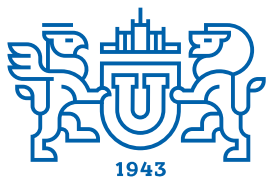


ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2026
Т. 18, № 3**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

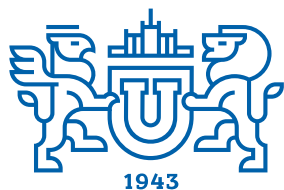
Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гундетти Д.** (Болонский университет, г. Болония, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Радченко П.А.** (ФГБУН «Институт физики прочности и материаловедения им. В.Е. Панина Сибирского отделения Российской академии наук», г. Томск)
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)
д.ф.-м.н., профессор **Яловец А.П.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2026



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

SERIES

2026

Vol. 18, no. 3

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.O. Chernyavskiy, Doctor of Engineering, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
P.A. Radchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Panin Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation
A.V. Trukhanov, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela
A.P. Yalovets, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

BYCHKOV E.V., KOTLOVANOV K.Yu. Optimal Control of Solutions to the Sixth Order Bousinesq Equation with Two Dispersions	5
ГОНЧАРОВ Н.С., КИТАЕВА О.Г., СВИРИДЮК Г.А. Численный метод стабилизации решений стохастической динамической системы Вентцеля в круге и на его границе	15
ЛАРКИН Е.В., ПРИВАЛОВ А.Н., БОГОМОЛОВ А.В., ФИЛИППОВА Е.В. Метод анализа устойчивости замкнутой цифровой системы управления	23
НИКИТЕНКО В.А., ПОПОВ А.В., СИТНИКОВ А.И. Решение задачи диффузии от кольцевого источника с учётом метеорологических условий с помощью сетей Колмогорова–Арнольда	32

Механика

ШЕСТАКОВСКАЯ Е.С., СТАРИКОВ Я.Е. Определение параметров уравнения состояния JWL продуктов детонации по данным цилиндра-теста: метод с понижением размерности	38
ЯУШЕВ А.А., ЛОГИНОВСКИЙ В.А. Расчетно-экспериментальное исследование влияния эксплуатационного износа на динамические свойства кориолисового расходомера	50

Физика

ГОЛУБЕВ Е.В. Приближённое решение задачи теплопроводности и оценка максимальной избыточной температуры при поглощении наносекундного лазерного импульса в проводящем полупространстве	60
КУЦ Д.А., УШАКОВ В.Л., ПОДОШВЕДОВ М.С., СТОЛЯРОВ Ю.Н., ПОДОШВЕДОВ С.А. Оптимизация измерения времени задержки в интерферометре Хонга–Оу–Мандела на основе анализа информации Фишера и экспериментальных данных	75

Персоналии

Ученый, педагог, лидер. К юбилею А.А. ЗАМЫШЛЯЕВОЙ	81
---	----

CONTENTS

Mathematics

- BYCHKOV E.V., KOTLOVANOV K.Yu. Optimal Control of Solutions to the Sixth Order Bousinesq Equation with Two Dispersions..... 5
- GONCHAROV N.S., KITAEVA O.G., SVIRIDYUK G.A. Numerical Method for Stabilizing Solutions of the Wentzell Stochastic Dynamical System in a Circle and on its Border 15
- LARKIN E.V., PRIVALOV A.N., BOGOMOLOV A.V., FILIPPOVA E.V. A Method for Analyzing the Robustness of a Closed-Loop Digital Control System..... 23
- NIKITENKO V.A., POPOV A.V., SITNIKOV A.I. Solution to the Problem of Diffusion from a Ring Source taking into Account Meteorological Conditions, using Kolmogorov–Arnold Networks 32

Mechanics

- SHESTAKOVSKAYA E.S., STARIKOV Ya.E. Determining the Parameters of the JWL Equation of State for Detonation Products using Cylinder Test Data: a Dimensionality Reduction Method..... 38
- YAUŠHEV A.A., LOGINOVSKIY V.A. Calculation and Experimental Study of the Effect of Operational Wear on the Dynamic Properties of a Coriolis Flowmeter 50

Physics

- GOLUBEV E.V. Approximate Solution to the Thermal Conductivity Problem and Estimation of the Maximum Excess Temperature during Absorption of a Nanosecond Laser Pulse in a Conductive Half-Space 60
- KUTS D.A., USHAKOV V.L., PODOSHVEDOV M.S., STOLYAROV Yu.N., PODOSHVEDOV S.A. Optimization of Time-Delay Measurement in a Hong–Ou–Mandel Interferometer based on Fisher Information Analysis and Experimental Data..... 75

Personalia

- Scientist, Lecturer, Leader. To the Anniversary of Alyena Zamyshlyeva 81

OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS TO THE SIXTH ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH TWO DISPERSIONS

E.V. Bychkov, K.Yu. Kotlovanov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: bychkovev@susu.ru

Abstract. This article investigates the Cauchy–Dirichlet and Showalter–Sidorov–Dirichlet problems for an inhomogeneous nonlinear sixth-order Boussinesq equation with two dispersions, which corresponds to an incomplete semilinear Sobolev-type equation of the second order in Banach spaces. Sobolev-type equations are distinguished by the non-invertibility of the operator at the highest time derivative. The problem posed models waves in a channel between lakes (or seas) with external wind forcing, internal damping, and convection. We use the Galerkin method adapted for this mathematical model to prove the existence and uniqueness of a nonlocal solution. The starting point for justifying the *-weak convergence of the Galerkin approximations is the formal representation of the solution as a Galerkin sum over the eigenfunctions of the operator $-\Delta$. The proof itself is based on the derived a priori estimates. Based on the proven theorem, we demonstrate the existence of a solution to the optimal control problem with a classical balance functional.

Keywords: sixth-order Boussinesq equation with two dispersions; optimal control problem; modified Galerkin method; degenerate equation.

Introduction

In a bounded domain Ω of the space R^n with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, and for $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$ we consider the inhomogeneous nonlinear sixth-order Boussinesq equation with two dispersions [1]

$$(\lambda + \Delta^2 - \Delta)x_{tt} + (\alpha^2 \Delta^2 + \lambda \Delta)x - \Delta x^3 = f(s, t) + h(s, t), \quad (1)$$

with homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$\Delta x(s, t) = x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

where $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

Equation (1) has numerous applications in various fields of natural science. For instance, in [1] its applicability to modeling waves in a channel between lakes (or seas) with external wind forcing, internal damping, and convection is demonstrated. In this model, the function $x = x(s, t)$ determines the wave height at point s at time t , $\alpha > 0$ is a constant depending on the water depth, and, λ is a constant characterizing the fluid properties. $f(s, t)$ is the external forcing function (e. g., wind), and $h(s, t)$ is a function characterizing the channel depth. In that work, wave damping in the channel is achieved by optimally determining the depth regulation function. For this purpose, using the maximum principle, the problem is reduced to an optimal control problem with initial-boundary conditions; as a result, without linearizing the nonlinear term, an optimal depth regulation function for the channel is obtained.

In [2], the Cauchy problem for a general class of nonlinear nonlocal wave equations arising in the framework of one-dimensional nonlocal elasticity theory is considered. Global existence of the solution to the Boussinesq equation is proven assuming sufficient smoothness of the initial data along with certain positivity conditions on the nonlinear term.

In [3], an equation analogous to (1) arises when studying nonlinear nonlocal wave equations in one-dimensional elasticity theory as an example. The global existence of solutions to the model is shown, assuming sufficient smoothness of the initial data together with some positivity conditions on the nonlinear term.

In [4], by combining methods from the theory of high-order Sobolev-type equations, monotone operator theory, and compactness methods, the existence of a unique solution to the initial-boundary value problem for the inhomogeneous complete semilinear Sobolev-type equation of the second order was proven for the case of self-adjoint and nonnegative definite operators in the linear part and an s -monotone, p -coercive, homogeneous nonlinear operator with a symmetric Fréchet derivative. The extendability of the local solution to an arbitrary time interval was demonstrated, which allowed for the formulation and solution of the optimal control problem for the nonlinear Boussinesq–Love equation.

The mathematical model (1), (2) can be written in operator form in Banach spaces as

$$L\ddot{x} + Mx + N(x) = u, \quad (3)$$

where $L = \lambda + \Delta^2 - \Delta$, $M = \alpha^2 \Delta^2 + \lambda \Delta$, $N(x) = -\Delta x^3$, $u = f(s, t) + h(s, t)$.

For equation (3), we investigate the Cauchy problem

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad (4)$$

and the Showalter–Sidorov problem [5, 6]

$$P(x(0) - x_0) = 0, \quad P(\dot{x}(0) - x_1) = 0. \quad (5)$$

Here, P is a projector onto the coimage of the operator L . Problems (3), (4) and (3), (5) can be investigated using methods from the theory of Sobolev-type equations (the phase space method) [7]. If Banach spaces are chosen such that L is linear and continuous, M is linear, densely defined, and $N(x)$ is sufficiently smooth, then the theory of relatively p -bounded operators [8, 9] can be applied to show the existence and uniqueness of a local solution. For example, spaces such as

$$L, M, N: X \rightarrow Y; \quad X = \{u \in W_2^{k+4}(\Omega), u(x) = \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad Y = \{W_2^k(\Omega)\}.$$

are suitable. In [10] a theorem on the existence of a unique local solution to problems (3), (4) and (3), (5), was proven, and it was also shown that in the case of monotonicity of the operator N , the phase space is a simple Banach manifold. However, this approach does not answer the question of how to find the solution. Therefore, we will also prove the existence and uniqueness theorem using the modified Galerkin method.

Let us formulate the optimal control problem. Let $\mathfrak{U}$ be the control space, and $\mathfrak{U}_{ad}$ a nonempty, convex, closed set of admissible controls. Then the problem for model (1), (2), (4) consists of minimizing the functional on $\mathfrak{U}_{ad}$:

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (6)$$

The optimal control problem involves finding a compromise: on one hand, it is necessary to achieve a desired state of the system; on the other hand, to minimize the associated labor and energy costs. The initial formulation of such a problem for Sobolev-type models was presented in [10]. Subsequent research in this direction focused on studying semilinear Sobolev-type models of the first order. Optimal control methods acquire particular practical value when dealing with oscillatory processes. Typical examples include: damping of ship rolling, stabilization of a crane boom, creation of effective vibration protection systems, and other similar problems. The significance of solving such problems has been repeatedly emphasized in the scientific literature [11–13].

Besides the introduction and the list of references, the article consists of 3 sections. The first section is devoted to the phase space method. The second section investigates the Cauchy and Showalter–Sidorov problems for the inhomogeneous equation. The third section considers the optimal control problem.

1. Phase Space Method

The abstract problem (3), (4) was previously investigated using methods from the theory of relatively bounded operators [9]. Its main tenets are presented below.

Let $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ be Banach spaces, let the operator $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (i. e., linear and continuous), and let $M \in Cl(X; Y)$ (linear, closed, and densely defined).

The set

$$\rho^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X}) \right\}$$

is called the resolvent set of the operator M with respect to the operator L (or the L -resolvent set of M). The set $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ is called the spectrum of M with respect to L (or the L -spectrum of M).

The operator functions of a complex variable $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$ defined on the L -resolvent set of M are called the L -resolvent, the right L -resolvent, and the left L -resolvent of M , respectively.

The operator M is called (L, σ) -bounded if its L -spectrum lies in a bounded set. Let M be (L, σ) -bounded and let Γ be a contour bounding the L -spectrum of M . Then the operators

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda^L(M) d\lambda, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\lambda^L(M) d\lambda$$

are projectors in the spaces $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$, respectively. Let $\ker P = \mathfrak{X}^0$, $\operatorname{im} P = \mathfrak{X}^1$, $\ker Q = \mathfrak{Y}^0$, $\operatorname{im} Q = \mathfrak{Y}^1$.

The projectors P and Q split the spaces $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ into direct sums: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$ and $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$ such that the actions of the operators L and M make sense as operators $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$. The operator M is called (L, p) -bounded if $M(L, \sigma)$ -bounded and the operator H is nilpotent of degree p .

Let $\mathfrak{P}$ be a Banach manifold without boundary modeled by the space $\mathfrak{X}$. We say that a pair (x, y) belongs to the tangent bundle of the set $\mathfrak{P}$ if x belongs to $\mathfrak{P}$ and the pair (x, y) belongs to the tangent space $T_x \mathfrak{P}$ at the point x i. e.

$$(x, y) \in T\mathfrak{P} \Leftrightarrow x \in \mathfrak{P} \wedge (x, y) \in T_x \mathfrak{P}.$$

The set $\mathfrak{P}$ is called the phase space of equation (3) if

- 1) for any $(x_0, x_1) \in T\mathfrak{P}$ there exists a unique solution to problem (3), (4);
- 2) any solution $x = x(t)$ of equation (3) lies in $\mathfrak{P}$ as a trajectory.

Let $\ker L \neq \{0\}$ and let M $(L, 0)$ -bounded. Then, by the splitting theorem [11], equation (3) can be reduced to an equivalent system of equations

$$\begin{cases} (\mathbb{I} - Q)(M + N)(x) = (\mathbb{I} - Q)u, \\ \dot{x}^1 = -L_1^{-1}Q(M + N)(x) + L_1^{-1}Qu, \end{cases}$$

where $x^1 = Px$, $N = \Delta x^3$.

Let $(\mathbb{I} - Q)u$ be independent of t . Then the local phase manifold of equation (3) is the set $\mathfrak{P} = \{x \in \mathfrak{X} : (\mathbb{I} - Q)(M + N)(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}$. The condition that the initial data belongs to the tangent bundle of the phase space is a necessary condition for the solvability of the Cauchy problem. Thus, in [7], the existence of a unique local solution was proven. It is easy to show that the mathematical model (1), (2) with initial conditions (3) satisfies the conditions of the abstract theorem when $\lambda \cdot \alpha^{-2} < 1$.

Furthermore, we will need an auxiliary lemma.

Lemma 1 [13] If $f \in L^p(0, T; \mathfrak{X})$ and $\dot{f} \in L^p(0, T; \mathfrak{X})$, then, after possibly being redefined on a set of measure zero from the interval $(0, T)$, f is a continuous mapping from $[0, T]$ into $\mathfrak{X}$.

2. Investigation of the Cauchy and Showalter–Sidorov Problems for the Inhomogeneous Equation

We investigate problem (1), (2), (4) using the operator form for convenience. We introduce the function spaces: $H = W_2^{-1}(\Omega)$ is a real, separable Hilbert space with scalar product

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x \tilde{y} ds, \quad \forall x, y \in W_2^{-1}(\Omega),$$

where $\tilde{y}$ is the generalized solution of the Dirichlet problem (2) for the equation $-\Delta\tilde{y} = y$ in Ω ; the Sobolev space with compact support $\mathfrak{X} = \{x \in H^2(\Omega) : \Delta x(s, t) = x(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T)\}$ – a real, separable Hilbert space; the Lebesgue space $L^4(\Omega)$. Note that $\mathfrak{X}$ and L^4 form dual pairs of reflexive separable Banach spaces $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ and $(L^4, (L^4)^*)$ with respect to the duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Let λ_k be the eigenvalues of the homogeneous Dirichlet problem in the domain Ω for the operator $\Delta^2 - \Delta$, numbered in non-decreasing order counting multiplicity, and let φ_k be the corresponding eigenfunctions, orthonormal with respect to the scalar product in H . Furthermore, the linear span $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ is dense in $\mathfrak{X}$ as $m \rightarrow \infty$.

We define the operator $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ by the formula

$$\langle Lx, y \rangle = \int_{\Omega} (\lambda x \tilde{y} - \nabla x \nabla y + xy) ds.$$

For $\lambda \geq \lambda_1$ $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ is self-adjoint, nonnegative definite, and Fredholm.

We define the operator $M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ by the formula

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\Omega} (-\alpha^2 \nabla x \nabla y + \lambda xy) ds.$$

Then, for $\lambda \cdot \alpha^{-2} < 1$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ is self-adjoint and nonnegative definite.

We define the operator $N(x) : L^4 \rightarrow (L^4)^*$ by the formula

$$\langle N(x), y \rangle = \int_{\Omega} x^3 y ds.$$

Its Frechet derivative

$$\left| \langle N'_x(y), w \rangle \right| = 3 \left| \int_{\Omega} x^2 y w ds \right| \leq \text{const} \|x\|_{L^2} \|y\|_{L^4} \|w\|_{L^4}$$

is symmetric and bounded by Holder's inequality.

The operator N is monotone:

$$\langle N'_x(y), y \rangle = 3 \int_{\Omega} x^2 y^2 ds \geq 0$$

and 4-coercive

$$\langle N(x), x \rangle = \int_{\Omega} x^3 x ds = \|x\|_{L^4}^4, \quad \langle N(x), y \rangle = \int_{\Omega} x^3 y ds = \|x\|_{L^4}^3 \|y\|_{L^4} = \|x\|_{\frac{4}{3}} \|y\|_{L^4}.$$

Furthermore, the operator N , due to the properties mentioned above, satisfies the equality

$$\frac{d}{dt} \langle N(x), x \rangle = 4 \langle N(x), \dot{x} \rangle.$$

We define the distribution spaces (functions with values in a Banach space) $L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4)$ and $L^\infty(0, T; \text{coim } L)$, $\mathfrak{X} = \ker L \oplus \text{coim } L$, which are dual to $L^1(0, T; \mathfrak{X}^* \cup (L^4)^*)$ and $L^1(0, T; \mathfrak{X}^*)$, respectively, by the Dunford–Pettis theorem.

Theorem 1. Let $\lambda \geq \lambda_1, \lambda \cdot \alpha^{-2} < 1$ and $u \in L^2(0, T; (L^4)^*)$. Then for any $(x_0, x_1) \in T_{x_0} \mathfrak{P}$, such that $x_0 \in \mathfrak{X} \cap L^4$, $x_1 \in \text{coim } L$ there exists a unique solution $x = x(s, t)$ to problem (1), (2), (4) such that $x \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4)$ and $\dot{x} \in L^\infty(0, T; \text{coim } L \cap \mathfrak{X})$.

We seek a solution to problem (3), (4) in the form of a Galerkin approximation

$$x^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t) \varphi_k.$$

The coefficients $a_k^m(t)$ are found from the system of algebraic-differential equations

$$\langle L\ddot{x}^m, \dot{x} \rangle + \langle Mx^m, \dot{x} \rangle + \langle x^3, \dot{x} \rangle = \langle u, \dot{x} \rangle, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (7)$$

$$\langle x^m(0), \varphi_k \rangle = \langle x_0, \varphi_k \rangle = \beta_k^m, \quad \langle \dot{x}^m(0), \varphi_k \rangle = \langle x_1, \varphi_k \rangle = \gamma_k^m, \quad 1 \leq k \leq m,$$

with $x_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \rightarrow x_0$ in $\mathfrak{X}$ as $m \rightarrow \infty$, and $x_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \rightarrow x_1$ and $\mathfrak{X}$ as $m \rightarrow \infty$.

By classical results, there exists a unique local solution $x^m = x^m(s, t)$, $t \in [0, t^m]$.

We show that the norms of the local solutions of the unknown function and its derivative are bounded in the given spaces on some time interval $[0, T]$. Multiply equation (7) by $\dot{a}_k^m(t)$ ($1 \leq k \leq m$) and sum over k from 1 to m . We obtain

$$\langle L\dot{x}^m, \dot{x}^m \rangle + \langle Mx^m, \dot{x}^m \rangle + \langle N(x^m), \dot{x}^m \rangle = \langle u, \dot{x}^m \rangle. \quad (8)$$

We introduce in the space $\text{coim } L \cap \mathfrak{X}$ the norm $|\dot{x}|^2 = \langle L\dot{x}, \dot{x} \rangle$. By Courant's principle, this norm is equivalent to the norm induced from $\mathfrak{X}$ for $x \in \text{coim } L$.

Using the self-adjointness of the operators L and M , we get $2\langle L\dot{x}^m, \dot{x}^m \rangle = \frac{d}{dt} \langle Lx^m, x^m \rangle$, $2\langle Mx^m, \dot{x}^m \rangle = \frac{d}{dt} \langle Mx^m, x^m \rangle$.

Then equation (8) takes the form

$$\frac{d}{dt} \left[|\dot{x}^m|^2 + \langle Mx^m, x^m \rangle + \frac{1}{2} \langle N(x^m), x^m \rangle \right] = 2\langle u, x^m \rangle.$$

Integrate over $[0, t]$, $t \leq t_m$

$$|\dot{x}^m|^2 + \langle Mx^m, x^m \rangle + \frac{1}{2} \langle N(x^m), x^m \rangle = 2 \int_0^t \langle u, \dot{x}^m \rangle ds + |\dot{x}_1^m|^2 + \langle Mx_0^m, x_0^m \rangle + \frac{1}{2} \langle N(x_0^m), x_0^m \rangle \quad (9)$$

$$|\dot{x}^m|^2 + \langle Mx^m, x^m \rangle + C_N \frac{1}{2} \|x^m\|_{(L^4)}^4 \leq$$

$$2 \int_0^t \|u\|_{(L^4)^*} \|\dot{x}^m\|_{L^4} ds + |\dot{x}_1^m|^2 + \langle Mx_0^m, x_0^m \rangle + C^N \frac{1}{2} \|N(x_0^m)\|_{(L^4)^*} \leq \quad (10)$$

$$\leq \int_0^t \|u\|_{(L^4)^*}^2 ds + \int_0^t \|\dot{x}^m\|_{L^4}^2 ds + |\dot{x}_1^m|^2 + \langle Mx_0^m, x_0^m \rangle + C^N \frac{1}{2} \|N(x_0^m)\|_{(L^4)^*}.$$

From this, in particular, it follows that

$$|\dot{x}^m|^2 \leq C + \int_0^t \|\dot{x}^m\|_{L^4}^2 ds \leq C + \int_0^t \|\dot{x}^m\|_{\mathfrak{X}}^2 ds \leq C + \int_0^t |\dot{x}^m|^2 ds,$$

and by Gronwall's inequality, we get

$$|\dot{x}^m|^2 \leq Ce^t \leq C, \quad t \in [0, T].$$

Since the right-hand side of inequality (10) is bounded, the following inequality holds:

$$|\dot{x}^m|^2 + \langle Mx^m, x^m \rangle + C_N \frac{1}{2} \|x^m\|_{L^4}^p \leq C.$$

The constant C is independent of t_m , and therefore $t_m = T$.

From the obtained a priori estimate, it is evident that the sequences x^m and $\dot{x}^m$ are bounded in the spaces $L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4)$ and $L^\infty(0, T; \text{coim } L)$, respectively, which are dual spaces to the separable Ba-

nach spaces $L^1\left(0, T; \mathfrak{X}^* \cup (L^4)^*\right)$ and $L^1\left(0, T; \mathfrak{X}^*\right)$. Therefore, we can select *-weakly convergent subsequences x^{m_l} and $\dot{x}^{m_l}$ such that

$$x^{m_l} \rightarrow x \text{ *-weakly in } L^\infty\left(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4\right),$$

$$\dot{x}^{m_l} \rightarrow \dot{x} \text{ *-weakly in } L^\infty\left(0, T; \text{coim } L\right).$$

Moreover, $\dot{x}^{m_l}$ is understood as a generalized derivative in the space of distributions. Since the operator N is coercive:

$$\langle N(x^m), x^m \rangle \leq \|N(x^m)\|_{(L^4)^*} \|x^m\|_{L^4} \leq C^N \|x^m\|_{L^4}^3 \|x^m\|_{L^4} = C^N \|x^m\|_{L^4}^4,$$

and, consequently, $N(x^m)$ are bounded in the space $\left(L^4\left(0, T; \mathfrak{X}^* \cup (L^4)^*\right)\right)^*$, then $N(x^{m_l}) \rightarrow g$ - weakly in $\left(L^4\left(0, T; \mathfrak{X}^* \cup (L^4)^*\right)\right)^*$.

We show that $N(x) = g$. From the monotonicity of N it follows that

$$X^{m_l} = \langle N(x^{m_l}) - N(z), x^{m_l} - z \rangle \geq 0, \quad \forall z \in L^4\left(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4\right).$$

From formula (9)

$$\begin{aligned} X^{m_l} = & 2 \int_0^t \langle u, \dot{x}^{m_l} \rangle ds + |x_1^{m_l}|^2 - |\dot{x}^{m_l}|^2 + \langle Mx_0^{m_l}, x_0^{m_l} \rangle - \langle Mx^{m_l}, x^{m_l} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle N(x_0^{m_l}), x_0^{m_l} \rangle - \frac{1}{2} \langle N(x^{m_l}), z \rangle - \langle N(z), x^{m_l} - z \rangle. \end{aligned}$$

By the properties of weakly convergent sequences, we have $\liminf_{m_l \rightarrow \infty} |x^{m_l}(t)|^2 \geq |x(t)|^2$, therefore

$$\limsup_{m_l \rightarrow \infty} X^{m_l} \leq \langle g, x \rangle - \langle g, z \rangle - \langle N(z), x - z \rangle.$$

Then we get

$$\langle g, x \rangle - \langle g, z \rangle - \langle N(z), x - z \rangle \geq 0.$$

Set $z = x - hw$, $h > 0$, $w \in L^4\left(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4\right)$, Then

$$\langle g - N(x - hw), hw \rangle \geq 0, \quad \langle g - N(x - hw), w \rangle \geq 0.$$

Letting $h \rightarrow 0$, by the continuity of N and Lebesgue's dominated convergence theorem, we obtain

$$\langle g - N(x), w \rangle \geq 0$$

Since w is arbitrary, we have $g = N(x)$.

Now we can pass termwise to the limit in equality (7) as $m_l \rightarrow \infty$. Let k be fixed and $m_l > k$. We get

$$\langle L\ddot{x}^{m_l}, \varphi_k \rangle + \langle Mx^{m_l}, \varphi_k \rangle + \langle N(x^{m_l}), \varphi_k \rangle = \langle u, \varphi_k \rangle. \quad (11)$$

Thus, from (11) we deduce

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lx, \varphi_k \rangle + \langle Mx, \varphi_k \rangle + \langle N(x), \varphi_k \rangle = \langle u, \varphi_k \rangle.$$

Due to the density of the system of functions $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ in $\mathfrak{X}$ as $m \rightarrow \infty$, and the arbitrary choice of φ_k , the equality holds for any $v \in \mathfrak{X}$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lx, v \rangle + \langle Mx, v \rangle + \langle N(x), v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

From the expansion of the initial functions into series $x^{m_l}(0) = x_l^0 \rightarrow x_0$ weakly in $\mathfrak{X}$, and $x^{m_l}(0) \rightarrow x(0)$ in $\mathfrak{X}$, hence, $x(0) = x_0$.

From the obtained a priori estimates

$$\langle \dot{x}^{m_l}, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \dot{x}, \varphi_k \rangle \text{ *-weakly in } L^\infty(0, T)$$

and, therefore, considering Lemma 1, we get

$$\dot{x}^{m_l}(0), \varphi_k \rightarrow \dot{x}(t), \varphi_k|_{t=0} = \dot{x}(0), \varphi_k.$$

On the other hand, from the expansion of the initial functions

$$\langle \dot{x}^{m_l}(0), \varphi_k \rangle \rightarrow \langle x_1, \varphi_k \rangle.$$

Thus,

$$\langle \dot{x}(0), \varphi_k \rangle = \langle x_1, \varphi_k \rangle, \quad \forall k.$$

Uniqueness is proven by contradiction $x = x(s, t)$ satisfies the equation and the initial conditions, i.e., it is a solution to (1), (2), (4).

Uniqueness is proven by contradiction. Let $x_1(s, t)$ and $x_2(s, t)$ be two distinct solutions to problem (1), (2), (4). Denote $w(s, t) = x_1(s, t) - x_2(s, t)$. Repeating the arguments above, we arrive at the inequality

$$|\dot{w}^m|^2 \leq \int_0^t \dot{w}_{L^4}^{m2} ds \leq \int_0^t \dot{w}_{\mathfrak{X}}^{m2} ds \leq \int_0^t |\dot{w}^m|^2 ds,$$

and by Gronwall's inequality,

$$|\dot{w}^m|^2 \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

Taking into account zero initial values, we get $w(s, t) = 0$.

Repeating the arguments of the proof above, it is easy to prove the following theorem on the existence of a solution to the Showalter–Sidorov problem.

Theorem 2. Let $\lambda \geq \lambda_1, \lambda \cdot \alpha^{-2} < 1$ and $u \in L^2\left(0, T; (L^4)^*\right)$. Then for any $x_0 \in \mathfrak{X} \cap L^4$, $x_1 \in \text{coim} L$

there exists a solution $x = x(s, t)$ to problem (1), (2), (5) such that $x \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4)$ and $\dot{x} \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X})$.

3. Optimal Control Problem

To investigate the optimal control problem (1), (2), (4), (6) we construct the corresponding space $\mathfrak{U} = L^2\left(0, T; (L^4)^*\right)$, and then introduce in it a nonempty, closed, and convex set of admissible controls

$\mathfrak{U}_{ad}$. Let's build a space $\mathfrak{X}_1 = \{x | x \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4), \dot{x} \in L^\infty(0, T; \text{coim} L \cap \mathfrak{X})\}$.

A pair $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ is called a solution to the optimal control problem if

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

where pairs $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ satisfy problem (1), (2), (4). The function $\tilde{u}$ is called the optimal control. An admissible element of problem (1), (2), (4), (6) is a pair $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$, satisfying problem (1), (2), (4) for which $J(x, u) < +\infty$. Since the set $\mathfrak{U}_{ad} \neq \emptyset$, for any $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ by Theorem 1, there exists a unique solution $x = x(u)$ to problem (1), (2), (4).

Let us formulate theorems on the existence of optimal control for the Cauchy and Showalter–Sidorov problems.

Theorem 3. Let $\lambda \geq \lambda_1$ and $\lambda \cdot \alpha^{-2} < 1$ hold. Then for any $(x_0, x_1) \in T\mathfrak{P}$, $T \in \mathbb{R}_+$, there exists a solution to problem (1), (2), (4), (6).

From the theorem on the existence of a unique solution to problem (1), (2), (4), it follows that the operator

$$\left(L \frac{d}{dt^2} + M + N(\cdot) \right): \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{U}$$

is a homeomorphism. We define the cost functional used in (6) as

$$J(x, u) = J(u) = \beta \left(x(t) - z(t)_{L^4(0, T; \mathfrak{X} \cap L^4)}^4 + \dot{x}(t) - \dot{z}(t)_{L^2(0, T; \text{coim} L)}^2 \right) + (1 - \beta) u(t)_{\left(L^2(0, T; L^4 \cap \mathfrak{X}) \right)^*}^2, \quad (12)$$

where $\beta \in (0, 1)$ is a weight coefficient. Let $\{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}$ be a sequence such that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} J(u_m) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u), \quad (13)$$

then from (13) it follows that

$$\|u(t)\|_{L^2\left(0, T; \left(L^4\right)^*\right)}^2 \leq C \quad (14)$$

for all $m \in \mathbb{N}$. Since functional (12) is not strictly convex, the solution to the optimal control problem may not be unique. According to (14), from the sequence $\{u_m\}$ we can extract a weakly convergent subsequence (which, for convenience, we keep denoted as $\{u_m\}$, such that $u_m \rightarrow \tilde{u}$. By Mazur's theorem, $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Let $x_m = x(u_m)$ be the weak generalized solution of the equation

$$L\ddot{x}_m + Mx_m + N(x) = u_m.$$

A priori estimates are derived as in the proof of Theorem 1.

Now we can pass termwise to the limit in equality (7) as $m \rightarrow \infty$:

$$L\ddot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + N(\tilde{x}) = \tilde{u}.$$

Thus, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и $\liminf_{m \rightarrow \infty} J(x_m) \leq J(\tilde{x})$. Consequently, $\tilde{x}$ is a solution to the optimal control problem (1), (2), (4), (6).

Repeating the arguments of the proof above, it is easy to prove the theorem on the existence of a solution to the optimal control problem with solutions of the Showalter–Sidorov problem.

Theorem 4. Let $\lambda \geq \lambda_1$ and $\lambda \cdot \alpha^{-2} < 1$ hold. For any $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$, $T \in \mathbb{R}_+$ there exists a solution to the optimal control problem (1), (2), (5), (6).

The research was carried out with the support of a grant from the Russian Science Foundation (project No. 26-21-20022). <https://rscf.ru/project/26-21-20022/>.

References

1. Yildirim K. Active Control of an Improved Boussinesq System. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2020, Vol. 15, Article ID 58. DOI: 10.1051/mmnp/2020024.
2. Durik N., Erbay H.A., Erkip A. Global Existence and Blow-up for a Class of Nonlocal Nonlinear Cauchy Problems Arising in Elasticity. *Nonlinearity*, 2009, Vol. 23, no. 1, Article ID 107. DOI: 10.1088/0951-7715/23/1/006
3. Wang Y. On Properties of Solutions to the Improved Modified Boussinesq Equation. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 2016, Vol. 9, no. 12, pp. 6004–6020. DOI: 10.22436/jnsa.009.12.08
4. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. Optimal Control for a Mathematical Model of Damped Waves in Shallow Water. *Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov*, 2026, no. 119, pp. 39–60. (in Russ.). DOI:10.25728/ubs.2026.119.2
5. Showalter R.E. Existence and Representation Theorems for a Semilinear Sobolev Equation in Banach Space. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1972, Vol. 3, no. 3, pp. 527–543. DOI: 10.1137/0503051

6. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).
7. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. The Phase Space of the Modified Boussinesq Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software*, 2012, Vol. 18(277), no. 12, pp. 13–19. (in Russ.).
8. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. The Initial-Boundary Value Problem for a Nonlinear Modified Boussinesq Equation. *Differential Equations*, 2024, Vol. 60, no. 8, pp. 1065–1076.
9. Sviridyuk G.A., On the General Theory of Operator Semigroups. *Russ. Math. Surv.*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74.
10. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal'noe upravlenie odnim klassom lineynykh vyrozhdennykh uravneniy (Optimal Control for a Class of Degenerate Linear Equations). *Doklady Akademii nauk.*, 1999, Vol. 364, no. 3, pp. 323–325. (in Russ.).
11. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. Optimal Control of Solutions to the Cauchy Problem for an Incomplete Semilinear Sobolev Type Equation of the Second Order. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, Vol. 10, no. 3, pp. 24–37.
12. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An Optimal Control Problem for the Hoff Equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, Vol. 1, no. 2, pp. 247–253. DOI: 10.1134/S1990478907020147
13. Lions J.-L. *Control Optimal de Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles*. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968, 426 p.

Received June 16, 2026

Information about the authors

Bychkov Evgeniy Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: bychkovev@susu.ru.

Kotlovanov Konstantin Yurevich is Senior Lecturer of the Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kotlovanov-ki@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 3, pp. 5–14*

УДК 517.9

DOI: 10.14529/mmph260301

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ДИСПЕРСИЯМИ

Е.В. Бычков, К.Ю. Котлованов

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: bychkovev@susu.ru*

Аннотация. Исследуется задача Коши–Дирихле и Шоуолтера–Сидорова–Дирихле для неоднородного нелинейного уравнения Буссинеска шестого порядка с двумя дисперсиями, отвечающего неполному полулинейному уравнению соболевского типа второго порядка в банаховых пространствах. Особенность уравнений соболевского типа состоит в необратимости оператора при старшей производной по времени. Поставленная задача моделирует волны в канале между озерами (морями) с внешним ветровым воздействием, внутренним затуханием и конвекцией. Методом Галеркина, адаптированным для указанной математической модели, доказано существование и единственность нелокального решения. Исходным пунктом для обоснования *-слабой сходимости Галёркинских аппроксимаций выступает формальное представление решения в виде Галёркинской суммы по собственным функциям оператора $-\Delta$, а само доказательство базируется на полученных априорных оценках. Опираясь на доказанную теорему, удалось доказать существование решения задачи оптимального управления с классическим балансовым функционалом.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска с двумя дисперсиями шестого порядка; задача оптимального управления; модифицированный метод Галеркина; вырожденное уравнение.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26-21-20022, <https://rscf.ru/project/26-21-20022/>.

