УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph200305

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли

Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

E-mail: r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com

Коэффициентные обратные задачи для уравнений в частных производных могут быть поставлены как задачи оптимального управления, т. е. в вариационной форме. В таких постановках искомые коэффициенты уравнений состояния играют роль управляющих функций и целевые функционалы составляются на основе дополнительных условий. В статье рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении младшего коэффициента многомерного параболического уравнения с интегральным граничным условием и дополнительным интегральным условием. При этом роль управляющей функции играет младший коэффициент параболического уравнения и является элементом пространства интегрируемых по Лебегу функций с конечным индексом суммируемости. Решение краевой задачи для параболического уравнения, при каждом заданном управляющей функции, определяется как обобщенное решение из пространства Соболева. Целевой функционал составлен на основе дополнительного интегрального условия. Доказано существование решение задачи и получено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: параболическое уравнение; обратная задача; интегральные условия; вариационная постановка.

Введение

Вариационные постановки коэффициентных обратных задач для параболических уравнений при классических граничных и дополнительных условиях изучены в работах [1–5] и др. Однако эти задачи при интегральных условиях исследованы существенно слабее [6, 7].

В настоящей работе изучается вариационная постановка обратной задачи об определении младшего коэффициента многомерного параболического уравнения с интегральными условиями. Доказано существование решение задачи, и получено необходимое условие оптимальности.

1. Постановка задачи

Пусть R_n – евклидово пространство размерности $n \geq 2$, $\Omega \subset R_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, $S = S^{'} \cup S^{''}$, $T > 0$ – заданное число, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $S_T^{'} = S^{'} \times (0,T), S_T^{''} = S^{''} \times (0,T)$.

Рассмотрим в цилиндре Q_T линейное параболическое уравнение

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,t) u_{x_j} \right)_{x_i} + \upsilon(x) u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T , \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega , \tag{2}$$

$$u|_{(x,t)\in S_T^{'}} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial N}|_{(x,t)\in S_T^{''}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_j} \cos(\nu, x_i)|_{(x,t)\in S_T^{''}} = \int_{\Omega} K(x,y,t) u(y,t) dy |_{(x,t)\in S_T^{''}} . \tag{3}$$

Здесь ν – единичный вектор нормали к $S^{''}$, направленной вне Ω; $a_{ij}\left(i, j = \overline{1,n}\right), \upsilon, f, \varphi, K$ – некоторые функции; $u = u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3).

Задачу нахождения решения $u = u(x,t)$ задачи (1)-(3) по заданным функциям $a_{ij}\left(i, j = \overline{1,n}\right), \upsilon, f, \varphi, K$ называют прямой задачей. На практике возникают также обратные задачи, в которых некоторые из коэффициентов $a_{ij}(x,t)\left(i,j=\overline{1,n}\right), \upsilon(x)$ уравнения неизвестны и подлежат определению по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами.

Пусть в задаче (1)–(3) $a_{ij}\left(i,j=\overline{1,n}\right), f, \varphi, K$ – известные функции. Требуется найти пару функций (u,υ), удовлетворяющих условиям (1)–(3) и дополнительному условию

$$\int_0^T \omega(t)u(x,t)dt=\alpha(x), \quad x\in\Omega, \tag{4}$$

где ω и α – известные функции.

Задачу (1)–(4) поставим в вариационной форме: требуется минимизировать функционал

$$J(\upsilon)=\int_\Omega\left|\int_0^T\omega(t)u(x,t;\upsilon)dt-\alpha(x)\right|^2dx \tag{5}$$

на множестве

$$V=\left\{\upsilon=\upsilon(x)\in L_s(\Omega):\left|\upsilon(x)\right|\le d \quad п.в.на\ \Omega\right\} \tag{6}$$

при условиях (1)–(3), где $s\ge n+1$ при $n\ge 2$, $d>0$ – заданные числа, $u(x,t;\upsilon)=u(x,t)$ – решение краевой задачи (1)–(3) соответствующее коэффициенту $\upsilon\in V$. Ниже эту задачу будем называть задачей (1)–(3), (5), (6). В этой задаче коэффициент $\upsilon=\upsilon(x)$ играет роль управления, а целевой функционал (5) составлен на основе условия (4).

