# ВЕСТНИК

## ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2026
Т. 18, № 4

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

# «МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

**Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий**

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»**


Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.


**Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м. н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)

**Редакционный совет**

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болония, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Радченко П.А.** (ФГБУН «Институт физики прочности и материаловедения им. В.Е. Панина Сибирского отделения Российской академии наук», г. Томск).
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)
д.ф.-м.н., профессор **Яловец А.П.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)


© Издательский центр ЮУрГУ, 2026

# BULLETIN
## OF THE SOUTH URAL STATE UNIVERSITY
## SERIES
## "MATHEMATICS. MECHANICS. PHYSICS"

2026
Vol. 18, no. 4

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"


**South Ural State University**

The main purpose of the series "Mathematics. Mechanics. Physics" is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.


**Editorial Board**

**S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
**E.V. Golubev**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
**V.P. Beskachko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
**V.I. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
**A.O. Chernyavskiy**, Doctor of Engineering, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**Editorial Council**

**A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
**V.D. Buchelnikov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
**D. Guidetti**, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
**V.I. Zhukovsky**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
**S.V. Zelik**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
**A.I. Korotkii**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Brunch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
**Jaewan Kim**, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
**Kisik Kim**, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
**N.D. Kundikova**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
**V.V. Menshikh**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
**S.I. Pinchuk**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
**Y.S. Puzyrev**, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
**N.K. Ravshanov**, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
**P.A. Radchenko,** Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Panin Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation
**A.V. Trukhanov**, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
**L.V. Utkin**, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
**I. Verpoest**, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
**V.A. Strauss**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela
**A.P. Yalovets**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

# СОДЕРЖАНИЕ

## Математика

ДИЛЬМАН В.Л., КАЩЕЕВА А.Е. Об одном аналитическом методе исследования прочности дискретно-непрерывной неоднородной полосы в частном случае функции неоднородности .. 5

ЖУКОВСКИЙ В.И., ЖУКОВСКАЯ Л.В., КУДРЯВЦЕВ К.Н., СТАБУЛИТ И.С. Свойства равновесий по Нэшу в дифференциальных играх с запаздыванием ..... 18

ЗАЛЯПИН В.И., ХАРИТОНОВА Е.В. Ограниченная проблема моментов ..... 31

КОРОТКИЙ А.И., СТАРОДУБЦЕВА Ю.В. Численное моделирование задачи ассимиляции граничных данных при восстановлении старшего коэффициента модели диффузии–конвекции–реакции ..... 37

МАНАКОВА Н.А., НИКОЛАЕВА Н.Г. Исследование особенностей фазовых многообразий для полулинейных уравнений соболевского типа ..... 48

СОЛОВЬЁВА Н.Н., КОРЯГИН А.Л., ЗАГРЕБИНА С.А., САГАДЕЕВА М.А. Решение задачи стартового управления к финальному состоянию позитивными решениями модели гемодинамики ..... 59

## Механика

ГОНЧАРОВ Д.А., ФЕДОСОВ И.И., ШЕСТАКОВ А.Л. Имитационное моделирование кориолисова расходомера при двухфазном потоке с оценкой параметров сигнала методом матричных пучков ..... 68

ТАРАНЕНКО П.А., ТЕЛЕГИН Д.В. Разработка балочной конечно-элементной модели кориолисового расходомера, верифицированной по результатам испытаний ..... 82

## Физика

МОРОЗОВА О.Н., УБОЖЕНКО М.Ю., КУДРЯШОВА О.Б., АНТОННИКОВА А.А. Смеси алюминиевых порошков различной дисперсности для применения в генераторах водорода ... 92

## Персоналии

Энергия, целеустремленность, наука: к юбилею Елены Сергеевны Шестаковской ..... 101

# CONTENTS

## Mathematics

DILMAN V.L., KASHCHEEVA A.E. On an Analytical Method for Studying the Strength of a Discrete-Continuous Heterogeneous Strip in a Particular Case of the Heterogeneity Function ..... 5

ZHUKOVSKIY V.I., ZHUKOVSKAYA L.V., KUDRYAVTSEV K.N., STABULIT I.S. Properties of Nash Equilibria in Differential Games with Constant Delay Time ..... 18

ZALYAPIN V.I., KHARITONOVA E.V. The Limited Problem of Moments ..... 31

KOROTKII A.I., STARODUBTSEVA Y.V. Numerical Simulation of the Boundary Data Assimilation Problem in Recovering the Leading Value of a Diffusion-Convection- Reaction Model ..... 37

MANAKOVA N.A., NIKOLAEVA N.G. Investigation of the Features of Phase Manifolds for Semilinear Sobolev Type Equations ..... 48

SOLOVYOVA N.N., KORYAGIN A.L., ZAGREBINA S.A., SAGADEEVA M.A. Solution of the Start Control Problem Leading to the Final State using Hemodynamics Model Positive Solutions ..... 59

## Mechanics

GONCHAROV D.A., FEDOSOV I.I., SHESTAKOV A.L. Simulation of a Coriolis Flowmeter under Two-Phase Flow Conditions with Signal Parameter Estimation using the Matrix Pencil Method ..... 68

TARANENKO P.A., TELEGIN D.V. Development of a Beam-Based Finite Element Model of a Coriolis Flowmeter Verified Against Test Results ..... 82

## Physics

MOROZOVA O.N., UBOZHENKO M.Yu., KUDRYASHOVA O.B., ANTONNIKOVA A.A. Mixtures of Aluminum Powders of Varying Degrees of Dispersion for Use in Hydrogen Generators ..... 92

## Personalia

Energy, Determination and Science: On the Occasion of the Jubilee of Elena Shestakovskaya ..... 101

# Математика

**УДК 517.958+539.4** **DOI: 10.14529/mmph260401**

# ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ФУНКЦИИ НЕОДНОРОДНОСТИ

***В.Л. Дильман, А.Е. Кащеева***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: dilmanvl@susu.ru*

**Аннотация. Изучаются критические состояния растягиваемой пластической полосы при плоской деформации. Полоса дискретно неоднородна в продольном направлении – содержит поперечный прямоугольный слой из менее прочного материала, – и непрерывно неоднородна в поперечном направлении. В частности, слой непрерывно неоднороден вдоль его длины. Функция неоднородности полосы четна относительно её продольной оси симметрии, монотонна с каждой стороны оси и зависит от расстояния до этой оси. Метод исследования основан на естественном для тонких прослоек предположении, что касательные напряжения в средней части слоя линейно зависят от поперечной координаты слоя (продольной координаты полосы). Это допущение позволило получить в качестве следствия исходной системы обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции продольной координаты полосы, входящей множителем в функцию касательных напряжений. Это уравнение решалось разложением в степенной ряд с целью получения приближенного аналитического решения. Рассмотрен модельный вид функции неоднородности, при котором получены явные аналитические выражения для приближенного вычисления критических значений касательных и нормальных напряжений на границе между слоем и остальным материалом полосы, а также для вычисления критической нагрузки, в зависимости от геометрических и механических параметров полосы, в том числе слоя.**

*Ключевые слова: пластический слой; плоская деформация; неоднородное соединение; сварной шов; касательные и нормальные напряжения; критические состояния; квазилинейные системы гиперболического типа; инварианты Римана.*

## Введение

Неоднородность сварных соединений является неизбежным следствием технологий их производства. Дискретная неоднородность в виде скачка прочности между сварным швом и основным материалом, а также зоной сплавления, определяется различием прочностных свойств основного металла и металла шва. Непрерывная неоднородность в зоне термического влияния и шве является следствием неравномерного распределения температур в сварном соединении. Хорошо известно явление контактного упрочнения неоднородных соединений [1], которое следует учитывать для более точной оценки несущей способности сварных конструкций.

Начиная с работы [2], более ста лет ведутся исследования прочности соединений с «мягкой» прослойкой. Среди многочисленных публикаций на эту тему можно отметить [3–19]. Изучалось влияние на прочность геометрических особенностей или дефектов сварных швов [11, 12, 16–18, 20–23]. Работы, в которых рассматриваются неоднородная прослойка и (или) неоднородный основной материал, тем не менее не многочисленны (можно отметить [16, 17, 24–26]), однако реальные соединения нередко дискретно-непрерывно неоднородны [27, 28], а также анизотропны.

Будем предполагать, что полоса (используем безразмерные величины) $\{(x;y):|x|\le 1\}$ содержит прослойку $\{(x;y):|x|\le 1,|y|\le d,\ d<0{,}5\}$ (рис. 1).

Вне прослойки полоса состоит из неоднородного изотропного пластического материала с параметром пластичности $k^{+}(x)$. То же самое в прослойке, но с параметром пластичности $k^{-}(x;y)$. Далее используем безразмерные величины. Обозначим

$$Z(x)=\frac{k^{\pm}(x)}{k^{-}(0)}. \tag{1}$$

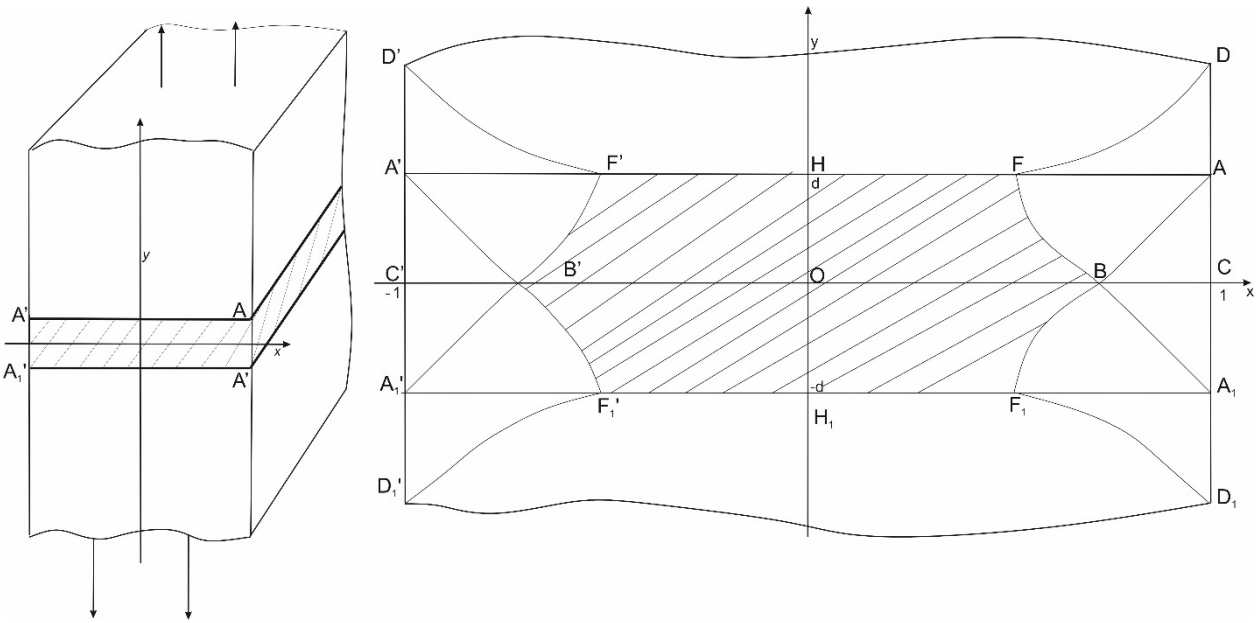



**Рис. 1. Неоднородное соединение с поперечным менее прочным неоднородным слоем**

Величины, относящиеся к прослойке (основному материалу), в случае необходимости отмечаем верхним индексом «–» (верхним индексом «+»). В силу дискретной неоднородности полосы коэффициент неоднородности

$$K=\frac{k^{+}(x)}{k^{-}(x)}>1. \tag{2}$$

В работе $K$ принят постоянным. В зависимости от того, какой момент нагружения считать критическим состоянием, параметром пластичности $k^{\pm}(x)$ можно считать любой механический параметр, соответствующий этому моменту, – предел упругости, предел пластичности, временное сопротивление (предел прочности), момент потери общей устойчивости процесса пластического деформирования или локализации пластической деформации [29] и др. Напряженное состояние полосы – плоская деформация, внешняя нагрузка – статическое растяжение в направлении полосы.

При математическом моделировании напряжённого состояния дискретно неоднородной полосы возникают краевые задачи [16, 17] для систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Один из подходов к решению таких задач в пластическом слое [16–18, 25] состоит из двух шагов.

Сначала методом инвариантов Римана на характеристиках [30] решается внутренняя обратная граничная задача для напряжений на участке контактной поверхности $AA_1F_1BF$ (см. рис. 1), примыкающем к внешней (свободной) границе. Метод инвариантов Римана позволяет также сформулировать и доказать аналог первой теоремы Генки [31]. На втором шаге задача решается в окрестности поперечной оси симметрии слоя. Используются, кроме результатов первого шага, априорные ограничения на классы решений на основе частичного предугадывания внутреннего

состояния материала слоя. Естественной является *мультипликативная гипотеза* для касательных напряжений в окрестности оси $Oy$:

$$\tau_{xy} = X(x)Y(y),\ X(0)=0,\ Y(0)=0, \tag{3}$$

где $\tau_{xy}$ – касательные напряжения. В работе используется частный случай формулы (3), естественный для тонких прослоек [3, 5]:

$$Y(y) = y, \tag{4}$$

в области, где $|x| < x_F$ (параметр $x_F$ определен ниже в (18)). Предполагается, что функция (1) в слое и основном материале зависит только от $x$:

$$Z = Z(x),\ Z(0)=1, \tag{5}$$

а коэффициент неоднородности (2) является постоянным.

Цель работы – исследование напряжённого состояния неоднородного менее прочного слоя при гипотезе (3) и условии (4), когда $Z = Z(x)$ удовлетворяет (5). В частном случае

$$Z(x) = \frac{1}{1+\delta x^2},\ -1 < \delta < 1 \tag{6}$$

построена и изучена аналитическими методами математическая модель критического состояния слоя для указанного вида функции неоднородности. Применяется изложенный выше двухшаговый метод, причем используются результаты [26], где выполнен первый шаг. Основная часть работы – реализация второго шага. На этой основе получено приближенное решение в замкнутой форме. Точнее, в работе найдены явные аналитические выражения для приближенного вычисления касательных и нормальных напряжений в слое и на границе между слоем и остальной частью полосы в критический момент нагружения. Эти результаты используются для описания вычислительной схемы получения предельной нагрузки в указанном частном случае. Заметим, что вариант, когда $Z = Z(y)$, был ранее рассмотрен [16, 17, 25].

**Нахождение приближенных зависимостей для касательных напряжений на основе мультипликативной гипотезы**

***Представление касательных напряжений суммой степенного ряда.*** Как известно, напряжённо-деформированное состояние пластической среды при плоской деформации в безразмерных переменных в случае $Z = Z(x)$ определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \tag{8}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4Z^2. \tag{9}$$

В работе будет использована приближенная версия формулы (9) [16, с. 108; 17, с. 118]:

$$\sigma_y - \sigma_x = 2Z - \frac{\tau^2}{Z}. \tag{10}$$

Из (7), (8), (10) следует:

$$\frac{\partial^2\left(2Z - \dfrac{\tau_{xy}^2}{Z}\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0.$$

При условии (5) отсюда

$$-\frac{\partial^2\left(\dfrac{\tau_{xy}^2}{Z}\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0.$$

Применив к последнему уравнению (3), получим после преобразований

$$-\frac{2X'Z-XZ'}{Z^2}2Y'+\frac{X''}{X}-\frac{Y''}{Y}=0. \tag{11}$$

Будем предполагать: $Z(x)\neq 1$ тождественно. Напомним:

$$X(0)=0,\ Y(0)=0,\ Z(0)=1. \tag{12}$$

Предположение [3], что зависимость $\tau_{xy}$ от $y$ для относительно тонких прослоек, когда $d\approx 0{,}1...0{,}15$, близка к линейной, не дало существенных расхождений теории с натурными экспериментами и для более толстых прослоек [9]. В работе строится математическая модель напряженного состояния прослойки, для которой

$$\tau_{xy}=X(x)\,y. \tag{13}$$

Подстановкой (13) в (11) получим

$$\left(X'(0)-X'(x)\right)Z(x)=2X^2(x) \tag{14}$$

Представим в виде степенного ряда искомую функцию $X$. Из (14) видно, что если $Z=Z(x)$ четная, то $X'(x)$ тоже четная. Тогда, с учетом первого равенства (12), $X(x)$ нечетная:

$$X(x)=ax+a_3x^3+a_5x^5+... \tag{15}$$

Отсюда

$$X'(x)-X'(0)=3a_3x^2+5a_5x^4+7a_7x^6+...$$

Как будет ясно из дальнейших рассуждений, коэффициенты разложения (15) можно вычислить по первому коэффициенту $a$, который определяется граничными условиями.

Далее будем предполагать выполнение условия (6). Уравнение (14) при условии (6) приобретет вид

$$X'(0)-X'(x)=2X^2(x)\left(1+\delta x^2\right).$$

Подставив записанные выше разложения в это уравнение, получим

$$-\left(3a_3x^2+5a_5x^4+7a_7x^6+\ldots\right)=2\left(1+\delta x^2\right)\left(ax+a_3x^3+a_5x^5+\ldots\right)^2$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях в последнем уравнении приводит к цепочке равенств:

$$a_3=-\frac{2}{3}a^2;\ \ldots;\ a_{13}=\frac{1398016}{6081075}a^7-\frac{4746176}{6081075}a^6\delta+\frac{1321984}{2027025}a^5\delta^2-\frac{232}{2925}a^4\delta^3.$$

Подставляя в (15) найденные выражения и перегруппировывая, получаем:

$$X(x)=xa-\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}\delta x^5\right)a^2+\left(\frac{8}{15}x^5+\frac{64}{105}\delta x^7+\frac{8}{45}\delta^2x^9\right)a^3-$$
$$-\left(\frac{136}{315}x^7+\frac{2056}{2835}\delta x^9+\frac{7144}{17325}\delta^2x^{11}\right)a^4+\ldots$$

Отсюда, в силу (13),

$$\tau_{xy}=y(xa-\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}\delta x^5\right)a^2+\left(\frac{8}{15}x^5+\frac{64}{105}\delta x^7+\frac{8}{45}\delta^2x^9\right)a^3-$$
$$-\left(\frac{136}{315}x^7+\frac{2056}{2835}\delta x^9+\frac{7144}{17325}\delta^2x^{11}\right)a^4+\ldots\ ) \tag{16}$$

Слагаемые, содержащие $\delta^2$ при $|\delta|\approx 0{,}1$ и меньше, составляют величину порядка 0,01 или меньше от всего выражения в скобках, поэтому их можно, без заметной потери точности, игнорировать.

***Вычисление первого коэффициента разложения функции*** $X$**.** Будем предполагать, что условие (13) выполняется в части слоя, для которого $|x|\le x_F$, где $x_F$ – абсцисса точки $F$ выхода характеристики $A_1BF$ на контактную границу $HA$ (см. рис. 1). В [26] показано:

$$\tau_F = \tau\left(x_F, d\right) \approx \left(K-1\right)\left(1+\frac{\left(K-1\right)^2}{4K}\right) Z\left(x_F\right) \approx \left(K-1\right) Z\left(x_F\right) = \frac{K-1}{1+\delta x_F^2}, \tag{17}$$

$$x_F \approx 1 - \frac{4d}{K+1}. \tag{18}$$

Подставляя в (16) выражения (17) и (18) вместо $\tau_{xy}$ и $x$ соответственно, $d$ вместо $y$, получим уравнение для нахождения параметра $a$:

$$f\left(t\right) = b,\ b > 0, \tag{19}$$

где $f\left(t\right)$ – аналитическая на $\left[0;1\right]$ функция:

$$f\left(t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k,$$

причем

$$c_1 = x_F; c_2 = -\left(\frac{2}{3}x_F^3 + \frac{2}{5}\delta x_F^5\right); c_3 = \frac{8}{15}x_F^5 + \frac{64}{105}\delta x_F^7; c_4 = -\left(\frac{136}{315}x_F^7 + \frac{2056}{2835}x_F^9\right);$$

$$b = \frac{\tau_F}{d}. \tag{20}$$

Метод приближенного решения уравнения (19), (20), который назовем *методом касательных частичных сумм,* заключается в следующем. Пусть $f_m\left(t\right)$ – частичная сумма этого ряда:

$$f_m\left(t\right) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^k.$$

На $m$-м шаге решаем уравнение

$$f_m\left(x\right) = b,\ b > 0.$$

Обозначим $t_{(m)}$ решение этого уравнения. В частности,

$$t_{(1)} = \frac{b}{c_1}.$$

Положим:

$$t_{(m)} = t_{(m-1)} - \frac{f_m\left(t_{(m-1)}\right) - b}{f_m'\left(t_{(m-1)}\right)} = \frac{c_m t_{(m-1)}^m}{f_m'\left(t_{(m-1)}\right)}.$$

Тогда последовательность $t_{(m)}$ стремится к $a$.

*Частные случаи.*

1. $m = 2$. Тогда

$$t_{(2)} \approx t_{(1)} - \frac{c_2\left(t_{(1)}\right)^2}{c_1 + 2c_2 t_{(1)}} = t_{(1)}\frac{c_1 + c_2 t_{(1)}}{c_1 + 2c_2 t_{(1)}}.$$

2. $m = 3$. Тогда

$$t_{(3)} \approx t_{(2)} - \frac{c_2\left(t_{(2)}\right)^2}{c_1 + 2c_2 t_{(2)} + 3c_3\left(t_{(2)}\right)^2} = t_{(2)}\frac{c_1 + 2c_2 t_{(2)} + 2c_3\left(t_{(2)}\right)^2}{c_1 + 2c_2 t_{(2)} + 3c_3\left(t_{(2)}\right)^2}.$$

*Пример*. Пусть $d = 0,2;\ K = 1,2;\ \delta = 0,1$. Тогда, по приведенным формулам (17) и (18):

$$x_F = 0,636;\quad \tau_F = 0,192;\quad \beta = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta x_F^2 = 0,668;$$

$$c_1 = x_F = 0,636;\quad c_2 = -x_F^3\beta = -0,172;\ b = \frac{\tau_F}{d} = 0,96.$$

Последовательность $t_{(m)}$ стабилизируется после 13-го шага (с точностью до тысячных). Положим,

$$a \approx t_{(13)} \approx 2{,}602.$$

Касательные напряжения вычисляются подстановкой найденной величины $a$ в (16).

**Нахождение приближенных зависимостей для нормальных напряжений**

Интегрируя уравнения равновесия (7), (8) и используя (16), получим:

$$\sigma_x = -\int_0^x \frac{\partial \tau}{\partial y} dx + \varphi(y) = -\left( \frac{ax^2}{2} - \frac{1}{6}a^2x^4 + \left( -\frac{1}{15}\delta a^2 + \frac{4}{45}a^3 \right) x^6 + \ldots \right) + \varphi(y),$$

$$\sigma_y = -\int_0^y \frac{\partial \tau}{\partial x} dy + \psi(x) = -\left( a - 2x^2a^2 + \left( -2\delta a^2 + \frac{8}{3}a^3 \right) x^4 + \ldots \right) \frac{y^2}{2} + \psi(x).$$

В более простых обозначениях

$$\sigma_x = -\left( Ax^2 - Bx^4 + Cx^6 + \ldots \right) + \varphi(y),$$

$$\sigma_y = -\left( A - 6Bx^2 + 15Cx^4 + \ldots \right) y^2 + \psi(x), \tag{21}$$

где

$$A = \frac{a}{2}, B = \frac{1}{6}a^2,\ C = -\frac{1}{15}a^2\delta + \frac{4}{45}a^3. \tag{22}$$

В этих обозначениях (16) имеет вид:

$$\tau_{xy} = \left( 2Ax - 4Bx^3 + 6Cx^5 + \ldots \right) y. \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в (10) и полагая одновременно $x = 0$ и $y = 0$, получим $\psi(0) - \varphi(0) = 2$, или $\varphi(0) = c$, $\psi(0) = 2 + c$. Подставляя (21) и (23) в (10) и полагая по очереди $x = 0$ и $y = 0$, найдем с точностью до постоянного слагаемого:

$$\psi(x) = -\left( Ax^2 - Bx^4 + Cx^6 + \ldots \right) + \frac{2}{1 + \delta x^2} + c,\ \ \varphi(y) = -\frac{ay^2}{2} + c,$$

где $A, B, C$ определены в (22), параметр $a$ – указанным выше методом. Теперь из (21) можно найти значения нормальных напряжений с точностью до постоянного слагаемого $c = \varphi(0)$:

$$\sigma_x = -\left( Ax^2 - Bx^4 + Cx^6 + \ldots \right) - \frac{ay^2}{2} + c,$$

$$\sigma_y = -\left( A - 6Bx^2 + 15Cx^4 \right) y^2 - \left( Ax^2 - Bx^4 + Cx^6 + \ldots \right) + \frac{2}{1 + \delta x^2} + c, x \in \left[ -x_F; x_F \right] \tag{24}$$

Эти приближенные выражения имеют место в прямоугольнике $\left[ -x_F; x_F \right] \times \left[ -d; d \right]$, на котором предполагается выполнение гипотезы (3) в форме (13). Для нахождения параметра $c$ надо приравнять значения $\sigma_y$ в точке $F$, вычисленные в этом прямоугольнике по (24), значениям в $F$, полученным [27] методом характеристик на участке $\left[ x_F; 1 \right] \times \left[ -d; d \right]$:

$$\sigma_y(x, d) = \frac{1 + 4K - K^2}{2\left( 1 + \delta x^2 \right)} - p,\ x \in \left[ x_F; 1 \right],\ y = d, \tag{25}$$

где $p$ – внешнее давление на свободную поверхность. Приравнивая (24) при $x = x_F$, $y = d$ и (25), получим:

$$c = \left( A - 6Bx_F^2 + 15Cx_F^4 \right) d^2 + \left( Ax_F^2 - Bx_F^4 + Cx_F^6 + \ldots \right) + \frac{4K - K^2 - 3}{2\left( 1 + \delta x_F^2 \right)} - p, \tag{26}$$

где $x_F$ определена в (18), $A$, $B$, $C$ – в (22). Таким образом, нормальные напряжения $\sigma_y$ на контактной границе в прямоугольнике $[-x_F; x_F]\times[-d; d]$ определяются формулами (24), где $c$ приведено в (26), и формулой (25). Окончательно:

$$\sigma_y(x,y) = A\left(d^2 - y^2\right) - 6B\left(x_F^2 d^2 - x^2 y^2\right) + 15C\left(x_F^4 d^2 - x^4 y^2\right) + \ldots$$
$$+\left(A\left(x_F^2 - x^2\right) - B\left(x_F^4 - x^4\right) + \ldots\right) + \frac{4K - K^2 + 1}{2\left(1 + \delta x_F^2\right)} - p. \qquad (27)$$

**Вычислительная схема для нахождения критической нагрузки**

Примем в качестве критической нагрузки среднее (среднеинтегральное) значение напряжений $\sigma_y$ на контактной границе:

$$\sigma_{av} = \int_0^1 \sigma_y(x,d)\,dx = \int_0^{x_F} \sigma_y(x,d)\,dx + \int_{x_F}^1 \sigma_y(x,d)\,dx. \qquad (28)$$

Интеграл (28) вычисляется непосредственно и явно на каждом из двух (в первом случае) или трех (во втором случае) участков отрезка $[0;1]$ (см. ниже). Предварительно следует вычислить для каждого значения толщины $d$ слоя значение параметра $a$, что можно сделать только численно.

*Первый случай*. Из (24) следует:

$$\sigma_y(x,d) = -6B\left(x_F^2 - x^2\right)d^2 + 15C\left(x_F^4 - x^4\right)d^2 + \ldots + \left(A\left(x_F^2 - x^2\right) - B\left(x_F^4 - x^4\right) + \ldots\right) +$$
$$+\frac{4K - K^2 + 1}{2\left(1 + \delta x_F^2\right)} - p, \quad x \in [0; x_F] \qquad (29)$$

Предположим, что всюду в слое, в том числе на контактной границе,

$$\sigma_y \le 2KZ. \qquad (30)$$

Этот случай имеет место для не очень тонких прослоек, что видно из приведенных ниже примеров. Подставим (29) и (25) в соответственно первый и второй интегралы (28). Получим, учитывая формулы:

$$\int \frac{1}{1 + Cx^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{C}x\right), & C > 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{-C}}\operatorname{arcth}\left(\sqrt{-C}x\right), & C < 0, \end{cases} \qquad (31)$$

что

$$\int_0^{x_F} \sigma_y(x,d)\,dx = \left(-4Bx_F^3 + 12Cx_F^5\right)d^2 + \frac{2}{3}Ax_F^3 - \frac{4}{5}Bx_F^5 + \frac{4K - K^2 + 1}{2\left(1 + \delta x_F^2\right)}x_F - px_F, \qquad (32)$$

$$\int_{x_F}^1 \sigma_y(x,d)\,dx = -p\left(1 - x_F\right) + \begin{cases} \dfrac{1 + 4K - K^2}{2\sqrt{\delta}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\delta}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\delta}x_F\right)\right), & \delta > 0; \\ \dfrac{1 + 4K - K^2}{2}\left(1 - x_F\right), & \delta = 0; \\ \dfrac{1 + 4K - K^2}{2\sqrt{-\delta}}\left(\operatorname{arcth}\left(\sqrt{-\delta}\right) - \operatorname{arcth}\left(\sqrt{-\delta}x_F\right)\right), & \delta < 0. \end{cases} \qquad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в (28), получим $\sigma_{av}$.

*Второй случай.* На некотором участке контактной границы $HM$, $HM \subseteq HF$, то есть для $x \in [0; x_M]$; $x_M < x_F$, условие (30) не выполняется. Тогда на этом отрезке следует считать, что

$$\sigma_y(x,d) = 2KZ(x) = \frac{2K}{1 + \delta x^2}, \quad x \in [0; x_M]. \qquad (34)$$

Эта версия имеет место для тонких прослоек, $d = 0,2...0,25$ и меньше. Чтобы найти $x_M$, надо численно решить уравнение $\sigma_y(x,d) = 2KZ(x)$, то есть:

$$-6B\left(x_F^2 - x^2\right)d^2 + 15C\left(x_F^4 - x^4\right)d^2 + ... + \left(A\left(x_F^2 - x^2\right) - B\left(x_F^4 - x^4\right) + ...\right) + \frac{4K - K^2 + 1}{2\left(1 + \delta x_F^2\right)} - p = \frac{2K}{1 + \delta x^2}.$$

В этом случае

$$\sigma_{av} = \int_0^{x_M} \sigma_y(x,d)\,dx + \int_{x_M}^{x_F} \sigma_y(x,d)\,dx + \int_{x_F}^{1} \sigma_y(x,d)\,dx. \qquad (35)$$

Первый интеграл в (35) имеет вид:

$$\int_0^{x_M} \sigma_y(x,d)\,dx = 2K\int_0^{x_M} \frac{1}{1+\delta x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2K}{\sqrt{\delta}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\delta}x_M\right), & \delta > 0; \\ 2Kx_M, & \delta = 0; \\ \dfrac{2K}{\sqrt{-\delta}}\operatorname{arcth}\left(\sqrt{-\delta}x_M\right), & \delta < 0. \end{cases}$$

Приближенное значение второго интеграла в (35) на основе метода трапеций, достаточное для практических нужд, можно получить по формуле:

$$\int_{x_M}^{x_F} \sigma_y(x,d)\,dx = \left(\frac{K}{\left(1+\delta x_M^2\right)} + \frac{1 + 4K - K^2}{4\left(1+\delta x_F^2\right)} - \frac{p}{2}\right)\left(x_F - x_M\right).$$

Третий интеграл из (35) записан в (33).

**Выводы**

На рис. 2 и 3 показаны нормальные напряжения $\sigma_y(x,d)$ на контактной поверхности (сплошные линии), соответствующие первому и второму случаю. Пунктирными линиями показаны соответствующие результаты, полученные авторами в работе [32] на основе гипотезы $\tau_{xy} = X(x)Y(y)$ при условии $X(x) = x$ в области $|x| \le x_F$, где $x_F$ – абсцисса точки $F$ выхода характеристики $A_1BF$ на контактную границу $HA$ (см. рис. 1). Предположение (6) в [32] сохраняется. Сравнение результатов данной работы (средней предельной нагрузки) и [32] показало, что в [32] имеется незначительное превышение (на 0,5–1,5 %), что косвенно свидетельствует об удовлетворительности подходов в данной работе и в [32].

В работе построена и исследована аналитическими методами новая математическая модель критического состояния неоднородного слоя в составе соединения в виде полосы с менее прочным слоем под растягивающей нагрузкой. Полоса дискретно неоднородна в продольном направлении – содержит поперечный прямоугольный слой из менее прочного материала, и непрерывно неоднородна поперек. В частности, прочность слоя не постоянна по его длине: зависимость параметра пластичности точки от расстояния до оси симметрии полосы (функция неоднородности) определяется формулой (6). Касательные напряжения в средней части слоя предполагаются линейно зависящими от $y$.

Полученные в работе явные приближенные аналитические выражения для напряжений в слое в критический момент нагружения, а также зависимости предельной нагрузки от геометрических и механических параметров соединения являются новыми. Результаты могут быть использованы для определения прочности некоторых неоднородных соединений, а также в качестве критериев валидации исследований критических состояний неоднородных конструкций методами конечных элементов, нейросетей и др.

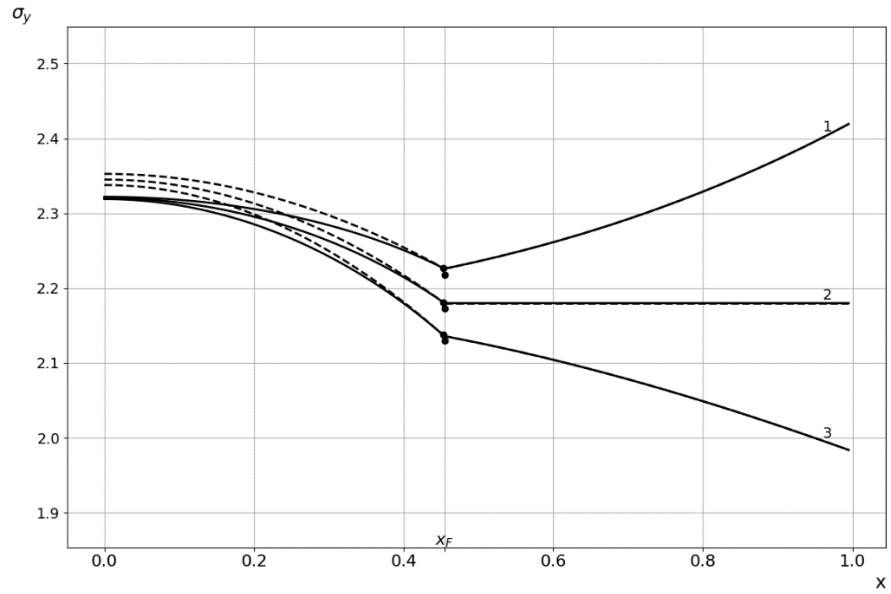



**Рис. 2. Графики зависимости (по длине слоя) нормальных напряжений $\sigma_y(x,d)$ на контактной поверхности (сплошные линии), $x \in [0;1]$. Условие (30) всюду выполняется. 1) $\delta = -0,1$; 2) $\delta = 0,0$; 3) $\delta = 0,1$. $K = 1,2$, $d = 0,3$. Пунктир – результаты работы [32]**

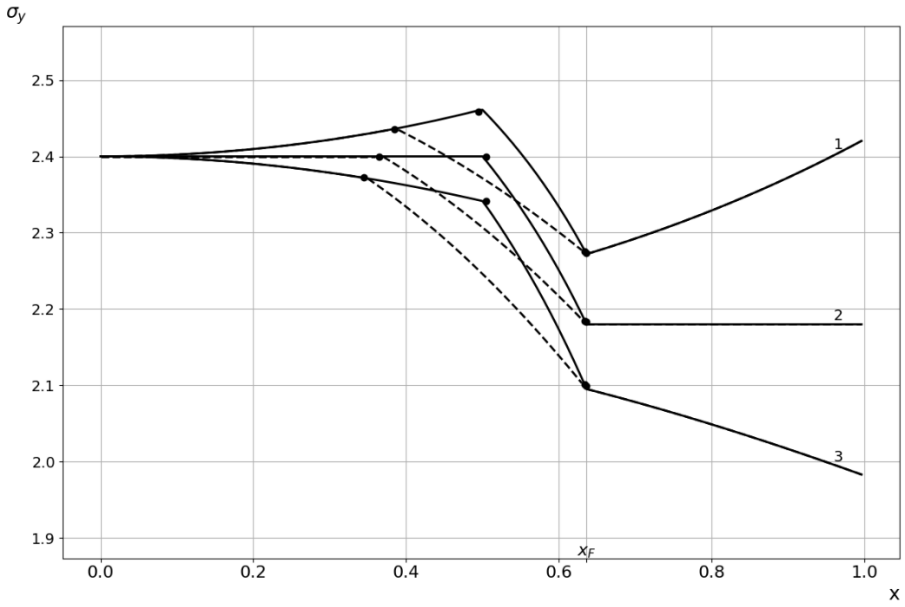



**Рис. 3. Графики зависимости (по длине слоя) нормальных напряжений $\sigma_y(x,d)$ на контактной поверхности (сплошные линии), $x \in [0;1]$. Условие (30) не выполняется при $x < 0,5$. 1) $\delta = -0,1$; 2) $\delta = 0,0$; 3) $\delta = 0,1$. $K = 1,2$, $d = 0,2$. Пунктир – результаты работы [32]**

## Литература

1. Бакши, О.А. О напряженном состоянии и деформации твердого металла в сварных соединениях с твердой и мягкой прослойкой / О.А. Бакши, А.А. Шатов // Сварочное производство. – 1966. – № 5. – С. 17–20.

2. Prandtl, L. Beispiele der Anwendung des Hencky's Theorems zum Gleichgewicht der Plastischen Korper. / L. Prandtl // Z. Angew. Math. Mech. – 1923. – Vol. 3, Iss. 6. – P. 401–406.

3. Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластичной прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63–67.

4. Ольшак, В. Теория пластичности неоднородных тел / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. – М.: Мир, 1964. – 156 с.

5. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 420 с.

6. Satoh, K. Size Effect on Static Tensile Properties of Welded Joints Including of Soft Interlayers / K. Satoh // Journal Jap. Welding Soc. – 1968. – Vol. 37, Iss. 11. – P. 242–249.

7. Satoh, K. Joint Strength of Heavy Plastics with Lower Strength Weld Metal / K. Satoh, M. Toyoda // Welding Journal. – 1975. – Vol. 54, Iss. 9. – P. 311–319.

8. Унксов, Е.П. Еще раз о плоской осадке полосы между параллельными шероховатыми плитами / Е.П. Унксов // Кузнечно-прессовое производство. – 1980. – № 5. – С. 18–20.

9. Бакши, О.А. О влиянии степени механической неоднородности на статическую прочность сварных соединений / О.А. Бакши, В.В. Ерофеев, М.В. Шахматов // Сварочное производство. – 1983. – № 4. – С. 1–4.

10. Шахматов, М.В. Напряженное состояние и прочность сварных соединений с переменными механическими свойствами металла мягкого участка / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев // Сварочное производство. – 1982. – № 3. – С. 6–7.

11. Когут, Н.С. Несущая способность сварных соединений / Н.С. Когут, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Львов: Свит, 1991. – 184 с.

12. Шахматов, М.В. Инженерные расчеты сварных оболочковых конструкций / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1995. – 229 с.

13. Kim, Y.-J. Numerical Analysis of Strength Mis-match Effect on Local Stresses for Ideally Plastic Material / Y.-J. Kim, K.-H. Schwalbe // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – Vol. 71. – P. 1177–1199.

14. Schnabl, S. Analytic Solution of Two-layer Beam Taking into Account Interlayer Slip and Shear Deformation / S. Schnabl, M. Saje, G. Turk, I. Planinc // Journal of Structural Engineering. – 2007. – Vol. 133, Iss. 6. – P. 886–894. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(2007)133:6(886)

15. Kozak, D. Yield Load Solutions of Heterogeneous Welded Joints / D. Kozak, N. Gubeljak, P. Konjatic, J. Sertic // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2009. – Vol. 86. – P. 807–812.

16. Дильман, В.Л. Математические модели напряжённого состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.

17. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.

18. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 3. – № 17 (150). – С. 36–58.

19. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Изв. РАН МТТ, 2010. – № 2. – С. 89–102.

20. Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40 (299). – С. 164–168.

21. Носачева, А.И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом / А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 79–84.

22. Носачева, А.И. Анализ критического состояния дискретно-неоднородной полосы с наклонной контактной границей и наружным макродефектом в более прочной части / А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2019. – Т. 11, № 4. – С. 62–72.

23. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 141–148.

24. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.

25. Dilman, V.L. Research into Functional Equation Arising from Mathematical Modeling of Critical States of Heterogeneous Soft Layers / V.L. Dilman, D.A. Trunova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, Iss. 2. – P. 19–24.

26. Dilman, V.L. On the Internal Inverse Boundary Problem in the Study of Critical Conditions of Discrete-Continuous Heterogeneous Joints / V.L. Dilman, A.E. Kashcheeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2025. – Vol. 12, no. 3. – P. 3–13.

27. Lee, H. An Evaluation of Global and Local Tensile Properties of Friction-Stir Welded DP980 Dual-Phase Steel Joints using a Digital Image Correlation Method / H. Lee, Ch. Kim, J. H. Song // Materials. – 2015. – Vol. 8, Iss. 12. – P. 8424–8436.

28. Investigating Nanoindentation Creep Behavior of Pulsed-TIG Welded Inconel 718 and Commercially Pure Titanium Using a Vanadium Interlayer / T. Shehbaz, F. N. Khan, M. Junaid, J. Haider // Metals. – 2021. – Vol. 11, Iss. 9. – P. 1492–1515.

29. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек. / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11–16.

30. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 688 с.

31. Генки, Г.О. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических средах / Г.О. Генки // Теория пластичности. – М.: Ин. лит., 1948. – С. 80–101.

32. Dil’man, V.L. On an Analytical Model of the Critical State of a Heterogeneous Plastic Layer: a Closed-Form Solution for a Special Case / V.L. Dil’man, A.E. Kashcheeva // Computational Mathematics and Modeling. – 2026. – Vol. 37. – P. 1019–1032.

***Поступила в редакцию 7 октября 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: dilmanvl@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497.

Кащеева Александра Евгеньевна – аспирант, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kashcheevaae@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series “Mathematics. Mechanics. Physics”***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 5–17***

**DOI: 10.14529/mmph260401**

# ON AN ANALYTICAL METHOD FOR STUDYING THE STRENGTH OF A DISCRETE-CONTINUOUS HETEROGENEOUS STRIP IN A PARTICULAR CASE OF THE HETEROGENEITY FUNCTION

***V.L. Dilman, A.E. Kashcheeva***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: dilmanvl@susu.ru*

Abstract. The critical states of a tensile plastic strip under plane strain are studied. The strip is discretely heterogeneous in the longitudinal direction – it contains a transverse rectangular layer made of a less strong material – and continuously heterogeneous in the transverse direction. In particular, the layer is continuously heterogeneous along its length. The heterogeneity function of the strip is even with respect to its longitudinal axis of symmetry, monotonic on each side of the axis, and depends on the distance from this axis. The research method is based on the assumption, typical for thin layers, that the shear stresses in the middle part of the layer depend linearly on the transverse coordinate of the layer (the longitudinal coordinate of the strip). This assumption made it possible to obtain, as a consequence of the original system, an ordinary differential equation for the function of the longitudinal coordinate of the strip, which is a factor in the function of the shear stresses. This equation was solved by expanding it

in a power series in order to obtain an approximate analytical solution. A model form of the heterogeneity function is considered, for which explicit analytical expressions are obtained for the approximate calculation of critical values of tangential and normal stresses at the boundary between the layer and the rest of the strip material, as well as for calculating the critical load, depending on the geometric and mechanical parameters of the strip, including the layer.

*Keywords: plastic layer; plane strain; heterogeneous joint; welded joint; shear and normal stresses; critical states; quasilinear hyperbolic systems; Riemann invariants.*

**References**

1. Bakshi O.A., Shatov A.A. On the Stress State and Deformation of Solid Metal in Welded Joints with Hard and Soft Interlayers. *Svarochnoe proizvodstvo*, 1966, no. 5, pp. 17–20. (in Russ.)

2. Prandtl L. Beispiele der Anwendung des Hencky's Theorems zum Gleichgewicht der Plastischen Körper. *Z. Angew. Math. Mech*., 1923, Vol. 3, Iss. 6, pp. 401–406.

3. Kachanov L.M. On the Stress State of a Plastic Interlayer. *Izv. AN SSSR. Otd. tekh. nauk. Mekhanika i mashinostroenie*, 1962, no. 5, pp. 63–67. (in Russ.).

4. Ol'shak V., Ryhlevskij Ya., Urbanovskij V. *Teoriya plastichnosti neodnorodnykh tel* (Theory of Plasticity of Heterogeneous Bodies). Moscow, Mir Publ., 1964, 156 p. (in Russ.).

5. Kachanov L.M. *Foundations of the Theory of Plasticity*. North-Holland Publishing Company, 1971, 482 p.

6. Satoh K. Size Effect on Static Tensile Properties of Welded Joints Including Soft Interlayer. *Journal of the Japan Welding Society*, 1968, Vol. 37, no. 11, pp. 242–249.

7. Satoh K., Toyoda M. Joint Strength of Heavy Plates with Lower Strength Weld Metal. *Welding Journal*, 1975, Vol. 54, Iss. 9, pp. 311–319.

8. Unksov E.P. Once Again About the Flat Sediment of a Strip Between Parallel Rough Plates. *Kuznechno-pressovoe proizvodstvo*, 1980, no. 5, pp. 18–20. (in Russ.).