Литература

1. Yildirim, K. Active Control of an Improved Boussinesq System / K. Yildirim // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. – 2020. – Vol. 15. – P. 58.
2. Durik, N. Global Existence and Blow-up for a Class of Nonlocal Nonlinear Cauchy Problems Arising in Elasticity / N. Durik, H.A. Erbay, A. Erkip // *Nonlinearity*. – 2009. – Vol. 23, no. 1. – Article ID 107.
3. Wang, Y. On Properties of Solutions to the Improved Modified Boussinesq Equation / Y. Wang // *Journal of Nonlinear Science and Applications*. – 2016. – Vol. 9, no. 12. – P. 6004–6020.
4. Замышляева, А.А. Оптимальное управление для математической модели затухающих волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2026. – № 119. – С. 39–60.
5. Showalter, R.E. Existence and Representation Theorems for a Semilinear Sobolev Equation in Banach Space / R.E. Showalter // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. – 1972. – Vol. 3, no. 3. – P. 527–543.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
7. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2012. – № 18(277). – С. 13–19.
8. Замышляева, А.А. Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // *Дифференциальные уравнения*. – 2024. – Т. 60, № 8. – С. 1076–1085.
9. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов // *Усп. мат. наук*. – 1994. – Т. 49, № 4(298). – С. 47–74.
10. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // *Докл. РАН*. – 1999. – Т. 364, № 3. – С. 323–325.
11. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal Control of Solutions to the Cauchy Problem for an Incomplete Semilinear Sobolev Type Equation of the Second Order / A.A. Zamyshlyayeva, E.V. Bychkov // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2023. – Vol. 10, no. 3. – P. 24–37.
12. Sviridyuk, G.A. An Optimal Control Problem for the Hoff Equation / G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2007. – Vol. 1, no. 2. – P. 247–253.
13. Лионс, Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

Поступила в редакцию 16 июня 2026 г.

Сведения об авторах

Бычков Евгений Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: bychkov@susu.ru.

Котлованов Константин Юрьевич – старший преподаватель кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kotlovanovki@susu.ru.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ В КРУГЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

Н.С. Гончаров, О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: goncharovns@susu.ru

Аннотация. Рассматривается задача численного исследования процессов стабилизации решений детерминированной и стохастической системы уравнений Вентцеля. Особенностью исследуемой модели является наличие динамических граничных условий Вентцеля, описывающих взаимосвязанную фильтрацию процессов во внутренней области и на ее границе. Для решения поставленной задачи предлагается использовать численный подход, основанный на экспоненциальной устойчивости и неустойчивости решений детерминированной системы уравнений Вентцеля при различных знаках параметров, описывающих среду и свойства жидкости. В случае неустойчивости решений решается задача стабилизации на основе контура обратной связи. Затем полученные результаты распространяются на стохастическую систему уравнений Вентцеля. В частности, в работе представлены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенного метода при моделировании процессов стабилизации в ограниченной области.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система уравнений Вентцеля; уравнение Баренблатта–Желтова–Кочинной; производная Нельсона–Гликлиха; неустойчивое решение, стабилизация решения.

Введение

Пусть $\Omega = \{(r, \theta) : r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi)\}$ – круг в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \{(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$. На компакте $\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему из двух уравнений, описывающих процесс фильтрации влаги [1],

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha \Delta_{r,\theta,\varphi} u + \beta u, \quad u = (t, r, \theta), \quad (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad (1)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \gamma \Delta_{\theta,\varphi} v + \partial_R u + \delta v, \quad v = (t, \theta), \quad (t, \theta) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (2)$$

где

$$\Delta_{r,\theta} = (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \Delta_{\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (3)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения

$$tr u = v \quad \text{на } \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (4)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta) = u_0(r, \theta), \quad v(0, \theta) = v_0(\theta). \quad (5)$$

Назовем решение задачи (1)–(5) *детерминированным решением* динамической системы Вентцеля. Если мы заменим u и v , заданные на Ω и Γ соответственно, на стохастические процессы $\xi = \xi(t)$ и $\chi = \chi(t)$, определенные на интервале $(0, \tau)$, получим стохастическую динамическую систему Вентцеля, где производная от стохастических процессов $\dot{\xi}(t)$, $\dot{\chi}(t)$, понимается как производная Нельсона–Гликлиха [3] от стохастического процесса $\xi = \xi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ соответственно.

Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в полярной системе координат содержат специальные функции, здесь символом $\Delta_{r,\theta}$ в (3) обозначен модифицированный оператор Лапласа в Ω , а в (3) символом Δ_{θ} обозначен модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами

на Γ . Символом ∂_R обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha, \gamma, \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Впервые разрешимость стохастического уравнения (1) рассмотрена в [4]. Затем эти исследования были продолжены. Например, в [5] доказано существование решений стохастического эволюционного уравнения, в [6] изучалась начально-конечная задача для стохастического динамического уравнения соболевского типа, [7] посвящен исследованию стохастического уравнения соболевского типа высокого порядка. Задача стабилизации стохастического уравнения (1) впервые решена в [8], в [9] рассматривается вопрос о разрешимости системы Вентцеля для уравнения (1). Настоящая работа посвящена изучению нового подхода к изучению устойчивости решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в круге и на его границе, а также решению задачи стабилизации для неустойчивых решений этой системы. В частности, используя модифицированный метод Галеркина, авторы получают решение для задачи стабилизации в детерминированном и стохастическом случаях.

Работа помимо введения и списка литературы состоит из двух частей. Первая часть содержит стабилизацию полученного решения для детерминированной и стохастической динамической системы Вентцеля. Вторая часть содержит алгоритм численного решения для указанных моделей, представленных в предыдущем разделе, и результаты вычислительного эксперимента в задачах стабилизации для неоклассической задачи Вентцеля.

Аналитическое решение для задач стабилизации в условиях динамической системы Вентцеля

В данном разделе мы приводим аналитическое исследование для задачи стабилизации в детерминированном и стохастическом случаях, следуя результатам, приведенным в [2].

В частности, ставится следующая задача стабилизации: требуется найти такое управление в области f_u и на границе области f_v , что решения системы

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta})u_t = \alpha \Delta_{r,\theta} u + \beta u + f_u, u = u(t, r, \theta), (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad (6)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta)v_t = \gamma \Delta_\theta v + \partial_R u + \delta v + f_v, v = v(t, \theta), (t, \theta) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (7)$$

$$tru = v \text{ на } \mathbb{R} \times \Gamma \quad (8)$$

будут экспоненциально устойчивы. Управление f_u и f_v будем искать с помощью контура обратной связи

$$f_u = Bu, f_v = Bv, \quad (9)$$

где B – линейный оператор. Обозначим через n номер максимално значения

$$\left\{ \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}, \lambda < -k^2 \right\}.$$

Оператор B можно представить в виде

$$B = \begin{cases} \mathbb{O}, \lambda > -k^2; \\ \varepsilon - \beta + \alpha n \mathbb{I}, \lambda < -k^2. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда решение системы (1)–(5), замкнутой контуром обратной связи (17), имеет вид

$$u(t) = u_1(t) + \sum_{k=2}^m t \exp\left(\frac{\varepsilon + \alpha n - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right) \frac{(R-r)^k}{2R^k} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} t \exp\left(\frac{\varepsilon + \alpha n - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right) (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta) \quad (11)$$

и экспоненциально устойчиво. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha > \beta$, $\lambda < -1$, тогда при любых $u_0 \in A(\Omega)$, $v_0 \in A(\Gamma)$ решение системы (6)–(8), замкнутое обратной связью (9), где оператор B имеет вид (10), экспоненциально устойчиво.

Пусть $U = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $F = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Следуя [2] построим пространства случайных K -величин. Случайные K -величины $\xi, \chi \in U_K L_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \phi_k, \quad \chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \psi_k, \quad (12)$$

где $\{\phi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta} \in \mathcal{L}(U; F)$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа–Бельтрами $\Delta_\theta \in \mathcal{L}(U; F)$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Gamma)$.

Рассмотрим стохастическую систему Вентцеля

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta} \xi(t) + \beta \xi(t), \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (13)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta) \overset{\circ}{\chi}(t) = \gamma \Delta_\theta \chi(t) + \partial_R \xi(t) + \delta \chi(t), \quad t \in (0, \tau), \quad \chi \in \Gamma. \quad (14)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения

$$tr \xi(t) = \chi(t), \quad (15)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (16)$$

Пусть коэффициенты $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $\lambda < -1$. Поставим следующую задачу стабилизации для системы (13)–(16). Требуется найти такое управление в области η_ξ и на границе области η_χ , что решения системы

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta} \xi(t) + \beta \xi(t) + \eta_\xi, \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (17)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta) \overset{\circ}{\chi}(t) = \alpha \Delta_\theta \chi(t) + \beta \xi(t) + \eta_\chi, \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (18)$$

$$tr \xi(t) = \chi(t) \quad (19)$$

будут экспоненциально устойчивы. Управление η_ξ и η_χ будем искать с помощью контура обратной связи

$$\eta_\xi = B\xi, \quad \eta_\chi = B\chi, \quad (20)$$

где B – линейный оператор.

Поскольку все рассуждения и оценки аналогичны детерминированному случаю, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha k^2 > \beta$, $\lambda < -1$, тогда при любых $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ решение системы (17)–(19), замкнутое обратной связью (20), где оператор B имеет вид (10), экспоненциально устойчиво.

Алгоритм численного решения задачи стабилизации динамической системы Вентцеля

В данном разделе описывается алгоритм численного решения и стабилизации стохастической динамической системы Вентцеля (1)–(5), моделирующей фильтрацию жидкости в круге и на его границе. Выбор численного метода обусловлен возможной неустойчивостью решений при определенных значениях параметров системы.

Рассмотрим модифицированный метод Галеркина, позволяющий построить приближенное решение системы. Пусть $\{\phi_k(r, \theta)\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа–Бельтрами $\Delta_{r,\theta}$ в круге Ω , а $\{\psi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство собственных функций

оператора Лапласа–Бельтрами Δ_θ на границе Γ . Эти функции ортонормированы в смысле скалярных произведений пространств $A(\Omega)$ и $A(\Gamma)$ соответственно. Собственные значения оператора Лапласа имеют вид $\lambda_k = -k^2$.

Приближенное решение задачи (1)–(5) ищется в виде конечных разложений по базисным функциям

$$u(t, r, \theta) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(r, \theta), \quad v(t, \theta) = \sum_{k=1}^N b_k(t) \psi_k(\theta). \quad (21)$$

Подставляя (21) в уравнения (1)–(5) и проектируя на соответствующие базисные функции, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_k(t)$ и $b_k(t)$

$$(\lambda + k^2) a'_k(t) = (\beta - \alpha k^2) a_k(t), \quad k = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Решение системы (22) имеет вид

$$a_k(t) = a_k(0) \exp\left(\frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2} t\right), \quad k = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Начальные значения коэффициентов определяются из условий (5) путем проектирования

$$a_k(0) = u_0, \varphi_{kA(\Omega)}, \quad b_k(0) = v_0, \psi_{kA(\Gamma)}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Для анализа устойчивости решения вычисляется относительный спектр

$$\mu_k = \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Знак величины μ_k определяет характер поведения соответствующей моды: при $\mu_k < 0$ мода экспоненциально затухает (устойчивая), при $\mu_k > 0$ мода экспоненциально возрастает (неустойчивая).

В случае обнаружения неустойчивых мод применяется процедура стабилизации, для этого к исходному уравнению добавляется стабилизирующее слагаемое, соответствующее обратной связи вида (9). Пусть

$$n_m = \arg \max_k \mu_k$$

– номер максимальной неустойчивой моды. Тогда стабилизирующее воздействие имеет вид $u_{stab} = (\varepsilon + \beta - \alpha n_m^2 (\lambda + n_m^2)) u$ и гарантирует экспоненциальное затухание всех мод решения.

После применения стабилизации коэффициенты разложения принимают вид

$$a_k(t) = a_k(0) \exp\left(\frac{\beta - \alpha k^2 + \varepsilon + \beta - \alpha n_m^2 (\lambda + n_m^2)}{\lambda + k^2} t\right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (26)$$

где выбор параметра ε гарантирует отрицательность показателей экспонент для всех k . Ниже (см. рис. 1) приведена блок-схема численного решения и стабилизации для рассматриваемой системы.

Ниже рассмотрим вычислительный эксперимент. Для простоты пусть $\Omega = \{(r, \theta) : r \in [0, 5], \theta \in [0, 2\pi)\}$ – круг в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \{(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$. На компакте $\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему из двух уравнений, описывающих процесс фильтрации влаги:

$$\begin{aligned} (-2 - \Delta_{r, \theta, \varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) &= 5\Delta_{r, \theta, \varphi} \xi + 4\xi, \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \\ (-2 - \Delta_{\theta, \varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) &= 5\Delta_{\theta, \varphi} \chi + \partial_R \xi + 4\chi, \quad t \in (0, \tau), \quad \chi \in \Gamma. \end{aligned}$$

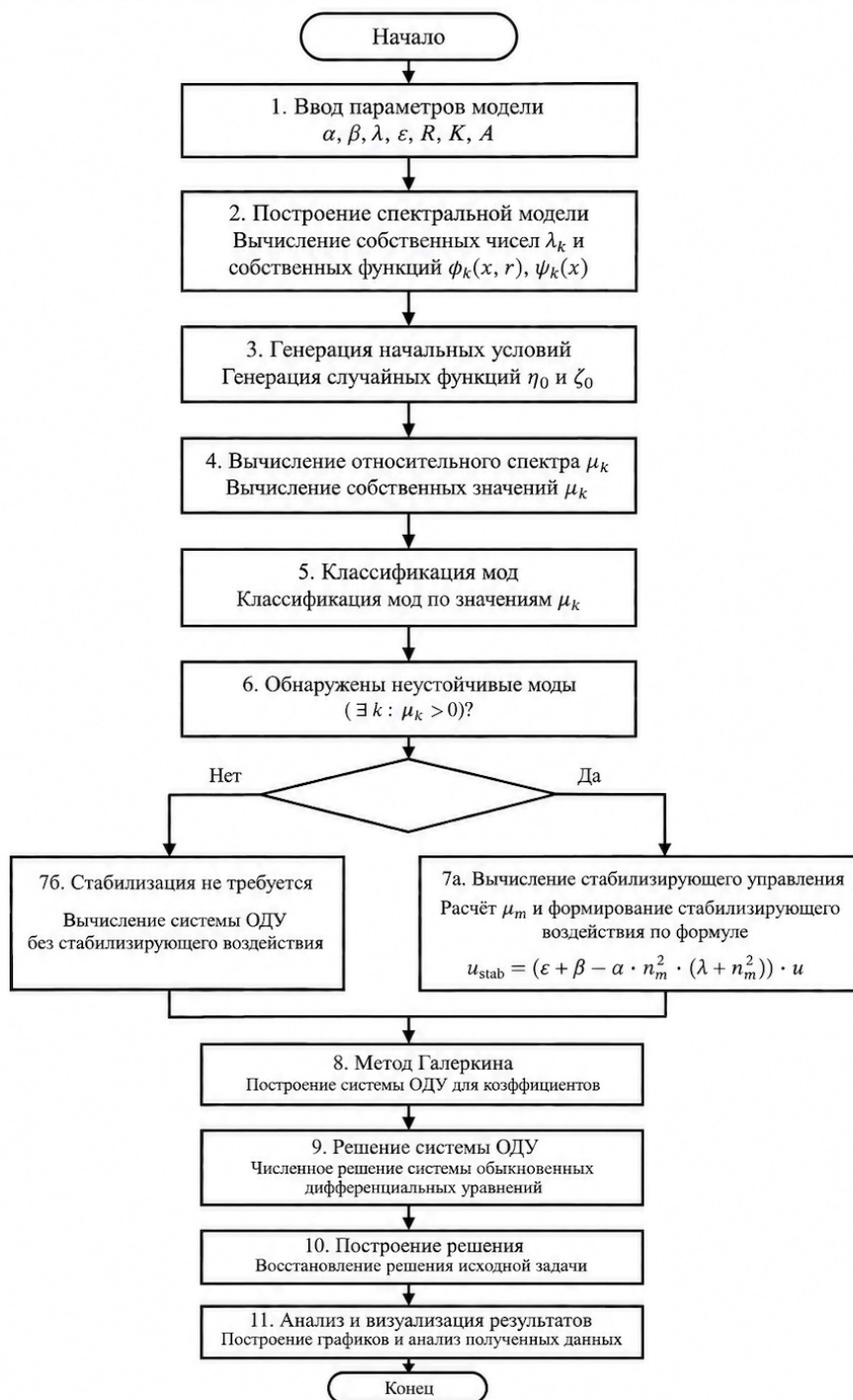


Рис. 1. Блок-схема алгоритма численного решения и стабилизации динамической системы Вентцеля

Выбор данных параметров α, β, λ обусловлен тем, согласно теореме (см. работу [2]) при $\alpha > \beta > 0$ и $\lambda < -1$ решение системы является неустойчивым. Это позволяет наглядно продемонстрировать работу процедуры стабилизации. В частности, на рис. 2 показано поведение коэффициентов $a_k(t)$ для неустойчивого (красные линии) и стабилизированного (зеленые пунктирные линии) решений. Видно, что в неустойчивом случае коэффициенты $a_4(t)$ и $a_5(t)$ экспоненциально возрастают, тогда как после применения стабилизации все коэффициенты стремятся к нулю.

На рис. 3 представлены сечения решений $\xi(t)$ в области и на границе. В частности, левый график демонстрирует неустойчивое поведение – амплитуда неограниченно растет вследствие

наличия мод; правый график показывает стабилизированное решение после применения обратной связи (все моды становятся устойчивыми, а амплитуды экспоненциально затухают с течением времени).

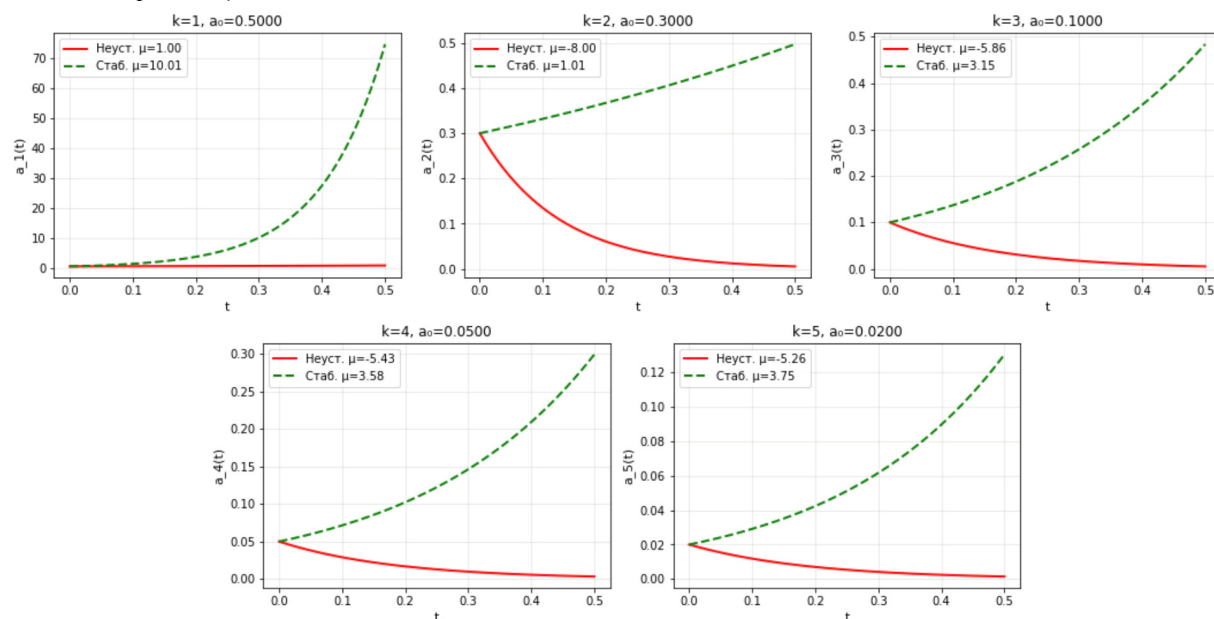


Рис. 2. Динамика коэффициентов разложения

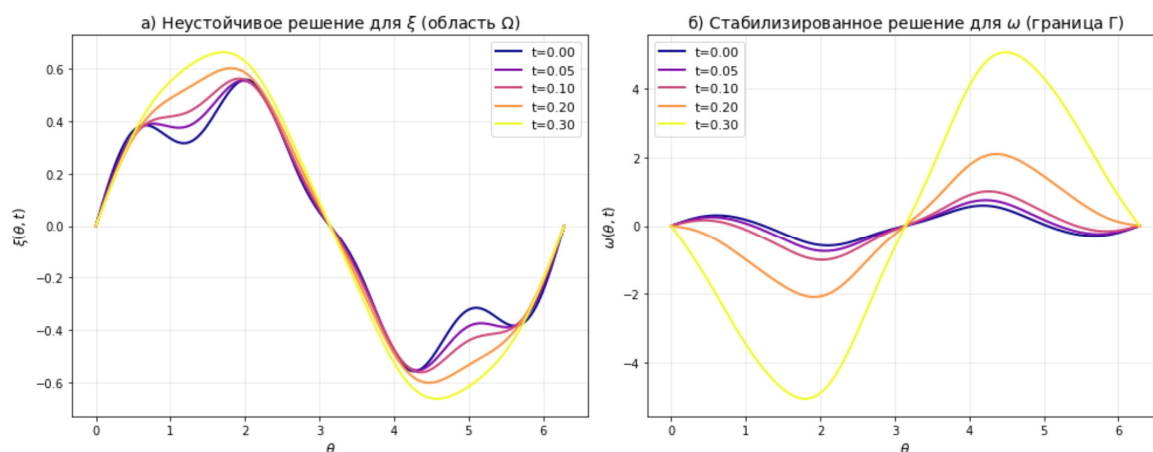


Рис. 3. 2D-сечения решений при различных t

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 25-21-20017, <https://rscf.ru/project/25-21-20017/>.

Литература

1. Barenblatt, G.I. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks / G.I. Barenblatt, Y.P. Zheltov, I.N. Kochina // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1960. – Vol. 24, no. 5. – P. 852–864.
2. Гончаров, Н.С. Стабилизация решения для стохастической динамической системы Вентцеля в круге и на его границе / Н.С. Гончаров О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2025. – Т. 17, № 3. – С. 5–12.
3. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011. – 436 p.
4. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоултера–Сидорова аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

5. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

6. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, no. 128. – P. 1–10.

7. Favini, A. One class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyayeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Vol. 15, no. 1. – C. 185–196.

8. Kitaeva, O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Equation / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – Vol. 10, no. 1. – P. 21–29.

9. Goncharov, N.S. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”. – 2023. – Vol. 15, Iss. 3. – P. 15–22.

Поступила в редакцию 16 июля 2026 г.

Сведения об авторах

Гончаров Никита Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Китаева Ольга Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Свиридюк Георгий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, научно-исследовательская лаборатория неклассических уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sviridiukga@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2026, vol. 18, no. 3, pp. 15–22

DOI: 10.14529/mmph260302

NUMERICAL METHOD FOR STABILIZING SOLUTIONS OF THE WENTZELL STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEM IN A CIRCLE AND ON ITS BORDER

N.S. Goncharov, O.G. Kitaeva, G.A. Sviridyuk

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: goncharovns@susu.ru

Abstract. The paper considers the problem of numerical investigation of the stabilization processes of solutions of the deterministic and stochastic system of Wentzell equations. A feature of the model under study is the presence of dynamic Wentzell boundary conditions, which describe the interconnected filtration of processes in the internal domain and on its boundary. To solve the problem, it is proposed to use a numerical approach based on the exponential stability and instability of solutions of the deterministic system of Wentzell equations under different signs of the parameters describing the medium and the properties of the fluid. In the case of unstable solutions, the stabilization problem is solved based on a feedback loop. Then, the obtained results are extended to the stochastic system of Wentzell equations. In particular, the paper presents computational experiment demonstrating the effectiveness of the proposed method in modeling stabilization processes in a bounded domain.

Keywords: *stochastic dynamic system of Wentzell equations; the Barenblatt–Zhel'tov–Kochina equation; the Nelson–Gliklikh derivative; unstable solution; solution stabilization.*

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Fluids in Fissurized Rocks. *J. Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, Vol. 24, no. 5, pp. 852–864.
2. Goncharov N.S., Kitaeva O.G., Sviridyuk G.A. Stabilization of Solutions for the Wentzell Stochastic Dynamical System in a Circle and on Its Boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2025, Vol. 17, Iss. 3, pp. 5–12. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph250301
3. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9
4. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive “Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph140108
5. Favini A., Sviridiuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410
6. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.
7. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185
8. Kitaeva O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, Vol. 10, no. 1, pp. 21–29. DOI: 10.14529/jcem230103
9. Goncharov N.S., Sviridyuk G.A. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2023, Vol. 15, Iss. 3, pp. 15–22. DOI: 10.14529/mmph230302

Received July 16, 2026

Information about the authors

Goncharov Nikita Sergeevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Kitaeva Olga Gennadevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Sviridyuk Georgiy Anatol'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Mathematical Physics Non-Classical Equations Research Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0795-2277>.

МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Е.В. Ларкин¹, А.Н. Привалов², А.В. Богомолов³, Е.В. Филиппова²

¹ Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация

² Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Российская Федерация

³ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: privalov.61@mail.ru

Аннотация. Исследуется проблема обеспечения устойчивости замкнутых систем цифрового управления объектами, состояние которых описывается вектором состояний, а модель представляет собой матрицу передаточных функций. Управляющую функцию реализует настраиваемый вычислительный модуль, функционирующий в режиме последовательного циклического сканирования, а отработка программных инструкций в нем происходит строго синхронно с ходом реального времени, что гарантирует детерминированное исполнение команд без временных задержек. Последовательная интерпретация управляющей программы представляет собой детерминированный программный поток, математическое моделирование которого в терминах полумарковских процессов позволяет формализовать временные задержки обработки данных и количественно оценить их влияние на устойчивость управления. Между вводом элементов вектора состояния в контроллер и выводом элементов вектора управления из контроллера существует задержка по времени, математическое ожидание которой формирует чистое запаздывание в контурах управления объектом. Робастность системы определена как величина приращения задержки по времени, приводящая систему к ближайшей границе устойчивости, определяемой по необходимым и достаточным условиям существования отрицательных действительных частей корней характеристического уравнения замкнутой системы, сформированного с учетом чистого запаздывания. Разработан метод расчета оценки робастности замкнутой цифровой системы векторного управления, в котором контроллер рассматривается как физический прибор, рассчитывающий вектор управляющих воздействий на основании измеренного вектора состояний объекта в реальном физическом времени. На основе характеристического уравнения системы и инверсной матрицы Гурвица получены аналитические выражения для граничных приращений задержки, позволяющие количественно оценить уровень робастности по устойчивости и вероятность срыва управления. Предложенная методика конструирования робастных систем цифрового управления задаёт последовательность действий от математического моделирования объекта до проверки невыхода времени задержки за заданные пороги на этапе проектирования системы управления. Работоспособность методики подтверждена результатами моделирования переходных процессов в системе управления двухконтурным объектом без и с учетом задержек формирования управляющих воздействий. Приоритеты развития полученных результатов связываются с разработкой метода определения робастности системы управления по перерегулированию и времени ее выхода на установившийся режим с последующим синтезом систем векторного управления, робастных по указанным параметрам.

Ключевые слова: цифровое управление; векторное управление; устойчивость управления; робастность управления.

Введение

Цифровизация платформ управления сложным производственным оборудованием [1–3] открывает возможности для одновременного мониторинга большого числа взаимозависимых тех-

нологических параметров, что напрямую сказывается на стабильности и качестве выпускаемой продукции. В основе этих систем чаще всего лежат перепрограммируемые контроллеры, обрабатывающие управляющие инструкции последовательно, шаг за шагом, причём выполнение каждой команды привязано к реальному физическому времени [4–6]. Это неизбежно порождает задержки времени между моментом считывания данных с датчиков текущего состояния объекта и выдачей управляющих сигналов [7, 8]. Длительность таких задержек зависит прежде всего от размерности вектора состояния, аппаратной производительности контроллера и вычислительной трудоёмкости алгоритма, преобразующего информацию с датчиков в управляющие сигналы.

Последовательная интерпретация управляющей программы контроллером представляет собой детерминированный программный поток, математическое моделирование которого в терминах полумарковских процессов позволяет формализовать временные задержки обработки данных и количественно оценить их влияние на устойчивость замкнутых контуров.

Накопление задержек в контурах обратной связи негативно отражается на динамике замкнутой системы: снижается запас устойчивости, растёт перерегулирование, увеличивается время перехода к установившемуся режиму [3, 9, 10]. Особенно критична потеря устойчивости – она ведёт к полному нарушению процесса управления, поэтому анализ влияния временных запаздываний на устойчивость считается обязательным этапом при разработке систем автоматического регулирования. Если запаздывание слабо влияет на работоспособность контура, систему характеризуют как робастную по устойчивости: даже при росте задержек процесс не срывается [11]. При этом в инженерной практике недостаточно внимания уделяется оцениванию робастности через призму вычислительной сложности управляющего программного обеспечения, что делает дальнейшие исследования в этом направлении актуальными, а их результаты – практически востребованными.

1. Методика конструирования робастных систем цифрового управления

Замкнутая K -мерная векторная система цифрового управления включает последовательно соединённые контроллер и линейный объект регулирования с обратной связью [1, 5]. Контроллер включает блок сравнения сигналов, матрицу программно реализуемых линейных передаточных функций $W_c(s)$ и матрицу задержек $Q(s)$, обусловленных дискретностью функционирования контроллера. Объект регулирования описывается матрицей передаточных функций $W_o(s)$, где s – оператор Лапласа [12].

Характеристическое уравнение, описывающее динамику процессов в этой замкнутой системе, имеет вид [3, 13]

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(T_C) s^n = 0,$$

где $\alpha_n(T_C)$ – коэффициенты, зависящие от времени задержки (T_C) и получаемые в результате перемножения матриц $W_o(s)$ и $W_c(s)$, суммирования произведения с единичной матрицей, раскрытия определителя и приведения подобных членов; N – порядок полинома, максимальный порядок которого оценивается как

$$N \leq \sum_{k=1}^K N_k,$$

где $N_k = N_{o,k} + N_{c,k}$, $N_{o,k} = \max_l N_{o,k,l}$ – максимальное значение порядка полинома знаменателя передаточных функций $W_o(s)$; $N_{o,k,l}$ – порядок полинома знаменателя передаточной функции $W_o(s)$; $N_{c,k} = \max_l N_{c,k,l}$ – максимальное значение порядка полинома знаменателя передаточных функций $W_c(s)$; $N_{c,k,l}$ – порядок полинома знаменателя передаточной функции $W_c(s)$.

Значение порядка уравнения быстро растёт с увеличением количества контуров K управления в системе и ростом порядка знаменателя N_k . Поэтому анализ робастности системы по устойчивости является трудоёмким процессом. Необходимыми условиями устойчивости являются по-

положительные значения коэффициентов $\alpha_n(T_C)$. При этом условиями, необходимыми для обеспечения устойчивости системы, являются

$$\alpha_n(T_C) - \beta_{\alpha,n} \Delta_T > 0, \quad 0 \leq n \leq N,$$

где $\beta_{\alpha,n} = \left| \frac{\partial \alpha_n(T_C)}{\partial T_C} \right|$ – оценка чувствительности коэффициента $\alpha_n(T_C)$ к изменению времени запаздывания T_C ; $\Delta_{T,C}$ – отклонение времени запаздывания от номинального значения.

Дополнительными необходимыми и достаточными для устойчивости системы являются условия критерия Гурвица [14], согласно которым для устойчивой системы все определители, построенные на левом верхнем элементе матрицы Гурвица, должны быть положительными.

Матрица Гурвица для характеристического уравнения имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_{N-1}(T_C) & \alpha_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{N-3}(T_C) & \alpha_{N-2}(T_C) & \alpha_{N-1}(T_C) & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{N-5}(T_C) & \alpha_{N-4}(T_C) & \alpha_{N-3}(T_C) & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ & 0 & 0 & & 0 & \dots & \alpha_1(T_C) & \alpha_2(T_C) \\ & 0 & 0 & & 0 & \dots & 0 & \alpha_0(T_C) \end{bmatrix}.$$

Прямой расчет оценки робастности по записанной матрице приводит к значительным вычислительным затратам, поскольку в системах, передаточные функции $W_o(s)$ и $W_c(s)$ которых имеют в числителях полиномы более низких порядков, по сравнению с полиномами знаменателей, элементы $\alpha_n(T_C)$ появляются в определителях, охватывающих элементы, расположенные ближе к нижнему правому углу матрицы. Для уменьшения вычислительной сложности расчета оценки разделим левую и правую части характеристического уравнения на $s^N \neq 0$ ($s = \sigma + i\omega$, где $\sigma > 0, \sigma \rightarrow 0$ – абсцисса абсолютной сходимости; ω – круговая частота). В результате получим

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(T_C) r^{N-n} = 0,$$

где $r = s^{-1}$.

Если характеристическое уравнение описывает устойчивую замкнутую систему, то его корни $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n, \dots, \tilde{s}_N$ и $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n, \dots, \tilde{r}_N$ либо являются отрицательными действительными, либо это пара комплексно-сопряженных корней, которые имеют одинаковую отрицательную действительную часть. Несложно показать, что если $\text{Re}(\tilde{r}_n) < 0$, то $\text{Re}(\tilde{s}_n) < 0$. Действительно, пусть

$$(\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n+1}) = (\xi + i\zeta, \xi - i\zeta),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\xi < 0$ – действительная часть являются парой комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения, которой соответствует пара комплексно-сопряженных корней $(\tilde{s}_n, \tilde{s}_{n+1}) = (\tilde{r}_n^{-1}, \tilde{r}_{n+1}^{-1})$, определяемая по зависимости

$$(\tilde{s}_n, \tilde{s}_{n+1}) = \left(\frac{1}{\xi + i\zeta}, \frac{1}{\xi - i\zeta} \right) = \left(\frac{\xi - i\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}, \frac{\xi + i\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} \right).$$

Действительные части корней равны $(\text{Re} \tilde{s}_n, \text{Re} \tilde{s}_{n+1}) = (\xi, \xi) (\xi^2 + \zeta^2)^{-1}$, то есть если $\beta < 0$, то и $\xi (\xi^2 + \zeta^2)^{-1} < 0$. Таким образом, анализ робастности по устойчивости системы ко времени задержки сигнала T_C может быть проведен с использованием инверсной матрицы Гурвица

$$H^- = \begin{bmatrix} \alpha_1(T_C) & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_3(T_C) & \alpha_2(T_C) & \alpha_1(T_C) & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_5(T_C) & \alpha_4(T_C) & \alpha_3(T_C) & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N-1}(T_C) & \alpha_{N-2}(T_C) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_N(T_C) \end{bmatrix}.$$

Условия устойчивости для первых трех определителей Гурвица, полученных из этой матрицы, имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1(T_C) - \beta_{H,1}\Delta_T &> 0; \\ [\alpha_1(T_C) \cdot \alpha_2(T_C) - \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_3(T_C)] - \beta_{H,2}\Delta_T &> 0; \\ [\alpha_1(T_C) \cdot \alpha_2(T_C) \cdot \alpha_3(T_C) + \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_1(T_C) \cdot \alpha_5(T_C) - \\ - \alpha_1^2(T_C) \cdot \alpha_4(T_C) - \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_3^2(T_C)] - \beta_{H,3}\Delta_T &> 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{H,1} &= \left| \frac{\partial \alpha_1(T_C)}{\partial T_C} \right|; \\ \beta_{H,2} &= \left| \alpha_1(T_C) \frac{\partial \alpha_2(T_C)}{\partial T_C} + \alpha_2(T_C) \frac{\partial \alpha_1(T_C)}{\partial T_C} - \alpha_0(T_C) \frac{\partial \alpha_3(T_C)}{\partial T_C} - \alpha_3(T_C) \frac{\partial \alpha_0(T_C)}{\partial T_C} \right|; \\ \beta_{H,3} &= \left| \alpha_1(T_C) \cdot \alpha_2(T_C) \frac{\partial \alpha_3(T_C)}{\partial T_C} + \alpha_1(T_C) \cdot \alpha_3(T_C) \frac{\partial \alpha_2(T_C)}{\partial T_C} + \alpha_2(T_C) \cdot \alpha_3(T_C) \times \right. \\ &\times \frac{\partial \alpha_1(T_C)}{\partial T_C} + \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_1(T_C) \frac{\partial \alpha_5(T_C)}{\partial T_C} + \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_5(T_C) \frac{\partial \alpha_1(T_C)}{\partial T_C} + \alpha_1(T_C) \cdot \alpha_5(T_C) \times \\ &\times \frac{\partial \alpha_0(T_C)}{\partial T_C} - 2\alpha_1(T_C) \cdot \alpha_4(T_C) \frac{\partial \alpha_1(T_C)}{\partial T_C} - \alpha_1^2(T_C) \frac{\partial \alpha_4(T_C)}{\partial T_C} - \alpha_3^2(T_C) \frac{\partial \alpha_0(T_C)}{\partial T_C} - \\ &\left. - 2\alpha_3(T_C) \cdot \alpha_3(T_C) \frac{\partial \alpha_0(T_C)}{\partial T_C} \right|. \end{aligned}$$

Если в условиях устойчивости системы заменить знак «>» на знак равенства и разрешить полученные уравнения относительно Δ_T , то можно получить $2N$ граничных значений Δ_T , разделяющих устойчивую и неустойчивую систему:

$$\begin{aligned} \Delta_{T,\alpha,n} &= \frac{\alpha_n(T_C)}{\beta_{\alpha,n}}, 0 \leq n \leq N; \\ \Delta_{T,H,1} &= \frac{\alpha_1(T_C)}{\beta_{H,1}}; \\ \Delta_{T,H,2} &= \frac{\alpha_1(T_C) \cdot \alpha_2(T_C) - \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_3(T_C)}{\beta_{H,2}}; \\ \Delta_{T,H,3} &= [\alpha_1(T_C) \cdot \alpha_2(T_C) \cdot \alpha_3(T_C) + \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_1(T_C) \cdot \alpha_5(T_C) - \\ &- \alpha_1^2(T_C) \cdot \alpha_4(T_C) - \alpha_0(T_C) \cdot \alpha_3^2(T_C)] \cdot \beta_{H,3}^{-1}. \end{aligned}$$

Уровень робастности R определяется по наименьшему из граничных значений Δ_T , то есть

$$R = \min \{ \Delta_{T,\alpha,1}, \dots, \Delta_{T,\alpha,n}, \dots, \Delta_{T,\alpha,N}, \Delta_{T,H,1}, \dots, \Delta_{T,H,n}, \dots, \Delta_{T,H,N} \}.$$

Вследствие того, что время запаздывания вектора рассчитанных значений управляющих воздействий относительно вектора измеренных характеристик состояния объекта является случайным и определяется плотностью распределения $f_C(t)$, вероятность выхода системы за границу устойчивости, определяемую по значению уровня робастности, равна

$$p_R = \int_{T_C+R}^{\infty} f_C(t) dt.$$

Для уровня робастности R или вероятности p_R при проектировании цифровой системы управления может быть установлен порог $\tilde{R}$ или $\tilde{p}_R$, невыход за который гарантирует отсутствие срыва процесса управления объектом.

