lambda+1) + \left(H_{[m-1]}\right)^{(1)}(\lambda+1)\right)^{(i-2)}(0) = \frac{1}{(i-2)!}\left(H_{[m-1]}(\lambda+2)\right)^{(i-2)}(0).$$

Отсюда находим

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=2}^{m+1}\frac{1}{(i-2)!}\left(H_{[m-1]}(\lambda+2)\right)^{(i-2)}(0)\Lambda^{[i]}u(x)\,ds_x =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\left(H_{[m-1]}(\lambda+2)\right)^{(i)}(0)\Lambda^{[i+2]}u(x)\,ds_x.$$

Из (4) с учетом (7) получаем $H_{[m-1]}(\lambda+2) = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!}P_{[m-1]}(\lambda)$, а значит

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}P_{[m-1]}^{(i)}(0)\Lambda^{[i+2]}u(x)\,ds_x =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{m-1} p_i^{(m-1)}\Lambda^{[i+2]}u(x)\,ds_x = \frac{1}{\omega_n}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!}\int_{\partial S}\sum_{i=1}^{m-1} p_i^{(m-1)}\varphi_{i+1}(x)\,ds_x,$$

где было учтено, что $p_0^{(m-1)} = 0$, а коэффициенты $p_i^{(m-1)}$ находятся из (6). Значит, первое достаточное условие $v(0)=0$ разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$ приводится к виду

$$\int_{\partial S}\left(p_1^{(m-1)}\varphi_2(x) + \ldots + p_{m-1}^{(m-1)}\varphi_m(x)\right)ds_x = 0. \tag{8}$$

Второе условие разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$**.** Выясним, что означает условие $v_1(x) \equiv 0$ в терминах граничных функций задачи (3). Воспользуемся теоремой 6 из [18].

Теорема 2. Пусть $w(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция, тогда имеет место равенство

$$\int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)w(\xi)\,ds_\xi = g_\nu G_{(\nu)}(D)w(x)_{|x=0},$$

где $\{G_{(\nu)}(x): \nu\in\mathbb{N}_0^n, \nu_1\ge\ldots\ge\nu_n, \nu_n=0,1\}$ – полная система гармонических полиномов [18, теорема 2], а $g_\nu>0$ – некоторая константа.

Используя эту теорему, в примере 4 из [18], была доказана следующая формула

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i w(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n}w_{x_i}(0).$$

Пусть $w_1(x)$ – однородный полином первой степени в разложении $w(x)$ в окрестности нуля, тогда в силу формулы выше для гармонической в S и непрерывной в $\bar{S}$ функции $w(x)$ верно утверждение

$$w_1(x)\equiv 0 \Leftrightarrow \forall H_1(x)\int_{\partial S} H_1(\xi)w(\xi)\,ds_\xi = 0,$$

где $H_1(x)$ – произвольный однородный гармонический полином первой степени. Заметим, что для m-гармонической ($m>1$) в S функции $v(x)$ это не так, например, для функции $v(x)=x_i(1-|x|^2)$. Это так, поскольку под интегралом суммируются однородные составляющие 1-го порядка всех гармонических компонент из разложения Альманси функции $v(x)$.

Продолжением полученного утверждения на m-гармонические функции является следующая лемма.

Лемма 2. Пусть m-гармоническая в S функция $v\in C^{m-1}(\bar{S})$, тогда

$$v_1(x)\equiv 0 \Leftrightarrow \forall H_1(x)\int_{\partial S} H_1(\xi)(\Lambda-3)\ldots(\Lambda-2m+1)v(\xi)\,ds_\xi = 0,$$

где $H_1(x)$ – однородный гармонический полином степени 1.