9. Bakshi O.A., Erofeev V.V., Shakhmatov M.V. O vliyanii stepeni mekhanicheskoy neodnorodnosti na staticheskuyu prochnost' svarnykh soedineniy (On the Influence of the Degree of Mechanical Heterogeneity on the Static Strength of Welded Joints). *Svarochnoe proizvodstvo*, 1983, no. 4, pp. 1–4. (in Russ.).

10. Shakhmatov M.V., Erofeev V.V. Stress State and Strength of Welded Joints with Variable Mechanical Properties of the Metal in the Soft Region. *Svarochnoe proizvodstvo*, 1982, no. 3, pp. 6–7. (in Russ.).

11. Kogut N.S., Shakhmatov M.V., Erofeev V.V. *Nesushchaya sposobnost' svarnykh soedinenii* (Load-Carrying Capacity of Welded Joints). Lvov, Svit Publ., 1991, 184 p. (in Russ.).

12. Shakhmatov M.V., Erofeev V.V. *Inzhenernye raschety svarnykh obolochechnykh konstruktsii* (Engineering Calculations of Welded Shell Structures). Chelyabinsk, ChGTU, 1995, 229 p. (in Russ.).

13. Kim Y.-J., Schwalbe K.-H. Numerical Analysis of Strength Mis-match Effect on Local Stresses for Ideally Plastic Material. *Engineering Fracture Mechanics*, 2004, Vol. 71, pp. 1177–1199. DOI:10.1016/S0013-7944(03)00141-3

14. Schnabl S., Saje M., Turk G., Planinc I. Analytic Solution of Two-layer Beam Taking into Account Interlayer Slip and Shear Deformation. *Journal of Structural Engineering*, 2007, Vol. 133, Iss. 6, pp. 886–894. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(2007)133:6(886)

15. Kozak D., Gubeljak N., Konjatic P., Sertic J. Yield Load Solutions of Heterogeneous Welded Joints. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2009, Vol. 86, pp. 807–812. DOI:10.1016/j.ijpvp.2009.11.012

16. Dilman V.L. *Matematicheskie modeli napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek* (Mathematical Models of the Stress State of Heterogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells). Chelyabinsk, South Ural State University Publishing House, 2007, 202 p. (in Russ.).

17. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyanii myagkikh prosloek v neodnorodnykh soedineniyakh* (Mathematical Modeling of Critical States of Soft Interlayers in Heterogeneous Joints). Chelyabinsk, Publishing Center of South Ural State University, 2011, 276 p. (in Russ.).

18. Dilman V.L. Study of Mathematical Models of the Stress State of Thin-Walled Heterogeneous Cylindrical Shells by Analytical Methods. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2009, Iss. 3, no. 17(150), pp. 36–58. (in Russ.).

19. Dilman, V.L. Stress State and Strength of a Heterogeneous Plastic Strip with a Defect in the Stronger Part. *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, 2010, no. 2, pp. 89–102. (in Russ.)

20. Dilman V.L., Nosacheva A.I. Numerical Analysis of Stresses on an Inclined Contact Surface under Tension of a Discretely Heterogeneous Body. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2012, Iss. 14, no. 40 (299), pp. 164–168. (in Russ.).

21. Nosacheva A.I. Mathematical Modeling of the Stress State of a Heterogeneous Strip with an External Macrodefect. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2013, Vol. 6, no. 3, pp. 79–84. (in Russ.)

22. Nosacheva A.I. Analysis of the Critical State of a Discretely Heterogeneous Strip with an Inclined Contact Boundary and an External Macrodefect in the Stronger Part. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2019, Vol. 11, no. 4, pp. 62–72. (in Russ.).

23. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Stress State of a Plastic Layer with Variable Strength through the Thickness. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2000, no. 1, pp. 141–148. (in Russ.).

24. Dilman V.L., Karpeta T.V. Stress State of a Plastic Layer with a Thickness-Variable Yield Stress under Plane Deformation. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2013, no. 8, pp. 34–43. (in Russ.).

25. Dilman V.L., Trunova D.A. Research into Functional Equation Arising from Mathematical Modeling of Critical States of Heterogeneous Soft Layers. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, Vol. 2, Iss. 2, pp. 19–24. DOI:10.14529/jcem150203

26. Dilman V.L., Kashcheeva A.E. On the Internal Inverse Boundary Problem in the Study of Critical Conditions of Discrete–Continuous Heterogeneous Joints. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2025, Vol. 12, no. 3, pp. 3–13. DOI: 10.14529/jcem250301

27. Lee H., Kim Ch., Song J.H. An Evaluation of Global and Local Tensile Properties of Friction-Stir Welded DP980 Dual-Phase Steel Joints Using a Digital Image Correlation Method. Materials, 2015, Vol. 8, Iss. 12, pp. 8424–8436. DOI: 10.3390/ma8125467

28. Shehbaz T., Khan F.N., Junaid M., Haider J. Investigating Nanoindentation Creep Behavior of Pulsed-TIG Welded Inconel 718 and Commercially Pure Titanium using a Vanadium Interlayer. *Metals*, 2021, Vol. 11, Iss. 9, pp. 1492–1515. DOI: 10.3390/met11091492

29. Koval'chuk G.I. On the Problem of Loss of Stability of Plastic Deformation of Shells. *Problemy Prochnosti*, 1983, no. 5, pp. 11–16. (in Russ.).

30. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* (Systems of Quasi-Linear Equations and Their Applications to Gas Dynamics). Moscow, Nauka Publ., 1978, 688 p. (in Russ.).

31. Genki G.O. *O nekotorykh staticheski opredelimykh sluchayakh ravnovesiya v plasticheskikh sredakh. Teoriya plastichnosti* (On Some Statically Determinate Cases of Equilibrium in Plastic Media. Theory of Plasticity). Moscow, In. lit. Publ., 1948, pp. 80–101. (in Russ.). [Hencky H. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1923, Bd. 3, pp. 241–251.]

32. Dil'man V.L., Kashcheeva A.E. On an Analytical Model of the Critical State of a Heterogeneous Plastic Layer: a Closed-Form Solution for a Special Case. *Computational Mathematics and Modeling*, 2026, Vol. 37, pp. 1019–1032. DOI: 10.1007/s10598-026-09734-3

***Received October 7, 2026***

**Information about the authors**

Dilman Valery Leizerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: dilmanvl@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497.

Kashcheeva Alexandra Evgenievna is Post-graduate Student, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kashcheevaae@susu.ru.

УДК 519.833.2+517.977.8 DOI: 10.14529/mmph260402

# СВОЙСТВА РАВНОВЕСИЙ ПО НЭШУ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

***В.И. Жуковский[1], Л.В. Жуковская[2], К.Н. Кудрявцев[3], И.С. Стабулит[3]***
*[1] Московский государственный университет, г. Москва, Российская Федерация*
*[2] Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация*
*[3] Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Российская Федерация*
*E-mail: knkudryavtsev@fa.ru*

**Аннотация. Исследуются свойства равновесий по Нэшу в дифференциальной игре двух лиц с ненулевой суммой и постоянным запаздыванием времени. Показано, что равновесные стратегии могут быть не единственными и не всегда эффективными с точки зрения совместного улучшения критериев обоих игроков. Указаны способы преодоления этих недостатков. При этом используется метод функций Ляпунова–Четаева, развитый Н.Н. Красовским применительно к задачам аналитического конструирования оптимального регулятора в системах с запаздыванием времени. Сформулированы достаточные условия существования допустимых стратегий, которые одновременно уменьшают значения функционалов выигрыша обоих игроков по сравнению с равновесными значениями. Для линейных игр с квадратичными функционалами выигрыша эти условия сведены к проверке определённой отрицательности матричных функций, зависящих от решений систем дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Получены явные формы улучшающих стратегий в частном случае, когда матрицы управления и весовые матрицы критериев совпадают с единичной. Кроме того, выделен класс равновесий, обладающих свойством оптимальности по Парето: для них любое совместное отклонение не может одновременно улучшить критерии обоих игроков. Указаны достаточные условия Парето-оптимальности и полуэффективности равновесных стратегий в линейно-квадратичных играх с запаздыванием. Результаты могут использоваться при проектировании устойчивых стратегий в мультиагентных системах, экономических моделях и задачах управления с задержкой обратной связи.**

*Ключевые слова: дифференциальные игры; равновесие по Нэшу; оптимальность по Парето, запаздывание времени.*

## Введение

Стремительное развитие мультиагентных систем и распределенных цифровых платформ приводит к необходимости разработки математических методов управления динамическими процессами, функционирующими в условиях неопределенности и задержки поступающей информации. Такие модели могут описываться в рамках теории дифференциальных игр и теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. Эти модели возникают в совершенно разных областях, начиная от взаимодействия агентов в экономике и заканчивая моделированием взаимодействия беспилотных аппаратов в самоорганизующихся сетевых структурах. Задержка поступающей информации возникает в задачах цифровизации управления энергосервисными компаниями [1], в задачах синтеза опережающих социально-экономических индикаторов [2, 3], при анализе поведения экономических агентов в сетевых и пространственных структурах [4, 5]. В рамках теории дифференциальных игр исследуются модели трансграничного управления в условиях задержек обратной связи в распределенных системах [6] и многие другие задачи.

При этом, как показывает практика бескоалиционных взаимодействий, традиционное равновесие по Нэшу [7] далеко не всегда существует в чистых стратегиях или оказывается эффективным. В таких случаях для обеспечения устойчивости распределенных интеллектуальных сред целесообразно переходить к альтернативным концепциям, например, к построению равновесий в рамках механизмов «угроз и контругроз» [8] или равновесия по Бержу [9].

Настоящая работа посвящена анализу недостатков равновесных стратегий в дифференциальной игре двух лиц с ненулевой суммой и постоянным запаздыванием времени, а также указанию способов их преодоления с использованием метода функций Ляпунова–Четаева [10, 11].

**1. Постановка задачи**

Предположим, что динамика рассматриваемого процесса описывается системой уравнений с запаздыванием времени

$$\frac{dx(t)}{dt} = X\left[t, x(t), x(t-\tau), u^{(1)}, u^{(2)}\right], \tag{1}$$

где $x$ – $n$-вектор; вектор $x(t)$ характеризует положение системы в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в момент $t \in [t_0, T]$; $t_0 \geq 0$ и $T > t_0$ – фиксированные моменты начала и окончания игры; $u^{(1)} \in \mathbb{R}^{k_1}$ ($u^{(2)} \in \mathbb{R}^{k_2}$) – управляющие воздействия, выбор которых находится в распоряжении первого (второго) игрока. Так как в системе (1) имеется запаздывание $\tau = \text{const} > 0$, то для определения движения системы (1) следует задать начальные условия

$$x(t_0 + \theta) = x_0(\theta), \ (-\tau \leq \theta \leq 0). \tag{2}$$

Следуя Н.Н. Красовскому [12], в качестве элемента траектории системы (1), соответствующего моменту времени $t \in [t_0, T]$, будем рассматривать отрезок $x(t+\theta)$ этой траектории при $-\tau \leq \theta \leq 0$ и изучать движение системы в пространстве $C_{[-\tau,0]}$ непрерывных функций $x(\theta)$. Элементы траектории системы (1) из $C_{[-\tau,0]}$ будем обозначать $x_t(\theta)$, где $\theta \in [-\tau, 0]$, $t \in [t_0, T]$; норму зададим равенством $\|x(\theta)\| = \sup_{\theta} |x(\theta)|$, где $|\cdot|$ означает евклидову норму.

Предполагаем, что игра – с полной информацией и без дискриминации. Однако наличие запаздывания приводит к тому, что при формировании управляющих воздействий в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ игроки должны иметь информацию о всей кривой $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ на предыдущем отрезке времени $-\tau \leq \theta \leq 0$. Поэтому в качестве допустимой стратегии $u^{(i)}$ $i$-го игрока ($i = 1,2$) рассматриваем функционалы $U^{(i)}[t, x(\theta)]$, определенные на $x(\theta) \in C_{[-\tau,0]}$ и непрерывные по $x(\theta)$ и $t \in [t_0, T]$. Если вместо $x(\theta)$ подставить элемент траектории $x_t(\theta)$, соответствующий моменту времени $t$, то получим функции времени $u^{(i)}(t) = U^{(i)}[t, x_t(\theta)]$. Пусть при этом вектор-функции $u^{(i)}(t)$ непрерывны при $t \in [t_0, T]$.

Предполагаем, что правые части (1) при любых кусочно-непрерывных начальных функциях (2) и допустимых стратегиях $U = \{U^{(1)}, U^{(2)}\}$ удовлетворяют некоторым общим условиям существования и единственности решения $x(t) = x_t(0)$ при $t \in [t_0, T]$; $\frac{dx(t)}{dt}$ в (1) понимается как правая производная.

Пусть функция выигрыша $i$-го игрока ($i = 1,2$) имеет вид

$$J_i\left(U^{(1)}, U^{(2)}\right) = \Phi_i\left[T, x(T)\right] + \int_{t_0}^{T} f_i\left(t, x(t), U\left[t, x_t(\theta)\right]\right) dt, \ (i = 1,2), \tag{3}$$

где функции $\Phi_i$ и $f_i$ непрерывны по совокупности аргументов. При выбранной допустимой стратегии $u(t) = U[t, x(\theta)] = \left\{U^{(1)}[t, x(\theta)], U^{(2)}[t, x(\theta)]\right\}$ величина $J_i$ является функционалом от начальных условий (2); в (3) $x(t) = x_t(0)$ решение (1)–(2) при $u = U[t, x(\theta)]$.

Каждый игрок стремится по возможности уменьшить значение своей функции выигрыша путем подходящего выбора своего допустимого управления.

В современной теории бескоалиционных игр считается рациональным для всех игроков выбор равновесных стратегий $U_*\left[t,x(\theta)\right]=\left\{U_*^{(1)}\left[t,x(\theta)\right],U_*^{(2)}\left[t,x(\theta)\right]\right\}$, т. е. таких, что

$$J_1(U_*)\le J_1\left(U^{(1)},U_*^{(2)}\right),\ \ J_2(U_*)\le J_2\left(U_*^{(1)},U^{(2)}\right) \tag{4}$$

для любых допустимых $U^{(i)}=U^{(i)}\left[t,x(\theta)\right],\ (i=1,2)$.

В этом случае (1)–(4) является бескоалиционной игрой двух лиц с ненулевой суммой и запаздыванием времени. Рациональность выбора игроками равновесных стратегий следует из того, что отход одного игрока от равновесной стратегии, в то время как другой ее придерживается, не сулит ему выгоды.

Однако равновесность справедливо подвергается критике [13]. Одно из самых больших затруднений использования равновесных стратегий – их, как правило, неединственность. Тогда игрокам следует договариваться, какую из равновесных стратегий им использовать, т. е. в игре возрастает объем информации, предоставленной каждому из участников игры. В противном случае если каждый выберет ту равновесную стратегию, которая ему выгодна, то все игроки, вообще говоря, могут получить значения функции выигрыша, большие, чем равновесные (например, [13, с. 71]).

Если у игроков есть возможность договориться о совместном выборе стратегий, то у них, как показано ниже, вообще говоря, существуют стратегии, доставляющие им значения функций выигрыша меньшие, чем равновесные.

В случае же единственности равновесных управлений, например, в игре трех лиц с ненулевой суммой, два игрока могут объединиться в коалицию и применить стратегию «контругрозы» [8, 14], которая приведет к большему значению функции выигрыша оставшегося игрока, а участники коалиции получат значение функции выигрыша, вообще говоря, меньшее, чем равновесное.

В игре двух лиц с ненулевой суммой в случае единственности равновесных стратегий один игрок, придерживаясь равновесной стратегии, может «заставить» другого ее придерживаться. Это следует из определения равновесных стратегий, т. к. другой игрок, отклоняясь от равновесной стратегии, получает значение функции выигрыша большее, чем равновесное.

Из приведенных рассуждений следуют две задачи. Во-первых, каким образом, зная равновесные стратегии, обоим игрокам выбрать одновременно такие стратегии, которые их приведут к значениям функций выигрыша меньшим, чем равновесные. Во-вторых, в каких случаях одновременное отклонение от равновесных стратегий приведет лишь к увеличению функций выигрыша обоих игроков и поэтому для игроков невыгодно.

Эти две задачи и рассматриваются в статье. Приведем достаточные условия равновесности стратегии из [15], используемые в дальнейшем.

Рассмотрим два функционала $V_i\left[t,x(\theta)\right]\ (i=1,2)$, определенных и непрерывных в $C_{[-\tau,0]}\times\left[t_0,T\right]$, и таких, что если вместо $x(\theta)$ подставить элемент траектории (1) $x_t(\theta)$, то полученные функции времени $v_i(t)=V_i\left[t,x_t(\theta)\right]$ непрерывны при $t\in\left[t_0,T\right]$. Производную от функционала $V_i$ по времени в силу системы (1) $\left(\dfrac{dV_i}{dt}\right)_U$ определим как правую производную функции $v_i(t)$:

$$\left(\frac{dV_i}{dt}\right)_U=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{v_i(t+\Delta t)-v_i(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{V_i\left[t+\Delta t,x_{t+\Delta t}(\theta)\right]-V_i\left[t,x(\theta)\right]}{\Delta t}$$

при выбранной допустимой стратегии $U=\left\{U^{(1)}\left[t,x(\theta)\right],U^{(2)}\left[t,x(\theta)\right]\right\}$. Предполагаем, что этот предел существует и конечен для всех $t\in\left[t_0,T\right]$.

Пусть существуют функционалы $V_i\left[t,x(\theta)\right]$, $U_*^{(i)}\left[t,x(\theta)\right]\ (i=1,2)$ такие, что при всех $x(\theta)\in C_{[-\tau,0]},t\in\left[t_0,T\right]$ выполняются условия

$$\min_{U^{(1)}}\left(\frac{dV_1}{dt}+f_1\right)_{U^{(1)}U_*^{(2)}}=\left(\frac{dV_1}{dt}+f_1\right)_{U_*}=0;\quad \min_{U^{(2)}}\left(\frac{dV_2}{dt}+f_2\right)_{U_*^{(1)}U^{(2)}}=\left(\frac{dV_2}{dt}+f_2\right)_{U_*}=0; \tag{5}$$

$$V_i\left(T,x_T(\theta)\right)=\Phi_i\left(T,x(T)\right). \tag{6}$$

**Теорема 1.** Если возможно указать функционалы $V_i\left[t,x(\theta)\right]$ и $U_*^{(i)}\left[t,x(\theta)\right]$, удовлетворяющие условиям (5)–(6), то $U_*^{(i)}\left[t,x(\theta)\right]$ являются равновесными стратегиями дифференциальной игры (1)–(4). Оптимальное значение (выигрыш) $i$-го игрока есть $J_i\left(U_*\right)=V_i\left[t_0,x_0(\theta)\right]$.

Далее предполагаем, что с помощью теоремы 1 найдены равновесные стратегии $U_*=\left\{U_*^{(1)},U_*^{(2)}\right\}$ и функционалы Айзекса–Беллмана $V_i\left[t,x(\theta)\right]$, $(i=1,2)$. Определим с их помощью функционалы $W_i\left[t,x(\theta),U\right]=\left(\frac{dV_i}{dt}+f_i\right)_U$, $(i=1,2)$.

## 2. Достаточные условия «улучшаемости» равновесных стратегий

**Теорема 2.** Если для дифференциальной игры (1)–(4) существуют допустимые стратегии $\bar{U}\left[t,x(\theta)\right]=\left\{\bar{U}^{(1)},\bar{U}^{(2)}\right\}$ такие, что при всех $t\in\left[t_0,T\right]$ и $x(\theta)\in C_{[-\tau,0]}$, $x(\theta)\neq 0$ имеют место неравенства

$$W_i\left[t,x(\theta),\bar{U}\left[t,x(\theta)\right]\right]<0,\quad (i=1,2), \tag{7}$$

то $J_i\left(\bar{U}\right)<J_i\left(U_*\right),(i=1,2)$.

*Доказательство.* Пусть $\bar{x}(\theta)$ – решение (1)–(2) при $U=\bar{U}\left[t,x(\theta)\right]$. Интегрируя обе части (7) вдоль решения $\bar{x}_t(\theta)$ системы (1)–(2) при $U=\bar{U}$ в пределах от $t_0$ до $T$, получаем

$$\int_{t_0}^{T}\left(\frac{dV_i}{dt}+f_i\right)_{\bar{U}}dt=v_i(T)-v_i(t_0)+\int_{t_0}^{T}f_i\left(t,\bar{x}_t(\theta),\bar{U}\left[t,\bar{x}_t(\theta)\right]\right)dt=$$

$$=V_i\left[T,\bar{x}_T(\theta)\right]-V_i\left[t_0,x_0(\theta)\right]+\int_{t_0}^{T}f_i\left(t,\bar{x}_t(\theta),\bar{U}\left[t,\bar{x}_t(\theta)\right]\right)dt<0.$$

В силу (6)

$$\Phi_i\left[T,\bar{x}(T)\right]-V_i\left[t_0,x_0(\theta)\right]+\int_{t_0}^{T}f_i\left(t,\bar{x}_t(\theta),\bar{U}\left[t,\bar{x}_t(\theta)\right]\right)dt<0.$$

Но в силу теоремы 1 $J_i\left(U_*\right)=V_i\left[t_0,x_0(\theta)\right]$, тогда

$$\Phi_i\left[T,\bar{x}(T)\right]+\int_{t_0}^{T}f_i\left(t,\bar{x}_t(\theta),\bar{U}\left[t,\bar{x}_t(\theta)\right]\right)dt<J_i\left(U_*\right).$$

Отсюда $J_i\left(\bar{U}\right)<J_i\left(U_*\right)$.

**Замечание 1.** Таким образом, задача нахождения стратегий, «улучшающих» равновесные значения функций выигрыша, сводится к определению решения $\bar{U}$ системы неравенств (7), а вопрос существования таких стратегий приводится к исследованию совместности системы (7). В общем случае, очевидно, указанная задача трудная, однако в некоторых частных случаях эти условия можно выписать в явном виде. Пример подобной задачи и рассматривается далее.

Применим полученное утверждение к линейным играм с квадратичной функцией выигрыша. Именно пусть система (1) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+C(t)x(t-\tau)+B_1(t)u^{(1)}+B_2(t)u^{(2)}, \tag{8}$$

$$x(t_0+\theta)=x_0(\theta),$$

а функция выигрыша $i$-го игрока $(i=1,2)$

$$J_i\left(u^{(1)},u^{(2)}\right)=x'(T)R_ix(T)+\int_{t_0}^{T}\left[x'(t)P_i(t)x(t)+\sum_{k=1}^{2}\left(u^{(k)}\right)'Q_i^{(k)}(t)u^{(k)}\right]dt. \tag{9}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $u^{(i)}\in\mathbb{R}^{k_i}$; штрих сверху означает операцию транспонирования; элементы матриц $A(t)$, $C(t)$, $B_i(t)$, $P_i(t)$, $Q_i(t)$ непрерывны по $t\in[t_0,T]$, а $R_i$ – постоянны; матрицы $R_i,P_i(t)$, $Q_i(t)$ – симметричны, а формы $\left(u^{(k)}\right)'Q_i^{(k)}(t)u^{(k)},(i,k=1,2)$ – определенно-положительны. Из [7] следует

**Утверждение 1.** Если системы

$$\begin{gathered}\frac{d\Theta_i}{dt}+A'\Theta_i+\Theta_iA+\Lambda_i(t,0)+P_i+\\ +\sum_{k=1}^{2}\left[\Theta_kB_k\left[{}^{(k)}\right]^{-1}Q_i^{(k)}\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Theta_k-2\Theta_kB_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Theta_i\right]=0,\\ \frac{\partial\Lambda_i(t,\theta)}{\partial t}-\frac{\partial\Lambda_i(t,\theta)}{\partial\theta}+A'\Lambda_i(t,\theta)+\Xi_i(t,\theta,0)+\Xi_i(t,0,\theta)+\\ +\sum_{k=1}^{2}\left[\Theta_kB_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}Q_i^{(k)}\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_k(t,\theta)-\Theta_kB_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_i(t,\theta)-\right.\\ \left.-\Theta_iB_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_k(t,\theta)\right]=0,\\ \frac{\partial\Xi_i(t,\theta,\rho)}{\partial t}-\frac{\partial\Xi_i(t,\theta,\rho)}{\partial\theta}-\frac{\partial\Xi_i(t,\theta,\rho)}{\partial\rho}+\\ +\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{1}{4}\Lambda_k(t,\theta)B_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}Q_i^{(k)}\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_k(t,\rho)-\right.\\ \left.-\frac{1}{2}\Lambda_k(t,\theta)B_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_i(t,\rho)\right]=0\end{gathered} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$2C'\Theta_i-\Lambda_i(t,-\tau)=0,\ \Theta_i(T)=R_i,\ \Lambda_i(T,\theta)=0,$$
$$\Xi_i(T,\theta,\rho)=0,\ C'\Lambda_i(t,\theta)-\Xi_i(t,\theta,-\tau)-\Xi_i(t,-\tau,\theta)=0$$

при $i=1,2$ имеют решение в виде симметричных, непрерывных при $t\in[t_0,T]$, $\theta,\rho\in[-\tau,0]$ матриц $\Theta_i(t),\Lambda_i(t,\theta),\Xi_i(t,\theta,\rho)$ порядка $n\times n$, то равновесные стратегии игроков в игре, описываемой (8)–(9), имеют вид

$$U_*^{(i)}=-\frac{1}{2}\left[Q_i^{(i)}\right]^{-1}B_i'\left[2\Theta_ix(0)+\int_{-\tau}^{0}\Lambda_i(t,\theta)x(\theta)d\theta\right],\ (i=1,2).$$

Равновесные значения функционалов

$$J_i(U_*)=x'(t_0)\Theta_i(t_0)x(t_0)+x'(t_0)\int_{-\tau}^{0}\Lambda_i(t_0,\theta)x_0(\theta)d\theta+$$
$$+\int_{-\tau}^{0}d\theta\int_{-\tau}^{0}x_0'(\theta)\Xi_i(t_0,\theta,\rho)x_0(\rho)d\rho,\ (i=1,2).$$

Далее предполагаем, что матрицы $\Theta_i$, $\Lambda_i$, $\Xi_i$ найдены (пример рассмотрен в [15]).

Рассмотрим стратегии, доставляющие функциям выигрыша значения меньшие, чем равновесные, в классе

$$\bar{U}^{(k)}\left[t,x(0)\right]=K_k(t)x(0)+\int_{-\tau}^{0}P_k(t,\theta)x(\theta)d\theta+U_*^{(k)}\left[t,x(\theta)\right],\quad (i=1,2), \tag{11}$$

где $n\times n$-матрицы $K_k(t)$ и $P_k(t,\theta)$ пока предполагаем лишь непрерывными и симметричными при $t\in[t_0,T]$ и $\theta\in[-\tau,0]$.

Определим условия, которым должны удовлетворять указанные матрицы, чтобы $J_k(\bar{U})<J_k(U_*)(k=1,2)$. С учетом равенств утверждения 1 требования теоремы 2 сведутся к выполнению условий

$$W_i\left[t,x(\theta),\bar{U}\left[t,x(\theta)\right]\right]=\int_{-\tau}^{0}d\theta\int_{-\tau}^{0}\Big(x'(0)h_{11}^{(i)}(t)x(0)+$$
$$+2x'(0)h_{12}^{(i)}(t,\theta)x(\theta)+x'(\theta)h_{22}^{(i)}(t,\theta,\rho)x(\rho)\Big)d\rho<0, \tag{12}$$

где

$$h_{11}^{(i)}(t)=\sum_{k=1}^{2}\left[2K_k\left(B_k'\Theta_i-Q_i^{(k)}\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Theta_k\right)+K_kQ_i^{(k)}K_k\right],$$
$$h_{12}^{(i)}(t,\theta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}[K_kB_k'\Lambda_i(t,\theta)+2\Theta_iB_kP_k(t,\theta)+2K_kQ_i^{(k)}(P_k(t,\theta)-$$
$$-\frac{1}{2}\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_k(t,\theta))-2\Theta_kB_k\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}Q_i^{(k)}P_k(t,\theta)],$$
$$h_{22}^{(i)}(t,\theta,\rho)=\sum_{k=1}^{2}[P_k(t,\theta)B_k'\Lambda_i(t,\rho)+P_k(t,\theta)Q_i^{(k)}P_k(t,\rho)-$$
$$-P_k(t,\theta)Q_i^{(k)}\left[Q_k^{(k)}\right]^{-1}B_k'\Lambda_k(t,\rho)].$$

Так как $\theta,\rho\in[-\tau,0]$, то имеет место равенство $h_{22}^{(i)}(t,\theta,\rho)=h_{22}^{(i)}(t,\rho,\theta)$. Введем матрицу $H^{(i)}(t,\theta,\rho)=\begin{bmatrix}h_{11}^{(i)} & h_{12}^{(i)}\\ h_{12}^{(i)} & h_{22}^{(i)}\end{bmatrix},(i=1,2)$. Тогда из (12) следует

**Утверждение 2.** Если существуют матрицы $K_k(t)$ и $P_k(t,\theta)$ такие, что матрицы $H^{(i)}(t,\theta,\rho)$ $(i=1,2)$ определенно-отрицательны при всех $t\in[t_0,T]$, $\theta,\rho\in[-\tau,0]$, то для стратегий (11) имеют место неравенства $J_i(\bar{U})<J_i(U_*)(i=1,2)$, т. е. стратегии $\bar{U}$ доставляют функциям выигрыша обоих игроков значения меньшие, чем равновесные.

**Замечание 2.** Определение элементов матриц $K_k$ и $P_k$ следует проводить, решая систему нелинейных неравенств

$$(-1)^p H_p^{(i)}>0,\quad (p=1,\ldots,2n), \tag{13}$$

где $H_p$ – главные миноры матрицы $H$; (13) – достаточные условия определенной отрицательности формы $y'Hy$ (условия Сильвестра), где $y=\{x(0),x(\theta)\}$.

В некоторых случаях, как показывает рассмотренный далее пример, для матриц $K_k$ и $P_k$ можно указать явный вид.

**Пример.** Пусть система (8) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+C(t)x(t-\tau)+u^{(1)}+u^{(2)},\quad x(t_0+\theta)=x_0(\theta), \tag{14}$$

а функция выигрыша

$$J_i\left(u^{(1)},u^{(2)}\right)=x'(T)R_ix(T)+\int_{t_0}^{T}\left[x'(t)P_i(t)x(t)+\sum_{k=1}^{2}\left(u^{(k)}\right)'u^{(k)}\right]dt,\ \ (i=1,2),\tag{15}$$

т. е. в отличие от (8) и (9) $B_k(t)=Q_i^{(k)}(t)=E$, где $E$ – единичная матрица порядка $n\times n$.

Предположим, что найдены матрицы $\Theta_i(t),\Lambda_i(t,\theta)$ и $\Xi_i(t,\theta,\rho)$ – решения системы (10). Для рассматриваемого частного случая (14)–(15) при ряде ограничений это решение можно выписать в явном виде, аналогично примеру из [15].

**Утверждение 3.** Если матрица $\Theta_1(t)-\Theta_2(t)$ не вырождена при $t\in[t_0,T]$, то стратегии

$$\begin{aligned}\bar{U}^{(1)}\left[t,x(\theta)\right]&=-\frac{1}{2}\left[\left(\Theta_1(t)+\Theta_2(t)\right)x(0)+\int_{-\tau}^{0}\Lambda_2(t,\theta)x(\theta)d\theta\right];\\ \bar{U}^{(2)}\left[t,x(\theta)\right]&=-\frac{1}{2}\left[\left(\Theta_1(t)+\Theta_2(t)\right)x(0)+\int_{-\tau}^{0}\Lambda_1(t,\theta)x(\theta)d\theta\right]\end{aligned}\tag{16}$$

таковы, что $J_i\left(\bar{U}\right)<J_i\left(U_*\right)(i=1,2)$.

*Доказательство.* В рассматриваемом случае матрицы $h_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$h_{11}^{(1)}=K_1^2+2K_2\left(\Theta_1-\Theta_2\right)+K_2^2,h_{11}^{(2)}=K_1^2+2K_1\left(\Theta_2-\Theta_1\right)+K_2^2;$$

$$h_{12}^{(i)}=\sum_{k=1}^{2}\left[2\left(\Theta_i-\Theta_k\right)P_k+K_k\left(\Lambda_i+2P_k-2\Lambda_k\right)\right];$$

$$h_{22}^{(1)}=P_1(t,\theta)P_1(t,\rho)+P_2(t,\theta)\left[\Lambda_1(t,\rho)-\Lambda_2(t,\rho)\right]+P_2(t,\theta)P_2(t,\rho);$$

$$h_{22}^{(2)}=P_1(t,\theta)P_1(t,\rho)+P_1(t,\theta)\left[\Lambda_2(t,\rho)-\Lambda_1(t,\rho)\right]+P_2(t,\theta)P_2(t,\rho).$$

Положим

$$K_1(t)=\frac{1}{2}\left[\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\right],\ K_2(t)=-\frac{1}{2}\left[\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\right],$$

$$P_1(t,\theta)=\frac{1}{2}\left[\Lambda_1(t,\theta)-\Lambda_2(t,\theta)\right],\ P_2(t,\theta)=-\frac{1}{2}\left[\Lambda_1(t,\theta)-\Lambda_2(t,\theta)\right].$$

Тогда

$$h_{11}^{(1)}=h_{11}^{(2)}=-\frac{1}{2}\left[\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\right]^2;$$

$$h_{12}^{(1)}=h_{12}^{(2)}=\left[\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\right]\left[P_1(t,\theta)-P_2(t,\theta)-\Lambda_1(t,\theta)+\Lambda_2(t,\theta)\right]\equiv 0;$$

$$\begin{aligned}h_{22}^{(1)}=h_{22}^{(2)}&=\frac{1}{4}\left[\Lambda_1(t,\theta)-\Lambda_2(t,\theta)\right]\left[\Lambda_1(t,\rho)-\Lambda_2(t,\rho)\right]-\\ &-\frac{1}{2}\left[\Lambda_1(t,\theta)-\Lambda_2(t,\theta)\right]\left[\Lambda_1(t,\rho)-\Lambda_2(t,\rho)\right]+\\ &+\frac{1}{4}\left[\Lambda_1(t,\theta)-\Lambda_2(t,\theta)\right]\left[\Lambda_1(t,\rho)-\Lambda_2(t,\rho)\right]\equiv 0.\end{aligned}$$

При выбранных $K_k(t)$ и $P_k(t,\theta)$ имеем

$$W_i\left[t,x(\theta),\bar{U}\left[t,x(\theta)\right]\right]=-\frac{1}{2}x'(0)\left[\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\right]^2x(0).$$

Матрица $\left[\Theta_1-\Theta_2\right]^2$, вообще говоря, не является определенно положительной при $t\in[t_0,T]$. Однако в силу невырожденности $\Theta_1-\Theta_2$ имеют место неравенства $x'\left[\Theta_1-\Theta_2\right]^2x>0$ при

$t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $x \neq 0$ [16, с. 101]. Подставляя указанные $K_i$ в (11), получаем (16). В силу теоремы 2 и утверждения 1 имеем $J_i(\bar{U}) < J_i(U_*)(i = 1,2)$.

**Замечание 3.** Необходимые условия существования стратегий, «улучшающих» равновесные значения функций выигрыша (аналогичные принципу максимума Л.С. Понтрягина) для систем без запаздывания, приведены в [17]. Предлагаемый в работе подход для систем без запаздывания был предложен в [18].

### 3. Об оптимальности по Парето равновесных стратегий

В предыдущем пункте были рассмотрены методы, позволяющие находить стратегии, «улучшающие» равновесные значения функций выигрыша обоих игроков одновременно. В настоящем параграфе выделены равновесные стратегии, которые нельзя «улучшить». Именно отклонение от них одновременно для обоих игроков невыгодно. И если при этом отклонении один игрок и выиграет, то второй обязательно проиграет. Таким образом, далее выделяются стратегии, обладающие не только индивидуальной устойчивостью (в силу равновесности), но и групповой устойчивостью (оптимальностью по Парето). Если такие стратегии существуют (достаточное условие сформулировано ниже), то обоим игрокам, если они сотрудничают, выгодно их придерживаться.

**Определение 1.** Допустимая стратегия $U_p[t, x(\theta)]$ называется оптимальной по Парето в дифференциальной игре (1)–(3), если не существует допустимых стратегий $U[t, x(\theta)]$ таких, что

$$J_i(U_p + U) \leq J_i(U_p), \ (i = 1,2), \tag{17}$$

причем строгое неравенство имеет место при хотя бы одном $i = 1,2$.

Стратегии, оптимальные по Парето, обладают устойчивостью в следующем смысле: отклонение от них хотя и может привести к «улучшению» значения функции выигрыша одного игрока, но одновременно с этим обязательно «ухудшает» значение функции выигрыша другого. При увеличении числа игроков (более двух) значение этой устойчивости, естественно, уменьшается, ибо становится весьма вероятным объединение части игроков в коалиции, что может быть членам коалиции весьма выгодно. В задачах экономики термин «оптимальность по Парето» иногда заменяется на «эффективность» (эффективные стратегии, эффективное поведение и т. д.).

**Определение 2.** Допустимая стратегия $U_{pp}[t, x(\theta)]$ называется полуэффективной в дифференциальной игре (1)–(3), если не существует допустимых стратегий $U[t, x(\theta)]$, таких что

$$J_i(U_{pp} + U) < J_i(U_{pp}), \ (i = 1,2).$$

Полуэффективная стратегия обладает «грубой» устойчивостью в следующем смысле: «значительное» отклонение невыгодно. Ибо при этом, как и в случае стратегий оптимальных по Парето, при улучшении значения одного из критериев второй обязательно «ухудшится».

Далее, как и в предыдущем пункте, предполагаем, что, следуя методу [15], найдены равновесные стратегии $U_* = \{U_*^{(1)}, U_*^{(2)}\}$ и соответствующие функционалы $V_i[t, x(\theta)]$, $(i = 1,2)$. Аналогично

$$W_i[t, x(\theta), U[t, x(\theta)]] = \left(\frac{dV_i}{dt} + f_i\right)_U.$$

**Теорема 3.** Если при любых $t \in [t_0, T], x(\theta) \in C_{[-\tau,0]}$ и допустимых стратегиях $U[t, x(\theta)]$ существуют положительные постоянные $\alpha_1$ и $\alpha_2$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i W_i[t, x(\theta), U_*[t, x(\theta)] + U[t, x(\theta)]] \geq 0, \tag{18}$$

то равновесная стратегия $U_*$ является одновременно оптимальной по Парето.

*Доказательство.* Из [15] следует, что

$$J_i(U_*) = V_i[t_0, x_0(\theta)], \ (i = 1,2). \tag{19}$$

Подставив в левую часть (18) вместо $x(\theta)$ решение $x_t(\theta)$ системы (1) при стратегиях $U_* + U$, получим

$$\sum_{i=1}^{2}\alpha_i W_i\left[t, x_t(\theta), U_*\left[t, x_t(\theta)\right] + U\left[t, x_t(\theta)\right]\right] \geq 0. \tag{20}$$

Интегрируя обе части (20) в пределах от $t_0$ до $T$ и используя [15] $V_i\left[T, x_T(\theta)\right] = \Phi_i\left[T, x(T)\right]$, находим

$$\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\left(-V_i\left[t_0, x_0(\theta)\right] + \Phi_i\left[T, x(T)\right] + \int_{t_0}^{T} f_i\left(t, x_t(\theta), U_*\left[t, x_t(\theta)\right] + U\left[t, x_t(\theta)\right]\right)dt\right) \geq 0.$$

Отсюда и из (19)

$$\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\left[J_i(U_* + U) - J_i(U_*)\right] \geq 0. \tag{21}$$

Покажем, что выполнение (21) достаточно, чтобы система (17) была несовместной. Предположим противное: пусть (17) совместна и $\overset{\vee}{U}\left[t, x(\theta)\right]$ – одно из ее решений. Тогда, умножая последовательно первое неравенство (17) на $\alpha_1$, второе на $\alpha_2$ и складывая, получаем строгое неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\left[J_i\left(U_* + \overset{\vee}{U}\right) - J_i(U_*)\right] < 0,$$

что противоречит (21).

Аналогично доказывается и

**Теорема 4.** Если при любых $t \in [t_0, T], x(\theta) \in C_{[-\tau,0]}$ и допустимых стратегиях $U\left[t, x(\theta)\right]$ существуют неотрицательные постоянные $\alpha_1$ и $\alpha_2$, одновременно не равные нулю, и такие, что выполнено неравенство (18), то равновесная стратегия $U_*$ является одновременно полуэффективной.

Перейдем к рассмотрению линейных игр с квадратичным функционалом выигрыша (8)–(9). Используем далее обозначения, введенные в предыдущем пункте статьи. Ограничим класс допустимых стратегий игроков функционалами вида

$$U^{(k)}\left[t, x(\theta)\right] = K_k(t)x(0) + \int_{-\tau}^{0} P_k(t,\theta)x(\theta)d\theta + U_*^{(k)}\left[t, x(\theta)\right], \quad (k = 1,2).$$

Из (12) следует, что

$$W_i\left[t, x(\theta), U\left[t, x(\theta)\right]\right] = y' H^{(i)} y,$$

где $y = \left\{x(0), x(\theta)\right\}$, а $H^{(i)} = \begin{bmatrix} h_{11}^{(i)} & h_{12}^{(i)} \\ h_{12}^{(i)} & h_{22}^{(i)} \end{bmatrix}$, вид матриц $h_{ij}^{(k)}$ указан ранее в предыдущем пункте. Тогда из условия (21) и теорем 3 и 4 следует справедливость следующих утверждений:

**Утверждение 4.** Если существуют положительные постоянные $\alpha_1$ и $\alpha_2$, такие, что для любых непрерывных по $t \in [t_0, T]$ и $\theta \in [-\tau, 0]$ матриц $K_k(t)$ и $P_k(t,\theta)$ матрица $\alpha_1 H^{(1)} + \alpha_2 H^{(2)}$ определенно положительная, то равновесные стратегии

$$U_*^{(i)} = -\frac{1}{2}\left[Q_i^{(i)}\right]^{-1} B_i' \left\{2\Theta_i x(0) + \int_{-\tau}^{0}\Lambda_i(t,\theta)x(\theta)d\theta\right\}, \ (i = 1,2) \tag{22}$$

являются одновременно оптимальными по Парето для дифференциальной игры (8)–(9).

**Утверждение 5.** Если существуют неотрицательные постоянные $\alpha_1$ и $\alpha_2$, такие, что для любых непрерывных по $t \in [t_0, T]$ и $\theta \in [-\tau, 0]$ матриц $K_k(t)$ и $P_k(t,\theta)$ матрица $\alpha_1 H^{(1)} + \alpha_2 H^{(2)}$ определенно положительна, то равновесные стратегии (22) являются одновременно полуэффективными для дифференциальной игры (8)–(9).

В заключение отметим, что несколько иной подход к рассмотренной задаче для систем вида (8) без запаздывания времени изучался в [19].

**Литература**

1. Гречушкина, Д.С. Интеллектуальные системы контроля как инструмент повышения энергоэффективности в энергосервисе / Д.С. Гречушкина, Н.В. Гринева, П.Е. Голосов // Цифровые решения и технологии искусственного интеллекта. – 2026. – Т. 2, № 3. – С. 58–66.

2. Варьяш, И.Ю. Теоретическое решение модели неопределенности опережающих данных / И.Ю. Варьяш, Д.В. Климонов // Цифровые решения и технологии искусственного интеллекта. – 2025. – Т. 1, № 4. – С. 86–92.

3. Варьяш, И.Ю. Информатика опережающих данных / И.Ю. Варьяш, Т.Ф. Бурова, Д.В. Климонов // Цифровые решения и технологии искусственного интеллекта. – 2026. – Т. 2, № 2. – С. 63–71.

4. Jond, H.B. Differential Game Strategies for Social Networks with Self-Interested Individuals / H.B. Jond // IEEE Transactions on Computational Social Systems. – 2024. – Vol. 11, no. 3. – P. 4426–4439.

5. Кудрявцев, К.Н. Гарантированное по Парето равновесие в дуополии Хотеллинга на плоскости / К.Н. Кудрявцев, И.С. Стабулит // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40 (299). – С. 177–181.

6. Marsiglio, S. Transboundary Pollution Control under Evolving Social Norms: a Mean-Field Approach / S. Marsiglio, D. La Torre, D. Liuzzi // Decisions in Economics and Finance. – 2024. – Vol. 48, no. 1. – P. 437–463.

7. Nash, J. Non-cooperative games / J. Nash // Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54, no. 2. – P. 286–295.

8. Класс дифференциальных игр, в которых отсутствует равновесие по Нэшу, но существует равновесие угроз и контругроз / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев, С.П. Самсонов и др. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2018. – Т. 10, № 2. – С. 5–21.

9. Жуковский, В.И. Равновесие по Бержу и по Нэшу в одной линейно-квадратичной дифференциальной игре / В.И. Жуковский, А.С. Горбатов, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 62–94.

10. Четаев, Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев. – М.: Наука, 1965. – 207 с.

11. Красовский, Н.Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени / Н.Н. Красовский // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 1. – С. 39–51.

12. Красовский, Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М.: Физматгиз, 1959. – 221 с.

13. Гермейер, Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

14. Вайсборд, Э.М. О коалиционных дифференциальных играх / Э.М. Вайсборд // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 613–623.

15. Жуковский, В.И. К теории некоторых дифференциальных игр с запаздыванием времени / В.И. Жуковский, Н.В. Стоянов // Годишник на висшите технически учебни заведения. математика (Болгария). – 1973. – Том 9, № 2, – С. 9–20.

16. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М.: Наука, 1972. – 232 с.

17. Rekasius, Z.V. On the Noninferiority of Nash Equilibrium Solutions / Z.V. Rekasius, W.E. Schmitendorf // IEEE Trans. Autom. Control. – 1971. – Vol. 16, no. 2. – P. 170–173.

18. Жуковский, В.И. Оптимальность в одной дифференциальной игре нескольких лиц / В.И. Жуковский // II Четаевская конференция по аналитической механике, устойчивости движения и оптимальному управлению. Аннотации докладов. – Казань, 1972.