Будем предполагать, что заданные функции $a_{ij}\left(i,j=\overline{1,n}\right), f, \varphi, K, \omega, \alpha$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t), \quad \left(i,j=\overline{1,n}\right),$$

$$\nu\xi^2\le\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu\xi^2, \quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n), \quad \xi^2=\sum_{i=1}^n\xi_i^2,$$

$$\left|a_{ijt}(x,t)\right|\le\mu_1 \quad п.в.на \quad Q_T;\left|K(x,y,t)\right|\le\mu_2,\left|K_t(x,y,t)\right|\le\mu_3 \quad п.в.на \quad S''\times\Omega\times(0,T),$$

$$\varphi\in W_{2,0}^1(\Omega), \quad f\in L_2(Q_T); \tag{7}$$

$$\omega\in L_2(0,T), \quad \alpha\in L_2(\Omega), \tag{8}$$

где $\nu,\mu,\mu_i>0\left(i=\overline{1,3}\right)$ – некоторые постоянные.

Пусть $\upsilon\in V$ – некоторое фиксированное управление. Тогда обобщенным решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (1)–(3) назовем функцию $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ из $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)=\left\{u=u(x,t)\in V_2^{1,0}(Q_T):u(x,t)=0,(x,t)\in S_T'\right\}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}\left[-u\eta_t+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_j}+\upsilon u\eta\right]dxdt-\int_{S_T''}\left[\int_\Omega K(s,y,t)u(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt=$$
$$=\int_\Omega\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int_{Q_T}f\eta dxdt, \quad \eta=\eta(x,t)\in W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \quad \eta(x,T)=0. \tag{9}$$

Можно показать, что краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима в $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ при каждом $\upsilon\in V$, решение задачи (1)–(3) является элементом пространства $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)=\left\{u=u(x,t)\in W_2^{1,1}(Q_T):u(x,t)=0,(x,t)\in S_T'\right\}$ и верна оценка

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\le M_1\left[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}+\|f\|_{2,Q_t}\right]. \tag{10}$$

Здесь и ниже всюду $M_1,M_2,\dots$ – положительные постоянные.

2. Существование решения задачи

Теорема 1. Пусть выполнены условия (7), (8). Тогда задача (1)–(3), (5), (6) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Пусть $\upsilon \in V$ – некоторый элемент и последовательность $\{\upsilon_k\} \subset V$ такова, что

$$\upsilon_k \to \upsilon \text{ слабо в } L_s(\Omega). \qquad (11)$$

Положим $u_k = u_k(x,t) = u(x,t;\upsilon_k)$. Тогда из (1)–(3), записанных при $\upsilon = \upsilon_k$, учитывая оценку (10) получим

$$\|u_k\|_{2,Q_T}^{(1,1)} M_2 \quad (k = 1,2,\ldots), \qquad (12)$$

Тогда в силу теоремы вложения [8, с. 78], не ограничивая общности, можно считать, что

$$u_k \to u \text{ слабо в } W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T), \qquad (13)$$

где $u = u(x,t)$ – некоторая функция из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$.

Пологая в (9) $\upsilon = \upsilon_k, u = u_k$, получим тождества

$$\int_{Q_T} \left[-u_k\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{k_{x_j}} \eta_{x_j} + \upsilon_k(x) u_k \eta \right] dxdt - \int_{S_T''} \left[\int_{\Omega} K(s,y,t) u_k(y,t) dy \right] \eta(s,t) dsdt =$$

$$= \int_{\Omega} \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{Q_T} f\eta dxdt \quad (k = 1,2,\ldots), \ \forall \eta = \eta(x,t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \quad \eta(x,T) = 0. \qquad (14)$$

