

МОДЕЛЬ ШУМА КВАНТОВАНИЯ ВЕКТОРА С НЕНУЛЕВЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ

В.В. Заволокин

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zavolokinvv@susu.ru

Получена математическая модель шума квантования, возникающая в высокоточных измерительных системах. Новая формула плотности распределения вероятности получена для алгоритма квантования с округлением до ближайшего целого нормального вектора с ненулевыми математическими ожиданиями. Эта формула – обобщение результата, полученного для плотности вероятности эхо-сигнала от капель атмосферной влаги. Формула получена на основе теории вероятностей, разложений в ряды Фурье и интеграла Фурье. Для данной плотности получены формулы векторов математического ожидания и второго начального момента.

Ключевые слова: разложение в ряды Фурье, интеграл Фурье; нормальная плотность распределения с ненулевыми математическими ожиданиями, порождающая шум квантования.

Введение

При формировании цифрового кода возникает шум квантования. Характеристика формирования шума квантования изображена на рис. 1. Этот шум складывается с обрабатываемым сигналом.

Любая излучающая (принимающая) антенна радиосигнала, так же, как и любой приемопередающий датчик (в случае ультразвукового сигнала), в силу условий его физической реализуемости, имеет боковые лепестки диаграммы направленности. По ним может приниматься сигнал от побочного (неинформативного) импульсного объема, расположенного на той же дальности, что и исследуемый импульсный объем, находящийся в створе главного лепестка, но расположенный под другими углами азимута и места. В нем могут быть отражатели, совокупность которых в тексте работы и называется отражающей доминантой. Квантуется сигнал, отраженный от капель дождя (от однородной и изотропной среды), в смеси с сигналами отражающих доминант. Таким образом, эхо-сигнал есть нормальный случайный процесс с математическим ожиданием $m = m(t)$.

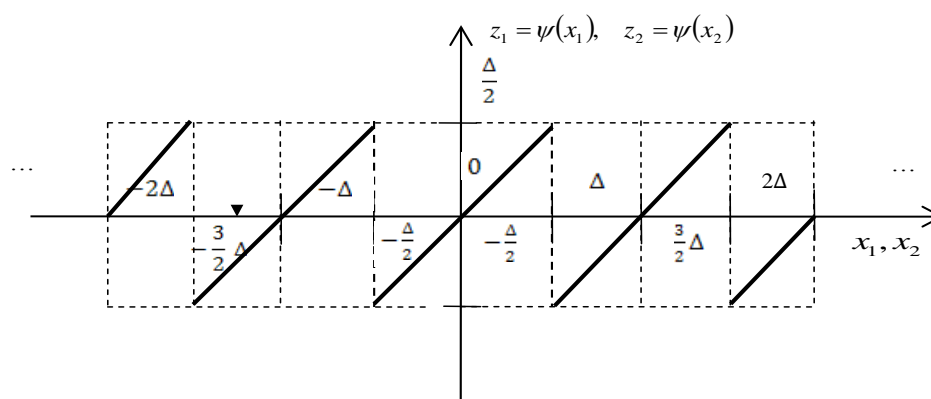


Рис. 1. Нелинейная пилообразная характеристика преобразования значений x_1 и x_2 координат вектора $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ в шум квантования

Сущность математической модели

При формировании эхо-сигнала складываются: центрированный нормальный случайный процесс эхо-сигнала дождя с детерминированной, повторяющейся вдоль развертки во времени сферической координаты дальности при повторяющихся угловых координатах главного лепестка, функцией $m = m(t)$. Она имеет место вдоль сферической координаты дальности и вызвана

отражающими доминантами, эхо-сигнал которых принят по боковым лепесткам. Плотность распределения вероятности вектора, являющегося результата сложения сигнала метеозо и сигналов отражающих доминант имеет вид:

$$W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1-m(t))^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau)(x_1-m(t))(x_2-m(t+\tau)) + (x_2-m(t+\tau))^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))}}, \quad (1)$$

где x_1, x_2 – значения координат вектора $\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2)$ в моменты времени t_1 и t_2 ; $\sigma_{\bar{\eta}}^2$ — дисперсия значений координат x_1 и x_2 вектора $\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2)$; $m(t)$ – математическое ожидание координат вектора $\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2)$; $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \bar{n} + \bar{\xi}$; $\bar{n} = (n_1, n_2)$ – вектор теплового шума приемника; $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – нормальный вектор эхо-сигнала от облачно-дождевой системы. Здесь $\sigma_{\bar{\xi}} = \sigma_{\xi_1} = \sigma_{\xi_2}$ информативные величины, необходимые для формирования оценок \hat{K}_w , а затем $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$. $\rho_{\bar{\eta}}(\tau)$ – коэффициент корреляции координат η_1 и η_2 . $\tau = t_2 - t_1$ – шаг дискретизации.