19. Starr, A.W. Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games / A.W. Starr, Y.C. Ho // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1969. – Vol. 3, no. 4. – P. 207–219.

***Поступила в редакцию 26 сентября 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Жуковский Владислав Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптимального управления факультета ВМиК, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: zhkvlad@yandex.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9594-0115.

Жуковская Лидия Владиславовна – доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161.

Кудрявцев Константин Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра моделирования и системного анализа факультета ИТиАБД, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: knkudryavtsev@fa.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9279-4490.

Стабулит Ирина Станиславовна – старший преподаватель, кафедра моделирования и системного анализа факультета ИТиАБД, Финансовый университет при Правительстве Российский Федерации, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: isstabulit@fa.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0794-056X.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 18–30***

**MSC 2010: 91A10+91A23** **DOI: 10.14529/mmph260402**

# PROPERTIES OF NASH EQUILIBRIA IN DIFFERENTIAL GAMES WITH CONSTANT DELAY TIME

***V.I. Zhukovskiy[1], L.V. Zhukovskaya[2], K.N. Kudryavtsev[3], I.S. Stabulit[3]***

*[1] Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

*[2] Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

*[3] Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation*

*E-mail: knkudryavtsev@fa.ru*

Abstract. This paper studies properties of Nash equilibria in a two-person nonzero-sum differential game with constant time delay. It is shown that equilibrium strategies may be non-unique and are not always efficient from the standpoint of the joint improvement of both players' criteria. Methods for overcoming these shortcomings are specified. The study employs the method of Lyapunov–Chetaev functions, developed by N.N. Krasovskii as applied to problems of analytical design of optimal controllers in time-delay systems. Sufficient conditions are formulated for the existence of admissible strategies that simultaneously reduce the values of the payoff functionals of both players compared to their equilibrium values. For linear games with quadratic payoff functionals, these conditions are reduced to verifying the definite negativity of matrix functions depending on the solutions to systems of differential and differential-difference equations. Explicit forms of the improving strategies are obtained for a special case where the control matrices and the weight matrices of the criteria coincide with the identity matrix. In addition, a class of equilibria possessing the property of Pareto optimality is identified: for these, any joint deviation cannot simultaneously improve the criteria of both players. Sufficient conditions for Pa-

reto optimality and semi-efficiency of equilibrium strategies in linear-quadratic time-delay games are specified. The results can be applied to designing robust strategies in multi-agent systems, economic models, and control problems with delayed feedback.

*Keywords: differential games; Nash equilibrium; Pareto optimality, time delay.*

**References**

1. Grechushkina D.S., Grineva N.V., Golosov P.E. Intellektual'nye sistemy kontrolya kak instrument povysheniya energoeffektivnosti v energoservise (Intelligent Control Systems as a Tool for Increasing Energy Efficiency in Energy Service). *Cifrovye resheniya i tehnologii iskusstvennogo intellekta*, 2026, Vol. 2, no. 3, pp. 58–66. (in Russ.).

2. Var'jash I.Yu., Klimonov D.V. Teoreticheskoe reshenie modeli neopredelennosti operezhayushhih dannyh (Theoretical Solution of the Leading Data Uncertainty Model). *Cifrovye resheniya i tehnologii iskusstvennogo intellekta*, 2025, Vol. 1, no. 4, pp. 86–92. (in Russ.).

3. Var'jash I.Yu., Burova T.F., Klimonov D.V. Informatika operezhayushchikh dannykh (Advanced Data Informatics). *Cifrovye resheniya i tehnologii iskusstvennogo intellekta*, 2026, Vol. 2, no. 2, pp. 63–71. (in Russ.).

4. Jond H.B. Differential Game Strategies for Social Networks with Self-Interested Individuals. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2024, Vol. 11, no. 3, pp. 4426–4439.

5. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S. Garantirovannoe po Pareto ravnovesie v duopolii Hotellinga na ploskosti (Pareto-guaranteed equilibrium in Hotelling's duopoly on the plane). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2012, no. 40(299), pp. 177–181. (in Russ.).

6. Marsiglio S., La Torre D., Liuzzi D. Transboundary Pollution Control under Evolving Social Norms: a Mean-Field Approach. *Decisions in Economics and Finance*, 2024, Vol. 48, no. 1, pp. 437–463.

7. Nash J. Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 1951, Vol. 54, no. 2, pp. 286–295.

8. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N., Samsonov S.P., Vysokos M.I., Belskih Yu.A. Class of Differential Games with no Nash Equilibrium, but with Equilibrium of Objections and Counterobjections. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2018, Vol. 10, no. 2, pp. 5–21. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph180201

9. Zhukovskiy V.I., Gorbatov A.S., Kudryavtsev K.N. Ravnovesie po Berzhu i po Neshu v odnoj linejno-kvadratichnoj differencial'noj igre (Berge and Nash Equilibrium in a Linear-Quadratic Differential Game). *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya*, 2017, Vol. 9, no. 1, pp. 62–94. (in Russ.).

10. Chetaev N.G. *Ustojchivost' dvizheniya* (Stability of Movement). Moscow, Nauka Publ., 1965, 207 p. (in Russ.).

11. Krasovskiy N.N. Ob analiticheskom konstruirovanii optimal'nogo regulyatora v sisteme s zapazdyvaniem vremeni (On the Analytical Design of an Optimal Controller in a System with time Delay). *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1962, Vol. 26, no. 1, pp. 39–51. (in Russ.).

12. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya* (Some problems of the theory of stability of motion). Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 221 p. (in Russ.).

13. Germejer Yu.B. *Igry s neprotivopolozhnymi interesami* (Games with Non-Opposite Interests). Moscow, Nauka Publ., 1976, 328 p. (in Russ.).

14. Vaisbord E.M. O koalicionnyh differencial'nyh igrah (Coalition Differential Games). *Differencial'nye uravneniya*, 1974, Vol. 10, no. 4, pp. 613–623. (in Russ.).

15. Zhukovskiy V.I., Stoyanov N.V. K teorii nekotoryh differencial'nyh igr s zapazdyvaniem vremeni (On the Theory of Some Differential Games with Time Delay). *Godishnik na visshite tekhnicheski uchebni zavedeniya. matematika*, 1973, Vol. 9, no. 2, pp. 9–20. (in Russ.).

16. Markus M., Minc H. *Obzor po teorii matric i matrichnyh neravenstv* (A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities). Moscow, Nauka Publ., 1972, 232 p. (in Russ.).

17. Rekasius Z.V., Schmitendorf W.E. On the Noninferiority of Nash Equilibrium Solutions. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1971, Vol. 16, no. 2, pp. 170–173.

18. Zhukovskiy V.I. Optimal'nost' v odnoj differencial'noj igre neskol'kih lic (Optimality in a multiperson differential game). *II. Chetaevskaya konferenciya po analiticheskoj mekhanike, ustojchivosti dvizheniya i optimal'nomu upravleniyu* (Proc. II Chetaev Conference on Analytical Mechanics, Stability of Motion, and Optimal Control), Kazan, 1972. (in Russ.).

19. Starr A.W., Ho Y.C. Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games. *J. Optim. Theory Appl.*, 1969, Vol. 3, no. 4, pp. 207–219.

***Received September 26, 2026***

**Information about the authors**

Zhukovsky Vladislav Iosifovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Mathematics and Mechanics (VMiK), Moscow State University, Moscow, Russian Federation, e-mail: zhkvlad@yandex.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9594-0115.

Zhukovskaya Lidiya Vladislavovna is Dr. Sc. (Economics), Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161.

Kudryavtsev Konstantin Nikolaevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Modeling and Systems Analysis, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation, e-mail: knkudryavtsev@fa.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9279-4490.

Stabulit Irina Stanislavovna is Senior Lecturer, Department of Modeling and Systems Analysis, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation, e-mail: isstabulit@fa.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0794-056X.

УДК 517.6 DOI: 10.14529/mmph260403

# ОГРАНИЧЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

***В.И. Заляпин, Е.В. Харитонова***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: zaliapinvi@susu.ru, kharitonovaev@susu.ru*

**Аннотация. Пусть $F(x)$ – неубывающая интегрируемая по Стилтьесу функция, $k$ =1, 2, …, – целое положительное число. Моментом порядка «$k$» функции $F(x)$ называется число $\mu_k$, такое, что $\int x^k dF(x) = \mu_k$. Классическая проблема моментов состоит в нахождении функции $F(x)$ по известным её моментам. Истоки этой (и схожей с ней) проблематики обнаруживаются еще в работах математиков конца XIX – начала XX вв. (например, П.Л. Чебышёв (1873) и др.)**

**В работе рассматривается одно из возможных обобщений подобных задач: для заданных непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, … $\sigma_n(t)$ и произвольных чисел $\mu_1$, $\mu_2$, … $\mu_n$ найти линейный функционал $V(\sigma)$ такой, что $V(\sigma_k) = \mu_k$, $k = 1, 2, …, n$.**

**Основной аппарат исследования – установленная в работе связь между проблемой моментов и неклассическими краевыми задачами – задачей с распределенными на отрезке данными и простой многоточечной задачей Валле Пуссена, условия однозначной разрешимости которых обеспечивают однозначную разрешимость предлагаемого обобщения классической проблемы моментов.**

*Ключевые слова: моменты функции; линейные краевые задачи; задача Валле Пуссена; функция Грина.*

## Введение

Пусть $F(x)$ – неубывающая интегрируемая по Стилтьесу функция, $k$ = 1, 2, ... – натуральное число. Моментом функции $F(x)$ порядка $k$ называется число $\mu_k$ такое, что

$$\mu_k = \int_A x^k dF(x) .$$

Классическая проблема состоит в нахождении функции $F(x)$ по известным её моментам $\mu_k$.

При $A = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ эта проблема носит название проблемы Г. Гамбургера, при $A = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ – проблемы Стилтьеса и т. п. Различные модификации этих и схожих с ними проблем можно найти в работах П.Л. Чебышева (1873), Т. Стилтьеса (1894–1895), А.А. Маркова (1895), Г. Гамбургера (1920) и более поздних – М. Рисса (1923), Неванлинны (1929), Я. Тамаркина (1943), М.Г. Крейна (1952), Н.И. Ахиезера (1961) и др. ([1])

Пусть $C_{[a;b]}$ – пространство непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций и даны элементы $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n \in C_{[a;b]}$ и действительный вектор $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$.

Под *ограниченной проблемой моментов* мы понимаем следующую задачу: найти линейный функционал $V(\sigma), \sigma \in C_{[a;b]}$ такой, что

$$V(\sigma_j) = \mu_j, j = 1, 2, ..., n . \quad (1)$$

## Линейные краевые задачи

Наряду со сформулированной выше задачей рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$x = x(t),\ L(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)}(t) + x^{(n)} = f(t), t \in [a; b] \quad (2)$$

и для него задачу: найти такое решение $x(t)$, что для заданных линейных функционалов $U_j(x)$ и чисел $\mu_j$ выполняется

$$U_j(x) = \mu_j, \quad j = 1, 2, ..., n . \quad (3)$$

Задача (2)–(3) называется линейной краевой задачей. Она называется *однородной*, если $f(t)$ и все $\mu_j$ – нули. Известно (например, [2]), что если функции $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения, то однозначная (т. е. тривиальная) разрешимость однородной задачи эквивалентна однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} U_j(\varphi_i)\cdot c_i = 0, \quad j = 1,2,...,n$$

т. е. невырожденности матрицы $U(\varphi) = \| U_j(\varphi_i) \|, i, j = 1,2,\ldots,n.$

В свою очередь, это качество матрицы $U(\varphi)$ обеспечивается чебышёвостью фундаментальной системы решений. Точнее, справедлива теорема:

*Теорема*. Матрица $U(\varphi)$ невырождена тогда и только тогда, когда фундаментальная система решений однородного уравнения является системой Чебышёва. При этом необходимым и достаточным условием чебышёвости системы функций является так называемое *W*-свойство этой системы (например, [2]):

$$\forall k = 1,2,...,n \quad W_k = \left| \frac{d^s \varphi_i(t)}{dt^s} \right|_{s=0,1,...,k-1}^{i=1,2,...,k} \neq 0, \quad \forall t \in [a;b],$$

Подводя итог, отмечаем, что линейная краевая задача однозначно разрешима для любых правых частей и граничных условий тогда и только тогда, когда ф.с.р. однородного уравнения является чебышевской.

**Задачи с распределенными данными**

Нас в дальнейшем будет интересовать важная как с теоретической, так и с прикладной точек зрения задача

$$L(x) = f(t), U_j(x) = \int_a^b x(t) d\sigma_j(t) = \mu_j,\ j = 1,2,...,n\,, \tag{4}$$

где $\sigma_j(t)$ – известные функции ограниченной вариации на [*a*; *b*], $\mu_j$ – заданные действительные числа. Мы называем её *задачей с распределенными данными.* Роль этой задачи в наших рассмотрениях поясняется леммой.

*Лемма* (о двойственности). Если $x(t)$ – фиксированное решение уравнения (2), то значения $U_j(x)$ могут интерпретироваться как значения некоторого функционала $V(s)$ на множестве функций ограниченной вариации:

$$\forall \sigma \quad V(s)\big|_{s=\sigma} = U(x)\,.$$

При этом задача с распределенными данными может рассматриваться как сформулированная выше ограниченная проблема моментов (1) – всякое решение задачи (2)–(3) порождает функционал $V(\sigma)$ такой, что

$$V(\sigma)\big|_{\sigma=\sigma_j} = U_j(x) = \mu_j,\ j = 1,2,...,n$$

и наоборот, знание функционала $V(\sigma)$ однозначно определяет решение задачи (2)–(3).

**Простая задача Валле Пуссена**

Пусть $\mu_j,\ j = 1,2,...,n$ – произвольные действительные числа, $x(t) \in C^n_{[a;b]}$. Зададим на отрезке [*a; b*] точки $a \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le b$. Простой задачей Валле Пуссена называется задача ([3])

$$L(x) = f(t), \quad t \in [a;b], \quad U_j(x) = x(t_j) = \mu_j,\ j = 1,2,...,n\,. \tag{5}$$

Как и любая другая линейная задача, задача Валле Пуссена однозначно разрешима при условии чебышёвости фундаментальной системы решений.

Важным для дальнейшего обстоятельством является то, что всякая задача с распределенными данными эквивалентна некоторой простой задаче Валле Пуссена.

Рассмотрим отрезок [*a; b*] и выберем на нем произвольные точки $a \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le b$. Для интеграла $U_j(x) = \int_a^b x(t) d\sigma_j(t)$ построим квадратуру

$$U_j(x) = \sum_{q=1}^{n} x(t_q) \cdot \omega_j^q + R_j(x). \qquad (*)$$

Свойство чебышёвости ф.с.р. гарантирует существование единственной квадратуры (*), точной на множестве решений однородного уравнения (2). Действительно, требование точности квадратуры дает

$$R_j = 0 \Rightarrow U_j(\varphi_s) = \sum_{q=1}^{n} \varphi_s(t_q) \cdot \omega_j^q, \quad s = 1,2,...,n.$$

Чебышёвость ф.с.р. и линейная независимость функционалов (3) влекут невырожденность матриц $\Phi = \| \varphi_s(t_q) \|$ и $U(\varphi) = \| U_j(\varphi_s) \|$, что дает возможность найти веса квадратуры (*) из соотношения $\Omega = \Phi^{-1} U(\varphi)$, где $\Omega = \| \omega_j^q \|$ – матрица весов, $\| \Phi^{-1} \|$ – матрица, обратная к матрице $\| \Phi \|$.

Система граничных условий задачи с распределенными данными теперь может быть записана в виде

$$\sum_{q=1}^{n} x(t_q) \cdot \omega_j^q = \mu_j \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \cdot x = \mu,$$

откуда

$$x = \Omega^{-1} \cdot \mu = \mu'.$$

**Функция Грина**

Не ограничивая общности рассуждений, будем рассматривать задачу (5) с однородными ($\mu$ = 0) граничными условиями. Если, паче чаяния, это не так, возьмем многочлен $p(t)$, который в точках $t_j$ принимает значения[1] $\mu_j$ и, положив $y = x - p(t)$, убедимся, что функция $y(t)$ решение простой задачи Валле Пуссена с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} L(y) = f(t) - L(p) = \hat{f}(t) \\ U_j(y) = y(t_j) = 0, \; a \le t_1 < ... < t_n \le b, \; j = 1,2,...n. \end{cases} \qquad (6)$$

Эффективным способом решения краевых задач является использование функции Грина: если $G(t,\tau)$ – функция Грина полуоднородной (с нулевыми граничными условиями) задачи, то решение $x(t)$ этой задачи может быть найдено по формуле

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau) \cdot f(\tau) d\tau. \qquad (7)$$

Напомним некоторые свойства, которыми обладает однозначно определяемая функция Грина:

– $G(t,\tau)$ непрерывна и непрерывно-дифференцируема по переменной $t$ вплоть до $n$–2-го порядка включительно.

– $G(t,\tau)$ обладает непрерывными производными порядков $n$–1 и $n$ по переменной $t$ в каждом из полуинтервалов $[a;\tau)$ и $(\tau;b]$. При этом производная $n$–1 порядка имеет в точке $\tau$ скачок, равный 1.

– в каждом из полуинтервалов $[a;\tau)$ и $(\tau;b]$ $G(t,\tau)$ является решением однородного уравнения $L(G(t,\tau)) = 0$.

[1] Например, в качестве такого многочлена можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа.

**Интегральное уравнение**

Здесь мы воспользуемся известной (например, [4, 5]) в теории дифференциальных уравнений конструкцией, позволяющей получить интегральное соотношение для функции Грина задачи (6).

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$l(x) = x^{(n)}(t) = \hat{f}(t), \quad x(t_j) = 0, a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b,$$

и пусть $g(t,\tau)$ – её функция Грина. Эта функция может быть легко построена, и мы считаем её известной. Положим $\Delta = G(t,\tau) - g(t,\tau)$.

*Теорема.* (О дифференцируемости функции $\Delta$). Функция $\Delta(t,\ \tau)$ определена на квадрате $[a;\ b]\times[a;\ b]$, непрерывна там по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по переменной $t$ вплоть до $n$-го порядка включительно.

Существование и непрерывность первых $n$–2 производных следует из определяющих свойств функции Грина. Существование и непрерывность $n$–1 производной – следствие идентичного характера разрыва $n$–1 производных функций $G(t,\tau)$ *и* $g(t,\tau)$ *в точке* $t = \tau$.

Далее рассмотрим при $t \in [a;\tau) \cup (\tau;b]$:

$$L(\Delta) = L(G-g) = -L(g) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) g^{(k)}(t,\tau).$$

В то же время

$$L(\Delta) = \Delta^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \Delta^{(k)}(t,\tau).$$

Сравнивая два последних соотношения, заключаем, что

$$\Delta^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) g^{(k)}(t,\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \Delta^{(k)}(t,\tau). \quad (8)$$

Легко видеть, что выражение справа определено и непрерывно при любых значениях $t \in [a;b]$, в том числе и при $t = \tau$, на чем доказательство непрерывности $\Delta^{(n)}$ завершается.

Обозначая $H(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) g^{(k)}(t,\tau)$, перепишем (8) в виде $L(\Delta) = H(t)$. Заметим, что решение полуоднородной краевой задачи для этого уравнения может быть записано с использованием её функции Грина по формуле (7):

$$\Delta(t,\tau) = \int_a^b G(t,s) H(s,\tau) ds.$$

Последнее может быть представлено в виде

$$G(t,\tau) - g(t,\tau) = \int_a^b G(t,s) H(s,\tau) ds \quad (9)$$

и является при каждом значении $\tau \in [a;b]$ интегральным уравнением Фредгольма II рода относительно функции $G(t,\bullet)$. К настоящему времени существует широкий спектр методов решения подобных уравнений. С ними можно ознакомиться в [6, 7] и цитированной там литературе.

Полученная в результате решения уравнения (9) функция Грина однозначно определяет решение задачи (2)–(3) и, тем самым, решение поставленной задачи.

**Литература**

1. Ахиезер, Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер. – М.: ГИФМЛ, 1961.

2. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970.

3. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – М.: ИЛ, 1953.

4. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1989.

5. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: ИЛ, 1958.

6. Полянин, А.Д. Интегральные уравнения в 2 ч. Справочник для вузов. 2-е изд., испр. и доп. / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М.: Юрайт, 2017.

7. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев.: Наукова думка, 1986.

***Поступила в редакцию 19 июля 2026***

**Сведения об авторах**

Заляпин Владимир Ильич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zaliapinvi@susu.ru.

Харитонова Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kharitonovaev@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 31–36***

**DOI: 10.14529/mmph260403**

# THE LIMITED PROBLEM OF MOMENTS

***V.I. Zalyapin, E.V. Kharitonova***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: zaliapinvi@susu.ru, kharitonovaev@susu.ru*

Abstract. Let $F(x)$ is Stieltjes-integrable function, $k = 1, 2, ...$, is a positive integer. The number $\mu_k$ is called the moment of order "$k$" of the function $F(x)$ if $\int x^k dF(x) = \mu_к$. The classical problem of moments is to find the function $F(x)$ according to its known moments. The origins of this (and similar) problem are found in the works of mathematicians of the late XIX – early XX centuries, (for example, P.L. Chebyshev (1873), *etc.*) The paper considers one of the possible generalizations of such problems: for given continuous on the segment $[a; b]$ functions $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, … $\sigma_n(t)$ and arbitrary numbers $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, find a linear functional $V(\sigma)$ such that $V(\sigma_k) = \mu_к$, $k = 1, 2, \ldots, n$. The basis of research is the relationship between the problem of moments and nonclassical boundary value problems – a problem with a distributed data and a simple multipoint Vallee Poussin problem. The conditions of unambiguous solvability of these problems ensure unambiguous solvability of the proposed generalization of the classical problem of moments.

*Keywords: moments of the function; linear boundary value problems; Vallee Poussin problem; Green's function.*

**References**

1. Akhiezer N.I. *Classicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analisa, svyazannye s neyu* (The Classical Problem of Moments and Some Analysis Issues Related to It). Moscow: FizMatLit Publ., 1961. (in Russ).

2. Hartman Ph. *Ordinary Differential Equations*. NY-London-Sydney: John Wiley&Sons, 1964.

3. Sansone, G. *Equazioni differenziali nei campo reale*. Bologna: Zanichelli, 1948. (in Italian).

4. Naimark M.A. *Lineinye differentsialnye operatory*. (Linear Differential Operators). Moscow: Nauka Publ.,1989. (in Russ).

5. Coddington E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. NY-Toronto-London: McGrow Hill, 1955.

6. Polyanin A.D., Manzjirov A.V. *Integralnye uravneniya. Spravochnik dlya VUZov*. (Integral Equations. Handbook for Universities). Moscow, Uraite Publ., 2017. (in Russ).

7. Verlan A.F., Sizikov V.S. *Integralnye uravneniya: metody, algoritmy, programmy*. (Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs). Kyiv: Naukova dumka Publ., 1986. (in Russ)

***Received July 19, 2026***

**Information about the authors**

Zalyapin Vladimir Il'ich is Cand. Sc. (Physics and mathematics), Professor of the Mathematical Analysis and Metods of Teaching Mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zaliapinvi@susu.ru.

Kharitonova Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and mathematics), Associated professor of the Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kharitonovaev@susu.ru.

УДК 517.9+550.331 DOI: 10.14529/mmph260404

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ-РЕАКЦИИ

***А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева***
*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация*
*E-mail: korotkii@imm.uran.ru, starodubtsevayv@yandex.ru*

**Аннотация. Рассматривается задача восстановления коэффициента температуропроводности в стационарной модели диффузии-конвекции-реакции по нормальной производной на части границы области функционирования модели. Задача сведена к минимизации функционала невязки, которая осуществляется методом проекции градиента. Градиент находится аналитически из системы оптимальности. Численное моделирование показало работоспособность метода и его чувствительность к выбору начального приближения, шага спуска и приближения градиента.**

*Ключевые слова: уравнение диффузии-конвекции-реакции; коэффициент температуропроводности; обратная задача; функционал невязки; экстремальная задача; вариационный метод; точка минимума.*

## Введение

Рассматривается обратная задача для стационарной гидродинамической модели диффузии-конвекции-реакции, состоящая в восстановлении (нахождении) коэффициента температуропроводности модели по результатам наблюдения за следом нормальной производной на доступной части границы области функционирования модели. Подобные задачи часто рассматриваются в механике жидкостей и газов, инженерном деле, экологии, биологии, в области химических технологий, тепломассопереносе, теории управления. Многие обратные задачи могут трактоваться как задачи управления или как экстремальные задачи. При этом решение обратной задачи сводится к экстремальной (вариационной) задаче на минимум некоторого подходящего функционала невязки на множестве возможных искомых коэффициентов.

Основное внимание в работе сосредоточено на вопросах численного моделирования решения обратной задачи. Параметры модели считаем достаточно гладкими, что позволяет рассматривать задачу с обычными нормальными следами состояний модели из функциональных классов Лебега. Для решения задачи минимизации предлагается воспользоваться градиентными методами. Дифференциал и градиент Фреше функционала невязки находятся аналитически в результате решения системы оптимальности. Это дает ряд преимуществ при численной реализации задачи. Для градиентного метода предлагаются различные приближения градиента. Приведены результаты численного моделирования некоторого модельного примера, они показывают работоспособность предложенного подхода к решению обратной задачи. Отметим также, что градиентный метод решения рассматриваемой обратной задачи оказался весьма чувствительным к выбору начального приближения, шага спуска и аппроксимации градиента функционала.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим содержательную сторону задачи. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2,3$, заполненной неоднородной теплопроводной несжимаемой вязкой жидкостью, рассматривается стационарное распределение температуры. Математическая модель стационарного распределения температуры в области $\Omega$ представляет собой краевую задачу для обезразмеренного уравнения диффузии-конвекции-реакции [1–3]

$$\operatorname{div}\left(\eta \nabla T\right) - \left(\mathbf{u}, \nabla T\right) - qT = f, \mathbf{x} \in \Omega;\ T = 0, \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega; \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_m\right)$ – точка пространства $\mathbb{R}^m$; $\mathbf{u} = \left(u_1\left(\mathbf{x}\right), \ldots, u_m\left(\mathbf{x}\right)\right)$ – вектор скорости движения жидкости в точках $\mathbf{x}$ области $\Omega$; $T = T\left(\mathbf{x}\right)$, $\mathbf{x} \in \Omega$ – температура жидкости в $\Omega$; $\eta = \eta\left(\mathbf{x}\right)$, $\mathbf{x} \in \Omega$

– коэффициент температуропроводности в $\Omega$; $q = q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ – коэффициент реакции (поглощения) в $\Omega$; $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ – интенсивность образования или стока тепла в $\Omega$; $(\cdot,\cdot)$ –скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

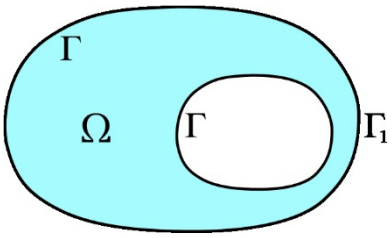



**Рис. 1. Пример 1 области и её границы**

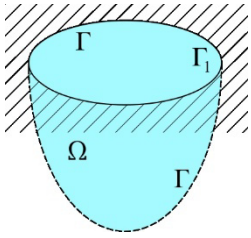



**Рис. 2. Пример 2 области и её границы**

Задача состоит в том, чтобы по некоторым измерениям (наблюдениям) за производной по нормали (нормальной производной) $\partial T / \partial \mathbf{n}$ на регулярной части $\Gamma_1$ границы $\Gamma$ области $\Omega$ (см. рисунки 1 и 2) определить априори неизвестный коэффициент температуропроводности $\eta$ в области $\Omega$ ($\operatorname{meas}\Gamma_1 > 0$). Эту задачу будем называть обратной задачей. Задачу, состоящую в нахождении распределения температуры $T$ в области $\Omega$ в результате решения краевой задачи (1) при заданных параметрах модели, будем называть прямой задачей.

Уточним постановки прямой и обратной задач. Будем считать, что $\Omega$ является ограниченной строго липшицевой областью в $\mathbb{R}^m$ класса $C^{1,1}$ или класса $C^2$ [3, с. 30; 4, с. 31, 32; 5, с. 5; 6, с. 66, 67; 7, с. 28]. Далее будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $p \ge 1$; $L_p(\Gamma)$, $p \ge 1$; $L_p(\Gamma_1)$, $p \ge 1$; пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \ge 1$, $l \ge 1$; $W_p^s(\Gamma)$, $p \ge 1$, $s \in R$; $W_p^s(\Gamma_1)$, $p \ge 1$, $s \in R$; векторные аналоги этих пространств $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, $\mathbf{W}_p^s(\Gamma)$, $\mathbf{W}_p^s(\Gamma_1)$ [3–8]. Гильбертовы пространства Соболева при $p = 2$ будут обозначаться соответственно символами $H^l(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, $H^s(\Gamma_1)$, $\mathbf{H}^l(\Omega)$, $\mathbf{H}^s(\Gamma)$, $\mathbf{H}^s(\Gamma_1)$. Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу.

Пусть для определенности

$$\eta \in \Lambda = \left\{ \eta \in W_p^1(\Omega) : \mu_1 \le \eta(\mathbf{x}) \le \mu_2, \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \right\}, 0 < \mu_1 = \text{const} \le \mu_2 = \text{const} < \infty, \ p > m; \tag{2}$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega \right\}; \tag{3}$$

$$q \in Q = \left\{ q \in L_\infty(\Omega) : 0 \le q(\mathbf{x}) \le \mu_3, \mathbf{x} \in \Omega \right\}, \mu_3 = \text{const} \ge 0; \tag{4}$$

$$f \in L_2(\Omega). \tag{5}$$

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1) она имеет единственное обобщенное решение из пространства $H_0^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0 \right\}$ [3–5, 7, 8]. Это обобщенное решение имеет след нормальной производной $\gamma T = \partial T / \partial \mathbf{n}$ на участке границы $\Gamma_1$ из пространства $H^{1/2}(\Gamma_1) \subset L_2(\Gamma_1)$ [3–5, 7, 8]. Поскольку далее будет важна зависимость решения прямой задачи от параметра $\eta \in \Lambda$, это решение будем обозначать $T = T[\eta]$.

Пусть $\Xi = \left\{ \xi \in L_2(\Gamma_1) : \xi = \gamma T[\eta], \eta \in \Lambda \right\}$ – множество всех возможных наблюдений в обратной задаче и $\mathbf{A}$ есть оператор $\mathbf{A} : H^1(\Omega) \supset W_p^1(\Omega) \supset \Lambda \ni \eta \to \gamma T[\eta] = \xi \in \Xi \subset L_2(\Gamma_1)$. Обратная задача, таким образом, состоит в решении нелинейного операторного уравнения

$$\mathbf{A}(\eta) = \xi.$$

В условиях (1)–(5) обратная задача может оказаться некорректной [9–14]. Многие задачи управления могут быть сведены к аналогичным постановкам, рассматриваемым в теории обрат-

ных задач. Различные аспекты задач управления коэффициентами в системах с распределенными параметрами рассматривались, например, в [7, 11–16]. Данная работа посвящена вопросам численного моделирования поставленной обратной задачи и сопутствующей ей задаче управления для одной конкретной модели механики жидкостей.

**2. Вариационная формулировка задачи**

Решение обратной задачи можно свести к решению вариационной задачи [9–14]

$$J(\eta)\to\min:\eta\in\Lambda,\ J(\eta)=\left\|\gamma T[\eta]-\xi^*\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)},\tag{6}$$

где $\xi^*$ – заданная функция, характеризующая результаты реального наблюдения за температурным полем модели на участке $\Gamma_1$ границы $\Gamma$ области $\Omega$.

Обозначим

$$J_*=\inf\left\{J(\eta):\eta\in\Lambda\right\},\ \Lambda^*=\left\{\eta\in\Lambda:J(\eta)=J_*\right\}.$$

Коэффициент $\eta\in\Lambda$, для которого $J(\eta)=J_*$, можно считать решением обратной задачи.

**3. Вычисление градиента функционала невязки**

Вычислим градиент (производную) Фреше функционала невязки $J$. Найдем его вместе с градиентом (производной) Фреше функционала Лагранжа $L$

$$L(\eta)=J(\eta)+G(\eta),\ G(\eta)=\int_\Omega\Big(\operatorname{div}\big(\eta\nabla T[\eta]\big)-\big(\mathbf{u},\nabla T[\eta]\big)-qT[\eta]-f\Big)Z\,d\mathbf{x}.$$

Найдем приращение функционала Лагранжа при каком-либо допустимом приращении аргумента. Выделим в этом приращении дифференциал и производную Фреше. Дадим приращение $h\in W_p^1(\Omega)$ аргументу в точке $\eta\in\Lambda$. При этом считаем, что это приращение достаточно мало $\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\le\varepsilon$ и при любом таком приращении функционал невязки $J$ определен в точке $\eta+h$. Соответствующее изменение решения краевой задачи (1) обозначим символом $y=T[\eta+h]-T[\eta]$. Функция $y=y[\eta,h]\in H_0^2(\Omega)$ и удовлетворяет краевой задаче

$$\operatorname{div}(\eta\nabla y)+\operatorname{div}(h\nabla y)+\operatorname{div}\big(h\nabla T[\eta]\big)-(\mathbf{u},\nabla y)-q\,y=0,\mathbf{x}\in\Omega;\ y=0,\mathbf{x}\in\Gamma.\tag{7}$$

Предварительно отметим, что для обобщенного решения краевой задачи (1) справедлива априорная оценка: существует константа $C_1>0$ такая, что

$$\|T[\eta]\|_{L_2(\Omega)}+\|T[\eta]\|_{H_0^1(\Omega)}+\|T[\eta]\|_{H_0^2(\Omega)}\le C_1\|f\|_{L_2(\Omega)}\ \ \forall\eta\in\Lambda;\tag{8}$$

для обобщенного решения краевой задачи (7) справедливы априорные оценки: существует константа $C_2>0$ такая, что для любых $\eta\in\Lambda$ и $h\in W_p^1(\Omega)$ ($\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\le\varepsilon$)

$$\|y\|_{H_0^2(\Omega)}\le C_2\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\|T[\eta]\|_{H_0^2(\Omega)}\le C_1C_2\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\|f\|_{L_2(\Omega)},\tag{9}$$

$$\|y\|_{L_2(\Omega)}\le C_\Omega\|\nabla y\|_{L_2(\Omega)}\le 2C_3C_\Omega\mu_1^{-1}\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\|\nabla T[\eta]\|_{L_2(\Omega)}\le\tag{10}$$

$$\le 2C_1C_3C_\Omega\mu_1^{-1}\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где $0<C_\Omega$ – постоянная из неравенства Пуанкаре–Фридрихса [3, с. 22; 7, с. 27, 326], $0<C_3$ – постоянная из теоремы вложения $W_p^1(\Omega)\subset C(\bar\Omega)$, $\|v\|_{C(\bar\Omega)}\le C_3\|v\|_{W_p^1(\Omega)}$ [4, с. 77; 7, с. 33].

Найдем приращение функционала Лагранжа. Для нахождения приращения функционала невязки $J$ воспользуемся известной формулой в гильбертовом пространстве

$$\|a-c\|^2-\|b-c\|^2=2\langle a-b,b-c\rangle+\|a-b\|^2;$$

$$J(\eta+h)-J(\eta)=2\left\langle\gamma y,\gamma T[\eta]-\xi^*\right\rangle_{L_2(\Gamma_1)}+\langle\gamma y,\gamma y\rangle_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Используя формулу интегрирования по частям и формулы Грина, перебросим в отдельных слагаемых производные с функции $y$ на множитель Лагранжа $Z$, в результате получим

$$G(\eta+h)-G(\eta)=\int_\Omega\Big(\operatorname{div}(\eta\nabla Z)y+\operatorname{div}\big(h\nabla T[\,\eta\,]\big)Z+(\mathbf{u},\nabla Z)y-qZy\Big)d\,\mathbf{x}$$
$$+\int_\Omega yZ\operatorname{div}\mathbf{u}\,d\,\mathbf{x}+\int_\Omega\operatorname{div}(h\nabla y)Z\,d\,\mathbf{x}+\int_\Gamma\big(\eta\gamma yZ-\eta(\nabla Z,\mathbf{n})y-Z(\mathbf{u},\mathbf{n})y\big)d\,\Gamma.$$

Учитывая граничное условие $y=0$ на $\Gamma$ и условие $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ в $\Omega$, приращение функционала Лагранжа можно записать в виде

$$L(\eta+h)-L(\eta)=\int_\Omega\Big(\operatorname{div}(\eta\nabla Z)y+\operatorname{div}\big(h\nabla T[\eta]\big)Z+(\mathbf{u},\nabla Z)y-qZy\Big)d\,\mathbf{x}$$
$$+\int_\Omega\operatorname{div}(h\nabla y)Z\,d\,\mathbf{x}+\int_\Gamma\eta\gamma yZ\,d\,\Gamma+2\big\langle\gamma y,\gamma T[\eta]-\xi^*\big\rangle_{L_2(\Gamma_1)}+\langle\gamma y,\gamma y\rangle_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Пусть функция $Z=Z[\,\eta\,]$ удовлетворяет краевой задаче (назовем ее сопряженной задачей)

$$\operatorname{div}(\eta\nabla Z)+(\mathbf{u},\nabla Z)-qZ=0,\mathbf{x}\in\Omega;\tag{11}$$
$$\eta Z=-2\big(\gamma T[\,\eta\,]-\xi^*\big),\ x\in\Gamma_1;\ Z=0,x\in\Gamma\setminus\Gamma_1.$$

Для любого $\eta\in\Lambda$ сопряженная задача имеет единственное обобщенное решение из пространства $H^2(\Omega)$, удовлетворяющее априорной оценке

$$\big\|Z[\,\eta\,]\big\|_{L_2(\Omega)}+\big\|Z[\,\eta\,]\big\|_{H^1(\Omega)}+\big\|Z[\,\eta\,]\big\|_{H^2(\Omega)}\le C_4\big\|T[\,\eta\,]-\xi^*\big\|_{H^2(\Omega)},\tag{12}$$

где постоянная $C_4>0$ не зависит от оцениваемых величин; $\xi^*=\gamma\xi_*$, где $\xi_*\in H^2(\Omega)$ (или $\xi_*=T[\,\eta_0\,]$ при каком-нибудь $\eta_0\in\Lambda$).

Учитывая сопряженную задачу, находим приращение функционала Лагранжа

$$L(\eta+h)-L(\eta)=\int_\Omega\operatorname{div}\big(h\nabla T[\,\eta\,]\big)Z[\,\eta\,]d\,\mathbf{x}+\int_\Omega\operatorname{div}(h\nabla y)Z[\,\eta\,]d\,\mathbf{x}+\langle\gamma y,\gamma y\rangle_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Из оценок (8)–(10), (12) следует малость величин $\big\|\operatorname{div}(h\nabla y)\big\|_{L_2(\Omega)}=o\Big(\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\Big)$ и $\|\gamma y\|^2_{L_2(\Gamma_1)}=o\Big(\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\Big)$, и приращение функционала Лагранжа можно записать в виде

$$L(\eta+h)-L(\eta)=\int_\Omega\operatorname{div}\big(h\nabla T[\eta]\big)Z[\,\eta\,]d\,x+o\Big(\|h\|_{W_p^1(\Omega)}\Big).$$

Отсюда следует, что функционалы $L$ и $J$ дифференцируемы по Фреше в точке $\eta\in\Lambda$

$$D_FL(\eta,h)=D_FJ(\eta,h)=\int_\Omega\operatorname{div}\big(h\nabla T[\,\eta\,]\big)Z[\,\eta\,]d\,\mathbf{x}=\tag{13}$$
$$=\int_{\Gamma_1}h\gamma T[\,\eta\,]Z[\,\eta\,]d\,\Gamma-\int_\Omega h\big(\nabla T[\,\eta\,],\nabla Z[\,\eta\,]\big)d\,\mathbf{x}=\int_\Omega\Big[\big(\nabla h,\nabla T[\,\eta\,]\big)+h\Delta T[\,\eta\,]\Big]Z[\,\eta\,]d\,\mathbf{x}.$$

При каждом фиксированном $\eta\in\Lambda$ дифференциал представляет собой линейный непрерывный функционал по $h$ на $H^1(\Omega)$, поэтому по теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала существует единственный элемент $w=w[\eta]\in H^1(\Omega)$ такой, что

$$D_FJ(\eta,h)=\int_\Omega\operatorname{div}\big(h\nabla T[\,\eta\,]\big)Z[\,\eta\,]d\,\mathbf{x}=\langle w,h\rangle_{H^1(\Omega)},\forall h\in H^1(\Omega),\tag{14}$$
$$J'[\,\eta\,]=w[\,\eta\,].\tag{15}$$

Сформулируем получившийся результат в виде утверждения.

**Утверждение 1.** Функционал невязки $J$ дифференцируем по Фреше в каждой точке $\eta\in\Lambda$, его дифференциал и производная (градиент) в точке $\eta\in\Lambda$ имеют вид (13) и (15) соответственно.

Найдем элемент $w=w[\eta]\in H^1(\Omega)$ в явном виде с помощью ряда Фурье. Пусть $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ – произвольный ортогональный нормированный базис в $H^1(\Omega)$. Элемент $w\in H^1(\Omega)$ можно представить в виде сходящегося ряда Фурье

$$w=\sum_{i=1}^\infty\psi_i\,\omega_i,\ \psi_i=\langle w,\omega_i\rangle_{H^1(\Omega)},\ i=1,2,\ldots.$$

Подставим в (14) $h=\omega_i$ , в результате получим

$$\psi_i=\int_\Omega \operatorname{div}\left(\omega_i\nabla T[\eta]\right)Z[\eta]\,d\mathbf{x},\ i=1,2,\ldots,$$

В практических расчетах можно использовать приближения

$$w\approx\psi_1\omega_1+\ldots+\psi_n\omega_n,\ n\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

В ряде случаев, кроме (16), можно воспользоваться также следующим приближением

$$w\approx\tilde{w}\in H^1(\Omega):\left\langle\tilde{w},h\right\rangle_{H^1(\Omega)}=F(h)=-\int_\Omega h\left(\nabla T[\eta],\nabla Z[\eta]\right)d\mathbf{x}\,\forall h\in H^1(\Omega). \tag{17}$$

Действительно, при каждом фиксированном $\eta\in\Lambda$ функционал $F=F(h),\ h\in H^1(\Omega)$, является линейным непрерывным по $h$ на $H^1(\Omega)$, поэтому по теореме Рисса существует единственный элемент $\tilde{w}=\tilde{w}[\eta]\in H^1(\Omega)$ такой, что $F(h)=\left\langle\tilde{w},h\right\rangle_{H^1(\Omega)}\forall h\in H^1(\Omega)$ .

Оценим близость элементов $\tilde{w}$ и $w$

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{w}-w\right\|_{H^1(\Omega)}&=\max\left\{\left|\left\langle\tilde{w}[\eta]-w[\eta],h\right\rangle_{H^1(\Omega)}\right|:\ h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le\\
&\le\max\left\{\left|\int_{\Gamma_1}h\gamma T[\eta]Z[\eta]\,d\Gamma\right|:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le\\
&\le\max\left\{\left\|h\right\|_{L_2(\Gamma_1)}\left\|\gamma T[\eta]Z[\eta]\right\|_{L_2(\Gamma_1)}:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le\\
&\le\max\left\{C_5\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\gamma T[\eta]Z[\eta]\right\|_{L_2(\Gamma_1)}:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le\\
&\le C_5\left\|\gamma T[\eta]Z[\eta]\right\|_{L_2(\Gamma_1)}=\chi(\eta).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, если величина $\chi(\eta)$ достаточно мала, то в практических расчетах градиент $J'[\eta]=w[\eta]$ можно заменить приближением

$$J'[\eta]\approx\tilde{w}[\eta].$$

**4. Методы минимизации функционала невязки**

Для решения вариационной задачи (6) часто используют градиентные методы [11–13]. К числу таких методов относится метод проекции градиента [13, гл. 8, §4], [11, §2.6]

$$\eta^{(n+1)}=\Pr\left(\eta^{(n)}-\lambda^{(n)}J'\left[\eta^{(n)}\right]\right),\ n=0,1,2,\ldots,$$

где Pr – оператор проектирования на выпуклое множество $\Lambda$ ; $\Lambda\ni\eta^{(0)}$ – начальное приближение; $\lambda^{(n)}$ – положительный шаг спуска; $J'\left[\eta^{(n)}\right]$ – градиент функционала $J$ в точке $\eta^{(n)}$.

Различные подходы к выбору шага спуска описаны в [11, 13]. К числу возможных можно отнести метод минимальных ошибок, в котором шаг спуска вычисляется по формуле

$$\lambda^{(n)}=J\left[\eta^{(n)}\right]\left\|J'\left[\eta^{(n)}\right]\right\|^{-2}_{L_2(\Omega)}\ \left(J'\left[\eta^{(n)}\right]\neq 0\right),\ n=0,1,2,\ldots;$$

в случае липшицевости градиента

$$\left\|J'[\eta_1]-J'[\eta_2]\right\|_{H^1(\Omega)}\le L\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_{H^1(\Omega)}\ \ \forall\eta_1,\eta_2\in\Lambda$$

шаг спуска можно выбирать из условия [13, с. 540]

$$0<\varepsilon_0\le\lambda^{(n)}\le 2/(L+2\varepsilon),\ n=0,1,2,\ldots,$$

где $\varepsilon_0$ и $\varepsilon$ – положительные числа, являющиеся параметрами метода.

**Утверждение 2**. Если градиенты $\nabla T[\cdot]:H^1(\Omega)\supset\Lambda\ni\eta\to\nabla T[\eta]\in\mathbf{L}_2(\Omega)$, $\nabla Z[\cdot]:H^1(\Omega)\supset\Lambda\ni\eta\to\nabla Z[\eta]\in\mathbf{L}_2(\Omega)$ и оператор взятия нормального следа $\gamma T[\cdot]:H^1(\Omega)\supset\Lambda\ni\eta\to\gamma T[\eta]\in\mathbf{L}_2(\Omega)$ удовлетворяют условию Липшица на множестве $\Lambda$ , то

градиент функционала невязки $J'[\cdot]$ и его приближения (16) и (17) также удовлетворяют условию Липшица на $\Lambda$.