Доказательство. В силу следующего свойства $(\Lambda+2m)\Delta^m u = \Delta^m\Lambda u$ оператора Λ функция

$$\hat{v}(x) = (\Lambda-3)\ldots(\Lambda-2m+1)v(x)$$

является m-гармонической в S и непрерывной в $\bar{S}$ и пусть ее разложение Альманси в S имеет вид

$$\hat{v}(x) = \hat{v}^{(0)}(x) + |x|^2\,\hat{v}^{(1)}(x) + \ldots + |x|^{2m-2}\,\hat{v}^{(m-1)}(x),$$

где $\hat{v}^{(i)}(x)$ – гармонические в S функции. Это возможно в силу звездности области S. Рассмотрим гармоническую в S функцию $w(x) = \hat{v}^{(0)}(x) + \hat{v}^{(1)}(x) + \ldots + \hat{v}^{(m-1)}(x)$.

Докажем, что $\hat{v}(x)$ обладает свойствами

$$\hat{v}_1(x) = (-1)^{m-1}(2m-2)!!\,v_1(x), \quad w_1(x) = \hat{v}_1(x),$$

где $w_1(x)$ и $\hat{v}_1(x)$ – однородные полиномы 1-го порядка в разложении $w(x)$ и $\hat{v}(x)$ в окрестности нуля. Если это так, то

$$v_1(x)\equiv 0 \Leftrightarrow \hat{v}_1(x)\equiv 0 \Leftrightarrow w_1(x)\equiv 0 \Leftrightarrow \forall H_1(x)\int_{\partial S} H_1(\xi)w(\xi)\,ds_\xi = 0$$

и поскольку

$$\int_{\partial S} H_1(\xi)w(\xi)\,ds_\xi = \int_{\partial S} H_1(\xi)\hat{v}(\xi)\,ds_\xi,$$

то утверждение леммы будет доказано.

Нетрудно видеть, что поскольку $\Lambda|x|^{2i}\,v^{(i)}(x) = |x|^{2i}\,(\Lambda+2i)v^{(i)}(x)$, то можно записать

$$\sum_{i=0}^{m-1}|x|^{2i}\,\hat{v}^{(i)}(x) = \hat{v}(x) = (\Lambda-3)\ldots(\Lambda-2m+1)\sum_{i=0}^{m-1}|x|^{2i}\,v^{(i)}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}|x|^{2i}\,(\Lambda-3+2i)\ldots(\Lambda-2m+1+2i)v^{(i)}(x)$$

и, значит, в силу единственности разложения функции в формулу Альманси имеем

$$\hat{v}^{(i)}(x) = (\Lambda - 3 + 2i)\ldots(\Lambda - 2m + 1 + 2i)v^{(i)}(x).$$

Поскольку $\hat{v}_1(x) = \hat{v}_1^{(0)}(x)$ и $v_1(x) = v_1^{(0)}(x)$, то отсюда следует

$$\hat{v}_1(x) = \hat{v}_1^{(0)}(x) = (\Lambda - 3)\ldots(\Lambda - 2m + 1)v_1^{(0)}(x) = (-2)\ldots(-2m + 2)v_1(x)$$

и значит $v_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \hat{v}_1(x) \equiv 0$. Кроме того, из этой формулы будем также иметь

$$w_1(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \hat{v}_1^{(i)}(x) = \hat{v}_1^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \hat{v}_1^{(i)}(x) = \hat{v}_1(x) + \sum_{i=1}^{m-1} (2i - 2)\ldots(2i - 2m + 2)v_1^{(i)}(x) = \hat{v}_1(x)$$

и значит $\hat{v}_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w_1(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

Преобразуем условие ортогональности из леммы 2. Пусть $H_1(x)$ – однородный гармонический полином первой степени. С помощью (7), учитывая что $v = \Lambda^{[2]}u$, запишем

$$\int_{\partial S} H_1(\xi)(\Lambda - 3)\ldots(\Lambda - 2m + 1)v(\xi)\,ds_\xi = \int_{\partial S} H_1(\xi)\prod_{j=1}^{m}(\Lambda - 2j + 1)\cdot\Lambda u(\xi)\,ds_\xi =$$

$$= \int_{\partial S} H_1(\xi)\sum_{j=1}^{m} p_j^{(m)}(\Lambda - 1)^{[j]}\Lambda u(\xi)\,ds_\xi = \int_{\partial S} H_1(\xi)\sum_{j=1}^{m} p_j^{(m)}\Lambda^{[j+1]}u(\xi)\,ds_\xi =$$

$$= \int_{\partial S} H_1(\xi)\sum_{j=1}^{m} p_j^{(m)}\varphi_j(\xi)\,ds_\xi$$

и значит второе достаточное условие разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$ примет вид

$$\int_{\partial S} H_1(\xi)\Big(p_1^{(m)}\varphi_1(\xi) + \ldots + p_m^{(m)}\varphi_m(\xi)\Big)ds_\xi = 0. \qquad (9)$$