Так как $m = m(t)$ неслучайная функция, повторяющаяся от зондирования к зондированию, то обозначим $m(t) = m_1$, а $m(t + \tau) = m_2$ формулу (1) перепишем с учетом этих обозначений:

$$W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1-m_1)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau)(x_1-m_1)(x_2-m_2) + (x_2-m_2)^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))}}. \quad (2)$$

Из определения шума квантования [2] известно, что вектор шума квантования есть разность векторов $\bar{\zeta} = \bar{\eta} - \bar{\chi}$, где $\bar{\eta}$ – входной вектор алгоритма квантования, и $\bar{\chi}$ выходной квантованный вектор. На рис. 1 видна периодичность функций $\psi(x_j)$, формирующих шум квантования с периодом Δ . Учитывая их «периодичность» разложим в ряд Фурье функции $\psi(x_j)$.

Математические преобразования

Выполним математические преобразования аналогичные преобразованиям, проделанным в работе [1], но с той разницей, что квантуемый сигнал в данной работе имеет не центрированную плотность вероятности, описываемую выражением (2). Из [2] известно разложение периодической функции $\psi(x_j)$ (см. рис. 2) в ряд Фурье:

$$\psi(x_j) = \frac{\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2\pi n}{\Delta} x_j, \quad (3)$$

где $j = s, c$ – синфазная или квадратурная составляющая комплексного сигнала.

Характеристическая функция вектора $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ (см. [2]) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\zeta}}(\bar{\vartheta}) &= \Phi_{\bar{\zeta}}(j\mathcal{A}_1, j\mathcal{A}_2) = M \{ i \exp(\mathcal{A}_1\psi(x_1) + \mathcal{A}_2\psi(x_2)) \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathcal{A}_1\psi(x_1) + \mathcal{A}_2\psi(x_2))} W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь i – мнимая единица, а $M\{\}$ – символ математического ожидания.

Разложим периодические функции $e^{i(\mathcal{A}_1\psi(x_1))}$ и $e^{i(\mathcal{A}_2\psi(x_2))}$ в ряды Фурье:

$$e^{i(\mathcal{A}_1\psi(x_1))} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{1n} \frac{e^{in_1 2\pi\psi(x_1)}}{\Delta}, \quad (5)$$

$$e^{i(\mathcal{A}_2\psi(x_2))} = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{2n} \frac{e^{in_2 2\pi\psi(x_2)}}{\Delta}. \quad (6)$$

Здесь Δ играет роль периода, а функции $\psi(x_1)$ и $\psi(x_2)$ на каждом из отрезков линейности $\left[\frac{\Delta}{2}, -\frac{\Delta}{2}\right]$ длиной Δ , изображенные на рис. 1, есть периодические куски прямых линий:

$$\psi(x_1) = x_1, \psi(x_2) = x_2 \tag{7}$$

в центре системы координат $z0x$ и смещенные по оси z в зависимости от текущего значения x_j .

После подстановки $\psi(x_1), \psi(x_2)$ в (5) и (6) разложения примут следующий вид:

$$e^{i(\mathcal{G}_1\psi(x_1))} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{1n} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta}, \tag{8}$$

$$e^{i(\mathcal{G}_2\psi(x_2))} = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{2n} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta}. \tag{9}$$

Коэффициенты разложения функций $e^{i(\mathcal{G}_1\psi(x_1))}$ и $e^{i(\mathcal{G}_2\psi(x_2))}$ (см. [2]) есть интегралы:

$$c_{1n} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} 2e^{i\mathcal{G}_1 x_1} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} dx_1 = \frac{\sin\left(\mathcal{G}_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\mathcal{G}_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}, \tag{10}$$

$$c_{2n} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} 2e^{i\mathcal{G}_2 x_2} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} dx_2 = \frac{\sin\left(\mathcal{G}_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\mathcal{G}_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}. \tag{11}$$

