УДК 517.929.2 DOI: 10.14529/mmph200304

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Д.А. Комиссарова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: komissarovada@susu.ru

Непрерывные и дискретные разностные уравнения типа Вольтерра возникают во многих приложениях. В частности при исследовании моделей динамики популяций, моделировании различных экономических или физических процессов, в теории управления, медицине. В работе рассматривается проблема асимптотической устойчивости нулевого решения линейного разностного уравнения типа Вольтерра в свертках. Приводятся определения устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения указанного уравнения. В статье представлены достаточные условия асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений Вольтерра. С помощью метода z-преобразования доказаны соответствующие теоремы. Найденные признаки асимптотической устойчивости нулевого решения есть ограничения на коэффициенты исходного уравнения, то есть представляют некую область устойчивости в пространстве параметров уравнения. Производится сравнение полученных признаков с некоторыми известными достаточными условиями асимптотической устойчивости конечномерных линейных разностных уравнений. Главным преимуществом полученных достаточных условий асимптотической устойчивости линейного разностного уравнения типа Вольтерра является наглядность этих признаков и простота их применения. Кроме того, признаки такого типа полезны, если коэффициенты уравнения не известны точно.

Ключевые слова: устойчивость; разностные уравнения; уравнения Вольтерра.

Рассмотрим линейное разностное уравнение типа Вольтерра

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^{n} a_s x_{n-s}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

где $a_s \in R$, $a_s \geq 0$ $\left(s = 1, 2, \ldots\right)$.

Начальное условие x_0 однозначно определяет решение уравнения (1).

Нулевое решение уравнения (1) называется устойчивым, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \left(\forall x_0 \ \left|x_0\right| < \delta \Rightarrow \forall n > 0 \ \left|x_n\right| < \varepsilon\right)$$

Нулевое решение уравнения (1) называется асимптотически устойчивым, если он устойчиво и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ для любого решения $\left(x_n\right)$ уравнения (1).

Уравнение Вольтерра (1) является бесконечномерным аналогом разностного уравнения

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^{k} a_s x_{n-s}\,, \tag{2}$$

где $a_s \in R$, $a_s \geq 0$ $\left(1 \leq s \leq k\right)$.

Для уравнения (2) известны следующие признаки асимптотической устойчивости [1].

Теорема 1. Если $a_s \geq 0$ $\left(1 \leq s \leq k\right)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{2\sin\dfrac{\pi}{2(2s-1)}} < 1, \tag{3}$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 является многомерным обобщением известного результата Левина и Мэя [2].

Теорема 2. Если $a_s \ge 0$ $(1 \le s \le k)$ и

$$0 < \sum_{s=1}^{k} s a_s \le \frac{\pi}{2}, \qquad (4)$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

Признак устойчивости теоремы 1 сильнее признака теоремы 2. Теорема 1 в некотором смысле не может быть улучшена [1].

Цель работы – получить аналоги теорем 1 и 2 для разностного уравнения Вольтерра (1).

Производящей функцией числовой последовательности x_n $(n \ge 0)$ называется ряд вида

$$\tilde{x}(z) = Z(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n, \qquad (5)$$

где $z \in C$.

Сверткой двух последовательностей x_n и y_n называется последовательность вида

$$x_n \circ y_n = \sum_{s=0}^{n} x_{n-s} y_s = \sum_{s=0}^{n} x_s y_{n-s}. \qquad (6)$$

Производящая функция свертки двух последовательностей имеет вид

$$Z(x_n \circ y_n) = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z).$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа $M > 0$ и $q \in (0;1)$ такие, что для всех $n \in N$ выполняется $a_n \le M q^n$;

2) все нули функции $g(z) = 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ расположены вне единичной окружности $|z| = 1$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть последовательность x_n $(n \ge 0)$ является решением уравнения (1). Значит,

$$x_1 = x_0 - a_1 x_0, \ x_2 = x_1 - (a_1 x_1 + a_2 x_0), \ x_3 = x_2 - (a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0), \ \ldots$$

Умножим обе части первого уравнение на z, второго – на z^2, третьего – на z^3 и так далее. Сложим полученные равенства и добавим к обеим частям x_0. Согласно определению производящей функции (5) получим

$$\tilde{x}(z) = x_0 + z\tilde{x}(z) - \tilde{x}(z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда

$$\tilde{x}(z) = \frac{x_0}{1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n}. \qquad (7)$$

Обозначим функцию

$$g(z) = 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \qquad (8)$$

Из условий теоремы следует, что функция $g(z)$ является аналитической в круге $|z| = R$, радиус которого R больше единицы. Тогда из (7) следует, что $\tilde{x}(z)$ раскладывается в степенной ряд по степеням z с радиусом сходимости больше единицы. Следовательно, уравнение (1) экспоненциально, а, значит, и асимптотически устойчиво при любом начальном условии x_0. Теорема доказана.

В работе [1] доказаны следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. Для любого числа $\omega \in (0;\pi]$ существует число $m \in R$, такое, что для всякого $s \in N$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}+\frac{\sin(m-s)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}\geq 0. \qquad (9)$$

Лемма 2. Для любого числа $s\in N$, такое что всякого $s\in N$

$$2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}>\frac{\pi}{2s}.$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа $M>0$ и $q\in(0;1)$ такие, что для всех $n\in N$ выполняется $a_n\leq Mq^n$;

2) $0<\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}<1$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполняются и существует нуль z_0 функции $g(z)$, такой, что $|z_0|\leq 1$.