Проводя обычное преобразование и пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем:

$$\left| \int_{Q_T} \upsilon_k u_k \eta dxdt - \int_{Q_T} \upsilon u \eta dxdt \right| = \left| \int_{Q_T} \upsilon_k (u_k - u)\eta dxdt + \int_{Q_T} (\upsilon_k - \upsilon) u \eta dxdt \right|$$

$$d \|u_k - u\|_{2,Q_T} \|\eta\|_{2,Q_T} + \left| \int_{Q_T} (\upsilon_k - \upsilon) u\eta dxdt \right|. \qquad (15)$$

Используя теоремы вложения [8, с. 78], получаем, что $u\eta \in L_{s/(s-1)}(Q_T)$ при $s \geq n+1$. Тогда из соотношений (11), (13) и (15) следует, что

$$\int_{Q_T} \upsilon_k u_k \eta dxdt \to \int_{Q_T} \upsilon u \eta dxdt. \qquad (16)$$

Известно, что вложение $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \to L_2(S_T'')$ ограничено [8, с. 78]. Используя этот факт и пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\left| \int_{S_T''} \left[\int_{\Omega} K(s,y,t) u_k(y,t) dy \right] \eta(s,t) dsdt - \int_{S_T''} \left[\int_{\Omega} K(s,y,t) u(y,t) dy \right] \eta(s,t) dsdt \right|$$

$$\mu_2 \int_{S_T''} \left[\int_{\Omega} \left(u_k(y,t) - u(y,t) \right(dy \right] |\eta(s,t)| dsdt \leq \mu_2 |\Omega|^{1/2} \|u_k - u\|_{2,Q_T} \int_{S''} \|\eta(s,t)\|_{2,(0,T)} ds$$

$$\mu_2 |\Omega|^{1/2} M_3 \|u_k - u\|_{2,Q_T} \|\eta\|_{2,Q_T}^{(1,1)}, \qquad (17)$$

где $|\Omega| = mes\Omega$. Если в (17) прейдем к пределу при $k \to \infty$ и учтем (13), то получим

$$\int_{S_T''} \left[\int_{\Omega} K(s,y,t) u_k(y,t) dy \right] \eta(s,t) dsdt \to \int_{S_T''} \left[\int_{\Omega} K(s,y,t) u(y,t) dy \right] \eta(s,t) dsdt. \qquad (18)$$

Теперь перейдем к пределу в (14) и учтем соотношения (13), (16), (18). Тогда получим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (9), т. е. $u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$. Таким образом, соотношение (13) справедливо с функцией $u=u(x,t)$, и в частности

$$u(x,t;\upsilon_k)\to u(x,t;\upsilon) \text{ сильно в } L_2(Q_T). \tag{19}$$

Тогда из равенства (5) и соотношения (19) следует, что $J(\upsilon_k)\to J(\upsilon)$ при $k\to\infty$. Таким образом, функционал $J(\upsilon)$ слабонепрерывен на слабокомпактном множестве V. Следовательно, функционал $J(\upsilon)$ достигает своей нижней грани на V [9, с. 49], т. е. справедливо утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Градиент целевого функционала и необходимое условие оптимальности

Пусть функция $\psi(x)=\psi(x,t)=\psi(x,t;\upsilon)\in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ является обобщенным решением следующей сопряженной краевой задачи:

$$\psi_t+\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,t)\psi_{x_i}\right)_{x_j}-\upsilon\psi+\int_{S''}K(\xi,x,t)\psi(\xi,t)d\xi=$$
$$=2\left[\int_0^T\omega(\tau)u(x,\tau;\upsilon)d\tau-\alpha(x)\right]\omega(t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{20}$$

$$\psi(x,T)=0,\quad x\in\Omega, \tag{21}$$

$$\psi|_{(x,t)\in S_T'}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial N}|_{(x,t)\in S_T''}=0. \tag{22}$$