Подставив формулы (10) и (11) в (8) и (9), а результаты подстановки в (4), перепишем (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\zeta}}(\bar{\mathcal{G}}) &= \Phi_{-\zeta}(j\mathcal{G}_1, j\mathcal{G}_2) = M\left(i \exp(\mathcal{G}_1\psi(x_1) + \mathcal{G}_2\psi(x_2))\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\mathcal{G}_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\mathcal{G}_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\mathcal{G}_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\mathcal{G}_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} \right) W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования и оставив под знаком интеграла только выражения, зависящие от переменных интегрирования, получим иной вид выражения (12):

$$\Phi_{\bar{\zeta}}(j\mathcal{G}_1, j\mathcal{G}_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\mathcal{G}_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\mathcal{G}_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\mathcal{G}_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\mathcal{G}_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{13}$$

Вычисляя интеграл формулы (13), являющийся интегралом преобразования Фурье, подставив формулу (2) вместо $W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2)$, получим (см. [2]) следующий вид этого интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))} e^{\frac{1}{2} \frac{(x_1-m_1)^2 - \rho_{-\eta}(\tau)(x_1-m_1)(x_2-m_2) - (x_2-m_2)^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))}} dx_1 dx_2 = \\ & = e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2 \right)}. \end{aligned} \tag{14}$$

После этого искомая характеристическая функция (13) вектора $\bar{\zeta}$ примет вид:

$$\Phi_{\bar{\zeta}}(j\vartheta_1, j\vartheta_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times$$

$$\times e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2 \right)} \quad (15)$$

Плотность распределения шума квантования есть обратное преобразование Фурье (см. [2]) выражения (15):

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times$$

$$\times e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2 \right)} \times$$

$$\times e^{-i(\vartheta_1 z_1 + \vartheta_2 z_2)} d\vartheta_1 d\vartheta_2; \quad |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (16)$$

Из вида функций $z_1 = \psi(x_1)$, $z_2 = \psi(x_2)$ изображенных на рис. 1, следует, что область определения функции (16) есть: $|z_1| \leq \frac{\Delta}{2}$ и $|z_2| \leq \frac{\Delta}{2}$. Это обстоятельство и учтено в формуле (16). Изменив порядок интегрирования и суммирования, оставив под знаком интеграла множители, зависящие от переменных интегрирования, перепишем (16) иначе:

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2 \right) \right) \times$$

$$\times e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times e^{-i(\vartheta_1 z_1 + \vartheta_2 z_2)} d\vartheta_1 d\vartheta_2; \quad |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (17)$$

Обозначим интеграл в формуле (17) как I_1 . Тогда подынтегральное выражение формулы (17) есть произведение множителей с независимыми переменными и I_1 будет иметь вид:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} e^{-i\vartheta_1 z_1} d\vartheta_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} e^{-i\vartheta_2 z_2} d\vartheta_2; \quad |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (18)$$

В интегралах(18) сделаем замену переменных $\Delta x_1/2 = \Delta \vartheta_1/2 - \pi n_1$ и $\Delta x_2/2 = \Delta \vartheta_2/2 - \pi n_2$. Тогда $dx_1 = d\vartheta_1$, $\vartheta_1 = x_1 + 2\pi n_1/\Delta$, $dx_2 = d\vartheta_2$, $\vartheta_2 = x_2 + 2\pi n_2/\Delta$ и (18) примет вид:

$$I_1 = e^{-i2\pi n_1 z_1} e^{-i2\pi n_2 z_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta x_1/2)}{(\Delta x_1/2)} e^{-ix_1 z_1} dx_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta x_2/2)}{(\Delta x_2/2)} e^{-ix_2 z_2} dx_2. \quad (19)$$

Характеристическая функция (см. [2]) одномерного равномерного $W_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{\Delta}$ закона распределения случайной величины φ на интервале $[a, b]$ имеет вид:

$$\Phi_{\varphi}(i\mathcal{G}) = \frac{e^{ib\mathcal{G}} - e^{-ib\mathcal{G}}}{i\mathcal{G}(a-b)}. \tag{20}$$