Из изложенного следует методика конструирования робастных систем цифрового управления:

- 1) разработка математической модели объекта управления, описывающей замкнутую систему управления;
- 2) выбор закона управления $W_c(s)$ и формирование линейно-циклического алгоритма для реализации в виде управляющей программы;
- 3) синтез характеристического уравнения системы;
- 4) получение граничных условий для оценки робастности системы;
- 5) расчет оценок задержек по времени в контурах управления и проверка выполнения условия невыхода параметра T_C за пределы $\tilde{R}$ или $\tilde{p}_R$, характеризующие робастную систему: при невыполнении требований к системе управления производится корректировка программы управления.

2. Пример моделирования системы векторного управления

Влияние времени задержки на устойчивость замкнутой системы управления показано на примере управления двухконтурным объектом, который описывается матрицей передаточных функций

$$W_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(10^{-4}s^2 + 10^{-2}s + 1)s} & -\frac{1}{(2 \cdot 10^{-4}s^2 + 3 \cdot 10^{-2}s + 1)s} \\ \frac{1}{(2 \cdot 10^{-4}s^2 + 3 \cdot 10^{-2}s + 1)s} & \frac{1}{(10^{-4}s^2 + 10^{-2}s + 1)s} \end{bmatrix}.$$

В контроллере реализована функция пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора [15, 16], имеющая вид

$$W_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{10s^2 + 100s + 1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{10s^2 + 100s + 1}{s} \end{bmatrix}.$$

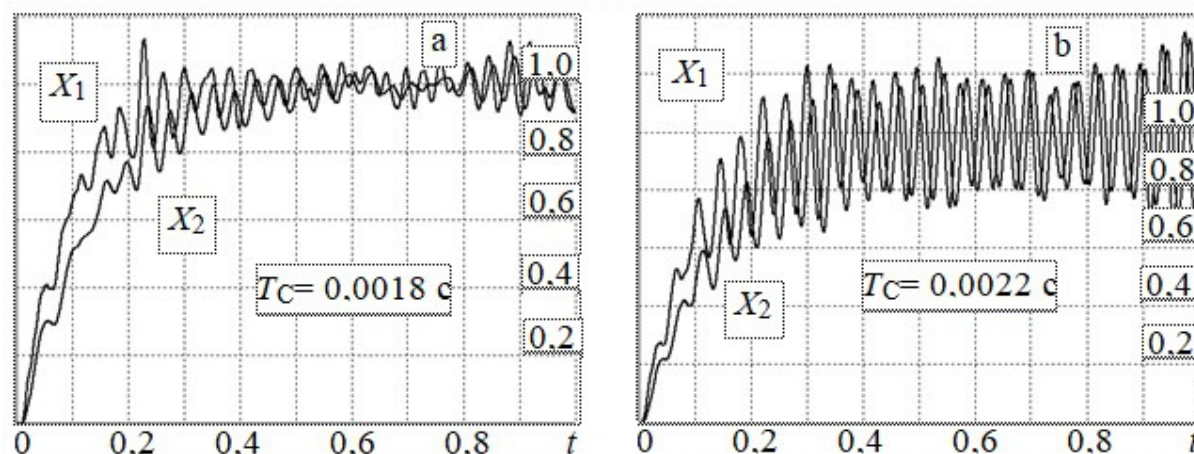
На входы системы подаются единичные ступенчатые функции Хевисайда

$$u_1(n) = u_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \leq 0; \\ 1, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

В канале измерения состояния объекта управления присутствует белый шум, амплитуда которого равна 0,16 ед. от входного воздействия.

На рисунке *a, б* показаны переходные процессы в системах, в которых управляющие воздействия рассчитываются за 0,0018 и 0,0022 с соответственно.

Анализ переходных процессов показывает, что с увеличением T_C всего на 0,0004 с, что составляет 22 % от номинального значения, в системе возникают незатухающие колебания, то есть система не является робастной по отношению ко времени запаздывания.



Переходные процессы в системе без учета (а) и с учетом задержек (б)

Заклучение

Основным результатом исследования является метод расчета оценки устойчивости замкнутой цифровой системы векторного управления, в котором контроллер рассматривается как физический прибор, рассчитывающий вектор управляющих воздействий на основании измеренного вектора состояний объекта в реальном физическом времени. На основе характеристического уравнения системы и инверсной матрицы Гурвица получены аналитические выражения для граничных приращений задержки, позволяющие количественно оценить уровень робастности по устойчивости и вероятность срыва управления. Разработанная методика конструирования робастных систем цифрового управления задаёт последовательность действий от математического моделирования объекта до проверки невыхода времени задержки за заданные пороги на этапе проектирования системы. Дальнейшие исследования направлены на определение робастности по перерегулированию и времени выхода на установившийся режим, а также на разработку методик синтеза систем управления, робастных по указанным параметрам.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 25-29-20177.

Литература

1. Hennessy, J.L. Computer Architecture. A Quantitative Approach / J.L. Hennessy, D.A. Patterson. – N.Y. Elsevier, 2012. – 493 p.
2. Fadali, M.S. Digital Control Engineering: Analysis and Design / M.S. Fadali, A. Visioli. – Elsevier Inc., 2013. – P. 239–272.
3. Математическое обеспечение иерархического цифрового управления сложным технологическим объектом / Е.В. Ларкин, А.В. Богомолов, А.Н. Привалов, Т.А. Акименко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 43–55.
4. Scholl, E. Control of Self-Organizing Nonlinear Systems / E. Scholl, S.H. Klapp, P. Hovel. – Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2016. – 475 p.
5. Bosgra, O.H. Design Methods for Control Systems / O.H. Bosgra, H. Kwakernaak, G. Meinsma. – Dutch Institute of Systems and Control, 2007. – 321 p.
6. Математическая модель двухуровневой цифровой системы управления с прерываниями / Е.В. Ларкин, А.В. Богомолов, А.Н. Привалов, Т.А. Акименко // Вычислительные технологии. – 2025. – Т. 30, № 5. – С. 95–107.
7. Привалов, А.Н. Моделирование надежности программных компонентов киберфизических систем / А.Н. Привалов, А.В. Богомолов, Е.В. Ларкин // Программные продукты и системы. – 2025. – № 1. – С. 47–54.
8. Богомолов, А.В. Математические модели программных отказов цифровых систем управления / А.В. Богомолов, Е.В. Ларкин, А.Н. Привалов // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. – 2025. – № 1. – С. 1–9.
9. Green, M. Linear Robust Control / M. Green, D. Limebeer. – Dover Publications, 2012. – 558 p.

10. Robust Predictive Extended State Observer for a Class of Nonlinear Systems with Time-Varying Input Delay / R. Sanz, P. García, P. Albertos, E. Fridman // *International Journal of Control*. – 2020. – Vol. 93, no. 2. – P. 217–225.
11. Delay-Dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems / M. Wu, Y. He, J.H. She, G.P. Liu // *Automatica*. – 2004. – Vol. 40, no. 8. – P. 1435–1439.
12. Pavlov, A.V. About the Equality of the Transform of Laplace to the Transform of Fourier / A.V. Pavlov // *Issues of Analysis*. – 2016. – Vol. 5 (23), no. 1. – P. 21–30.
13. Linear Algebra / D. Cherney, T. Denton, R. Thomas, A. Waldron / Ed. by K. Glaeser, T. Scrimshaw. – Davis USA, California, 2013. – 410 p.
14. Toshiharu, S. Simple Explanation of Routh-Hurwitz Criterion for Undergraduate Education / S. Toshiharu // *Systems, control and information*. – 2021. – Vol. 65, no. 7. – P. 257–270.
15. Ang, K.N. PID Control System Analysis, Design and Technology / K.N. Ang, G. Chong, Y. Li // *IEEE Transactions of Control Systems Technology*. – 2005. – Vol. 13, Iss. 4. – P. 559–576.
16. Ларкин, Е.В. Нейросетевая настройка генетического алгоритма управления векторной иерархической системой / Е.В. Ларкин, А.В. Богомолов, А.Н. Привалов // *Информатика и автоматизация*. – 2025. – Т. 24, № 5. – С. 1333–1354.

Поступила в редакцию 1 июля 2026 г.

Сведения об авторах

Ларкин Евгений Васильевич – доктор технических наук, профессор, профессор-консультант, Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: elarkin@mail.ru

Привалов Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор, директор института передовых информационных технологий, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: privalov.61@mail.ru

Богомолов Алексей Валерьевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a.v.bogomolov@gmail.com

Филиппова Екатерина Вячеславовна – кандидат технических наук, доцент института передовых информационных технологий, Тульский государственный педагогический университета им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: filippova.ev87@mail.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 3, pp. 23–31*

DOI: 10.14529/mmph260303

A METHOD FOR ANALYZING THE ROBUSTNESS OF A CLOSED-LOOP DIGITAL CONTROL SYSTEM

E.V. Larkin¹, A.N. Privalov², A.V. Bogomolov³, E.V. Filippova²

¹ Tula State University, Tula, Russian Federation

² Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, Russian Federation

³ Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

E-mail: privalov.61@mail.ru

Abstract. This paper examines the robustness of closed-loop digital control systems for objects whose state is described by a state vector, and whose model is a transfer function matrix. The control function is implemented by a configurable computing module operating in sequential cyclic scanning mode, while program instructions are executed therein strictly synchronously with real time, guaranteeing timely deterministic command execution. The sequential interpretation of the control program represents a deterministic program flow, the mathematical modeling of which in terms of semi-Markov processes allows formalizing the time delays of data processing and quantifying their impact on control sta-

bility. There is a time delay between the input of state vector elements to the controller and the output of control vector elements from the controller. The mathematical expectation of this delay forms the pure delay in the control loops of the plant. System robustness is defined as the value of the time delay increment that brings the system to the nearest stability boundary, determined by the necessary and sufficient conditions for the existence of negative real parts of the roots of the characteristic equation for the closed-loop system, formed taking into account the pure delay. A method has been developed to calculate the robustness of a digital vector control system with a controller that calculates the control vector based on the state vector of the plant measured in real time. Based on the system's characteristic equation and inverse Hurwitz matrix, analytical expressions are derived for the boundary delay increments. These equations allow for a quantitative assessment of the robustness level for stability and the probability of control failure. The proposed methodology for designing robust digital control systems outlines a sequence of steps, from mathematical modeling of the plant to verifying that the delay time does not exceed specified thresholds during the control system design phase. The effectiveness of this methodology is confirmed by the results of transient simulations in a dual-loop plant control system, both with and without delays in control action generation. Based on these results, priorities for future work include developing a method for determining the robustness of the control system in terms of overshoot and time to reach steady state. This would be followed by the synthesis of vector control systems that are robust to specified parameters.

Keywords: digital control; vector control; control stability; control robustness.

References

1. Hennessy J.L. Patterson D.A. *Computer architecture. A quantitative approach*. N.Y. Elsevier, 2012, 493 p.
2. Fadali M.S., Visioli A. *Digital control engineering: Analysis and design*. Elsevier Inc., 2013, pp. 239–272. DOI: 10.1016/B978-0-12-394391-0.00007-1
3. Larkin E.V., Privalov A.N., Akimenko T.A. Mathematical Support for Hierarchical Digital Control of a Complex Technological Object. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2024, Vol. 16, no. 4, pp. 43–55. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph240406
4. Scholl E., Klapp S.H., Hovel P. *Control of Self-Organizing Nonlinear Systems*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2016, 475 p. DOI: 10.1007/978-3-319-28028-8
5. Bosgra O.H., Kwakernaak H., Meinsma G. Design Methods for Control Systems. *Dutch Institute of Systems and Control*, 2007, 321 p.
6. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., Akimenko T.A. Mathematical Model of a Two-Level Digital Control System with Interruptions. *Computing technologies*, 2025, Vol. 30, no. 5, pp. 95–107. (in Russ.). DOI: 10.25743/ICT.2025.30.5.008
7. Privalov A.N., Bogomolov A.V., Larkin E.V. Modeling the Reliability of Software Components of Cyber-Physical Systems. *Software products and systems*, 2025, no. 1, pp. 47–54. (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.149.047-054
8. Bogomolov A.V., Larkin E.V., Privalov A.N. Mathematical Models of Software Failures of Digital Control Systems. *Automatic Documentation and Mathematical Linguistics*, 2025, Vol. 59, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.3103/S0005105524700419
9. Green M., Limebeer D. *Linear Robust Control*. Dover Publications, 2012, 558 p.
10. Sanz R., García P., Albertos P., Fridman E. Robust Predictive Extended State Observer for a Class of Nonlinear Systems with Time-Varying Input Delay. *International Journal of Control*, 2020, Vol. 93, no. 2, pp. 217–225. DOI 10.1080/00207179.2018.1562204.
11. Wu M., He Y., She J.H., Liu G.P., Delay-Dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems. *Automatica*, 2004, Vol. 40, no. 8, pp. 1435–1439. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.03.004
12. Pavlov A.V. About the Equality of the Transform of Laplace to the Transform of Fourier. *Issues of Analysis*, 2016, Vol. 5(23), no. 1. pp. 21–30. DOI 10.15393/j3.art.2016.3110.
13. Cherney D., Denton T., Thomas R., Waldron A., ed. by Glaezer K. and Scrimshaw T. *Linear Algebra*. Davis USA, California, 2013, 410 p.
14. Toshiharu S. Simple Explanation of Routh–Hurwitz Criterion for Undergraduate Education. *Systems, control and information*, 2021, Vol. 65, no. 7, pp. 257–270.

15. Ang K.N., Chong G., Li Y. PID Control System Analysis, Design and Technology. *IEEE Transactions of control systems technology*, 2005, Vol. 13, Iss. 4, pp. 559–576. DOI: 10.1109/TCST.2005.847331

16. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N. Neural Network Tuning of a Genetic Algorithm for Controlling a Vector Hierarchical System. *Informatics and Automation*, 2025, Vol. 24, no. 5, pp. 1333–1354. (in Russ.). DOI: 10.15622/ia.24.5.3

Received July 1, 2026

Information about the authors

Larkin Eugeny Vasilyevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Professor-Consultant of Tula State University, Tula, Russian Federation, e-mail: elarkin@mail.ru.

Privalov Aleksandr Nikolaevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Director of the Institute of Advanced Information Technologies of Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, Russian Federation, e-mail: privalov.61@mail.ru.

Bogomolov Aleksey Valerievich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Leading Researcher of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: a.v.bogomolov@gmail.com.

Filippova Ekaterina Vyacheslavovna is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor of the Institute of Advanced Information Technologies of the Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, Russian Federation, e-mail: filippova.ev87@mail.ru.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФфуЗИИ ОТ КОЛЬЦЕВОГО ИСТОЧНИКА С УЧЁТОМ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ КОЛМОГОВОРА–АРНОЛЬДА

В.А. Никитенко¹, А.В. Попов², А.И. Ситников¹

¹ Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация

² Московский институт электронной техники, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача рассеивания примеси от кольцевого источника в атмосфере с учётом метеорологических параметров (скорость и направление ветра, класс устойчивости атмосферы). Предлагается новый подход на основе физически информированных сетей Колмогорова–Арнольда для решения стационарного уравнения конвекции-диффузии. Проведено сравнение с традиционной полносвязной нейронной сетью в аналогичной постановке. Показано, что KAN-архитектура обеспечивает более высокую точность при значительно меньшем количестве параметров и лучшую интерпретируемость. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующих зависимость формы факела от метеорологических условий, и выполнен анализ сходимости.

Ключевые слова: сети Колмогорова–Арнольда; физически информированные нейронные сети; уравнение конвекции-диффузии; кольцевой источник; атмосферная диффузия; метеорологические параметры.

Введение

В настоящее время актуальной задачей является моделирование загрязнённости атмосферы при проектировании промышленных объектов, а также при возникновении чрезвычайных ситуаций техногенного и природного характера.

При решении данной задачи используются, как правило, следующие подходы: гауссовы модели факела [1], методы конечных разностей и конечных объёмов, методы Монте-Карло и физические информированные нейронные сети (PINN). Основная идея PINN заключается в том, что в функцию потерь включают физические законы, таким образом можно получать решения дифференциальных уравнений, не используя размеченные данные [2, 3]. Следует отметить, что основным недостатком PINN при решении задач с малыми диффузионными членами является низкая скорость сходимости и малая точность.

Данную проблему позволяет решить внедрение сетей Колмогорова–Арнольда [4] (KAN). Основным отличием KAN от многослойных перцептронов (MLP) является то, что MLP размещает функции активации в узлах (нейронах), а KAN размещает функции активации на ребрах (весах). Вследствие этого KAN не имеют линейных весовых матриц, а каждый весовой параметр, параметризованной как сплайн, заменяется обучаемой одномерной функцией. Узлы KAN выступают в роли сумматоров входных сигналов.

В настоящей работе предлагается применить физически информированные KAN (PI-KAN) к задаче стационарной диффузии от кольцевого источника, явно учитывающей метеорологические условия (скорость ветра, анизотропию турбулентной диффузии). Проводится сравнение с MLP-PINN, обсуждаются преимущества и ограничения метода.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное распространение пассивной примеси в приземном слое атмосферы. В двумерной постановке (горизонтальная плоскость) процесс описывается уравнением конвекции-диффузии

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S(x, y), \quad (1)$$

где $C(x, y)$ – концентрация примеси (г/м^3); u, v – компоненты вектора скорости ветра (м/с); D_x, D_y – коэффициенты турбулентной диффузии в направлениях x и y ($\text{м}^2/\text{с}$), зависящие от класса устойчивости атмосферы по Пасквиллу; $S(x, y)$ – функция источника.

Источник полагается кольцевым с центром (x_0, y_0) , радиусом R и радиальной шириной σ_r :

$$S(x, y) = \frac{Q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2}} e^{-\frac{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - R)^2}{2\sigma_r^2}}, \quad (2)$$

где Q – интегральная мощность выброса (г/с). При $\sigma_r \rightarrow 0$ выражение (2) переходит в дельта-функцию, сосредоточенную на окружности радиуса R .

Область расчёта – прямоугольник $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Граничные условия:

$$C(0, y) = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_{\partial\Omega \setminus \{x=0\}} = 0. \quad (4)$$

Условия (3) и (4) соответствуют неограниченному распространению примеси в правой полуплоскости от левой границы.

Метеорологические параметры определяются следующим образом: $u = U \cos \theta$, $v = U \sin \theta$, где U – модуль скорости ветра на высоте источника, θ – угол направления ветра. Коэффициенты диффузии для заданного класса устойчивости P аппроксимируются эмпирическими зависимостями

$$D_x = \alpha_x(P)U, \quad D_y = \alpha_y(P)U, \quad (5)$$

где α_x, α_y – табулированные коэффициенты, возрастающие с усилением турбулентности (неустойчивая стратификация).

Сети Колмогорова–Арнольда

В основе архитектуры KAN лежит теорема Колмогорова–Арнольда.

Теорема 1. [Теорема Колмогорова–Арнольда] Если f – это многомерная непрерывная функция, то f можно записать в виде конечной композиции непрерывных функций одной переменной и бинарной операции сложения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \Phi_q \left(\sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right),$$

где $\Phi_q, \phi_{q,p}$ – непрерывные одномерные функции.

Формально KAN с L слоями описывается следующим выражением

$$\text{KAN}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\Phi^{(L)} \circ \Phi^{(L-1)} \circ \dots \circ \Phi^{(1)})(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\Phi^{(l)}, l = \overline{1, L}$ – оператор слоя. Каждый слой представляет собой матрицу одномерных функций $\phi_{i,j}^{(l)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и выход слоя вычисляется

$$x_j^{(l+1)} = \sum_{q=1}^{n_l} \phi_{i,j}^{(l)}(x_j^{(l)}),$$

где $\phi_{i,j}^{(l)}$ – B -сплайны с параметризуемыми коэффициентами.

Метод PI-KAN для задачи диффузии

Физически информированная KAN (PI-KAN) используется для аппроксимации решения $C(x, y; \Theta)$, где Θ – совокупность параметров сплайнов всех слоёв. Входной вектор сети $z = (x, y) \in \Omega$, выход – одно число $\tilde{C}$.

Функция потерь составляется из трёх компонент:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \lambda_p \mathcal{L}_p + \lambda_b \mathcal{L}_b + \lambda_d \mathcal{L}_d,$$

где $\mathcal{L}_p$ – невязка уравнения (1), $\mathcal{L}_b$ – невязка граничных условий (3) и (4), $\mathcal{L}_d$ – ошибка на опорных данных (если они доступны), а $\lambda_p, \lambda_b, \lambda_d$ – весовые коэффициенты.

Невязка уравнения вычисляется на множестве коллокационных точек $\{z_p^{(i)}\}_{i=1}^{N_p}$, равномерно распределённых внутри Ω :

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left[u \tilde{C}_x^{(i)} + v \tilde{C}_y^{(i)} - D_x \tilde{C}_{xx}^{(i)} - D_y \tilde{C}_{yy}^{(i)} - S^{(i)} \right],$$

где частные производные $\tilde{C}_x, \tilde{C}_y, \tilde{C}_{xx}, \tilde{C}_{yy}$ получаются автоматическим дифференцированием сети KAN по входам.

Граничная невязка формируется из двух слагаемых:

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{N_b^{in}} \sum_{i=1}^{N_b^{in}} (\tilde{C}(0, y_i) - 0)^2 + \frac{1}{N_b^{out}} \sum_{j=1}^{N_b^{out}} (\nabla \tilde{C}(x_j, y_j) \cdot \mathbf{n}_j)^2,$$

где $\mathbf{n}_j$ – внешняя нормаль к границе.

В настоящей работе эталонные данные $\mathcal{L}_d$ не использовались (λ_d), чтобы подчеркнуть способность сети обучаться исключительно на физических законах. Для сравнения с аналитическим решением (суперпозиция точечных источников вдоль кольца) ошибка оценивалась на регулярной сетке.

Обучение производится оптимизатором L-BFGS, известным своей эффективностью в PINN-задачах. Архитектура KAN: 2 входных нейрона, две скрытые размерности по 10 нейронов и 1 выходной; степень сплайна $k = 3$, количество узлов сетки сплайна. Для сравнения используется MLP с архитектурой 2–50–50–1 и функцией активацией гиперболический тангенс.

Вычислительные эксперименты

Параметры модели приведены в табл. 1. Класс устойчивости D (нейтральная стратификация) выбран в качестве базового; дополнительно исследованы классы A (сильная неустойчивость) и F (устойчивая стратификация) путём масштабирования D_x, D_y согласно (5).

Эталонное решение получено методом численного интегрирования аналитического решения для точечного источника в безграничной плоскости с постоянным ветром:

$$C^*(x, y) = \frac{Q}{2\pi\sqrt{D_x D_y}} e^{\frac{ux}{2D_x}} K_0 \left(\frac{ux}{2\sqrt{D_x}} \sqrt{\frac{x^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y}} \right),$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода. Для кольцевого источника выражение интегрируется по углу $\phi \in [0, 2\pi)$ в окрестности радиуса R с гауссовым весом (2).

Результат вычислительного эксперимента показал, что KAN достигает уровня $\mathcal{L} \approx 10^{-7}$ за 800 итераций, MLP достигает уровня $\mathcal{L} \approx 10^{-4}$ за 2000 итераций, таким образом KAN демонстрирует монотонное быстрое убывание функции невязки.

Количественное сравнение точности проведено по относительной L_2 -ошибке на подобласти $[50; 300] \times [100; 300]$, исключаяющей зоны влияния границ:

$$\varepsilon = \|\tilde{C} - C^*\|_2 / \|C^*\|_2.$$

Таблица 1

Параметры задачи	
Параметр	Значение
Скорость ветра	5 м/с
Направление ветра	0° ($u = 5, v = 0$)
Коэффициент диффузии по x	50 м²/с
Коэффициент диффузии по y	20 м²/с
Мощность выброса	100 г/с
Центр кольца	(100 м, 200 м)
Радиус кольца	15 м
Ширина кольца	1,5 м
Размеры области	500 м × 400 м

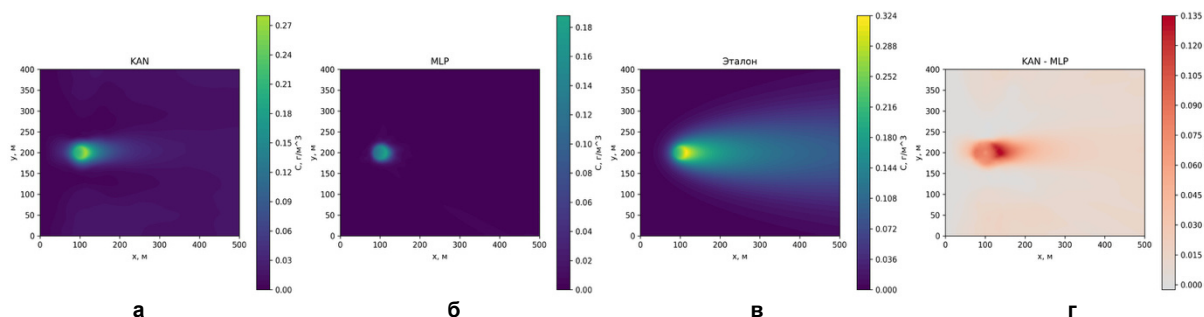


Рис. 1. Сечение концентрации для класса устойчивости А:
а) модель KAN, б) модель MLP, в) эталонное решение, г) разность KAN и MLP

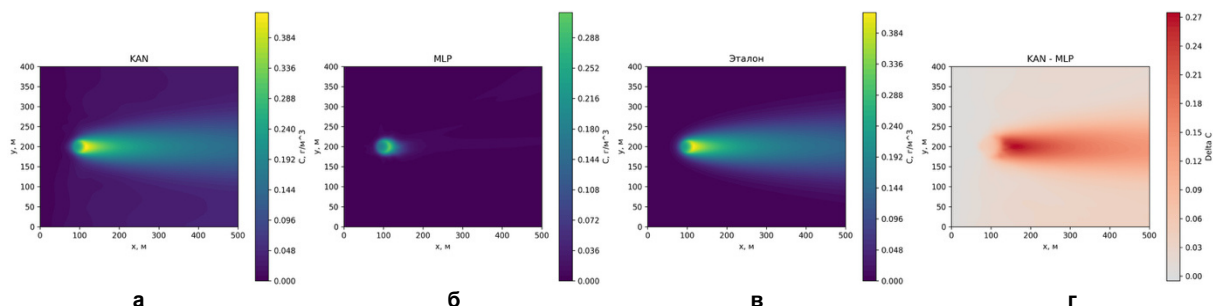


Рис. 2. Сечение концентрации для класса устойчивости D:
а) модель KAN, б) модель MLP, в) эталонное решение, г) разность KAN и MLP

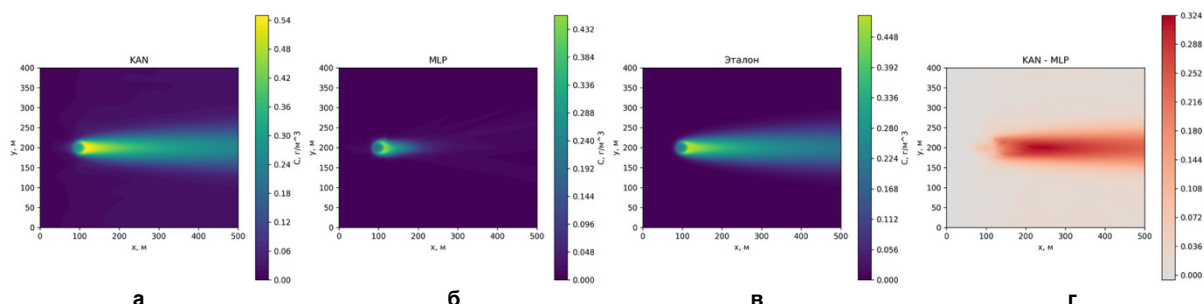


Рис. 3. Сечение концентрации для класса устойчивости F:
а) модель KAN, б) модель MLP, в) эталонное решение, г) разность KAN и MLP

Из рис. 1, в видно интенсивное турбулентное рассеивание примеси, что приводит к формированию расширенного факела после источника. Визуально видно, что KAN лучше описывает направление распространения примеси по сравнению с MLP. Расчетные метрики дают следующие результаты:

- 1) относительная ошибка составляет: KAN – 0,633, MLP – 0,887;
- 2) IoU факела: KAN – 0,141, MLP – 0,031.

Из рис. 2, в видно устойчивое вытянутое распределение загрязняющего вещества вдоль направления переноса. Модель KAN практически совпадает с эталонным решением, а MLP показывает, что концентрация вещества сосредоточена около источника. Расчетные метрики дают следующие результаты:

- 1) относительная ошибка составляет: KAN – 0,113, MLP – 0,821;
- 2) IoU факела: KAN – 0,769, MLP – 0,769.

Рис. 3, в показывает, что распределение загрязняющего вещества имеет выраженную осевую структуру с высокой концентрацией вблизи источника и постепенным снижением по направлению переноса. Модель KAN близка к эталонному решению, сохраняя основную форму распределения концентрации. MLP, в свою очередь, сглаживает распределение и показывает, что загрязняющее вещество практически не распространяется по линии переноса. Расчетные метрики дают следующие результаты:

- 1) относительная ошибка составляет: KAN – 0,202, MLP – 0,666;
- 2) IoU факела: KAN – 0,822, MLP – 0,154.

Анализ результатов показывает, что KAN точнее сохраняет физическую структуру концентрированного поля, направление переноса загрязняющего вещества, а также форму факела загрязнения. MLP при большем числе параметров дает сглаженное и локализованное распределение, что, в свою очередь, может негативно сказаться при прогнозировании зоны загрязнения.

В табл. 2 приведены результаты для трёх классов устойчивости. Из табл. 2 видно, что PI-KAN превосходит MLP-PINN для всех трёх классов устойчивости, при этом количество обучаемых параметров PI-KAN в 10 раз меньше.

Таблица 2

Относительная ошибка ε и количество параметров задачи

Класс	ε , PI-KAN	ε , MLP-PINN	Количество параметров KAN / MLP
A	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	4 320 / 50 101
D	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	4 320 / 50 101
F	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	4 320 / 50 101

Заключение

В работе был предложен метод решения задачи атмосферной диффузии от кольцевого источника с учётом метеорологических параметров, основанный на PI-KAN. Наглядно продемонстрировано, что данный подход позволяет обеспечить высокую точность аппроксимации решения (относительная ошибка меньше 10^{-3}) при меньшем числе параметров по сравнению с традиционными PINN на основе MLP. Метод позволяет учитывать различные классы устойчивости атмосферы и параметры ветра, демонстрируя устойчивость и быструю сходимость.

Дальнейшие направления работы включают распространение подхода на трёхмерные задачи, учёт переменных по высоте метеополей и использование KAN для идентификации неизвестных параметров источника по данным наблюдений.

Литература

1. Аргучинцева, А.В. Тенденции и уровень решения проблемы оценки загрязнения атмосферы / А.В. Аргучинцева, В.К. Аргучинцев, С.Ж. Воложжина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Науки о Земле. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 20–36.
2. Исследование применимости метода PINN для решения задачи теплообмена в квадратном канале для различных чисел Прандтля / А.А. Лукьянов, Г.А. Кухта, А.А. Лукьянов и др. // Прикладная механика и техническая физика. – 2026.
3. Вахтерова, Я.А. Физически информированная нейронная сеть для решения уравнения теплопроводности Грина–Нагди III ТИПА / Я.А. Вахтерова, Л.Н. Рабинский // СТИН. – 2025. – № 9. – С. 28–32.
4. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks / Z. Liu, Y. Wang, S. Vaidya *et al.* // arXiv:2404.19756v5. <https://arxiv.org/pdf/2404.19756>

Поступила в редакцию 6 июля 2026 г.

Сведения об авторах

Никитенко Виталий Алексеевич – кандидат технических наук, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com.

Попов Алексей Вячеславович – кандидат технических наук, Московский институт электронной техники, г. Москва, Российская Федерация.

Ситников Александр Иванович – кандидат технических наук, доцент, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация.

SOLUTION TO THE PROBLEM OF DIFFUSION FROM A RING SOURCE TAKING INTO ACCOUNT METEOROLOGICAL CONDITIONS, USING KOLMOGOROV–ARNOLD NETWORKS

V.A. Nikitenko¹, A.V. Popov², A.I. Sitnikov¹

¹ Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation

² Moscow Institute of Electronic Technology, Moscow, Russian Federation

E-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com

Abstract. This article examines the issue of pollutant dispersion from a ring source in the atmosphere, taking into account meteorological parameters (wind speed and direction and atmospheric stability class). It proposes a novel approach based on physically informed Kolmogorov–Arnold networks for solving the stationary convection-diffusion equation and compares it to a traditional fully connected neural network in a similar formulation. The study demonstrates that the KAN architecture provides higher accuracy with significantly fewer parameters and better interpretability. The results of the numerical experiments show the dependence of the plume shape on meteorological conditions and provide a convergence analysis.

Keywords: Kolmogorov–Arnold networks; physically informed neural networks; convection-diffusion equation; ring source; atmospheric diffusion; meteorological parameters.

References

1. Arguchintseva A.V., Arguchintsev V.K., Vologzhina S.Zh. Trends and Level of Problem Decision Atmospheric Pollution Assessment. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo univer-siteta.Seriya: Nauki o Zemle*, 2009, Vol. 2, no. 2, pp. 20–36. (in Russ.).
2. Lukyanov A.I., Kukhta G.A., Lukyanov An.A., Zaripov D.I., Tokarev M.P Studying the Applicability of the Pinn Method for Solving Heat Transfer Problems in a Square Channel for Various Prandtl Numbers. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2026. DOI: 10.15372/PMTF202515761.
3. Vakhterova Ya.A., Rabinskiy L.N. Fizicheski informirovannaya neyronnaya set' dlya resheniya uravneniya teploprovodnosti Grina–Nagdi III TIPA (Physically Informed Neural Network for Solving the Green–Naghdi Heat Equation of Type III). *STIN*, 2025, no. 9, pp. 28–32. (in Russ.).
4. Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljaci M., Hou T.Y., Tegmark M. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks, *arXiv:2404.19756v5*, 30 Apr 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.