Решение краевой задачи (20)–(22) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}\left[\psi\eta_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\psi_{x_i}\eta_{x_j}+\upsilon\psi\eta\right]dxdt-\int_{Q_T}\left[\int_{S''}K(\xi,x,t)\psi(\xi,t)d\xi\right]\eta dxdt=$$
$$=-2\int_{Q_T}\left\{\left[\int_0^T\omega(\tau)u(x,\tau;\upsilon)d\tau-\alpha(x)\right]\omega(t)\right\}\eta dxdt,\quad \forall\eta=\eta(x,t)\in W_{2,0}^{1,1}(Q_T),\ \eta(x,0)=0. \tag{23}$$

Можно показать, что краевая задача (20)–(22) однозначно разрешима в $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ и верна оценка

$$\|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\ M_4\left\|\left[\int_0^T\omega(\xi)u(x,\xi;\upsilon)d\xi-\alpha(x)\right]\omega(t)\right\|_{2,Q_T}. \tag{24}$$

Для оценки нормы в правой части оценки (20) используем неравенство Коши–Буняковского и учитывая (10), получаем

$$\|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\ \sqrt{2}M_4\|\omega\|_{2,(0,T)}\left[M_1\|\omega\|_{2,(0,T)}\left(\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}+\|f\|_{2,Q_T}\right)+\|\alpha\|_{2,\Omega}\right]. \tag{25}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функционал (5) дифференцируем по Фреше в каждой точке $\upsilon\in V$ и его градиент имеет вид

$$J'(\upsilon)=\int_0^T u(x,t;\upsilon)\psi(x,t;\upsilon)dt,\quad x\in\Omega. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon\in V$ – некоторой элемент, $\Delta\upsilon\in L_s(\Omega)$ – приращение этого элемента и $\upsilon+\Delta\upsilon\in V$. Через $\Delta u=\Delta u(x,t)=u(x,t;\upsilon+\Delta\upsilon)-u(x,t;\upsilon)$ обозначим приращение решения краевой задачи (1)–(3). Тогда ясно, что Δu является решением из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ краевой задачи

$$\Delta u_t-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\left(x,t\right)\Delta u_{x_i}\right)_{x_j}+\left[\upsilon\left(x\right)+\Delta\upsilon\left(x\right)\right]\Delta u=-\Delta\upsilon\left(x\right)u,\quad \left(x,t\right)\in Q_T\,, \tag{27}$$

$$\Delta u\left(x,0\right)=0,\quad x\in\Omega\,, \tag{28}$$

$$\Delta u\,|_{(x,t)\in S_T^{'}}=0,\quad \frac{\partial\Delta u}{\partial N}\,|_{(x,t)\in S_T^{''}}=\int\limits_{\Omega}K\left(x,y,t\right)\Delta u\left(y,t\right)dy\,|_{(x,t)\in S_T^{''}} \tag{29}$$

и для него справедлива оценка:

$$\left\|\Delta u\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\,M_5\left\|\Delta\upsilon u\right\|_{2,Q_T}.$$

Тогда, используя неравенство (1.7) из [8, с. 75] и ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}\left(Q_T\right)\to L_{2s/(s-2)}\left(Q_T\right)$ при $s\geq n+1$, имеем

$$\left\|\Delta u\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\,M_5T^{1s}\left\|\Delta\upsilon\right\|_{s,\Omega}\left\|u\right\|_{2s/(s-2),Q_T}\,M_6\left\|\Delta\upsilon\right\|_{s,\Omega}\left\|u\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}. \tag{30}$$

Приращение $\Delta J\left(\upsilon\right)=J\left(\upsilon+\Delta\upsilon\right)-J\left(\upsilon\right)$ функционала (5) представим в виде

$$\Delta J\left(\upsilon\right)=2\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\int\limits_0^T\omega\left(\xi\right)u\left(x,\xi;\upsilon\right)d\xi-\alpha\left(x\right)\right]\int\limits_0^T\omega\left(t\right)\Delta u\left(x,t\right)dt\right\}dx+\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_0^T\omega\left(t\right)\Delta u\left(x,t\right)dt\right|^2dx\,. \tag{31}$$