Тогда для нашего случая имеем, что $[a,b] = \Delta$, $a = \frac{\Delta}{2}$, $b = -\frac{\Delta}{2}$.

$$\Phi_{\phi}(i\mathcal{G}) = \frac{e^{ib\mathcal{G}} - e^{-ib\mathcal{G}}}{i\mathcal{G}(a-b)} = \frac{e^{\frac{i\Delta\mathcal{G}}{2}} - e^{-\frac{i\Delta\mathcal{G}}{2}}}{i\mathcal{G}\Delta} = \frac{-i2\sin\left(\frac{\Delta\mathcal{G}}{2}\right)}{i\mathcal{G}\Delta} = \frac{-2\sin\left(\frac{\Delta\mathcal{G}}{2}\right)}{\mathcal{G}\Delta}. \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что интегралы в (19), дополненные множителями $1/2\pi$ с точностью до знака функции (21), это обратные преобразования Фурье. Выражение «характеристическая функция равномерной плотности распределения» следует понимать лишь в контексте промежуточного преобразования. Результат вычисления обратных преобразований Фурье (19) примет вид:

$$I_1 = \frac{(2\pi)^2}{\Delta^2} e^{-i\frac{2\pi n_1 z_1}{\Delta}} e^{-i\frac{2\pi n_2 z_2}{\Delta}}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{22}$$

Искомая плотность распределения после подстановки I_1 (22) в формулу (17) примет вид:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times e^{-i\frac{2\pi n_1 z_1}{\Delta}} e^{-i\frac{2\pi n_2 z_2}{\Delta}}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{23}$$

Для удобства дальнейших преобразований формулу (23) перепишем следующим образом:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi}{\Delta}(n_1(z_1 - m_1) + n_2(z_2 - m_2))} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{24}$$

Учитывая нечетность функции $\sin(x)$, выражение (25) перепишем иначе:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\Delta} \left(n_2((z_2 - m_2) + n_1((z_1 - m_1))) \right) \times \\ \times e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{25}$$

Графики $W_{\bar{z}}(z_1, z_2)$ (25) (см. рис. 2) построены для различных значений m_1 и m_2 и для одинаковых $\rho_{\bar{\eta}}(\tau)$. Список параметров процедуры `plot(t, ... u2)` пакета Maple: `t, rho, m1, m2, u1, u2`.

Здесь $m1 = m_1$, $m2 = m_2$, $rho = \rho_{\bar{\eta}}(\tau)$, $z_1 = u1$, $z_2 = u2$, $\beta = \frac{\Delta^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2}$ – глубина квантования, $t = \frac{2\pi^2}{\beta}$ –

вспомогательный параметр.

При $m_1 \neq m_2$ график не симметричен (рис. 2, в). Вектор математического ожидания плотности (показано ниже) в общем виде всегда имеет нулевые координаты $\bar{M}_{\bar{z}} = (M_{\bar{z}_1}, M_{\bar{z}_2}) = (0, 0)$ при любых m_1 и m_2 . Заметим, что равенство $m_1 = m_2$, не является достаточным условием симметрии графика плотности как может показаться из рис. 2.

