



ВЕСТНИК

**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2014
Т. 6, № 3**

ISSN 2075-809X

СЕРИЯ

**«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий

Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., профессор **Мирзоев А.А.** (отв. редактор),
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь),
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.**,
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.**,
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.**,
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.**,
д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.**

Редакционный совет:

д.ф.-м.н., профессор **Менихес Л.Д.**,
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.**,
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.**,
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.**,
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.**,
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва),
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, США),
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор, **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла),
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Корея),
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея),
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, Нэшвилл, США)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY
SERIES

2014
Vol. 6, no. 3

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

A.A. Mirzoev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.O. Chernyavskii, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
N.D. Kundikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

L.D. Menikhes, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.V. Karachik, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D.A. Mirzaev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
S.B. Sapozhnikov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, United States of America
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela
Kishik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, USA

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

ВАРФОЛОМЕЕВ Д.А., КАЗИН К.И., КУРОПАТЕНКО В.Ф. О способах повышения точности расчета ударных волн	5
КАРАЧИК В.В. Об одной неклассической задаче для уравнения Гельмгольца	14
КОВАЛЕВ Ю.М. Определение вида силы межфазного взаимодействия для математической модели газовзвеси с парными взаимодействиями	23
КУРОПАТЕНКО В.Ф., ФИЛАТОВ С.Ю. Моделирование ударного сжатия и теплового расширения пяти металлов	30
МЕДВЕДЕВ С.В. h -однородные λ -пространства	37
ПАСИКОВ В.Л. Игровые задачи наведения для собственно линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла	42
ТАРКАЕВ В.В., ФОМИНЫХ Е.А. Верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов	50
УХОБОТОВ В.И., ИЗМЕСТЬЕВ И.В. Об одной игре импульсной встречи с терминальным множеством в форме кольца	53

Механика

КУДРЯВЦЕВ О.А., САПОЖНИКОВ С.Б. Оценка прочности технической керамики в изделиях сложной формы	60
ОСИПЕНКО М.А. Контактная задача для двух струн с переменными натяжениями	66
ПОРОШИН В.Б., БУКСБАУМ В.Б., ДРУЖИНИН П.С. Методика прогнозирования долговечности колонны гибких труб на основе результатов лабораторных и стендовых испытаний	72
САДАКОВ О.С., ЩЕРБАКОВА А.О. Об использовании тензора логарифмической деформации	78

Физика

РИДНЫЙ Я.М., МИРЗОЕВ А.А., МИРЗАЕВ Д.А. Ab-initio моделирование энергии растворения атома углерода в парамагнитном ГЦК-железе	86
СТАДНИК О.С., ШУЛЬГИНОВ А.А. Обратный бета-распад иттрия-90 под воздействием нейтрино ультранизких энергий	92

CONTENTS

Mathematics

FARFOLOMEYEV D.A., KAZIN K.I., KUROPANENKO V.F. On Methods for Increasing the Accuracy of Shock Wave Calculations.....	5
KARACHIK V.V. On a Nonclassical Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation.....	14
KOVALEV Y.M. Detection of a Type of Interphase Interaction Force for Mathematical Models of Gas Suspension with Pair Interaction.....	23
KUROPATENKO V.F., FILATOV S.Yu. Modelling of Shock Compression and Thermal Expansion of Five Metals.....	30
MEDVEDEV S.V. h -Homogeneous λ -Spaces.....	37
PASIKOV V.L. Guidance Game Problems for Linear Integro-Differential Systems of Volterra Type with Control Action Under the Integral Sign.....	42
TARCAEV V.V., FOMINYKH E.A. Upper Bounds for the Complexity of Some Pretzel Knots Complements.....	50
UKHOBOTOV V.I., IZMESTYEV I.V. On a Game of Impulse Meeting with a Terminal Set in the Form of a Ring.....	53

Mechanics

KUDRYAVTSEV O.A., SAPOZHNIKOV S.B. Strength Assessment of Technical Ceramics in Goods of Irregular Shape.....	60
OSIPENKO M.A. Contact Problem for Two Strings with Variable Tensions.....	66
POROSHIN V.B., BUKSBAUM V.B., DRUZHININ P.S. Technique for Forecasting the Operating Life of Coil Tubing on the Basis of Laboratory and Bench Tests.....	72
SADAKOV O.S., SCHERBAKOVA A.O. On the Use of Logarithmic Strain Tensor.....	78

Physics

RIDNYI a.M., MIRZOEV A.A., MIRZAEV D.A. Ab-initio Simulation of Dissoilution Energy of Carbon Atom in the Paramagnetic State of FCC-iron.....	86
STADNIK O.S., SHULGINOV A.A. Inverse Beta Decay of Yttrium-90 under the Influence of Neutrino Ultra-low Energies.....	92

О СПОСОБАХ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН¹

Д.А. Варфоломеев², К.И. Казин³, В.Ф. Куропатенко⁴

Рассматривается неоднородный разностный метод расчета ударных волн в Лагранжевых координатах. Метод позволяет явно выделять в решении ударные волны в виде разрывов первого рода. Предлагаются способы повышения точности расчета выделенных ударных волн в рамках этого метода. В частности, для определения величин перед фронтом ударной волны наряду с разностным подходом предлагается использовать элементы метода характеристик. Приводится алгоритм модифицированного метода. На примере расчета методических задач показано, что применение модифицированного метода позволило повысить монотонность и точность расчета ударных волн.