Из (27)–(29) следует, что справедливо равенство

$$\int\limits_{Q_T}\left[\Delta u_t\psi+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Delta u_{x_j}\psi_{x_i}+\left(\upsilon+\Delta\upsilon\right)\Delta u\psi\right]dxdt-\int\limits_{S_T^{''}}\left[\int\limits_{\Omega}K\left(s,y,t\right)\Delta u(y,t)dy\right]\psi\left(s,t\right)dsdt=$$

$$=-\int\limits_{Q_T}\Delta\upsilon u\psi\,dxdt\,. \tag{32}$$

В (23) положим $\eta=\Delta u$, полученное равенство вычтем из (32) и придем к равенству

$$2\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\int\limits_0^T\omega\left(\xi\right)u\left(x,\xi;\upsilon\right)d\xi-\alpha\left(x\right)\right]\int\limits_0^T\omega\left(t\right)\Delta u\left(x,t\right)dt\right\}dx=\int\limits_{Q_T}\left(u\psi+\Delta u\psi\right)\Delta\upsilon dxdt\,.$$

Подставляя это выражение в (31), получим

$$\Delta J\left(\upsilon\right)=\int\limits_{Q_T}u\psi\Delta\upsilon dxdt+R\,, \tag{33}$$

где

$$R=\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_0^T\omega\left(t\right)\Delta u\left(x,t\right)dt\right|^2dx+\int\limits_{Q_T}\Delta u\psi\Delta\upsilon dxdt\,. \tag{34}$$

Используя неравенство (1.8) из [8, с. 75], ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}\left(Q_T\right)\to L_{2s/(s-1)}\left(Q_T\right)$ и оценки (30), имеем

$$\left|\int\limits_{Q_T}u\psi\Delta\upsilon dxdt\right|\leq\left\|u\right\|_{2s/(s-1),Q_T}\left\|\psi\right\|_{2s/(s-1),Q_T}\left\|\Delta\upsilon\right\|_{s,Q_T}\,M_7\left\|u\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\left\|\psi\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\left\|\Delta\upsilon\right\|_{s,\Omega}$$

$$M_8\left\|u\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\left\|\psi\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\left(\left\|\Delta\upsilon\right\|_{s,\Omega}\right)^2. \tag{35}$$

Кроме того, используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (30), имеем

$$\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_0^T\omega\left(t\right)\Delta u\left(x,t\right)dt\right|^2dx\leq\left\|\omega\right\|_{2,(0,T)}^2\left\|\Delta u\right\|_{2,Q_T}^2\,M_6^2\left\|\omega\right\|_{2,(0,T)}^2\left(\left\|u\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\right)^2\left|\Delta\upsilon\right|_{s,\Omega}^2. \tag{36}$$

Подставляя оценки (35), (36) в (34), получаем оценку

$$|R| \le \left(M_6^2 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + M_8 \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \right) \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta\upsilon\|_{s,\Omega}^2 . \quad (37)$$

Тогда из (33), (37) следует, что функционал $J(\upsilon)$ (5) дифференцируем и его градиент имеет вид (26). Теорема 2 доказана.

С помощью формулы градиента (26) и теоремы 5 из [9, с. 28] можно установить необходимое условие оптимальности управления в задаче (1)–(3), (5), (6).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\upsilon_* = \upsilon_*(x) \in V$ – решение задачи (1)–(3), (5), (6), т. е. оптимальное управление. Тогда выполняется неравенство

$$\int_\Omega \left[\int_0^T u(x,t;\upsilon_*)\psi(x,t;\upsilon_*)dt \right] \left[\upsilon(x) - \upsilon_*(x) \right] dx \ge 0 , \ \forall \upsilon = \upsilon(x) \in V .$$