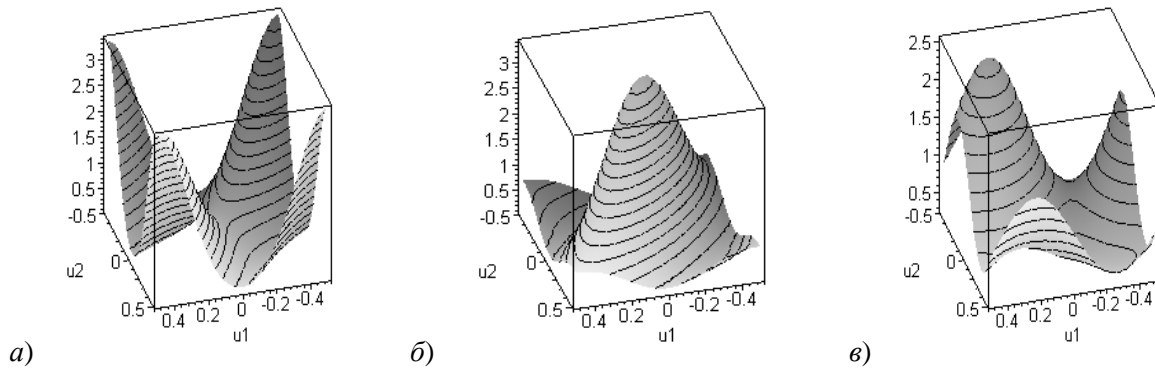


Рис. 2. Плотность распределения шума квантования при различных m_1 и m_2 . Здесь а) это плотность распределения при $\text{proс}(1,3, 0,7, 0,5, 0,5, u_1, u_2)$, б) плотность распределения при $\text{proс}(1,3, 0,7, 0,0, 0,0, u_1, u_2)$, в) плотность распределения при $\text{proс}(1,3, 0,3, 0,3, 0,75, u_1, u_2)$

Статистические характеристики двумерной плотности вероятности шума квантования

Вычислим векторы математического ожидания $\bar{M}_{\bar{\zeta}} = (M_{\bar{\zeta}_1}, M_{\bar{\zeta}_2})$ и дисперсии $\bar{D}_{\bar{\zeta}} = (\bar{D}_{\bar{\zeta}_1}, \bar{D}_{\bar{\zeta}_2})$ для плотности (26). Разобьем индексы суммирования в формуле (25) на девять групп и запишем ее в виде суммы девяти сумм:

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = S_1(n_1 = 0, n_2 = 0) + S_2(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^+) + S_3(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 = 0) + S_4(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^+) + S_5(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^-) + S_6(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 = 0) + S_7(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^-) + S_8(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^-) + S_9(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^+) \quad (26)$$

где

$$S_1(n_1 = 0, n_2 = 0) = \frac{1}{\Delta^2} \quad (27)$$

$$S_2(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^+) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right); \quad (28)$$

$$S_3(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 = 0) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right); \quad (29)$$

$$S_4(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^+) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right); \quad (30)$$

$$S_5(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^-) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right); \quad (31)$$

$$S_6(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 = 0) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right); \quad (32)$$

$$S_7(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^-) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right); \quad (33)$$

$$S_8(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^-) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_1 ((z_2 - m_2)) - (n_2 ((z_1 - m_1))))\right); \quad (34)$$

$$S_9(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^+) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right). \quad (35)$$

Объединяя совпадающие слагаемые: (28) с (31), (29) с (32), (30) с (33) и (34) с (35) получим:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right) + \right. \\ \left. 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_1 ((z_2 - m_2)) - (n_2 ((z_1 - m_1))))\right) \right\}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (36)$$

По определению значения координаты $M_{\bar{z}_1}$ (см. [2, 3]) можем записать:

$$\begin{aligned}
 M_{\zeta_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i=2}^5 I_i = \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1 \left\{ 1 + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) \right\} dz_1 dz_2. \tag{37}
 \end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования в слагаемых суммы (37) после вычисления простейших интегралов, получаем: $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ и $I_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times \\
 &\quad \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) dz_1 = 0. \tag{38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times \\
 &\quad \times \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) dz_1 = 0. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Повторные интегралы в выражениях I_5 и I_6 содержит по восемь слагаемых, каждое из которых содержит нулевой интеграл-множитель и поэтому $I_5 = 0$ и $I_6 = 0$. В результате $M_{\zeta_1} = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0$. Аналогично M_{ζ_1} получаем $M_{\zeta_2} = 0$ и $\bar{M}_{\zeta} = (M_{\zeta_1}, M_{\zeta_2}) = (0, 0)$.

Квантование с округлением до ближайшего целого не смещает квантуемую амплитуду сигнала или данных (в отличие от других видов квантования).

Из [2, 3] известно, что значения координаты $D_{\bar{z}_1}$ вектора $D_{\bar{z}}$ для двумерной плотности (25) вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned}
 D_{\bar{z}_1} &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 W_{\bar{z}}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \left\{ 1 + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) \right\} dz_1 dz_2 = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^5 I_{2j}. \tag{40}
 \end{aligned}$$

Вычислим сумму (40), обозначив ее слагаемые как $I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}$ и I_{25} . В результате вычисления простейших интегралов получаем $I_{21} = \frac{\Delta^2}{12}$ и $I_{22} = 0$.