Ключевые слова: ударная волна; сильный разрыв; неоднородный разностный метод.

Введение

Для математического моделирования ударных волн в сплошных средах широко применяются однородные разностные методы, в которых ударные волны «размазываются» на несколько интервалов сетки. Неоднородные разностные методы позволяют явно выделять в решении ударные волны в виде разрывов первого рода, которые разграничивают области с гладким решением. Неоднородные методы являются алгоритмически более сложными, но при этом дают возможность на одинаковой сетке получать результаты точнее, чем результаты, полученные с применением однородных методов. Важной особенностью методов с выделением разрывов является отсутствие энтропийных следов в решении.

Одним из первых неоднородных методов, который позволяет выделять в решении сильные и слабые разрывы, был метод характеристик [1, 2]. Метод характеристик использует Эйлеровы координаты.

В 60-х годах создан неоднородный разностный метод в Лагранжевых координатах [3]. Одной из особенностей данного метода является то, что он способен выделять в решении наиболее «важные» разрывы, а остальные разрывы «размазывать». Такая особенность позволяет с успехом применять его для расчета очень сложных течений, акцентируя внимание на определяющих течения областях. Разрывы во второстепенных областях размазываются, что позволяет сократить вычислительные затраты и при этом сохранить точность вычислений.

В данной работе для метода [3] предлагаются способы повышения точности расчета выделенных ударных волн. Для определения величин перед фронтом ударной волны наряду с разностным подходом применяются элементы метода характеристик. Для повышения точности расчета величин за фронтом ударной волны при взаимодействии регулярной сетки и сетки особенностей предлагается алгоритм, позволяющий корректно учитывать возмущения, догоняющие фронт. Для интервалов перед фронтом и за фронтом предлагается подход, который сводит расчет величин в данных интервалах к расчету величин на регулярной сетке.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ ГРАНТ №13-01-00072

² Варфоломеев Денис Александрович – начальник сектора, Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск.
E-mail: d.a.varfolomeev@mail.ru

³ Казин Кирилл Иванович – младший научный сотрудник, Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск.
E-mail: k_kirill@sibmail.com

⁴ Куропатенко Валентин Федорович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск.

E-mail: v.f.kuropatenko@rambler.ru

Шаблон для определения сеточных величин и основные этапы расчета

В данной работе за основу взят неоднородный разностный метод В.Ф. Куропатенко [3]. В этом методе используется разнесенный шаблон – координаты и скорости определены на границах интервалов, а термодинамические величины в их середине. Будем придерживаться терминологии, используемой в [3]. Интервалы, в которых отсутствуют разрывы, называются регулярными. Интервалы, в которых присутствуют разрывы, называются особыми. Если разрыв попадает в регулярный интервал, то этот интервал становится особым. Когда разрыв покидает данный интервал, он снова становится регулярным. Таким образом, выделенные сильные разрывы рассчитываются как особенности, перемещающиеся по регулярной сетке.

Рассмотрим одиночный сильный разрыв, перемещающийся вправо (рис. 1). Для наглядности здесь и далее на подобных рисунках будем использовать Лагранжевы координаты, в которых частицы не перемещаются, а, следовательно, траектории границ интервалов являются вертикальными линиями. Точка i является фронтом ударной волны и принадлежит сетке особенностей. Пусть за время τ разрыв переходит с n на $(n + 1)$ слой, при этом остается внутри интервала и не взаимодействует с другими разрывами и контактными границами.

Особый интервал состоит из двух интервалов: интервал перед фронтом – « α -интервал», интервал за фронтом « β -интервал». Для величин на разрыве используются обозначения: « $-$ » – перед фронтом, « $+$ » – за фронтом.

Перед началом расчета интервала с разрывом известны все величины в регулярных интервалах на момент времени t^n и t^{n+1} . В интервале с разрывом на момент t^n известны:

- $(\rho, E, P, U, C)_-^n, (\rho, E, P, U, C)_+^n$ – величины на разрыве;
- R_D^n, W^n, D^n – положение и скорости разрыва;
- $(\rho, E, P, M)_\alpha^n$ – величины в интервале перед фронтом (α -величины);
- $(\rho, E, P, M)_\beta^n$ – величины в интервале за фронтом (β -величины).

Здесь ρ – плотность, E – удельная внутренняя энергия, P – давление, U – скорость, C – скорость звука, M – масса интервала, D – скорость перемещения разрыва в Эйлеровых координатах, W – скорость перемещения разрыва в Лагранжевых координатах.

Задача состоит в том, чтобы на момент t^{n+1} определить все величины в интервале с разрывом и величины на разрыве. Алгоритм расчета особого интервала можно разбить на несколько этапов. Не вдаваясь в конкретные операции каждого этапа, рассмотрим общую структуру. Последовательно определяем:

Величины перед фронтом:

- новое положение фронта и величины перед разрывом $(\rho, E, P, U, C)_-^{n+1}$;
- плотность ρ_α^{n+1} в α -интервале и массу ΔM , которая «перетекла» сквозь фронт за время τ ;
- термодинамические величины в $(E, P, M)_\alpha^{n+1}$ α -интервале.

Величины за фронтом

- величины за разрывом $(\rho, E, P, U, C)_+^{n+1}$;
- величины в β -интервале и его массу M_β^{n+1} .