Received July 6, 2026

Information about the authors

Nikitenko Vitaliy Alekseevich is Cand. Sc. (Engineering), Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com.

Popov Aleksey Vyacheslavovich is Cand. Sc. (Engineering), Moscow Institute of Electronic Technology, Moscow, Russian Federation.

Sitnikov Aleksandr Ivanovich is is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ JWЛ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ ПО ДАННЫМ ЦИЛИНДР-ТЕСТА: МЕТОД С ПОНИЖЕНИЕМ РАЗМЕРНОСТИ

Е.С. Шестаковская, Я.Е. Стариков

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: shestakovskaiaes@susu.ru

Аннотация. Представлен метод определения шести параметров уравнения состояния Джонса–Уилкинса–Ли для продуктов детонации по результатам эксперимента «цилиндр-тест». В отличие от классических подходов, требующих одновременной оптимизации всех шести параметров, предложена редукция задачи к трёхмерному пространству поиска R_1 , R_2 , ω с последующим аналитическим вычислением коэффициентов A , B , C из системы линейных алгебраических уравнений, построенной с использованием условий Чепмена–Жуге. Для аппроксимации экспериментальной кривой расширения цилиндрической трубки используются три различные функции с выбором наилучшей по методу наименьших квадратов. Введены физически обоснованные ограничения на параметры, гарантирующие корректное поведение изэнтропии во всём диапазоне расширения продуктов детонации. Метод верифицирован на четырёх взрывчатых веществах (PETN, Comp B, Nitromethane, Cyclotol). Сравнение с литературными данными и численное моделирование разлёта цилиндра подтверждают высокую точность полученных параметров.

Ключевые слова: цилиндр-тест; уравнение состояния JWЛ; продукты детонации; параметрическая идентификация; энергетический баланс; редукция размерности.

Введение

К настоящему времени накоплен значительный объём информации об экспериментальных исследованиях стационарной детонации взрывчатых веществ (ВВ) и разлёте продуктов детонации (ПД). Несмотря на это, как экспериментальные, так и теоретические исследования в данной области не прекращаются. Сохраняющийся интерес обусловлен двумя основными факторами: с одной стороны, постоянным появлением новых взрывчатых составов (в том числе с регулируемыми энергетическими характеристиками), с другой – необходимостью уточнения и устранения неоднозначностей при интерпретации уже имеющихся результатов для классических ВВ. Экспериментальные данные о расширении ПД служат основой для построения полумпирических уравнений состояния ПД и изучения кинетики детонационного превращения ВВ. Кроме того, эти данные широко используются при верификации программных комплексов, предназначенных для численного моделирования детонационных процессов, что особенно важно для прогнозирования поведения ВВ в реальных условиях эксплуатации.

Экспериментальная методика цилиндр-тест [1, 2] является наиболее популярным методом оценки рабочих характеристик ВВ. В стандартной постановке используется медный цилиндр, заполненный ВВ, которое инициируется с одного торца цилиндра в начальный момент времени. В ходе эксперимента получают информацию о смещении наружной границы трубки в зависимости от времени, которую используют для расчета кинетической энергии ПД, а также для определения параметров уравнения состояния (УРС) продуктов детонации, из которых наиболее популярным является УРС Jones–Wilkins–Lee (JWL) [2]:

$$p(V, E) = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 V} \right) e^{-R_1 V} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 V} \right) e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \quad (1)$$

и соответствующее ему уравнение изэнтропии $p(V)$

$$p(V) = A e^{-R_1 V} + B e^{-R_2 V} + C V^{-(1+\omega)}, \quad (2)$$

где p – давление продуктов детонации, $V = \rho_0 / \rho$ – степень расширения продуктов детонации, а $A, B, C, R_1, R_2, \omega$ – параметры, подбираемые для каждого взрывчатого вещества.

Уравнение изменения энергии на изэнтропе для данного уравнения состояния имеет вид

$$E(V) = \int_V^\infty p dV = \frac{A}{R_1} e^{-R_1 V} + \frac{B}{R_2} e^{-R_2 V} + \frac{C}{\omega} V^{-\omega}. \quad (3)$$

Классическая методика [2] предполагает итерационную подгонку параметров уравнения состояния JWL в гидрокоде до совпадения численного и экспериментального расширения цилиндрической трубки, которая получила развитие, например, в работах [3, 4]. Существуют аналитические подходы, основанные на использовании соотношения энергетического баланса, которое связывает энергию взрыва и совершенную работу со степенью расширения продуктов ВВ [5–11]. Также известны различные методы прямого расчета неизвестных параметров уравнения состояния JWL по экспериментальным данным [12–15]. Однако большинство из них требуют оптимизации в шестимерном пространстве параметров $A, B, C, R_1, R_2, \omega$, что сопряжено с вычислительными трудностями и неоднозначностью решения.

В настоящей работе предлагается метод, сводящий задачу к поиску всего трёх параметров R_1, R_2, ω с последующим линейным расчётом A, B, C . Это достигается за счёт использования условий в точке Чепмена–Жуге (CJ) и данных об энергии Гарни на трёх фиксированных степенях расширения. Дополнительно вводятся физические ограничения, обеспечивающие доминирование соответствующих членов уравнения в различных диапазонах давлений.

В качестве необходимых данных для метода требуются:

1. Траектория разлета стенки, полученная из эксперимента и представляющая собой набор дискретных значений.

2. Параметры материала и геометрии цилиндра: плотность, упругие константы, внешний и внутренний радиусы. Отметим, что в большинстве экспериментов в качестве материала используется медь, для которой достаточно точно определены требуемые параметры.

3. Параметры самого ВВ, которые должны быть определены из дополнительных экспериментов: плотность при нормальных условиях, удельная энергия взрыва, скорость детонационной волны и один из параметров в точке Чепмена–Жуге.

Данный метод основан на следующих допущениях:

1. Материал стенки цилиндра несжимаемый, а его предел текучести постоянный.
2. Детонация является идеальной.
3. Взрывчатое вещество мгновенно превращается в продукты взрыва.
4. Продукты взрыва невязкие и расширяются изоэнтропически.
5. Течение продуктов взрыва симметричное относительно оси цилиндра.

Экспериментальные данные и их предварительная обработка

Результатом эксперимента цилиндр-тест является траектория движения стенки цилиндра, которая представляется в дискретном виде как набор точек

$$[t_i, (\Delta r_2)_i], i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где n – общее количество точек, измеренных в эксперименте, $\Delta r_2 = r_2 - r_{20}$ – смещение внешней поверхности цилиндра, r_{20} – начальный внешний радиус.

Для того чтобы аналитически рассчитать скорость и ускорение стенки трубы, необходимо аппроксимировать экспериментальные данные (4) оптимальной функцией. В работе используются три функциональные зависимости.

Первая функция для аппроксимации имеет вид [9]

$$r_2(t) = a(t - t_0) + \frac{1}{b}(u_0 - a)[1 - \exp(-b(t - t_0))],$$

где a, b, t_0, u_0 – параметры, подлежащие оптимизации.

Вторая зависимость имеет вид [8]

$$r_2(t) = \sum_{i=1}^2 a_i [b_i t - (1 - e^{-b_i t})],$$

где $a_i, b_i (i=1,2)$ – параметры, подлежащие оптимизации.

Третья зависимость имеет вид [15]

$$r_2(t) = \frac{\nu_\infty t \cdot g(t)}{\frac{2\nu_\infty}{a_0} g'(0) + g(t)},$$

где a_0 – начальное ускорение цилиндра, v_∞ – асимптотическая радиальная скорость цилиндра, а функция $g(t)$ определяется как $g(t) = (1+t)^\sigma - 1$.

Таким образом, в данном случае требуется определить параметры a_0 , ν_∞ , σ .

Для каждого ВВ методом наименьших квадратов определяются параметры всех трёх функций и выбирается та, которая обеспечивает минимальную среднеквадратичную ошибку на экспериментальных точках.

Выбранная аппроксимация $\Delta r_2 = F(t)$ позволяет вычислить скорости и ускорения в эйлеровой системе координат $r_2'(t), r_1'(t), r_c'(t), r_2''(t), r_1''(t), r_c''(t)$.

Переход к лагранжевым координатам выполняется с учётом угла наклона образующей цилиндра θ (рис. 1). Из кинематических соотношений [8] имеем:

$$v_a = \frac{dF_c(t)}{dt}, \quad \tan \theta = \frac{v_a}{D}, \quad v = 2D \sin \frac{\theta}{2}, \quad a = a_a \cos^3 \theta,$$

где D – скорость детонации, $F_c(t)$ – смещение центральной поверхности цилиндра, определяемое из условия несжимаемости материала, для определения которого используется соотношение

$$r_2^2 - r_c^2 = r_c^2 - r_1^2 = \frac{1}{2}(r_{20}^2 - r_{10}^2),$$

где r_{10}, r_{20} – начальные внутренний и внешний радиусы соответственно, r_c – радиус центра стенки.

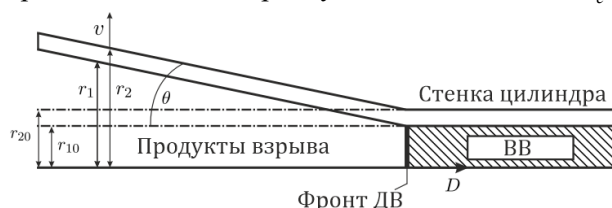


Рис. 1. Схема расширения цилиндрической оболочки и кинематические параметры

Энергетический баланс и определение внутренней энергии ПД

Система, состоящая из заряда ВВ и цилиндрической трубки, удовлетворяет закону сохранения энергии. За время Δt через сечение проходит масса $\rho_0 D A \Delta t$, и энергия распределяется следующим образом [8]:

$$\rho_0 D A \Delta t \left(U - Q + \frac{u^2}{2} + T_{kin} + A_{def} \right) = p u A \Delta t,$$

где U – удельная внутренняя энергия ПД, Q – удельная теплота детонации, u – массовая скорость ПД в осевом направлении, T_{kin} – кинетическая энергия вследствие радиального движения цилиндра и газов (энергия Гарни) на единицу массы ВВ, A_{def} – работа деформации цилиндра на единицу массы заряда ВВ.

Переходя к удельным величинам на единицу объёма ВВ, получим

$$E - E_0 + \frac{\rho_0 u^2}{2} + E_{kin} + W_{def} = p \frac{u}{D}, \quad (5)$$

где $E = \rho_0 U$ и $E_0 = \rho_0 Q$ – внутренняя энергия и теплота детонации единицы объема заряда ВВ, $E_{kin} = \rho_0 T_{kin}$ и $W_{def} = \rho_0 A_{def}$ – энергия Гарни и работа деформации на единицу объема.

Массовая скорость ПД определяется через степень расширения по формуле

$$u = D \left(1 - V \left(r_{10}/r_1 \right)^2 \right),$$

где степень объемного расширения ПД определяется по формуле

$$V = \frac{r_1^2}{r_{10}^2 \cos \theta}.$$

Удельную энергию Гарни рассчитаем по формуле [16]

$$E_{kin} = \left[\rho_m \left(\frac{r_2}{r_{10}} \right)^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{\rho_0}{4} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \cos \theta \right] (r_2')^2,$$

где ρ_m – плотность материала цилиндра.

Формула для энергии Гарни выведена в приближении постоянной плотности материала цилиндра и линейного распределения радиальной скорости по толщине стенки. Данное приближение широко используется в аналитических моделях цилиндр-теста и справедливо для тонкостенных оболочек на стадиях расширения, когда толщина стенки мала по сравнению с радиусом. Для более точного учета сжимаемости материала требуется использование гидрокодов, что выходит за рамки предлагаемой аналитической методики и является основой других подходов.

Работа деформации рассчитывается по соотношению

$$W_{def} = \sigma_f \left[\left(\frac{r_{20}}{r_{10}} \right)^2 - 1 \right] \ln \frac{r_1 + r_2}{r_{10} + r_{20}},$$

где σ_f – предел текучести материала цилиндра.

Таким образом, для каждого момента времени (т.е. для каждой степени расширения V) из экспериментальных данных по формуле (5) определяется значение внутренней энергии $E(V)$.

Сведение задачи определения параметров уравнения состояния JWL к трёхмерной оптимизации

Подбор оптимальных параметров проводится исходя из условия наилучшего совпадения изэнтропы уравнения состояния E_{JWL} (3) с зависимостью для внутренней энергии ПД E (5), т. е. в ходе решения следующей задачи оптимизации:

$$\| E_{JWL}(A, B, C, R_1, R_2, \omega) - E \|^2 \rightarrow \min.$$

При поиске оптимальных параметров $A, B, C, R_1, R_2, \omega$ необходимо учитывать, что уравнение состояния JWL должно одновременно удовлетворять трём условиям в точке Чепмена–Жуге, следующим из законов сохранения и термодинамики:

1. Давление в точке Чепмена–Жуге должно быть равно экспериментально определенному

$$Ae^{-R_1 V_{CJ}} + Be^{-R_2 V_{CJ}} + CV_{CJ}^{-(1+\omega)} = p_{CJ}. \quad (6)$$

2. Уравнение линии Рэлея в любом состоянии детонации имеет вид:

$$\frac{P}{(1-V)} = -\rho_0 D^2.$$

Наклон изэнтропы (2) в точке Чепмена–Жуге должен быть равен наклону линии Рэлея

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s = \frac{dp}{dV}.$$

Отсюда следует второе условие

$$R_1 A e^{-R_1 V_{CJ}} + R_2 B e^{-R_2 V_{CJ}} + (\omega + 1) C V_{CJ}^{-(\omega+2)} = \rho_0 D^2. \quad (7)$$

3. Давление, объем и внутренняя энергия должны соответствовать уравнению состояния JWL в точке Чепмена–Жуге

$$A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 V_{CJ}} \right) e^{-R_1 V_{CJ}} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 V_{CJ}} \right) e^{-R_2 V_{CJ}} + E_{CJ} = p_{CJ}, \quad (8)$$

где внутренняя энергия определяется из соотношения Гюгонио

$$E_{CJ} = E_0 + \frac{1}{2} p_{CJ} (1 - V_{CJ}).$$

Кроме того, из (3) для любых степеней расширения V_j должно выполняться равенство между энергией, вычисленной через (5), и аналитическим выражением (3). В классическом подходе [2] и работах [17, 18] обосновано использование трех значений $V_j = 2, 4, 7, 0$, соответствующих характерным стадиям расширения ПВ (от малых до больших объемов). Таким образом, имеем три дополнительных уравнения:

$$\frac{A}{R_1} e^{-R_1 V_j} + \frac{B}{R_2} e^{-R_2 V_j} + \frac{C}{\omega} V_j^{-\omega} = E(V_j), \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Уравнения (6)–(9) образуют систему шести нелинейных уравнений относительно шести неизвестных $A, B, C, R_1, R_2, \omega$. Ключевая идея предлагаемого метода заключается в том, что если временно зафиксировать значения R_1, R_2, ω , то уравнения (6)–(8) становятся линейными относительно A, B, C . Действительно, перепишем их в виде:

$$\begin{aligned} e^{-R_1 V_{CJ}} \cdot A + e^{-R_2 V_{CJ}} \cdot B + V_{CJ}^{-(1+\omega)} \cdot C &= p_{CJ}, \\ R_1 e^{-R_1 V_{CJ}} \cdot A + R_2 e^{-R_2 V_{CJ}} \cdot B + (1+\omega) V_{CJ}^{-(2+\omega)} \cdot C &= \rho_0 D^2, \\ \frac{e^{-R_1 V_j}}{R_1} \cdot A + \frac{e^{-R_2 V_j}}{R_2} \cdot B + \frac{V_j^{-\omega}}{\omega} \cdot C &= E(V_j), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Это – система из пяти линейных уравнений (одно из (9) для трёх V_j даёт три уравнения) с тремя неизвестными A, B, C . Система переопределена, на практике можно использовать любые три уравнения (например, (6), (7) и одно из (9)) для точного определения A, B, C , а остальные два уравнения служат для контроля точности. Такой подход гарантирует выполнение условий Чепмена–Жуге и наилучшее воспроизведение энергии Гарни.

Таким образом, процесс подбора параметров состоит в использовании метода наименьших квадратов в пространстве поиска R_1, R_2, ω с невязками в виде $E - E(V)_{JWL}$ в точках $V = 2, 4, 7, 0$ либо в диапазоне степени расширения продуктов детонации $V \in [2, 7]$ с использованием большего числа точек. Минимизация невязки осуществляется алгоритмом Левенберга–Марквардта.

Отметим несколько дополнительных условий, выполнение которых требуется для исключения нефизичных решений при поиске параметров уравнения состояния:

- все параметры уравнения состояния ($A, B, C, R_1, R_2, \omega$) должны быть положительными для обеспечения положительности давления при любых степенях расширения. Кроме того, изоэнтропа должна быть монотонно убывающей функцией, что также выполняется при положительных параметрах автоматически;

- первый член уравнения состояния должен преобладать над вторым в точке Чепмена–Жуге (высокие давления). В окрестности точки Чепмена–Жуге первый экспоненциальный член должен преобладать, чтобы правильно воспроизводить крутой рост давления при сжатии (рис. 2, кривая 1). Таким образом, условие имеет вид

$$A e^{-R_1 V_{CJ}} > B e^{-R_2 V_{CJ}};$$

- второй член уравнения состояния должен преобладать над первым при $V > 2$ (средние степени расширения). На этом участке происходит основное ускорение оболочки, и второй экспоненциальный член определяет форму изэнтропы (рис. 2, кривая 2)

$$\frac{A}{R_1} e^{-2R_1} < \frac{B}{R_2} e^{-2R_2};$$

- третий (степенной) член уравнения состояния должен преобладать над экспоненциальными при больших степенях расширениях ($V > 7$), что обеспечивается выполнением условия (рис. 2, кривая 3)

$$\frac{A}{R_1} e^{-7R_1} + \frac{B}{R_2} e^{-7R_2} < \frac{C}{\omega} 7^{-\omega};$$

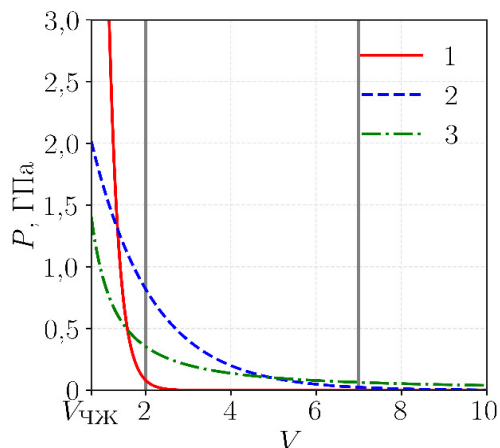


Рис. 2. Вклад слагаемых UPC JWL при различных степенях расширения:
1 – первый член, 2 – второй член, 3 – третий член

Указанные ограничения реализуются через добавление штрафа к целевой функции при невыполнении условий.

Таким образом, предложенный метод обладает рядом преимуществ:

- понижение размерности с шести до трёх параметров резко сокращает вычислительные затраты и уменьшает риск попадания в локальные минимумы;
- линейное определение A, B, C гарантирует единственность решения для заданных R_1, R_2, ω и исключает необходимость в итерациях по этим коэффициентам;
- физические ограничения отсекают нефизичные комбинации параметров;
- гибкость аппроксимации (выбор из трёх функций) позволяет адаптироваться к различным типам ВВ и качеству эксперимента.

Результаты определения параметров уравнений состояния для эталонных ВВ

Разработанная методика была применена к четырём хорошо изученным ВВ: ТЭН (PETN), Состав В (Comp B), нитрометан (Nitromethane) и циклотол (Cyclotol). Исходные данные о плотности, скорости детонации, давлении в точке Чепмена–Жуге и теплоте детонации взяты из справочника [19].

В табл. 1 приведены параметры уравнения состояния JWL, полученные предлагаемым методом, в сравнении с литературными данными.

Таблица 1

Параметры уравнения состояния JWL							
ВВ	Источник	A(ГПа)	B(ГПа)	C(ГПа)	R_1	R_2	ω
ТЭН (PETN)	[2]	796,53	19,241	0,665	4,8	1,2	0,25
	[12]	670,36	10,400	1,564	4,44	1,19	0,35
	Данная работа	737,656	15,397	0,895	4,634	1,169	0,276
Состав В (CompB)	[2]	524,229	7,6783	1,0818	4,2	1,1	0,34
	[8]	497,08	3,4246	1,1260	4,0489	0,7833	0,346
	Данная работа	502,987	4,131	0,976	4,07	0,818	0,32
Нитрометан (Nitromethane)	[2]	209,25	5,6895	0,7704	4,4	1,2	0,3
	[12]	203,532	3,605	0,984	4,286	1,0839	0,35
	Данная работа	224,003	7,473	0,889	4,568	1,387	0,326
Циклотол (Cyclotol)	[2]	603,414	9,9236	1,0753	4,7	1,1	0,35
	[12]	560,038	5,131	1,361	4,12	0,995	0,35
	Данная работа	595,028	10,182	1,523	4,304	1,23	0,412

На рис. 3 представлены графики внутренней энергии $E(V)$, вычисленной по энергетическому балансу (5) и аппроксимированной уравнением (3) с найденными параметрами. Для всех ВВ наблюдается хорошее совпадение во всём диапазоне расширения $V \in [1, 7]$. Наибольшее расхождение не превышает 5 %.

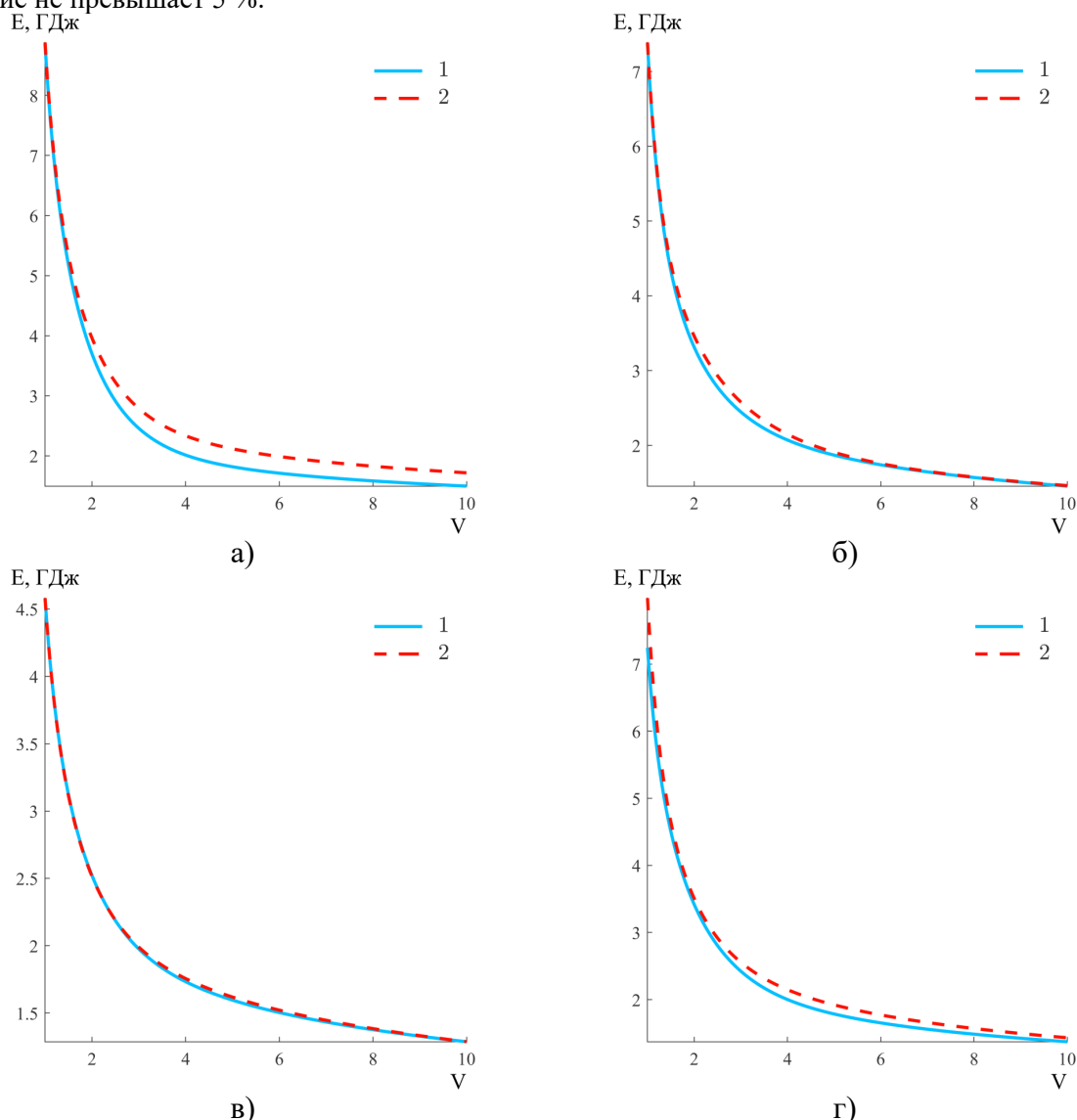


Рис. 3. Зависимость внутренней энергии от степени расширения ПД для ТЭНа (а), состава В (б), нитрометана (в) и циклотона (г): 1 – расчет по формуле (2), 2 – расчет по формуле (4)

Численная верификация

Для верификации полученных параметров проведено численное моделирование разлета цилиндрической трубки под действием продуктов детонации с использованием набора новых и известных коэффициентов УРС JWL из табл. 1.

Постановка задачи: В начальный момент времени медная трубка заполнена ВВ. Детонация инициируется с левого торца. Геометрические размеры трубки [2]: внутренний радиус $R_{in} = 1,27$ см, внешний радиус $R_{out} = 1,53$ см, длина трубки $L = 30,5$ см.

Математическое моделирование проводилось в ПК ANSYS Autodyn с использованием лагранжево-эйлерового метода на базе метода конечных элементов (ALE). Размер расчетной области – 560×112 мм, размер ячейки: $0,35 \times 0,35$ мм, ячеек в области – 1600×320 . Продукты детонации описывались уравнением (1) с параметрами из табл. 1, а медь – уравнением состояния в форме Ми–Грюнайзена с начальной плотностью $\rho_0 = 8942$ кг/м³ и объёмным модулем упругости $K = 135,4$ ГПа. Для моделирования упругопластических свойств меди использовалась модель

пластичности Джонсона–Кука с модулем сдвига $G = 45$ ГПа и пределом текучести $\sigma = 89,6$ МПа.

На рис. 4 приведены рассчитанные зависимости $\Delta r_2(t)$ для четырёх ВВ в сравнении с экспериментом [2] и с моделированием с использованием параметров из [2, 8, 12].

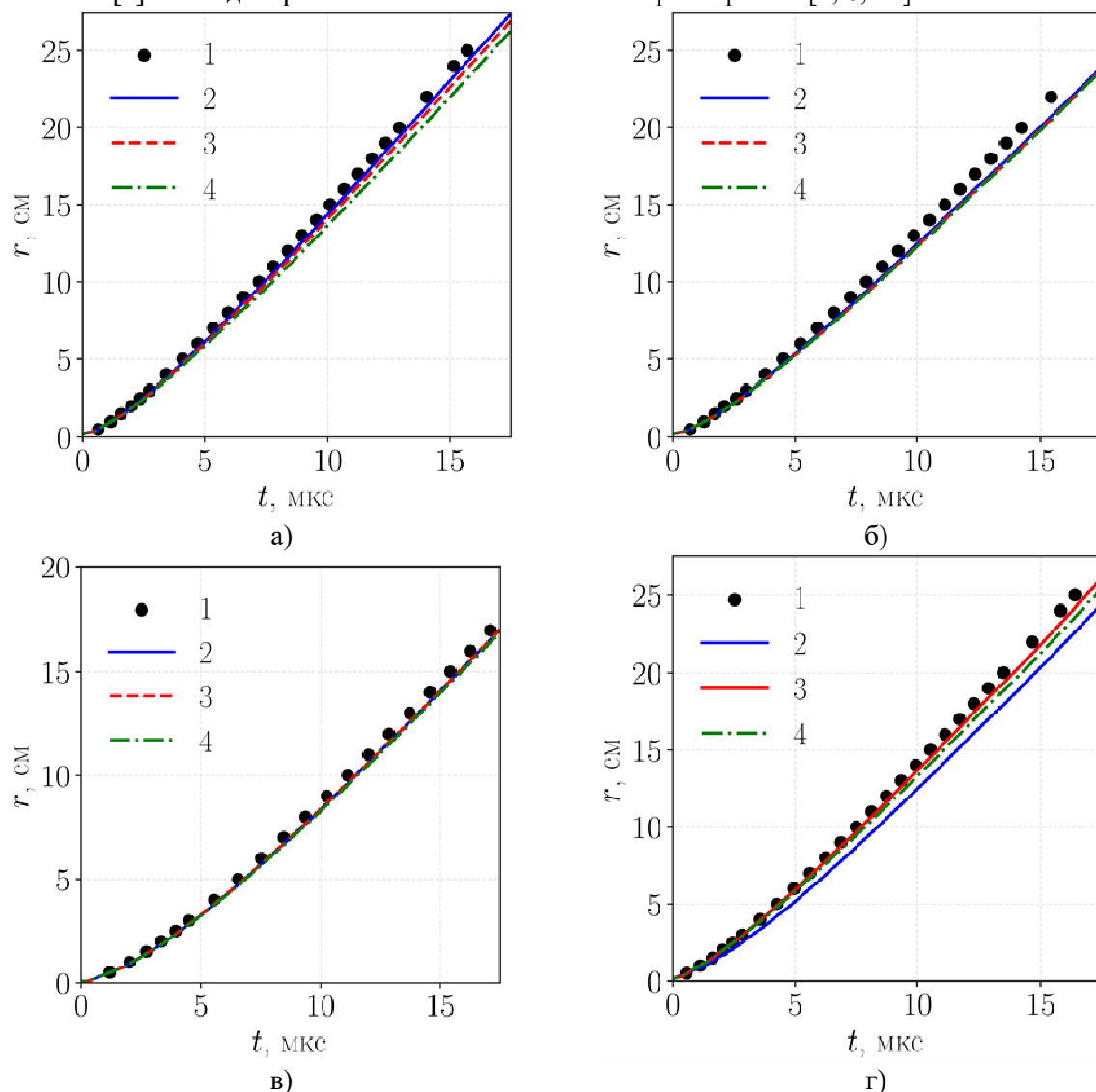


Рис. 4. Зависимость изменения внешнего радиуса трубки от времени для ТЭНа (а), Состав В (б), нитрометана (в) и циклотол (г): 1 – эксперимент [2], 2 – расчет с коэффициентами [2], 3 – расчет с коэффициентами данной работы, 4 – расчет с коэффициентами [8] для Состав В и – расчет с коэффициентами [12] для остальных ВВ

Из рис. 4. видно, что параметры, определённые по нашей методике, при моделировании дают результаты, близкие к эксперименту, а для циклотол даже превосходят по точности литературные данные. В табл. 2 приведены среднеквадратичные отклонения расчетных траекторий стенки от экспериментальных данных.

Таблица 2

Сравнение среднеквадратичных отклонений (единицы измерения – см)

	[2]	Данная работа	[8]	[12]
ТЭН	0,4141	0,6551	–	1,0227
Состав В	0,6859	0,7898	0,8336	–
Нитрометан	0,3748	0,3674	–	0,4633
Циклотол	1,4379	0,4161	–	0,7433

Из табл. 2 видно, что для ТЭНа и Состав В среднеквадратичное отклонение предложенного метода превышает значения, полученные в классической работе [2]. Это связано с принципиальным различием в постановке задачи: классический подход минимизируют кинематическую невязку – разницу между расчетной и экспериментальной кривой расширения цилиндрической

трубки. Предложенный же метод минимизирует энергетическую невязку – отклонение значений внутренней энергии, рассчитанных по уравнению изэнтропы (3) от значений, полученных из уравнения энергетического баланса (5). Другими словами, наш метод находит параметры JWL, которые обеспечивают строгое выполнение закона сохранения энергии на всем протяжении расширения, тогда как кинематическая точность выступает в роли вторичного критерия. Для задач метания оболочек и расчета работы расширения энергетический баланс является критически важным, поэтому небольшое ухудшение среднеквадратичного отклонения имеет меньшее значение по сравнению с физической согласованностью параметров. Для нитрометана и циклотола предложенный метод показал более высокую точность по среднеквадратичному отклонению, что свидетельствует о хорошей приспособляемости алгоритма к разным типам ВВ.

Таким образом, сравнение с литературными параметрами показывает, что различия в отдельных коэффициентах могут быть значительными (например, для Состава В параметр B отличается почти в два раза), однако итоговые зависимости $\Delta r_2(t)$ и $E(V)$ близки. Это свидетельствует о корреляции параметров JWL и о том, что разные наборы могут описывать одну и ту же изэнтропу с приемлемой точностью. Тем не менее для численного моделирования конкретных задач (например, метания оболочек) предпочтительнее использовать параметры, полученные с учётом энергетического баланса, как в данной работе.

Заключение

Разработан и апробирован метод определения параметров уравнения состояния JWL по данным цилиндр-теста, основанный на сведении задачи к трёхмерной нелинейной оптимизации с последующим линейным расчётом оставшихся коэффициентов. Метод включает:

- автоматический выбор наилучшей аппроксимирующей функции для экспериментальной кривой расширения цилиндрической стенки;
- учёт кинематических поправок при переходе к лагранжевым координатам;
- вычисление внутренней энергии ПД из уравнения энергетического баланса;
- решение системы из пяти линейных уравнений для A, B, C при фиксированных R_1, R_2, ω ;
- наложение физических ограничений на параметры.

Для четырёх эталонных ВВ получены наборы параметров, которые успешно верифицированы прямым численным моделированием цилиндр-теста. Предложенная методика может быть рекомендована для определения JWL-параметров как традиционных, так и новых взрывчатых составов при наличии экспериментальных данных цилиндр-теста.

Литература

1. Metal Acceleration by Composite Explosives / J.W. Kury, H.C. Hornig, E.L. Lee *et al.* // 4th International Symposium on Detonation. – 1965. – P. 3–12.
2. Lee, E.L. Adiabatic Expansion of High Explosive Detonation Products: Report UCRL-50422 / E.L. Lee, H.C. Hornig, J.W. Kury // University of California, Lawrence Radiation Laboratory. – Livermore, CA, 1968.
3. Mortensen, C. Optimizing Code Calibration of the JWL Explosive Equation-of-State to the Cylinder Test / C. Mortensen, P.C. Souers // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. – 2017. – Vol. 42, Iss. 6. – P. 616–622.
4. Incekurk, T. Determination of JWL Equation of State Parameters of Explosive using Cylinder Expansion Test / T. Incekurk, E. Topkaraoglu // 30th International Symposium on Ballistics. – 2017. – P. 1490–1497.
5. An Improved Simple Method of Deducing JWL Parameters from Cylinder Expansion Test / I.-F. Lan, S.-C. Hung, C.-Y. Chen *et al.* // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. – 1993. – Vol. 18, Iss. 1. – P. 18–24.
6. Miller, P.J. Determining JWL Equation of State Parameters using the Gurney Equation Approximation / P.J. Miller, K.E. Carlson // Proceedings of the 9th Symposium (International) on Detonation, Portland, Oregon, USA. – 1989. – P. 930–936.
7. Trzcinski W.A., Cudzilo S. Characteristics of High Explosives Obtained from Cylinder Test Data // Chinese Journal of Energetic Materials. – 2006. – Vol. 14, Iss. 1. – P. 1–7.