Изменяя порядок суммирования и интегрирования, вынося за знаки интегралов множители, не зависящие от переменных интегрирования в I_{23} , I_{24} и I_{25} , получим:

$$I_{23} = \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) dz_1. \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 I_{24} &= \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times \\
 &\quad \times \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) dz_1 dz_2 = 0. \tag{42}
 \end{aligned}$$

$$I_{25} = \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\sigma_{\bar{n}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{n}}(\tau) \sigma_{\bar{n}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{n}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times$$

$$\times \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} z_1^2 \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1)))) \right) dz_1 dz_2 = 0. \quad (43)$$

Вычисляя интеграл выражения I_{23} выполним замену переменной вида $x = \frac{2\pi n_1 z_1}{\Delta}$;
 $z_1 = \frac{x\Delta}{2\pi n_1}$ $dx = \frac{2\pi n_1}{\Delta} dz_1$; $x_g = \pi n_1$; $x_n = -\pi n_1$:

$$I_{23} = \frac{\Delta}{4(\pi)^3} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^3} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{n}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\pi n}^{\pi n} x^2 \cos x dx. \quad (44)$$

Воспользовавшись очевидным соотношением:

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C \quad (45)$$

и учитывая, что $\sin \pi n = 0$, значение внешнего интеграла в (44) равно Δ , и то, что множитель $\cos(\pi n)$ есть чередующаяся последовательность ∓ 1 , где знак « \rightarrow » – соответствует нечетным n , а « \leftarrow » – четным, то получим следующий результат:

$$I_{23} = \frac{\Delta}{(\pi)^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{n}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right) (\cos(\pi n)) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 =$$

$$= \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{n}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right) = \frac{(\Delta)^2}{(\pi)^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1)^2} q^{n_1^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right), \quad (46)$$

где

$$q = e^{-t} = e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}. \quad (47)$$

Повторный интеграл выражения I_{24} является суммой восьми выражений, каждое из которых имеет нулевой интеграл-множитель. Аналогично выражению I_{24} формула I_{25} также является суммой из восьми выражений, каждое из которых содержит нулевой интеграл-множитель. Следовательно $I_{24} = I_{25} = 0$. Окончательно сложив I_{21} , I_{22} , I_{23} , I_{24} и I_{25} получим значение D_{ζ_1} :

$$D_{\zeta_1} = I_{21} + I_{23} = \frac{\Delta^2}{12} + \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n m_1 \right). \quad (48)$$

Выражение для D_{ζ_2} с точностью до номера индекса m_2 совпадает с выражением (48). Таким образом, окончательный вид вектора второго начального момента следующий:

$$\bar{D}_{\zeta} = (D_{\zeta_1}, D_{\zeta_2}) = \left(\frac{\Delta^2}{12} + \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n m_1 \right); \frac{\Delta^2}{12} + \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} n m_2 \right) \right). \quad (49)$$

Основные выводы

Из выражения (49) видно, что значения координат вектора второго начального момента для двумерной плотности шума квантования зависят от величин математических ожиданий m_1 и m_2 квантуемого нормального двумерного вектора (2). Значения координат второго начального момента в свою очередь являются информативными величинами в радиометеорологии и содержат интересные физические величины. Тогда вторые члены в суммах в (48) приводят к смещению оценок значений координат этого вектора из-за присутствия величин m_1 и m_2 . Например, в радиометеорологии \bar{D} (см. [5]) несет информацию о наведенном дипольном моменте K_w капель дождя, затухании радиосигнала туда и обратно на трассе распространения $l(r_0, K_w, \omega)$, интенсивности дождя R и водности облачно-дождевой системы M .