**Доказательство.** Установим липшицевость приближения (17)

$$\left\|\tilde{w}[\eta_1]-\tilde{w}[\eta_2]\right\|_{H^1(\Omega)}=\max\left\{\left|\left\langle \tilde{w}[\eta_1]-\tilde{w}[\eta_2],h\right\rangle_{H^1(\Omega)}\right|:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}=$$

$$\max\left\{\left|\int_\Omega h\left(\nabla T[\eta_1],\nabla Z[\eta_1]\right)d\mathbf{x}-\int_\Omega\left(\nabla T[\eta_2],\nabla Z[\eta_2]\right)d\mathbf{x}\right|:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le$$

$$\le\max\left\{\left\|h\right\|_{L_6(\Omega)}\left\|\nabla T[\eta_1]-\nabla T[\eta_2]\right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\left\|\nabla Z[\eta_1]\right\|_{\mathbf{L}_{3/2}(\Omega)}:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}+$$

$$+\max\left\{\left\|h\right\|_{L_6(\Omega)}\left\|\nabla T[\eta_2]\right\|_{\mathbf{L}_{3/2}(\Omega)}\left\|\nabla Z[\eta_1]-\nabla Z[\eta_2]\right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le$$

$$\le\max\left\{C_6\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\nabla T[\eta_1]-\nabla T[\eta_2]\right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}C_7\left\|\nabla Z[\eta_1]\right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}+$$

$$+\max\left\{C_6\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}C_7\left\|\nabla T[\eta_2]\right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\left\|\nabla Z[\eta_1]-\nabla Z[\eta_2]\right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}:h\in H^1(\Omega),\left\|h\right\|_{H^1(\Omega)}\le 1\right\}\le$$

$$\le C_6C_7\left[L_1\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_{L_2(\Omega)}C_8+C_9L_2\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_{L_2(\Omega)}\right]\le C_6C_7\left[L_1C_8+L_2C_9\right]\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_{H^1(\Omega)}\le$$

$$\le L\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_{H^1(\Omega)},$$

где $L=C_6C_7\left[L_1C_8+L_2C_9\right]$; $C_6$, $C_7$, $C_8$, $C_9$, $L_1$, $L_2$ – неотрицательные числа, не зависящие от оцениваемых величин. Липшицевость приближения (17) доказана.

Аналогично доказываются липшицевость приближения (16) и самого градиента функционала невязки. Теорема доказана.

**5. Численное моделирование**

В работе проведена серия квазиреальных вычислительных экспериментов по решению обратной задачи с применением в качестве минимизирующего функционал невязки метода – метода проекции градиента. Расчеты показали, что в большинстве случаев метод достаточно хорошо сходится, если начальное приближение метода находится близко к испытываемому и ожидаемому коэффициенту. Если начальное приближение удалено от испытываемого и ожидаемого коэффициента, то в большинстве случаев метод не сходится к ожидаемому коэффициенту. Возможны случаи, когда при быстром и устойчивом убывании функционала невязки и градиента функционала к нулю, метод сходится совсем к другому коэффициенту. В рассматриваемой задаче метод оказывается весьма чувствительным к выбору начального приближения, шага спуска, а также к точности и способу аппроксимации градиента функционала. Приведем некоторые результаты численного моделирования.

**Пример 5.1.** Пусть задана модель с параметрами $m=2$, $q=0$, $\mathbf{u}=0$, $f=-1$, $\mu_1=0{,}5$, $\mu_2=1{,}5$, $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $\Gamma_1=\left\{(x_1,1):0\le x_1\le 1\right\}$.

В рамках квазиреального эксперимента требуется восстановить функцию

$$\eta^*=\eta^*(\mathbf{x})=0{,}75+0{,}25\sin(\pi x_1),\ \mathbf{x}\in\Omega.$$

Шаг спуска в методе проекции градиента на каждой итерации полагается равным $\lambda^*=1$, а затем удваивается или дробится до тех пор, пока функционал убывает.

Для вычисления градиента функционала использовались 9 первых членов базисной системы функций $\omega_{ij}=c_{ij}\cos(\pi i x_1)\cos(\pi j x_2)$, $(ij)\in I$, $I=\left\{(ij):i=\overline{0,2},j=\overline{0,2}\right\}$; $c_{ij}=1$, если $i=j=0$; $c_{ij}=2^{1/2}\left(1+\pi^2\left(i^2+j^2\right)\right)^{-1/2}$, если $i=0$ или $j=0$; $c_{ij}=2\left(1+\pi^2\left(i^2+j^2\right)\right)^{-1/2}$, если $(ij)\in I\setminus\left\{(00),(01),(10),(20),(02)\right\}$.

Для численного моделирования решения обратной задачи были разработаны программные коды в пакете OpenFOAM. В области $\Omega$ строилась сетка из 2 500 прямоугольных ячеек. Для аппроксимации краевых задач (1), (11) применялся метод конечных объемов.

В качестве начальных приближений принимались функции: 1) $\eta^{(0)} = \eta^{(0)}(x) = 0{,}8 + 0{,}15\sin(\pi x_1)$, $x \in \Omega$; 2) $\eta^{(0)} = \eta^{(0)}(\mathbf{x}) = 0{,}875$, $\mathbf{x} \in \Omega$; 3) $\eta^{(0)} = \eta^{(0)}(\mathbf{x}) = 0{,}75$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

На рис. 3 представлены: (a) график функции $\eta^* = \eta^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$; (b) график функции $T^* = T^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$; (c) график функции $\xi^* = \xi^*(x_1)$, $x_1 \in [0,1]$.

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования при первом начальном приближении для метода проекции градиента. На рис. 4, *a* пунктирной линией обозначены значения функционала $J_n = J\left(\eta^{(n)}\right)$, сплошной линией – норма градиента $\nabla_n = \|\nabla J\left(\eta^{(n)}\right)\|_{L_2(\Omega)}$; на рис. 4, *b* представлена погрешность восстановления $\delta_n = \|\eta^{(n)} - \eta^*\|_{L_2(\Omega)}$; на рис. 4, *c* – результат $\eta^{(n)}$ восстановления коэффициента $\eta^*$ на $n = 47$ шаге; на горизонтальных осях откладываются номера итераций.

Построенные приближения доставляют приемлемое решение обратной задаче примерно за 47 итераций с относительной погрешностью $r_{47} \approx 0{,}026$, $r_n = \delta_n / \|\eta_*\|_{L_2(\Omega)}$. Время расчетов 47 итераций на одном ядре Intel Xeon 2,2 ГГц равно 150,02 с. Далее итерационный процесс на данной сетке стабилизируется и не приводит к заметному уменьшению погрешности восстановления. При дальнейшем измельчении сетки погрешность вычислений уменьшается.

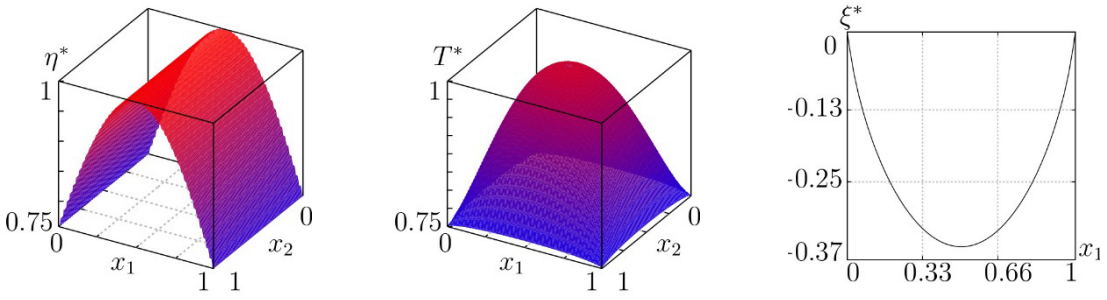



**Рис. 3. *a* – График функции $\eta^*(\mathbf{x})$; *b* – график функции $T^*(\mathbf{x})$; *c* – график функции $\xi^*(\mathbf{x})$**

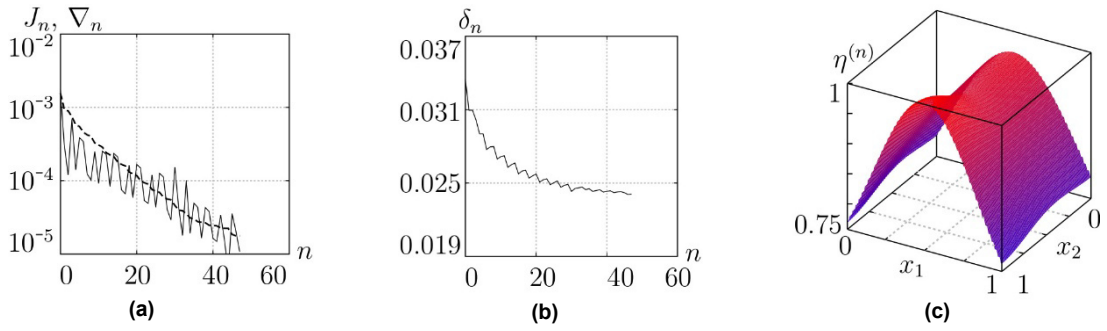



**Рис. 4. *a* – Невязка $J_n$ и градиент $\nabla_n$; *b* – погрешность $\delta_n$; *c* – восстановление при $n = 47$**

На рис. 5 представлены результаты численного моделирования при втором начальном приближении для метода проекции градиента. Построенные приближения доставляют приемлемое решение обратной задаче примерно за 56 итераций с относительной погрешностью $r_{56} \approx 0{,}064$ и временем расчетов 56 итераций на одном ядре Intel Xeon 2,2 ГГц равным 123,71 с. Далее итерационный процесс стабилизируется как в первом случае.

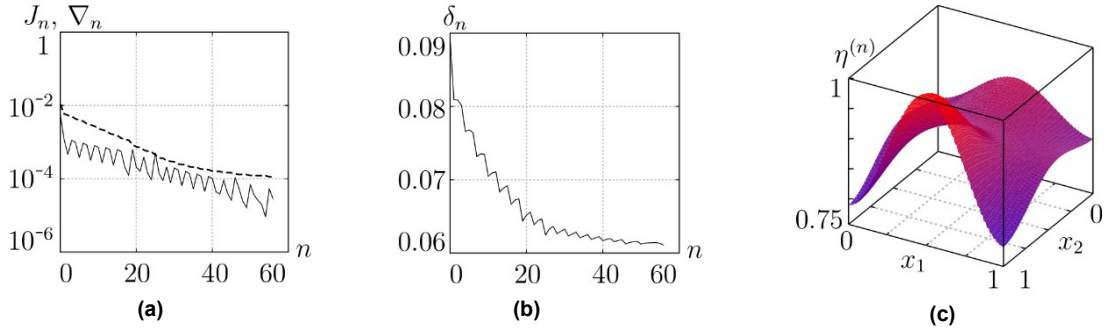



**Рис. 5.** ***a*** **– Невязка** $J_n$ **и градиент** $\nabla_n$ **;** ***b*** **– погрешность** $\delta_n$ **;** ***c*** **– восстановление при** $n = 56$

На рис. 6 представлены результаты численного моделирования при третьем начальном приближении для метода проекции градиента. Построенные приближения доставляют некоторое решение обратной задаче примерно за 50 итераций с относительной погрешностью $r_{50} \approx 0,091$ и временем расчетов 50 итераций на одном ядре Intel Xeon 2,2 ГГц равным 122,17 с. Далее итерационный процесс стабилизируется как в первом и втором случаях.

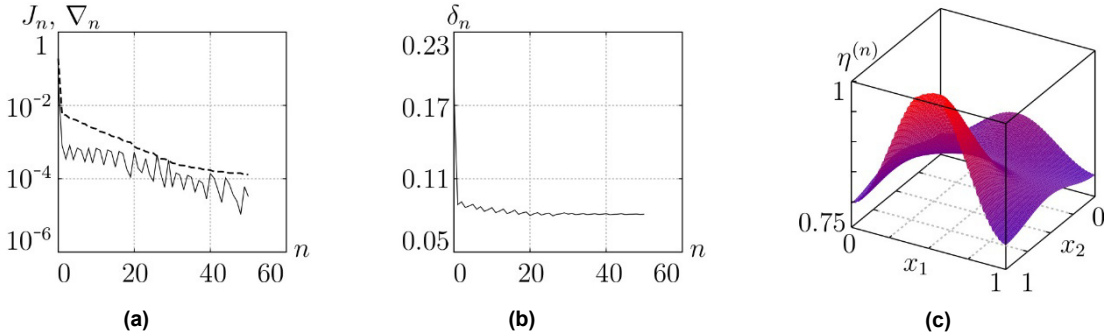



**Рис. 6.** ***a*** **– Невязка** $J_n$ **и градиент** $\nabla_n$ **;** ***b*** **– погрешность** $\delta_n$ **;** ***c*** **– восстановление при** $n = 50$

**Заключение**

В статье представлены алгоритм и результаты численного моделирования обратной задачи для стационарной гидродинамической модели диффузии-конвекции-реакции, состоящей в определении старшего коэффициента модели (коэффициента температуропроводности) по результатам наблюдения за следом нормальной производной на доступной части границы области функционирования модели. Обратные задачи математической физики, к числу которых относится рассмотренная задача, имеют большой теоретический и прикладной интерес, они находят многочисленные приложения в различных областях науки и техники. В связи с этим и в связи с интенсивным развитием вычислительной техники возникает необходимость в разработке эффективных численных методов решения обратных задач и задач управления. В этом направлении и проводились основные исследования в данной работе.

Обратная задача формализована в виде экстремальной задачи на минимум подходящего функционала невязки с минимизацией на множестве возможных искомых коэффициентов. В качестве основного метода минимизации функционала невязки выбран градиентный метод. Явно аналитически вычислен градиент Фреше минимизируемого функционала, его вычисление основано на решении специальной системы оптимальности. Это позволило значительно сократить объемы вычислений при нахождении градиента, время вычислительного процесса и сэкономить ресурсы вычислителя. Сочетание аналитических и численных методов решения задач позволило решить рассмотренную задачу механики сплошной среды за приемлемое время при использовании сравнительно малых ресурсов вычислителя. Результаты численного моделирования характерных примеров показывают работоспособность примененного подхода к решению обратных задач. Вместе с тем следует отметить, что метод оказался весьма чувствительным к выбору начального приближения, шага спуска и аппроксимации градиента функционала.

**Литература**

1. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

2. Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability / S. Chandrasekhar. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – 652 p.

3. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961. – 203 с.

4. Ладыженская, О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

5. Grisvard, P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains / P. Grisvard. – Boston; London; Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1985. – 410 p.

6. Adams, R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams. – New York: Academic Press, 1975. – 268 p.

7. Алексеев, Г.В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 365 с.

8. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

9. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

10. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и их приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

11. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.

12. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во УРСС, 2004. – 480 с.

13. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

14. Короткий, А.И. Ассимиляция нерегулярных граничных данных при восстановлении коэффициентов моделей / А.И. Короткий // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2025. – Т. 31, № 4. – С. 214–229.

15. Брезицкий, Р.В. Об устойчивости решений задач управления для нелинейной модели реакции-диффузии-конвекции / Р.В. Брезицкий, П.А. Максимов // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 409–421.

16. Пашаев, А.М. Задача оптимального управления коэффициентами нелинейного уравнения типа Шрёдингера / А.М. Пашаев, А.Д. Искендеров, М.А. Мусаева // Автоматика и телемеханика. – 2025. – № 4. – С. 22–33.

17. Короткий, А.И. Зависимость решений эллиптических уравнений от коэффициентов и приложение к корректности задач оптимального управления / А.И. Короткий // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем: сб. ст. – Свердловск, 1988. – С. 20–33.

***Поступила в редакцию 12 мая 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Короткий Александр Илларионович – доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделом, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: korotkii@imm.uran.ru.

Стародубцева Юлия Владимировна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: StarodubtsevaYV@yandex.ru.

*Bulletin of the South Ural State University*
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*
*2026, vol. 18, no. 4, pp. 37–47*

**DOI: 10.14529/mmph260404**

# NUMERICAL SIMULATION OF THE BOUNDARY DATA ASSIMILATION PROBLEM IN RECOVERING THE LEADING VALUE OF A DIFFUSION-CONVECTION-REACTION MODEL

***A.I. Korotkii, Y.V. Starodubtseva***
*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*
*E-mail: korotkii@imm.uran.ru, starodubtsevayv@yandex.ru*

Abstract. The paper considers an inverse problem for a stationary hydrodynamic diffusion–convection–reaction model. The goal is to recover the spatially distributed thermal diffusivity coefficient from observations of the normal derivative of the temperature on a part of the boundary. The forward problem is formulated as a boundary value problem with a homogeneous Dirichlet condition and prescribed velocity, reaction coefficient, and heat source. The inverse problem is treated as a control problem for the diffusivity coefficient and reduced to the minimization of a data-misfit functional over a convex set of admissible coefficients. An explicit expression for the Frechet gradient of the misfit functional is derived by using an adjoint equation and the optimality system. Approximations of the gradient based on a finite set of basis functions and on a simplified functional are proposed. The projected gradient method with a line search for the step size is applied. Numerical experiments are carried out in OpenFOAM using the finite volume method on a grid of 2500 cells. For several initial approximations the method converges to a satisfactory reconstruction: the relative error decreases to 2,6 %–9,1 % within 47–56 iterations. The results demonstrate the effectiveness of the proposed approach and its strong sensitivity to the initial guess, the step size, and the gradient approximation. The developed procedure is applicable to parameter identification in heat and mass transfer and control problems.

*Keywords: diffusion–convection–reaction equation; thermal diffusivity coefficient; inverse problem; residual functional; extremum problem; variational method; minimum point.*

**References**

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1987, 539 p.

2. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.

3. Ladyzhenskaya O.A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. 2nd English ed., rev. and enl. New York: Gordon and Breach, 1987, 224 p.

4. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. New York: Academic Press, 1968, 495 p.

5. Grisvard P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1985, 410 p.

6. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975, 268 p.

7. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoy zhidkosti* (Analysis and Optimization in Viscous Fluid Hydrodynamics). Vladivostok: Dal'nauka Publ., 2008, 365 p. (in Russ.).

8. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Partial Differential Equations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 392 p. (in Russ.).

9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Washington: Winston & Sons, 1977, 258 p.

10. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications*. Utrecht: VSP, 2002, 294 p.

11. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Berlin: De Gruyter, 2011, 473 p.

12. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: De Gruyter, 2007, 452 p.

13. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* (Optimization Methods). Moscow, Faktorial Press Publ., 2002, 824 p. (in Russ.).

14. Korotkii A.I. Assimilation of Irregular Boundary Data in Recovering Model Coefficients. Trudy *Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, Vol. 31, no. 4, pp. 214–229. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-214-229

15. Brezitskii R.V., Maksimov P.A. On the Stability of Solutions of Control Problems for a Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Model. *Differ. Equ.*, 2023. Vol. 59, no. 3, pp. 409–421. DOI: 10.1134/S0012266123030123.

16. Pashaev A.M., Iskenderov A.D., Musaeva M.A. Optimal Control Problem for Coefficients of a Nonlinear Schrödinger-Type Equation. *Autom. Remote Control*, 2025, no. 4, pp. 22–33. DOI: 10.1134/S0005117925040024.

17. Korotkii A.I. Zavisimost' reshenii ellipticheskikh uravnenii ot koeffitsientov i prilozhenie k korrektnosti zadach optimal'nogo upravleniya (Dependence of Solutions of Elliptic Equations on Coefficients and Application to Well-Posedness of Optimal Control Problems). *Kachestvennye voprosy teorii differentsial'nykh uravnenii i upravlyaemykh system*, Sverdlovsk, 1988, pp. 20–33. (in Russ.).

***Received May 12, 2026***

**Information about the authors**

Korotkii Alexander Illarionovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: korotkii@imm.uran.ru.

Starodubtseva Yulia Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: starodubtsevayv@yandex.ru.

УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph260405

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФАЗОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

***Н.А. Манакова, Н.Г. Николаева***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: manakovana@susu.ru, nikolaevang@susu.ru*

**Аннотация. Представлены результаты исследования особенностей фазовых многообразий полулинейных уравнений математической физики с вырожденным оператором при производной по времени. На примере обобщенного уравнения Хоффа и системы уравнений Плотникова в зависимости от параметров уравнений, размерности пространства и ядра оператора при производной по времени показано, что фазовые многообразия лежат на гладких банаховых многообразиях с особенностями. Приведены примеры, иллюстрирующие существование различных типов особенностей в фазовых многообразиях изучаемых уравнений.**

*Ключевые слова: уравнения соболевского типа; метод фазового пространства; особенности фазовых многообразий; обобщенное уравнение Хоффа; система уравнений Плотникова.*

**Введение**

Значительный класс современных моделей математической физики базируется на полулинейных неклассических уравнениях (или их системах) в частных производных, неразрешенных относительно старшей производной по времени, которые называются уравнениями соболевского типа [1–3]:

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{1}$$

Уравнения данного класса и соответствующие им начально-краевые задачи практически невозможно исследовать традиционными классическими методами. Это связано с принципиальным математическим препятствием – потенциальным вырождением оператора при старшей производной $\left(\ker L \neq \{0\}\right)$, что требует модернизации известных подходов и разработки принципиально новых аналитических методов. Вектор-функцию $u \in C^1\left((0,T),U\right)$ которая удовлетворяет (1), будем называть решением уравнения. Отметим, что в силу возможной вырожденности оператора $L$ классическая задача Коши

$$u(0) = u_0$$

оказывается разрешимой далеко не для любого вектора $u_0$. С целью преодоления данной трудности в работе [3] было предложено перейти к неклассическим начальным условиям, которые естественным образом учитывают вырождение оператора $L$. В качестве такого инструмента рассматривается начальное условие Шоуолтера–Сидорова:

$$L\left(u(x,0) - u_0(x)\right) = 0, \tag{2}$$

которое выступает обобщением классической постановки задачи Коши и полностью совпадает с ней в невырожденном случае.

Помимо проблемы вырождения одной из наиболее глубоких фундаментальных трудностей в теории дифференциальных уравнений остается феномен неединственности решений задачи Коши. Наличие этой особенности свидетельствует о том, что даже при кажущейся полноте исходных данных дальнейшая эволюция физической системы может оказаться непредсказуемой. Спектр моделей, демонстрирующих такое ветвление траекторий, чрезвычайно широк, и вырожденные полулинейные модели математической физики не являются исключением, также допуская существование неединственности решений.

Для исследования задачи (1), (2) Г.А. Свиридюком был построен метод фазового пространства [4], основанный на изучении структуры множества допустимых начальных значений

$$\mathfrak{B} = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \left( \mathbb{I} - Q \right) \left( Mu + N\left( u \right) \right) = 0 \right\}, \tag{3}$$

понимаемого как фазовое многообразие уравнения (1). Здесь $Q$ – специальным образом построенный спектральный проектор. Заметим, что все решения уравнения (1) поточечно лежат во множестве (3).

В случае, когда фазовое многообразие является простым банаховым $C^\infty$-многообразием, решение задачи (1), (2) единственно. Совсем иная ситуация возникает тогда, когда фазовое пространство лежит на многообразии, содержащем особенности, в этом случае возможна неединственность решений задачи Шоуолтера – Сидорова. Для исследования таких аномалий привлекается аппарат математической теории катастроф, возникшей при изучении понятий складок и сборок Уитни. Возникновение сборок Уитни и неединственности решения начальной задачи характерны для целого ряда нелинейных моделей математической физики, химических и биологических процессов. Так, на основе сборок Уитни исследуются критические характеристики транспортных потоков [5] и процессы нелинейного сжатия и диссипативного сглаживания волнового фронта [6], для описания популяционной динамики в экологии применяется тип особенности класса «бабочка» [7].

Исследованию связи неединственности решений задачи Шоуолтера–Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа (1), (2) с существованием складок и сборок Уитни в их фазовом многообразии (3) посвящены работы [1, 8, 9], в [10] впервые было продемонстрировано существование таких особенностей для данного класса уравнений. Приведем определение $k$-сборки Уитни фазового многообразия (3) в случае $\operatorname{dimker}\left( \mu + \Delta \right) = m, m \in \mathbb{N}$.

**Определение 1.** Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство, функция $G \in C^\infty\left( \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}; \mathbb{R} \right)$, $s = \left( s_1, s_2, \ldots, s_m \right)$. Уравнение $G\left( s, v \right) = 0$ определяет *$k$-сборку Уитни* над открытым множеством $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, если существуют функции $g_0, g_{11}, ..., g_{1m}, ..., g_{k1}, ...g_{km} \in C^\infty\left( \mathfrak{B}'; \mathbb{R} \right)$ такие, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$0 = g_0\left( v \right) + \sum_{i=1}^{m} s_i g_{1i} + ... + \sum_{i=1}^{m} s_i^2 g_{2i} + ... + \sum_{i=1}^{m} s_i^{k+1} g_{ki} \quad \forall v \in \mathfrak{B}'.$$

Рассмотрим математические модели, основанные на уравнениях или системах уравнений соболевского типа, содержащих в фазовом многообразии особенности. Все перечисленные ниже системы уравнений будут рассмотрены в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$:

1. Рассмотрим уравнение Хоффа

$$\left( \mu + \Delta \right) u_t = \alpha u + \beta u^3, \ x \in \Omega, t \in \left( 0, T \right) \tag{4}$$

с краевым условием Дирихле:

$$u\left( x, t \right) = 0, \left( x, t \right) \in \partial\Omega \times \left( 0, T \right). \tag{5}$$

Уравнение Хоффа в случае $n = 1$ описывает динамику деформации двутавровой балки, искомая функция $u = u\left( x, t \right)$, $x \in \Omega$, $t \in \left( 0, T \right)$, характеризует отклонения балки от положения равновесия, а параметр $\mu \in \mathbb{R}$ – продольную нагрузку на балку, параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ определяют свойства материала балки [11].

В работе [12] показано, что фазовое многообразие (3) уравнения (4) в случае $\operatorname{dimker}\left( \mu + \Delta \right) = m$, $m \in \mathbb{N}$, и $u = \sum_{i=1}^{m} s_i \varphi_{k_i} + u^\perp$, $u^\perp \in \mathfrak{U}^\perp = \left\{ u \in L_4\left( \Omega \right) : u, \varphi_{k_i} = 0 \right\}$ примет вид

$$\mathfrak{B}_{\text{i}} = \left\{ \left( s_1, s_2, \ldots, s_m, u^\perp \right) \in \mathbb{R}^m \times L_4\left( \Omega \right) : \right.$$

$$\left\{\left\langle \alpha\sum_{i=1}^{m}s_i\varphi_{k_i}+u^{\perp}+\beta\left(\sum_{i=1}^{m}s_i\varphi_{k_i}+u^{\perp})^3\right),\varphi_{k_i}\right\rangle\geq 0\right\},\ \ i=\overline{1,m}, \tag{6}$$

где $\{\lambda_k\}$ – собственные значения однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$, $\{\varphi_{k_i}\}$ – собственные функции однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$ при условии, что $\mu=\lambda_k$. Также в работе [13] было показано, что фазовое многообразие уравнения (4) является простым банаховым $C^{\infty}$-многообразием в случае $\alpha\beta>0$, в случае $\alpha\beta<0$ фазовое многообразие уравнения (4) может содержать 2-сборку Уитни [14]. В [12] были найдены условия на параметры $\alpha,\beta$, при которых фазовое многообразие уравнения (4) имеет особенности в случае $\dim\ker(\mu+\Delta)=m$.

2. Перейдем к рассмотрению системы уравнений Плотникова [15]

$$\begin{cases} v_t=\Delta v-\Delta w,\\ 0=v+\Delta w+\delta w-\beta w^3,\end{cases} \tag{7}$$

с граничным условием Робена

$$\left(\frac{v}{\partial n}-\mu v\right)=0,\left(\frac{w}{\partial n}+\mu w\right)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Система уравнений Плотникова возникает при обнулении нелинейных членов в уравнениях фазового поля (мезоскопическое описание фазовых переходов первого рода), а константы $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\delta\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ отражают динамику фазового превращения. Для одномерной задачи $n=1$ при условии $\dim\ker(\mu+\Delta)=1$ в работе [8] были выявлены условия единственности и неединственности решений задачи Шоуолтера–Сидорова для системы уравнений Плотникова с краевым условием Робена. Представим $v=v^{\perp}+r\varphi, w=w^{\perp}+s\varphi$, в данном случае множество $\mathfrak{B}$ определяется

$$\mathfrak{B}=\{\left((r,s),u^{\perp}\right)\in\mathbb{R}^2\times L_4(\Omega):\left\{\begin{array}{c}\int\limits_{\Omega}v^{\perp}\eta^{\perp}dx=\int\limits_{\Omega}(\nabla w^{\perp}\nabla\eta^{\perp}-\delta w^{\perp}\eta^{\perp}+\beta\left(w^{\perp}+s\varphi)^3\eta^{\perp}\right)dx,\\ \beta^{-1}r=\int\limits_{\Omega}(w^{\perp}+s\varphi)^3\varphi dx\end{array}\right\}, \tag{9}$$

где $s,r\in\mathbb{R}$ и $\varphi$ – собственная функция однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$, соответствующая собственному значению $\lambda_1$.

3. Рассмотрим вырожденную систему Фитц Хью–Нагумо [16, 17]

$$\begin{cases}\varepsilon_1 v_t=\alpha_1\delta v+\beta_{12}w-\beta_{11}v,\\ 0=\alpha_2\delta w+\beta_{22}w-\beta_{21}v-w^3\end{cases} \tag{10}$$

с однородным условием Дирихле

$$v(s,t)=0,w(s,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Динамика мембранного потенциала, а также поведение натриевых и калиевых токов моделируются искомыми функциями $v(s,t)$ и $w(s,t)$. Свойства биологической среды, включая электропроводность, порог возбуждения, скорость его изменения и реполяризацию, задаются вещественными параметрами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_{11}$, $\beta_{12}$, $\beta_{21}$, $\beta_{22}\in\mathbb{R}$. В работе [9] были выявлены условия, накладываемые на параметры системы, при которых фазовое многообразие может содержать 2-

сборку Уитни. Представим $v = v^{\perp} + r\varphi, w = w^{\perp} + q\varphi,$ в данном случае множество $\mathfrak{B}$ определяется

$$\mathfrak{B} = \{\left((r,q),u^{\perp}\right) \in \mathbb{R}^2 \times L_4\left(\Omega\right):$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \int\limits_{\Omega} -v^{\perp}\eta^{\perp}dx = \int\limits_{\Omega}(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}w^{\perp}\eta^{\perp} + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}}\sum\limits_{i=1}^{n} w_{s_i}^{\perp}\eta_{s_i}^{\perp} + \frac{1}{\beta}\left(w^{\perp}+q\varphi\right)^3\eta^{\perp}\Big)dx, \\ -\beta_{21}r = \int\limits_{\Omega}(w^{\perp}+q\varphi)^3\varphi dx \end{array} \right\}. \tag{12}$$

В настоящей статье исследуется обобщенная модель Хоффа, выступающая базовой теоретической основой для применения изложенных подходов. Рассмотрим обобщенное уравнение Хоффа

$$\left(\mu + \Delta\right)u_t = \alpha_0 u + \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 + \ldots + \alpha_{k-1}u^{2k-1} + \alpha_k u^{2k+1},\ x \in \Omega,\ t \in \left(0,T\right), \tag{13}$$

с условием Дирихле

$$u\left(x,t\right) = 0,\ \left(x,t\right) \in \partial\Omega \times \left(0,T\right). \tag{14}$$

Здесь неизвестная функция $u = u\left(x,t\right),\ x \in \Omega,\ t \in \left(0,T\right)$, а параметры $\mu \in \mathbb{R}$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0,k}$. В зависимости от параметров уравнения будем находить критерии, накладываемые на них, при которых фазовое многообразие является простым или содержит особенности.

**1. Особенности фазовых многообразий**

Перейдем к изучению структуры фазового многообразия обобщенного уравнения Хоффа (13) в случае $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$. Основная задача – выявить такие параметры уравнения $\alpha_i,\ i = \overline{1,k}$, при которых фазовое многообразие содержит особенности. Пусть $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}{}_2^1\left(\Omega\right)$, $V_l = L_{2l}\left(\Omega\right), l = \overline{1,k}$, $\mathcal{H} = L_2\left(\Omega\right)$. Отметим, что, если $k = 2$ при $n = 4$ или $k \le 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1,2$ имеют место плотные и непрерывные вложения:

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow V_l \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow V_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow V_1^* \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow V_l^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^*. \tag{15}$$

Операторы $L$ и $N_l$ определим следующим образом:

$$\left\langle Lu, v\right\rangle = \int\limits_{\Omega}(\mu uv - \nabla u \cdot \nabla v)dx \quad \forall u, v \in \mathfrak{H},$$

$$\left\langle N_l\left(u\right), v\right\rangle = \alpha_l \int\limits_{\Omega} u^{2l-1}vdx \quad \forall u, v \in V_l,\ l = 1,\ldots,k.$$

**Лемма 1.** $\left(i\right)$ При всех $\mu \in \mathbb{R}$ оператор $L \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H};\mathfrak{H}^*\right)$ самосопряжен, фредгольмов, причем ортонормальное семейство $\left\{\varphi_k\right\}$ его функций образует базис пространства $\mathcal{H}$.

$\left(ii\right)$ При всех $\alpha_l \in \mathbb{R}_+$ операторы $N_l \in C^{\infty}\left(V_l;\mathrm{V}_l^*\right)$ $s$-монотонны и $\left(2l\right)$-коэрцитивны.

**Доказательство**. Утверждение $\left(i\right)$ следует свойств эллиптического дифференциального оператора. Покажем справедливость утверждения $\left(ii\right)$. Производная Фреше оператора $N_l$ в точке $u \in \mathfrak{B}_l$ определяется формулой

$$\left\langle N_{lu}^{'}v, w\right\rangle = \alpha_l\left(2l-1\right)\int\limits_{\Omega} u^{2l-2}vwdx.$$

Отсюда вытекает $C^{\infty}$-гладкость. Действительно,

$$\left|N_l\left(u\right), u\right| \le \mathrm{const}\left\| u \right\|_{L_{2l}(\Omega)}^{2l},$$

$$\left|N'_{lu}v_1,v_1\right| \le \text{const}\left\|u\right\|^{2l-2}_{L_{2l}(\Omega)}\left\|v_1\right\|^2_{L_{2l}(\Omega)},$$

$$\ldots$$

$$\left|\left\langle N^{(2l-1)}_{lu}\left(v_1,v_2,...,v_{2l-1}\right),w\right\rangle\right| \le \text{const}\left\|v_1\right\|_{L_{2l}(\Omega)}\left\|v_2\right\|_{L_{2l}(\Omega)}\cdot\ldots\cdot\left\|v_{2l-1}\right\|_{L_{2l}(\Omega)}\left\|w\right\|_{L_{2l}(\Omega)},$$

где символом const обозначены разные константы, но все они не зависят от векторов $v_1,v_2,...,v_{2l-1},w\in L_{2l}\left(\Omega\right)$, а через $N'_{lu},...,N^{(2l-1)}_{lu}$ обозначены соответственно производные Фреше оператора $N_l$ в точке $u$. Производная Фреше $N^{(2l)}_u \equiv 0$. Поскольку

$$\left\langle N'_{lu}v,v\right\rangle = \alpha_l\left(2l-1\right)\int_\Omega u^{2l-2}v^2dx > 0 \quad \forall v\in L_{2l}\left(\Omega\right),\ v\neq 0,$$

то оператор $N$ $s$-монотоннен [1]. Из того, что

$$\left|\left\langle N_l\left(u\right),u\right\rangle\right| = \left|\alpha_l\right|\left\|u\right\|^{2l}_{L_{2l}(\Omega)},$$

вытекает $\left(2l\right)$-коэрцитивность операторов $N_l$.

В силу заданных операторов задача Шоуолтера–Сидорова (2) для уравнения (13) примет вид

$$\left(\mu+\Delta\right)\left(u\left(x,0\right)-u_0\left(x\right)\right)=0,\ x\in\Omega. \tag{16}$$

Для обобщенной модели Хоффа проекторы примут следующий вид:

$$P=Q=\mathbb{I}-\left\langle\cdot,\varphi_k\right\rangle,\ k:\mu=\lambda_k.$$

Согласно (3) построим множество $\mathfrak{B}$ для уравнения (13):

$$\mathfrak{B}=\left\{\begin{array}{c} u\in\mathfrak{H}:\int\limits_\Omega(\alpha_0u+\alpha_1u^3+\alpha_2u^5+\ldots+ \\ +\alpha_{k-1}u^{2k-1}+\alpha_ku^{2k+1})\varphi_{k_i}\ dx=0,\mu=\lambda_k \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Представим $u=\sum\limits_{i=1}^m s_i\varphi_{k_i}+u^\perp$, $u^\perp\in V_l^\perp=\left\{u\in L_{2l}\left(\Omega\right):\left\langle u,\varphi_{k_i}\right\rangle=0\right\}$, тогда множество $\mathfrak{B}$ $C^\infty$-диффеоморфно пересечению множеств

$$\mathfrak{B}_i=\{(s_1,s_2,...,s_m,u^\perp)\in\mathbb{R}\times L_{2l}(\Omega):$$

$$\int\limits_\Omega(\alpha_0(\sum_{i=1}^m s_i\varphi_{k_i}+u^\perp)+\alpha_1(\sum_{i=1}^m s_i\varphi_{k_i}+u^\perp)^3+\alpha_2(\sum_{i=1}^m s_i\varphi_{k_i}+u^\perp)^5+\ldots+ \tag{18}$$

$$\alpha_{k-1}(\sum_{i=1}^m s_i\varphi_{k_i}+u^\perp)^{2k-3}+\alpha_k(\sum_{i=1}^m s_i\varphi_{k_i}+u^\perp)^{2k-1})\varphi_{k_i}dx=0\},\ i=\overline{1,m}.$$

Множество $\mathfrak{B}$ описывает фазовое многообразие модели (13), (14).

**Замечание 1.** Согласно теории Р. Тома [18], любое дифференцируемое отображение $F\left(s\right)$ в эволюционной системе вида $\dfrac{ds}{dt}=F\left(s\right)$ может быть разложено на сумму старшего ростка многочлена и его параметрического возмущения. Применение данного подхода к уравнениям соболевского типа открывает возможность для классификации особенностей их фазовых многообразий.

**Определение 2.** Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство, функция $G\in C^\infty\left(\mathbb{R}^m\times\mathfrak{B};\mathbb{R}\right)$, $s=\left(s_1,s_2,\ldots,s_m\right)$. Уравнение $G\left(s,v\right)=0$ определяет:

1) особенность «ласточкин хвост» в случае $\dim\ker\left(\mu+\Delta\right)=1$ и ростке $s^5$:

$$\frac{s^5}{5}+q_1\frac{s^3}{3}+q_2\frac{s^2}{2}+q_3s;$$

2) особенность «бабочка» в случае $\dim\ker\left(\mu+\Delta\right)=1$ и ростке $s^7$ :

$$\frac{s^6}{6}+q_1\frac{s^4}{4}+q_2\frac{s^3}{3}+q_3\frac{s^2}{2}+q_4 s;$$

3) особенность «эллиптическая омбилика» в случае $\dim\ker(\mu+\Delta)=2$ и ростке $s_1^3+s_2^3$:

$$s_1^2-3s_1s_2^2+q_1\left(s_1^2+s_2^2\right)-q_2s_1-q_3s_2;$$

4) особенность «гиперболическая омбилика» в случае $\dim\ker(\mu+\Delta)=2$ и ростке $s_1^3-s_1s_2^2$:

$$s_1^2+s_2^2+q_3s_1s_2-q_1s_1-q_2s_2.$$

**Теорема 1.** Пусть $\alpha_i$ одного знака, тогда фазовым многообразием $\mathfrak{B}$ уравнения (13) служит простое банахово $C^\infty$-многообразие, моделируемое подпространством, являющемся дополнением к $\ker(\mu+\Delta)$.

**Доказательство.** Поскольку оператора $L$ является самосопряженным и фредгольмовым, то справедливо $\mathfrak{H}\supset\ker L\equiv\operatorname{co}\ker L\subset\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{H}=\ker L\oplus\operatorname{coim}L$. Таким образом, существует ортогональный проектор $P$ и любой вектор $u\in\mathfrak{H}$ представим единственным способом в виде $u=u^0+u^1$, где $u^0\in\ker L$, а $u^1\in\operatorname{coim}L$. Зафиксируем $u^1\in\operatorname{coim}L$ и рассмотрим оператор

$$A\equiv(\mathbb{I}-Q)\left(\alpha_0\mathbb{I}+\sum_{l=1}^{k}N_l\right)\left(\cdot+u^1\right):\ker L\to\operatorname{co}\ker L.$$

Согласно лемме 1 и 2$l$-коэрцитивности операторов $N_l$ $\forall\alpha_l\in\mathbb{R}_+$ следует коэрцитивность оператора $A$

$$\lim_{\|u^0\|\to\infty}\frac{A\left\langle(u^0),u^0\right\rangle}{\|u^0\|}=+\infty.$$

Тогда построенный оператор $A$ будет строго монотонным

$$\left\langle A(u_1^0)-A(u_2^0),u_1^0-u_2^0\right\rangle>0,\ \forall u_1^0,u_2^0\in\ker L,\ u_1^0\neq u_2^0,$$

что вытекает из $s$-монотонности операторов $N_l$ и неотрицательной определенности оператора $L$. Следовательно, по теореме Вишики–Минти–Браудера существует единственный корень $u^0\in\ker L$ уравнения (3). Таким образом, $A\in C^\infty(\ker L,\operatorname{coker}L)$. Итак, построено отображение $\Delta:\operatorname{coim}L\to\ker L$ такое, что

$$u^0=\Delta(u^1)\ \ \forall u^1\in\operatorname{coim}L.$$

Это, в свою очередь, означает, что для любого вектора $u^1\in\operatorname{coim}\ L$ существует единственный вектор $u^0\in\ker L$ такой, что $u^0+u^1\in\mathfrak{B}$.

**Замечание 2.** В остальных случаях фазовое многообразие $\mathfrak{B}$ уравнения (13) при $\dim\ker(\mu+\Delta)=m$ содержит сборки Уитни, образующие особенности высших порядков.

Приведем примеры, подтверждающие наличие особенностей в структурах фазовых многообразий уравнений. Для этого будем использовать проекционный метод Галеркина. Будем искать приближенное решение для ортогональной составляющей $u^\perp$ в виде частичной суммы ряда по собственным функциям оператора Лапласа

$$u^\perp(x)=\sum_{j=1,\,j\neq k}^{K}a_j\sin(jx),\ a_j\in\mathbb{R},\mu=\lambda_k,$$

где $K$ обозначает число галеркинских приближений, а условие $j\neq k$ гарантирует строгую ортогональность функции $u^\perp$.

**Пример 1.** Рассмотрим обобщенное уравнение Хоффа при $k=2$:

$$u_t+u_{xxt}=-u+0{,}5u^3+0{,}2u^5,\ x\in\Omega,\ t\in(0,T) \tag{19}$$

при $\Omega=(0,\pi)$, $T=1$, $K=3$. В условиях данного примера $\mu$ совпадает с первым собственным значением $\lambda_1=1$ однородной задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)$ в области $\Omega$ и рассматривае-

мому собственному значению $\lambda_1$ соответствует одна собственная функция. Представим $u = s\varphi_1 + u^{\perp}$, где $\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)$, $u^{\perp} = a_1\sin(2x) + a_2\sin(3x), \langle u^{\perp}, \varphi_1 \rangle = 0$. Множество (18) для уравнения (19) в случае $\dim\ker(\mu + \Delta) = 1$ определяется следующим уравнением:

$$s^5 - 14{,}050\,s^4 + 131{,}066\,s^3 - 360{,}06\,s^2 + 1530{,}143\,s - 1141{,}018 = 0. \qquad (20)$$

Согласно определению 2 вид фазового многообразия совпадает с особенностью «ласточкин хвост» (рис. 1).

**Пример 2.** Рассмотрим обобщенное уравнение Хоффа при $k = 3$ в случае $\dim\ker(\mu + \Delta) = 1$

$$4u_t + u_{xxt} = -u + 0{,}5u^3 + 0{,}2u^5 + 0{,}05u^7,\ x \in \Omega,\ t \in (0, T), \qquad (21)$$

при $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $K = 3$. В условиях данного примера $\mu$ совпадает с вторым собственным значением $\lambda_2 = 4$ однородной задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)$ в области $\Omega$ и рассматриваемому собственному значению $\lambda_2$ соответствует одна собственная функция.