8. Determination of Detonation Products Equation of State from Cylinder Test: Analytical Model and Numerical Analysis / P.M. Elek, V.M. Džingalašević, S.S. Jaramaz *et al.* // Thermal Science. – 2015. – Vol. 19, Iss. 1. – P. 35–48.
9. Determination of the JWL Constants for ANFO and Emulsion Explosives from Cylinder Test Data / J.A. Sanchidrián, R. Castedo, L.M. López *et al.* // Central European Journal of Energetic Materials. – 2015. – Vol. 12, no. 2. – P. 177–194.
10. Sutton, B.D. An Analytical Approach to Obtaining JWL Parameters from Cylinder Tests / B.D. Sutton, J.W. Ferguson, A.N. Hodgson // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1793, Iss. 1. – Article 030032.
11. Probe Cylinder Test Method and Calibration of JWL Equation of State of Detonation Products for TNT / H. Cui, J. Wu, H. Zhou *et al.* // Chinese Journal of Energetic Materials. – 2023. – Vol. 31, Iss. 7. – P. 707–713.
12. Hornberg, H. Determination of Fume State Parameters from Expansion Measurements of Metal Tubes / H. Hornberg // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. – 1986. – Vol. 11, Iss. 1. – P. 23–31.
13. Souers, P.C. Detonation Equation of State at LLNL: Report UCRL-ID-119262, Rev. 2 / P.C. Souers, B. Wu, L.C. Haselman // Lawrence Livermore National Laboratory. – Livermore, CA, 1995.
14. Souers, P.C. JWL Calculating: Report UCRL-TR-211984 / P.C. Souers // Lawrence Livermore National Laboratory. – Livermore, CA, 2005.
15. Hill, L.G. Detonation Product Equation-of-State Directly from the Cylinder Test / L.G. Hill // Proceedings of the 21st International Symposium on Shock Waves (ISSW), Great Keppel Island, Australia, 1997. – Paper 2780. – P. 1–6.
16. Determination of Detonation Products Equation of State Using Cylinder Test / P.Elek, V. Dzingalasevic, S. Jaramaz *et al.* // Third Serbian (28th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vlasina Lake, Serbia, 2011. – P. 457–570.
17. Metal Angle Correction in the Cylinder Test / P.C. Souers, R. Garza, H. Hornig *et al.* // Propellants, Explosives, Pyrotechnics, 2011. – Vol. 36, Iss. 1. – P. 9–15.
18. Upgraded Analytical Model of the Cylinder Test / P.C. Souers, L. Lauderbach, R. Garza *et al.* // Propellants, Explosives, Pyrotechnics, 2013. – Vol. 38, Iss. 3. – P. 419–424.
19. Dobratz, B.M. LLNL Explosives Handbook. UCRL-52997 / B.M. Dobratz, P.C. Crawford // Lawrence Livermore National Laboratory, 1985. – 526 p.

Поступила в редакцию 16 июня 2026 г.

Сведения об авторах

Шестаковская Елена Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация. e-mail: shestakovskaiaes@susu.ru.

Стариков Ярослав Евгеньевич – аспирант, преподаватель, кафедра вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация. e-mail: starikovie@susu.ru.

**DETERMINING THE PARAMETERS OF THE JWL EQUATION OF STATE
FOR DETONATION PRODUCTS USING CYLINDER TEST DATA:
A DIMENSIONALITY REDUCTION METHOD****E.S. Shestakovskaya, Ya.E. Starikov**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: shestakovskaiaes@susu.ru

Abstract. This article presents a method for determining the six parameters of the Jones–Wilkins–Lee (JWL) equation of state for detonation products based on cylinder test results. Unlike classical approaches that require simultaneous optimization of all six parameters, the proposed method simplifies the problem by reducing it to a three-dimensional search space of R_1 , R_2 , ω , followed by the analytical calculation of the coefficients A , B , and C from a system of linear algebraic equations based on the Chapman–Jouguet conditions. Three different functions are used to approximate the experimental expansion curve of a cylindrical tube, with the best one selected by the least squares method. Physically justified constraints are introduced on the parameters to ensure correct isentropic behavior over the entire expansion range of detonation products. The method is validated using four explosives: PETN, Comp B, Nitromethane, and Cyclotol. Comparison with literature data and numerical simulations of cylinder expansion confirm the high accuracy of the obtained parameters.

Keywords: cylinder test; JWL equation of state; detonation products; parameter identification; energy balance; dimensionality reduction.

References

1. Kury J.W., Hornig H.C., Lee E.L., McDonnell J., Ornellas D.L., Finger M., Strange F.M., Wilkins M.L. *Metal Acceleration by Chemical Explosives*. In: *4th International Symposium on Detonation*, 1965, pp. 3–13. Office of Naval Research, White Oak.
2. Lee E.L., Hornig H.C., Kury J.W. *Adiabatic Expansion of High Explosive Detonation Products: Report UCRL-50422*. University of California, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, CA, 1968.
3. Mortensen C., Souers P.C. Optimizing Code Calibration of the JWL Explosive Equation-of-State to the Cylinder Test. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2017, Vol. 42, Iss. 6, pp. 616–622. DOI: 10.1002/prop.201700031
4. Incekurk T., Topkaraoglu E. Determination of JWL Equation of state Parameters of Explosive using Cylinder Expansion Test. *30th International Symposium on Ballistics*, 2017, pp. 1490–1497. DOI: 10.12783/ballistics2017/16934
5. Lan I.-F., Hung S.-C., Chen C.-Y., Niu Y.-M., Shiuan J.-H. An Improved Simple Method of Deducing JWL Parameters from Cylinder Expansion Test. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 1993, Vol. 18, Iss. 1, pp. 18–24. DOI: 10.1002/prop.19930180104
6. Miller P.J., Carlson K.E. Determining JWL Equation of State Parameters using the Gurney Equation Approximation. *Proc. 9th Symposium (International) on Detonation, Portland, Oregon, USA*, 1989, pp. 930–936.
7. Trzcinski W.A., Cudzilo S. Characteristics of High Explosives Obtained from Cylinder Test Data. *Chinese Journal of Energetic Materials*, 2006, Vol. 14, Iss. 1, pp. 1–7.
8. Elek P.M., Džingalašević V.M., Jaramaz S.S., Micković D.M., Jovanović M. Determination of Detonation Products Equation of State from Cylinder Test: Analytical Model and Numerical Analysis. *Thermal Science*, 2015, Vol. 19, Iss. 1, pp. 35–48. DOI: 10.2298/TSCI121029138E
9. Sanchidrián J.A., Castedo R., López L.M., Segarra P., Santos A.P. Determination of the JWL Constants for ANFO and Emulsion Explosives from Cylinder Test Data. *Central European Journal of Energetic Materials*, 2015, Vol. 12, no. 2, pp. 177–194.

10. Sutton B.D., Ferguson J.W., Hodgson A.N. An Analytical Approach to Obtaining JWL Parameters from Cylinder Tests. *AIP Conference Proceedings*, 2017, Vol. 1793, Iss. 1, Article 030032. DOI: 10.1063/1.4971490.
11. Cui H., Wu J., Zhou H., Yang Y., Xing B., Chen X., Guo R. Probe Cylinder Test Method and Calibration of JWL Equation of State of Detonation Products for TNT. *Chinese Journal of Energetic Materials*, 2023, Vol. 31, Iss. 7, pp. 707–713. DOI: 10.11943/CJEM2023066
12. Hornberg H. Determination of Fume State Parameters from Expansion Measurements of Metal Tubes. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 1986, Vol. 11, Iss. 1, pp. 23–31. DOI: 10.1002/prep.19860110106
13. Souers P.C., Wu B., Haselman L.C. *Detonation Equation of State at LLNL: Report UCRL-ID-119262, Rev. 2*. Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, 1995.
14. Souers P.C. *JWL Calculating: Report UCRL-TR-211984*. Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, 2005.
15. Hill L.G. Detonation Product Equation-of-State Directly from the Cylinder Test. *Proc. 21st International Symposium on Shock Waves (ISSW)*, Great Keppel Island, Australia, 1997, Paper 2780, pp. 1–6.
16. Elek P., Dzingalasevic V., Jaramaz S., Micković D., Micković D. Elek P. Determination of Detonation Products Equation of State using Cylinder Test. *Third Serbian (28th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Vlasina Lake, Serbia, 2011, pp. 457–570. DOI: 10.2298/TSCI121029138E
17. Souers P.C., Garza R., Hornig H., Lauderbach L., Owens C., Vitello P., Metal Angle Correction in the Cylinder Test. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2011, Vol. 36, Iss. 1, pp. 9–15. DOI: 10.1002/prep.201000006
18. Souers P.C., Lauderbach L., Garza R., Ferranti L., Vitello P., Upgraded Analytical Model of the Cylinder Test. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2013, Vol. 38, Iss. 3, pp. 419–424. DOI: 10.1002/prep.201200192
19. Dobratz B.M., Crawford P.C. *LLNL Explosives Handbook. UCRL-52997*. Lawrence Livermore National Laboratory, 1985, 526 p.

Received June 16, 2026

Information about the authors

Shestakovskaya Elena Sergeevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: shestakovskaiaes@susu.ru.

Starikov Yaroslav Evgenievich is Post-graduate student, Lecturer, Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: starikovie@susu.ru.

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННОГО ИЗНОСА НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОРИОЛИСОВОГО РАСХОДОМЕРА

А.А. Яушев^{1,2}, В.А. Логиновский¹

¹ ЭлМетро Групп, г. Челябинск, Российская Федерация

² Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: iaushevaa@susu.ru

Аннотация. Рассмотрен запатентованный метод диагностики технического состояния кориолисового расходомера (КР) на месте его эксплуатации с использованием встроенных в электронику алгоритмов. Метод основан на оценке технического состояния КР по отношению двух его собственных частот, которое измеряют во время эксплуатации КР. По результатам сравнения текущего отношения с исходным делают вывод о техническом состоянии КР. Для оценки эффективности метода в статье с помощью балочной конечноэлементной модели КР исследовано влияние локальных износов различных участков трубок на погрешность измерения расхода и на отношение частот. Для этого каждая трубка в модели разбита на десять участков. За счет изменения внутреннего диаметра участков трубок смоделированы износы отдельных участков и некоторые их сочетания. В реальных условиях КР может измерять расход как жидкостей, так и газов в широком диапазоне температур, поэтому расчеты выполнены для разных плотностей и температур рабочей среды. Выполнены экспериментальные исследования. С помощью специального стенда получен электрохимический износ внутренней поверхности одной трубки. После двух операций износа определены погрешность измерения расхода и отношение собственных частот.

Ключевые слова: кориолисов расходомер; диагностика технического состояния; износ трубок; температура; плотность; собственная частота; метод конечных элементов.

Введение

Кориолисов расходомер (КР) предназначен для измерения массового расхода жидкостей и газов. Обзор конструкций КР приведен в [1–3], описание принципа их работы приведено в [4].

Представленный на рис. 1 КР состоит из основания 1, корпуса 2 и двух дельтаобразных трубок 3, по которым протекает рабочая среда. Под действием задающей катушки 4 трубки совершают изгибные колебания из плоскости ХУ в противоположном друг к другу направлении на резонансной частоте, пропорциональной плотности рабочей среды. Поступательное движение рабочей среды во вращательном движении трубок приводит к возникновению кориолисовых сил, которые закручивают трубки вокруг оси Y и приводят к возникновению временной задержки Δt между сигналами двух измерительных катушек 3 [4]. Эта задержка прямо пропорциональна массовому расходу.

Погрешность измерения массового расхода и плотности серийных КР достигает 0,1–0,05 %. Однако, при использовании КР для измерения расхода агрессивных или абразивных рабочих сред может возникать износ, коррозия и эрозия трубок, что приводит к увеличению погрешности измерения расхода и плотности [5, 6]. Кроме того, накопление на стенках трубок отложений, плотность которых отличается от плотности рабочей среды, также негативно влияет на точность измерения плотности.

Чтобы оценить техническое состояние КР, обычно его демонтируют и поверяют, проливая через него жидкость на специальном стенде [7]. Это дорогостоящая процедура, поэтому все чаще

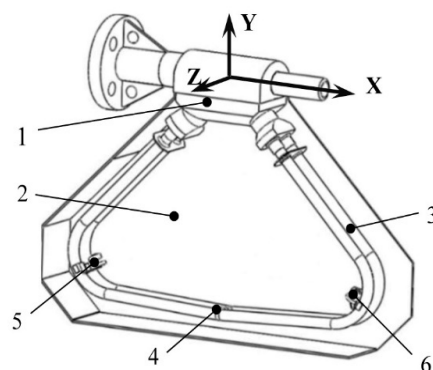


Рис. 1. Кориолисов расходомер: 1 – основание; 2 – корпус; 3 – трубки; 4 – задающая катушка; 5, 6 – измерительные катушки

прибегают к методам поверки на месте эксплуатации, используя встроенные в электронику КР алгоритмы. Эти методы основаны на анализе изменения жесткости системы в процессе эксплуатации КР, что позволяет выявить возможный износ трубок.

Согласно [8], параметр жесткости k можно выразить через калибровочный коэффициент C_F для определения массового расхода

$$C_F = \frac{\dot{m}}{\Delta t} = \frac{\text{масса}}{(\text{время})^2} = \frac{(\text{сила/ускорение})}{(\text{время})^2} = \frac{\text{сила}}{\text{перемещение}} = k.$$

Параметр жесткости k можно оценивать с помощью методов модального анализа, также он входит в выражения для частот собственных колебаний трубок, которые в случае системы с одной степенью свободы можно представить в следующем виде

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{k/(m_{\text{трубки}} + \rho_{\text{среды}} V_{\text{трубки}})},$$

где $m_{\text{трубки}}$ – масса трубки; $V_{\text{трубки}}$ – внутренний объем трубки, заполненный рабочей средой плотностью $\rho_{\text{среды}}$

$$\rho_{\text{среды}} = \frac{k}{\omega^2 V_{\text{трубки}}} - \frac{m_{\text{трубки}}}{V_{\text{трубки}}}.$$

В статьях [8, 9] и патенте [10] для оценки изменения жесткости предлагают: записать сигнал с измерительной катушки и сигнал возбуждения, и получить значения частотной передаточной функции FRF (*Frequency Response Function*) на резонансе и нескольких околорезонансных частотах; подобрать параметры модели с одной степенью свободы, чтобы она описывала основной режим работы колебательной системы КР; записать начальную жесткость модели. Для того чтобы удостовериться, что КР находится в пределах калибровки, полученную при каждой поверке жесткость сравнивают с начальной жесткостью.

В статье [11] для оценки изменения жесткости предлагают проводить сравнение измеренной плотности с эталонной. Если эталонное значение плотности неизвестно, можно сравнить плотности, измеренные на разных частотах (формах). В патенте [12] для оценки жесткости предлагают комбинацию двух подходов.

Одним из существенных недостатков описанных методов поверки является сильная зависимость жесткости от температуры [13, 14], что повышает требования к точности калибровки температурных коэффициентов и может привести к ошибочным результатам поверки, если температура определена неправильно. Например, это может произойти при неравномерном распределении температуры вдоль измерительных трубок и в области установки датчика температуры.

В статье [15] и патенте [16] для оценки изменения жесткости предлагают измерять две собственные частоты КР и вычислять их отношение, которое представляет собой коэффициент, описывающий исходное состояние КР. Далее в процессе эксплуатации для оценки текущего состояния КР повторно измеряют две собственные частоты, сравнивают их отношение с исходным коэффициентом и делают вывод о состоянии системы. Основным преимуществом такого метода является существенно меньшее влияние температуры на результат поверки. На примере консольной балки показано, что отношение частот не зависит от модуля Юнга, следовательно, не зависит от его температурных изменений

$$p_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{ql^4}}, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2},$$

где λ – корни частотного уравнения; E – модуль Юнга; J – момент инерции сечения; q – погонная масса балки; l – длина балки.

Для более сложной системы, представляющей собой консольную балку, разбитую на участки разного сечения (имитация локального износа) и с массой на конце (имитация навесных элементов на трубках), в патенте [16] показано, что отношение частот зависит от отношения массы груза к массе балки, отклонения момента инерции сечения и погонной массы каждого участка от номинала, но не зависит от изменения модуля Юнга, так как при его изменении частоты меняются одинаково. Полученные выводы проверены в статье [15] путем моделирования износов отдельных участков измерительных трубок при разных температурах с помощью конечноэлементной модели КР. Но в статье [15] рассмотрена только одна плотность среды и ограниченный набор

износов отдельных участков трубки. Изменение плотности среды приводит к изменению отношения массы навесных элементов к массе трубки, что приводит к изменению отношения частот, которое необходимо оценить и учесть.

Данная статья дополняет рассмотренный в статье [15] и патенте [16] метод диагностики технического состояния КР. Выполнен расчетный анализ эффективности применения этого метода диагностики состояния КР при моделировании износов разных участков трубок для разных плотностей сред при разных температурах. Приведены результаты экспериментальной поверки.

Расчетное исследование эффективности использования отношения частот для диагностики технического состояния КР при износе трубок

В качестве критерия диагностики технического состояния КР используется отношение собственных частот, соответствующих противофазным формам колебаний трубок из плоскости ХУ (рис. 1). Первая форма – это основная форма, на которой работает расходомер, далее будем называть ее рабочей формой, а соответствующую ей частоту – рабочей частотой. Дополнительно рассматривается частота, которой соответствует форма прогиба, близкая к форме вынужденных колебаний от кориолисовых сил, далее будем называть ее кориолисовой частотой.

Отношение частот зависит от плотности рабочей среды $\rho_{\text{среды}}$, представим квадрат отношения рабочей и кориолисовой частот в виде уравнения

$$\frac{f_{\text{раб}}^2}{f_{\text{кор}}^2} = C1_{\text{раб/кор}} \rho_{\text{среды}} + C2_{\text{раб/кор}},$$

где $C1_{\text{раб/кор}}$ и $C2_{\text{раб/кор}}$ – калибровочные коэффициенты, определяемые по рабочей и кориолисовой частотам при различных плотностях среды. Коэффициент $C1$ показывает, как сильно отношение частот зависит от плотности среды, геометрии трубок, расположения навесных элементов и их массы. Плотность рабочей среды $\rho_{\text{среды}}$ определяется по рабочей частоте КР, методика определения приведена, например, в патенте [16].

Для исследования влияния износа трубок на погрешность измерения массового расхода и собственные частоты КР используется конечноэлементная модель, приведенная в статье [15]. Она основана на предложенном Stack С.Р. [17] методе моделирования с использованием балочных конечных элементов в формулировке Тимошенко, которые определяются через локальные матрицы масс, жесткости, демпфирования и гироскопических сил, учитывающие влияние текущей среды (массу среды, возникающие кориолисовы и центробежные силы) [18].

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + ([K] + [H(v)])\{\dot{x}(t)\} + [C]\{x(t)\} = \{P(t)\},$$

где $[M]$, $[C]$, $[K]$ и $[H(v)]$ – глобальные матрицы масс, жесткости, демпфирования и гироскопических сил формируются на основе локальных матриц конечных элементов модели, $\{x(t)\}$ и $\{P(t)\}$ – вектор-столбцы перемещений и внешних сил, v – скорость текущей среды.

Конечно-элементная модель колебательной системы КР (рис. 2) включает в себя основание, жестко закрепленное посередине, и две трубки с точечными массами, моделирующими катушки и перемычки между трубками. Текущая жидкость считается несжимаемой, однородной и невязкой, скорость течения жидкости по сечению и длине трубки постоянна.

Каждая трубка модели разбита на десять участков, расположенных симметрично слева и справа. Схема расположения участков на первой трубке приведена на рис. 3. Для каждого участка имеется возможность независимо изменять диаметры, что позволяет проводить численные эксперименты и моделировать влияние основных факторов (износ трубок, в том числе локальный, отложения и др.), на массовый расход и собственные частоты КР. Влияние температуры в модели учтено следующим образом: в модель введена зависимость модуля Юнга от температуры; при изменении температуры учтено изменение линейных размеров поперечного сечения, обусловленного линейным расширением материала трубок, изменение внутреннего объема трубок и, соответственно, массы находящейся внутри трубок текущей среды.

Критерий k_1 диагностики состояния КР по отношению рабочей и кориолисовой частот выглядит следующим образом

$$k_1 = \delta_{\text{раб/кор}}, \quad \delta_{\text{раб/кор}} = C1_{\text{раб/кор}} \rho_{\text{среды}} + C2_{\text{раб/кор}} - f_{\text{раб}}^2 / f_{\text{кор}}^2.$$

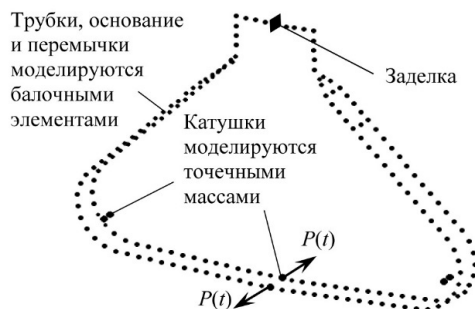


Рис. 2. Схема расположения узлов колебательной системы КР

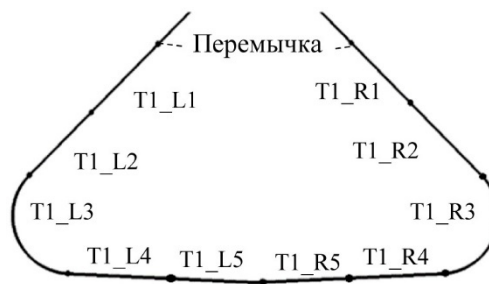


Рис. 3. Схема разбивки первой трубки модели на участки

Погрешность определения массового расхода

$$\delta t = \frac{\Delta t(T) - \Delta t_0(T)}{\Delta t_0(T)} \cdot 100 \%,$$

где Δt – временная задержка при текущем состоянии КР, Δt_0 – временная задержка при номинальных параметрах расходомера, T – температура.

Чтобы проверить эффективность предлагаемого метода диагностики состояния КР, рассмотрены следующие варианты износа: равномерный износ всех участков; износ отдельных участков трубки; симметричные износы участков, оказывающих максимальное и минимальное влияние на задержку; сочетания двух участков с максимальным и минимальным влиянием. Износы подобраны таким образом, чтобы они вызывали погрешность определения массового расхода примерно в 0,14 %. Погрешность определения массового расхода оценивается по изменению временной задержки относительно номинальных диаметров всех участков трубки. В табл. 1 приведены участки с износом и величина износа, выраженная как увеличение внутреннего диаметра трубки от номинала (8 мм). Для каждого варианта износа выполнены расчеты для трех сред при разной температуре (табл. 2).

Таблица 1

Положение и величина износа разных участков, выраженная через изменение внутреннего диаметра

Один участок	Симметричные участки	Два участка min & max	Все участки
T1 L1 8,04	T1 L3 & T1 R3 8,24 & 8,24	T1 L1 & T1 L3 8,022 & 8,182	All 8,004
T1 L2 8,22	T1 L3 & T2 L3 8,22 & 8,22	T1 L1 & T1 R3 8,022 & 8,182	– –
T1 L3 8,33	T1 L1 & T1 R1 8,02 & 8,02	T1 L1 & T2 L3 8,022 & 8,182	– –
T1 L4 8,144	T1 L1 & T2 L1 8,02 & 8,02	T1 L3 & T2 L4 8,04 & 8,14	– –
T1 L5 8,058	–	–	– –

Таблица 2

Плотности и температуры сред, используемые для расчетов

Среда	Воздух			Вода		Условное масло		
Плотность, кг/м ³	1,452	1,205	1,029	998,2	988,084	800	800	800
Температура, °C	–30	20	70	20	50	–20	20	90

Зависимость критерия k_1 диагностики технического состояния КР от температуры и плотности для различных вариантов износов трубки приведена на рис. 4. Для более детального анализа случаев износа, вызывающих небольшое изменение критерия, зависимость модуля критерия k_1 от температуры дополнительно приведена в логарифмическом масштабе на рис. 5.

Отклонение критерия k_1 от нуля для номинального случая (отсутствия износов) в зависимости от температуры и плотности достигает порядка 10^{-6} . Если в качестве референсного значения взять величину $k_1 = 10^{-5}$, то при использовании отношения двух частот (рабочей и кориолисовой) некоторые варианты износов окажутся недиагностируемыми. Поэтому дополнительно рассмотрена еще одна частота, соответствующая противофазной форме колебаний трубок (далее в тексте третья частота). Чувствительность каждого варианта отношения частот к износу отдельных участков трубки и равномерному износу двух трубок приведена на диаграмме рис. 6. Из нее видно, что отношение рабочей и кориолисовой частот для некоторых вариантов износа имеет избыточную чувствительность, повышающую вероятность ложного срабатывания сигнала о неисправности КР. Поэтому далее рассмотрены два критерия: k_2 , представляющий собой сумму модуля отклонения отношения рабочей и третьей частоты и отношения кориолисовой и третьей ча-

стоты и критерий k_3 , представляющий собой сумму модуля отклонения трех вариантов отношения частот. Результаты приведены на рис. 7–9.

$$\delta_{\text{раб/III}} = C1_{\text{раб/III}} \rho_{\text{среды}} + C2_{\text{раб/III}} - f_{\text{раб}}^2 / f_{\text{III}}^2; \quad \delta_{\text{кор/III}} = C1_{\text{кор/III}} \rho_{\text{среды}} + C2_{\text{кор/III}} - f_{\text{кор}}^2 / f_{\text{III}}^2.$$

$$k_2 = |\delta_{\text{раб/III}}| + |\delta_{\text{кор/III}}|; \quad k_3 = |\delta_{\text{раб/кор}}| + |\delta_{\text{раб/III}}| + |\delta_{\text{кор/III}}|.$$

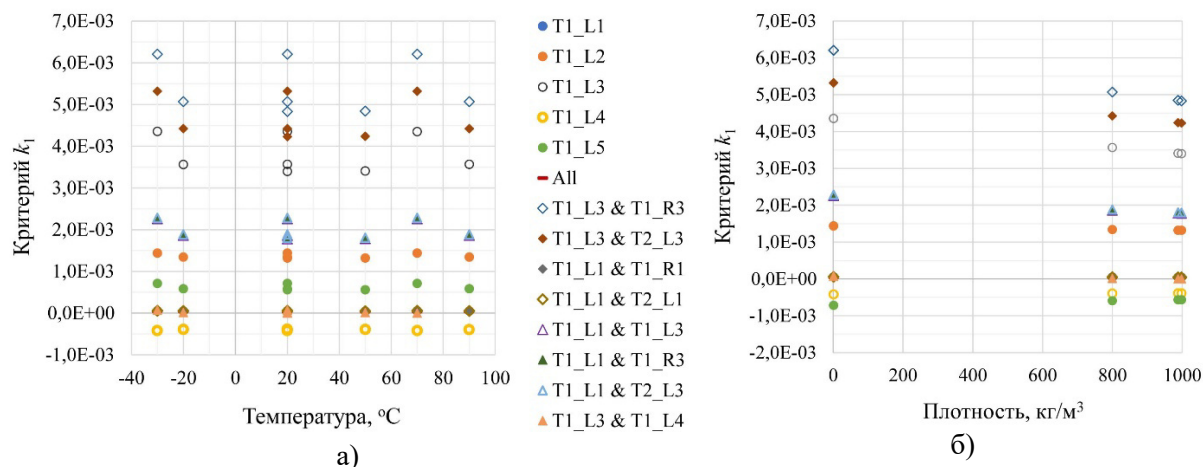


Рис. 4. Зависимость критерия k_1 диагностики технического состояния КР от температуры (а) и плотности (б) для различных вариантов износов трубок

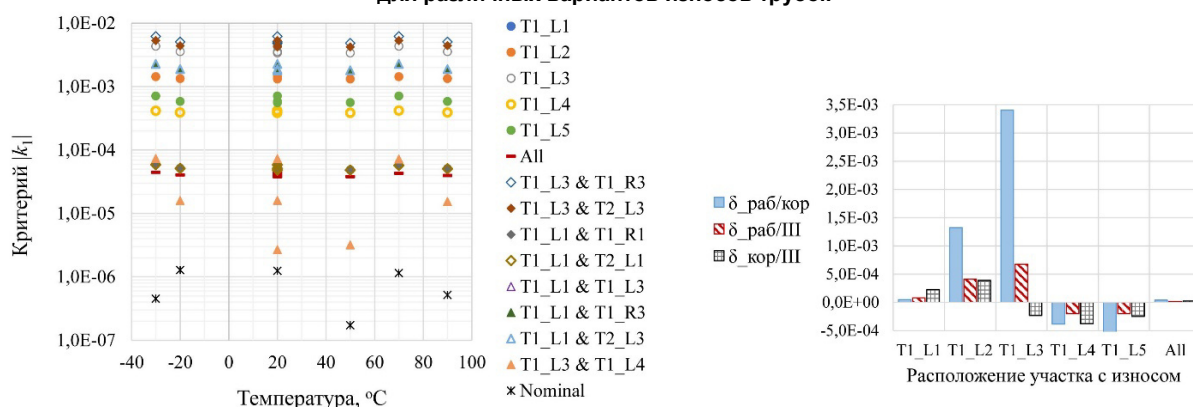


Рис. 5. Зависимость критерия k_1 диагностики технического состояния КР от температуры в логарифмическом масштабе для различных вариантов износов трубок

Рис. 6. Влияние износов различных участков трубки на отношения частот

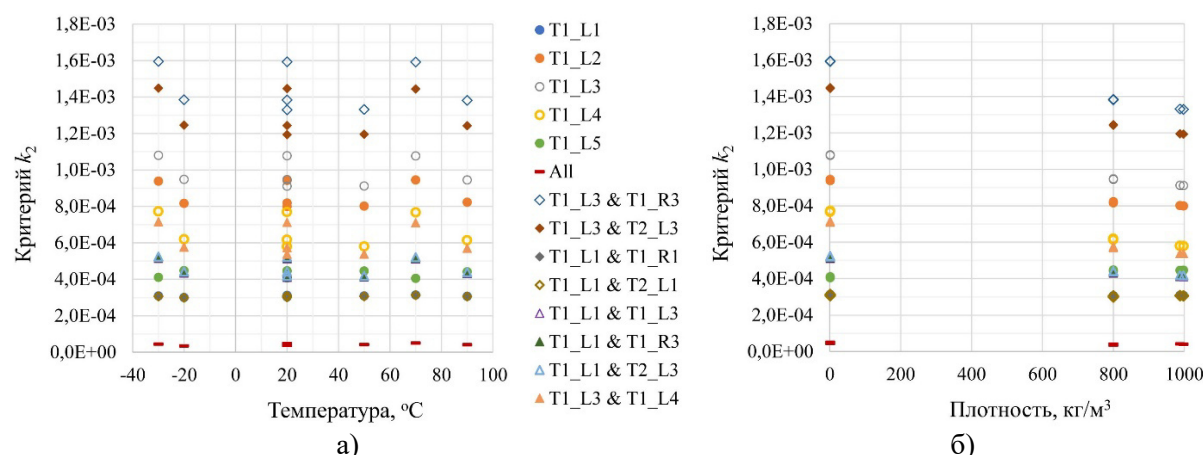


Рис. 7. Зависимость критерия k_2 диагностики технического состояния КР от температуры (а) и плотности (б) для различных вариантов износов трубок

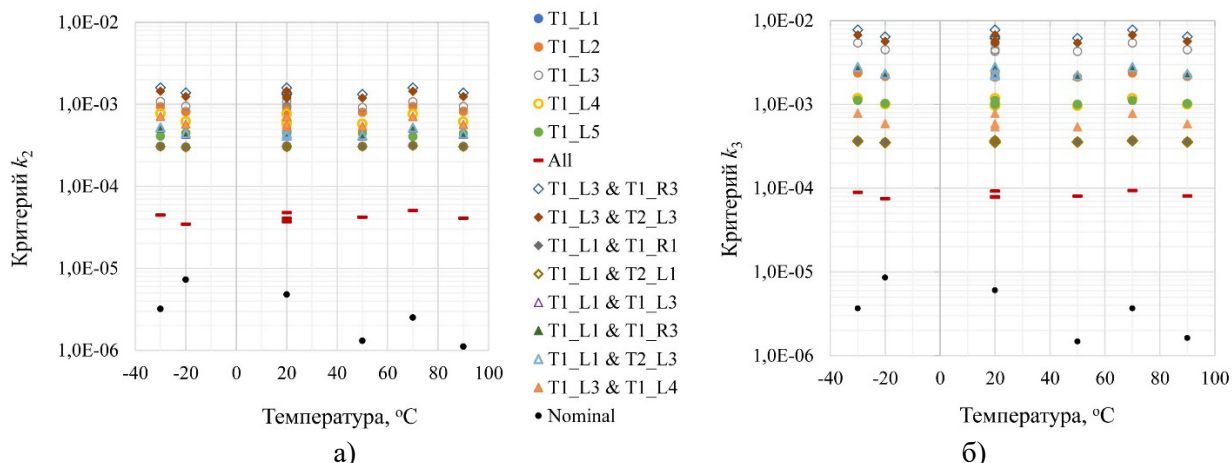


Рис. 8. Зависимость критерия диагностики от температуры в логарифмическом масштабе для различных вариантов износов трубок: а – критерий k_2 ; б – критерий k_3

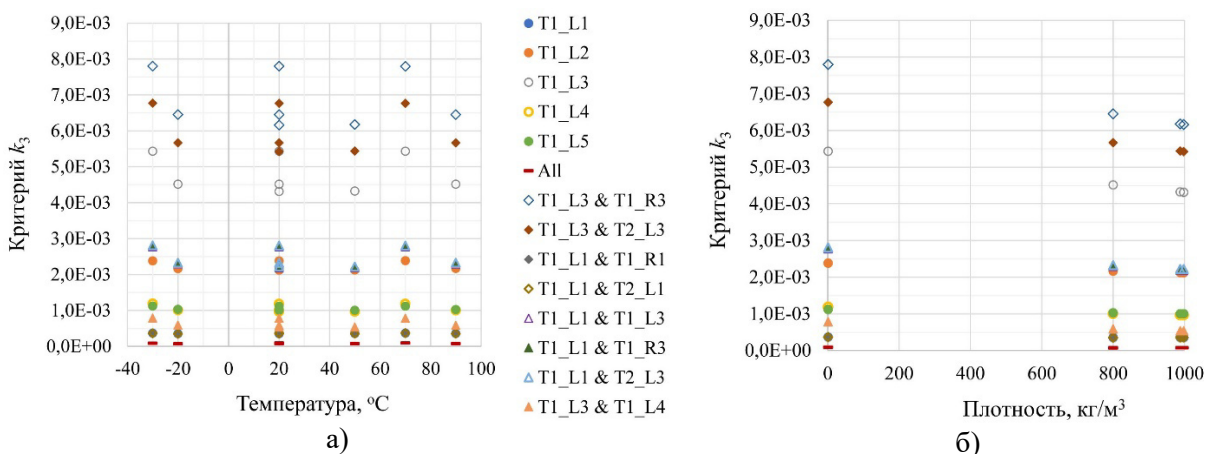


Рис. 9. Зависимость критерия k_3 диагностики технического состояния КР от температуры (а) и плотности (б) для различных вариантов износов трубок

На величину критериев k_1 , k_2 и k_3 оказывает влияние погрешность измерения плотности. Разность между эталонной плотностью и плотностью, определенной по рабочей частоте в зависимости от износа разных участков трубок, температуры и плотности среды, приведена на рис. 10.

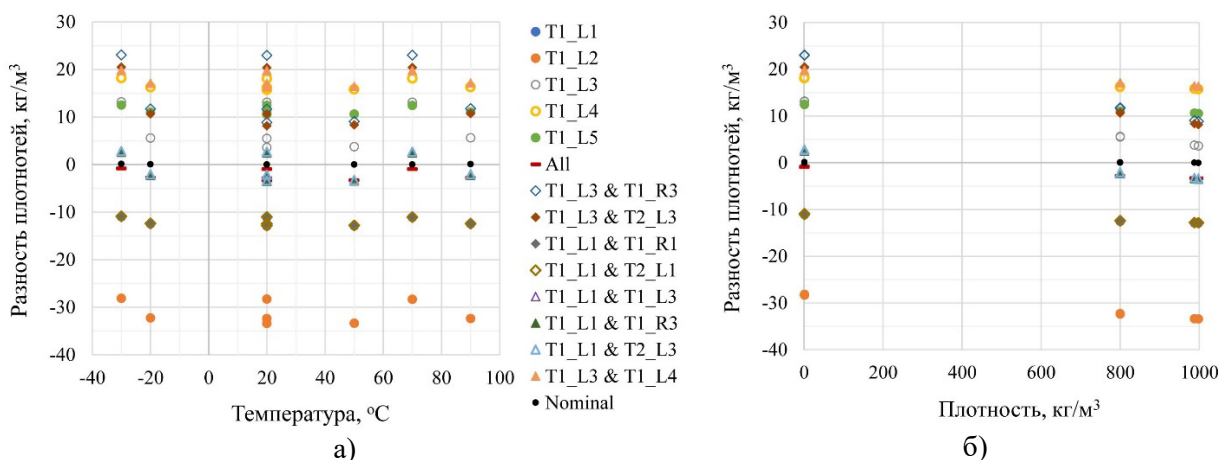


Рис. 10. Разность между эталонной плотностью и плотностью, определенной по рабочей частоте в зависимости от износа разных участков трубок, температуры (а) и плотности (б) среды

Экспериментальное исследование эффективности использования отношения частот для диагностики технического состояния КР при износе трубок

Для проверки полученной зависимости погрешности измерения расхода и критериев диагностики технического состояния КР от локального изменения жесткости измерительной системы выполнены экспериментальные исследования. С помощью специального стенда (рис. 11) получен локальный электрохимический износ внутренней поверхности трубки (рис. 12). КР подсоединяли к оснастке, электрод помещали в измерительную систему к месту расположения перемычки, что примерно соответствует участку T1_L1. Включали насос, систему заполняли раствором NaCl 25 % и подавали ток с силой 4 А в течение одной минуты. После этого КР относили на проливочную установку и определяли погрешность измерения расхода, которая составила примерно 0,03 %. Измеряли собственные частоты КР и определяли три критерия диагностики k_1 , k_2 и k_3 . Далее операцию электрохимического износа повторяли до достижения уровня погрешности примерно 0,07 %. Повторно измеряли собственные частоты КР и определяли три критерия.