После проведения данных операций можно говорить, что на момент времени t^{n+1} в интервале с разрывом определены все величины.

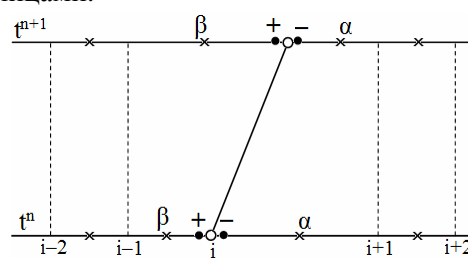


Рис. 1. Шаблон расчета особого интервала

Расчет минус величин

Определим скорость фронта ударной волны $D^{n+1} = D^n + \tau \left(\frac{dD}{dt} \right)^{n+1}$, где $\left(\frac{dD}{dt} \right)^{n+1}$ – ускорение фронта, полученное с применением дополнительного к условиям Гюгонио уравнения для расчета величин вдоль траектории фронта ударной волны [3]. Новое положение фронта $R_D^{n+1} = R_D^n + \tau D^{n+1}$.

Рассмотрим точку D (рис. 2). Величины в данной точке характеризуют состояние на разрыве перед фронтом в момент t^{n+1} и соответствуют «минус» величинам. Координата точки D совпадает с положением фронта в момент t^{n+1} .

Для нахождения решения в точке D воспользуемся характеристическими свойствами уравнений газовой динамики [1]. Построим характеристический треугольник. Для этого из точки A проведем линию с наклоном как у α характеристики $\frac{dR}{dt} = (U + C)_A^n$, а из точки B с наклоном как у β характеристики $\frac{dR}{dt} = (U - C)_B^n$. Для

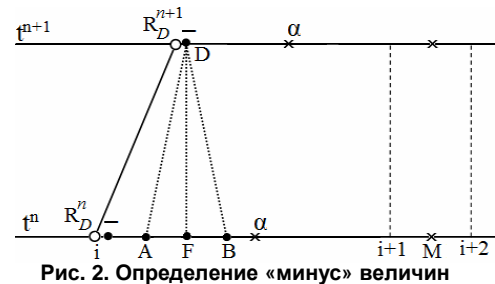


Рис. 2. Определение «минус» величин

точки F построим траекторию $\frac{dR}{dt} = U_F^n$. Координаты и скорости точек A, B и F неизвестны и их необходимо определить. Для этого составим систему из трех уравнений. Первое уравнение – это уравнение α характеристики, второе и третье – выражения для U и C , полученные путем линейной интерполяции на n слое. Запишем систему уравнений для точки A

$$\begin{cases} R_D^{n+1} = R_A^n + \tau (U + C)_A^n, \\ U_A^n = U_-^n + \frac{U_-^n - U_M^n}{R_D^n - R_M^n} (R_A^n - R_D^n), \\ C_A^n = C_-^n + \frac{C_-^n - C_M^n}{R_D^n - R_M^n} (R_A^n - R_D^n). \end{cases}$$

Решив данную систему, получим выражение для определения координаты точки A

$$R_A^n = \frac{R_D^{n+1} - \tau (U_-^n + C_-^n - R_D^n (Z_1 + Z_2))}{1 + \tau (Z_1 + Z_2)},$$

где $Z_1 = \frac{U_-^n - U_M^n}{R_D^n - R_M^n}$, $Z_2 = \frac{C_-^n - C_M^n}{R_D^n - R_M^n}$.

Для определения R_B решим аналогичную систему при этом первое уравнение примет вид $R_D^{n+1} = R_B^n + \tau (U - C)_B^n$. Получим

$$R_B^n = \frac{R_D^{n+1} - \tau (U_-^n - C_-^n - R_D^n (Z_1 - Z_2))}{1 + \tau (Z_1 - Z_2)}.$$

Далее линейной интерполяцией на n слое рассчитываем величины $(\rho, E)_{A,B}^n$ и из уравнения состояния находим $P_{A,B}^n$ и $C_{A,B}^n$.

Запишем уравнения, описывающие изменения величин вдоль α и β характеристик с учетом симметрии ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$dU \pm \frac{1}{\rho C} dP \pm \frac{(\alpha - 1)UC dt}{R} = 0.$$

Математика

Для каждой из характеристик заменим дифференциальное уравнение разностным и после несложных преобразований получим выражения для определения U_-^{n+1} и P_-^{n+1}

$$U_-^{n+1} = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{\rho_A C_A + \rho_B C_B}, \quad P_-^{n+1} = \frac{\rho_A C_A \Phi_B - \rho_B C_B \Phi_A}{\rho_A C_A + \rho_B C_B}.$$

Здесь $\Phi_A = P_A + \rho_A C_A U_A - \frac{(\alpha-1)\rho_A U_A C_A^2}{R_A} \tau$, $\Phi_B = P_B + \rho_B C_B U_B - \frac{(\alpha-1)\rho_B U_B C_B^2}{R_B} \tau$.