Для физической реализуемости высокоточных измерений заключающейся в формировании несмещенной и состоятельной оценки \hat{D} с последующим вычислением оценок \hat{K}_w , $\hat{l}(r_0, K_w, \omega)$, \hat{R} и \hat{M} , необходимо избавиться от второго слагаемого в выражении (49), так как шум квантования по мощности (не когерентно) складывается с сигналом дождя. Ранее было показано (37)–(39), что значения координаты вектора \bar{M}_ζ равны нулю при квантовании с округлением до ближайшего целого. По этой причине оценки \hat{m}_1 и \hat{m}_2 могут быть вычислены с требуемой наперед заданной точностью, но с физическим ограничением на интервал времени пока величины K_w , $l(r_0, K_w, \omega)$, R и M можно считать постоянными. В этом случае, очевидно, что для оценки \hat{D}_ζ будет иметь место следующее выражение:

$$\hat{D}_\zeta = (D_{\zeta 1}, D_{\zeta 2}) = \left(\frac{\Delta^2}{12} + \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n \hat{m}_1 \right); \frac{\Delta^2}{12} + \left(\frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n \hat{m}_2 \right) \right). \quad (50)$$

Наконец, поскольку дисперсия квантованного сигнала, согласно теореме о дисперсии [см. (4)] суммы есть величина:

$$\bar{D}_{\bar{\zeta}} = \bar{D}_{\bar{\eta}} + \bar{D}_{\bar{\zeta}} + 2 \sum_{i < j}^2 K_{\eta_i \zeta_j} \quad i, j = 1, 2; \quad (51)$$

где

$$\bar{D}_{\bar{\zeta}} = \bar{D}_{\bar{\zeta}} + \bar{D}_{\bar{\eta}}. \quad (52)$$

Тогда, заранее вычислив оценки \hat{m}_1 и \hat{m}_2 , легко избавиться от вторых слагаемых в выражении (51) что и позволит сделать искомую оценку $D[\zeta_i]$ несмещенной и состоятельной при априорно известной величине Δ и апостериорных, не смещенных, состоятельных оценках $\hat{D}_{\bar{\eta}}$ и $\hat{D}_{\bar{\zeta}}$, вычисление которых на практике не вызывает затруднений с помощью алгоритма выборочного второго начального момента. Материалы работы важны при организации высокоточных измерений в связи, медицине, радиометеорологии и других областях науки и техники.

Литература

1. Математическая модель шума квантования сигналов, отраженных от протяженных пространственных помех / Б.М. Балясников, М.С. Ворона, В.В. Заволокин и др. // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. – 2011. – Вып. 633. – Ч. 2. – С. 131–138.
2. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
3. Пугачев, В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.
4. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

5. Довиак, Р. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения / Р. Довиак, Д. Зрнич. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 511 с.

Поступила в редакцию 7 июля 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 2, pp. 37–48*

DOI: 10.14529/mmph200205

NOISE MODEL OF QUANTIZATION OF THE VECTOR WITH NON-ZERO MATHEMATICAL EXPECTATIONS

V.V. Zavolokin

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: zavolokinvv@susu.ru

The mathematical model of quantization noise arising in high-precision measuring systems is obtained. A new formula of the probability distribution density is obtained for the quantization algorithm with rounding to the nearest whole normal vector with non-zero mathematical expectations. This formula is a generalization of the result obtained for the probability density of the echo signal from drops of atmospheric moisture. The formula is obtained on the basis of the probability theory, Fourier series expansions and Fourier integral. For this density, the formulas of the expectation vectors and the second initial moment are obtained.

Keywords: Fourier series expansion; Fourier integral; normal distribution density with non-zero mathematical expectations resulting in quantization noise.

References

1. Balyasnikov B.M., Vorona M.S., Zavolokin V.V., Korshunov A.Yu., Maksimenko M.D., Odinochenko N.M. Matematicheskaya model' shuma kvantovaniya signalov, otrazhennykh ot protyazhennykh prostranstvennykh pomekh (A Mathematical model of the quantization of the signals reflected from expended spatial interference). *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhayskogo* (Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy), 2011, Vol. 633, no. 2, pp. 131–138. (in Russ.).
2. Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* (Statistical Radio Engineering). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982, 624 p. (in Russ.).
3. Pugachev V.S. *Teoriya sluchaynykh funktsiy i ee primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* (Theory of Random Process and Its Application to Automatic Control Problems). Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 883 p. (in Russ.).
4. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostey* (Probability Theory). Moscow, Nauka Publ., 1969, 576 p. (in Russ.).
5. Doviak R.J., Zrnic D.S. *Doppler Radar and Weather Observations*. Orlando, San Diego, San Francisco, New York, London, Toronto, Montreal, Sydney, Tokyo, São Paulo: Academic Press Inc., 1984, 458 p.

Received July 7, 2019