Литература

1. Искендеров, А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики / А.Д. Искендеров // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 274, № 3. – С. 531–533.
2. Алифанов, О.А. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.А. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 285 с.
3. Кабанихин, С.И. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности / С.И. Кабанихин., Г. Даирбаева // Международная конференция «Обратные некорректные задачи математической физики, посвященная 75-летию академика М.М. Лаврентьева», Новосибирск, 20–25 августа 2007. – Новосибирск, 2007. – С. 1–5.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009. – 457 с.
5. Iskenderov, A.D. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem / A.D. Iskenderov, R.K. Tagiyev // The 7th International Conference «Inverse Problems: modelling and simulation» (IMPS-2014), May 26–31, 2014. – 2014. – P. 31.
6. Тагиев, Р.К. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / Р. К. Тагиев, Р.А. Касумов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – № 45. – С. 49–59.
7. Габибов, В.М. Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / В.М. Габибов // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-матем. наук. – 2017. – № 2. – С. 80–91.
8. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 3, pp. 34–40

DOI: 10.14529/mmph200305

VARIATIONAL FORMULATION OF AN INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS

R.K. Tagiev, Sh.I. Maharramli
Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan
E-mail: r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com

Coefficient inverse problems for partial differential equations can be posed as optimal control problems, i. e. in variation form. In such formulations, the sought-for coefficients of the state equations play the role of control functions, and the objective functionals are compiled on the basis of additional conditions. The paper discusses a variational formulation of the inverse problem of determining the lower coefficient of a multidimensional parabolic equation with an integral boundary condition and an additional integral condition. In this case, the role of the control function is played by the lower coefficient of the parabolic equation and is an element of the space of Lebesgue integrable functions with a finite summability index. The solution to the boundary value problem for a parabolic equation, for each given control function, is defined as a generalized solution from the Sobolev space. The objective functional is based on an additional integral condition. The existence of a solution to the problem is proved and the necessary optimality condition is obtained.

Keywords: parabolic equation; inverse problem; integral conditions; variational formulation.

References

1. Iskenderov A.D. On variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical physics. *Sov. Math., Dokl.*, 1984, Vol. 29, pp. 52–55. (in Russ.).

2. Alifanov O.A., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Extreme methods for solving ill-posed problems), Moscow, Nauka Publ., 1988, 285 p. (in Russ.).

3. Kabanikhin S.I., Dairbaeva G. Obratnaya zadacha nakhozhdeniya koeffitsienta uravneniya teploprovodnosti (The inverse problem of finding the coefficient of the heat equation). *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Obratnye nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki, posvyashchennaya 75-letiyu akademika M.M.Lavrent'eva"*, Rossiya, Novosibirsk, 20–25 avgusta 2007 (Proc. International Conference "Inverse Ill-posed Problems of Mathematical Physics, Dedicated to the 75th Anniversary of Academician M. M. Lavrentiev", Russia, Novosibirsk, August 20–25, 2007), pp. 1–5. (in Russ.).

4. Kabanikhin, S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and ill-posed problems). Novosibirsk: Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).

5. Iskenderov A.D., Tagiyev R.K. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem. *Proc. 7th International Conference "Inverse Problems: modelling and Simulation" (IPMS–2014)*. May 26–31, 2014, P. 31.

6. Tagiev R.K., Kasumov R.A. Ob optimizatsionnoi postanovke koeffitsientnoi obratnoi zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya s dopolnitel'nym integral'nym usloviem (On the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition). *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2017, no. 45, pp. 49–59. DOI: 10.17223/19988621/45/4

7. Gabibov V.M. Koeffitsientnaya obratnaya zadacha tipa upravleniya dlya parabolicheskogo uravneniya s dopolnitel'nym integral'nym usloviem (Coefficient inverse problem of control type for a parabolic equation with an additional integral condition). *Vestnik Bakinskogo Universiteta. Ser. fiz.-matem. Nauk*, 2017, no. 2, pp. 80–91.

8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Parabolic linear and quasilinear equations). Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).

9. Vasil'ev, F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* (Methods for solving extreme problems). Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p.

Received February 24, 2020