Из точки D опустим на n слой траекторию и найдем положение точки F

$$R_F = R_D^{n+1} - \tau U_-^{n+1}.$$

Величины $(\rho, E, P, C)_F$ определяются аналогично точкам A и B. Вдоль траектории энтропия постоянна, следовательно $C^2 = \frac{dP}{d\rho}$. Для определения плотности перед фронтом запишем разностный аналог этого уравнения

$$\rho_-^{n+1} = \rho_F + \frac{P_-^{n+1} - P_F}{C_F^2}.$$

Для определения E_-^{n+1} проинтегрируем с заданной точностью уравнение изэнтропии $dE = -PdV$ вдоль траектории частицы в пределах (V_F^n, V_-^{n+1}) . Из уравнения состояния найдем давление P_-^{n+1} и скорость звука C_-^{n+1} . Таким образом, определено состояние перед фронтом на момент t^{n+1} .

В целях повышения точности проведем пересчет. Для этого из точки D «опустим» характеристики и определим R_A, R_B следующим образом

$$R_A = R_D^{n+1} - \tau(U + C)_-^{n+1}, \quad R_B = R_D^{n+1} - \tau(U - C)_-^{n+1}.$$

Затем пересчитаем «минус» величины для данных координат.

Расчет плотности в α -интервале и массы, перешедшей через фронт

Для учета изменения плотности в α -интервале за шаг по времени представим, что на левой границе интервала (R_D^n, R_{i+1}^n) с массой M_α^n отсутствует разрыв, т.е. он является регулярным, его масса не меняется, левая граница движется со скоростью вещества перед фронтом (рис. 3). Обозначим состояние данного интервала на момент t^{n+1} индексом C.

Координата левой границы $R_{AC}^{n+1} = R_D^n + \tau U_{AC}^{n+1}$, где

$$U_{AC}^{n+1} = U_-^n + \tau \left(\frac{dU}{dt} \right)_-^{n+1}.$$

Правая граница совпадает с границей соседнего регулярного интервала. На момент времени t^{n+1} определим объем и плотность $(R_{AC}^{n+1}, R_{BC}^{n+1}) \rightarrow \theta_C^{n+1}$, $\rho_C^{n+1} = M_\alpha^n / \theta_C^{n+1}$.

Пусть интервал K характеризует ближайший к разрыву регулярный интервал перед фронтом на момент t^{n+1} . Тогда плотность в α -интервале на момент времени t^{n+1} определим линейной интерполяцией

$$\rho_\alpha^{n+1} = \rho_C^{n+1} + (\rho_K^{n+1} - \rho_C^{n+1}) \frac{R_D^{n+1} - R_{AC}^{n+1}}{2R_K^{n+1} - (R_{BC}^{n+1} + R_{AC}^{n+1})}.$$

Далее определим объем α -интервала $(R_D^{n+1}, R_{BC}^{n+1}) \rightarrow \theta_\alpha^{n+1}$, его массу $M_\alpha^{n+1} = \rho_\alpha^{n+1} \theta_\alpha^{n+1}$ и массу, перешедшую за время τ сквозь фронт ударной волны $\Delta M = M_\alpha^n - M_\alpha^{n+1}$.

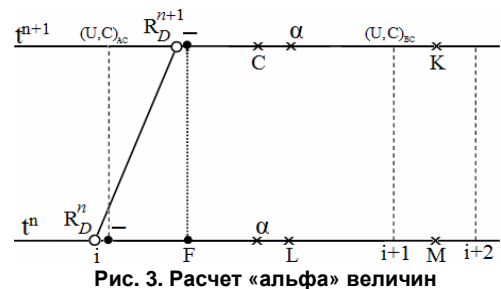


Рис. 3. Расчет «альфа» величин

Расчет величин в α -интервале

Предположим теперь, что интервал (R_F^n, R_{i+1}^n) является регулярным (см. рис. 3). Точка L – середина интервала. Линейной интерполяцией рассчитываем значения термодинамических величин в этом интервале на момент времени t^{n+1} . На момент времени t^{n+1} состояние в данном интервале соответствует значениям величин в α -интервале. Таким образом, задача определения альфа величин сводится к расчету регулярного интервала (R_F^n, R_{i+1}^n) на момент времени t^{n+1} . Знак величины $\Delta U = U_-^{n+1} - U_{BC}^{n+1}$ определяет сжатие или растяжение в интервале. Пользуясь методом расчета регулярных интервалов [3], определяем величины в интервале перед фронтом ударной волны. Таким образом, при расчете регулярных интервалов и интервала перед фронтом используется один метод, что позволяет получить одинаковый порядок аппроксимации.

Расчет плюс величин

На фронте ударной волны значения кинематических и термодинамических величин справа и слева в идеальной среде связаны между собой условиями Гюгонио

$$W(U_+ - U_-) - (P_+ - P_-) = 0, W(V_+ - V_-) + (U_+ - U_-) = 0, (E_+ - E_-) + 0,5(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0.$$

Величина скорости фронта ударной волны D^{n+1} и состояние перед фронтом на момент времени t^{n+1} определены. Найдем значение W^{n+1}

$$W^{n+1} = \rho_-^{n+1} (D^{n+1} - U_-^{n+1}).$$

Тогда условия Гюгонио в совокупности с уравнением состояния $P = P(V, E)$ содержат четыре уравнения и четыре неизвестных. Разрешая полученную систему уравнений, определим параметры на фронте ударной волны в момент времени t^{n+1} .