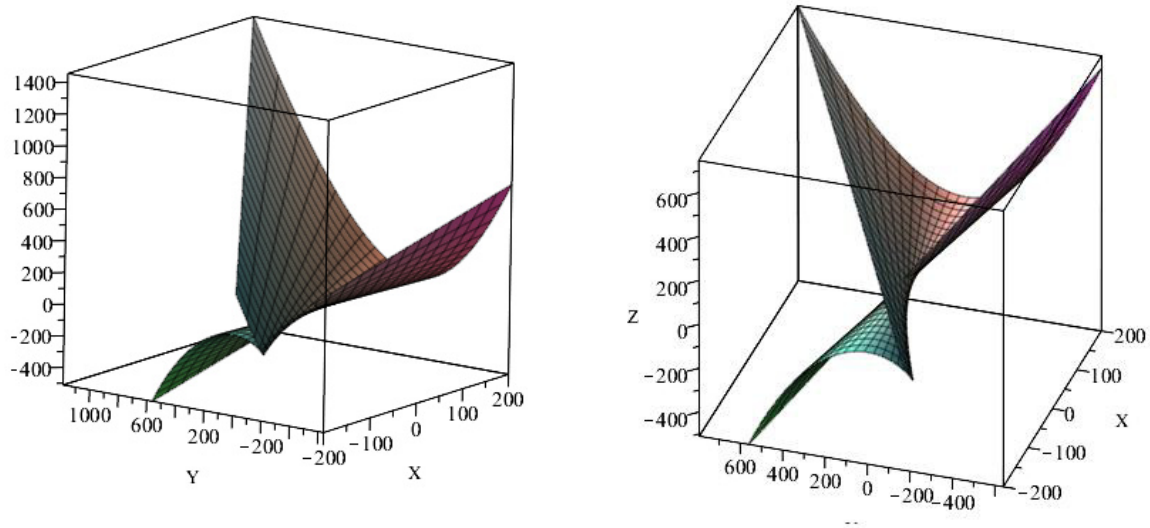



**Рис. 1. Фазовое многообразие уравнения (19) с особенностью «ласточкин хвост»**

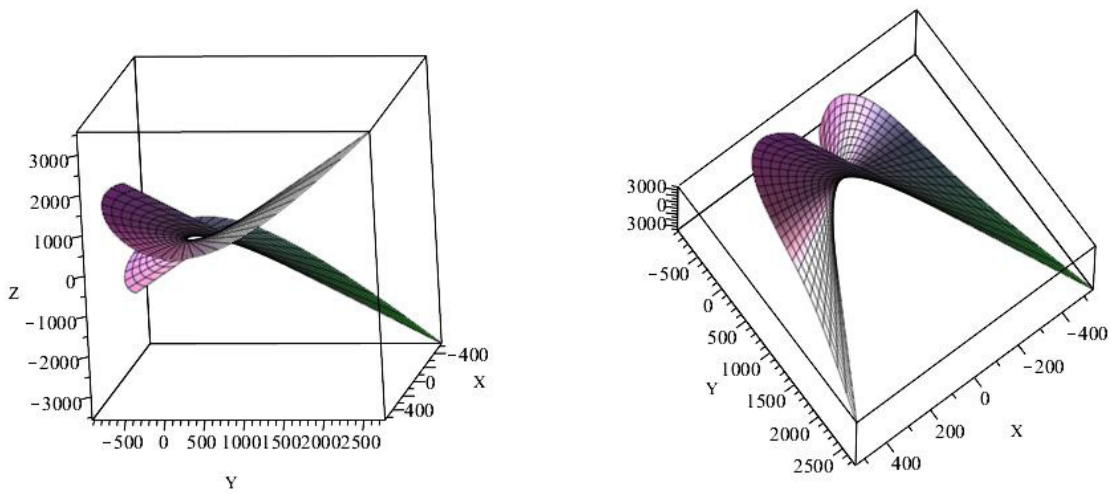



**Рис. 2. Фазовое многообразие уравнения (21) с особенностью «бабочка»**

Представим $u = s\varphi_2 + u^{\perp}$, где $\varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)$, $\langle u^{\perp}, \varphi_2 \rangle = 0$ и $u^{\perp} = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(3x)$.

Множество (18) для уравнения (21) в случае $\dim\ker(\mu + \Delta) = 1$ определяется следующим уравнением

$$s^7 + 228{,}601 s^5 + 1332{,}327 s^3 + 2977{,}832 s = 0. \tag{22}$$

На рис. 2 изображено фазовое многообразие (22) уравнения (21), представляющее особенность «бабочка».

**Пример 3.** Рассмотрим систему уравнений Плотникова

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - w_{xx}, \\ 0 = v + w_{xx} + w - 2w^3 \end{cases} \tag{23}$$

с краевыми условиями вида

$$(u_x - u)(0,t) = (u_x + u)(\pi,t) = 0, t \in \mathbb{R}_+,$$

где $u = \mathrm{col}(v,w)$, $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$. В условиях данного примера $\Omega = (0,\pi)$, $T = 1$, $K = 2$. Параметр $\delta$ совпадает с первым собственным значением $\lambda_1 = 1$ однородной краевой задачи для оператора $(-\Delta)$ в области $\Omega$, и рассматриваемому собственному значению $\lambda_1$ соответствует одна собственная функция. Представим $v = v^{\perp} + r\varphi_1$, $w = w^{\perp} + s\varphi_1$, где $\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}(\sin(x) + \cos(x))$, $\langle w^{\perp}, \varphi_1 \rangle = 0$ и $w^{\perp}(x) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{K} (a_j \sin(jx) + b_j \cos(jx)), a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $K$ – число галеркинских приближений. Множество (9) определяется следующим уравнением:

$$\begin{cases} 4{,}712 = -1{,}357 + 6{,}997 s + 16{,}119 s^2 + 13{,}703 s^3, \\ 0{,}5 r = 0{,}477 s^3 + 2{,}318 s^2 + 4{,}030 s + 0{,}583. \end{cases} \tag{24}$$

На рис. 3 изображено фазовое многообразие (24) системы уравнений (23), демонстрирующее 2-сборку Уитни.

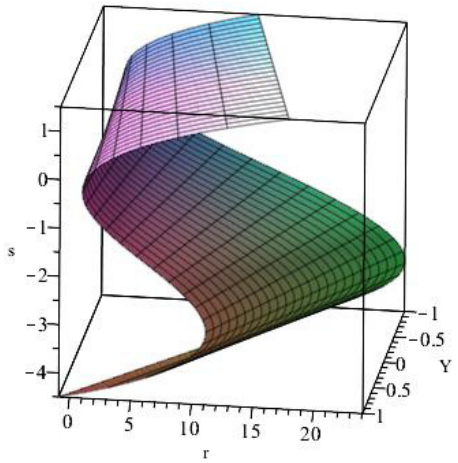



**Рис. 3. Фазовое многообразие системы уравнений (23), содержащее 2-сборку Уитни**

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26-21-20103, https://rscf.ru/project/26-21-20103/.*

## Литература

1. Manakova, N.A. Semilinear Models of Sobolev Type. Non-Uniqueness of Solution to the Showalter–Sidorov Problem / N.A. Manakova, O.V. Gavrilov, K.V. Perevozhikova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 84–100.

2. Zamyshlyaeva, A.A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Linear Sobolev Type Equations of Higher Order / A.A. Zamyshlyaeva, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 5–16.

3. Sviridyuk, G.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations / G.A. Sviridyuk, S.A. Zagrebina // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2010. – Vol. 3, no. 1. – P. 104–125.

4. Sviridyuk, G.A. The Phase Space of a Class of Operator Equations of Sobolev Type / G.A. Sviridyuk, T.G. Sukacheva // Differential Equations. – 1990. – Vol. 26, no. 2. – P. 250–258.

5. An Analysis of the Catastrophe Model and Catastrophe Characteristics of Traffic Flow Based on Cusp Catastrophe Theory / Y. Huang, H. Zhang, H. Liu, S. Zhang // Journal of Advanced Transportation. – 2022. – Vol. 2022. – article ID: 2837338.

6. Zakharov S.V. Singular Asymptotics in the Cauchy Problem for a Parabolic Equation with a Small Parameter / S.V. Zakharov // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. – 2015. – Vol. 21, no. 1. – P. 97–104.

7. Butterfly Catastrophe Model for Wheat Aphid Population Dynamics: Construction, Analysis and Application / W. Wu, M.K.D.K. Piyaratne, H. Zhao *et al*. // Ecological Modelling. – 2014. – Vol. 288. – P. 1–7.

8. Gil'mutdinova, A.F. On the Non-Uniqueness of Solutions of Showalter–Sidorov Problem for One Plotnikov Model / A.F. Gil'mutdinova // Vestnik of Samara State University. – 2007. – no. 9/1. – P. 85–90.

9. Manakova, N.A. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova // Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”. – 2018. – Vol. 11, no. 4. – P. 161–168.

10. Bokarieva, T.A. Whitney Folds in Phase Spaces of Some Semilinear Sobolev-Type Equations / T.A. Bokarieva, G.A. Sviridiuk // Mathematical Notes. – 1994. – Vol. 55, no. 3. – P. 237–242.

11. Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff. – Journal of the Aeronautical Science. – 1956. – № 7. – P. 1–20.

12. Nikolaeva, N.G. Peculiarities of the Phase Manifold of One Sobolev-Type Equation / N.G. Nikolaeva, N.A. Manakova // Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”. – 2026. – Vol. 19, no. 3. – P. 70–78.

13. Sviridyuk, G.A. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation / G.A. Sviridyuk, V.O. Kazak // Mathematical Notes. – 2002. – Vol. 71, no. 1–2. – P. 262–266.

14. Sviridyuk, G.A. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation / G.A. Sviridyuk, I.K. Trineeva // Russian Mathematics. – 2005. – Vol. 49, no. 10. – P. 49–55.

15. Plotnikov, P.I. The Stefan Problem with Surface Tension as a Limit of the Phase Field Model / P.I. Plotnikov, V.N. Starovoitov // Differential Equations. – 1993. – Vol. 29, no. 3. – P. 395–404.

16. Fitzhugh, R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. Fitzhugh // Biophysical Journal. – 1961. – Vol. 1, no. 6. – P. 445–466.

17. Nagumo, J. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // IRE Transactions on Nuclear Science. – 1962. – Vol. 50, no. 10. – P. 2061–2071.

18. Thom, R. Stabilite Structurelle et Morphogenese / R. Thom. – Paris, Benjamin, 1972. (in French).

***Поступила в редакцию 10 сентября 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Манакова Наталья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: manakovana@susu.ru.

Николаева Надежда Геннадьевна – старший преподаватель, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: nikolaevang@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 48–58***

**DOI: 10.14529/mmph260405**

# INVESTIGATION OF THE FEATURES OF PHASE MANIFOLDS FOR SEMILINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

***N.A. Manakova, N.G. Nikolaeva***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: manakovana@susu.ru, nikolaevang@susu.ru*

Abstract. The paper presents the results of an investigation into the features of phase manifolds for semilinear equations of mathematical physics featuring a degenerate operator at the time derivative. Using the generalized Hoff equation and the Plotnikov system of equations as examples, it is demonstrated that the phase manifolds lie on smooth Banach manifolds with singularities, depending on the equation parameters, spatial dimension, and the kernel of the operator at the time derivative. Examples illustrating the existence of various types of singularities in the phase manifolds of the equations under study are provided.

*Keywords: Sobolev-type equations; phase space method; features of phase manifolds; generalized Hoff equation; Plotnikov system of equations.*

## References

1. Manakova N.A., Gavrilova O.V., Perevozhikova K.V. Semilinear Models of Sobolev Type. Non-Uniqueness of Solution to the Showalter–Sidorov Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, Vol. 15, no. 1, pp. 84–100. DOI: 10.14529/mmp220105

2. Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Linear Sobolev Type Equations of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, Vol. 8, no. 4, pp. 5–16. DOI: 10.14529/mmph160401

3. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125.

4. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. The Phase Space of a Class of Operator Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, Vol. 26, no. 2, pp. 250–258.

5. Huang Y., Zhang H., Liu H., Zhang S. An Analysis of the Catastrophe Model and Catastrophe Characteristics of Traffic Flow Based on Cusp Catastrophe Theory. *Journal of Advanced Transportation,* 2022, Vol. 2022, article ID: 2837338. DOI: 10.1155/2022/2837338

6. Zakharov S.V. Singular Asymptotics in the Cauchy Problem for a Parabolic Equation with a Small Parameter. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2015, Vol. 21, no. 1, pp. 97–104.

7. Wu W., Piyaratne M.K.D.K., Zhao H., Li C., Hu Z., Hu X. Butterfly Catastrophe Model for Wheat Aphid Population Dynamics: Construction, Analysis and Application. *Ecological Modelling*, 2014, Vol. 288, pp. 1–7. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2014.05.017

8. Gil'mutdinova A.F. On the Non-Uniqueness of Solutions of Showalter–Sidorov Problem for One Plotnikov Model. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 9/1, pp. 85–90.

9. Manakova N.A., Gavrilova O.V. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 4, pp. 161–168. DOI: 10.14529/mmp180413

10. Bokarieva T.A., Sviridiuk G.A. Whitney Folds in Phase Spaces of Some Semilinear Sobolev-Type Equations. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF0211077610

11. Hoff, N.J. Creep Buckling. *Journal of the Aeronautical Science*, 1956, № 7, pp. 1–20.

12. Nikolaeva N.G., Manakova N.A. Peculiarities of the Phase Manifold of One Sobolev-Type Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2026, Vol. 19, no. 3, pp. 70–78. DOI: 10.14529/mmp260307

13. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, Vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266. DOI: 10.4213/mzm34712

14. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation. *Russian Mathematics*, 2005, Vol. 49, no. 10, pp. 49–55.

15. Plotnikov P.I., Starovoitov V.N. The Stefan Problem with Surface Tension as a Limit of the Phase Field Model. *Differential Equations*, 1993, Vol. 29, no. 3, pp. 395–404.

16. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, Vol. 1, no. 6, pp. 445–466.

17. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *IRE Transactions on Nuclear Science*, 1962, Vol. 50, no. 10, pp. 2061–2071.

18. Thom R. *Stabilite Structurelle et Morphogenese*. Paris, Benjamin, 1972. (in French)

***Received September 10, 2026***

**Information about the authors**

Manakova Natalia Alexandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: manakovana@susu.ru.

Nikolaeva Nadezhda Gennadievna is Senior Lecturer, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: nikolaevang@susu.ru.

УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph260406

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ К ФИНАЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ ПОЗИТИВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ МОДЕЛИ ГЕМОДИНАМИКИ

***Н.Н. Соловьёва, А.Л. Корягин, С.А. Загребина, М.А. Сагадеева***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: solovyovann@susu.ru*

**Аннотация. Статья содержит описание задачи стартового управления к финальному состоянию решениями модели циркуляции крови в конечностях (модель гемодинамики). По сути, такая постановка задачи управления означает, что требуется в начальный момент выбрать начальные условия так, чтобы к выбранному моменту времени состояние системы приняло требуемый вид (финальное состояние). При построении решений модели гемодинамики подчеркивается их принципиальная позитивность в силу используемых параметров. Она может быть рассмотрена в рамках позитивной разрешимости уравнений соболевского типа. На основе ранее полученных результатов о существовании решений задачи стартового управления позитивными решениями уравнений соболевского типа в относительно ограниченном случае в данной статье строится численное решение такой задачи для модели гемодинамики. При построении численных решений производится переход к предбазису и, используя коэффициентный метод, находится оптимальное стартовое управление для различных финальных функций состояния. Статья кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой части описываются позитивные решения модели гемодинамики в рамках теории уравнений соболевского типа и существование решения задачи стартового управления к финальному состоянию такими позитивными решениями, а во второй – приводятся построение численного решения этой задачи и результаты вычислительных экспериментов.**

*Ключевые слова: уравнения соболевского типа; банахова структура; функционал штрафа; предбазис; вычислительный эксперимент.*

## Введение

Рассмотрим модель гемодинамики [1] как конкретную интерпретацию уравнения соболевского типа [2] вида

$$L\dot{u} = Mu, \quad \ker L \neq \{0\}, \tag{1}$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова [3, 4]

$$P(u(0) - u_0) = 0. \tag{2}$$

Здесь операторы $L, M \in \boldsymbol{L}(U;F)$ (т. е. линейные, непрерывные операторы), $U, F$ – банаховы структуры [5, 6], вектор-функция $u:[0,T] \to U$ отвечает функции изменения во времени состояния параметров системы (1), $u_0 \in U$ – начальное состояние, оператор $P \in \boldsymbol{L}(U)$ – проектор на прообраз оператора $L$. Отличительной чертой уравнений соболевского типа [2, 7, 8] является учет возможности неразрешимости (1) относительно производной и, как следствие, принципиальная неразрешимость начальных задач с условием Коши при произвольных начальных значениях [4]. При изучении модели гемодинамики [9] отмечается, что ее решения могут принимать только положительные значения в силу физической интерпретации переменных системы [1], поэтому будем рассматривать эту модель в рамках позитивной разрешимости уравнений соболевского типа [10].

Задача стартового управления к финальному наблюдению состоит в том, чтобы для функции $z \in U$, описывающей желаемое состояние системы в момент $T$ найти управление $v^*$, доставляющее минимум функционала штрафа:

$$J(v^*) = \min J(v) = \min \left\| u(T) - z \right\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{3}$$

где $u(T)$ – решение задачи (1), (2) при $u_0 = v$. Такая постановка задачи управления означает, что в начальный момент времени требуется выбрать начальное условие $u_0 \in U$ так, чтобы к выбранному моменту времени состояние системы (1) приняло требуемый вид $z \in U$, которое мы называем финальным состоянием.

Задача оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа с условием Коши впервые была рассмотрена в работе [11]. В дальнейшем эта задача была исследована в различных случаях [12–16]. Отдельно отметим работу [14], где в одной из первых была исследована задача стартового управления для моделей леонтьевского типа [17–19], которые являются конечномерными аналогами моделей соболевского типа. Управление к финальному состоянию для моделей соболевского типа было, например, исследовано в [15]. Основной целью данной работы является построение численного решения поставленной задачи оптимального управления решениями модели гемодинамики методами теории уравнений соболевского типа, а также описание вычислительных экспериментов, имеющих иллюстративный характер.

**Стартовое управление к финальному состоянию позитивными решениями модели гемодинамики**

Модель гемодинамики описывает циркуляцию крови в конечностях. Модель основана на законах фильтрации и сохранения вязкого флюида в двухсредной гетерогенной пористой системе [9]. Артериальная и венозная среды трактуются как вложенные системы, поровое пространство которых образовано сосудами различного диаметра: крупные артериолы, капилляры и переходящие в вены мелкие сосуды. Скорость перетока крови пропорциональна пульсовому давлению; характеристиками сред выступают их проводимость и эластичность. Учитывая трансформацию проницаемости сред и пренебрежимо малые по сравнению с артериальными пульсации крови в венах, в [1] получена модифицированная модель:

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{\mu}\Delta p_a = \dfrac{\alpha}{\mu}(p_a - p_v), \\ \beta_2 \dfrac{\partial p_v}{\partial t} = \dfrac{\alpha}{\mu}(p_a - p_v), \end{cases} \tag{4}$$

где $p_a$ и $p_v$ – давление в артериальной и венозной средах; $k_1$ – проницаемость артериальной среды; $\mu$ – вязкость флюида; $\alpha$ – параметр капиллярного обмена между континуумами; $\beta_2$ – коэффициент сжимаемости порового пространства венозной среды (эластичность сети сосудов). Все характеристики гемодинамики – давление, скорость кровотока, объём кровообращения, параметры сосудов – не принимают отрицательных значений, поэтому физически значимы именно позитивные решения системы (4). Позитивность решений понимается стандартно относительно введенного на банаховой структуре отношения порядка и сравнения с нейтральным элементом [5, 10].

**Теорема 1.** *Пусть коэффициенты системы* (4) *положительны тогда для любого начального значения* $u_0 \in U$ *существует единственное позитивное решение задачи* (1), (2), *которое имеет вид* $u(t) = U^t u_0$, *где*

$$U^t u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{M(\lambda_k)}{L(\lambda_k)} t\right) u_{0k} e_k ,$$

*суммирование происходит по тем* $k$, *для которых* $L(\lambda_k) \neq 0$.

Данное утверждение справедливо в силу результатов, изложенных в [1, 10].

Перейдем к обсуждению задачи стартового управления к финальному состоянию позитивными решениями модели гемодинамики. Эта задача состоит в том, чтобы для функции $z \in U$, описывающей желаемый профиль давления в момент $T$, найти управление $v^*$, доставляющее минимум функционала штрафа $J(v)$ из (3).

**Теорема 2.** *Пусть коэффициенты системы* (4) *положительны тогда для любого позитивного финального состояния* $z \in U$ *существует единственное стартовое управление* $v^*$ *задачи* (3) *позитивными решениями* (1), (2).

Справедливость данного утверждения следует из того, что задача (3) для (1), (2) является

частным случаем задачи оптимального управления позитивными решениями уравнений соболевского типа [16].

**Численное решение задачи оптимального управления к финальному состоянию**

Для модифицированной модели циркуляции крови в нижних конечностях (4) после редукции к уравнению соболевского типа (1) в квазисоболевом пространстве последовательностей $l_q^m$ задача Шоуолтера–Сидорова (2) имеет единственное позитивное решение вида (теорема 1)

$$u(x,t) = U^t u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha_k t} u_{0k} e_k, \ \ t \geq 0, \tag{5}$$

где $\alpha_k = M(\lambda_k)/L(\lambda_k) < 0$ – показатели затухания мод, $e_k$ – орты в квазисоболевом пространстве последовательностей $l_q^m$, а суммирование происходит по тем $k$, для которых $L(\lambda_k) \neq 0$.

Таким образом, вид решения однозначно задаётся начальным условием $u_0(x)$. Именно функция $u_0$ является объектом управления, и наша задача – выбрать её оптимальным образом. Будем искать управляющее начальное условие в виде многочлена [20]:

$$v(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n x^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_N x^N, \ \ x \in [0,1], \tag{6}$$

где $\{A_n\}_{n=0}^N$ – вещественные коэффициенты, подлежащие определению. То есть параметризуем пространство допустимых начальных условий конечномерным многообразием – пространством многочленов степени не выше $N$, и задача оптимизации сводится к нахождению $N+1$ числового вектора $(A_0, A_1, \ldots, A_N)$, доставляющего минимум (3). Заметим, что функции $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$ образуют предбазис на отрезке $[0,1]$ и выбраны в силу того, что для него условие позитивности $v(x) \geq 0$ имеет простой вид [20].

**Определение.** Пусть задан момент времени $T > 0$ и целевая функция $z(x)$, описывающая желаемый профиль давления в момент $T$. *Численным решением задачи стартового управления к финальному состоянию* называется задача нахождения коэффициентов $(A_0^*, A_1^*, \ldots, A_N^*)$, определяющих управление (6), которое минимизирует функционал качества

$$J(\{A_n\}) = \left\| U^T v - z \right\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 (u(x,T) - z(x))^2 \, dx \to \min\limits_{\substack{A_n \in \mathbf{R} \\ v(x) \geq 0}}, \tag{7}$$

где $u(x,T)$ – решение (5) при начальном условии $u_0 = v$. Условие $v(x) \geq 0$ в (7) обеспечивает физическую корректность начального распределения давления.

**Эксперимент 1.** В рамках данного эксперимента проверялась функция финального состояния вида

$$z(x) = \exp\left( -\frac{(x - 0{,}5)^2}{2 \cdot 0{,}1^2} \right).$$

В качестве входных параметров были заданы: точность приближения $\varepsilon = 0{,}001$, максимальная степень полинома $N_{\max} = 15$. Целью вычислений являлось построение неотрицательного управляющего начального условия, обеспечивающего наилучшее приближение к заданному целевому профилю в момент времени $T$.

В результате работы алгоритма была получена оптимальная степень полинома, равная 15 (рис. 1).

Коэффициенты управляющего начального условия имеют вид

$$A = [8{,}64894081 \cdot 10^{-3}; 7{,}87131757; -4{,}30212124 \cdot 10^{2}; 1{,}07118787 \cdot 10^{4}; -1{,}47505094 \cdot 10^{5};$$
$$1{,}24826554 \cdot 10^{6}; -6{,}89773420 \cdot 10^{6}; 2{,}58094844 \cdot 10^{7}; -6{,}67095755 \cdot 10^{7}; 1{,}20076091 \cdot 10^{8};$$
$$-1{,}49916253 \cdot 10^{8}; 1{,}27214189 \cdot 10^{8}; -6{,}99864565 \cdot 10^{7}; 2{,}25157408 \cdot 10^{7}; -3{,}21653813 \cdot 10^{6};$$
$$2{,}53722265].$$

Полученное значение абсолютной квадратичной ошибки (рис. 2) составило

$$E_{rel} = J(v^*) = 1{,}3892 \cdot 10^{-2}.$$

Несмотря на то, что заданная точность $\varepsilon = 0{,}001$ не была достигнута, алгоритм выбрал максимально допустимую степень полинома и сохранил условие неотрицательности начального профиля. Это показывает, что для столь локализованной целевой функции требуются либо более высокие степени аппроксимации, либо иной базис управления.

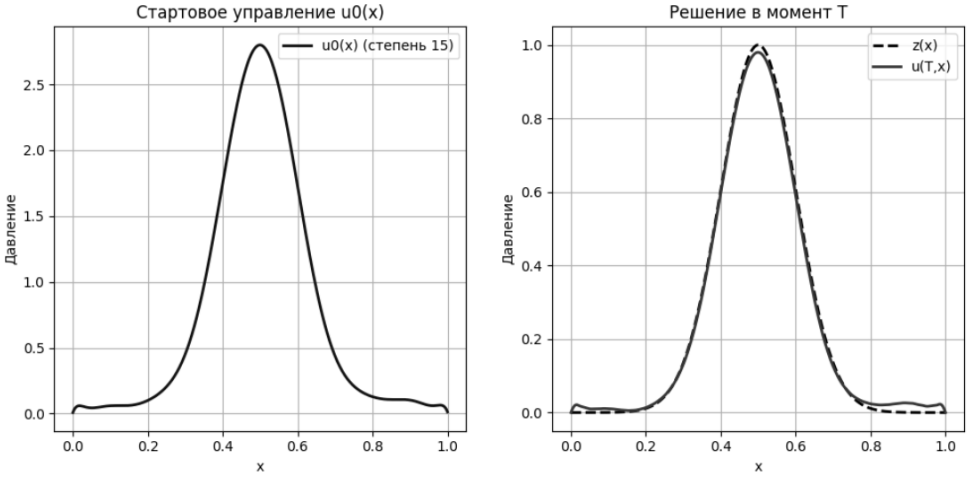



**Рис. 1. Результат эксперимента № 1**

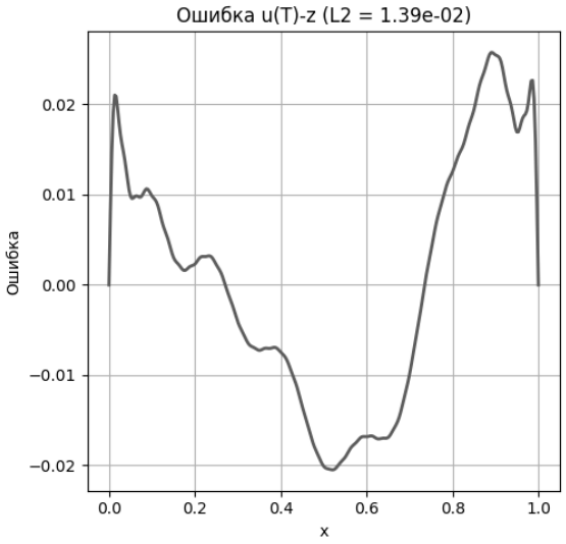



**Рис. 2. Значения ошибки в эксперименте № 1**

**Эксперимент 2.** В данном эксперименте проверялась сигмоидальная функция финального состояния системы

$$z(x) = \frac{1}{1 + \exp(-10(x - 0{,}5))}.$$

В качестве желаемой точности выбрано $\varepsilon = 0{,}01$ и максимальная степень полинома $N_{\max} = 10$. Эксперимент был направлен на проверку того, насколько хорошо полиномиальное управление может аппроксимировать монотонно возрастающий профиль с переходной областью в окрестности центра отрезка.

Алгоритм определил оптимальную степень полинома, равную 9 (рис. 3).

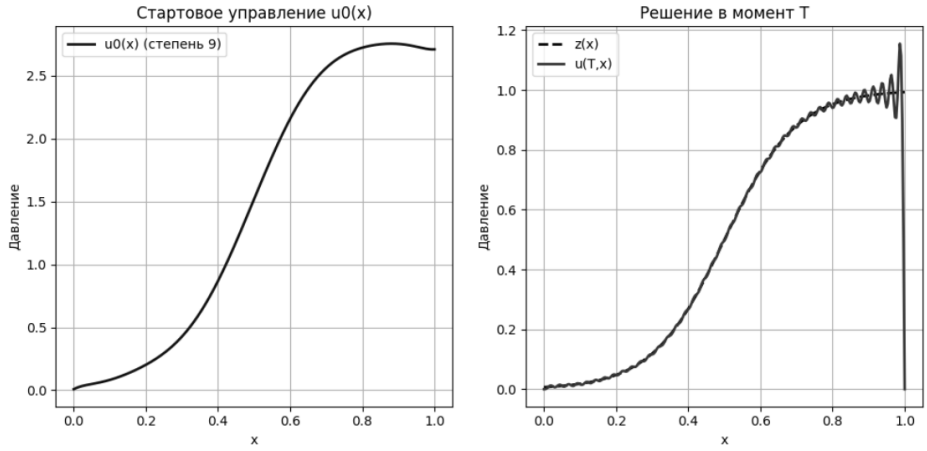



**Рис. 3. Результат эксперимента № 2**

Коэффициенты оптимального начального условия равны

$$A = [8,49018756 \cdot 10^{-3}; 1,51985689; -2,55802632 \cdot 10^{1}; 3,07375531 \cdot 10^{2}; -1,79186554 \cdot 10^{3};$$

$$5,92277338 \cdot 10^{3}; -1,10265919 \cdot 10^{4}; 1,14655320 \cdot 10^{4}; -6,23630791 \cdot 10^{3}; 1,38584619 \cdot 10^{3}].$$

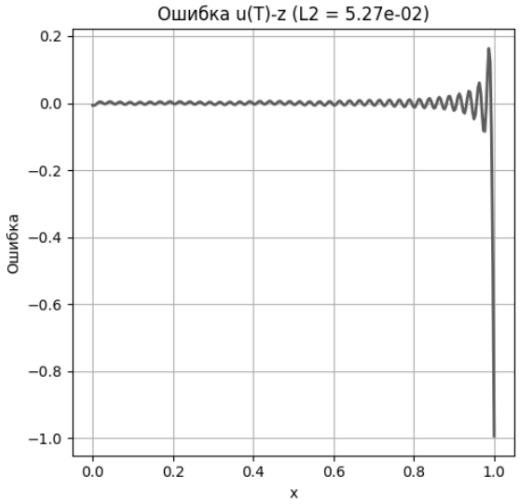



**Рис. 4. Значения ошибки в эксперименте № 2**

Абсолютная квадратичная ошибка приближения (рис. 4) составила

$$E_{rel} = J(v^*) = 5,2715 \cdot 10^{-2}.$$

Полученный результат показывает, что сигмоидальный профиль описывается полиномиальной аппроксимацией удовлетворительно, однако при выбранных параметрах точность оказывается ограниченной. В то же время условие позитивности начального состояния сохраняется, что важно для физической интерпретации модели.

**Эксперимент 3.** В третьем эксперименте рассматривалась комбинированная функция финального состояния в виде

$$z(x) = 0,5\sin(4\pi x) + 0,3\exp(-(\frac{x-0,3}{0,05})^2) + 1.$$

В качестве входных параметров использовались: значение точности $\varepsilon = 0,01$, максимальная степень полинома $N_{\max} = 10$. Данный эксперимент позволяет проверить работу алгоритма на функции, содержащей одновременно периодическую и локализованную составляющие.

В результате расчетов была получена оптимальная степень полинома, равная 10 (рис. 5).

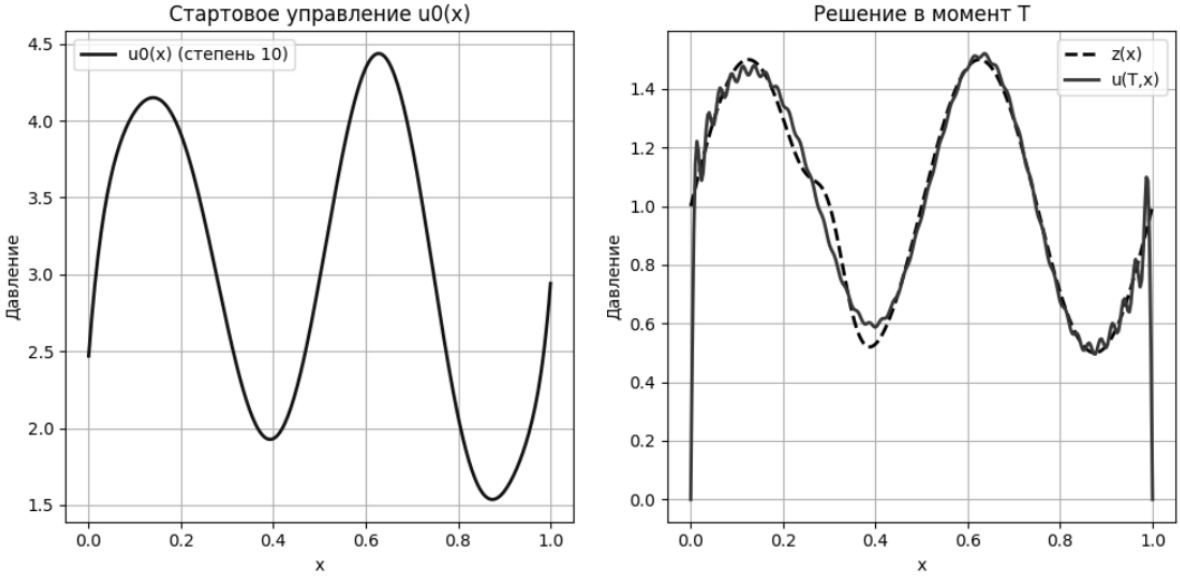



**Рис. 5. Результат эксперимента № 3**

Массив коэффициентов имеет вид

$$A = [2,46912759; 4,03350221 \cdot 10^{1}; -4,75215958 \cdot 10^{2}; 3,63936489 \cdot 10^{3}; -1,68719629 \cdot 10^{4};$$

$$3,90838307 \cdot 10^{4}; -3,09190206 \cdot 10^{4}; -3,68676935 \cdot 10^{4}; 9,40537982 \cdot 10^{4}; -7,00859125 \cdot 10^{4};$$

$$1,84029488 \cdot 10^{4}]$$

Здесь абсолютная квадратичная ошибка (рис. 6) составила

$$E_{rel} = J(v^*) = 8,4465 \cdot 10^{-2}.$$

Несмотря на более сложную структуру целевой функции, алгоритм сумел подобрать допустимое управление, сохраняющее позитивность на сетке. Однако величина ошибки показывает, что для комбинированных профилей полиномиальная аппроксимация меньшей степени уже не-

достаточна, и для повышения точности может потребоваться увеличение числа коэффициентов или переход к более гибкому базису.

**Заключение**

Проведенные эксперименты показывают, что предложенный алгоритм стабильно строит неотрицательные начальные условия и позволяет решать задачу стартового управления для различных типов целевых функций. При этом качество приближения существенно зависит от сложности профиля: для гладких функций с локальным максимумом точность выше, тогда как для сигмоидальных и комбинированных профилей ошибка возрастает. Полученные результаты подтверждают применимость разработанного численного подхода к исследованию позитивных решений модели гемодинамики.

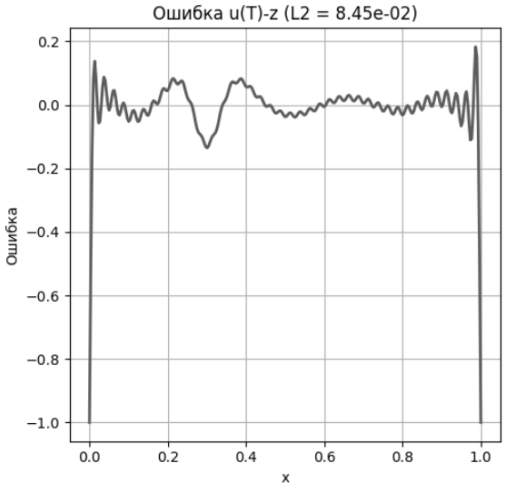



**Рис. 6. Значения ошибки в эксперименте № 3**

*Работа была частично поддержана грантом Российского научного фонда № 24-11-20037, https://rscf.ru/project/24-11-20037.*

**Литература**

1. Solovyova, N.N. Positive Solutions in a Computer Model of Blood Circulation / N.N. Solovyova, N.K. Hummel, S.A. Zagrebina // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2026. – Vol. 13, no. 3. – C. 24–42.

2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.

3. Свиридюк, Г.А. Об одной задаче Showalter / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1989 – Т. 25, № 2. – С. 338–339.

4. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27 (127). – С. 50–56.

5. Banasiak, J. Perturbations of Positive Semigroups with Applications / J. Banasiak, L. Arlotti. – London: Springer-Verlag, 2006. – 438 p.

6. Богатов, Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е–1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского / Е.М. Богатов // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, № 2. – С. 105–127.

7. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.

8. Al'shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin: de Gruyter, 2011.

9. Model of Blood Circulation in the Cerebral Cortex on the Theory of Fluid Flow in Heterogeneous Medium / N Korsakova, V. Pen'kovskij, A. Shilova, V. Shevchenko // Series on Biomechanics. – 2016. – Vol. 30, no. 2. – P. 24–31.

10. Zagrebina, S.A. Positive Degenerate Holomorphic Groups of the Operators and their Applications / S.A. Zagrebina, N.N. Solovyova // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 3rd Semigroups of Operators – Theory and Applications – SOTA 2018. – 2020. – P. 95–109.

11. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно р-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.

12. Manakova, N.A. Mathematical Models and Optimal Control of the Filtration and Deformation Processes / N.A. Manakova // Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software". – 2015. – Vol. 8, no. 3. – P. 5–24.

13. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 5 (264). – С. 13–24.

14. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового жесткого управления для моделей леонтьевского типа. Вычислительный эксперимент / А.В. Келлер // Естественные и технические науки. – 2011. – № 4 (54). – С. 476–482.

15. Perevozchikova, K.V. Investigation of Boundary Control and Final Observation in Mathematical Model of Motion Speed Potentials Distribution of Filtered Liquid Free Surface // K.V. Perevozchikova, N.A. Manakova // Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”. – 2023. – Vol. 16, no. 2. – P. 111–116.

16. Solovyova, N.N. Start Control of Positive Solutions to Sobolev Type Equations / N.N. Solovyova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Journal of computational and Engineering Mathematics. – 2025. – Vol. 12, no. 4. – P. 40–46.

17. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.

18. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.

19. Булатов, М.В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 459–470.

20. Соловьёва, Н.Н. Анализ позитивной разрешимости в теории моделей соболевского типа / Н.Н. Соловьёва, Е.Д. Салова, М.А. Сагадеева, С.А. Загребина // Информационные системы и технологии. – 2026. – Т. 25, № 5. – С. 48–53.

***Поступила в редакцию 30 сентября 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Соловьёва Наталья Николаевна – старший преподаватель кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: solovyovann@susu.ru.

Корягин Артем Леонидович – бакалавр математики, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: cactusyura@yandex.ru.

Загребина Софья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zagrebinasa@susu.ru.

Сагадеева Минзиля Алмасовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sagadeevama@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series “Mathematics. Mechanics. Physics”***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 59–67***

**DOI: 10.14529/mmph260406**

## SOLUTION OF THE START CONTROL PROBLEM LEADING TO THE FINAL STATE USING HEMODYNAMICS MODEL POSITIVE SOLUTIONS

***N.N. Solovyova, A.L. Koryagin, S.A. Zagrebina, M.A. Sagadeeva***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: solovyovann@susu.ru*

Abstract. The article contains a problem description of start control to the final state using solutions to the model of blood circulation in the limbs (a hemodynamic model). Essentially, this formulation of the control problem means that it is necessary to select the initial conditions at the initial moment so

that, by the selected time point, the system's state will take the required form (the final state). When constructing solutions to the hemodynamic model, their fundamental positivity is emphasized due to the parameters used. This can be considered within the framework of the positive solvability of Sobolev-type equations. Based on previously obtained results regarding the existence of solutions to the problem of start control with positive solutions to Sobolev-type equations in a relatively limited case, this article constructs a numerical solution to such a problem for a hemodynamic model. When constructing numerical solutions, a transition to a prebasis is made, and, using the coefficient method, the optimal start control for various final state functions is found. In addition to the introduction, the conclusion and the list of references, the article contains two parts. The first part describes positive solutions to the hemodynamic model within the framework of the theory of Sobolev-type equations and the existence of a solution to the start control problem leading to the final state using such positive solutions. The second part presents the construction of a numerical solution to this problem and the results of computational experiments.

*Keywords: Sobolev-type equations; Banach structure; penalty functional; prebasis; computational experiment.*

**References**

1. Solovyova N.N., Hummel N.K., Zagrebina S.A. Positive Solutions in a Computer Model of Blood Circulation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2026, Vol. 13, no. 3, pp. 24–42.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator. Utrecht; Boston, VSP, 2003.

3. Sviridyuk G.A. A Problem of Showalter. *Differential Equations*, 1989, Vol. 25, no. 2, pp. 338–339. (in Russ.).

4. Keller A.V. Numerical Solutions of the Optimal Control Theory for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2008, no. 27, pp. 50–56. (in Russ.).

5. Banasiak J., Arlotti L. *Perturbations of Positive Semigroups with Applications*. London, Springer-Verlag, 2006.

6. Bogatov E.M. On the History of the Positive Operators (1900s – 1960s) and the Contribution of M.A. Krasnosel'skii. *Applied Mathematics & Physics*, 2020, Vol. 52, no. 2, pp. 105–127. (in Russ.).

7. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003.

8. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*. Berlin, De Gruyter, 2011.

9. Korsakova N., Pen'kovskij V., Shilova A., Shevchenko V. Model of Blood Circulation in the Cerebral Cortex on the Theory of Fluid Flow in Heterogeneous Medium. *Series on Biomechanics*, 2016, Vol. 30, Iss. 2, pp. 24–31.

10. Zagrebina S.A., Solovyova N.N. Positive Degenerate Holomorphic Groups of the Operators and their Applications. In Book: *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 3rd. Ser. "Semigroups of Operators – Theory and Applications – SOTA 2018"*, 2020, pp. 95–109.

11. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev-Type Linear Equations with Relatively P-Spectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, Vol. 31, Iss. 11, pp. 1882–1890.

12. Manakova N.A. Mathematical Models and Optimal Control of the Filtration and Deformation Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2015, Vol. 8, no. 3, pp. 5–24. (in Russ.).

13. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Löve Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2012, no. 5 (264), pp. 13–24. (in Russ.).

14. Keller A.V. Numerical Solution to the Problem of Start Hard Control for the Leontief Type Models. Numerical Experiment. *Natural and Technical Sciences*, 2011, no. 4 (54), pp. 476–482. (in Russ.).

15. Perevozchikova K.V., Manakova N.A. Investigation of Boundary Control and Final Observation in Mathematical Model of Motion Speed Potentials Distribution of Filtered Liquid Free Surface. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2023, Vol. 16, no. 2, pp. 111–116.

16. Solovyova N.N., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Start Control of Positive Solutions to Sobolev Type Equations. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2025, Vol. 12, no. 4, pp. 40–46.

17. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Equations of Leontief Type. *Russian Mathematics*, 2003, Vol. 47, no. 8, pp. 44–50.

18. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebra-Differential Systems: The Methods of Solution and Research*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1998. (in Russ.).

19. Bulatov M.V., Chistyakov V.F. A Numerical Method for Solving Differential-Algebraic Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, Vol. 42, no. 4, pp. 439–449.

20. Solovyova N.N., Salova E.D., Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A. Analysis of Positive Solvability in the Sobolev-Type Models Theory. *Information systems and technologies*, 2026, Vol. 25, no. 5, pp. 48–53. (in Russ.). DOI: 10.33979/2072-8964-2026-25-5-48-53

***Received September 30, 2026***

**Information about the authors**

Solovyova Natalia Nikolaevna is Senior Lecturer, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: solovyovann@susu.ru.

Koryagin Artem Leonidovich is Bachelor of Mathematics, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: cactusyura@yandex.ru.

Zagrebina Sophiya Aleksandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Mathematical and Computer Modeling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zagrebinasa@susu.ru.

Sagadeeva Minzilia Almasovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sagadeevama@susu.ru.

# Механика

УДК 004.94, 519.876.5, 519.24 DOI: 10.14529/mmph260407

# ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРИОЛИСОВА РАСХОДОМЕРА ПРИ ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ С ОЦЕНКОЙ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА МЕТОДОМ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ

***Д.А. Гончаров, И.И. Федосов, А.Л. Шестаков***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: goncharovda@susu.ru, fedosovii@susu.ru, president@susu.ru*

**Аннотация. Кориолисов расходомер представляет собой высокоточное средство измерения массового расхода и плотности среды при однофазном потоке. Однако наличие в трубках кориолисова расходомера двухфазного потока «жидкость–газ» приводит к значительному увеличению погрешности измерения таких расходомеров и нарушению их резонансного режима работы. В работе предложена модель кориолисова расходомера для имитации сигналов расходомера в условиях однофазного и двухфазного потока. Модель представлена в виде дискретной передаточной функции, коэффициенты которой описывают собственную частоту и демпфирование системы «трубка + поток». Изменение коэффициентов модели задано на основе модифицированной модели случайного блуждания. Для оценки частоты и амплитуды модельных и экспериментальных сигналов используется классический метод матричных пучков. Настройка модели и проверка адекватности выполняется на основе статистической валидации с использованием экспериментальных данных, полученных с кориолисова расходомера ДУ15 в однофазном и двухфазном потоке. Валидация подтвердила адекватность имитационной модели расходомера в условиях потока «жидкость–газ» при объемном содержании газа от 0 до 42 %. Полученная модель будет использована при разработке и настройке системы управления кориолисова расходомера при двухфазном потоке.**

*Ключевые слова: кориолисов расходомер; имитационная модель; модель случайного блуждания; метод матричных пучков; валидация модели.*

## Введение

Кориолисовы расходомеры широко распространены для измерения расхода и плотности сред в нефтегазовой, химической и пищевой промышленности. Такие расходомеры измеряют массовый расход напрямую, обеспечивая относительную погрешность до 0,1 % в условиях однофазного потока [1]. Однако в случае двухфазного потока, например, смеси жидкости с пузырьками газа, погрешность измерения расхода возрастает до 80 % [1, 2]. Также наличие двухфазного потока вызывает асимметричное распределение массы потока по трубкам, из-за чего изменяются собственная частота и коэффициент демпфирования системы «трубка + поток», что может стать причиной нарушения резонансного режима работы кориолисова расходомера [1, 2].