Итак, достаточные условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$ при условии $v \in C^{m-1}(\bar{S})$ имеют вид (8)–(9). Заметим, что условия (8)–(9), согласно результатам работы [1], являются и необходимыми условиями разрешимости задачи $\mathcal{N}_2$. Например, для 3-гармонического уравнения ($m = 3$) условия (8)–(9) с помощью строк треугольника Неймана $\mathbb{P}$ записываются в виде

$$\int_{\partial S}\big(-\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)\big)ds_\xi = 0, \quad \int_{\partial S} H_1(\xi)\big(3\varphi_1(\xi) - 3\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)\big)ds_\xi = 0.$$

Литература

1. Карачик, В.В. Класс задач типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Вычислительная математика и математическая физика. – 2020. – Т. 60, № 1. – С. 132–150.

2. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.

3. Бицадзе, А.В. К задаче Неймана для гармонических функций / А.В. Бицадзе // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311, № 1. – С. 11–13.

4. Карачик, В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238.

5. Бицадзе, А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций / А.В. Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 825–831.

6. Turmetov, B. On solvability of the Neumann boundary value problem for non-homogeneous biharmonic equation / B. Turmetov, R. Ashurov // British Journal of Mathematics & Computer Science. – 2014. – Iss. 4. – P. 557–571.

7. Карачик В.В. Обобщённая третья краевая задача для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 761–770.

8. Turmetov, B. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions / B. Turmetov, V. Karachik // Filomat. – 2018. – Vol. 32, Iss. 3. – P. 947–953.

9. Popivanov, P. Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball / P. Popivanov // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2159. – Iss. 1. – 030028.

10. Карачик, В.В. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Б.Т. Торебек // Математические заметки. – 2017. – Т. 102, № 1. – С. 39–51.

11. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.

12. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.

13. Карачик, В.В. Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 653–662.

14. Кошанов, Б.Д. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости / Б.Д. Кошанов, А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2016. –Т. 52, № 12. – С. 1666–1681.

15. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.

16. Карачик, В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре / В.В. Карачик // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 69–88.

17. Карачик, В.В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 533–551.

18. Карачик, В.В. О некоторых специальных полиномах и функциях / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 205–226.

Поступила в редакцию 1 марта 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 2, pp. 13–20

DOI: 10.14529/mmph200202

SOLVABILITY CONDITIONS OF THE $\mathcal{N}_2$ NEUMANN-TYPE PROBLEM FOR POLYHARMONIC EQUATION IN A BALL

V.V. Karachik
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: karachik@susu.ru

The $\mathcal{N}_k$ Neumann-type class of problems for a polyharmonic equation in the unit ball is considered. The problems of this class generalize both the well-known Dirichlet problem and the Neumann problem. In a number of works, the set of the necessary conditions for the solvability of this problem has been found for the problems of such class, and it has been assumed that the most complete version of the found necessary conditions is also a set of the sufficient conditions for the solvability of the problem. This was a known fact with regard to the $\mathcal{N}_1$ problem. In this study, an assumption that the found set of the necessary conditions coincides with the sufficient conditions of solvability of the $\mathcal{N}_2$ problem for a homogeneous m-harmonic equation in a unit ball is proved. First, by changing the variables, the $\mathcal{N}_2$ problem is reduced to a simpler $\mathcal{N}_0$ Dirichlet problem, the solution to which is considered to be known. Next, the conditions, under which the performed change of the variables is reversible, are found. The conditions found here are connected with the Dirichlet problem's solution having terms of the first order of smallness in the expansion in the neighborhood of zero. Finally, the previously obtained results are used, which concern the value of the *m*-harmonic function in the unit ball in the center of the ball with the values of the normal derivatives of this function at the boundary of the ball. These solvability conditions are transformed to the conditions associated with the values of the integrals over the sphere of polynomials in the normal derivatives of the desired solution on the unit sphere, the coefficients of which