Расчет величин в β -интервале

Положение правой границы β -интервала соответствует положению сильного разрыва. Левая граница является границей соседнего регулярного интервала (рис. 4). Масса в интервале за фронтом равна сумме массы на момент времени t^n и массы, перешедшей через фронт ударной волны за шаг τ :

$$M_\beta^{n+1} = M_\beta^n + \Delta M. \quad \text{Рассчитаем} \quad \text{объем}$$

$$(R_{i-1}^{n+1}, R_D^{n+1}) \rightarrow \theta_\beta^{n+1} \quad \text{и} \quad \text{определим} \quad \text{плотность}$$

$$\rho_\beta^{n+1} = M_\beta^{n+1} / \theta_\beta^{n+1}.$$

Для определения величин в интервале за фронтом поступим аналогично определению величин в α -интервале. Представим, что интервал $(R_{i-1}^{n+1}, R_D^{n+1})$ регулярный, т.е. разрыв на правой границе отсутствует. Определим состояние в данном интервале на момент времени t^n . Из точки с координатой $R_\beta^{n+1} = 0,5(R_{i-1}^{n+1} + R_D^{n+1})$, «опустим» со скоростью $U_\beta^{n+1} = 0,5(U_{i-1}^{n+1} + U_+^{n+1})$ траекторию на n слой и получим точку L: $R_L = R_\beta^{n+1} - \tau U_\beta^{n+1}$. Зная распределение величин за фронтом на момент t^n , рассчитаем величины в точке L. Теперь β -интервал на момент времени t^{n+1} можно рассчитать как регулярный. Заметим, что подобные операции проводятся потому, что масса β -интервала за шаг по времени изменилась, а, следовательно, середина β -интервала на моменты времени t^n и t^{n+1} не принадлежат одной траектории. По этой причине нельзя использовать Лагранжев метод напрямую.

После определения величин в интервале за фронтом можно говорить, что особый интервал на момент времени t^{n+1} рассчитан полностью.

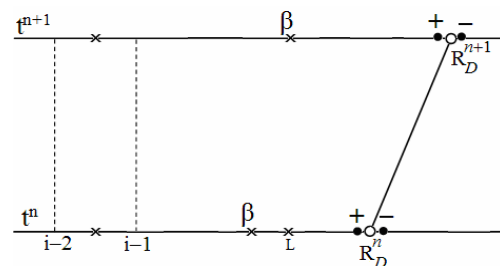


Рис. 4. Расчет величин в интервале за фронтом

Особый случай расчета величин в β -интервале

В процессе счета сетка особенностей перемещается относительно регулярной сетки. При этом возникают ситуации, когда разрыв переходит через границу регулярного интервала. В таком случае на момент t^n масса в интервале за фронтом равна нулю, т.е. $M_\beta^n = 0$ (рис. 5) и применение подхода, описанного выше, приведет к тому, что точка L будет лежать на траектории фронта ударной волны. На практике это приводит к тому, что в профиле величин за фронтом возникают немонотонности. Они являются следствием того, что при расчете β -интервала некорректно учитываются возмущения, «пришедшие» из области за фронтом. Решить данную проблему можно путем измельчения шага по времени, что негативно отразится на расчете всей системы. В рамках рассматриваемого метода был разработан алгоритм расчета величин в интервале за фронтом при переходе разрыва через границу регулярного интервала.

Временно исключим из рассмотрения регулярную точку $(i-1)$. Таким образом, эту ситуацию сводим к расчету величин в интервале за фронтом в общем случае. Рассчитаем величины в интервале K, т.е. интервале $(R_D^{n+1}, R_{i-2}^{n+1})$. Масса этого интервала равна: $M_K = M_{i-1,5}^n + \Delta M$. Определяем объем интервала K и его плотность

$$(R_{i-2}^{n+1}, R_D^{n+1}) \rightarrow \theta_K, \rho_K = \frac{M_K}{\theta_K}.$$

Из точки K опустим траекторию на n слой и находим: $R_L = R_K - \tau U_K$, где $R_K = 0,5(R_D^{n+1} + R_{i-2}^{n+1})$, $U_K = 0,5(U_+^{n+1} + U_{i-2}^{n+1})$. В т. L найдем термодинамические величины, затем, аналогично расчету величин в β -интервале, описанному выше, определим $(E, P)_K^{n+1}$.

На момент времени t^{n+1} масса в β -интервале соответствует массе перешедшей через фронт за шаг τ : $M_\beta^{n+1} = \Delta M$. Предположим, что в области (R_K, R_D^{n+1}) распределение плотности и энергии линейные. Найдем такое значение R_{i-1}^{n+1} , при котором выполняются условия

$$\begin{cases} \rho_\beta^{n+1} = \frac{\Delta M}{\theta_\beta^{n+1}}, \\ \rho_\beta^{n+1} = \rho_K + (\rho_K - \rho_+^{n+1}) \frac{R_\beta^{n+1} - R_K}{R_K - R_D^{n+1}}. \end{cases}$$

Для этого итерационно вычислим ноль функции

$$F(R_{i-1}^{n+1}) = \frac{\Delta M}{\theta_\beta^{n+1}} - \rho_K - (\rho_K - \rho_+^{n+1}) \frac{R_\beta^{n+1} - R_K}{R_K - R_D^{n+1}}.$$

Определив R_{i-1}^{n+1} , рассчитаем U_{i-1}^{n+1} и $\left(\frac{dU}{dt}\right)_{i-1}^{n+1}$

$$U_{i-1}^{n+1} = \frac{R_{i-1}^{n+1} - R_D^n}{\tau}, \left(\frac{dU}{dt}\right)_{i-1}^{n+1} = \frac{U_{i-1}^{n+1} - U_+^n}{\tau}.$$

Энергию вычислим линейной интерполяцией на $(n+1)$ слое между «плюс» величинами и величинами в точке K

$$E_\beta^{n+1} = E_K + (E_K - E_+^{n+1}) \frac{R_\beta^{n+1} - R_K}{R_K - R_D^{n+1}}.$$

Давление определяется из уравнения состояния.