Резонансный режим поддерживается системой управления кориолисова расходомера, которая по сигналам измерительных катушек подстраивает частоту и амплитуду возбуждения колебаний трубок. В случае двухфазного потока динамика системы «трубка + поток» изменяется, поэтому для отработки алгоритмов управления необходима модель расходомера, учитывающая однофазный и двухфазный поток с разной объемной долей газа.

Цель работы – построить модель кориолисова расходомера, которая учитывает динамику его работы в условиях однофазного и двухфазного потока, а также подтвердить адекватность модели относительно экспериментальных данных. Такая модель необходима для последующей настройки и отладки системы управления расходомера.

## Сравнение подходов к моделированию кориолисова расходомера

Для исследования системы управления модель кориолисова расходомера должна учитывать, как изменяются собственная частота и коэффициент демпфирования системы «трубка + поток» в условиях однофазного и двухфазного потока. В работе [3] модели сравнивались применительно к

нескольким практическим задачам. Рассмотрим подробнее достоинства и недостатки моделей кориолисова расходомера

1. Аналитические модели кориолисова расходомера. Такие модели позволяют напрямую оценить влияние температуры, давления и пульсаций потока на работу расходомера, а также дают возможность определить чувствительность расходомера. Аналитические модели описывают кориолисовы расходомеры с простой геометрией трубок (U-образные, прямые). Модели представлены дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поэтому не позволяют воспроизвести колебания трубок расходомера в условиях двухфазного потока.

2. Численные одномерные модели кориолисова расходомера, которые рассматривают трубки как балки Эйлера–Бернулли. Балочные модели учитывают переменные собственную частоту и коэффициент демпфирования системы «трубка +поток» и произвольную геометрию трубок. Точность описания работы расходомера зависит от метода решения уравнений. Отметим, что численные одномерные модели не учитывают массу датчиков, способ крепления и источник возбуждения колебаний, который связан с системой управления [3].

3. Численные трехмерные модели кориолисова расходомера. Трехмерные модели учитывают взаимное влияние условий течения потока на колебания трубки кориолисова расходомера. Такие модели применимы для физического моделирования условий двухфазного потока в кориолисовом расходомере, однако, по сравнению с численными одномерными моделями, требуют длительного времени расчета и значительных вычислительных затрат. Поэтому для исследования в составе системы управления такие модели не подходят [3].

Модель кориолисова расходомера для тестирования системы управления должна рассчитываться быстро. Сравнение подходов к моделированию расходомера показало, что численные модели воспроизводят физику двухфазного потока точнее, но требуют значительных вычислительных затрат. Поэтому за основу взята аналитическая модель кориолисова расходомера, а для имитации поведения системы «трубка + поток» при однофазном и двухфазном потоке предложена модификация аналитической модели.

**Аналитическая модель кориолисова расходомера при однофазном и двухфазном потоке**

В работе [4] выполняется разработка аналитической модели кориолисова расходомера в условиях однофазного потока. Данная модель учитывает динамику драйвера, измерительных трубок и измерительных катушек кориолисова расходомера и представлена с помощью непрерывной передаточной функции

$$W(s) = \frac{ks}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}; \tag{1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_s}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{k_s m}} = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \tag{2}$$

где $k$ – коэффициент передачи кориолисова расходомера; $\omega_n$ – собственная частота колебаний измерительной трубки; $\xi$ – коэффициент демпфирования трубки; $k_s$ – коэффициент жесткости трубки; $m$ – масса трубки; $c$ – постоянная демпфирования измерительной трубки; $\delta$ – логарифмический декремент колебаний трубки расходомера [4].

Однофазный поток в трубках кориолисова расходомера обуславливает неизменность собственных характеристик системы «трубка + поток» – частоты $\omega_n$ и коэффициента демпфирования $\xi$. Наличие двухфазного потока «жидкость–газ» в трубках кориолисова расходомера приводит к динамическому изменению собственных характеристик (2) системы «трубка + поток» из-за асимметричного распределения массы жидкости и газа по трубке.

Предлагаемый подход к имитации двухфазного потока использует модифицированную модель случайного блуждания (от англ. *Modified random walk model*, MRWM) для вариации коэффициентов $\omega_n$ и $\xi$ передаточной функции (1). Изменение $\omega_n$ и $\xi$ задают равномерные случайные величины $e_{\omega n}(t)$ и $e_{\xi}(t)$ соответственно, что воспроизводит любое сочетание собственных характеристик системы «трубка + поток» в диапазоне, зависящем от объемной доли газа. Равномерный закон распределения не накладывает дополнительных требований по математическому ожиданию и дисперсии для $\omega_n$ и $\xi$, следовательно, модель позволяет имитировать равновероятное изменение собственных характеристик (2) системы при неизвестном распределении жидкости и

газа в потоке. Скорость изменения $\omega_n$ и $\xi$ в предлагаемой модели ограничивает фильтр нижних частот Баттерворта второго порядка $H_{\omega n}(t)$ и $H_{\xi}(t)$. Применение фильтров позволяет учесть свойства трубки расходомера, которая выступает в качестве механического фильтра, исключающего мгновенные изменения характеристик потока [2].

Законы изменения $\omega_n(t)$ и $\xi(t)$ выглядят следующим образом:

$$\omega_{nf}(t) = H_{\omega n}(t) \cdot e_{\omega n}(t), \qquad \xi_f(t) = H_{\xi}(t) \cdot e_{\xi}(t); \tag{3}$$

$$\omega_n(t) = \frac{\omega_{nf}(t) - \min\left(\omega_{nf}(t)\right)}{\max\left(\omega_{nf}(t)\right) - \min\left(\omega_{nf}(t)\right)}\left(\omega_{n\max} - \omega_{n\min}\right) + \omega_{n\min}; \tag{4}$$

$$\xi(t) = \frac{\xi_f(t) - \min\left(\xi_f(t)\right)}{\max\left(\xi_f(t)\right) - \min\left(\xi_f(t)\right)}\left(\xi_{\max} - \xi_{\min}\right) + \xi_{\min}, \tag{5}$$

где $\omega_n(t)$, $\xi(t)$ – законы изменения собственной частоты и коэффициента демпфирования модели расходомера; $H_{\omega n}(t)$, $H_{\xi}(t)$ – импульсные характеристики фильтра нижних частот для собственной частоты и коэффициента демпфирования; $e_{\omega n}(t)$, $e_{\xi}(t)$ – равномерно распределенная случайная величина для имитации случайного изменения собственной частоты $\omega_n(t)$ и коэффициента демпфирования $\xi(t)$; $\omega_{nf}(t)$, $\xi_f(t)$ – собственная частота и коэффициент демпфирования на выходе фильтра нижних частот; $(\omega_{n\min}\ldots\omega_{n\max})$ – диапазон изменения собственной частоты; $(\xi_{\min}\ldots\xi_{\max})$ – диапазон изменения коэффициента демпфирования.

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП), который оцифровывает аналоговые сигналы напряжения с измерительных катушек кориолисова расходомера, вводится как процедура дискретизации модели (1) по методу билинейного преобразования. При условии, что собственные частоты $\omega_n$ кориолисовых расходомеров находятся в диапазоне (80…100) Гц и соотношение $\omega_n \cdot T_{\partial} << 1$, метод билинейного преобразования вносит в дискретную модель смещение по частоте. Для компенсации смещения по частоте при дискретизации модели используется предыскажение частоты $\omega_n$:

$$s = \frac{2}{T_{\partial}}\frac{z-1}{z+1}, \quad \omega_{n_pw}(t) = \frac{2}{T_{\partial}}\tan\left(\frac{\omega_n(t)T_{\partial}}{2}\right), \tag{6}$$

где $s$ – оператор Лапласа; $z$ – оператор Z-преобразования; $T_{\partial}$ – период дискретизации модели; $\omega_{n_pw}$ – результат предыскажения частоты [5].

Выполним дискретизацию модели кориолисова расходомера (1) методом билинейного преобразования с предыскажением частоты согласно (6). Тогда выражение для дискретной передаточной функции кориолисова расходомера имеет вид:

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}; \tag{7}$$

$$b_0 = \frac{k\omega_{n_pw}}{\omega_{n_pw}^2 + 2\xi\omega_n\omega_{n_pw} + \omega_n^2},\ b_1 = 0,\ b_2 = -b_0;$$

$$a_1 = \frac{2\omega_n^2 - 2\omega_{n_pw}^2}{\omega_{n_pw}^2 + 2\xi\omega_n\omega_{n_pw} + \omega_n^2},\ a_2 = \frac{\omega_{n_pw}^2 - 2\xi\omega_n\omega_{n_pw} + \omega_n^2}{\omega_{n_pw}^2 + 2\xi\omega_n\omega_{n_pw} + \omega_n^2}.$$

Собственная частота $\omega_n$ и коэффициент демпфирования $\xi$ модели (7) – переменные параметры, задаваемые законами (4) и (5). Полученная дискретная модель кориолисова расходомера (7) воспроизводит изменение собственной частоты и коэффициента демпфирования трубки в условиях двухфазного потока. Модель реализована в среде *Simulink* с частотой дискретизации 1,0 кГц, расчет произведен методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

**Сравнительный анализ методов оценки параметров выходных сигналов кориолисова расходомера**

Наличие двухфазного потока в трубках кориолисова расходомера приводит к непрерывному изменению собственной частоты и коэффициента демпфирования (2) системы «трубка + поток».

Система управления расходомера поддерживает резонансный режим колебаний трубок. Для этого система отслеживает изменения собственной частоты колебаний с помощью метода оценки параметров сигналов с измерительных катушек [4] и подстраивает частоту сигнала возбуждения. Поэтому к методу оценки предъявляются требования по точности и быстродействию, чтобы обеспечить совпадение собственной и вынуждающей частоты колебаний.

В работах [6, 7] представлено сравнение методов оценки параметров сигналов с измерительных катушек кориолисова расходомера:

1. Комбинация адаптивного режекторного фильтра (от англ. *Adaptive notch filter*, ANF) с дискретным преобразованием Фурье (от англ. *Discrete-time Fourier transform*, DTFT).
2. Преобразование Гильберта (от англ. *Hilbert transform*, HT).
3. Комплексный полосовой фильтр (от англ. *Complex bandpass filter*, CBF).
4. Комплексный режекторный фильтр (от англ. *Complex notch filter*, CNF-CBF).
5. Классический и многоканальный методы матричных пучков (ММП).

Сигнал для обработки моделируется в виде незатухающей синусоиды

$$s_n(t) = s(t) + noise(t) = A(t)\sin\left(2\pi f(t)t + \varphi_0(t)/2\right) + k_{noise}noise(t), \tag{8}$$

где $s_n(t)$ – зашумленный синусоидальный сигнал; $s(t)$ – синусоидальный сигнал без шума; $A(t)$, $f(t)$, $\varphi_0(t)$ – амплитуда, частота и начальная фаза соответственно сигнала $s(t)$; $k_{noise}(t)$ – коэффициент усиления аддитивного шума; $noise(t)$ – аддитивный шум, вносимый в сигнал $s(t)$.

В качестве отсчетов аддитивного шума $noise(t)$ используются значения нормально распределенной случайной величины. Для расчета соотношения «сигнал-шум» (от англ. *signal-to-noise ratio*, SNR) использовано выражение:

$$SNR = 10\lg\frac{P_{сигнал}}{P_{шум}}, \quad P_{сигнал} = \frac{1}{t_{\max}}\int_0^{t_{\max}} s^2(t)dt, \tag{9}$$

где SNR – коэффициент соотношения «сигнал–шум»; $P_{сигнал}$ – мощность сигнала $s(t)$; $P_{шум}$ – мощность шума $noise(t)$; $t_{\max}$ – длительность записи сигнала [7].

Моделирование переменных амплитуды $A(t)$, частоты $f(t)$ и начальной фазы $\varphi_0(t)$ сигнала (8) в двухфазном потоке выполнено на основе MRWM [6]:

$$A_f(t) = H_A(t)\cdot e_A(t), \quad f_f(t) = H_f(t)\cdot e_f(t), \quad \varphi_{0f}(t) = H_{\varphi 0}(t)\cdot e_{\varphi 0}(t);$$

$$A(t) = \frac{A_f(t) - \min\left(A_f(t)\right)}{\max\left(A_f(t)\right) - \min\left(A_f(t)\right)}\left(A_{\max} - A_{\min}\right) + A_{\min}; \tag{10}$$

$$f(t) = \frac{f_f(t) - \min\left(f_f(t)\right)}{\max\left(f_f(t)\right) - \min\left(f_f(t)\right)}\left(f_{\max} - f_{\min}\right) + f_{\min}; \tag{11}$$

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi_{0f}(t) - \min\left(\varphi_{0f}(t)\right)}{\max\left(\varphi_{0f}(t)\right) - \min\left(\varphi_{0f}(t)\right)}\left(\varphi_{0\max} - \varphi_{0\min}\right) + \varphi_{0\min}, \tag{12}$$

где $A(t)$, $f(t)$, $\varphi_0(t)$ – законы изменения амплитуды, частоты и начальной фазы сигнала $s_n(t)$; $H_A(t)$, $H_f(t)$, $H_{\varphi 0}(t)$ – импульсные характеристики фильтра нижних частот (ФНЧ) для амплитуды, частоты и начальной фазы; $e_A(t)$, $e_f(t)$, $e_{\varphi 0}(t)$ – шум, равномерно распределенный в диапазоне (–1…1), для амплитуды, частоты и начальной фазы; $A_f(t)$, $f_f(t)$, $\varphi_{0f}(t)$, – амплитуда, частота и начальная фаза сигнала $s_n(t)$ на выходе фильтра нижних частот; ($A_{\min}$…$A_{\max}$) – диапазон изменения амплитуды; ($f_{\min}$…$f_{\max}$) – диапазон изменения частоты; ($\varphi_{0\min}$…$\varphi_{0\max}$) – диапазон изменения начальной фазы [6].

Методы оценки параметров сигналов с измерительных катушек сравнивались по среднему квадратическому отклонению (от англ. *root mean squared error*, RMSE) результатов оценки от фактических значений параметров сигналов. Диапазоны изменения амплитуды (10), частоты (11) и начальной фазы (12) сигнала (8) заданы в работах [6, 7], при соотношении «сигнал-шум» 20 дБ. Используемая частота дискретизации сигнала – 2,0 кГц.

Сравнение RMSE по амплитуде, частоте и начальной фазе для рассматриваемых методов оценки показано в табл. 1. По данным табл. 1, классический ММП по точности оценки частоты превосходит остальные методы и имеет высокую точность оценки амплитуды. Поскольку для поддержания резонансной работы расходомера наиболее важна точность отслеживания частоты,

классический ММП принят в качестве метода оценки параметров сигналов кориолисова расходомера в системе управления.

**Таблица 1**

**Сравнение методов оценки параметров сигналов кориолисова расходомера по точности [6, 7]**

| | | Методы оценки | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ANF-DTFT | HT | CBF | CNF-CBF | Классический ММП | Многоканальный ММП |
| RMSE | $RMSE_A$, В | $2{,}5\cdot10^{-2}$ | $2{,}9\cdot10^{-3}$ | $1{,}1\cdot10^{-3}$ | $1{,}0\cdot10^{-3}$ | $1{,}3\cdot10^{-3}$ | $1{,}8\cdot10^{-3}$ |
| | $RMSE_f$, Гц | $1{,}6\cdot10^{+0}$ | $2{,}3\cdot10^{+1}$ | $9{,}0\cdot10^{-1}$ | $1{,}2\cdot10^{+0}$ | $1{,}1\cdot10^{-1}$ | $1{,}2\cdot10^{-1}$ |
| | $RMSE_{\varphi 0}$, ° | $3{,}3\cdot10^{-1}$ | $1{,}9\cdot10^{-1}$ | $1{,}1\cdot10^{-1}$ | $7{,}8\cdot10^{-2}$ | $2{,}3\cdot10^{-2}$ | $1{,}0\cdot10^{-2}$ |

Дискретный сигнал $s(n)$ на входе ММП описывается в виде суммы комплексных экспонент:

$$s(n)=\sum_{k=1}^{M}R_k e^{(\xi_k+j2\pi f_k)n\cdot dt}=\sum_{k=1}^{M}R_k z_k^n,\quad n=0,1\ldots N-1;\ R_k=A_k e^{j\varphi_k}, \tag{13}$$

где $N$ – количество отсчетов сигнала $s(n)$; $dt$ – период дискретизации сигнала; $M$ – оценка количества полюсов; $R_k$ – комплексные амплитуды; $A_k$ – вещественные амплитуды сигнала $\xi_k$ – коэффициенты демпфирования сигнала; $f_k$ – частоты сигнала; $z_k$ – полюсы сигнала $s(n)$ [7].

Амплитуда $R$ сигнала для каждого полюса рассчитана методом наименьших квадратов:

$$\begin{pmatrix} s(0)\\ s(1)\\ \vdots\\ s(N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_M\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Тогда с учетом (14) оценка $R$ амплитуды сигнала $s(n)$ имеет вид

$$R=\sum_{k=1}^{M}R_k.$$

Частота $f_k$ сигнала $s(n)$ связана с полюсами $z_k$ и с периодом дискретизации $dt$ сигнала соотношением [7]

$$f_k=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z_k)}{\mathrm{Re}(z_k)}\right)\Big/\big(2\pi dt\big).$$

Параметры и результаты тестирования алгоритма оценки параметров ММП для сигналов, имитирующих условия однофазного и двухфазного потока, представлены в следующем разделе.

**Тестирование алгоритма оценки параметров сигнала**

Алгоритм оценки параметров сигналов реализован в среде MATLAB и выполняет блочную обработку сигнала: для получения одной пары оценок амплитуды и частоты сигнала необходимо накопить $N$ отсчетов входного сигнала. Количество полюсов сигнала $M$ в алгоритме оценки принято равным двум.

Протестируем алгоритм оценки на сигналах различных типов, характерных для кориолисовых расходомеров в условиях однофазного и двухфазного потока. Точность работы алгоритма будем определять по среднему квадратическому отклонению (СКО) результатов оценки амплитуды и частоты относительно заданных параметров сигнала. Быстродействие алгоритма определим по времени на выполнение алгоритма в среде MATLAB.

Параметры сигналов трех типов для тестирования алгоритма оценки на основе классического ММП приведены в табл. 2.

Каждый из сигналов в табл. 2 соответствуют отдельному сценарию работы расходомера. Сигнал с постоянными параметрами описывает однофазный поток, амплитуда $A$, частота $f$ и начальная фаза $\varphi_0$ сигнала вида (8) не меняются во времени. В отличие от него, сигнал с переменными параметрами соответствует двухфазному потоку, в котором амплитуда $A(t)$, частота $f(t)$ и начальная фаза $\varphi_0(t)$ сигнала изменяются под воздействием пузырьков газа в потоке жидкости согласно законам (10)–(12). Случай с импульсной помехой описывает электромагнитные наводки

на сигнал с измерительных катушек и позволяет протестировать устойчивость алгоритма оценки к отдельным выбросам.

**Таблица 2**

**Параметры сигналов для тестирования алгоритма оценки**

| **Сигнал с постоянными параметрами** | |
|---|---|
| Название параметра | Значение |
| Частота дискретизации $f_s$ | 1,0 кГц |
| Длина блочного окна $N$ алгоритма оценки | 50 отсчетов |
| Амплитуда $A$ сигнала | 1,50 В |
| Частота $f$ сигнала | 91,29 Гц |
| Начальная фаза $\varphi_0$ сигнала | 0° |
| Коэффициент соотношения «сигнал–шум» | 40 дБ |
| **Сигнал с переменными параметрами** | |
| Название параметра | Значение |
| Частота дискретизации $f_s$ | 1,0 кГц |
| Длина блочного окна $N$ алгоритма оценки | 50 отсчетов |
| Тип фильтра | ФНЧ Баттерворта |
| Порядок фильтра | 2 |
| Частота среза $f_c$ | 40 Гц |
| Диапазон изменения амплитуды ($A_{\min}…A_{\max}$) сигнала | (0,50…1,50) В |
| Диапазон изменения частоты ($f_{\min}…f_{\max}$) сигнала | (90,49…94,15) Гц |
| Начальная фаза $\varphi_0$ сигнала | 0° |
| Коэффициент соотношения «сигнал–шум» | 40 дБ |
| **Сигнал с постоянными параметрами и импульсной помехой** | |
| Название параметра | Значение |
| Частота дискретизации $f_s$ | 1,0 кГц |
| Длина блочного окна $N$ алгоритма оценки | 50 отсчетов |
| Амплитуда $A$ сигнала | 1,50 В |
| Амплитуда импульсной помехи | $2 \cdot A$ = 3,0 В |
| Частота $f$ сигнала | 91,29 Гц |
| Начальная фаза $\varphi_0$ сигнала | 0° |
| Коэффициент соотношения «сигнал–шум» | 40 дБ |

Представим на рис. 1 характеристики точности оценок амплитуды и частоты, рассчитанные с использованием классического ММП. Время выполнения алгоритма не зависит от структуры сигнала и составило $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ с. Полученное значение свидетельствует о высокой производительности метода относительно времени накопления окна анализа данных.

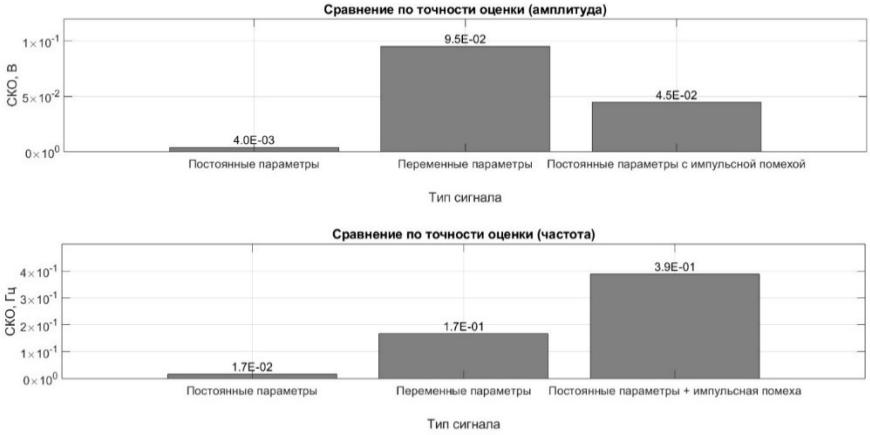



**Рис. 1. Точность оценки амплитуды и частоты классическим ММП для трех типов сигнала**

По рис. 1 видно, что минимальные значения СКО для сигнала с постоянными параметрами формируют базовый уровень, характеризующий стабильность получаемых оценок алгоритма для заданного окна $N = 50$ отсчетов. Для сигнала с переменными параметрами СКО оценок частоты и амплитуды возрастает, причем больший разброс оценок наблюдается по амплитуде. В

случае импульсной помехи, наоборот, СКО оценки частоты увеличивается сильнее по сравнению с амплитудой. Поведение оценок во временной области для этих сигналов представлено на рис. 2.

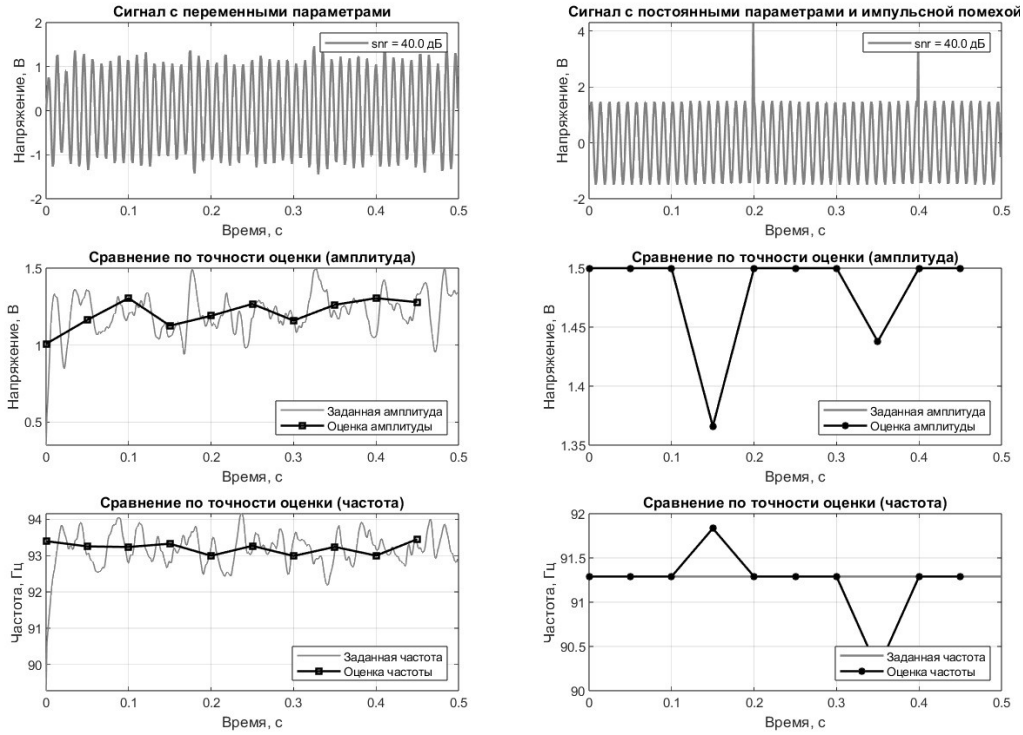



**Рис. 2. Обработка сигналов с помощью алгоритма оценки**

Рост СКО для сигнала с переменными параметрами на рис. 2 обусловлен изменением сигнала в процессе накопления блочного окна. В случае импульсной помехи попадание выброса сигнала в анализируемое окно приводит к существенному выбросу полученной оценки. Скачкообразное изменение значения частоты и амплитуды сигнала возбуждения может вызвать нарушение резонансного режима работы расходомера. По этой причине при реализации системы управления для кориолисова расходомера следует предусмотреть скользящий фильтр результатов оценок амплитуды и частоты, сглаживающий выбросы оценок. В задаче настройки и валидации имитационной модели кориолисова расходомера классический ММП обеспечивает необходимую точность и стабильность получения оценок для всех трех рассмотренных вариантов сигналов.

### Настройка и валидация имитационной модели кориолисова расходомера на экспериментальных данных

Предложенная дискретная имитационная модель (7) кориолисова расходомера предназначена для моделирования сигналов с измерительной катушки расходомера в условиях однофазного и двухфазного потока при различных значениях массового расхода и объемной доли газа (от англ. *gas volume fraction*, GVF). В качестве параметров имитационной модели задаются диапазоны изменения собственной частоты ($\omega_{n\min}\ldots\omega_{n\max}$), коэффициента демпфирования трубки ($\xi_{\min}\ldots\xi_{\max}$) и частота среза фильтра нижних частот $f_c$ для фильтров $H_{\omega n}(t)$, $H_{\xi}(t)$ в выражении (3).

Рассмотрим процедуру настройки параметров модели на основе экспериментальных данных исследования [8], где выполнена серия экспериментов для кориолисова расходомера ДУ15 в диапазоне расхода от 369 до 1741 кг/ч и GVF от 0 до 42 %. Диапазон изменения собственной частоты ($\omega_{n\min}\ldots\omega_{n\max}$) модели для каждого сочетания расхода и GVF получен на основе оценки частоты экспериментальных сигналов с измерительной катушки на участке установившегося режима работы расходомера. Оценка выполнена с использованием классического ММП с длиной блочного окна обработки в 50 отсчетов сигнала. Частота дискретизации экспериментального сигнала составляла 1,0 кГц. Полученные оценки частоты нормированы для 95 % выборки, то есть в качестве минимального значения выбирался 2,5 % квантиль выборки ($\omega_{n\min} = q_{0,025}$), в качестве максимального – 97,5 % квантиль выборки ($\omega_{n\max} = q_{0,975}$). Такая нормировка позволяет исключить редкие выбросы, наблюдаемые в оценках частоты по экспериментальным данным.

Диапазон изменения коэффициента демпфирования ($\xi_{min}…\xi_{max}$) задан через экспериментально определенный в работе [8] логарифмический декремент $\delta$ (2) колебаний трубки расходомера. Коэффициент демпфирования принимает значения от нижней границы при отсутствии воздуха ($\xi_{min}$) до верхней границы при фактическом GVF в эксперименте ($\xi_{max}$).

Частота среза фильтра $f_c$ – настраиваемый параметр модели, согласующий дисперсию оценок частоты в модельных и экспериментальных данных. Для обоих фильтров $H_{\omega n}(t)$, $H_{\xi}(t)$ в выражении (3) выбрана одинаковая частота среза.

В табл. 3 сведены итоговые параметры модели для каждого экспериментального случая. Сочетание значений массового расхода и GVF формирует матрицу экспериментальных факторов, при этом для каждого сочетания определены диапазоны изменения собственной частоты $\omega_n$ и коэффициента демпфирования $\xi$, выбрана частота среза фильтра нижних частот $f_c$.

**Таблица 3**

**Итоговые значения параметров модели кориолисова расходомера**

| Расход | Параметр | **GVF = 0 %** | **GVF = 25 %** | **GVF = 42 %** |
|---|---|---|---|---|
| **369 кг/ч** | $\omega_n/2\pi$, Гц | 89,989…89,996 | 91,546…93,017 | 91,481…93,170 |
| | $\xi$ | 6,37E-05 | 6,37E-05…2,04E-03 | 6,37E-05…1,71E-03 |
| | $f_c$, Гц | 15000 | 10000 | 10000 |
| | | **GVF = 0 %** | **GVF = 10 %** | **GVF = 24 %** |
| **744 кг/ч** | $\omega_n/2\pi$, Гц | 89,987…89,994 | 90,431…92,184 | 91,115…92,938 |
| | $\xi$ | 6,37E-05 | 6,37E-05…3,53E-03 | 6,37E-05…4,16E-03 |
| | $f_c$, Гц | 15000 | 10000 | 10000 |
| | | **GVF = 0 %** | **GVF = 5 %** | **GVF = 13 %** |
| **1037 кг/ч** | $\omega_n/2\pi$, Гц | 89,984…89,989 | 90,249…90,687 | 90,520…92,028 |
| | $\xi$ | 6,37E-05 | 6,37E-05…2,48E-03 | 6,37E-05…4,26E-03 |
| | $f_c$, Гц | 15000 | 12000 | 20000 |
| | | **GVF = 0 %** | **GVF = 2 %** | **GVF = 8 %** |
| **1741 кг/ч** | $\omega_n/2\pi$, Гц | 89,959…89,973 | 90,090…90,154 | 90,475…90,863 |
| | $\xi$ | 6,37E-05 | 6,37E-05…6,65E-04 | 6,37E-05…3,25E-03 |
| | $f_c$, Гц | 10000 | 10000 | 12000 |

Валидация предложенной имитационной модели должна показать: при заданном массовом расходе и GVF сигналы с измерительной катушки, которые формирует модель, по частоте и амплитуде статистически близки к экспериментальным. В процессе валидации выполним сравнение оценок частоты, полученных по сигналу с измерительной катушки расходомера для экспериментальных данных, и оценок частоты сигнала с выхода имитационной модели (7). В обоих случаях оценки получены алгоритмом классического ММП с длиной блочного окна $N = 50$ отсчетов при частоте дискретизации 1,0 кГц. Сходимость оценок амплитуды экспериментальных и модельных сигналов зависит от настройки коэффициента усиления передаточной функции (7) и параметров регулятора в системе управления колебаниями трубок расходомера.

Процедура валидации состоит из трех взаимосвязанных этапов, позволяющих оценить схожесть получаемых данных имитационной модели и экспериментальных данных. В первую очередь выполним проверку на стационарность для ответа на вопрос, возможно ли анализировать сравниваемые фрагменты как две выборки соответствующих случайных величин с постоянными характеристиками закона распределения. Далее визуализируем разброс данных имитационной модели и экспериментальных данных на основе эмпирических функций распределения и проведем первичную оценку степени соответствия данных по основным описательным статистикам. Итоговый шаг – непараметрическая оценка близости распределений, на котором определим интегральную близость функций распределения модельных и экспериментальных данных на основе расстояния Вассерштайна. Также рассчитаем отклонения в распределениях по анализу отдельных квантильных различий между распределениями. Более того, на этом шаге введен критерий, позволяющий судить о допустимой величине отклонений модельных и экспериментальных данных.

Рассмотрим реализацию каждого из этапов валидации модели с применением необходимых статистических методов и критериев.

**Этап 1. Проверка модельных и экспериментальных данных на стационарность**. Проверка выполнена на основе расширенного теста Дики-Фуллера (от англ. «*Augmented Dickey-Fuller*

*test*», ADF) [9], который определяет наличие стохастического тренда в отсчетах временного ряда путем проверки наличия единичного корня в авторегрессионной модели

$$X_t = \alpha + \beta \cdot t + \phi X_{t-1} + \sum_{l=1}^{L} \delta_l \Delta X_{t-l} + \varepsilon_t, \tag{15}$$

где $t$ – время; $X_t$ – текущее значение временного ряда; $X_{t\text{-}1}$ – предыдущее значение временного ряда; $\alpha$ – параметр смещения временного ряда относительно нуля; $\beta \cdot t$ – характеристика линейного тренда временного ряда; $\phi$ – коэффициент зависимости $X_t$ от $X_{t\text{-}1}$, характеризующий стохастический тренд; $l$ – временной лаг модели; $\delta_l$ – коэффициент зависимости от производной ряда порядка $l$; $\Delta X_{t\text{-}l} = X_t - X_{t\text{-}1}$ – разность порядка $l$; $\varepsilon_t$ – Гауссов шум с характеристиками $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ [9].

Нулевая гипотеза ($H_0$) расширенного теста Дики–Фуллера утверждает, что если показатель $\phi$ равен единице, то в отсчетах временного ряда присутствует стохастический тренд и ряд является нестационарным. Альтернативная гипотеза ($H_1$) утверждает, что если показатель $|\phi| < 1$, то ряд является стационарным. Нулевая гипотеза отклоняется при выполнении условия

$$ADF < ADF_{критич}, \tag{16}$$

где $ADF$ – рассчитанное значение статистики теста Дики–Фуллера; $ADF_{критич}$ – критическое значение статистики, выбираемое согласно используемой регрессионной модели (15), уровня значимости $p$ и объема выборки.

**Этап 2. Сравнение описательных статистик случайных величин, построение гистограмм и эмпирических функций распределения**. Данный шаг позволяет визуализировать разброс данных имитационной модели и экспериментальных данных, дать первичную оценку степени их соответствия. В рамках описательной статистики для данных вычислены среднее значение, медиана, дисперсия, стандартное отклонение, квартили (Q1, Q3) и межквартильный размах (от англ. *interquartile range*, IQR). Расчеты параметров и построение диаграмм на этом этапе основаны на классических формулах описательной статистики [10].

**Этап 3. Непараметрическая оценка близости распределений на основе расчета расстояния Вассерштайна и отдельных квантильных различий.**

Расстояние Вассерштайна (от англ. *Wasserstein distance*) является метрикой между вероятностными распределениями, рассчитывается как расстояние между двумя эмпирическими функциями распределения для модельных и экспериментальных данных:

$$W_1 = \int_0^1 |Q_{MODEL}(p) - Q_{EXP}(p)|\, dp, \tag{17}$$

где $Q_{MODEL}(p)$, $Q_{EXP}(p)$ – квантильные функции распределения.

Функции $Q_{MODEL}(p)$, $Q_{EXP}(p)$ определенны для отдельных вероятностей и являются аналогом эмпирических функций распределения. В работе [11] показано, что расстояние Вассерштайна (17) характеризует усредненное абсолютное расхождение распределений по всему диапазону вероятностей.

Также выполним сравнение по отдельным квантилям с соответствующей вероятностью $p$:

$$\Delta Q(p) = Q_{MODEL}(p) - Q_{EXP}(p). \tag{18}$$

Сравнение (18) по отдельным квантилям более строго характеризует различие модельных и экспериментальных данных в конкретной части распределения, например в нижней области распределения $\Delta Q(0{,}1)$, различие медиан $\Delta Q(0{,}5)$, различия в верхней области распределения $\Delta Q(0{,}9)$. Расчет квантилей по экспериментальным данным представлен в работе [12]. Значение квантиля $Q(p)$ определяет такое значение случайной величины, что вероятность

$$P(x < Q(p)) = p.$$

где $x$ – оценка частоты в модельных или экспериментальных данных; $Q(p)$ – квантиль эмпирического распределения модельных или экспериментальных данных [10]. Рассмотрены квантили для вероятностей $p \in [0{,}05 \ldots 0{,}95]$ с шагом 0,01. Для точечной характеристики различия распределений наибольший интерес представляет максимальное квантильное различие $\Delta Q_{\max}(p)$

$$\Delta Q_{\max} = \max(|\Delta Q(p)|). \tag{19}$$

В данном исследовании предложен критерий схожести экспериментальных и модельных данных, основанный на сравнении расстояния Вассерштайна и максимального квантильного различия (19) с введенным допускаемым порогом отличия частот $\Delta f$, обусловленным требованиями по поддержанию резонансного режима работы расходомера [4]

$$\Delta f = 0,25 \text{ Гц}. \tag{20}$$

При этом условие

$$W_1 < \Delta f \tag{21}$$

является необходимым для принятия решения об адекватности модели. Условие для максимального квантильного различия:

$$\Delta Q_{\max} < \Delta f \tag{22}$$

рассматривается как дополнительное, позволяющее оценить схожесть функций распределения модельных и экспериментальных данных в непараметрическом виде.

Рассмотрим пример расчета для валидации модели на экспериментальных данных для расхода 369 кг/ч и объемной доли газа в трубках расходомера GVF = 42 %, приведенных в табл. 3. Результат применения расширенного теста Дики–Фуллера к оценкам частоты по модельным и экспериментальным данным при уровне значимости $p$ = 0,05 представлен в табл. 4.

**Таблица 4**

**Результат теста Дики-Фуллера для модельных и экспериментальных данных при расходе 369 кг/ч и GVF = 42 % по первым 5 лагам**

| Лаг | ADF эксперимент | Критическое значение | Результат | ADF модель | Критическое значение | Результат |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | –11,377 | –2,866 | H0 отклонена | –11,144 | –2,866 | H0 отклонена |
| 1 | –25,786 | –2,866 | H0 отклонена | –15,250 | –2,866 | H0 отклонена |
| 2 | –15,899 | –2,866 | H0 отклонена | –11,121 | –2,866 | H0 отклонена |
| 3 | –14,812 | –2,866 | H0 отклонена | –10,452 | –2,866 | H0 отклонена |
| 4 | –11,898 | –2,866 | H0 отклонена | –9,353 | –2,866 | H0 отклонена |
| 5 | –15,738 | –2,866 | H0 отклонена | –9,385 | –2,866 | H0 отклонена |

Расчет теста проводился согласно модели (15), рассматривались лаги $l$ = 0…5. Проверка нулевой гипотезы по выражению (16) отклоняет $H_0$ во всех случаях как для экспериментальных, так и для модельных данных. Следовательно, рассматриваемые ряды оценок частоты в обоих случаях являются стационарными.

Представленные на рис. 3 эмпирические функции распределения и плотности вероятности показывают практически идентичный закон распределения в обоих случаях, по виду близки к нормальному закону.

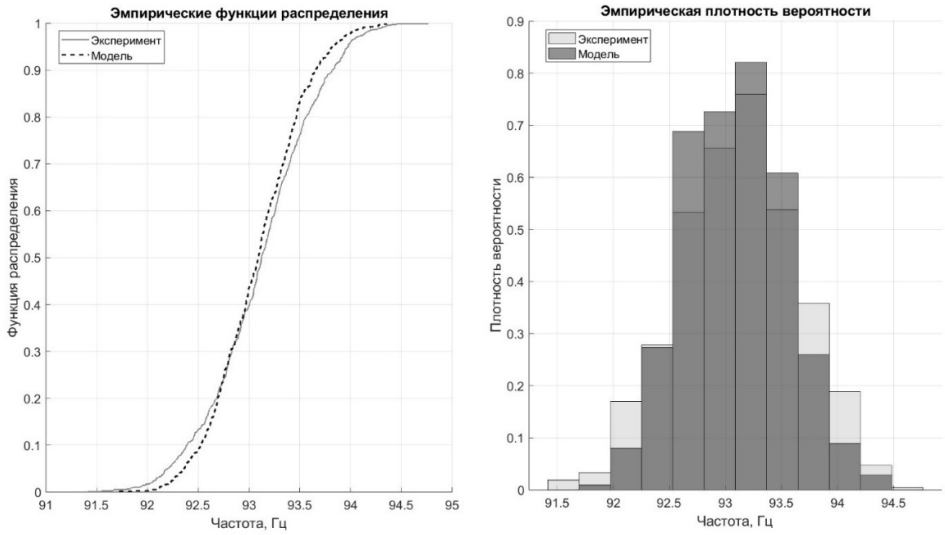



**Рис. 3. Эмпирические функция и плотность вероятности оценок частот модельного и экспериментального сигнала при расходе 369 кг/ч и GVF = 42 %**

В табл. 5 представлены описательные статистики, рассчитанные для модельных и экспериментальных данных, все значения имеют размерность в Гц. Расхождение средних и медиан составило менее 0,1 Гц, различие минимумов и максимумов – в пределах 0,5 Гц. Отметим, что разброс значений частоты между $Q_1$ и $Q_3$ (50 % точек всей выборки) составил порядка 0,6 – 0,7 Гц. Это соотносится с резонансными свойствами системы «трубка+поток» и обосновывает выбор допуска отклонения частоты $\Delta f$ в выражении (20).

**Таблица 5**

**Описательные статистики для модельных и экспериментальных данных при расходе 369 кг/ч и объемной доле газа 42 %**

| | Среднее | Медиана | СКО | Минимум | $Q_1$ | $Q_3$ | $Q_1$–$Q_3$ | Максимум |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Эксперимент** | 93,114 | 93,122 | 0,533 | 91,415 | 92,771 | 93,477 | 0,705 | 94,763 |
| **Модель** | 93,086 | 93,093 | 0,444 | 91,728 | 92,755 | 93,400 | 0,645 | 94,356 |

Полученное по расчету значение расстояния Вассерштайна $W_1$ и максимальное межквантильное отклонение $\Delta Q_{\max}(p)$ не превосходят введенного допуска

$$W_1 = 0,078\ \text{Гц} < \Delta f;\ |\Delta Q_{\max}(p)| = 0,19\ \text{Гц} < \Delta f.$$

Рассмотренные этапы валидации были выполнены для всей матрицы сочетаний экспериментальных факторов, приведенной в табл. 3. По результатам расчетов для всей матрицы сочетаний экспериментальных факторов выполняется условие стационарности. Сравнительный анализ для расстояния Вассерштайна $W_1$ и максимального квантильного различия $\Delta Q_{\max}(p)$ по всей матрице сочетаний экспериментальных факторов приведен на рис. 4.

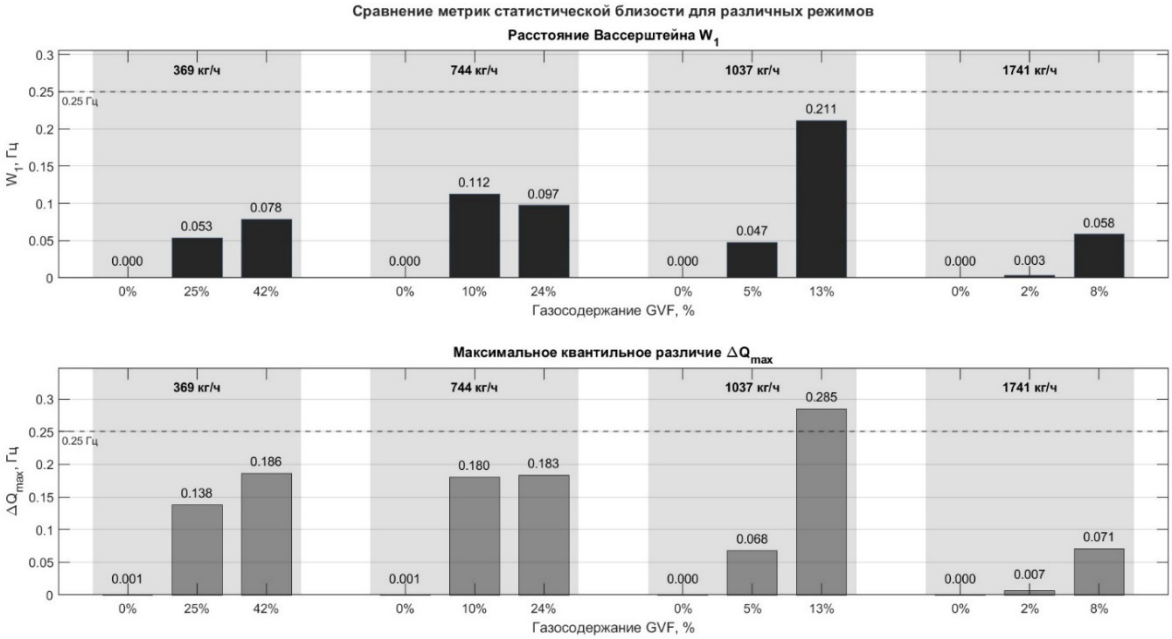



**Рис. 4. Итоговый анализ расстояния Вассерштайна $W_1$ и максимального межквантильного различия $\Delta Q_{\max}(p)$**

Результаты расчета показывают, что с точки зрения интегральной метрики близости $W_1$, согласно условию (21), модель адекватна экспериментальным данным для всей рассмотренной матрицы сочетаний экспериментальных факторов. При этом рост отклонения модельных данных от эксперимента несколько возрастает с ростом GVF и зависит от расхода нелинейно. Анализ максимального квантильного различия $\Delta Q_{\max}(p)$ также показывает выполнение условия (22) для всех экспериментальных точек, кроме одной: при расходе 1037 кг/ч и GVF = 13 %. Детальный анализ показал, что при заданном сочетании расхода и GVF незначительно изменяется форма закона распределения экспериментальных данных, что увеличивает максимальное квантильное различие.