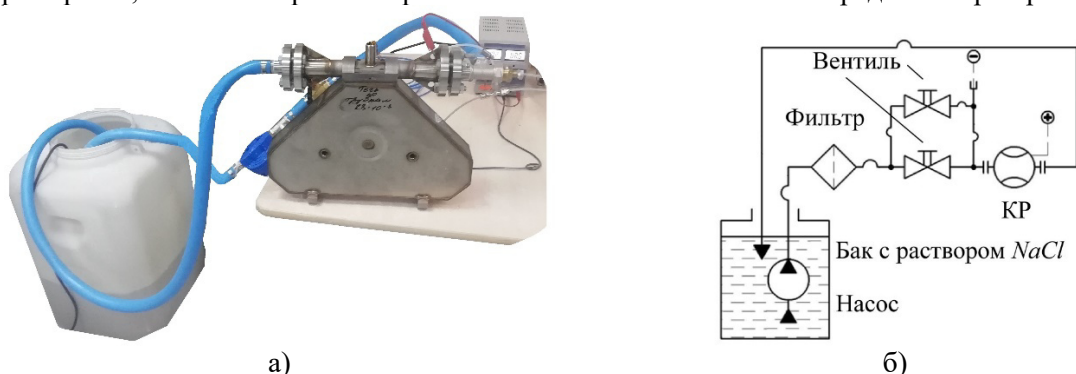


Рис. 11. Специальный стенд для локального электрохимического износа внутренней поверхности трубок:
а – фото стенда; б – схема стенда



Рис. 12. Фото внутренней поверхности разрезанной трубки после электрохимического износа

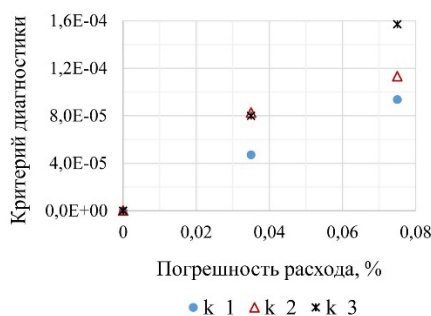


Рис. 13. Экспериментальная зависимость погрешности измерения расхода от трех критериев диагностики

На рис. 13 приведена экспериментальная зависимость погрешности измерения расхода и трех критериев диагностики для исходного состояния КР и после двух операций износа. Судя по величинам погрешности расхода и критериев, электрод (локализация места износа) находился между первым T1_L1 и вторым T1_L2 участками трубки (см. рис. 3).

Закключение

В результате проведенного расчетно-экспериментального исследования применения отношения двух собственных частот КР для диагностики его технического состояния установлено:

1. Использование отношения частот в качестве критерия диагностики позволяет обнаруживать недопустимое изменение погрешности измерения расхода, вызванное износом как локальных участков трубок, так и равномерным износом трубок.
2. Износ различных участков трубки в разной степени влияет на погрешность измерения расхода и отношения частот. Достоверность диагностики можно повысить при использовании отношения трех частот (отношение различных пар, критерии k_1 , k_2 и k_3), но использование отношения рабочей и кориолисовой частоты более простое в реализации.
3. Отношения частот слабо зависят от температуры, так как для каждого рассмотренного случая износа три критерия диагностики при изменении температуры находятся практически на

одной прямой. В некоторых случаях при износе горизонтальных участков трубы наблюдается небольшой разброс, но он обусловлен больше влиянием плотности, а точнее, нарушением калибровки по плотности из-за износов.

Литература

1. Wang, T. Coriolis Flowmeters: a Review of Developments Over the Past 20 Years, and an Assessment of the State of the Art and Likely Future Directions / T. Wang, R. Baker // Flow Measurement and Instrumentation. – 2014. – Т. 40. – С. 99–123.
2. Даев, Ж.А. Эволюция кориолисовых расходомеров / Ж.А. Даев // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. – 2016. – Т. 4, № 3. – С. 33–39.
3. Anklin, M. Coriolis Mass Flowmeters: Overview of the Current State of the art and Latest Research / M. Anklin, W. Drahm, A. Rieder // Flow Measurement and Instrumentation. – 2006. – Vol. 17, Iss. 6. – С. 317–323.
4. Razzillier, H. Coriolis-Effect in Mass Flow Metering / H. Razzillier, F. Durst // Archive of Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 61, no. 3. – P. 192–214.
5. Cunningham, T. Verification of Coriolis Flow Meter Calibration: Theory and Practice, Including Lab and Field Results / T. Cunningham // Can. Sch. Hydrocarb. Meas., 2015.
6. Zhang, J. Early Detection of the Wear of Coriolis Flowmeters Through in situ Stiffness Diagnosis / J. Zhang, Y. Yan, J. Liu, E. Jukes // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2021. – Vol. 70. – P. 1–10. – Art no. 3520310.
7. 3124.0000.00-01 МП. Государственная система обеспечения единства измерений. Счетчики-расходомеры массовые. ЭЛМЕТРО-Фломак. Методика поверки. – 2021. – 36 с.
8. Cunningham, T. An IN-SITU Verification Technology for Coriolis Flowmeters / T. Cunningham // Proceedings of the 7th International Symposium on Fluid Flow Measurement. – 2009. – С. 1–5.
9. Rensing, M. Coriolis Flowmeter Verification via Embedded Modal Analysis / M. Rensing, T.J. Cunningham // Structural Dynamics, Vol. 3. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. – New York: Springer New York, 2011. – С. 851–860.
10. Патент RU 2628661. Вибрационный расходомер, а также способы и диагностика для проверки измерителя / Т.Ж. Каннингэм, Д.Д. Каполнек, М.Д. Ренсинг, К.Д. Ларсен; правообладатель МАЙКРО МОУШИН (США); заявл. 19.12.2014; зарег. 21.08.2017.
11. Патент RU 2323419. Система и способ диагностики расходомера кориолиса / Ч.П. Стэк; правообладатель МАЙКРО МОУШИН (США); заявл. 29.09.2003; зарег. 27.04.2008.
12. Патент RU 2773633. Способ оценки состояния измерительной системы кориолисового расходомера / С.Е. Лобашев, М.Д. Шилин, Е.А. Горюнов, А.А. Яушев, В.А. Логиновский, А.В. Жестков; правообладатель Общество с ограниченной ответственностью «Элметро групп»; заявл. 07.12.2020; зарег. 06.06.2022.
13. Costa, F.O. Modeling Temperature Effects on a Coriolis Mass Flowmeter / F.O. Costa, J.G. Pope, K.A. Gillis // Flow Measurement and Instrumentation. – 2020. – Vol. 76. – P. 101811.
14. Патент RU 2803043. Способ оценки состояния кориолисова расходомера для его поверки и/или диагностики / А.А. Яушев, В.А. Логиновский, А.В. Жестков; правообладатель Общество с ограниченной ответственностью «ЭлМетро-Инжиниринг»; заявл. 11.05.2023; зарег. 05.09.2023.
15. Яушев, А.А. Диагностика технического состояния кориолисова расходомера на основе оценки изменения отношения двух его собственных частот / А.А. Яушев, В.А. Логиновский // Законодательная и прикладная метрология. – 2025. – № 4(196). – С. 61–68.
16. Патент US 8229695B2 Meter Electronics and Methods for Geometric Thermal Compensation in a Flow Meter / A.R. Pruysen, J.A.S. Maartensdijk, R.B. Garnett; правообладатель Micro Motion Inc. (США); заявл. 28.09.2006; зарег. 24.07.2012.
17. Stack, C. A Finite Element for the Vibration Analysis of a Fluid-Conveying Timoshenko Beam / C. Stack, R. Garnett, G. Pawlas // 34th Structures, structural dynamics and materials conference. – 1993. – С. 1552.
18. Тараненко, П.А. Влияние демпфирования на амплитуды и фазы колебаний системы с гиростатическими связями / П.А. Тараненко, Д.В. Телегин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2025. – Т. 18, № 1. – С. 65–78.

Поступила в редакцию 30 июня 2026 г.

Сведения об авторах

Яушев Александр Анатольевич – кандидат технических наук, ведущий инженер, ООО «Эл-Метро Групп», доцент кафедры технической механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: iaushevaa@susu.ru, <https://orcid.org/0009-0003-9796-0381>.

Логиновский Владимир Александрович – начальник отдела механики и сенсорики, ООО «ЭлМетро Групп», г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: nai@elmetro.ru, <https://orcid.org/0009-0001-9017-1000>.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 3, pp. 50–59*

DOI: 10.14529/mmph260306

CALCULATION AND EXPERIMENTAL STUDY OF THE EFFECT OF OPERATIONAL WEAR ON THE DYNAMIC PROPERTIES OF A CORIOLIS FLOWMETER

A.A. Yaushev^{1,2}, V.A. Loginovskiy¹

¹ *El Metro Group Ltd, Chelyabinsk, Russian Federation*

² *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

E-mail: iaushevaa@susu.ru

Abstract. The article discusses a patented method for the technical diagnosis of a Coriolis flowmeter at its operation site, using algorithms embedded in the electronics. The method is based on describing the initial state of the Coriolis flowmeter as the ratio of two modal frequencies measured during the operation of the Coriolis flowmeter. Its state can be assessed by comparing the frequency ratio with initial data.

To evaluate the effectiveness of the method, the article uses a beam finite element model to study the influence of the local wear of different tube sections on the error in determining the flow rate and the frequency ratio. To this end, each tube in the model is divided into ten sections. The wear of individual sections and some combinations are simulated by varying the internal diameter of the tube sections. In real-world conditions, the Coriolis flowmeter can measure the flow rates of both liquids and gases in a wide range of temperatures. Therefore, calculations are performed for different densities and temperatures of the working medium.

The article presents the results of experimental studies into the Coriolis flowmeter. Electrochemical wear was applied to the inner surface of a tube using a special setup. After two rounds of wear, flow errors and frequency ratios were recorded.

The authors found that an unacceptable change in the flow error caused by the tube wear can be detected by determining the frequency ratio. The wear of different sections of the tube affects the flow error and the frequency ratio to varying degrees. The diagnostic accuracy can be improved by using the ratio of three pairs of frequencies. The frequency ratios are weakly dependent on temperature.

Keywords: *Coriolis flowmeter; technical diagnostics; corrosion, erosion of tubes; temperature; density; modal frequency, finite elements method.*

References

1. Wang T., Baker R. Coriolis Flowmeters: a Review of Developments Over the Past 20 Years, and an Assessment of the State of the Art and Likely Future Directions. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2014, Vol. 40, pp. 99–123. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.08.015.
2. Dayev Zh.A. Evolyutsiya koriolisovykh raskhodomerov (Evolution of the Coriolis Flowmeters). *Mashinostroenie: setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal*, 2016, Vol. 4, no. 3, pp. 33–39. (in Russ.).
3. Anklin M., Drahm W., Rieder A. Coriolis Mass Flowmeters: Overview of the Current State of the Art and Latest Research. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2006, Vol. 17, Iss. 6, pp. 317–323. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2006.07.004.
4. Raszillier H., Durst F. Coriolis-Effect in Mass Flow Metering. *Archive of Applied Mechanics*, 1991, Vol. 61, no. 3, pp. 192–214. DOI: 10.1007/BF00788053.

5. Cunningham T. Verification of Coriolis Flow Meter Calibration: Theory and Practice, Including Lab and Field Results. *Can. Sch. Hydrocarb. Meas.*, 2015.
6. Zhang J., Yan Y., Liu J., Jukes E. Early Detection of the Wear of Coriolis Flowmeters through in situ Stiffness Diagnosis. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2021, Vol. 70, pp. 1–10, Art no. 3520310. DOI: 10.1109/TIM.2021.3091428.
7. 3124.0000.00-01 MP. Gosudarstvennaya sistema obespecheniya edinstva izmereniy. *Schetchiki-raskhodomery massovye. ELMETRO-Flomak. Metodika poverki* (State System for Ensuring the Uniformity of Measurements. Mass Flow Meters. ELMETRO-Flomak. Verification Method), 2021, 36 p. (in Russ.).
8. Cunningham T. An IN-SITU Verification Technology for Coriolis Flowmeters. *Proc. of the 7th International Symposium on Fluid Flow Measurement*, 2009, pp. 1–5.
9. Rensing M., Cunningham T.J. Coriolis Flowmeter Verification via Embedded Modal Analysis. In: Proulx, T. (eds) *Structural Dynamics*, Vol. 3. *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. Springer, New York, NY, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-9834-7_75
10. Kanningem T.D., Kapolnek D.D., Rensing M.D., Larsen K.D. *Patent RU 2628661. Vibratory Flowmeter as well as Methods and Diagnostics for Checking Meter*; proprietor(s) MAJKRO MOUShN (US); date of filing 19.12.2014; date of publication 21.08.2017.
11. Stak Ch.P. *Patent RU 2323419. System and Mode of Diagnostics of Coriolis's flowmeter*; proprietor(s) MAJKRO MOUShN (US); date of filing 29.09.2003; date of publication 27.04.2008.
12. Lobashev S.E., Shilin M.D., Goriunov E.A., Yaushev A.A., Loginovskij V.A., Zhestkov A.V. *Patent RU 2773633. Method for Assessing the State of the Measuring System of a Coriolis Flowmeter*; proprietor(s) Obshchestvo s ogranichennoj otvetstvennostyu «ElMetro Grupp»; Date of Filing 07.12.2020; date of publication 06.06.2022.
13. Costa F.O., Pope J.G., Gillis K.A. Modeling Temperature Effects on a Coriolis Mass Flowmeter. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2020, Vol. 76, p. 101811. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2020.101811.
14. Lobashev S.E., Shilin M.D., Goriunov E.A., Yaushev A.A., Loginovskij V.A., Zhestkov A.V. *Patent RU 2803043. Method for Assessing the State of a Coriolis Flowmeter for its Verification and/or Disagnostics*; proprietor(s) Obshchestvo s ogranichennoj otvetstvennostyu «ElMetro-Inzhiniring»; date of filing 11.05.2023; date of publication 05.09.2023.
15. Yaushev A.A., Loginovskii V.A. Diagnosis of the Technical Condition of a Coriolis Flowmeter based on the Assessment of the Change in the Ratio of its Two Modal Frequencies. *Legislative and Applied Metrology*, 2025, no. 4, pp. 61–68. DOI: 10.32446/2782-5418.2025-4-61-68.
16. Pruysen A.R., Maartensdijk J.A.S., Garnett R.B. *Patent US 8229695B2. Meter Electronics and Methods for Geometric Thermal Compensation in a Flow Meter*; proprietor(s) MAJKRO MOUShN (US); date of filing 28.09.2006; date of publication 24.07.2012.
17. Stack C., Garnett R., Pawlas G. A Finite Element for the Vibration Analysis of a Fluid-Conveying Timoshenko Beam. *34th Structures, structural dynamics and materials conference*, 1993, p. 1552.
18. Taranenko P.A., Telegin D.V. Influence of Damping on the Amplitude and phase of Oscillations of a System with Gyroscopic Connections. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2025, Vol. 18, no. 1, pp. 65–78. DOI: 10.14529/mmp250105.

Received June 30, 2026

Information about the authors

Yaushev Aleksandr Anatol'evich is Cand. Sc. (Engineering), El Metro Group Ltd., Associate Professor of the Department of Technical Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: iaushevaa@susu.ru, <https://orcid.org/0009-0003-9796-0381>.

Loginovskiy Vladimir Aleksandrovich is Head of the Mechanics and Sensors Department, El Metro Group Ltd, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: nai@elmetro.ru, <https://orcid.org/0009-0001-9017-1000>.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ИЗБЫТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ НАНОСЕКУНДНОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА В ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е.В. Голубев

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
e-mail: golubev@susu.ru

Аннотация. Рассматривается задача нагрева однородного изотропного проводящего полупространства одиночным оптическим импульсом с временным и пространственным профилем в виде гауссовой функции. Аналитическое решение задачи теплопроводности для полупространства получено в квадратурах с помощью преобразований Фурье и Фурье–Бесселя в линейном приближении независимости теплофизических параметров среды от температуры и экспоненциальном законе поглощения излучения по глубине. Дано приближенное решение уравнения теплопроводности в задаче нагрева полупространства с помощью представления выражений для распределения интенсивности и температурного поля в виде произведения функций, которое справедливо для широких пучков и в случае пренебрежения распространения тепла в радиальном направлении на начальной фазе поглощения излучения. Получены формулы для максимальной избыточной температуры в полупространстве для прямоугольной и гауссовой временной формы оптического импульса.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности; гауссов пучок; оптико-акустические источники; безразмерный анализ; разделение масштабов; распределение температуры; преобразование Фурье–Бесселя; приближённое аналитическое решение; оценка максимальной температуры; экспоненциальное поглощение.

Введение

Эффекты, наблюдающиеся при поглощении оптического импульса, весьма разнообразны и используются в современных технологиях (лазерная обработка материалов, сварка и закалка) [1–4], фундаментальных (изучение динамики теплопередачи, фазовых переходов и поведения плазмы, физике нелинейных оптических явлений) [2, 5] и прикладных исследованиях (опто-акустические ультразвуковые методы дефектоскопии и неразрушающего контроля, метрология и томография, медицинская диагностика) [6, 7].

Для описания процессов возникновения механических напряжений и деформаций, структурных преобразований и фазовых переходов, связанных с поглощением импульсного лазерного излучения, необходимо знать и пространственно-временное распределение температуры в поглощающей среде. Традиционный подход основан на классическом законе теплопроводности Фурье и заключается в выборе приближения поверхностного поглощения, который хорошо оправдывает себя для хороших проводников и импульсного излучения из видимого и ближнего инфракрасного диапазона микро- и наносекундной длительности [8, 9]. Для металлов с большим удельным сопротивлением, полупроводников и диэлектриков необходим учет и объемного экспоненциального поглощения падающего излучения, что существенно усложняет аналитическое описание процесса. Поглощение пикосекундных импульсов обычно описывается в рамках модели Каттанео–Вернотте, которая учитывает поправки высшего порядка к выражению для теплового потока [10–14]. Решение задачи для более коротких фемто- и аттосекундных импульсов реализуют в рамках двухтемпературной модели [15] и ее модификации, учитывающей конечную скорость распространения тепла и электронной, и в ионной подсистемах – двухтемпературной гиперболической модели [16, 17].

Одним из наиболее эффективных математических приемов решения уравнения теплопроводности с осесимметричным распределением объемных источников тепла в полупространстве является преобразование Фурье–Бесселя, сводящее уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами к обыкновенному дифференциальному уравнению. При этом открывается возможность провести аналитическую оценку максимальной температуры, что имеет большую практическую ценность, поскольку именно это определяет пороговое значение энергии оптического импульса для фазовых переходов (например, плавления и испарения, точек Кюри, Нейля и др.), а также механизмов оптоакустической генерации звука (тепловой, гидродинамический, испарительный и др.). Несмотря на огромный прогресс в области аналитических, полуаналитических и численных методов и огромную востребованность для быстрой верификации моделей, анализа чувствительности к параметрам импульса и понимания физики импульсного нагрева, аналитических оценок параметров процесса нагрева сделано крайне мало, что обусловлено естественной сложностью анализа и решения линейных и нелинейных трехмерных задач теплопроводности.

Работа посвящена аналитическому решению линейной задачи теплопроводности методом преобразования Фурье–Бесселя, получению приближенных формул с помощью преобразования Фурье и эмпирической формулы для максимальной избыточной температуры в полупространстве, а также анализу влияния коэффициента поглощения на этот параметр температурного поля. Текст содержит таблицы, демонстрирующие соответствие аналитических оценок предельному случаю классического решения для полупространства и поверхностному поглощению.

1. Постановка задачи. Выбор модели

В нашей работе мы будем рассматривать импульсы наносекундной длительности и решать задачу теплопроводности, как часть задачи оптико-акустического преобразования, в которой нагретые части среды являются источниками термических напряжений. Применение лазерных импульсов большей длительности уменьшает эффективность преобразования энергии импульса в энергию упругих колебаний из-за небольших температурных напряжений, а при использовании более коротких импульсов возникает сильный нагрев в области поглощения, что хотя и приводит к образованию сильного акустического отклика, но связано с повреждением поверхности, что, например, недопустимо для целей неразрушающего контроля.

Поставим задачу записать выражение для температурного поля в аналитическом виде, что упростит в дальнейшем решение задачи оптико-акустического преобразования. Другой целью работы будет нахождение связи параметров оптического импульса и теплофизических параметров среды с максимальной избыточной температурой на поверхности металла.

Рассмотрим осесимметричную задачу поглощения оптического импульса в проводнике (металле). Для математической постановки задачи выберем цилиндрическую систему координат: ось z направим вдоль оси лазерного пучка, r задает расстояние от оси. Металл будем моделировать сплошной проводящей средой, в которой выполняются закон Ома и Джоуля–Ленца, занимающей полупространство (область $z \geq 0$). Пре решении задачи нагрева полупространства мы будем полагать деформации среды вследствие теплового расширения пренебрежимо малыми.

Полагая, что распределение интенсивности в падающем на границу лазерном пучке описывается основной модой свободного пространства, зададим временную и пространственную форму одиночного лазерного импульса в виде функции Гаусса:

$$I(r, t) = \frac{W}{\pi \sqrt{\pi} R_0^2 t_0} \exp\left(-r^2 / R_0^2 - t^2 / t_0^2\right), \quad (1)$$

где W – энергия импульса; t – время; t_0 – половина длительности лазерного импульса и R_0 – радиус лазерного пятна на поверхности, определяемые по критерию $1/e$. Длительность импульса полагается от одного до нескольких десятков наносекунд, радиус лазерного пятна – от десятой доли до нескольких миллиметров. Здесь пренебрегается угловой расходимостью пучка, значение которой обычно не превышает нескольких миллирадиан (несфокусированное излучение), и также не будем принимать во внимание, что вместе с основной модой из резонатора выходят и моды высших порядков, доля которых обычно не превышает одного процента.

При решении задачи будем полагать, что интенсивность излучения мала (порядка нескольких мегаватт на квадратный метр), а частота электромагнитной волны соответствует видимому

диапазону или ближней инфракрасной области. На границе среды свет испытывает частичное отражение. Коэффициент поглощения по энергии обозначим A , и хотя в общем случае его значение зависит от температуры и многих факторов, в нашей работе (кроме п. 8) мы будем полагать его константой, а также будем пренебрегать изменениями на поверхности и в объеме среды, вызванными излучением и давлением, производимым светом на поверхность металла.

2. Решение задачи с учетом экспоненциального поглощения излучения в объеме среды

При поглощении излучения в объеме среды действуют источники тепла, которые задаются объемной плотностью мощности тепловых источников $F(r, z, t)$. Показатель преломления в металле является комплексной величиной, и мы для простоты будем полагать, что он также не зависит от температуры. Следовательно, интенсивность пучка света в такой поглощающей среде будет определяться законом Бугера–Ламберта–Бера, т. е. $F(r, z, t) = AI(r, t)\mu \exp(-\mu z)$, где μ – коэффициент объемного поглощения, характеризующий глубину проникновения излучения в среду ($1/\mu$ – оптическая глубина). При $1/\mu \ll \sqrt{at_0}$ задачу можно решать в приближении поверхностного, а не объемного поглощения излучения.

Введем обозначения: T_0 – равновесная температура среды, $T(r, t)$ – избыточная температура (превышение над равновесным значением T_0), $a = \lambda_q / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности, λ_q – теплопроводность среды, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность. Для определения поля избыточной температуры запишем дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат для изотропного твердого тела:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_q \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F(r, \varphi, z, t) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Для осесимметричной задачи с учетом приближения, в котором теплофизические параметры не зависят от температуры, получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{F(r, z, t)}{\lambda_q} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Будем пренебрегать потерями энергии на границе, связанными с лучистым переносом и другими механизмами теплообмена с окружающей средой. Поскольку в этом случае граница полупространства тепло не проводит и источники тепла располагаются только в объеме среды, то это уравнение необходимо дополнить граничным условием

$$-\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Решение системы, включающей уравнения и граничное условие, получим с помощью интегрального преобразования Фурье–Бесселя, формулы для обратного преобразования которого:

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \left[\tilde{T}^*(\lambda, z, \omega) \lambda J_0(\lambda r) e^{i\omega t} \right], I(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \left[\tilde{I}^*(\lambda, \omega) \lambda J_0(\lambda r) e^{i\omega t} \right], \quad (5)$$

где λ – параметр преобразования Бесселя ($\sim$), ω – параметр преобразования Фурье ($*$), $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а образ распределения интенсивности в лазерном пучке:

$$\tilde{I}^*(\lambda, \omega) = \frac{W}{2\pi} \exp\left(-\lambda^2 R_0^2 / 4 - \omega^2 t_0^2 / 4\right). \quad (6)$$

Образ поля температуры определяется обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}^*}{\partial z^2} - \beta_q^2 \tilde{T}^* = -A \frac{\mu}{\lambda_q} \tilde{I}^*(\lambda, \omega) \exp(-\mu z)$$

и оно может быть записано следующим образом:

$$\tilde{T}^*(\lambda, z, \omega) = \left[B_1 - \frac{A\mu \tilde{I}^*(\lambda, \omega) e^{-\mu z}}{2\beta_q \lambda_q} \int_0^z e^{-(\mu + \beta_q)\tilde{z}} d\tilde{z} \right] e^{+\beta_q z} + \left[B_2 + \frac{A\mu \tilde{I}^*(\lambda, \omega) e^{-\mu z}}{2\beta_q \lambda_q} \int_0^z e^{-(\mu - \beta_q)\tilde{z}} d\tilde{z} \right] e^{-\beta_q z},$$

где $B_1(\lambda, \omega)$ и $B_2(\lambda, \omega)$ – функции, определяемые дополнительными требованиями, которые в нашем случае заключаются в ограниченности образа при $z \rightarrow \infty$ и граничном условии, требующем равенства нулю плотности теплового потока на границе полупространства.

В результате образ функции распределения температуры может быть записан в виде

$$\tilde{T}^*(\lambda, z, \omega) = \frac{A\tilde{I}^*(\lambda, \omega)}{\lambda_q(1 - \beta_q^2/\mu^2)} \left[\frac{1}{\beta_q} e^{-\beta_q z} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu z} \right], \beta_q(\lambda, \omega) = \sqrt{\lambda^2 + \frac{i\omega}{a}}, \quad (7)$$

а распределение температуры определяется обратным преобразованием

$$T(r, z, t) = \frac{AW}{4\pi^2 \lambda_q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \left[\frac{\exp(-\lambda^2 R_0^2/4 - \omega^2 t_0^2/4)}{(1 - \beta_q^2/\mu^2)} \left[\frac{1}{\beta_q} e^{-\beta_q z} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu z} \right] \lambda J_0(\lambda r) e^{i\omega t} \right]. \quad (8)$$

В рамках избранной модели полученное выражение дает точное решение задачи импульсного нагрева проводящего полупространства импульсным лазерным излучением. Расчет не вызывает чрезмерных сложностей и может быть реализован с помощью классических численных методов. К недостаткам можно отнести лишь трудности получения аналитических оценок характеристик процесса нагрева, например, скорости нагрева и максимальной температуры в зоне поглощения, а также и вычислительную трудоемкость получения значений температуры с заданной погрешностью из-за особенностей поведения подынтегральной функции, в частности при значениях параметров преобразования $\lambda = 0$ и $\omega = 0$.

При численном моделировании замечено, что при поглощении широких пучков ($R_0 \gg \sqrt{at_0}$) радиальный профиль распределения избыточной температуры долгое время (на порядок и больше, чем t_0) остается пропорциональным соответствующему профилю распределения интенсивности. Это означает, что проекция градиента температурного поля вдоль оси z много больше его проекции на ось r , даже если вычислять ее в точке с $z = 0, r = R_0/\sqrt{2}$, в которой она достигает максимального значения при малых t , например, в момент времени, при котором температура на поверхности достигает максимального значения (для временного профиля в виде гауссовой функции его грубо можно оценить как $t_{\max} \sim t_0/\sqrt{2}$).

В этом случае для уменьшения объема вычислений можно использовать решение одномерного уравнения теплопроводности, записанного для оси z , и умножить его на профиль распределения интенсивности вдоль оси r с соответствующей нормировкой. Для уточнения формулы с сохранением вычислительной трудоемкости построим приближенное решение, используя только преобразование Фурье.

3. Построение приближенной формулы при поглощении в объеме

Распределение интенсивности в лазерном пучке представим в виде произведения двух функций:

$$I(r, t) = I_r(r) \cdot I_t(t), I_r(r) = \exp(-r^2/R_0^2), I_t(t) = \frac{W}{\pi\sqrt{\pi}R_0^2 t_0} \exp(-t^2/t_0^2). \quad (9)$$

Распределение температуры в полупространстве также будем искать в виде произведения $T(r, z, t) = T_r(r, t)T_z(z, t)$, тогда уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$T_z \left[\frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_r}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_r}{\partial t} \right] + T_r \left[\frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} + \frac{F(r, z, t)}{T_r(r, t)\lambda_q} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_z}{\partial t} \right] = 0. \quad (10)$$

Найдем решение, приравняв последовательно первую и вторую скобку нулю. В общем случае это сделать невозможно, но, полагая, что пучок широкий ($R_0 \gg \sqrt{at_0}$) и за время поглощения большей части энергии отношение $F(r, z, t)/T_r(r, t)$ зависит только от z и t , это позволит построить приближенное решение.

Предположим, что оптический импульс настолько короткий, что профиль распределения температуры пропорционален радиальному профилю импульса $I_r(r)$ в момент времени $t = 0$. Для первого уравнения, получаемого приравниванием первой скобки нулю, решим задачу Коши

$T_r(r, t = 0) = I_r(r)$ (прим.: сейчас функции-множители $I_r(r)$ и $T_r(r, t)$ безразмерные). Воспользуемся формулой Пуассона [18], записанной в полярной системе координат:

$$T_r(r, t) = \frac{1}{2at} \int_0^\infty dr' \left\{ r' T_r(r', t = 0) \exp\left(-\frac{r^2 + r'^2}{4at}\right) I_0\left(\frac{rr'}{2at}\right) \right\},$$

где $I_0(r) = J_0(ir)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Интеграл берется, и в соответствии с [19, 20] получаем

$$T_r(r, t) = \frac{\exp(-r^2/(R_0^2 + 4at))}{1 + 4at/R_0^2}. \quad (11)$$

Разложение этой функции в ряд по степеням t в окрестности $t = 0$ дает

$$T_r(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) \left[1 - 4 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \left(\frac{at}{R_0^2}\right) + \dots \right] \approx \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) = I_r(r),$$

т. е. для моментов времени, для которых $R_0 \gg \sqrt{at}$, получаем выполнение требуемого условия

$$\frac{F(r, z, t)}{T_r(r, t) \lambda_q} \approx A \frac{\mu}{\lambda_q} I_t(t) \exp(-\mu z).$$

Следовательно, профиль температуры по глубине можно найти независимо от радиального профиля. Также следует заметить, что функция $I_t(t)$ заметно отличается от нуля только в небольшом интервале времени с длиной порядка десятка t_0 (в зависимости от требуемой погрешности).

В рассматриваемом случае распределение температуры по глубине $T_z(z, t)$ удовлетворяет одномерному неоднородному уравнению теплопроводности и граничному условию:

$$\frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} + A \frac{\mu}{\lambda_q} I_t(t) \exp(-\mu z) = \frac{1}{a} \frac{\partial T_z}{\partial t}, \quad -\lambda_q \frac{\partial T_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Решение уравнения ищем с помощью интегрального преобразования Фурье:

$$T_z(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_z^*(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad I_t(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_t^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad I_t^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_t(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{W}{\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{\omega^2 t_0^2}{4}\right).$$

Для образа распределения получаем

$$T_z^*(z, \omega) = \frac{A I_t^*(\omega)}{\lambda_q (1 - i\omega/(a\mu^2))} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{i\omega/a})}{\sqrt{i\omega/a}} - \frac{\exp(-\mu z)}{\mu} \right]. \quad (12)$$

Перейдем от образа к оригиналу с помощью обратного преобразования

$$T_z(z, t) = \frac{A}{2\pi\lambda_q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_t^*(\omega)}{1 - i\omega/(a\mu^2)} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{i\omega/a})}{\sqrt{i\omega/a}} - \frac{\exp(-\mu z)}{\mu} \right] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (13)$$

Для приближенной функции получаем выражение

$$T(r, z, t) = T_r(r, t) T_z(z, t) = \frac{AW}{2\pi^2 \lambda_q R_0^2} \cdot \frac{\exp(-r^2/(R_0^2 + 4at))}{1 + 4at/R_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\omega^2 t_0^2/4)}{1 - i\omega/(a\mu^2)} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{i\omega/a})}{\sqrt{i\omega/a}} - \frac{\exp(-\mu z)}{\mu} \right] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (14)$$

4. Построение приближенной формулы при поверхностном поглощении

Аналогично п. 3 распределение интенсивности в лазерном пучке представим в виде произведения двух функций $I(r, t) = I_r(r) \cdot I_t(t)$ и температурное поле будем искать в виде произведения $T(r, z, t) = T_r(r, t) T_z(z, t)$. В случае поглощения лазерного импульса проводящей средой выделение теплоты происходит в малом приповерхностном слое, в пределе – на поверхности полупространства. Для построения приближенной формулы будем решать уравнение теплопроводности, в котором объемная плотность мощности тепловых источников $F(r, z, t) = 0$:

$$T_z \left[\frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_r}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_r}{\partial t} \right] + T_r \left[\frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_z}{\partial t} \right] = 0 \quad (15)$$

с учетом граничного условия:

$$-\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = AI(r, t) \Rightarrow -\lambda_q \frac{\partial T_z(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{AI(r, t)}{T_r(r, t)} \approx AI_t(t).$$

Здесь учтен вывод из п. 3, где $T_r(r, t) \approx I_r(r)$. С помощью интегрального преобразования Фурье мы получим уравнение и граничное условие для образа $T_z^*(z, \omega)$

$$\frac{\partial^2 T_z^*(z, \omega)}{\partial z^2} - \frac{i\omega}{a} T_z^*(z, \omega) = 0, \quad -\lambda_q \frac{\partial T_z^*(z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} = AI_t^*(\omega).$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение, получим

$$T_z^*(z, \omega) = B(\omega) \exp(-\sqrt{i\omega/a} z), \quad B(\omega) = \frac{AI_t^*(\omega)}{\lambda_q \sqrt{i\omega/a}}.$$

Обратное преобразование дает выражение, совпадающее с результатом п. 3 при $\mu \rightarrow +\infty$:

$$T_z(z, t) = \frac{A}{2\pi\lambda_q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_t^*(\omega)}{\sqrt{i\omega/a}} \exp(-z\sqrt{i\omega/a}) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (16)$$

Выражение для приближенной функции в случае поверхностного поглощения:

$$T(r, z, t) = T_r(r, t) T_z(z, t) = \frac{AW}{2\pi^2 \lambda_q R_0^2} \cdot \frac{\exp(-r^2/(R_0^2 + 4at))}{1 + 4at/R_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\omega^2 t_0^2/4 - z\sqrt{i\omega/a} + i\omega t)}{\sqrt{i\omega/a}} d\omega. \quad (17)$$

5. Безразмерные переменные

Решение задачи описывается размерными функциями и их размерными аргументами. Введение безразмерных переменных, что возможно реализовать многими способами [8], упростит рассмотрение и позволит уменьшить количество параметров, от которых зависит решение задачи, а также позволит обобщить решение, поскольку функция в безразмерных переменных отвечает целому семейству размерных функций. Кроме того, это позволит при численном моделировании оперировать значениями, по порядку величины близкими к единице, и упростить вычисление интегралов.