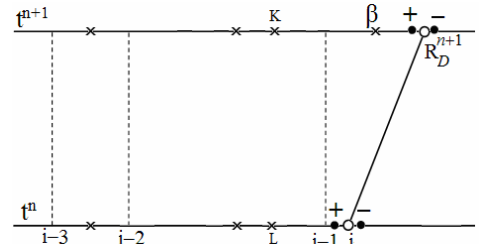


Рис. 5. Расчет β -интервала при выходе разрыва из целой точки

Применение данного подхода позволяет корректно учитывать возмущения, догоняющие фронт, тем самым, повысить точность и монотонность профилей величин за фронтом.

Тестовые расчеты

Задача о движении поршня с постоянным давлением на границе по линейному профилю плотности.

Задана область $0 \leq R \leq 1$. На левой границе давление $P_L = 1,5$, на правой границе и в области $U = 0$. Количество расчетных точек равно 10. В области: энергия $E = 0$, распределение плотности $\rho(R) = 1,7 - 1,4R$. Вещество – идеальный газ, $\gamma = 5/3$. Симметрия плоская.

На левой границе системы после распада разрыва образуется ударная волна, которая распространяется вправо. На рис. 6 представлено распределение плотности в системе на момент времени $t = 0,49$, полученное с использованием модифицированного метода. До прихода ударной волны профиль плотности перед фронтом не меняется, т.к. давление в области равно нулю. За фронтом наблюдаем сжатие вещества.

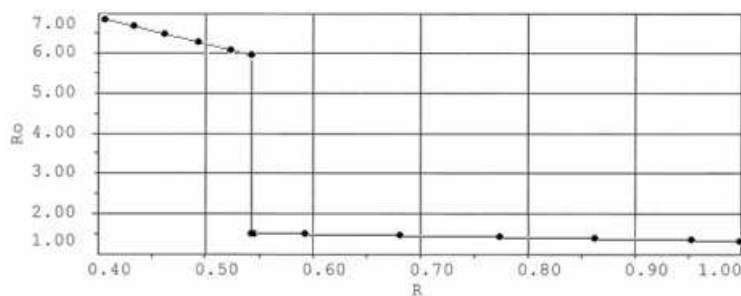


Рис. 6. Профиль плотности на момент времени $t = 0,49$

На рис. 7 представлены зависимости плотности ρ_- перед фронтом ударной волны от времени, полученные с помощью метода [3] и модифицированного метода, а также аналитическое решение (начальное распределение).

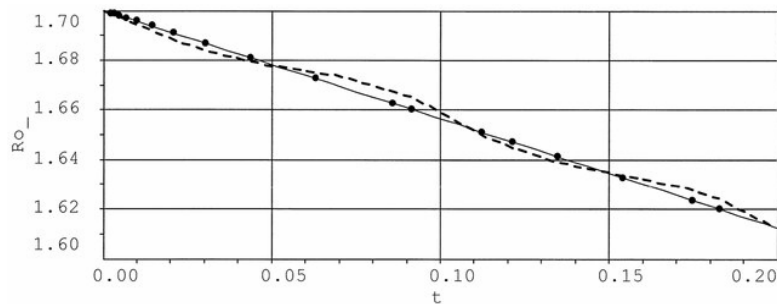


Рис. 7. Зависимости плотности перед фронтом от времени.
Метод [3] (---), модифицированный метод (—), точное решение (•)

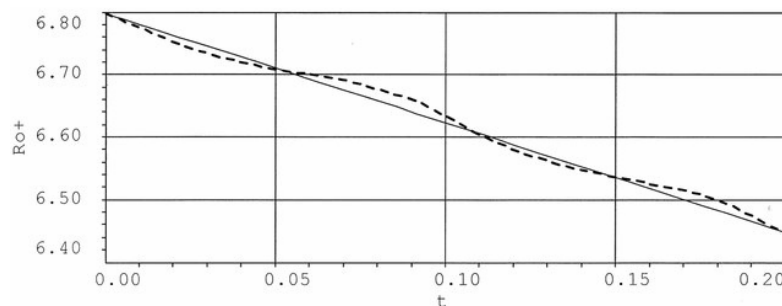


Рис. 8. Зависимости плотности за фронтом от времени.
Метод [3] (---), модифицированный метод (—)

Из рис. 7 видно, что использование метода, основанного на применении уравнений в характеристической форме для определения величин перед разрывом, позволило повысить монотонность и точность расчета термодинамических величин и скорости. Все неточности, возникающие при определении состояния перед фронтом, переносятся сквозь фронт и отражаются на величинах за фронтом, что видно из рис. 8.

Задача о движении поршня с переменной скоростью по постоянному фону.

Задана область $0 \leq R \leq 1$. На правой границе и в области $U = 0$, на левой границе скорость изменяется со временем по закону $U_L(t) = 1 - t^2$. Количество расчетных точек равно 10. В области: энергия $E = 0,5$, плотность $\rho = 1,7$. Вещество – идеальный газ, $\gamma = 5/3$. Симметрия плоская.