1. Рассмотрим случай $|z_0|=1$. Пусть существует нуль (8) вида $z_0=e^{i\omega}$ $(\omega\in[0;\pi])$. Тогда

$$1-e^{i\omega}+\sum_{s=1}^{\infty}a_s e^{i\omega s}=0.$$

Таким образом, существует $\omega\in[0;\pi]$, такое, что

$$1-\cos\omega+\sum_{s=1}^{\infty}a_s\cos s\omega=0, \qquad (10)$$

$$-\sin\omega+\sum_{s=1}^{\infty}a_s\sin s\omega=0. \qquad (11)$$

Из (10) очевидно, что $\omega\neq 0$.

Пусть $m\in R$ определено согласно Лемме 1.

Умножим (10) на $\frac{\sin m\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}$, а (11) – на $\frac{-\cos m\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}$.

Сложив полученные равенства, получим

$$\frac{1}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}(\sin m\omega-\cos\omega\sin m\omega+\sin\omega\cos m\omega)+\sum_{s=1}^{\infty}a_s\frac{\sin m\omega\cos s\omega-\cos m\omega\sin s\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}=0,$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}\left(\sin m\omega-\sin(1-m)\omega\right)+\sum_{s=1}^{\infty}a_s\frac{\sin(m-s)\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}=0.$$

И окончательно

$$1+\sum_{s=1}^{\infty}a_s\frac{\sin(m-s)\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}=0. \qquad (12)$$

Из (12) и (9) при неотрицательных значениях a_s $(s=1,2,\ldots)$ получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{a_s}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}-1=\sum_{s=1}^{\infty}a_s\left(\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2(2s-1)}}+\frac{\sin(m-s)\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}\right)\geq 0\,.$$

Это противоречит второму условию теоремы.

2. Рассмотрим случай $|z_0|<1$. Рассмотрим окрестность точки z_0, расположенную целиком внутри единичного круга $|z|=1$, и такую, что на ее границе γ нет нулей функции $g(z)$.

По 1 условию теоремы ряд $\sum_{s=1}^{\infty}a_s$ сходится. Отсюда следует, что последовательность многочленов

$$P_k(z)=1-z+\sum_{s=1}^{k}a_s z^s$$

сходится равномерно к функции $g(z)$ внутри единичного круга.

Согласно теореме Гурвица [3] существует натуральное число $k_0=k_0(\gamma)$, такое, что для любого натурального числа $k>k_0$ число нулей многочлена $P_k(z)$ внутри кривой γ равно числу нулей функции $g(z)$ внутри этой кривой. Значит, существует нуль многочлена $P_k(z)$, расположенный внутри единичного круга.

С другой стороны, из второго условия теоремы получаем, что при любом $k\in N$ выполняется условие (3). Тогда, согласно теореме 1, уравнение (2) асимптотически устойчиво при любом значении $k\in N$. Отсюда следует, что все корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^k-\lambda^{k-1}+\sum_{s=1}^{k}a_s\lambda^{k-s}=0$$

расположены внутри единичного круга. Следовательно, все нули многочлена $P_k(z)$ расположены вне единичного круга при любом значении $k\in N$. Получили противоречие.

Таким образом, все нули z_0 функции $g(z)$ расположены вне единичного круга. Согласно теореме 3 уравнение (1) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Из леммы 2 и теоремы 4 получаем следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа $M>0$ и $q\in(0;1)$ такие, что для всех $n\in N$ выполняется $a_n\leq Mq^n$;

2) $0<\sum_{s=1}^{\infty}sa_s\leq\frac{\pi}{2}$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Теоремы 4 и 5 являются бесконечномерными аналогами теорем 1 и 2 соответственно.

Литература

1. Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // Journal of Difference Equations and Applications. – 2007. – Vol. 13, Iss. 5. – P. 457–461.

2. Levin, S. A note on difference-delay equations / S. Levin, R. May // Theoretical Population Biology. – 1976. – Vol. 9, Iss. 2. – P. 178–187.

3. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1978. – 415 с.

Поступила в редакцию 22 июня 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2020, vol. 12, no. 3, pp. 29–33

DOI: 10.14529/mmph200304

CRITERIA FOR STABILITY OF VOLTERRA DIFFERENCE EQUATIONS

D.A. Komissarova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: komissarovada@susu.ru

Continuous and discrete Volterra-type difference equations arise in many applications. In particular, when studying models of population dynamics, modeling various economic or physical processes, in management theory, and medicine. The paper deals with the problem of asymptotic stability of the zero solution of a linear difference equation of Volterra type in convolutions. The definitions of stability and asymptotic stability of the zero solution of this equation are given. The article presents sufficient conditions for the asymptotic stability of linear Volterra difference equations. The corresponding theorems are proved using the *z*-transform method. The obtained criteria of asymptotic stability of the zero solution are restrictions on the coefficients of the original equation, that is, they represent a certain region of stability in the space of the equation parameters. The obtained criteria are compared with some known sufficient conditions for the asymptotic stability of finite-dimensional linear difference equations. The main advantage of the obtained sufficient conditions for asymptotic stability of a linear difference equation of Volterra type is the visibility of these criteria and ease of their application. In addition, this type of criteria is useful if the coefficients of the equation are not known exactly.

Keywords: stability; difference equations; Volterra equations.

References

1. Kipnis M.M., Komissarova D.A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 2007, Vol. 13, Iss. 5, pp. 457–461. DOI: 10.1080/10236190601132933

2. Levin S., May R. A note on difference-delay equations. *Theoret. Popul. Biol.*, 1976, Vol. 9, Iss. 2, pp. 178–187. DOI: 10.1016/0040-5809(76)90043-5

3. Markushevich, A.I. *Kratkiy kurs teorii analiticheskikh funktsiy* (A short course in the theory of analytic functions). Moscow, Nauka Publ., 1978, 415 p. (in Russ.).

Received June 22, 2020