В целом, по результатам сравнения выходных данных дискретной модели кориолисова расходомера с экспериментальными данными отметим, что предложенная имитационная модель позволяет сформировать сигналы, характер изменения частоты которых соответствует сигналам, полученным по результатам эксперимента. Сходимость модели и эксперимента наблюдается при массовом расходе от 369 до 1741 кг/ч и объемной доли воздуха от 0 до 42 %.

**Заключение**

В работе предложена имитационная модель кориолисова расходомера в виде дискретной передаточной функции системы «трубка + поток» с переменными коэффициентами. Закон изменения собственной частоты и коэффициента демпфирования передаточной функции определен на основе модифицированной модели случайного блуждания. Для оценки параметров модельных и экспериментальных сигналов использовался алгоритм, основанный на классическом методе матричных пучков, с функцией блочной обработки сигнала. Настройка и валидации имитационной модели выполнены на экспериментальных данных, полученных при проливке кориолисова расходомера ДУ15 в условиях однофазного и двухфазного потока. По результатам валидации наблюдается сходимость модели и эксперимента при массовом расходе от 369 до 1741 кг/ч и содержании воздуха от 0 до 42 %.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26-21-20019, https://rscf.ru/project/26-21-20019/.*

**Литература**

1. Жестков, А.В. Отечественные кориолисовые расходомеры – стратегии и ловушки импортозамещения / А.В. Жестков // Газовая промышленность. – 2020. – Т. 9. – С. 44–47.

2. Theoretical and Experimental Investigations of Flow Pulsation Effects in Coriolis Mass Flowmeters / A. Svete, J. Kutin, G. Bobovnik, I. Bajsic // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 352. – P. 30–45.

3. Гудкова, Е.А. Сравнительный анализ численных и аналитических методов моделирования системы «расходомерная трубка – жидкость» в кориолисовых расходомерах / Е.А. Гудкова, К.Р. Таранцева, М.Ю. Михеев // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2022. – Т. 11. – № 3(59). – С. 57–63.

4. Patent № 9014997B2 US, Drive Techniques for a Digital Flowmeter: № 900104: application 22.05. 2013: publ. 19.12 2013 / M.P. Henry, M.E. Zamora. – p. 143.

5. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / А.Б. Сергиенко. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.

6. Li, M. Complex Signal Processing for Coriolis Mass Flow Metering in Two-Phase Flow / M. Li, M. Henry // Flow Measurement and Instrumentation. – 2018. – Vol. 64. – P. 104–115.

7. Ибряева, О.Л. Методы и алгоритмы экспоненциального анализа для промышленных приложений в АСУ ТП: дисс. докт. тех. наук: спец. 2.3.1 / Ибряева Ольга Леонидовна. –Челябинск, Южно-Уральский государственный университет, 2025. – 287 с.

8. Тараненко, П.А. Влияние демпфирования на амплитуды и фазы колебаний системы с гироскопическими связями / П.А. Тараненко, Д.В. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2025. – Т. 18, № 1. – С. 65–78.

9. Oisin, R. Non-Stationarity in Time-Series Analysis: Modeling Stochastic and Deterministic Trends / R. Oisin, J.M.B. Haslbeck, L.J. Waldorp // Multivariate behavior research. – 2025. – P. 555–588.

10. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов / Е.С. Вентцель. – М.: КноРус, 2010. – 658 с.

11. Panaretos, V.M. Statistical Aspects of Wasserstein Distances / V.M. Panaretos, Y. Zemel // Annual Review of Statistics and Its Application. – 2019. – Vol. 6. – P. 405–431.

12. Hyndman, R.J. Sample Quantiles in Statistical Packages / R.J. Hyndman, Y. Fan // The American Statistician. – 1996. – Vol. 50, no. 4. – P. 361–365.

***Поступила в редакцию 13 октября 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Гончаров Дмитрий Александрович – аспирант кафедры «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovda@susu.ru.

Федосов Иван Игоревич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: fedosovii@susu.ru.

Шестаков Александр Леонидович – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: president@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 68–81***

**DOI: 10.14529/mmph260407**

# SIMULATION OF A CORIOLIS FLOWMETER UNDER TWO-PHASE FLOW CONDITIONS WITH SIGNAL PARAMETER ESTIMATION USING THE MATRIX PENCIL METHOD

***D.A. Goncharov, I.I. Fedosov, A.L. Shestakov***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: goncharovda@susu.ru, fedosovii@susu.ru, president@susu.ru*

Abstract. Coriolis flowmeters provide high measurement accuracy under single-phase flow conditions. However, gas entrainment in a liquid changes the natural frequency and damping of the tube-flow system, thereby increasing measurement errors and potentially disrupting resonant operation. This study proposes a simulation model for reproducing flowmeter signals under single-phase and gas-liquid two-phase flow conditions.

The model uses a second-order discrete transfer function whose time-varying coefficients represent the natural frequency and damping ratio of the tube-flow system. A modified random walk model generates variations in these parameters. The classical matrix pencil method estimates the frequency and amplitude of both simulated and experimental signals. The signal processing algorithm operates on blocks of 50 samples at a sampling frequency of 1 kHz. The model calibration procedure uses experimental data from a DN15 Coriolis flowmeter operating at mass flow rates of 369–1741 kg/h and gas volume fractions from 0 to 42 %.

Statistical validation focuses on signal frequency estimates and combines the augmented Dickey–Fuller test, descriptive statistics, empirical distribution functions, the first Wasserstein distance, and quantile differences. The Wasserstein distance remains below the specified tolerance of 0,25 Hz at all investigated operating points. The model meets the additional maximum quantile difference criterion in all cases except at 1037 kg/h and a gas volume fraction of 13 %. These results support the ability of the proposed model to reproduce the distributions of experimental signal frequency estimates over the investigated operating range. This simulation model provides a basis for developing and tuning control algorithms that maintain resonant operation of Coriolis flowmeters under two-phase flow conditions.

*Keywords: coriolis flowmeter; simulation model; random walk model; matrix pencil method; validation.*

**References**

1. Zhestkov A.V. Domestic Coriolis Flowmeters – Strategies and Traps of Import Substitution. *Gas Industry*, 2020, Vol. 9, pp. 44–47.

2. Svete A. Theoretical and Experimental Investigations of Flow Pulsation Effects in Coriolis Mass Flowmeters. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, Vol. 352, pp. 30–45. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.05.014 0.

3. Gudkova E.A., Tarantseva K.R., Mikheev M.Yu. Comparative Analysis of Numerical and Analytical Methods for Modelling "Flow Tube – Liquid" System in Coriolis Flowmeters. *XXI century: The Results of Past and Problems of Present*, 2022, Vol. 11, no. 3 (59), pp. 57–63. DOI: 10.46548/21vek-2022-1159-0009.

4. Henry M.P., Zamora M.E. Patent № 9014997B2 US, Drive Techniques for a Digital Flowmeter: № 900104: Application 22.05. 2013: publ. 19.12 2013, p. 143.

5. Sergienko, A.B. *Digital Signal Processing*. St. Petersburg, 2011, p. 768.

6. Li M., Henry M. Complex Signal Processing for Coriolis Mass Flow Metering in Two-Phase Flow. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2018, Vol. 64. pp. 104–115. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2018.10.014.

7. Ibryaeva, O.L. Methods and Algorithms of Exponential Analysis for Industrial Applications in Process Control Systems: Diss. of Dr. Sc. (Engineering): spec. 2.3.1. South Ural State University, Chelyabinsk, 2025, p. 287. (in Russ.).

8. Taranenko P.A., Telegin D.V. Influence of Damping on the Amplitude and Phase of Oscillations of a System with Gyroscopic Connections. *Bulletin of South Ural State University, Ser. «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2025, Vol. 18, no. 1, pp. 65–78. DOI 10.14529/mmp250105.

9. Oisin R., Haslbeck J.M.B., Waldorp L.J. Non-Stationarity in Time-Series Analysis: Modeling Stochastic and Deterministic Trends. *Multivariate behavior research*, 2025, pp. 555–588. DOI: 10.1080/00273171.2024.2436413.

10. Venttsel E.S. *Probability Theory*. Moscow, 2010, p. 658.

11. Panaretos V.M., Zemel Y. Statistical Aspects of Wasserstein Distances. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2019, Vol. 6, pp. 405–431. DOI 10.1146/annurev-statistics-030718-104938.

12. Hyndman R.J., Fan Y. Sample Quantiles in Statistical Packages. *The American Statistician*, 1996, Vol. 50, no. 4, pp. 361–365. DOI 10.1080/00031305.1996.10473566.

***Received October 13, 2026***

**Information about the authors**

Goncharov Dmitry Alexandrovich is Post-Graduate Student of Informational and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovda@susu.ru.

Fedosov Ivan Igorevich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor of Informational and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: fedosov@susu.ru.

Shestakov Alexander Leonidovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor of Informational and Measuring Technology, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: president@susu.ru.

УДК 534.1, 681.12, 621.8.031, 004.942 DOI: 10.14529/mmph260408

# РАЗРАБОТКА БАЛОЧНОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ КОРИОЛИСОВОГО РАСХОДОМЕРА, ВЕРИФИЦИРОВАННОЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

***П.А. Тараненко, Д.В. Телегин***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: taranenkopa@susu.ru*

**Аннотация. Рассмотрена задача разработки и верификации балочной конечно-элементной модели кориолисового расходомера (КР). Актуальность работы обусловлена необходимостью создания расчетных моделей, способных с высокой точностью описывать динамику измерительных трубок КР, в том числе при течении двухфазных сред. Целью исследования являлась разработка методики подбора параметров балочной модели, позволяющей одновременно удовлетворить трем критериям близости модели к натурному образцу: равенству рабочих частот, равенству кориолисовых частот и равенству временных задержек. Методика основана на конечно-элементной формулировке задачи о колебаниях балки Тимошенко, взаимодействующей с протекающей жидкостью, с учетом гироскопических связей. Для верификации модели проведены проливочные испытания натурного образца расходомера ДУ15 при фиксированном расходе воды и различных объемных долях воздуха. Корректировку модели осуществляли путем варьирования масс навесных элементов. Установлено, что задача оптимизации имеет множество решений, а для повышения точности ее решения требуется введение дополнительного варьируемого параметра – координат расположения боковых катушек. Показано, что «теоретическая» плотность среды не совпадает с плотностью, наблюдаемой на дисплее электронного блока, что может свидетельствовать о неравномерном распределении воздуха по трубкам. При этом в случае использования в верифицированной модели показаний плотности и массового расхода с опытного расходомера наблюдается практически полное совпадение расчётных и экспериментальных зависимостей рабочей частоты и временной задержки от объёмной доли воздуха, что указывает на осреднённый характер экспериментальных показаний.**

*Ключевые слова: кориолисов расходомер; метод конечных элементов; собственная частота; вынужденные колебания, временная задержка, массовый расход, гироскопические силы.*

## Введение

Кориолисов расходомер (КР) предназначен для измерения массового расхода жидкостей и газов. Обзор конструкций КР приведен в [1–3], описание принципа их работы приведено в [4]. Актуальность работы обусловлена необходимостью создания расчетных моделей, способных с высокой точностью описывать динамику измерительных трубок КР, в том числе при течении двухфазных сред. С тех пор как авторы работы [1] применили метод конечных элементов для решения определяющих уравнений, описывающих поведение балки Тимошенко с протекающей внутри жидкостью, численные методы моделирования стали важным инструментом разработки расходомеров. В работе [1] приведены матрицы масс, жесткости и демпфирования, используемые в конечно-элементной формулировке задачи. Для решения задачи на собственные значения применяли универсальный программный комплекс MSC/NASTRAN. Проведено моделирование трех кориолисовых расходомеров с криволинейными измерительными трубками; результаты анализа методом конечных элементов продемонстрировали хорошую согласованность с экспериментальными данными. Полученные результаты свидетельствуют о том, что разработанный метод конечных элементов позволяет с достаточной точностью моделировать работу кориолисовых расходомеров. В работе [2] авторы усовершенствовали этот метод, используя программное обеспечение ANSYS для моделирования пульсирующих потоков в кориолисовых расходомерах с трубками различной геометрии (как прямыми, так и криволинейными). В статье [3] приведены скорректированные матрицы масс, жесткости и демпфирования.

В работе [5] приведены результаты проектирования и анализа кориолисова расходомера с использованием коммерческого программного обеспечения MSC/NASTRAN. Математическая модель кориолисова расходомера с прямой трубкой предложена в работе [6]. Позднее разработана и модель с использованием экспериментальных данных [7]. В работе [8] представлена численная модель кориолисова расходомера с прямой трубкой, основанная на сочетании методов конечных объемов и конечных элементов. Анализ полученных решений проводили с учетом собственной частоты и разности фаз, выступающих в качестве параметров, характеризующих влияние плотности жидкости и массового расхода. В работе [9] предложена численная модель кориолисового расходомера с одной прямой трубкой, закрепленной с обоих концов. Для моделирования измерительной трубки использованы элементы взаимодействия жидкости и конструкции (FSI). В статье [10] разработана численная модель для оптимизации формы кориолисова расходомера; в частности, для расходомера с *U*-образной трубкой рассмотрены вопросы расчета чувствительности и критериев эффективности в зависимости от параметров формы. В работе [11] предложен аналитический метод расчета чувствительности кориолисова расходомера для сопоставления с опубликованными результатами исследований U-образных трубок. Исследование, касающееся конечно-элементного моделирования кориолисового расходомера с произвольной геометрией измерительной трубки, проведено в работе [12]. Модель разработана в средах ANSYS и MATLAB на основе теории балки Тимошенко с учетом нестационарной геометрии потока, демпфирования, центробежных, гравитационных и кориолисовых сил. В работе [13] численно определены характеристики кориолисового расходомера с прямой трубкой и жестко закрепленными концами. Полученные результаты хорошо согласуются с ранее известными экспериментальными и теоретическими данными. В работе [14] отмечено, что в идеальном случае измерения массового расхода и плотности должны быть независимыми друг от друга. В работе [15] такая идеальная характеристика была получена при условии, что скорость потока удовлетворяет ограничению второго порядка: квадрат скорости много меньше квадрата критической скорости. Отдельно следует отметить диссертационную работу [16], в которой предложена методика верификации конечно-элементных моделей кориолисовых расходомеров по результатам экспериментального модального анализа и проливочных испытаний. Данная статья развивает методику верификации, предложенную в диссертационной работе [16], а верифицированная модель расходомера, в отличие от работы [16], применяется для исследования влияния двухфазной среды «жидкость–газ» на динамические свойства кориолисового расходомера.

Несмотря на значительное число публикаций, посвящённых конечно-элементным моделям КР, вопросы верификации балочных моделей по результатам модальных и проливочных испытаний остаются недостаточно освещёнными. В известных работах, как правило, выполняется сравнение либо только собственных частот, либо только калибровочного коэффициента. Подход, при котором параметры модели подбираются из условия одновременного совпадения рабочей частоты, кориолисовой частоты и временной задержки, в литературе практически не встречается.

Целью настоящей работы является разработка балочной конечно-элементной модели кориолисова расходомера, верифицированной по результатам модальных и проливочных испытаний, и исследование на её основе влияния газовой фазы на показания расходомера.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи: разработана конечно-элементная балочная модель КР с учётом гироскопических связей; проведены проливочные испытания натурного образца КР ДУ15 при фиксированном расходе воды и различных объёмных долях воздуха; разработан алгоритм подбора параметров модели, обеспечивающий совпадение расчётных и экспериментальных значений рабочей и кориолисовой частот и временной задержки; с использованием верифицированной модели проведен анализ влияния газовой фазы на показания КР.

**Балочная модель кориолисова расходомера**

Расчетные исследования выполнены на балочной модели расходомера (рис. 1). За основу взята методика, изложенная в статьях [1–3] и диссертационной работе [16]. Балочная модель построена при следующих положениях и допущениях:

1. Перемещения и деформации являются бесконечно малыми.
2. В балочных элементах учтена деформация сдвига.

3. Текущая жидкость считается несжимаемой, однородной и невязкой.
4. Скорость течения жидкости по сечению и длине трубки постоянна.
5. Влияние пульсаций скорости жидкости не рассматривается.
6. Влияние давления текущей жидкости на трубки не учитывается.
7. Температура жидкости и трубок постоянна.
8. Влияние силы тяжести не учитывается.
9. Демпфирование в материале каждого конечного элемента одинаково.

Уравнения движения в матричной форме с учетом сил Кориолиса, действующих со стороны текущей среды на измерительные трубки, принимают вид

$$[M]\{\ddot{x}\}+\left([K]+[H(V)]\right)\{\dot{x}\}+[C]\{x\}=\{P\}, \quad (1)$$

где $[M]$ – глобальная матрица масс, $[K]$ – глобальная матрица демпфирования, $[C]$ – глобальная матрица жесткости, $[H(V)]$ – глобальная матрица гироскопических сил, $\{x(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$, $\{\ddot{x}(t)\}$ – вектор-столбцы перемещений, скоростей и ускорений обобщенных координат соответственно, $\{P(t)\}$ – вектор-столбец внешних сил, $V$ – скорость текущей среды.

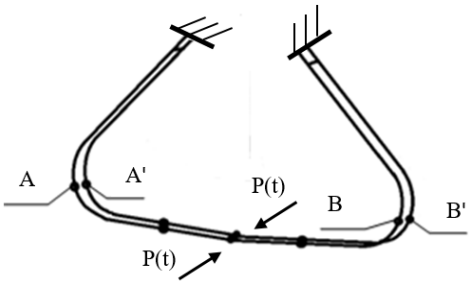


**Рис. 1. Балочная модель расходомера**

Далее решали задачу модального анализа и определяли рабочую $p_{раб}$ и кориолисову $p_{кор}$ собственные частоты. Соответствующие собственные формы приведены на рис. 2 и рис. 3. Установлено, что в исследуемом диапазоне рабочих расходов, собственные частоты измерительных трубок практически не зависят от скорости текущей среды. После этого решали задачу гармонического анализа – задавали внешнее возбуждающее воздействие с частотой $\omega = p_{раб}$ и определяли комплексные амплитуды, а по ним – амплитуды и фазы перемещений точек $A$ и $B$, соответствующих боковым катушкам. Разность фаз $\Delta\varphi$ определяли по выражению

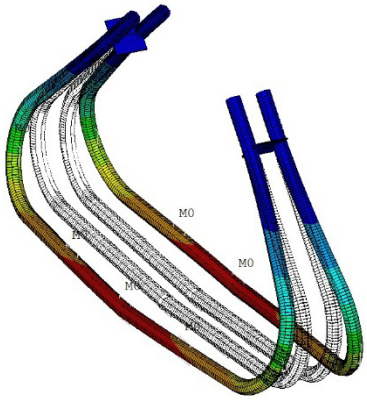


**Рис. 2. Рабочая собственная форма**

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B . \quad (2)$$

Можно показать, что разность фаз перемещений (2) совпадает с разностью фаз относительных скоростей левой и правой половин трубок, определенных по скоростям четырех точек $A$, $B$, $A'$, $B'$ (рис.1). Временную задержку $\Delta t$ определяли по выражению

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{раб}} . \quad (3)$$

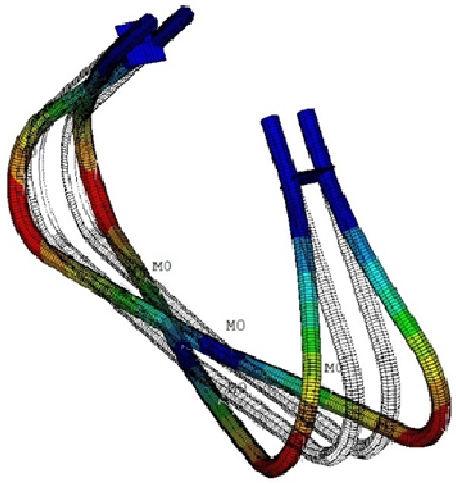


**Рис. 3. Кориолисова собственная форма**

Массовый расход $\dot{m} = k \cdot \Delta t$ прямо пропорционален временной задержке $\Delta t$.

**Экспериментальные исследования**

Проведены проливочные испытания натурного образца кориолисового расходомера ДУ15 при фиксированном расходе воды и разных объемных долях воздуха. Схема проливочного стенда и методика проведения испытаний приведены в [17]. По результатам испытаний получены экспериментальные значения временных задержек, рабочей частоты, плотности и массового расхода в зависимости от объемной доли воздуха в текущей среде. Эксперименты проведены при массовом расходе жидкости 1745 кг/ч, фиксировавшемся по эталонному расходомеру, для 24 точек по расходу воздуха. В эксперименте осуществляли запись напряжений с двух измерительных и центральной катушки эталонного и опытного расходомера, а также величин давления в газожидкостной смеси (ГЖС) на входе и выходе на опытном расходомере. Все данные регистрировали системой Siemens Scadas Recorder.

Длительность каждого эксперимента составляла 45 с. Ошибку измерения массового расхода жидкости определяли по выражению:

$$Err_{MF} = \frac{MF_{on} - MF_{эт}}{MF_{эт}} \cdot 100\ \%, \quad (4)$$

где $MF_{on}$ – показания массового расхода на опытном расходомере; $MF_{эт}$ – массовый расход воды на эталонном расходомере.

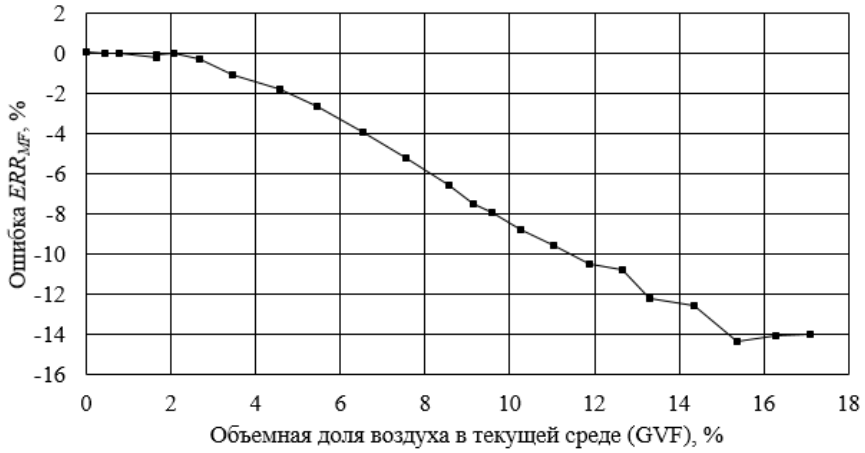



**Рис. 4. Ошибка измерения массового расхода в зависимости от объемной доли воздуха в текущей среде (GVF)**

Ошибка измерения массового расхода в зависимости от объемной доли воздуха в текущей среде приведена на рис. 4.

По выражениям, приведенным в [17], с использованием показаний датчиков давления на входе и на выходе опытного расходомера, датчиков температуры в расходомерах, показаний массового расхода эталонного расходомера и объемного расхода воздуха рассчитывали объемные доли воздуха в жидкости (GVF). Для исследования влияния газовой фазы на работу кориолисового расходомера использовали «теоретическую плотность» двухфазной среды с воздухом:

$$\rho_{теор} = \rho_{water} \cdot (1 - GVF). \quad (5)$$

По результатам испытаний определены экспериментальные данные, которые использованы для верификации построенной балочной расчетной модели (табл. 1).

**Таблица 1**

**Экспериментальные данные для верификации**

| | |
|---|---|
| Рабочая частота $f_{exp1}$, Гц | 89,882 |
| Кориолисова частота $f_{exp2}$, Гц | 164,200 |
| Временная задержка при расходе воды 2000 кг/ч (без воздуха), мкс | 28,658 |

**Расчетные исследования**

Проведены расчеты балочной конечноэлементной модели кориолисового расходомера в пакете MATLAB при различных величинах масс навесных элементов (катушки возбуждения, двух измерительных катушек и двух балансировочных грузов). На расчетной модели определяли рабочую и кориолисову частоты колебаний расходомера и временную задержку при заданном расходе воды. С целью сближения расчетных и экспериментальных собственных частот и временной задержки выполняли корректировку модели. Корректировку модели осуществляли путем варьирования коэффициентов $k1$, $k2$, $k3$ перед массами центральной катушки, боковых катушек и балансировочных грузов соответственно. Массы навесных элементов до корректировки определяли по 3D-модели. При этом считали, что измерительные катушки и балансировочные грузы в модели установлены симметрично, массы левой и правой катушек одинаковы, массы левого и правого балансировочных грузов одинаковы. Корректировку модели выполняли следующим образом.

1. Задавали все три корректирующих коэффициента равными единице.

2. Задавали корректирующий коэффициент $k3$ перед балансировочным грузом.

3. Подбирали корректирующий коэффициент $k2$ перед массой боковой катушки из условия равенства расчетной и экспериментальной кориолисовых частот.

4. Подбирали корректирующий коэффициент $k1$ перед центральной катушкой из условия совпадения расчетной и экспериментальной рабочих частот.

5. Сравнивали получившуюся расчетную временную задержку с экспериментальной.

После этого цикл расчета повторяли, задавая другую величину $k3$ из диапазона 0,8…1,5.

Вследствие того, что масса центральной катушки расположена в узле кориолисовой формы и не влияет на кориолисову частоту, при выбранной схеме варьирования можно добиться точного совпадения расчетной рабочей и кориолисовой частот с экспериментальными. Величины масс навесных элементов и три варианта корректирующих коэффициентов (B1, B2 и B3), приведены в табл. 2. Результаты корректировки модели расходомера приведены в табл. 3. Для вариантов B2 и B3 отличие по временной задержке составило около 0,5% (при совпадении расчетных и экспериментальных собственных частот). В дальнейших расчетах использован вариант B2.

**Таблица 2**

**Величины масс навесных элементов и корректирующие коэффициенты**

| | | | | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Центральная катушка | m1, грамм | 5,0500 | $k1$ | 1 | 1,360 | 3,1176 |
| Боковая катушка | m2, грамм | 6,4900 | $k2$ | 1 | 1,452 | 1,6967 |
| Балансировочный груз | m3, грамм | 9,9038 | $k3$ | 1 | 1,400 | 0,8000 |

**Таблица 3**

**Результаты корректировки модели расходомера**

| | Эксперимент | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|
| Рабочая частота $f_1$, Гц | $f_{э1}$ = 89,882 | 94,3612 | 89,8803 | 89,8821 |
| Кориолисова частота $f_2$, Гц | $f_{э2}$ = 164,200 | 171,4458 | 164,2033 | 164,2005 |
| Временная задержка при расходе воды 2000 кг/ч, мкс | $\Delta t_э$ =28,658 | 28,6152 | 28,5307 | 28,6015 |

Экспериментальная и две расчетные зависимости относительной рабочей частоты от объемной доли газа в жидкости, полученные до и после верификации, приведены на рис. 5. На рис. 5 приведена кривая, соответствующая модели без корректировки масс навесных элементов (при всех корректирующих коэффициентах, равных единице). Эта кривая приведена к начальному значению рабочей частоты, полученной в эксперименте при нулевом содержании газа, для сопоставления тангенсов угла наклона прямых. Зависимость кориолисовой частоты от объемной доли газа в жидкости приведена на рис. 6. Экспериментальная и расчетная кривые (после верификации модели), показывающие изменение временной задержки от объемной доли газа, приведены на рис. 7.

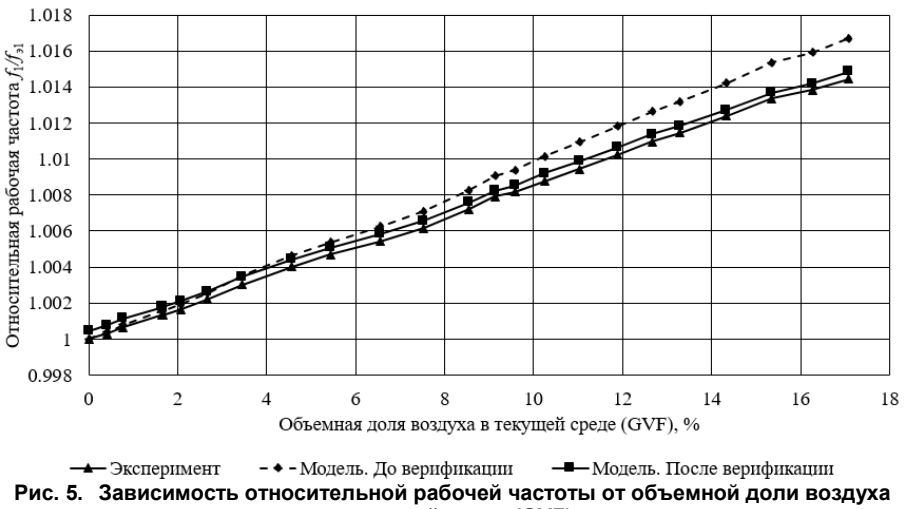



**Рис. 5. Зависимость относительной рабочей частоты от объемной доли воздуха в текущей среде (GVF)**

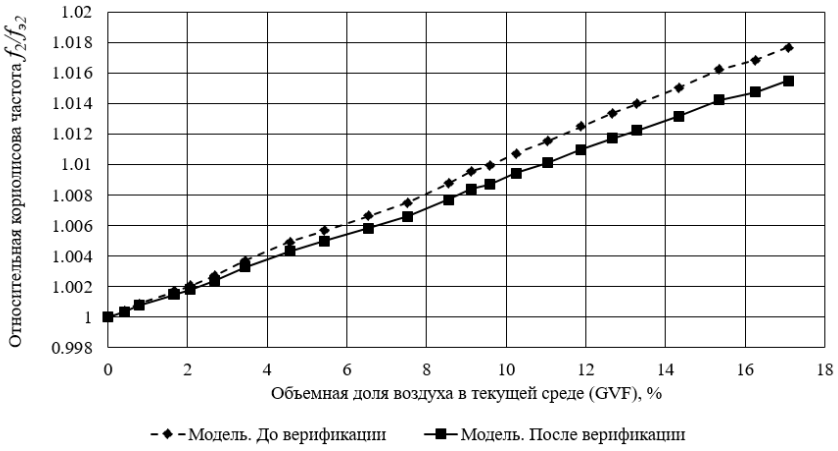



**Рис. 6. Зависимость относительной кориолисовой частоты от объемной доли воздуха в текущей среде (GVF)**

При исследованном сочетании параметров во всех расчетных случаях временная задержка получилась меньше экспериментальной. В выбранном диапазоне изменения корректирующих коэффициентов обеспечить равенство расчетной и экспериментальной временных задержек не удалось. Для удовлетворения равенства расчетной и экспериментальной временных задержек необходимо вводить еще один варьируемый параметр – координаты расположения масс боковых катушек. Так, при увеличении расстояния между боковыми катушками за счет перемещения каждой из них на один узел по направлению от центральной катушки обеспечить равенство расчетной и экспериментальной временных задержек попрежнему не удалось, однако в этом случае во всех расчетных случаях относительная временная задержка оказалась больше единицы (рис. 8). Для обеспечения равенства временных задержек необходимо расположить узел, соответствующий боковой катушке, таким образом, чтобы соответствующая кривая оказалась между кривыми, приведенными на рис. 8. На рис. 9 приведена зависимость плотности текущей среды от объемной доли воздуха. Показано, что «теоретическая плотность» текущей среды не совпадает с измеренной, которая отображается на дисплее электронного блока опытного расходомера в условиях течения двухфазной среды «вода-воздух». Это может говорить о неравномерном распределении воздуха по измерительным трубкам опытного расходомера.

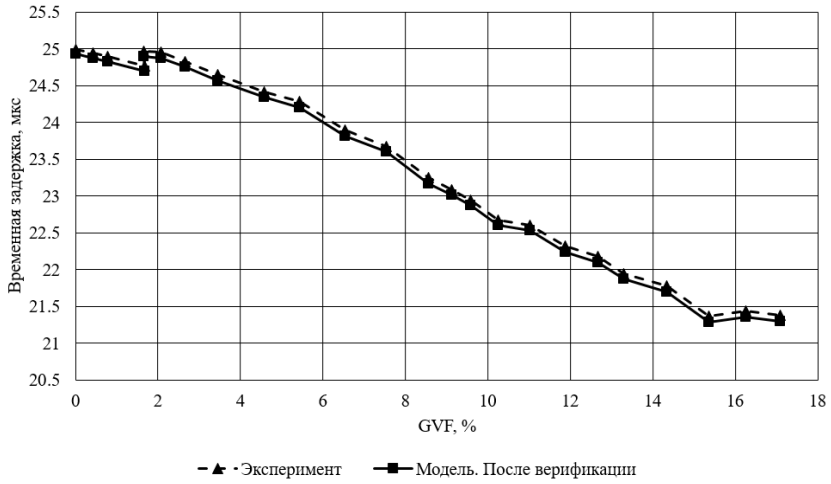



**Рис. 7. Зависимость временной задержки от объемной доли воздуха в текущей среде (GVF)**

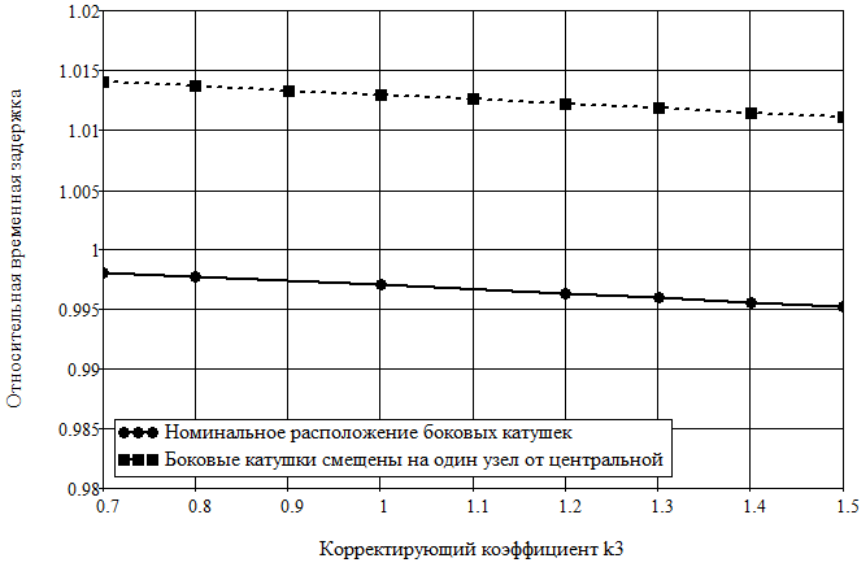



**Рис. 8. Зависимость относительной временной задержки от корректирующего коэффициента *k*3**

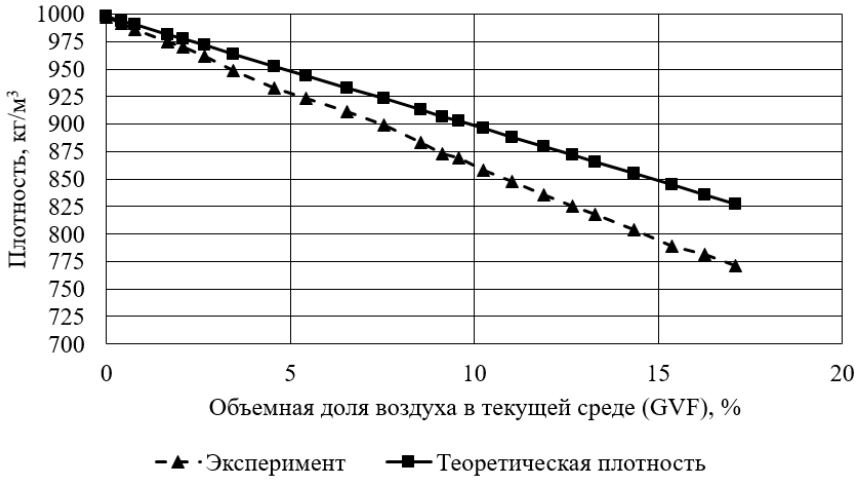



**Рис. 9. Зависимость плотности текущей среды от объемной доли воздуха**

**Анализ результатов**

Предложена методика построения балочной модели кориолисового расходомера, верифицированной по результатам испытаний. Показано, что можно удовлетворить трем критериям близости модели к натурному образцу (равенство рабочих частот, равенство кориолисовых частот, равенство временных задержек), варьируя массы навесных элементов (центральной катушки, боковых катушек, балансировочных грузов, координаты расположения боковых катушек). Предложен алгоритм подбора параметров модели под экспериментальные значения временной задержки и рабочей, и кориолисовой частот. С использованием предложенной методики построена расчетная модель кориолисова расходомера ДУ15 и скорректированы ее параметры.

Показано, что задача оптимизации имеет множество решений, и для повышения точности требуется введение дополнительного варьируемого параметра – координат расположения боковых катушек. Предложенный алгоритм позволяет целенаправленно корректировать модель, не прибегая к трудоёмкому перебору всех параметров.

Предложен алгоритм подбора параметров модели (масс центральной катушки, боковых катушек и балансировочных грузов и координат расположения боковых катушек), обеспечивающий одновременное выполнение трёх критериев близости к натурному образцу: равенства рабочих частот, равенства кориолисовых частот и равенства временных задержек.

**Заключение**

1. Предложена методика построения балочной модели кориолисового расходомера, верифицированной по результатам испытаний. Предложен алгоритм подбора параметров модели (масс центральной катушки, боковых катушек и балансировочных грузов и координат расположения боковых катушек) под экспериментальные значения временной задержки и рабочей и кориолисовой частот.

2. Показано, что выбранных критериев близости расчетной модели к натурному образцу (равенство рабочих частот, равенство кориолисовых частот, равенство временных задержек) достаточно для того, чтобы расчетная временная задержка и плотность текущей среды оказались близкими к экспериментальным значениям.

3. Показано, что «теоретическая плотность» текущей среды не совпадает с измеренной, которую наблюдают на дисплее электронного блока расходомера в условиях течения двухфазной среды «вода–воздух». Это может говорить о неравномерном распределении воздуха по измерительным трубкам.

4. Впервые показано, что если в верифицированной расчетной модели в качестве исходных данных использовать показания плотности и массового расхода, наблюдаемые на дисплее электронного блока «опытного» расходомера, работающего в условиях течения двухфазной среды «вода–воздух», то расчетные зависимости временной задержки и рабочей частоты от объемной доли воздуха практически полностью совпадают с экспериментальными. Это совпадение говорит о том, что ошибочные показания плотности, наблюдаемые на дисплее электронного блока «опытного» расходомера при наличии воздуха в текущей среде, представляют собой некоторые усредненные по объему значения, поскольку в расчетной балочной модели мы задаем одинаковую плотность среды в каждом конечном элементе и получаем частоту, очень близкую к показаниям опытного расходомера. Наблюдаемый в эксперименте массовый расход тоже представляет собой результат осреднения измерений, но уже по времени. При этом расходе, заданном в балочной модели (одинаковом в каждом поперечном сечении), расчетная временная задержка совпадает с экспериментальной. Таким образом, показания массового расхода и плотности, которые мы наблюдаем на дисплее электронного блока «опытного» расходомера, работающего в условиях течения двухфазной среды «вода–воздух», хорошо описываются балочной конечноэлементной моделью расходомера, у которой в качестве исходных данных заданы показания «опытного» расходомера (плотность и массовый расход), текущая среда однородна (ее плотность не изменяется по длине измерительной трубки), а массовый расход постоянен по длине измерительной трубки.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26-21-20019, https://rscf.ru/project/26-21-20019/*

**Литература**

1. Stack, C.P. A Finite Element for the Vibration Analysis of a Fluid-Conveying Timoshenko Beam / C.P. Stack, R.B. Garnett, G.E. Pawlas // Proceedings of the 34th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Material Conference. – 1993. – Vol. 4. – P. 2120–2129.

2. Belhadj, A. The Simulation of Coriolis Meter Response to Pulsating Flow using a General Purpose FE Code / A. Belhadj, R. Cheesewright, C. Clark // Journal of Fluids and Structures. – 2000. – Vol. 14, no. 5 – P. 613–634.

3. Wang, S. Virtual Coriolis Flow Meter: A Tool for Simulation and Design / S. Wang, C. Clark, R. Cheesewright // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2006. – Vol. 220, no. 6 – P. 817–835.

4. Тараненко, П.А. Влияние демпфирования на амплитуды и фазы колебаний системы с гироскопическими связями / П.А. Тараненко, Д.В. Телегин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2025. – Т. 18, № 1. – С. 65–78.

5. Stack, C.P. Design and Analysis of Coriolis Mass Flowmeters using MSC/NASTRAN / C.P. Stack, T.J. Cunningham // MSC/NASTRAN User's Conference Proceedings. – 1993. – P. 1–17.

6. A New Straight-Pipe Coriolis Mass Flowmeter: the Mathematical Model / F. Cascetta, S. Della Valle, A.R. Guido *et al.* // Measurement. – 1991. – Vol. 9, no. 3. – P. 115–123.

7. A New Straight Pipe Coriolis Mass Flowmeter: the Experimental Characterization / F. Cascetta, S. Della Valle, A.R. Guido *et al.* // Measurement. – 1991. – Vol. 9, no. 4. – P. 176–180.

8. Coupled Finite-Volume/Finite-Element Modelling of the Straight-Tube Coriolis Flowmeter / G. Bobovnik, N. Mole, J. Kutin *et al.* //Journal of fluids and structures. – 2005. – Vol. 20, no. 6. – P. 785–800.

9. Wang, T. An Advanced Numerical Model for Single Straight Tube Coriolis Flowmeters. / T. Wang, R.C. Baker, Y. Hussain // Journal of Fluids Engineering. – 2006. – Vol. 128, no. 6 – P. 1346–1350.

10. Modeling a Coriolis Mass Flow Meter for Shape Optimization / W. Hakvoort, J.P. Meijaard, R. G. Aarts *et al.* //1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics, IMSD 2010. – Lappeenranta University of Technology, 2010. – P. 1–10.

11. Analytical Calculation of Sensitivity for Coriolis Mass Flowmeter / L.J. Wang, L. Hu, Z. C. Zhu *et al*. //Measurement. – 2011. – Vol. 44, no. 6. – P. 1117–1127.

12. Ruoff, J. Finite Element Modelling of Coriolis Mass Flowmeters with Arbitrary Pipe Geometry and Unsteady Flow Conditions / J. Ruoff, M. Hodapp, H. Kück // Flow Measurement and Instrumentation. – 2014. – Vol. 37. – P. 119–126.

13. Keita, N.M. Ab initio Simulation of Coriolis Mass Flowmeter / N. Keita // Proceedings of the FLOMEKO. – 2000.

14. Kutin, J. Stability-Boundary Effect in Coriolis Meters / J. Kutin, I. Bajsić // Flow Measurement and Instrumentation. – 2001. – Vol. 12, no. 1. – P. 65–73.

15. Raszillier, H. Coriolis-Effect in Mass Flow Metering / H. Raszillier, F. Durst // Archive of Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 61, no. 3. – P. 192–214.

16. Яушев, А.А. Изучение закономерностей, связей и динамических процессов, обеспечивающих повышенные эксплуатационные характеристики расходомеров кориолисового типа: дис. … канд. техн. наук: 01.02.06 / Яушев Александр Анатольевич. – Челябинск, 2019. – 164 с.

17. Тараненко, П.А. Влияние демпфирования на амплитуды и фазы колебаний системы с гироскопическими связями / П.А. Тараненко, А.А. Кривоногов, Д.В. Телегин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2025. – Т. 17, № 1. – С. 32–39

***Поступила в редакцию 1 октября 2026 г.***

**Сведения об авторах**

Тараненко Павел Александрович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Техническая механика», директор центра виброиспытаний и мониторинга состояния конструкций, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: taranenkopa@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3787-5260.

Телегин Дмитрий Владимирович – инженер центра виброиспытаний и мониторинга состояния конструкций, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: telegindv@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 82–91***

**DOI: 10.14529/mmph260408**

# DEVELOPMENT OF A BEAM-BASED FINITE ELEMENT MODEL OF A CORIOLIS FLOWMETER VERIFIED AGAINST TEST RESULTS

***P.A. Taranenko, D.V. Telegin***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: taranenkopa@susu.ru*

Abstract. This paper addresses the development and verification of a beam-based finite element model for a Coriolis flow meter (CFM). The study is motivated by the need for computational models capable of accurately describing the dynamics of CFM measuring tubes, particularly during the flow of two-phase fluid. The research aimed to develop a methodology for selecting beam model parameters that simultaneously satisfy three criteria for model fidelity relative to the actual device: equality of operating frequencies, equality of Coriolis frequencies, and equality of time delays. The methodology is based on a finite element formulation of the vibration problem for a Timoshenko beam interacting with flowing fluid, accounting for gyroscopic coupling. To verify the model, flow tests were conducted on a DN15 flow meter prototype using a fixed water flow rate and varying air volume fractions. Model calibration was performed by adjusting the masses of attached components. It was found that the optimization problem has multiple solutions; improving solution accuracy requires introducing an additional variable parameter – specifically, the positioning coordinates of the side coils. The study demonstrates that the «theoretical» fluid density differs from the density displayed by the electronic unit, suggesting a non-uniform distribution of air across the tubes. However, when density and mass flow rate readings from the experimental flow meter are used in the verified model, the calculated and experimental relationships – plotting operating frequency and time delay against gas volume fraction – show near-perfect agreement; this indicates that the experimental readings reflect averaged values.

*Keywords: Coriolis flowmeter; finite element method; natural frequency; forced vibrations, time delay, mass flow, gyroscopic forces.*

**References**

1. Stack C.P., Garnett R.B., Pawlas G.E. A Finite Element for the Vibration Analysis of a Fluid-Conveying Timoshenko Beam. *Proceedings of the 34th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, 1993, Vol. 4, pp. 2120–2129.

2. Belhadj A., Cheesewright R., Clark C. The Simulation of Coriolis Meter Response to Pulsating Flow using a General Purpose FE Code. *Journal of Fluids and Structures*, 2000, Vol. 14, no. 5, pp. 613–634.