Для записи решения задачи в универсальном виде и облегчения процедуры численного моделирования перейдем к безразмерному параметру η_r и переменным η , χ , τ :

$$R_0 = \eta_r \sqrt{at_0}, \quad \gamma = \mu \sqrt{at_0}, \quad r = \eta \sqrt{at_0}, \quad z = \chi \sqrt{at_0}, \quad t = \tau t_0, \quad (18)$$

а также к безразмерным параметрам преобразований Фурье–Бесселя:

$$\kappa = \lambda \sqrt{at_0}, \quad \xi = \omega t_0. \quad (19)$$

Запишем результаты решения задачи в новых обозначениях. Распределение интенсивности:

$$I(\eta, \tau) = I_\eta(\eta) I_\tau(\tau), \quad I_\eta(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{\eta_r^2}\right), \quad I_\tau(\tau) = \frac{W}{\pi \sqrt{\pi} R_0^2 t_0} \exp(-\tau^2) \quad (20)$$

и образы распределения интенсивности:

$$\tilde{I}^*(\kappa, \xi) = \frac{W}{2\pi} \exp\left(-\frac{\kappa^2 \eta_r^2}{4} - \frac{\xi^2}{4}\right), \quad I_\tau^*(\xi) = \frac{W}{\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right). \quad (21)$$

1) общее решение при поглощении в объеме определяется следующим образом

$$\tilde{T}^*(\kappa, \chi, \xi) = \frac{A \sqrt{at_0} \tilde{I}^*(\kappa, \xi)}{\lambda_q (1 - \beta_q^2/\gamma^2)} \left(\frac{e^{-\beta_q \chi}}{\beta_q} - \frac{e^{-\gamma \chi}}{\gamma} \right),$$

обратное преобразование которого дает выражение

$$T(\eta, \chi, \tau) = \frac{1}{2\pi at_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\kappa [\tilde{T}^*(\kappa, \chi, \xi)] \kappa J_0(\kappa \eta) e^{i\xi \tau} =$$

$$= \frac{\theta A \eta_r^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\kappa \left[\frac{\exp(-\kappa^2 \eta_r^2 / 4 - \xi^2 / 4)}{(1 - \beta_q^2 / \gamma^2)} \cdot \left(\frac{e^{-\beta_q \chi}}{\beta_q} - \frac{e^{-\gamma \chi}}{\gamma} \right) \right] \kappa J_0(\kappa \eta) e^{i\xi \tau}.$$

где обозначено $\beta_q^2 = \kappa^2 + i\xi$ и

$$\theta = \frac{2W\sqrt{at_0}}{\pi^2 t_0 \lambda_q R_0^2}; \quad (22)$$

2) общее решение для поверхностного поглощения

$$\tilde{T}^*(\kappa, \chi, \xi) = \frac{A\sqrt{at_0}\tilde{I}^*(\kappa, \xi)}{\lambda_q \beta_q} e^{-\beta_q \chi}, \quad (23)$$

$$T(\eta, \chi, \tau) = \frac{\theta A \eta_r^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\kappa \left[\frac{1}{\beta_q} \exp\left(-\frac{\kappa^2 \eta_r^2}{4} - \frac{\xi^2}{4} - \beta_q \chi\right) \right] \kappa J_0(\kappa \eta) e^{i\xi \tau}; \quad (24)$$

3) приближенное решение при поглощении в объеме для записи в безразмерных переменных требует подстановку соответствующего образа $I_i^*(\xi)$ в функцию:

$$T_\chi(\chi, \tau) = \frac{A\sqrt{at_0}}{2\pi\lambda_q t_0} \int_{-\infty}^{\infty} I_i^*(\xi) \frac{1 - i\xi/\gamma^2}{1 + i\xi^2/\gamma^4} \left[\frac{\exp(-\chi\sqrt{i\xi})}{\sqrt{i\xi}} - \frac{\exp(-\gamma\chi)}{\gamma} \right] \exp(i\xi\tau) d\xi. \quad (25)$$

В результате для распределения избыточной температуры имеем:

$$\begin{aligned} T(\eta, \chi, \tau) &= T_\eta(\eta, \tau) \cdot T_\chi(\chi, \tau) = \\ &= \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A \gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\xi^2/4)}{\sqrt{i\xi}} \cdot \frac{\gamma \exp(-\sqrt{i\xi}\chi) - \sqrt{i\xi} \exp(-\gamma\chi)}{\gamma^2 - i\xi} \exp(i\xi\tau) d\xi \\ &= \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A \gamma}{2} \int_0^{\infty} d\xi \left[\frac{\gamma\sqrt{\xi} \exp(-\xi^2/4 - \chi\sqrt{\xi/2}) \sin(\chi\sqrt{\xi/2} - \xi\tau + \pi/4)}{\gamma^4 + \xi^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^3 \exp(-\xi^2/4 - \chi\sqrt{\xi/2}) \cos(\chi\sqrt{\xi/2} - \xi\tau + \pi/4)}{\sqrt{\xi}(\gamma^4 + \xi^2)} \right. \\ &\quad \left. + \exp(-\gamma\chi) \frac{\xi \exp(-\xi^2/4) \sin(\xi\tau)}{\gamma^4 + \xi^2} - \gamma^2 \exp(-\gamma\chi) \frac{\xi \exp(-\xi^2/4) \cos(\xi\tau)}{\gamma^4 + \xi^2} \right]; \quad (26) \end{aligned}$$

4) приближенное решение при поглощении на поверхности:

$$\begin{aligned} T(\eta, \chi, \tau) &= T_\eta(\eta, \tau) \cdot T_\chi(\chi, \tau) = \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i\xi}} \exp(-\xi^2/4 - \sqrt{i\xi}\chi + i\xi\tau) d\xi = \\ &= \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \sqrt{\frac{\xi}{2}}\chi\right) \cos\left(\xi\tau - \sqrt{\frac{\xi}{2}}\chi - \frac{\pi}{4}\right) d\xi. \quad (27) \end{aligned}$$

Заметим, что (27) носит универсальный характер и зависит только от безразмерных переменных, ее максимальное значение, которое достигается на поверхности полупространства, является константой, умноженной на θA . Это позволяет написать приближенную формулу для максимальной избыточной температуры в полупространстве при поглощении лазерного импульса.

6. Определение максимальной температуры в полупространстве

Проведенное нами численное моделирование с использованием приближенной функции $T_\chi(\chi, \tau)$ в случае объемного поглощения показало, что эта функция достигает максимального значения $\Delta T_{\max}$ в момент времени $t_{\max}$, который зависит от безразмерного коэффициента объемного поглощения (см. таблицу). Значения $\Delta T_{\max}/(\theta A) = \max[T_\chi(\chi=0, \tau)/(\theta A)]$ – отношения

максимальной избыточной температуры в полупространстве к величине θA и моментов времени $\tau_{\max} = \arg \max [T_{\chi}(\chi = 0, \tau)/(\theta A)]$ для различных γ . Согласно расчетам, величина θA (ее размерность совпадает с размерностью температуры) может служить хорошей оценкой для максимальной избыточной температуры в полупространстве при $\gamma > 4$ с погрешностью не более $\pm 8\%$.

Для получения эмпирической зависимости, связывающей точки $(\gamma_i, T_{\max i})$, было использовано преобразование

$$g = 2\gamma / (1 + \gamma),$$

которое позволило получить зависимость $(g_i, T_{\max i})$, близкую к квадратичной. Методом наименьших квадратов для $N = 60$ пар точек $(g_i, T_{\max i})$ (30 из которых приведены в таблице) найдена приближенная формула: $T_{\max}/(\theta A) \approx a_0 + a_1 g + a_2 g^2$, где $a_0 = 0,0058990408$, $a_1 = 0,73794894$, $a_2 = -0,10139614$ ($R^2 = 1$, $SD = 0,00027$). Максимальная относительная погрешность такого приближения не превышает $0,7\%$ при $\gamma \in [0, 1, +\infty)$.

Следовательно, формула для вычисления максимальной температуры в полупространстве с учетом поглощения в объеме, полученная в линейном приближении независимости параметров среды от температуры и пренебрежении распространения тепла в радиальном направлении за время поглощения оптического импульса с гауссовым временным и пространственным профилем, достигаемая на границе в центре обучаемой поверхности, может быть записана в виде

$$T_{\max}^{app} = T_0 + \Delta T_{\max}^{app} = T_0 + \theta A(a_0 + a_1 g + a_2 g^2) = T_0 + \frac{2WA\sqrt{at_0}}{\pi^2 t_0 \lambda_q R_0^2} (0,0059 + 0,7380g - 0,1014g^2). \quad (28)$$

В табл. 1 для различных γ приведены значения $\Delta T_{\max}/(\theta A)$ и $\Delta T_{\max}^{app}/(\theta A) = (T_{\max}^{app} - T_0)/(\theta A)$ и относительная погрешность приближенной формулы

$$\delta = \frac{|\Delta T_{\max} - \Delta T_{\max}^{app}|}{\Delta T_{\max}} \cdot 100\%. \quad (29)$$

Из полученных оценок следует, что погрешность δ для исследуемого диапазона $\gamma \geq 0,1$ не превышает $0,7\%$ и достигает минимального значения $0,001\%$ при $\gamma = 25$.

Значения $\Delta T_{\max}/(\theta A)$ для $\gamma \in [4, +\infty)$ ($g > 1,6$) отличаются от единицы не более чем на $7,7\%$. $\Delta T_{\max}/(\theta A)$ равно единице (отличие в шестом знаке после запятой) при $\gamma \approx 8,281$ и достигает максимального значения $1,0761833675$ в предельном случае поверхностного поглощения ($\gamma \rightarrow +\infty$) (см. табл. 1). Следовательно, величина θA может служить хорошей оценкой для максимальной избыточной температуры в полупространстве. Полученное выражение (28) позволяет оценить в самом первом приближении пороговое значение плотности теплового потока (интенсивности) излучения, которое должно приводить к необходимому повышению температуры (например, для фазового перехода или нужных температурных напряжений или других эффектов). При использовании формулы (28) нужно иметь в виду, что приближение поверхностного поглощения ($\gamma \rightarrow +\infty$) применимо для хороших металлов в видимом и ближнем ИК-диапазоне, но для полупроводников, диэлектриков или более коротких, чем предполагается в этой работе, например, фемтосекундных оптических импульсов уже необходим учет объемного поглощения.

7. Замечание о прямоугольном импульсе

В задачах импульсного нагрева полупространства для моделирования лазерного импульса часто выбирают наиболее простую форму – прямоугольное распределение по временной и радиальной координате (не учитывая распределение в виде дельта-функции). Это обусловлено, во-первых, упрощением математических выкладок при сохранении главных особенностей решения задачи и, во-вторых, возможностью описания более сложных распределений в виде суперпозиции прямоугольных. Запишем выражение для распределения интенсивности:

$$I(r, t) = I_r(r) \cdot I_t(t), \quad I_r(r) = \exp(-r^2/R_0^2), \quad I_t(t) = \frac{W}{\pi\sqrt{\pi}R_0^2 t_0} \begin{cases} 1, & |t| \leq t_0/2, \\ 0, & |t| > t_0/2. \end{cases} \quad (30)$$

Выражение для результата преобразования Фурье:

$$I_t^*(\omega) = \frac{2W}{\pi R_0^2 t_0 \omega} \sin(\omega t_0/2), \quad I_t^*(\xi) = \frac{2W}{\pi R_0^2 \xi} \sin(\xi/2). \quad (31)$$

Таблица 1

Отношения максимальной избыточной температуры и значений $T_{\max}^{app}$ в полупространстве к θA и моменты времени $t_{\max}$, когда эта величина $\Delta T_{\max}$ достигает максимума для различных γ

γ	$t_{\max}$	$\frac{\Delta T_{\max}}{\Delta T_{\max}^{app}} / (\theta A)$	$\delta, \%$	γ	$t_{\max}$	$\frac{\Delta T_{\max}}{\Delta T_{\max}^{app}} / (\theta A)$	$\delta, \%$
0,1	1,6242335	0,13579 0,13673	0,692	7	0,62785665	0,98689 0,98686	0,003
0,2	1,4155332	0,24102 0,24063	0,160	8	0,6178087	0,99747 0,99743	0,004
0,3	1,2913381	0,32553 0,32492	0,189	8,281	0,61538977	1,0000018 0,99996	0,004
0,4	1,2039855	0,39499 0,39450	0,124	9	0,6098413	1,00581 1,00576	0,004
0,5	1,1375471	0,45310 0,45283	0,060	10	0,60336907	1,01255 1,01251	0,004
0,6	1,0846135	0,50242 0,50236	0,011	25	0,56683456	1,05012 1,05013	0,001
0,7	1,0411044	0,54477 0,54490	0,023	50	0,55403233	1,06305 1,06311	0,005
0,8	1,0045246	0,58152 0,58178	0,045	75	0,54969245	1,06741 1,06748	0,007
0,9	0,97323542	0,61368 0,61405	0,060	100	0,54750874	1,06959 1,06968	0,008
1	0,94610263	0,64206 0,64250	0,068	500	0,54223004	1,07486 1,07497	0,010
2	0,79167588	0,80921 0,80963	0,053	10^3	0,54156638	1,07552 1,07564	0,011
3	0,72298144	0,88453 0,88475	0,025	10^4	0,54096844	1,07612 1,07623	0,011
4	0,68387839	0,92702 0,92712	0,010	10^5	0,54090861	1,07618 1,07629	0,011
5	0,65860489	0,95421 0,95423	0,003	10^6	0,54090259	1,07618 1,07630	0,011
6	0,64092230	0,97306 0,97305	0,001	$+\infty$	0,540902	1,07618 1,0763	0,011

Приближенное решение при поглощении на поверхности прямоугольного импульса:

$$T_\chi(\chi, \tau) = \theta \int_0^\infty \frac{\sin(\xi/2)}{\xi \sqrt{\xi}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\xi}{2}} \chi\right) \cos\left(\xi \tau - \sqrt{\frac{\xi}{2}} \chi - \frac{\pi}{4}\right) d\xi. \quad (32)$$

Функция $T_\chi(\chi, \tau)/(\theta A)$ достигает максимального значения на поверхности полупространства при $\tau = 1/2$ (в нашем случае это окончание действия излучения) и значение в максимуме больше в 1,65 раза и составляет 1,77(44). Последнее значение можно получить аналитически.

Действительно, в монографии [3, см. табл. 2.1] и работах [21, 22] дано выражение для максимальной избыточной температуры на границе полупространства при окончании действия прямоугольного импульса ($t \in [0, t_0]$) для случая поверхностного поглощения:

$$T(t_0) - T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{F_D \sqrt{at_0}}{\lambda_q} = \frac{F_D 2\sqrt{t_0}}{\sqrt{\pi \lambda_q \rho c}}, \quad (33)$$

где $F_D = IA = WA/\pi R_0^2$ – плотность теплового потока, поглощенная в среде. В наших обозначениях это выражение можно записать как

$$T_{\max} = T_0 + \Delta T_{\max}^{\text{lin}} = T_0 + \sqrt{\pi} \theta A = T_0 + \frac{2WA\sqrt{at_0}}{\pi\sqrt{\pi t_0} \lambda_q R_0^2}, \quad (34)$$

где $\Delta T_{\max}^{\text{lin}}$ – обозначение для максимальной избыточной температуры в линейном случае независимости теплофизических параметров среды от температуры в приближении поверхностного поглощения. В (34) множитель $\sqrt{\pi}$ (точнее, $\sqrt{\pi}/1,0761833675$) дает искомое значение, во сколько раз максимальная избыточная температура при поглощении прямоугольного импульса больше, чем при поглощении импульса с гауссовым распределением.

Таблица 2

Значения параметров некоторых металлов, безразмерных параметров
и максимальной избыточной температуры для типичных значений температуры и лазерного импульса

Параметры оптического импульса: $\lambda = 1064$ нм, $W = 1$ мДж, $R_0 = 1$ мм, $t_0 = 15$ нс. Равновесная температура: $T_0 = 300$ К.		
Алюминий	$A \approx 0,08$ $\lambda_q = 237$ Вт/(м·К) [23, с. 108], $\rho = 2697$ кг/м ³ [23, с. 108], $c_p = 903,7$ Дж/(кг·К) [23, с. 108], $\mu \approx 8,1 \cdot 10^7$, $T_m = 933,61$ К [23, с. 106].	$\sqrt{at_0} = 1,21 \cdot 10^{-6}$ м, $1/\mu \approx 1,23 \cdot 10^{-8}$ м, $\gamma = \mu\sqrt{at_0} \approx 97,83$, $\theta A \approx 5,51$ К, $\Delta T_{\max}^{\text{lin}} = 5,89$ К, $W_{\max}^{\text{lin}} = 107,6$ мДж.
Медь	$A \approx 0,03$, $\lambda_q = 401,9$ Вт/(м·К) [23, с. 70], $\rho = 8933$ кг/м ³ [23, с. 70], $c_p = 385$ Дж/(кг·К) [23, с. 70], $\mu \approx 3,8 \cdot 10^7$, $T_m = 1357,6$ К [23, с. 69]	$\sqrt{at_0} = 1,32 \cdot 10^{-6}$ м, $1/\mu \approx 2,63 \cdot 10^{-8}$ м, $\gamma = \mu\sqrt{at_0} \approx 50,31$, $\theta A \approx 1,34$ К, $\Delta T_{\max}^{\text{lin}} = 1,42$ К, $W_{\max}^{\text{lin}} = 745$ мДж.
Железо	$A \approx 0,35$, $\lambda_q = 79,9$ Вт/(м·К) [23, с. 312], $\rho = 7870$ кг/м ³ [23, с. 312], $c_p = 450$ Дж/(кг·К) [23, с. 312], $\mu \approx 4,0 \cdot 10^7$, $T_m = 1811$ К [23, с. 311]	$\sqrt{at_0} = 0,581 \cdot 10^{-6}$ м, $1/\mu \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$ м, $\gamma = \mu\sqrt{at_0} \approx 23,27$, $\theta A \approx 34,43$ К, $\Delta T_{\max}^{\text{lin}} = 36,08$ К, $W_{\max}^{\text{lin}} = 41,88$ мДж.

В табл. 2 представлены значения теплофизических параметров типичных металлов при температуре $T_0 = 300$ К и вычислены основные безразмерные характеристики исследуемого процесса теплопроводности для случая поглощения оптического импульса промышленного Nd:YAG лазера ЛТИ-403 с фундаментальной гармоникой $\lambda = 1064$ нм, соответствующей инфракрасному участку спектра, и длительностью импульса $2t_0 \approx 30$ нс. Из табл. 2 видно, что оптическая глубина проникновения $1/\mu$ для исследуемых сред почти на два порядка меньше $\sqrt{at_0}$ – характерной глубины проникновения тепла за время поглощения импульса. Можно сделать вывод о том, что в нелинейном случае влияние температурной зависимости $\mu(T)$ на результат вычислений будет пренебрежимо мало, в сравнении с вкладом зависимости $A(T)$. И второй вывод заключается в том, что моделировать процесс поглощения импульса в рассмотренных случаях можно в приближении поверхностного поглощения, считая, что $\mu \rightarrow +\infty$.

8. Ограничение метода и нелинейный случай

В табл. 2, в самом первом приближении, не учитывающем изменения параметров сред с температурой, вычислены также $W_{\max}^{\text{lin}}$ – оценки максимальных или пороговых значений энергии импульсов, которые приводят к значениям температуры на поверхности, равным температурам плавления сред T_m . Очевидно, что в широком температурном интервале, а тем более при при-

ближении к фазовому переходу, значения теплофизических параметров среды испытывают значительные изменения и погрешность формулы для максимальной избыточной температуры будет возрастать. Для более точного определения пороговых значений необходим учет зависимости параметров среды от температуры в уравнении теплопроводности и решение нелинейной задачи с помощью специальных аналитических и полуаналитических методов (например, последовательных приближений, теплового баланса, двойного интегрирования и др.) или численных методов (сеточные методы, МКЭ и др.). Зависимость температуры от времени в нелинейном случае значительно искажена в сравнении с линейным приближением, и момент времени, в который достигается максимум температуры, также смещен. Поэтому формулу для максимальной избыточной температуры для широкого интервала плотности теплового потока использовать нельзя, поскольку она является результатом решения линейного уравнения теплопроводности, но оценку значений получить можно, подставляя «эффективные» значения параметров среды в необходимом интервале температур, и не исключено, что при этом понадобится несколько итераций для нахождения такой оценки.

Получим оценку в качестве первого приближения (например, итерационной схемы) для максимальной избыточной температуры в нелинейном случае $\Delta T_{\max}^{nl}$. Запишем (29) для случая поверхностного поглощения ($\gamma \rightarrow +\infty, g = 2$) гауссова пучка (в случае прямоугольного импульса правую часть необходимо умножить на $\sqrt{\pi}$):

$$\Delta T_{\max}^{app} = \frac{2WA\sqrt{at_0}}{\pi^2 t_0 \lambda_q R_0^2} \cdot 1,076 \Rightarrow dT_{\max}^{nl} \approx \frac{2}{\sqrt{t_0} \pi^2 R_0^2} \cdot \frac{A}{\sqrt{\lambda_q c_p \rho}} dW.$$

Разделяя переменные (температуру и энергию) и интегрируя до конечной энергии импульса $W_{\max}^{nl}$, получаем связь с приращением температуры $\Delta T_{\max}^{nl}$ в виде уравнения:

$$\int_0^{\Delta T_{\max}^{nl}} \frac{\sqrt{\lambda_q(T_0 + T') c_p(T_0 + T') \rho(T_0 + T')}}{A(T_0 + T')} dT' = \frac{2W_{\max}^{nl}}{\sqrt{t_0} \pi^2 R_0^2} \quad (35)$$

или

$$W_{\max}^{nl} = \frac{\sqrt{t_0} \pi^2 R_0^2}{2} \int_{T_0}^{T_0 + \Delta T_{\max}^{nl}} \frac{\sqrt{\lambda_q(T) c_p(T) \rho(T)}}{A(T)} dT. \quad (36)$$

Полученное уравнение связывает оценку максимальной избыточной температуры $\Delta T_{\max}^{nl}$ в полупространстве в случае поверхностного поглощения и учета зависимости теплофизических параметров среды от температуры с энергией оптического импульса $W_{\max}^{nl}$.

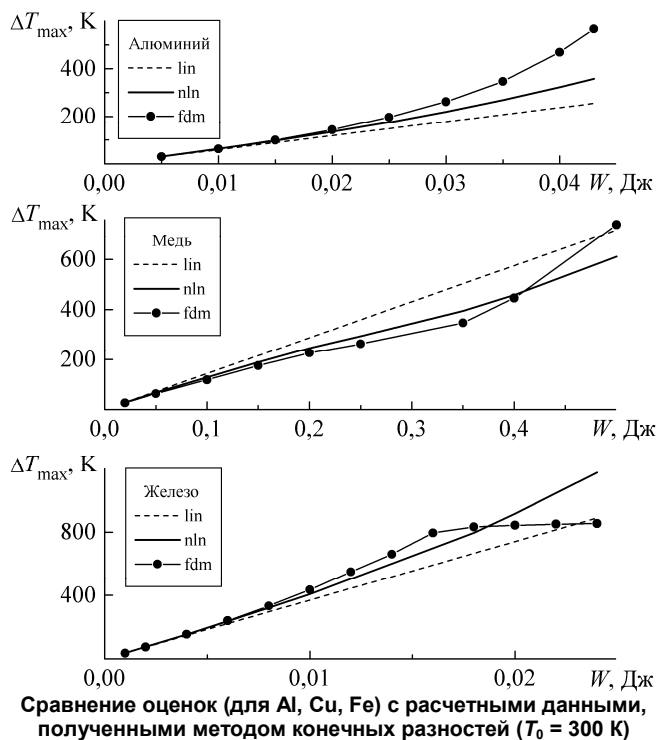
Сравним результаты расчета по формулам (34) и (36) с результатами численного моделирования нелинейной задачи методом конечных разностей с учетом температурных зависимостей $\lambda_q(T)$, $c_p(T)$, $\rho(T)$ [23] для алюминия, меди и железа. Используемые в расчетах зависимости коэффициента поглощения от температуры приведены в табл. 3.

На рисунке точками показаны результаты расчета максимальной избыточной температуры $\Delta T_{\max}$ методом конечных разностей при различных энергиях W оптического импульса и равновесной температуре в полупространстве $T_0 = 300$ К, сплошными линиями – оценки максимальной избыточной температуры $\Delta T_{\max}^{nl}$ (36), пунктирными линиями показаны оценки $\Delta T_{\max}^{lin}$ (34), не учитывающие изменения параметров среды с температурой. Если определить погрешность аналогично формуле (29) и ограничиться значениями, меньшими, чем 10 %, то линейная оценка для алюминия оказывается справедлива при $W < 15$ мДж, а нелинейная – при $W < 24$ мДж. Для меди получаем $W < 30$ мДж и $W < 220$ мДж, а для железа $W < 7,3$ мДж и $W < 14,6$ мДж соответственно. Из рисунка видно, что нелинейная оценка (36) лучше предсказывает значения максимальной избыточной температуры, чем линейная оценка (34), которая справедлива для бесконечно малых W и ΔT . Хотя нелинейная оценка верна для постоянных параметров среды и качественно правильно описывает уменьшение максимальной избыточной температуры при увеличе-

нии температуропроводности, теплоемкости, плотности и уменьшении коэффициента отражения с температурой и на представленном рисунке часто находится между «точным» значением, полученным с помощью численных методов и линейной оценкой, следует иметь в виду, что полученное в ходе нестрогих рассуждений уравнение (36) не является следствием решения нелинейной задачи теплопроводности и требует уточнения, а также экспериментальной и численной проверки на основе более точной модели.

Таблица 3
Коэффициенты поглощения,
использованные в расчетах

T, K	A(T)		
	Al	Cu	Fe
300	0,08	0,030	0,35
400	0,10	0,025	0,36
500	0,13	0,025	0,37
600	0,16	0,018	0,38
700	0,20	0,025	0,39
800	0,24	0,030	0,40
900	0,28	0,035	0,41
1000	0,40	0,040	0,42
1100	—	0,045	0,43
1200	—	0,050	0,44
1300	—	0,060	0,45
1400	—	0,065	0,46
1500	—	—	0,47
1600	—	—	0,48
1700	—	—	0,49
1800	—	—	0,50
1900	—	—	0,52



Выводы

Аналитическими методами теории теплопроводности решена задача нахождения выражения для температурного поля в полупространстве при поглощении оптического импульса произвольного осесимметричного профиля и произвольной временной формы. Решение рассмотрено на примере пучка с гауссовым радиальным распределением и временной формой в виде гауссовой и прямоугольной формы.

Впервые получены приближенные выражения для поля температуры в полупространстве, не учитывающие распространение тепла в радиальных направлениях во время поглощения оптического импульса в приближении поглощения излучения в объеме и на поверхности среды для произвольного коэффициента объемного поглощения. Приближенные формулы требуют меньше вычислительных ресурсов и могут быть использованы для оценки параметров температурного поля, а также как модельные функции для отладки при решении более сложных задач, требующих учета температурного поля или в качестве начального приближения или весовой функции в задаче с нелинейным источником (например, для выбора адаптивного шага сеточных методов или при вычислении квадратурных формул).

Запись приближенных формул через безразмерные переменные и константы позволила впервые получить явную эмпирическую формулу для максимальной избыточной температуры в полупространстве для случая временной формы импульса в виде гауссовой функции и широкого пучка ($R_0 \gg \sqrt{at_0}$) с гауссовым профилем. От классической формулы, полученной для временно-го профиля в виде прямоугольной функции (только для случая поверхностного поглощения и однородной засветки), формула отличается добавочным множителем $1/\sqrt{\pi}$ (точнее $1,0761833675/\sqrt{\pi}$). Полученные точные и приближенные формулы допускают выражения для температурного поля и максимальной избыточной температуры в случае прямоугольного импульса, что может облегчить задачу нахождения распределения температуры в полупространстве

в случае лазерного импульса произвольной формы. Также сделана попытка связать энергию импульса и максимальную избыточную температуру в нелинейном случае зависимости теплофизических параметров среды от температуры. Полученное выражение можно использовать в случае слабой нелинейности или в небольшом температурном интервале, например, для получения оценки пороговых значений энергии импульса так, как это сделано, например, в [21].

Основные результаты работы применимы для численных оценок пороговых значений термических эффектов при плавлении, разрушении, рекристаллизации и растрескивании, возбуждении акустических колебаний для целей неразрушающего контроля и диагностики при поглощении одиночного оптического импульса наносекундной длительности, а также эквивалентному ему электронному или ионному пучку.

Литература

1. Ready, J.F. Effects due to Absorption of Laser Radiation / J.F. Ready // J. Appl. Phys. – 1965. – Vol. 36, Iss. 2. – P. 462–468.
2. Рэди, Дж. Действие мощного лазерного излучения / Дж. Рэди. – М.: Мир, 1974. – 468 с.
3. Вейко, В.П. Лазерная обработка / В.П. Вейко, М.Н. Либенсон. – Л.: Ленинздат, 1973. – 191 с.
4. Григорьянц, А.Г. Основы лазерной обработки материалов / А.Г. Григорьянц. – М.: Машиностроение, 1989. – 300 с.
5. Действие излучения большой мощности на металлы / С.И. Анисимов, Я.И. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходыко. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
6. Лямшев, Л.М. Оптико-акустические источники звука / Л.М. Лямшев // Успехи физических наук. – 1981. – Т. 135, Вып. 12. – С. 637–669.
7. Laser-Generated Ultrasound: its Properties, Mechanisms and Multifarious Applications / S.J. Daviest, C. Edward, G.S. Taylor, S.B. Palmer // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1993. – Vol. 26, no. 3. – P. 329–348.
8. Григорьев, Б.А. Импульсный нагрев излучениями / Б.А. Григорьев. – М.: Наука, 1974. – Т. 1. – 319 с.
9. Григорьев, Б.А. Импульсный нагрев излучениями / Б.А. Григорьев. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 726 с.
10. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
11. Joseph, D.D. Heat Waves / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Mod. Phys. – 1989. – Vol. 61, no. 1. – P. 41–73.
12. Joseph, D.D. Addendum to Paper “Heat Waves” / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Mod. Phys. – 1990. – Vol. 62, no. 2. – P. 375–391.
13. Tzou, D.Y. Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior / D.Y. Tzou // Int. J. Thermophys. – 2015. – Vol. 36. – P. 1416–1467.
14. Straughan, B. Heat Waves / B. Straughan. – Springer, New York, 2010. – 318 p.
15. Анисимов, С.И. Электронная эмиссия с поверхности металлов под действием ультракоротких лазерных импульсов / С.И. Анисимов, Б.Л. Капелиович, Т.Л. Перельман // ЖЭТФ. – 1974. – Т. 66, Вып. 2. – С. 776–781.
16. Qiu, T.Q. Short-pulse Laser Heating on Metals / T.Q. Qiu, C.L. Tien // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1992. – Vol. 35, Iss. 3. – P. 719–726.
17. Qiu, T.Q. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals / T.Q. Qiu, C.L. Tien // Journal of Heat Transfer. – 1993. – Vol. 115, no. 4. – P. 835–841.
18. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
19. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
20. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
21. Lin, E.X. Laser Pulse Heating / E.X. Lin // Proc. of the 1999 Particle Accelerator Conference (PAC99), New York, USA, March 19. – 1999. – P. 1429–1431.
22. Nanosecond Laser Pulses for Mimicking Thermal Effects on Nanostructured Tungsten-Based Materials / E. Besozzi, A. Maffini, D. Dellasega *et al.* // Nucl. Fusion. – 2018. – Vol. 58. – 036019.

23. Зиновьев, В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник / В.Е. Зиновьев. – М.: Металлургия, 1989. – 382 с.

Поступила в редакцию 28 июня 2026 г.

Сведения об авторе

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: golubev@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 3, pp. 60–74*

MSC 80A20, 35K05, 78A60

DOI: 10.14529/mmph260307

APPROXIMATE SOLUTION TO THE THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM AND ESTIMATION OF THE MAXIMUM EXCESS TEMPERATURE DURING ABSORPTION OF A NANOSECOND LASER PULSE IN A CONDUCTIVE HALF-SPACE

E.V. Golubev

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
e-mail: golubev@susu.ru*

Abstract. The article addresses the issue of heating a homogeneous isotropic conductive half-space using a single optical pulse with a temporal and spatial profile in the form of a Gaussian function. An analytical solution to the heat conduction problem for the half-space is obtained in quadratures using the Fourier and Fourier-Bessel transforms in the linear approximation of the independence of the thermo-physical parameters of the medium from temperature and an exponential law of radiation absorption with depth. An approximate solution to the heat conduction equation for the half-space heating problem is given by representing the expressions for the intensity distribution and temperature field as a product of functions. This solution is applicable for wide beams and if radial heat propagation is neglected during the initial phase of radiation absorption. Formulas for the maximum excess temperature in the half-space were derived for rectangular and Gaussian temporal optical pulses.

Keywords: Heat Conduction Equation; Gaussian Laser Pulse; Optoacoustic Generation; Optical Pulse; Dimensionless Analysis; Scale Separation; Temperature Field; Fourier–Bessel Transform; Approximate Analytical Solution; Peak Temperature Estimation; Exponential Absorption.

References

1. Ready J.F. Effects due to Absorption of Laser Radiation. *J. Appl. Phys.*, 1965, Vol. 36, Iss. 2, pp. 462–468. DOI: 10.1063/1.1714012.
2. Ready J.F. *Effects of High Power Laser Radiation*. Academic, New York, 1971, 433 p.
3. Veyko V.P., Libenson M.N. *Lazernaya obrabotka* (Laser Processing). Leningrad, Leninzdat Publ., 1973, 191 p. (in Russ.).
4. Grigor'yants A.G. *Osnovy lazernoy obrabotki materialov* (Fundamentals of Laser Processing of Materials). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 300 p. (in Russ.).
5. Anisimov S.I., Imas Ya.I., Romanov G.S., Khodyko Yu.V. *Deystvie izlucheniya bol'shoy moshchnosti na metally* (The Effect of High-Power Radiation on Metals). Moscow, Nauka Publ., 1970, 272 p. (in Russ.).
6. Lyamshev L.M. Optoacoustic Sources of Sound. *Sov. Phys. Usp.*, 1981, Vol. 24, Iss. 12, pp. 977–995. DOI: 10.1070/PU1981v024n12ABEH004757
7. Daviest S.J., Edward C., Taylor G.S., Palmer S.B. Laser-Generated Ultrasound: its Properties, Mechanisms and Multifarious Applications. *J. Phys. D Appl. Phys.*, 1993, Vol. 26, no. 3, pp. 329–348. DOI: 10.1088/0022-3727/26/3/001

8. Grigor'ev B.A. *Impul'snyy nagrev izlucheniymi. T. 1.* (Pulse Heating by Radiation. Vol. 1). Moscow, Nauka Publ., 1974, 319 p. (in Russ.).
9. Grigor'ev B.A. *Impul'snyy nagrev izlucheniymi. T. 2.* (Pulse Heating by Radiation. Vol. 2). Moscow, Nauka Publ., 1974, 726 p. (in Russ.).
10. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (Theory of Thermal Conductivity). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967, 599 p.
11. Joseph D.D., Preziosi L. Heat Waves. *Rev. Mod. Phys.*, 1989, Vol. 61, no. 1, pp. 41–73. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.41
12. Joseph D.D., Preziosi L. Addendum to Paper “Heat Waves”. *Rev. Mod. Phys.*, 1990, Vol. 62, no. 2, pp. 375–391. DOI: 10.1103/RevModPhys.62.375
13. Ghazanfarian J., Shomali Z., Abbassi A. Macro- to Nanoscale Heat and Mass Transfer: The Lagging Behavior. *Int. J. Thermophys.*, 2015, Vol. 36, pp. 1416–1467. DOI: 10.1007/s10765-015-1913-4
14. Straughan B. *Heat Waves*. Springer, New York, 2010, 318 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-0493-4
15. Anisimov S.I., Kapeliovich B.L., Perel'man T.L. Electron-Emission from Surface of Metals Induced by Ultrashort Laser Pulses. *Soviet Physics JETP*, 1974, Vol. 39, no. 2, pp. 375–377.
16. Qiu T.Q., Tien C.L. Short-Pulse Laser Heating on Metals. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1992, Vol. 35, Iss. 3, pp. 719–726. DOI: 10.1016/0017-9310(92)90131-b
17. Qiu T.Q., Tien C.L. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals. *Journal of Heat Transfer*, 1993, Vol. 115, no. 4, pp. 835–841. DOI: 10.1115/1.2911377
18. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Clarendon Press, 1959, 510 p.
19. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1. New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill book company, Inc, 1953, 302 p.
20. Gradshteyn I.S. Ryzhik I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Burlington, MA., 2007, 1171 p.
21. Lin X.E. Laser Pulse Heating. *Proc. 1999 Particle Accelerator Conference* (Cat. No.99CH36366), Vol. 2, New York, NY, USA, 1999, pp. 1429–1431. DOI: 10.1109/PAC.1999.795571
22. Besozzi E., Maffini A., Dellasega D., Russo V., Facibeni A., Pazzaglia A., Beghi M.G., Passoni M. Nanosecond Laser Pulses for Mimicking Thermal Effects on Nanostructured Tungsten-Based Materials. *Nucl. Fusion*, 2018, Vol. 58, 036019 (12 pp). DOI: 10.1088/1741-4326/aaa5d5
23. Zinov'ev V.E. *Teplofizicheskie svoystva metallov pri vysokikh temperaturakh. Spravochnik* (Thermophysical Properties of Metals at High Temperatures. Guide), Moscow, Metallurgiya Publ., 1989, 382 p. (in Russ.).