are the elements of the arithmetic Neumann triangle. The found conditions coincide with the previously obtained necessary conditions for the solvability of the $\mathcal{N}_2$ problem.

Keywords: Neumann-type problem; polyharmonic equation; solvability conditions

References

1. Karachik V.V. Class of Neumann-Type Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, Vol. 60, no. 1, pp. 144–162. DOI: 10.1134/S096554251912011X

2. Karachik V.V. A problem for the polyharmonic equation in the sphere. *Siberian Mathematical Journal*, 1991, Vol. 32, Iss. 5, pp. 767–774. DOI: 10.1007/BF00971175

3. Bitsadze A.V. K zadache Neymana dlya garmonicheskikh funktsiy (To the Neumann problem for harmonic functions). *DAN SSSR*, 1990, Vol. 311, no. 1, pp. 11–13. (in Russ.).

4. Karachik V. V. On the arithmetic triangle arising from the solvability conditions for the Neumann problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232

5. Bitsadze A.V. Some properties of polyharmonic functions. *Differential Equations*, 1988, Vol. 24, no. 5, pp. 543–548.

6. Turmetov B., Ashurov R. On Solvability of the Neumann Boundary Value Problem for Non-homogeneous Biharmonic Equation. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 2014, Vol. 4, Iss. 4, pp. 557–571. DOI: 10.9734/BJMCS/2014/6825

7. Karachik V.V. Generalized third boundary value problem for the biharmonic equation. *Differential Equations*, 2017, Vol. 53, no. 6, pp. 756–765.

8. Turmetov B., Karachik V. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions. *Filomat*, 2018, Vol. 32, Iss. 3, pp. 947–953. DOI: 10.2298/FIL1803947T

9. Popivanov P. Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball. *AIP Conference Proceedings*, 2019, Vol. 2159, Iss. 1, 030028. DOI: 10.1063/1.5127493.

10. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet–Riquier problem for biharmonic equations. *Mathematical Notes*, 2017, Vol. 102, no. 1-2, pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0001434617070045

11. Karachik V.V. A Neumann-type problem for the biharmonic equation. *Siberian Advances in Mathematics*, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 103–118. DOI: 10.3103/S105513441702002X

12. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirihlet Boundary Value Problem for the 3-harmonic Equation in a Ball. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Matematika i fizika* (Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics), 2012, Vol. 5, no. 4, pp. 527–546.

13. Karachik V.V. Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball. *Differential Equations*, 2018, Vol. 54, no. 5, pp. 648–657. DOI: 10.1134/S0012266118050087

14. Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a high-order elliptic equation on the plane. *Differential Equations*, 2016, Vol. 52, no. 12, pp. 1594–1609. DOI: 10.1134/S0012266116120077

15. Karachik V.V. Solution of the Dirichlet problem with polynomial data for the polyharmonic equation in a ball. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 8, pp. 1033–1042. DOI: 10.1134/S0012266115080078

16. Karachik V.V. On the mean value property for polyharmonic functions in the ball. *Siberian Advances in Mathematics*, 2014, Vol. 24, no. 3, pp. 169–182. DOI: 10.3103/S1055134414030031

17. Karachik V.V. Integral identities on the sphere for normal derivatives of a polyharmonic function. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* (Siberian Electronic Mathematical Reports), 2017, Vol. 14, pp. 533–551. DOI: 10.17377/semi.2017.14.046

18. Karachik V.V. On some special polynomials and functions. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* (Siberian Electronic Mathematical Reports), 2013, Vol. 10, pp. 205–226.

Received March 1, 2020