От левой границы в систему пойдет ударная волна, за фронтом которой вещество разгружается. На рис. 9 представлено распределение давления в системе на момент времени $t = 0,2557$.

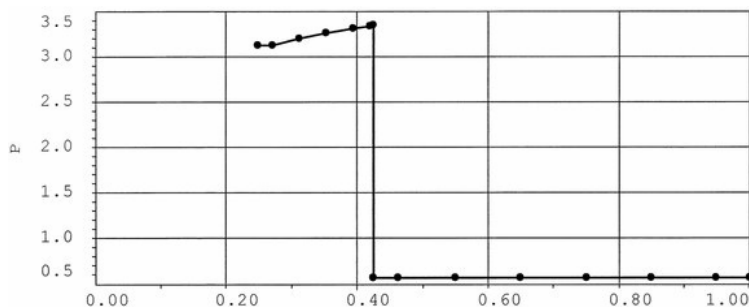


Рис. 9. Распределение давления в системе на момент времени $t = 0,2557$

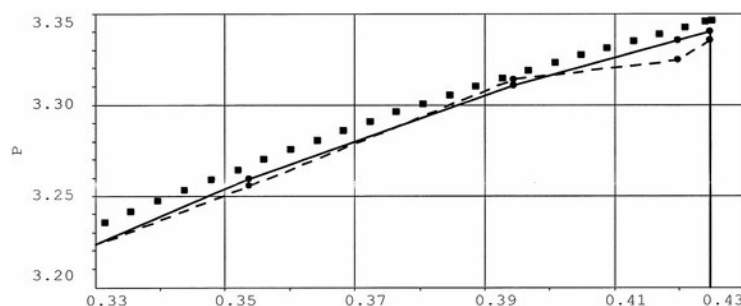


Рис. 10. Распределение давления в области за фронтом на момент времени $t = 0,2557$. Метод [3] (---), модифицированный метод (—), «точное» решение (•)

На рис. 10 представлено распределение давления в области за фронтом на момент времени $t = 0,2557$. Этот момент времени соответствует моменту перехода разрыва через границу регулярного интервала. Здесь под «точным» решением подразумевается решение, полученное на 1000 точках. Дальнейшее увеличение числа точек при рассмотрении в данном масштабе бессмысленно. Из рис. 10 видно, что профили величин за фронтом ударной волны, полученные модифицированным методом, более монотонные, значения величин на ударной волне ближе к «точному» решению.

Заключение

Предлагаемые способы модификации метода [3] повысили точность и монотонность расчета выделенных ударных волн. Идеология и порядок расчета величин остались прежними, изменились методы их определения. Авторами показана принципиальная возможность использования элементов метода характеристик внутри разностного метода. Данный подход применительно к методу [3] показал свою работоспособность и эффективность. Для любого другого разностного метода элементы метода характеристик можно использовать в качестве интерполяции для определения величин в любой точке пространства и времени. Преимуществом такой интерполяции является учет особенностей уравнения состояния и изменения течения во времени.

Литература

1. Жуков, А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики / А.И. Жуков // Труды Математического института АН СССР, 1960.
2. Хоскин, Н.Э. Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения / Н.Э. Хоскин // Вычислительные методы в гидродинамике: сб. науч. тр. – М.: Изд-во Мир, 1967. – С. 264–292.

3. Комплекс программ «ВОЛНА» и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Ч. 1. Неоднородный разностный метод / В.Ф. Куропатенко, Г.В. Коваленко, В.И. Кузнецова и др. // ВАНТ. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1989. – Вып. 2. – С. 9–17.

Поступила в редакцию 3 июня 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 5–13*

ON METHODS FOR INCREASING THE ACCURACY OF SHOCK WAVE CALCULATIONS

D.A. Farfolomeyev¹, K.I. Kazin², V.F. Kuropatenko³

The paper presents a non-homogeneous difference method for shock wave simulation in Lagrangian coordinates. The method explicitly determines shocks as discontinuities of the first kind. The ways of increasing the accuracy of calculated shocks within the scope of the proposed method are suggested. In particular, the author suggests using the difference approach together with some elements of the method of characteristics to determine quantities before the shock front. The algorithm of the modified method is described. A number of methodical calculations are provided. On their basis it's shown that the new method improves the monotonicity and accuracy of shock calculations.

Keywords: shock wave; strong discontinuity; non-homogeneous difference method.

References

1. Zhukov A.I. *Trudy Matematicheskogo Instituta AN SSSR.* 1960. (in Russ.).
2. Khoshin N.E. Metod kharakteristik dlya resheniya uravneniy odnomernogo neustanovivshegosya techeniya (A method of characteristics for solving the equations of 1D transient flows). *Vychislitel'nye metody v gidrodinamike* (Fundamental Methods in Hydrodynamics). Moscow, MIR Publ., 1967. pp. 264–292. (in Russ.). [Hoskin N.E. Solution by Characteristics of the Equation of One-Dimensional Unsteady Flow. *Fundamental Methods in Hydrodynamics*. New York, London, Academic Press, 1964. pp. 265–293. (in Eng.).]
3. Kuropatenko V.F., Kovalenko G.V., Kuznetsova V.I. *et al.* VANT. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov". 1989. Issue 2. pp. 9–17. (in Russ.).

Received 3 June 2014

¹ Varfolomeev Denis Aleksandrovich is Head of the sector, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk.