Received June 28, 2026

Information about the author

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: golubev-ev@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>.

ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ В ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ ХОНГА–ОУ–МАНДЕЛЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ ФИШЕРА И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Д.А. Куц, В.Л. Ушаков, М.С. Подошведов, Ю.Н. Столяров, С.А. Подошведов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: kutcda@susu.ru

Аннотация. Рассматривается проблема оптимального выбора рабочей точки датчика, построенного на основе интерферометра Хонга–Оу–Манделя (ХОМ) с коллинеарным вырожденным синхронизмом второго типа. Экспериментальные данные о числе совпадений с датчиков одиночных фотонов сравниваются с моделью, построенной на основе приближения, в котором спектральная амплитуда бифотонного поля моделируется бигауссовой функцией. Оценка погрешности определения времени задержки в ХОМ-интерферометре производится на основе границы Крамера–Рао. Для модели интерферометра были вычислены времена задержки, соответствующие минимальной абсолютной и минимальной относительной погрешности. Оказалось, что данные задержки соответствуют областям, в которых расхождение между моделью и экспериментально измеренным числом совпадений составляет порядка 2–3 %. Таким образом, при выборе рабочей точки датчика необходим дополнительный учет отклонения модельной функции числа совпадений от экспериментально наблюдаемой.

Ключевые слова: классическая информация Фишера; оценка параметра; интерферометр Хонга–Оу–Манделя; спонтанное параметрическое рассеяние света.

Введение

Последние два десятилетия можно отметить рост приложений эффекта Хонга–Оу–Манделя (ХОМ) [1] в оптической квантовой метрологии [2]. Установки на основе данного эффекта используются для измерения смещения (достигнуто разрешение 1,26 нм [3]), угловой скорости (минимально регистрируемая скорость вращения порядка 3 мРад/с [4]), регистрации колебаний с малой амплитудой (колебания оптической задержки порядка 0,4 мкм [5]), регистрации малых изменений показателя преломления среды (вплоть до изменений на величины $\sim 10^{-6}$ [6]), измерения направления линейной поляризации (с разрешением 0,01 градуса [7]).

Измерения, проводимые с использованием интерферометра Хонга–Оу–Манделя, являются косвенными: о значении физической величины (смещения, угловой скорости, температуры и т. д.) судят по разнице времени прибытия τ на делитель пучка двух фотонов (образованных в ходе параметрического рассеяния света в нелинейном кристалле), которая, в свою очередь, оценивается по данным со счетчика совпадений. Счетчик совпадений измеряет число одиночных и двойных срабатываний однофотонных детекторов (см. схему на рис. 1) в заданном интервале времени. Точность оценивания времени задержки по данным со счетчика совпадений зависит от величины самой задержки. В качестве положения рабочей точки датчика удобно выбрать такую величину задержки, которая обладает минимальной неопределенностью при оценивании ее по данным со счетчика совпадений.

В данной работе рассматриваются данные с ХОМ-интерферометра, построенного на синхронизме второго типа. Целью данной работы является разработка подхода для выбора рабочей точки ХОМ-датчика, основанная на экспериментальных данных со счетчика совпадений.

Оценка точности измерения времени задержки с использованием границы Крамера–Рао

Для определения верхней границы среднеквадратичного отклонения оценки времени задержки использовалась граница Крамера–Рао [5]:

$$\delta\tau_{CCR} = 1/\sqrt{NF_{CF}}, \quad (1)$$

где F_{CF} – классическая информация Фишера, которая была определена с помощью модели, предложенной в работе [8]. Согласно данной модели вероятности $P_0(\tau)$, $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ того, что соответственно не сработает ни один из детекторов, сработает только один детектор и сработают два детектора при задержке между прибытием фотонов, равной τ , определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} P_0(\tau) \\ P_1(\tau) \\ P_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu^2 & \nu^2 \\ 2\nu(1-\nu) & 1-\nu^2 \\ 1-2\nu(1-\nu)-\nu^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{cc}(\tau) \\ P_{ncc}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где ν – вероятность потери фотона в интерферометре, величина $P_{cc}(\tau)$ – вероятность одновременного срабатывания двух детекторов в случае отсутствия потерь ($P_{ncc}(\tau) = 1 - P_{cc}(\tau)$), определяемая в случае второго типа синхронизма следующим выражением [9]:

$$P_{cc}(\tau) = \frac{1}{2} \left[1 - \alpha \exp \left(-\frac{(\Delta\omega)^2 \tau^2}{4} \right) \right], \quad (3)$$

где $\Delta\omega$ – ширина спектра бифотонного поля, а параметр α моделирует видность кривой совпадений. Для данной модели в работе [10] авторами данной статьи было получено выражение для классической информации Фишера:

$$F_{CF} = \frac{(1-\nu^2)\alpha^2(\Delta\omega)^4\tau^2 \exp \left(-\frac{(\Delta\omega)^2 \tau^2}{2} \right)}{4 \left[2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(1 - \alpha \exp \left(-\frac{(\Delta\omega)^2 \tau^2}{4} \right) \right) - \left(1 - \alpha \exp \left(-\frac{(\Delta\omega)^2 \tau^2}{4} \right) \right)^2 \right]}, \quad (4)$$

последнее выражение было использовано для нахождения времен задержек τ , обладающих минимальными относительной и абсолютной погрешностями. За величину абсолютной погрешности принималась верхняя граница среднеквадратичного отклонения τ согласно Крамера–Рао (1).

Получение и обработка экспериментальных данных

Экспериментальные данные были получены на установке, оптическая схема которой показана на рис. 1. В качестве накачки использовался гелий-кадмиевый лазер с длиной волны 325 нм. Излучение фокусировалось на 4 мм кристалле ВВО, вырезанном под второй тип синхронизма.

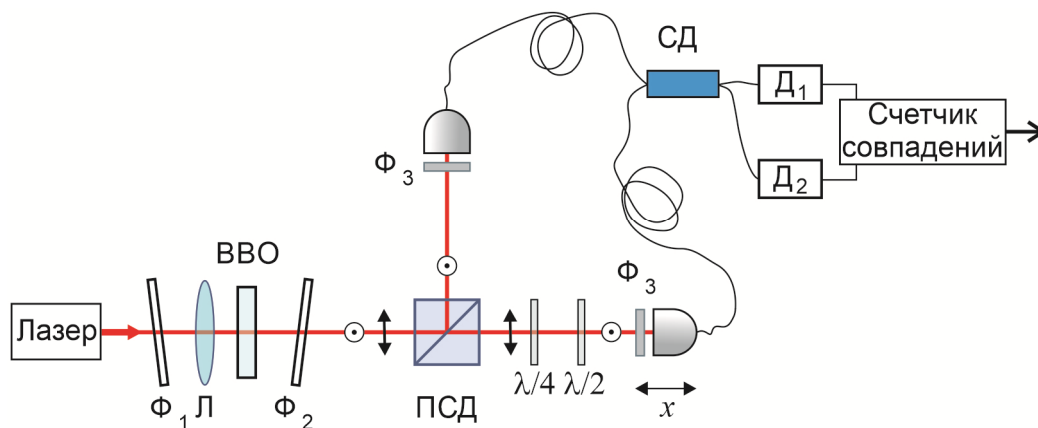


Рис. 1. Оптическая схема эксперимента: He-Cd лазер с длиной волны 325 нм (IK3501R-G, 50 мВт, Япония); Φ_1 – ультрафиолетовый фильтр (полоса пропускания 320–370 нм); Л – собирающая линза; вырезанный под второй тип синхронизма кристалл ВВО толщиной 4 мм (угол реза 55,2 град.); Φ_2 – UFM-зеркало (отражающее накачку, но пропускающее излучение 650 нм); ПСД – поляризационный светоделитель; Φ_3 – интерференционный фильтр на 650 нм (FWHM – 10 нм); $\lambda/4$ и $\lambda/2$ – четвертьволновая и полуволновая пластинки на 650 нм; одно из устройств ввода излучения в одномодовое волокно помещено на транслятор, смещение которого обозначено x ; СД – волоконный светоделитель; Д1, Д2 – детекторы одиночных фотонов (SPCM-AQRH-13, Excelitas Technologies, Канада; временное разрешение регистрации одиночных фотонов (джиттер) ~ 350 пс; квантовая эффективность ~ 70% при $\lambda = 650$ нм; мертвое время – 22 нс); счетчик совпадений (Qubitekk CC1, США), подсчитывающий совпадения сигналов от детекторов (временное окно – 3 нс) и одиночные срабатывания

Фильтр Φ_2 отсекал излучение накачки после кристалла. Далее сигнальная и холостая моды разделялись на поляризационном светоделителе и направлялись в устройства ввода в одномодовое волокно (4 мкм, $NA = 0,12$). Одно из устройств ввода в волокно располагалось на моторизированной подвижке, которая использовалась для изменения оптического пути одного из каналов интерферометра. Сигналы с лавинных однофотонных детекторов передавались на счетчик совпадения, размер временного окна равен 3 нс. Далее данные со счетчика передавались на компьютер. Число совпадений N_2^{exp} , зарегистрированное в эксперименте, в зависимости от положения подвижки показано на рис. 2. Экспозиция для каждого положения подвижки составляла 40 с.

По полученной экспериментально зависимости $N_2^{exp}(x)$ была построена модельная кривая $N_2^{fit}(x)$. Для этого по экспериментальным данным с помощью метода наименьших квадратов были определены коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 для модельной кривой $N_2^{fit}(x)$:

$$N_2^{fit}(x) = C_1 \left(1 - C_2 \exp \left(-\frac{C_3^2 (x - x_0)^2}{4} \right) \right). \quad (5)$$

Сравнивая последнее выражение с получаемым из (2) выражением для $P_2(\tau)$:

$$P_2(\tau) = \frac{1}{2} (1 - \nu)^2 \left(1 - \alpha \exp \left(-\frac{(\Delta\omega)^2 \tau^2}{4} \right) \right), \quad (6)$$

можно определить величины α и $\Delta\omega$ ($\alpha = C_2 = 0,985$; $\Delta\omega = c \cdot C_3 = 12,45$ ТГц). Величина вероятности потери фотона в схеме интерферометра ν также была определена из описанной выше модели. Для этого были определены экспериментальные значения числа одиночных срабатываний N_1 (сумма одиночных срабатываний обоих детекторов) и числа совпадений N_2 вдали от «провала ХОМ», в этом случае из выражения (2) можно получить [8]:

$$\nu = (N_1 - N_2) / (N_1 + 3N_2), \quad (7)$$

для рассматриваемой оптической схемы получаем: $\nu = 0,849$ ($N_1 = 4\,009\,272$, $N_2 = 170\,367$).

После определения величин α , $\Delta\omega$ и ν , используя выражение (4) для классической информации Фишера F_{CF} , были определены положения точек A и C (см. рис. 2, а), отвечающих соответственно минимальной абсолютной и относительной погрешности для модельной системы (индексы L и R обозначают положение на левой и правой стороне «провала»). Точка B – это точка перегиба модельной функции $N_2^{fit}(x)$.

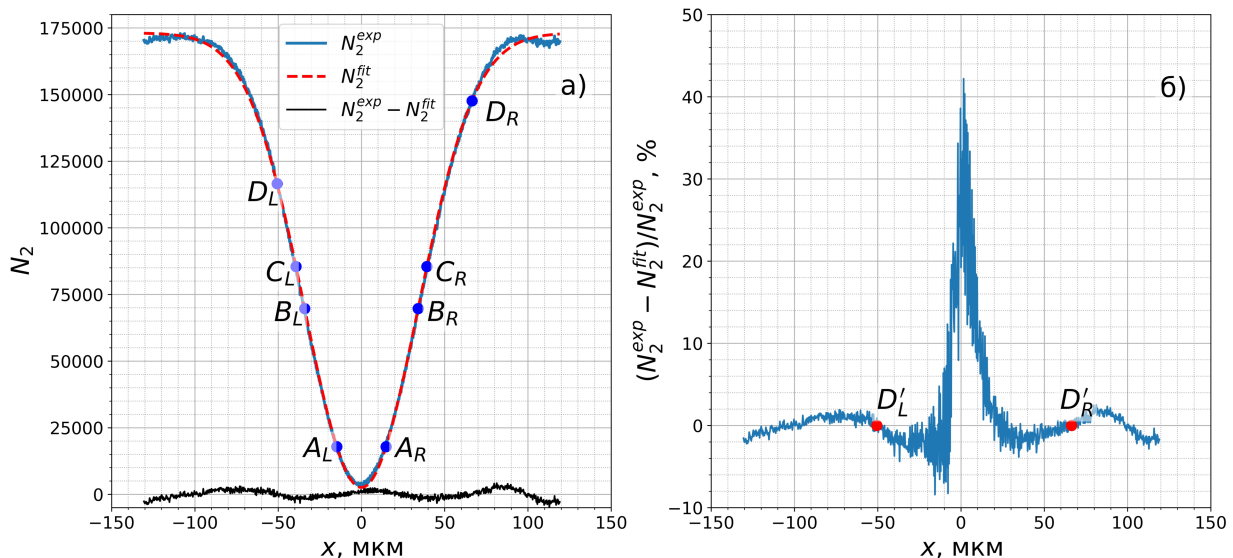


Рис. 2. а) Зависимость числа совпадений N_2^{exp} от положения подвижки, N_2^{fit} – интерполяция экспериментальных данных; т. А соответствует максимуму информации Фишера, т. В – точка перегиба функции N_2^{fit} , т. С – минимум относительной погрешности, точки D_L и D_R соответствуют минимальному отклонению числа совпадений N_2^{exp} от модели (N_2^{fit}); б) относительное отклонение числа совпадений от модельной кривой в зависимости от положения подвижки, на которой установлено устройство ввода излучения в волокно

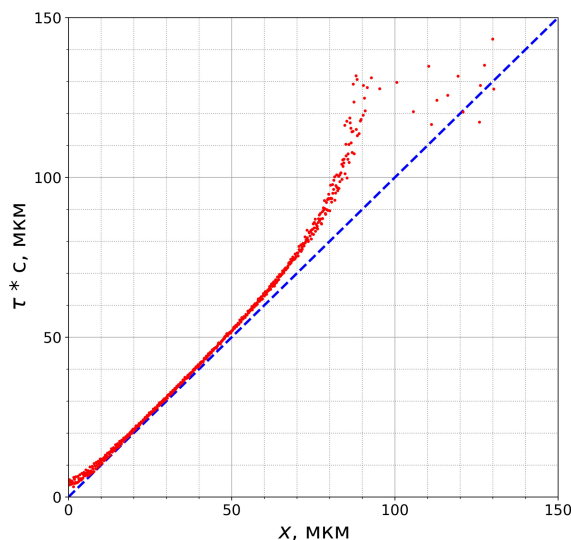


Рис. 3. Зависимость оценки смещения подвижки от величины смещения подвижки

На рис. 2, б приведено относительное отклонение модельной функции $N_2^{fit}(x)$ от экспериментально полученных данных. Можно видеть, что относительное отклонение модели вдали от положения минимума числа совпадений не превышает 3 %. В точках же максимума информации Фишера, которые расположены вблизи минимума функции числа совпадений, можно наблюдать высокое относительное отклонение модельной функции кривой совпадений от экспериментальной (см. рис. 2, б). На рис. 3 приведено сравнение оценки смещения, полученной в данном эксперименте с помощью описанной в [8] методики, с известным смещением механической подвижки, на которой было установлено устройство ввода излучения в волокно: отклонение оценки от величины смещения в интервале 15–50 мкм не превышает 3 мкм, а сам график на этом интервале имеет близкий к единице угловой коэффициент. Таким образом, оптимальным положением для выбора рабочей точки становится диапазон между точками D_L (отвечает минимуму отклонения модельной зависимости числа совпадений от экспериментальной) и C_L (минимум относительной погрешности). Для точки D_L величина границы Крамера–Рао согласно модели определится выражением

$$\delta x_{CCF} = 532,57 \text{ (мкм)} / N^{1/2}, \quad (8)$$

где N – число измерений.

Выводы

На примере экспериментальных данных, полученных на оптической схеме ХОМ-интерферометра с коллинеарным синхронизмом второго типа, рассмотрена проблема выбора положения рабочей точки датчика, обеспечивающей минимальную относительную погрешность оценки времени задержки (смещения). Показана необходимость учета отклонения модельной функции числа совпадений от экспериментально наблюдаемой.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-20063, <https://rscf.ru/en/project/24-22-20063/>.

Литература

1. Hong, C.K. Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference / C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 59, Iss. 18. – P. 2044–2046.
2. Квантовая оптическая метрология // А.П. Алоджанц, Д.В. Царёв, Д.А. Куц и др. // УФН. – 2024. – Т. 194, Вып. 7. – С. 711–739.
3. Fast Quantum Interferometry at the Nanometer and Attosecond Scales with Energy-Entangled Photons / C.P. Lualdi, S.J. Johnson, M. Vayninger *et al.* // Sci. Adv. – 2025. – Vol. 11, no. 21. – eadw4938.

4. Fiber-Optic Quantum Gyroscope Based on Hong–Ou–Mandel Interferometry / Y. Zhai, Z. Chen, Z. Pan *et al.* // Optics & Laser Technology – 2025. – Vol. 187, Iss. 10. – 112846.
5. Near-Video Frame Rate Quantum Sensing Using Hong–Ou–Mandel Interferometry / S. Singh, V. Kumar, V. Sharma *et al.* // Adv. Quantum Technol. – 2023. – Vol. 6, Iss. 11. – 2300177.
6. Integrated Quantum Photonic Sensor based on Hong–Ou–Mandel Interference / S. Basiri-Esfahani, C.R. Myers, A. Armin *et al.* // Opt. Express. – 2015. – Vol. 23, Iss. 12. – P. 16008–16023.
7. Tracking the Polarisation State of Light via Hong–Ou–Mandel Interferometry / N. Harnchaiwat, F. Zhu, N. Westerberg *et al.* // Opt. Express. – 2020. – Vol. 28, Iss. 2. – P. 2210–2220.
8. Attosecond-Resolution Hong–Ou–Mandel Interferometry / A. Lyons, G.C. Knee, E. Bolduc *et al.* // Sci. Adv. – 2018. – Vol. 4, no. 5. – eaap9416.
9. Jordan, K.M. Quantum Metrology Timing Limits of the Hong–Ou–Mandel Interferometer and of General Two-Photon Measurements / K.M. Jordan, R.A. Abrahao, J.S. Lundeen // Phys. Rev. A – 2022. – Vol. 106, Iss. 6. – 063715.
10. On Precision in HOM Interferometer Delay Time Measurements and Estimation of Photon Loss Probability in an Interferometer / D.A. Kuts, A.A. Koksharov, A.G. Vorontsov *et al.* // Laser Phys. Lett. – 2025. – Vol. 22, no. 12. – 125212.

Поступила в редакцию 8 декабря 2025 г.

Сведения об авторах

Куц Дмитрий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией квантовой обработки информации и квантовых вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kutcda@susu.ru.

Ушаков Владимир Леонидович – инженер лаборатории квантовой обработки информации и квантовых вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: ushakovvl@susu.ru.

Подошведов Михаил Сергеевич – лаборант-исследователь лаборатории квантовой обработки информации и квантовых вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: mikerodo6@gmail.com.

Столяров Юрий Николаевич – лаборант лаборатории квантовой обработки информации и квантовых вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: stoliarovyn@susu.ru.

Подошведов Сергей Анатольевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории квантовой обработки информации и квантовых вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sapodo68@gmail.com.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 3, pp. 75–80*

DOI: 10.14529/mmph260308

OPTIMIZATION OF TIME-DELAY MEASUREMENT IN A HONG–OU–MANDEL INTERFEROMETER BASED ON FISHER INFORMATION ANALYSIS AND EXPERIMENTAL DATA

D.A. Kuts, V.L. Ushakov, M.S. Podoshvedov, Yu.N. Stolyarov, S.A. Podoshvedov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: kutcda@susu.ru

Abstract. The paper addresses the issue of selecting the optimal operating point for a sensor based on a Hong–Ou–Mandel (HOM) interferometer with collinear degenerate type-II phase-matching. Experimental data on coincidence counting rates from single-photon detectors are compared to a model constructed using an approximation where the spectral amplitude of the biphoton field is modeled by a double-Gaussian function. Errors in determining the delay time in the HOM interferometer are estimated

based on the Cramér–Rao bound. The delay times corresponding to the minimum absolute and minimum relative errors are calculated for the interferometer model. The authors have found that these delay times occur in the regions where the discrepancy between the model and the experimentally measured coincidence counting rate is approximately 2–3 %. Therefore, when selecting the operating point of the sensor, the deviation between the modeled and experimentally observed coincidence count function should be additionally taken into account.

Keywords: classical Fisher information; parameter estimation; Hong–Ou–Mandel interferometer; spontaneous parametric down-conversion.

References

1. Hong C.K., Ou Z. Y., Mandel L. Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, Vol. 59, Iss. 18, p. 2044–2046. DOI: 10.1103/PhysRevLett.59.2044
2. Alodjants A.P., Tsarev D.V., Kuts D.A., Podoshvedov S.A., Kulik S.P. Quantum Optical Metrology. *Phys. Usp.*, 2024, Vol. 67, no. 7, pp. 668–693. DOI: 10.3367/UFNe.2024.01.039634
3. Lualdi C.P., Johnson S.J., Vayninger M., Meier K.A., Sahoo S., Bogdanov S.I., Kwiat P.G. Fast Quantum Interferometry at the Nanometer and Attosecond Scales with Energy-Entangled Photons. *Sci. Adv.*, 2025, Vol. 11, no. 21, eadw4938. DOI: 10.1126/sciadv.adw4938
4. Zhai Y., Chen Z., Pan Z., Xue S., Liu Y., Zhao Y. Fiber-Optic Quantum Gyroscope Based on Hong–Ou–Mandel Interferometry. *Optics and Laser Technol.*, 2025, Vol. 187, Iss. 10, p. 112846. DOI:10.1016/j.optlastec.2025.112846
5. Singh S., Kumar V., Sharma V., Faccio D., Samanta G.K. Near-Video Frame Rate Quantum Sensing using Hong–Ou–Mandel Interferometry. *Adv. Quantum Technol.*, 2023, Vol. 6, Iss. 11, p. 2300177. DOI: 10.1002/qute.202300177
6. Basiri-Esfahani S., Myers C.R., Armin A., Combes J., Milburn G.J. Integrated Quantum Photonic Sensor based on Hong–Ou–Mandel Interference. *Opt. Express*, 2015, Vol. 23, Iss. 12, pp. 16008–16023. DOI: 10.1364/OE.23.016008
7. Harnchaiwat N., Zhu F., Westerberg N., Gauger E., Leach J. Tracking the Polarisation State of Light via Hong–Ou–Mandel Interferometry. *Opt. Express*, 2020, Vol. 28, Iss. 2, pp. 2210–2220. DOI: 10.1364/OE.382622
8. Lyons A., Knee G.C., Bolduc E., Roger T., Leach J., Gauger E.M. Attosecond-Resolution Hong–Ou–Mandel Interferometry. *Sci. Adv.*, 2018, Vol. 4, no. 5, eaap9416. DOI: 10.1126/sciadv.aap9416
9. Jordan K.M., Abrahao R.A., Lundeen J.S. Quantum Metrology Timing Limits of the Hong–Ou–Mandel Interferometer and of General Two-Photon Measurements. *Phys. Rev. A*, 2022, Vol. 106, Iss. 6, p. 063715. DOI: 10.1103/PhysRevA.106.063715
10. Kuts D.A., Koksharov A.A., Vorontsov A.G., Ushakov V.L., Kulik S.P. On Precision in HOM Interferometer Delay Time Measurements and Estimation of Photon Loss Probability in an Interferometer. *Laser Phys. Lett.*, 2025, Vol. 22, no. 12, p. 125212. DOI: 10.1088/1612-202X/ae245b

Received December 8, 2025

Information about the authors

Kuts Dmitri Anatolyevich is Head of the Laboratory of Quantum Information Processing and Quantum Computing, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kutcda@susu.ru.

Ushakov Vladimir Leonidovich is Engineer at the Laboratory of Quantum Information Processing and Quantum Computing, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: ushakovvl@susu.ru.

Podoshvedov Mikhail Sergeevich is Research Assistant, Laboratory of Quantum Information Processing and Quantum Computing, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: mikepodo6@gmail.com.

Stolyarov Yuri Nikolaevich is Assistant, Laboratory of Quantum Information Processing and Quantum Computing, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: stoliarovyn@susu.ru.

Podoshvedov Sergey Anatolyevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Research Scientist, Laboratory of Quantum Information Processing and Quantum Computing, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sapodo68@gmail.com.

Персоналии

УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, ЛИДЕР. К ЮБИЛЕЮ А.А. ЗАМЫШЛЯЕВОЙ

27 июля 2026 года отмечает свой юбилей директор Института естественных и точных наук Южно-Уральского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации Алёна Александровна Замышляева. Полвека – это не просто дата в календаре, это время, позволяющее оглянуться на пройденный путь и оценить масштаб сделанного. За плечами Алёны Александровны – более четверти века служения науке и образованию, путь от ассистента до директора крупнейшего института ЮУрГУ.



Путь в науку Алёны Александровны начался в Челябинском государственном университете, где в 1998 году она с отличием окончила математический факультет по специальности «Прикладная математика». С этого же года началась ее педагогическая деятельность: ассистент (1998–2000), старший преподаватель (2000–2004), доцент (2004–2006) кафедры математического анализа ЧелГУ. В 1998–2002 годах она обучалась в аспирантуре при Челябинском государственном университете по специальности «Дифференциальные уравнения».

В 2003 году состоялась защита кандидатской диссертации в Институте динамики систем и теории управления СО РАН в Иркутске. Уже тогда проявился научный почерк молодого исследователя: тема диссертации была посвящена уравнениям соболевского типа высокого порядка – направлению, которое станет делом ее жизни.

В 2006 году А.А. Замышляева перешла в Южно-Уральский государственный университет, который стал для нее вторым домом. Здесь она прошла путь от доцента до профессора кафедры уравнений математической физики, в 2014 году получила ученую степень доктора физико-математических наук, защитив диссертацию по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», в 2016 году возглавила кафедру прикладной математики и программирования, а с 2019 года является директором Института естественных и точных наук ЮУрГУ. Сегодня под ее руководством находится один из ключевых институтов университета, готовящий специалистов в области математики, физики, химии и информационных технологий.

Алёна Александровна Замышляева является одним из ведущих представителей научной школы доктора физико-математических наук, профессора Г.А. Свиридюка и активно развивает научное направление «Уравнения соболевского типа высокого порядка». Основы теории этого направления были заложены еще в 2002 году и получили отражение в кандидатской (2003 г.) и докторской (2014 г.) диссертациях Алёны Александровны. Благодаря ее работам данное направление получило новый импульс для развития как в фундаментальном аспекте, так и в прикладном. В рамках исследований были разработаны оригинальные аналитические и численные методы решения широкого класса задач. Суть этого научного направления – разработка аналитических и численных методов исследования математических моделей на основе уравнений соболевского типа высокого порядка. Как отмечает сама А.А. Замышляева, актуальность изучения такого рода моделей обусловлена необходимостью решения важных прикладных задач в области физики атмосферы, физики плазмы, теории электрических цепей, теории ползучести металлов, динамики колебаний стратифицированной жидкости, теории фильтрации и биологии. Развитие теории позволяет ставить вопрос об аналитическом и численном исследовании как существующих задач, так и новых в рамках сложившихся направлений математического моделирования – например, в теории звуковых и молекулярных волн, гидродинамике, теории упругости, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка.

В основе разработанного Алёной Александровной метода лежит так называемый метод фазового пространства – редукция сингулярного уравнения к регулярному, определенному на некотором подпространстве исходного пространства. Этот подход, обобщающий теорию вырожденных полугрупп операторов на случай уравнений высокого порядка, позволил получить принципиально новые результаты в области разрешимости начальных и начально-конечных задач для широкого класса математических моделей.

Значимость исследований подтверждается их прикладной направленностью. В рамках докторской диссертации Алёны Александровны Замышляевой были решены конкретные задачи для математической модели de Gennes линейных волн в смектиках, модели колебаний в молекуле ДНК, модели линейных волн в плазме, линеаризованной модели Бенни–Люка, стохастической модели распространения волн на мелкой воде. Для каждой из этих моделей были доказаны теоремы о разрешимости соответствующих задач и получены аналитические виды решений.

За годы работы А.А. Замышляевой опубликовано более 160 научных и научно-методических работ, издана монография «Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка» (2012), получено 16 свидетельств о регистрации программ. Результаты ее исследований известны далеко за пределами России: она выступала с докладами на научных семинарах в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Института математики и механики УрО РАН, Университете Претории (ЮАР), на международных конгрессах и конференциях в Италии, Болгарии и других странах. Она является членом программного комитета ежегодной Всероссийской научно-практической конференции «Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию», членом редколлегии журнала «Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование», индексирующегося в Scopus и Web of Science.

Педагогический талант Алёны Александровны Замышляевой проявляется не только в блестящем чтении лекций, но и в умении зажечь в студентах интерес к исследовательской работе. Под ее научным руководством подготовлено и защищено 4 диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, в том числе аспиранта из Республики Ирак, а также большое количество дипломных работ, выпускных квалификационных работ бакалавров и магистерских диссертаций. Многие из ее учеников сегодня работают в ведущих вузах и компаниях – ЮУрГУ, ЧелГУ, ОАО «Российские железные дороги», Яндекс, международных IT-компаниях. Сама Алёна Александровна неоднократно являлась председателем государственных экзаменационных комиссий по направлениям бакалавриата и магистратуры, что служит еще одним подтверждением ее высочайшего профессионального авторитета и доверия со стороны университетского сообщества.

Экологические проекты: наука на службе общества

Особого внимания заслуживают прикладные проекты, реализуемые под руководством А.А. Замышляевой. В рамках проекта «Экомонитор» разработан программный комплекс, позволяющий промышленным предприятиям наблюдать за рассеиванием загрязняющих веществ по территории и управлять своими экологическими рисками. Междисциплинарной командой создана предиктивная система мониторинга выбросов (PEMS), позволяющая оценивать выбросы предприятия по данным технологического процесса, а также интеллектуальная система тепло-видеонаблюдения за источниками выбросов на основе данных видеокамер.

Алёна Александровна активно участвует в продвижении этих разработок, представляя их промышленным предприятиям и контролирующим органам на форумах и презентациях: Сеймартек: экология, промышленная безопасность и охрана труда, выездные заседания НТС Росприроднадзора, круглые столы Координационного совета при губернаторе Челябинской области по вопросам экологии. Она является членом рабочей группы «Чистый воздух» Координационного совета при губернаторе Челябинской области по вопросам экологии. В 2023 году выступила экспертом на Всероссийском детском экологическом форуме в Челябинске, в 2024–2025 годах – членом организационного комитета Открытого форума по вопросам экологии и сохранению водных объектов в рамках национального проекта «Экология», а также II Всероссийского детского экологического форума.

«ВиртУм»: центр искусственного интеллекта

В 2025 году университет начал подготовку топ-специалистов в сфере искусственного интеллекта в центре «ВиртУм». Центр открыт в рамках федерального проекта «Искусственный интеллект» национального проекта «Экономика данных и цифровая трансформация государства» Минцифры России. Обучение в центре ориентировано прежде всего на практические результаты. С первых курсов студенты вовлечены в решение продуктовых задач ИТ-бизнеса, изучают кейсы и опыт отрасли, участвуют в работе проектных команд, мастер-классах, проходят практику и обязательную стажировку в компаниях отрасли. Сама Алёна Александровна Замышляева так формулирует свое отношение к искусственному интеллекту: «С искусственным интеллектом не нужно конкурировать – важно сотрудничать!».

Профориентационная и олимпиадная работа

Как директор института А.А. Замышляева ведет активную профориентационную работу со школьниками. Под ее руководством регулярно организуются летние школы, научные каникулы в виде практикоориентированных проектных программ для старшеклассников. Она является экспертом конкурсов «Интеллектуалы XXI века», «Шаг в будущее», программ по математике в центре для одаренных детей «Курчатов Центр».

Алёна Александровна – председатель жюри открытых личных соревнований ИЕТН по спортивному программированию, регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике, открытых командных соревнований по спортивному программированию Prime Time, председатель секции олимпиады «Прометей» по информатике, член регионального оргкомитета квалификационного тура четвертьфинальных соревнований чемпионата мира по программированию Восточного подрегиона, очных туров Олимпиад школьников ИТМО.

Научные и педагогические заслуги Алёны Александровны Замышляевой получили высокое признание. В 2021 году ей присвоено почетное звание «Почетный работник сферы образования РФ», а в 2024 году Указом Президента Российской Федерации В.В. Путина – «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации» за заслуги в научно-педагогической деятельности, подготовке специалистов и многолетнюю работу.

В ноябре 2025 года А.А. Замышляева стала лауреатом общенациональной премии Российского профессорского собрания «Декан года – 2025» в номинации «Физико-математические науки». Премия присуждается за выдающиеся научные результаты в области образования и науки, а также за успехи в управлении структурным подразделением вуза. Ректор ЮУрГУ Александр Вагнер, поздравляя ее, отметил: «Алёна Александровна возглавляет одну из самых серьезных и академичных высших школ университета. Активно участвует в работе и руководит новым образовательным проектом в сфере искусственного интеллекта».

Ранее она была награждена почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2019 г.), почетными грамотами Министерства образования и науки Челябинской области (2015 г.), грамотой Администрации города Челябинска (2003 г.), многочисленными почетными грамотами и благодарностями ЮУрГУ (2011, 2017, 2018 гг.), благодарностями ректора (2013, 2015, 2016, 2017 гг.). В 2007 и 2010 годах она становилась победителем конкурса молодых преподавателей ведущих российских вузов в рамках стипендиальной программы В. Потанина.

Пятьдесят лет – это только начало нового, еще более яркого этапа. Алёна Александровна Замышляева не просто руководит институтом – она создает будущее: готовит кадры для цифровой экономики, развивает фундаментальную науку, внедряет экологические технологии, вдохновляет молодежь на научные открытия. Как говорит сама Алёна Александровна, ее жизненное кредо – «быть открытым новому»: «Часто нужно первым сделать шаг в неизвестность и проложить путь для других, это позволит открыть новые возможности для всех и достичь больших результатов. Именно новизна приносит в нашу жизнь яркие краски и ощущения, способствует нашему росту над собой». Она мечтает показать новому поколению безграничные возможности науки, вдохновляя их на участие в научных проектах, и создать международную платформу, где молодежь сможет обмениваться идеями и совместно работать над научными проектами.

С юбилеем, Алёна Александровна! Новых научных открытий, вдохновленных учеников и реализации самых смелых проектов!

*Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер, Т.В. Карнета,
Н.А. Манакова, С.А. Загребина*

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003–2024) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции: 454080, г. Челябинск, ул. С. Кривой, 79, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 2.

Адрес издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 18, № 3
2026

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 27.07.2026. Дата выхода в свет 04.08.2026.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23.

Тираж 500 экз. Заказ 184/202. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.