3. Wang S., Clark C., Cheesewright R. Virtual Coriolis Flow Meter: A Tool for Simulation and Design. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, Vol. 220, no. 6, pp. 817–835.

4. Taranenko P.A., Telegin D.V. Influence of Damping on the Amplitude and Phase of Vibrations of a System with Gyroscopic Links. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2025, Vol. 18, no. 1, pp. 65–78. DOI: 10.14529/mmp250105.

5. Stack C.P., Cunningham T.J. Design and Analysis of Coriolis Mass Flowmeters using MSC/NASTRAN. *MSC/NASTRAN User's Conference Proceedings*, 1993, pp. 1–17.

6. Cascetta F., Della Valle S., Guido A.R., Pagano S., Vigo P. A New Straight-Pipe Coriolis Mass Flowmeter: the Mathematical Model. *Measurement*, 1991, Vol. 9, no. 3, pp. 115–123.

7. Cascetta F., Della Valle S., Guido A.R., Pagano S. A New Straight Pipe Coriolis Mass Flowmeter: the Experimental Characterization. *Measurement*, 1991, Vol. 9, no. 4, pp. 176–180.

8. Bobovnik G., Mole N., Kutin J., Štok B., Bajsić I. Coupled finite-volume/finite-element modelling of the straight-tube Coriolis flowmeter. *Journal of fluids and structures*, 2005, Vol. 20, no. 6, pp. 785–800.

9. Wang T., Baker R. C., Hussain Y. An Advanced Numerical Model for Single Straight Tube Coriolis Flowmeters. *Journal of Fluids Engineering*, 2006, Vol. 128, no. 6, pp. 1346–1350.

10. Hakvoort W.P., Aarts R.G., Jonker J.B., Zwikker J.M. Modeling a coriolis mass flow meter for shape optimization. *1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics, IMSD 2010*, Lappeenranta University of Technology, 2010, pp. 1–10.

11. Wang L. J., Hu L., Zhi Z.C., Ye P., Fu X. Analytical Calculation of Sensitivity for Coriolis Mass Flowmeter. *Measurement*, 2011, Vol. 44, no. 6, pp. 1117–1127.

12. Ruoff J., Hodapp M., Kück H. Finite Element Modelling of Coriolis Mass Flowmeters with Arbitrary Pipe Geometry and Unsteady Flow Conditions. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2014, Vol. 37, pp. 119–126.

13. Keita N.M. Ab Initio Simulation of Coriolis Mass Flowmeter. *Proceedings of the FLOMEKO*, 2000.

14. Kutin J., Bajsić I. Stability-Boundary Effect in Coriolis Meters. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2001, Vol. 12, no. 1, pp. 65–73.

15. Raszillier H., Durst F. Coriolis-Effect in Mass Flow Metering. *Archive of Applied Mechanics*, 1991, Vol. 61, no. 3, pp. 192–214.

16. Yaushev A. A. *Study of the Regularities, Relationships and Dynamic Processes Providing Improved Operational Characteristics of Coriolis-type Flowmeters: Diss. Cand. Sc. (Engineering)*: 01.02.06, Chelyabinsk, 2019, 164 p.

17. Taranenko P.A., Krivonogov A.A., Telegin D.V. Influence of Damping on the Amplitude and phase of Vibrations of a System with Gyroscopic Links. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2025, Vol. 17, no. 1, pp. 32–39.

***Received October 1, 2026***

**Information about the authors**

Taranenko Pavel Alexandrovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Technical Mechanics, Director of the Center for Vibration Testing and Structural Condition Monitoring, South Ural State University, Chelyabinsk, e-mail: taranenkopa@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3787-5260.

Telegin Dmitry Vladimirovich is Engineer at the Center for Vibration Testing and Structural Condition Monitoring, South Ural State University, Chelyabinsk, e-mail: telegindv@susu.ru.

# Физика

УДК 541.136 DOI: 10.14529/mmph260409

# СМЕСИ АЛЮМИНИЕВЫХ ПОРОШКОВ РАЗЛИЧНОЙ ДИСПЕРСНОСТИ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В ГЕНЕРАТОРАХ ВОДОРОДА

***О.Н. Морозова[1], М.Ю. Убоженко[1], О.Б. Кудряшова[1,2], А.А. Антонникова[1]***

*[1] Институт проблем химико-энергетических технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Бийск, Российская Федерация*

*[2] Томский государственный университет, г. Томск, Российская Федерация*

*E-mail: morozova_olga15@mail.ru*

**Аннотация. Рассматривается способ регулирования реакции гидролиза алюминия с помощью смесей алюминиевых порошков различной дисперсности. В качестве модельных порошков алюминия используется нанопорошок марки Alex и микроразмерный АСД-6. Исследуются образцы, где содержатся рассматриваемые порошки как в чистом виде, так и в различных процентных соотношениях. Результаты экспериментальных исследований представлены в виде зависимостей изменения температуры и давления от времени. Рассчитано количество выделившегося водорода в процессе реакции. Установлено, что эффективность реакции существенно зависит от дисперсности исследуемого порошка алюминия и добавление даже небольшого количества наноалюминия повышает общую скорость реакции и выход водорода, чем при использовании микронных порошков в чистом виде. Таким образом, установлено, что смешивание различных марок порошков целесообразно использовать для управления скоростью генерации водорода.**

*Ключевые слова: алюминиевый порошок, реактор, смесь.*

## Введение

В настоящее время исследования в области водородной энергетики развиваются стремительными темпами во всем мире. Водородные источники питания являются перспективным решением по энергоснабжению отдаленных и труднодоступных регионов, а также могут использоваться в качестве аварийного источника электрической энергии. Кроме того, водородная энергетика активно внедряется в разработки по обеспечению питания беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [1, 2]. С их помощью можно оперативно инспектировать большие площади различных охраняемых территорий, приграничных зон и т.д.

Водород в силу высокой энергоемкости является перспективным вариантом для питания портативной электроники, так как использование энергоустановок на основе водород-воздушных топливных элементов (ТЭ) устраняет проблемы, которые возникают при использовании традиционных аккумуляторов и батареек. Поэтому особое внимание в вопросах генерации электрической энергии из водорода уделяется изучению существующих и усовершенствованию новых экологичных и безопасных способов получения $H_2$ [3], регулированию скорости выделения $H_2$ [4, 5], использованию побочных продуктов реакции получения $H_2$ [6].

На сегодняшний день уже усовершенствована технология получения энергии из газообразного водорода и водородсодержащих соединений с помощью электрохимического источника тока – ТЭ, который под действием катализатора разделяет молекулу водорода на протон и электрон, образуя затем электрический ток. Побочным продуктом такого процесса является вода (водяной пар) и тепло. Однако, несмотря на теоретическую простоту процесса, обеспечение своевременной и непрерывной подачи водорода к ТЭ является основной трудностью на пути к коммерциализации источников энергии на основе водородных ТЭ. Связано это с тем, что хранение и транспортировка газообразного водорода экономически нецелесообразна для использования в качестве источника энергии мобильных малогабаритных устройств. Поэтому в водородной энергетике большое внимание уделяется получению водорода на месте его использования путем разложения воды либо с использованием водородсодержащих соединений [7].

Наиболее простым и обоснованным с экономической точки зрения способом получения водорода является гидролиз простых металлов [8]. В качестве исходных компонентов реакции целесообразно использовать алюминиевый порошок и воду – доступные вещества, которые показывают высокую эффективность в сравнении с гидролизом других простых металлов. Однако при получении $H_2$ таким способом возникает проблема разрушения оксидной пленки на поверхности алюминия для повышения его реакционной способности. В то же время трудностью организации процесса является регулирование скорости выделения водорода. В настоящей работе рассматривается способ регулирования течения реакции гидролиза алюминия путем создания водород-генерирующих композиций из смеси алюминиевых порошков различной дисперсности.

**Методика эксперимента**

Установлено, что с повышением дисперсности и площади удельной поверхности алюминиевых порошков увеличивается их реакционная активность при взаимодействии с водой: уменьшается индукционный период реакции, увеличиваются выходные показатели выделившихся продуктов реакции [9]. Поэтому в качестве объекта исследования выбран высокодисперсный нанопорошок алюминия марки Alex и микронный сферический алюминий марки АСД-6. Характеристики исследуемых порошков показаны в табл. 1. Размер частиц порошков алюминия определялся с помощью оптического анализатора частиц PIP 8.1/9.0. Содержание активного алюминия в исходных порошках определялось газоволюмометрическим методом по ГОСТ 5494-95 «Пудра алюминиевая». Значения удельной площади поверхности порошка являются паспортными данными производителя.

**Таблица 1**

**Характеристики алюминиевых порошков марок Alex и АСД-6, используемых в исследовании**

| Марка порошка | Средний размер частиц, мкм | Содержание активного Al в порошке до / после реакции гидролиза, % | Удельная площадь поверхности частиц, $м^2/г$ |
|---|---|---|---|
| Alex | 0,12 – 0,18 | 90,5 / 0,7 | 15,5 |
| АСД-6 | 1,60 – 3,40 | 97,20 / 0,5 | 0,6 |

Взаимодействие алюминия с водой описывается реакцией:

$$2Al+6H_2O \rightarrow 2Al(OH)_3+3H_2\uparrow. \quad (1)$$

Как видно из уравнения (1), на 2 моля алюминия образуется 3 моля водорода. Однако это возможно только при избытке воды. Связано это с тем, что теоретическое стехиометрическое соотношение алюминия к воде составляет 1:2, но на практике такого количества $H_2O$ недостаточно для окисления алюминия. Вследствие экзотермичности реакции может происходить спекание порошка при недостатке воды и постепенное угасание процесса, при этом остается непрореагировавший алюминий. Поэтому для устранения нежелательного течения реакции для экспериментальных исследований было взято соотношение избыточного количества воды к порошку.

Значительное число исследований посвящено выявлению оптимальных условий протекания реакции гидролиза алюминия. Ключевым параметром в этом контексте является соотношение реагентов: его корректный подбор критически важен, поскольку позволяет избежать неконтролируемого выделения водорода.

При проведении сравнительного анализа смесей с различным дисперсным составом использование единого фиксированного соотношения компонентов дает возможность изолированно оценить влияние дисперсности на кинетику реакции. Это особенно актуально с учётом высокой экзотермичности реакции гидролиза алюминия ($\Delta H = -836$ кДж/моль Al). Избыток воды в системе выполняет функцию теплоаккумулятора: он поглощает выделяющееся тепло, предотвращая разогрев выше 100 °C (что принципиально для безопасной эксплуатации реактора) и снижая интенсивность спекания частиц. В результате реакция протекает устойчиво, без перехода в режим кипения. В тоже время при большом избытке воды скорость реакции падает из-за чрезмерного отвода тепла, и время полной конверсии значительно возрастает. Соотношение 9:100 входит в диапазон рекомендуемых соотношений компонентов [10, 11], обеспечивающих баланс между скоростью и контролируемостью процесса. Кроме того, установлено, что при данном соотноше-

нии обеспечивается полное прохождение реакции, о чем свидетельствует остаточное содержание активного алюминия в продуктах реакции менее 1 % (табл. 1).

*Определение количества выделившегося водорода в ходе реакции.* Для оценки количества полученного водорода в герметичном реакторе нужно использовать уравнение состояния газа и данные о давлении. Так как при невысоких давлениях поведение идеального и реального газа различаются несущественно, для расчета возможно использовать уравнение Менделеева-Клайперона:

$$PV = nRT, \quad (2)$$

где $P$ – давление газа, Па; $V$ – объём реактора, м³, $n$ – количество вещества водорода, моль, $R$ – универсальная газовая постоянная, $T$ – температура, К.

Уравнение (2) относительно количества водорода запишется в виде:

$$n = \frac{P_{H_2} V}{RT}. \quad (3)$$

Так как изначально в реакторе присутствует атмосферный воздух, необходимо в (2) учесть его вклад в полученное после реакции значение давления: $P_{H2} = P_{\text{конечное}} - P_{\text{начальное}}$.

Для определения количества полученного водорода в герметичном реакторе использовались данные о давлении и температуре. Поскольку в ходе реакции давление в реакторе достигает 1,1–1,2 МПа, а температура может превышать 60 °С, применение уравнения состояния идеального газа Менделеева–Клапейрона вносит систематическую погрешность. Для повышения точности расчета использовалось уравнение состояния Пэнга–Робинсона [12], которое учитывает отклонения реального газа от идеального через коэффициент сжимаемости z. В этом случае уравнение (2) преобразуется к виду:

$$PV = znRT, \quad (4)$$

где $z$ – коэффициент сжимаемости, определяемый по уравнению Пэнга–Робинсона в зависимости от давления, температуры и состава газовой фазы, равный 0,98.

**Экспериментальная часть**

Для проведения экспериментальных исследований были подготовлены образцы с содержанием алюминиевого порошка к избыточному количеству воды в соотношении 9:100.

Это соотношение неизменно во всех проведенных экспериментах. Для исследования поведения смеси алюминиевого порошка разной дисперсности в каждом образце изменялось соотношение алюминиевых порошков Alex и АСД-6. Состав образцов представлен в табл. 2.

**Таблица 2**
**Соотношения порошка в исследуемых образцах**

| | |
|---|---|
| Образец 1 | 100 % Alex |
| Образец 2 | 70 % Alex и 30 % АСД-6 |
| Образец 3 | 50 % Alex и 50 % АСД-6 |
| Образец 4 | 30 % Alex и 70 % АСД-6 |
| Образец 5 | 100 % АСД-6 |

Подготовленные образцы помещались в толстостенный цилиндрический реактор объемом 0,6 л, который герметично закрывался крышкой и затягивался болтами с уплотнительными кольцами, после чего начиналось активное перемешивание реакционной смеси и инициирующий нагрев реактора до 60 °С. Как только температура смеси достигала 60 °С, перемешивание продолжалось без нагревания. Для каждого образца количество повторных измерений составляло 3.

В ходе реакции регистрировались значения давления с помощью механического манометра ТМ-320Р.00 и значения температуры пирометром UT323. Для инициирования реакции гидролиза алюминия с помощью подогрева и перемешивания использовалась магнитная мешалка ММ-5.

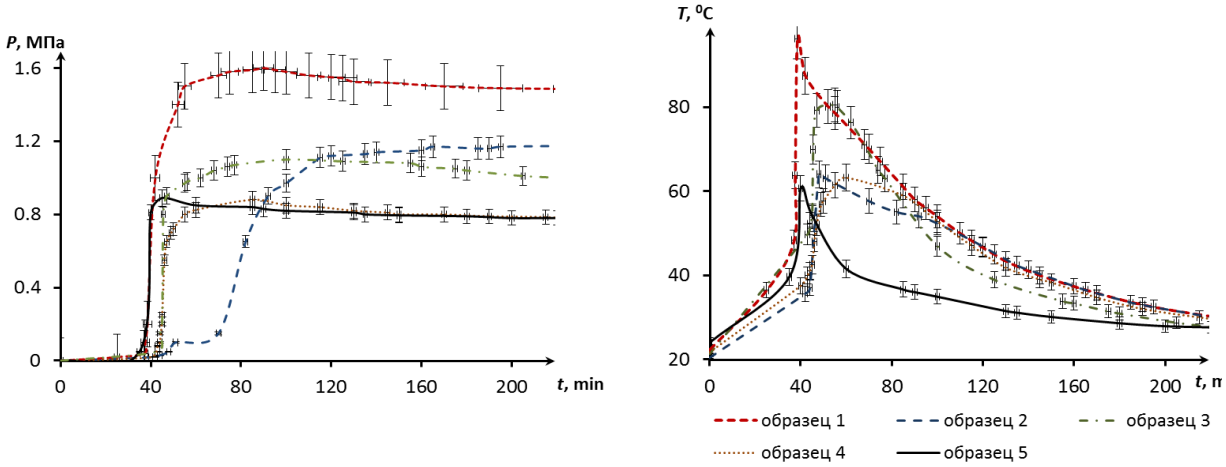
Полученный в ходе реакции газ исследовался путем ИК-спектрометрии на содержание примесей. Регистрацию ИК-спектров проводили на ИК Фурье-спектрометре Инфралюм ФТ-801

(ООО NPF Lumex Sibir, Novosibirsk, Russia) в диапазоне частот (4000–600) $см^{-1}$ с использованием газовой кюветы. ИК-метод использовался как качественный экспресс-анализ для идентификации основных компонентов и контроля отсутствия грубых загрязнений.

**Результаты и их обсуждение**

Результаты экспериментальных исследований представлены на рис. 1. Из рис. 1, *а* видно, что полученные кривые демонстрируют классический для такой системы профиль давления: 1) стадию индукции (период времени до которого компоненты реакции начинают активно взаимодействовать); 2) активное выделение водорода, которое сопровождается резким ростом давления; 3) последующий выход на плато, что соответствует завершению реакции. На рис. 1, *б* представлена зависимость температуры в реакторе от времени. Во всех исследуемых образцах (см. табл. 2) присутствует предварительный нагрев реакционной смеси до 60 °С, далее после отключения подогрева можно увидеть, что во всех образцах, кроме образца 5, присутствует саморазогрев, который, в свою очередь, является «катализатором реакции».

Нанопорошок алюминия марки Alex (образец 1) как видно из рис. 1, *а* является самым реакционноспособным, так как имеет максимальную скорость роста давления. Порошок АСД-6 в образце 5, напротив, демонстрирует медленную кинетику реакции. На скорость реакции влияют разные размеры частиц: порошок Alex имеет нанодисперсный состав и хрупкую оксидную пленку ($Al_2O_3$). У более крупных частиц порошка АСД-6 оксидная пленка ингибирует реакцию.




*а)* *б)*

**Рис. 1. Результаты экспериментальных исследований: а) зависимость давления и б) зависимость температуры в реакторе от времени**

Таким образом, экспериментально подтверждено, что дисперсность влияет на скорость реакции. Далее исследованы смеси порошков. Как видно из рис. 1 (образец 2), при добавлении даже 30 % нанопорошка Alex к 70 % микронного АСД-6 (образец 4) делает реакцию выделения водорода более плавной по сравнению с образцом 5, где содержится чистый АСД-6. Образцы 2 и 3 показывают промежуточную кинетику между чистыми образцами. Если сравнить полученные значения давления для образцов 2 и 3, максимальное значение давления для 2-го образца достигает 1,175 МПа, а для 3-го соответственно 1,1 МПа. А также значения давлений для образцов 2 и 3 незначительно отличаются друг от друга на протяжение всей реакции, но при этом образец 3 позволяет снизить содержание дорогостоящего порошка Alex по массе на 20 %. Тем самым пропорция 50 % Alex и 50 % АСД-6 использования порошка является одним из оптимальных решений, которое не имеет сильной просадки в значениях давления и обеспечивает плавный процесс течения реакции, а также сокращает долю использования марки Alex по массе.

По профилю давления (см. рис. 1, *а*) видно, что процесс окисления алюминиевых порошков протекает в самоускоряющемся (автокаталитическом) режиме. После индукционного периода скорость реакции резко возрастает. Это связано с разогревом и саморазогревом системы, которые поддерживают реакцию и способствуют более эффективному термическому разрушению оксидной пленки. В табл. 3 приведены значения количества выделившегося водорода в ходе реакции окисления алюминия, рассчитанные по уравнению состояния реального газа (4); расхождение

между данными, рассчитанными по уравнению состояния идеального и реального газа, не превышает 3 %. Использование уравнения Пэнга–Робинсона позволило снизить систематическую погрешность, связанную с отклонением свойств водородно-паровой смеси от идеального газа при давлениях ~1,2 МПа и температурах выше 60°C.

На рис. 2, *а* представлены зависимости количества выделившегося водорода ($n$, моль), максимальной температуры реакции ($T_{max}$, °C) и максимальной скорости выделения водорода ($V_{H2}$, л/мин) в образцах от процентного содержания нанопорошка.

**Таблица 3**

**Количество выделившегося водорода**

| № образца | Объем водорода, рассчитанный по уравнению (4), моль |
|---|---|
| Образец 1 | 0,267 |
| Образец 2 | 0,201 |
| Образец 3 | 0,185 |
| Образец 4 | 0,149 |
| Образец 5 | 0,150 |

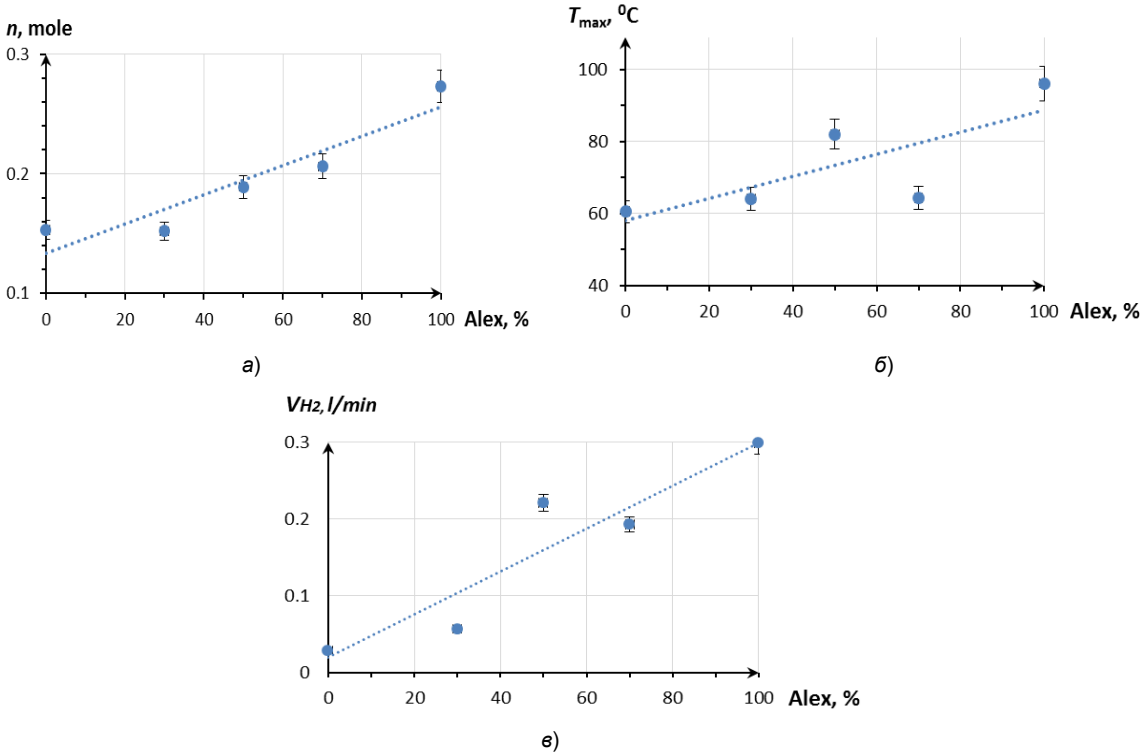



**Рис. 2. Зависимости: а) количества выделившегося водорода; б) максимальной температуры реакции и с) максимальной скорости реакции от содержания нанопорошка алюминия марки Alex в образце**

Выход водорода в образцах линейно увеличивается с добавлением нанопорошка Alex (см. рис. 2, *а*). Максимальная температура (рис. 2, *б*) и скорость реакции (рис. 2, *в*) тоже имеют возрастающий тренд линейной аппроксимации в зависимости от содержания наноалюминия в образце. Как видно из данных табл. 3 и рис. 2, *а*, композиция 50 % Alex / 50 % АСД-6 (образец 3) обеспечивает ~70 % от максимального выхода водорода (по сравнению с чистым Alex) при сокращении содержания дорогостоящего нанопорошка вдвое. Такой компромисс может быть оправдан для практических приложений, где важна не максимальная пиковая производительность, а длительная стабильная генерация (например, в источниках питания для БПЛА или портативных резервных генераторах). Кроме того, смешение с наноалюминием позволяет вовлечь в реакцию микронные порошки, которые в чистом виде демонстрируют низкую реакционную способность и часто являются низколиквидными продуктами. Это открывает перспективы для их утилизации.

В результате ИК-спектрометрии газа (рис. 3), полученного в результате экспериментальных исследований, зарегистрировано присутствие следов органических соединений, углекислого газа из воздуха и углеводородных составляющих (3016 $см^{-1}$, 2358 $см^{-1}$ и 1304 $см^{-1}$ соответственно). Такой газовый состав качественно пригоден для установок, не требующих высокой степени очистки (высокотемпературные ТЭ).

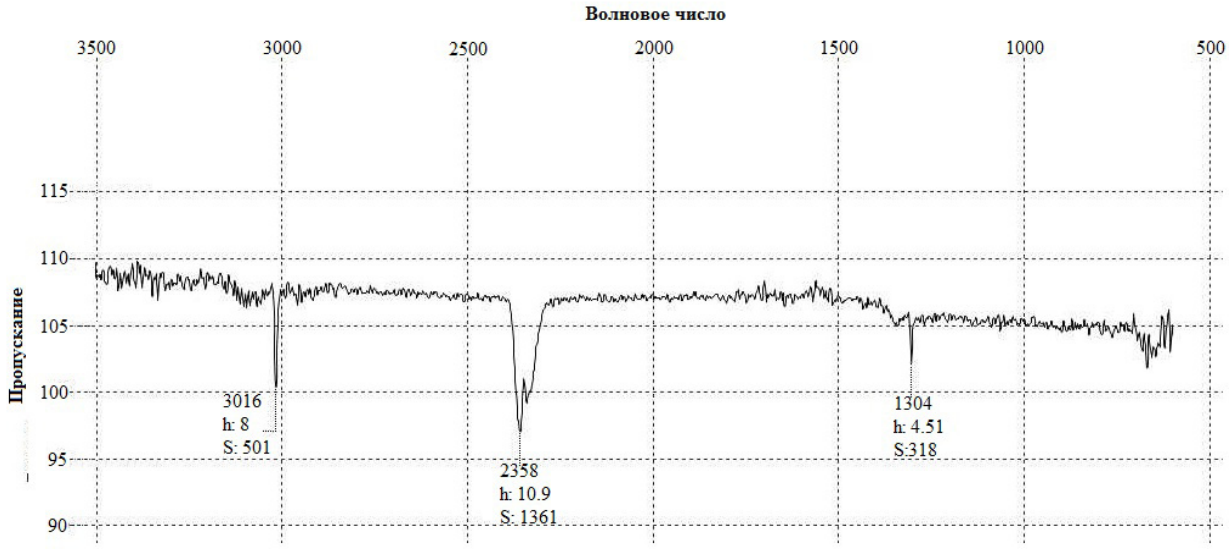



**Рис. 3. ИК-спектры примесей, содержащихся в водороде, полученном в ходе экспериментальных исследований**

Побочным продуктом реакции (1) является смесь оксидов, гидроксидов алюминия и частиц непрореагировавшего порошка – алюминия, покрытого пассивирующим слоем. Микрофотография высушенного порошка при 400-кратном увеличении и его дисперсный состав показаны на рис. 4.

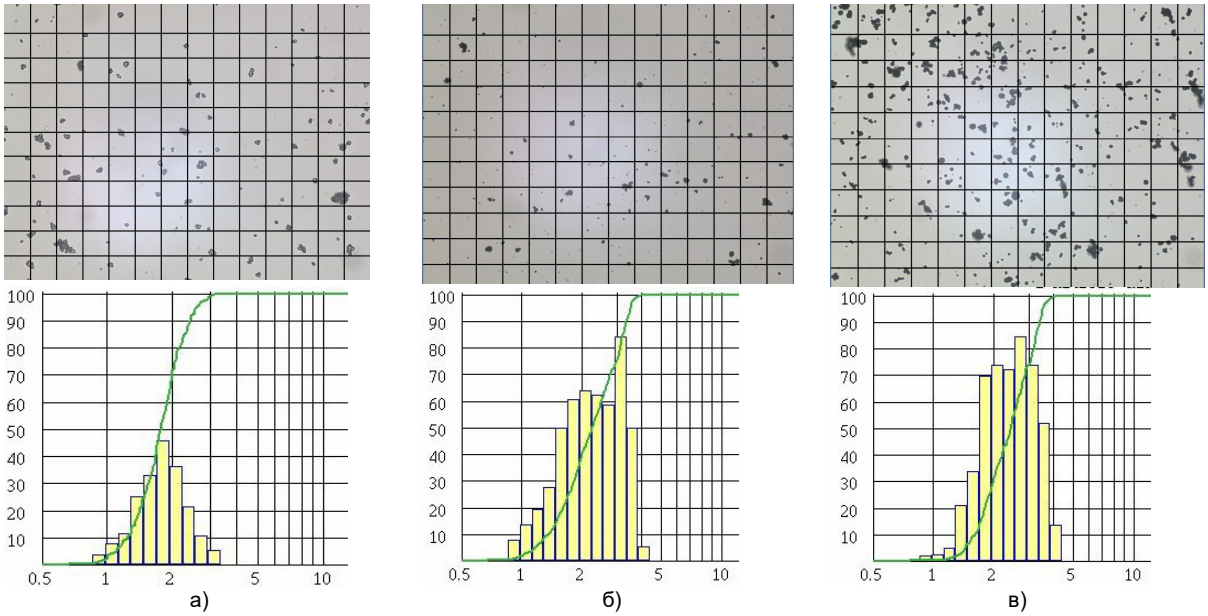



**Рис. 4. Прореагировавший порошок алюминия: сверху микрофотография, снизу гистограмма распределения частиц по размерам: а) образец 1; б) образец 3; в) образец 5**

Анализируя гистограмму распределения частиц прореагировавшего нанопорошка алюминия марки Alex можно отметить, что основная доля частиц имеет уже микронный размер (2,73 мкм) вследствие агломерации частиц. Несмотря на то, что данная смесь является побочным продуктом в процессе получения водорода, оксиды и гидроксиды алюминия являются ценным сырьем в металлургии, химической промышленности, медицине и т. д., поэтому могут использоваться повторно.

**Заключение**

В результате исследования определено влияние смешивания алюминиевых порошков двух видов Alex и АСД-6 на процесс получения водорода. Выяснено, что с помощью композиции высокореакционного нанопорошка и более крупного – микронного можно регулировать кинетику процесса для конкретных задач (для получения быстрого либо наоборот, протяженного во времени выделения водорода). К тому же это эффективный способ утилизации менее активных порошков: при смешивании микронных порошков даже с небольшим количеством наноалюминия повышается общая скорость реакции и выход водорода, чем при использовании микронных порошков в чистом виде.

Таким образом, в результате эксперимента показано влияние дисперсности алюминиевого порошка в составе смеси на кинетику его окисления водой. Подтверждено, что смешивание различных марок порошков целесообразно использовать для управления скоростью генерации водорода.

**Благодарности**

Работа выполнена в рамках базового бюджетного проекта № FUFE 2024-0009 рег. № 124021200033-8 «Энергонасыщенные и нанотермитные композиции: разработка, создание, применение» и при использовании приборной базы Бийского регионального центра коллективного пользования СО РАН (ИПХЭТ СО РАН, г. Бийск).

**Литература**

1. Разработки и исследования водородных энергетических систем в Национальном исследовательском центре «Курчатовский институт» / В.Н. Фатеев, В.И. Порембский, С.А. Григорьев и др. // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2021. – Т. 23, № 2. – С. 128–148.

2. Использование элементов с высокой емкостью по водороду для энергообеспечения летательных аппаратов / Ю.Н. Шалимов, С.А. Соколов, М. Лутовац, И.В. Адианов // Пожарная безопасность: проблемы и перспективы. – 2016. – Т. 2, № 1 (7). – С. 361–364.

3. Сафиуллин, И.Р. Обзор современных методов получения водорода / И.Р. Сафиуллин, Е.М. Ротинян // Инновационный потенциал развития науки в современном мире: технологии, инновации, достижения. – 2023. – С. 98–106.

4. Study on the Hydrogen Generation Performance and Hydrolyzates of Active Aluminum Composites / Z. Liu, F. Xiao, W. Tang *et al.* // International Journal of Hydrogen Energy. – 2022. – Vol. 47, no. 3. – P. 1701–1709.

5. Raj, K. A Comprehensive Review on the MXene-Based Catalysts for Hydrogen Generation via Water Splitting Processes / K. Raj, R. Jhala, S. Sujai *et al.* // Journal of Molecular Structure. – 2025. – P. 143534.

6. Valorization of the By-Product Oxygen from Green Hydrogen Production: A Review / F. Eckl, A. Moita, R. Castro *et al.* // Applied Energy. – 2025. – Vol. 378. – P. 124817.

7. Main Hydrogen Production Processes: An Overview / M. Martino, C. Ruocco, E. Meloni *et al.* // Catalysts. – 2021. – Vol. 11, no. 5. – P. 547.

8. Зверева, Э.Р. Водородное топливо как альтернатива традиционным видам топлива / Э.Р. Зверева // Известия высших учебных заведений. Проблема энергетики. – 2025. – Т. 27, № 3. – С. 187–197.

9. Макрокинетика реакции порошков алюминия в воде / О.Н. Морозова, О.Б. Кудряшова, А.А. Антонникова и др. // Южно-Сибирский научный вестник. – 2020. – № 3(21). – С. 24–29.

10. Годымчук, А.Ю. Окисление нанопорошка алюминия в жидкой воде при нагревании / А.Ю. Годымчук, А.П. Ильин, А.П. Астанкова (Зыкова) // Известия ТПУ. – 2007. – Т. 310, № 1. – С. 102–104.

11. Kudryashova, O.B. Critical Conditions of Al Powder-Water Reaction in a Heated Stirred Reactor / O.B. Kudryashova, O.N Morozova, A.A. Antonnikova // International Journal of Hydrogen Energy. – 2020. – Vol. 45, no. 55. – P. 30957–30965.

12. Weng, Z. Real gas Effect on Steady Planar Detonation and Uncertainty Quantification / Z. Weng, R. Mével // Combustion and Flame. – 2022. – Vol. 245. – P. 112318.

***Поступила в редакцию 7 ноября 2025 г.***

**Сведения об авторах**

Морозова Ольга Николаевна – младший научный сотрудник, Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск, Российская Федерация, e-mail: morozova_olga15@mail.ru.

Убоженко Мария Юрьевна – кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск, Российская Федерация, e-mail: mabric@mail.ru.

Кудряшова Ольга Борисовна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН; старший научный сотрудник, Томский государственный университет, г. Томск, Российская Федерация, e-mail: olgakudr@inbox.ru.

Антонникова Александра Александровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск, Российская Федерация, e-mail: antonnikova.a@mail.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2026, vol. 18, no. 4, pp. 92–100***

**DOI: 10.14529/mmph260409**

# MIXTURES OF ALUMINUM POWDERS OF VARYING DEGREES OF DISPERSION FOR USE IN HYDROGEN GENERATORS

***O.N. Morozova[1], M.Yu. Ubozhenko[1], O.B. Kudryashova[1,2], A.A. Antonnikova[1]***
*[1] Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the SB RAS, Biysk, Russian Federation*
*[2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

Abstract. This paper examines a method for regulating the aluminum hydrolysis reaction using mixtures of aluminum powders of varying particle sizes. Alex nanopowder and ASD-6 micropowder are used as model aluminum powders. Samples containing these powders in pure form and in varying percentages are studied. The experimental results are presented as temperature and pressure curves versus time. The amounts of hydrogen released during the reaction are calculated. It has been established that reaction efficiency depends significantly on the particle size of the aluminum powder being studied, and the addition of even a small amount of nanoaluminum increases the overall reaction rate and hydrogen yield compared to using pure micron-sized powders. Therefore, it has been established that mixing different powder grades is a practical way to control the rate of hydrogen generation.

*Keywords: aluminum powder; reactor; mixture.*

**References**

1. Fateev V.N., Porembsky V.I., Grigoriev S.A., Baranov I.E., Ostrovsky S.V., Korobtsev S.V., Denisenko V.P., Nikolaev I.I., Kirillov I.A., Demkin S.A., Smirnov R.V. Razrabotki i issledovanija vodorodnyh jenergeticheskih sistem v Nacional'nom issledovatel'skom centre "Kurchatovskij institute" (Development and Research of Hydrogen Energy Systems at the Kurchatov Institute National Research Center). *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Problemy jenergetiki* (Bulletin of Higher Educational Institutions. Problems of Energy), 2021, Vol. 23, no. 2, pp. 128–148. DOI: 10.30724/1998-9903-2021-23-2-128-148. (in Russ.).

2. Shalimov Yu.N., Sokolov S.A., Lutovac M., Adianov I.V. *Ispol'zovanie jelementov s vysokoj emkost'ju po vodorodu dlja jenergoobespechenija letatel'nyh apparatov* (The Use of Elements with High Hydrogen Capacity for Aircraft Power Supply). *Pozharnaja bezopasnost': problemy i perspektivy* (Fire safety: problems and prospects), 2016, Vol. 2, no. 1 (7), pp. 361–364. (in Russ.).

3. Safiullin I.R., Rotinyan E.M. *Obzor sovremennyh metodov poluchenija vodoroda* (Review of Modern Methods for Producing Hydrogen). Trudy XII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Innovacionnyj potencial razvitija nauki v sovremennom mire: tehnologii, innovacii, dostizhenija"

(Proc. 12th Int. Conf. “Innovative Potential for the Development of Science in the Modern World: Technologies, Innovations, Achievements”). Ufa, 2023. pp. 98–106. (in Russ.).

4. Liu Z., Tang W., Cong K., Li J., Yang R., Hao J., Xiao F. Study on the Hydrogen Generation Performance and Hydrolyzates of Active Aluminum Composites. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2022, Vol. 47, no. 3, pp. 1701–1709. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2021.10.113

5. Raj K., Jhala R., Sujai S., Pattanayak B., Singh J., Kumar P., Kaladhar M., Singh R., Bisht Y., Gautam A. A Comprehensive Review on the MXene-Based Catalysts for Hydrogen Generation via Water Splitting Processes. *Journal of Molecular Structure*, 2025, Vol. 1349, part 1, 143534. doi:10.1016/j.molstruc.2025.143534

6. Eckl F., Moita A., Castro R., Neto R.C. Valorization of the by-Product Oxygen from Green hydrogen Production: A Review. *Applied Energy*, 2025, Vol. 378, pp. 124817. DOI: 10.1016/j.apenergy.2024.124817

7. Martino M., Ruocco C., Meloni E., Palma V., Pullumbi P. Main Hydrogen Production Processes: An Overview. *Catalysts*, 2021, Vol. 11, no. 5, pp. 547. DOI: 10.3390/catal11050547

8. Zvereva E.R., Marin G.E., Akhmetova I.G., Shchaulov V.V., Yusupov K.N. Vodorodnoe toplivo kak al'ternativa tradicionnym vidam topliva (Hydrogen Fuel – an Alternative to Traditional Fuels). *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Problemy jenergetiki* (Bulletin of Higher Educational Institutions. Problems of Energy), 2025, Vol. 27, no. 3, pp. 187–197. DOI: 10.30724/1998-9903-2025-27-3-187-197. (in Russ.).

9. Morozova O.N., Kudryashova O.B., Antonnikova A.A., Pavlenko A.A., Titov S.S. *Makrokinetika reakcii poroshkov aljuminija v vode* (Macrokinetics for Reaction of Aluminum Powders in Water). *Juzhno-Sibirskij nauchnyj vestnik* (South Siberian Scientific Bulletin), 2020, no. 3. pp. 24–29. (in Russ.).

10. Godymchuk A.Yu., Ilyin A.P., Astankova A.P. Aluminum Nanopowder Oxidation in Liquid Water when Heating. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2007, Vol. 310, no. 1, pp. 95–97.

11. Kudryashova O.B., Morozova O.N., Antonnikova A.A. Critical Conditions of Al Powder-Water Reaction in a Heated Stirred Reactor. *International journal of hydrogen energy*, 2020, Vol. 45, no. 55, pp. 30957–30965. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2020.08.068

12. Weng Z., Mével R. Real Gas Effect on Steady Planar Detonation and Uncertainty Quantification. *Combustion and Flame*, 2022, Vol. 245, P. 112318. DOI: 10.1016/j.combustflame.2022.112318.

***Received November 7, 2025***

**Information about the authors**

Morozova Olga Nikolaevna is Junior Research Fellow, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation, e-mail: morozova_olga15@mail.ru.

Ubozhenko Maria Yurevna is Cand. Sc. (Engineering), Staff Scientist, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation, e-mail: mabric@mail.ru.

Kudryashova Olga Borisovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation; Senior Staff Scientist, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, e-mail: olgakudr@inbox.ru.

Antonnikova Alexandra Alexandrovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation, e-mail: antonnikova.a@mail.ru.

# Персоналии

## ЭНЕРГИЯ, ЦЕЛЕУСТРЕМЛЕННОСТЬ, НАУКА: К ЮБИЛЕЮ ЕЛЕНЫ СЕРГЕЕВНЫ ШЕСТАКОВСКОЙ



В Институте естественных и точных наук Южно-Уральского государственного университета есть люди, которые задают тон всей кафедральной жизни. И одна из них – Елена Сергеевна Шестаковская. 4 октября 2026 года она отметила юбилей, и это отличный повод вспомнить ее путь, достижения и просто сказать спасибо за то, что она делает для университета.

Научная судьба Елены Сергеевны была предопределена еще на студенческой скамье Челябинского государственного университета. В 1999 году она окончила вуз с отличием по специальности «Баллистика», заложив фундамент глубокого понимания сложных физических процессов. Стремление к познанию закономерностей движения материи привело ее в аспирантуру родного вуза. Итогом этого этапа стала успешная защита кандидатской диссертации в 2005 году на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы».

С 2009 года деятельность Елены Сергеевны неразрывно связана с Южно-Уральским государственным университетом. Пройдя путь от преподавателя до ключевого административного звена кафедры, где с 2011 года она выполняла функции ученого секретаря, в 2022 году Е.С. Шестаковская возглавила кафедру вычислительной механики. Этот переход стал логичным продолжением ее многолетней работы на благо коллектива.

Если говорить о науке, то здесь список достижений впечатляет. В 2017 году вышла монография в соавторстве с В.Ф. Куропатенко «Основы численных методов механики сплошной среды». Это не просто книжка на полку – это серьезный труд, который используют как в научной работе, так и в обучающем процессе. Всего на счету Елены Сергеевны 60 публикаций, среди которых есть и учебные пособия. Но главное – она не боится сложных практических задач. С 2021 года активно участвует в реализации грантов и хоздоговоров кафедры. Недавно завершился проект с РФЯЦ ВНИИТФ, руководителем которого была Елена Сергеевна. Словом, ее руками решаются задачи, имеющие значение для реальной промышленности.

Свои научные достижения Елена Сергеевна представляет на международных и Всероссийских конференциях, так что научное сообщество ее знает и слышит. А в 2025 и 2026 годах под её руководством на базе ЮУрГУ были проведены Всероссийские конференции, участники которых отметили высокий уровень организации этих мероприятий и высокий уровень научных докладов сотрудников кафедры.

Круг научных интересов Елены Сергеевны звучит внушительно, но на деле это очень прикладные вещи: изучение свойств высокоэнергетических материалов, построение уравнений состояния для конденсированных веществ, построение аналитических решений для получения условий кумуляции энергии. Это та область науки, где физика встречается с математикой, и здесь она настоящий профессионал.

Однако научная деятельность составляет лишь одну грань таланта Елены Сергеевны. Не менее значима ее роль как педагога. Она до сих пор активно преподает: читает лекции, ведет практические занятия. Студенты отмечают, что её занятия всегда понятные и живые. Никто не уходит с пар с мыслью «ничего не разобрал». И это, наверное, главный показатель таланта педагога. Её считают справедливой, при этом умеющей зажечь идеей. Если у студента возникают трудности – она всегда рядом, подскажет, направит, поможет разобраться, а не просто поставит галочку.

Елена Сергеевна активно привлекает молодежь к исследовательской работе, выступая наставником для нового поколения учёных. Под ее чутким руководством выполняются и успешно защищаются выпускные квалификационные работы бакалавров и магистров. Коллеги и ученики ценят ее за отзывчивость и уникальную способность находить новые, самые актуальные

задачи на переднем крае науки, помогая молодым специалистам сделать первые уверенные шаги в профессии.

Особый повод для гордости – победа кафедры в конкурсе научных проектов лабораторий. Тема-победитель – «Экогород: моделирование распространения загрязняющих веществ в условиях городской застройки» – демонстрирует не только академическую глубину, но и практическую значимость работы коллектива для решения современных экологических проблем урбанизированных территорий.

В этом году кафедра вычислительной механики отметила важное событие: состоялась первая защита кандидатской диссертации за всё время своего существования. И хотя научным руководителем был другой специалист, вклад Елены Сергеевны был поистине неоценим. Благодаря её опыту, внимательности и требовательности диссертация получила одобрение экспертного совета. Защита прошла блестяще, а сама Елена Сергеевна стала символом того, что даже самые сложные задачи по плечу человеку, который любит своё дело.

**Дорогая Елена Сергеевна!**

Примите самые теплые поздравления с Вашим юбилеем! Ваш вклад в развитие вычислительной механики, подготовку высококвалифицированных кадров и укрепление связей между академической наукой и высокотехнологичной промышленностью невозможно переоценить. Вы являетесь тем редким примером руководителя, который сочетает в себе строгость первоклассного исследователя и душевную теплоту мудрого наставника.

Коллектив кафедры вычислительной механики и института естественных и точных наук от всего сердца желает Вам новых ярких научных достижений, способных удивить мировое сообщество; крупных федеральных грантов и долгосрочных стратегических договоров; успешной реализации проекта «Экогород» и других смелых инициатив. Пусть под Вашим руководством кафедра вычислительной механики продолжает свое динамичное развитие, выпуская талантливых специалистов, а энергия, целеустремленность и любовь к своему делу никогда не иссякают. Крепкого здоровья, благополучия и личного счастья!

***Н.Л. Клиначева***

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003–2024) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. http://vestnik.susu.ru/mmph.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, http://vestnik.susu.ru/mmph, http://вестник.юургу.рф/mmph.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции: 454080, г. Челябинск, ул. С. Кривой, 79, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 2.

Адрес издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 18, № 4
2026

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 30.10.2026. Дата выхода в свет 13.11.2026.
Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 12,09.
Тираж 500 экз. Заказ 244/289. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.