E-mail: d.a.varfolomeev@mail.ru

² Kazin Kirill Ivanovich is Junior Research Fellow, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk.

E-mail: k_kirill@sibmail.com

³ Kuropatenko Valentin Fedorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Senior Researcher, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk.

E-mail: vfkuropatenko@rambler.ru

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В.В. Карачик¹

Рассматривается краевая задача для уравнения Гельмгольца в единичном шаре, имеющая нормальные производные высокого порядка в граничных условиях. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца; обобщенная задача Неймана; собственные значения; нормальные производные.

1. Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \quad (1)$$

$$P_m \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) u|_{\partial S} = f(s), \quad s \in \partial S, \quad (2)$$

где $P_m(t)$ – полином степени m над \mathbb{C} , $\partial/\partial \nu$ – производная по направлению внешней нормали к сфере радиуса $|x|$, а $f \in C(\partial S)$. Задачи такого вида были рассмотрены ранее в [1–6].

Рассмотрим функцию (см. [7])

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(2, 2)_k (m, 2)_k}.$$

Очевидно, что эта функция целая при $m \notin -2\mathbb{N}_0$. Используя разложение функции Бесселя первого рода $J_m(t)$ в ряд, нетрудно получить формулу, связывающую $g_m(t)$ и $J_m(t)$

$$J_m(t) = \frac{t^m}{2^m \Gamma(m+1)} g_{2m+2}(t^2). \quad (3)$$

Пусть область $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ ограничена и обладает свойством звездности $\forall x \in \mathcal{D}, \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x \in \mathcal{D}$. Методом нормированных систем функций был получен следующий результат.

Теорема 1. [7, Теорема 3] Для всякой функции $v \in C^2(\mathcal{D})$, удовлетворяющей в \mathcal{D} уравнению (1), найдется гармоническая в \mathcal{D} функция $u(x)$ такая, что имеет место равенство

$$v(x) = u(x) - \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4(\lambda(1-\alpha)|x|^2) u(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \quad (4)$$

Нетрудно доказать следующее следствие из этой теоремы.

Следствие 1. Если $v(x)$ – решение уравнения (1) обладает свойством $|x|^k \frac{\partial^k v}{\partial \nu^k} \in C(\overline{\mathcal{D}})$ для $k = \overline{0, m}$, то этим же свойством обладает и функция $u(x)$, находящаяся из (4).

Идея представления (4) была также использована в [8, 9] для построения специальных полиномов. Перепишем формулу (4) в терминах функций Бесселя. Из (3) нетрудно получить, что $g_4(t^2) = \frac{2}{t} J_1(t)$, а поэтому формула (4) при $\lambda > 0$ примет вид

$$v(x) = u(x) - \sqrt{\lambda} \frac{|x|}{2} \int_0^1 J_1(\sqrt{\lambda(1-\alpha)}|x|) u(\alpha x) \frac{\alpha^{n/2-1}}{\sqrt{1-\alpha}} d\alpha.$$

¹ Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет,
E-mail: karachik@susu.ru

2. Основной результат

Исследуем разрешимость задачи (1)–(2). Решение будем искать из класса $v \in C^2(S)$ и $|x|^k \frac{\partial^k v}{\partial v^k} \in C(\bar{S})$ при $k = \overline{0, m}$. Рассмотрим полином $P_{[m]}(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^{[k]}$, введенный ранее в [10] и зависящий от полинома $P_m(t)$. Здесь p_k – коэффициенты полинома $P_m(t)$, а $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$. Предположим, что коэффициент при старшей степени полинома $P_m(t)$ равен единице, т.е. $p_m = 1$. Обозначим, как обычно, однородные гармонические полиномы k -й степени через $H_k(x)$ и введем функцию

$$F_k(t; P_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_{[m]}(2i+k)}{(2, 2)_i (n+2k, 2)_i} (-t)^i. \tag{5}$$

В этих обозначениях теорема о разрешимости задачи (1)–(2) имеет вид.

Теорема 2. Решение задачи (1)–(2) существует тогда и только тогда, когда $\forall k \in \mathbb{N}_0$,

$$F_k(\lambda; P_m) = 0 \Rightarrow \forall H_k(x), \int_{\partial S} f(x) H_k(x) dx = 0. \tag{6}$$

Решение задачи единственно с точностью до собственных функций вида

$$v_k^{(\lambda)}(x) = g_{n+2k}(\lambda |x|^2) H_k(x),$$

где числа $k \in \mathbb{N}_0$ такие, что λ удовлетворяет равенству $F_k(\lambda; P_m) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть решение задачи (1)–(2) существует. Поскольку область S обладает свойствами звездной области \mathcal{D} , то воспользуемся результатом следствия 1.

Функция $u(x)$, находящаяся из (4), обладает свойством $|x|^k \frac{\partial^k u}{\partial v^k} \in C(\bar{S})$, $k = \overline{0, m}$. Поэтому, в \bar{S}

при $k = \overline{0, m}$ имеет место равенство

$$|x|^m \frac{\partial^m v}{\partial v^m} = |x|^m \frac{\partial^m u}{\partial v^m} - \lambda \frac{|x|^m}{4} \int_0^1 \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{\partial^{m-i}}{\partial t^{m-i}} (t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)) \Big|_{|t|=|x|} \frac{\partial^i u}{\partial v^i} \alpha^{i+n/2-1} d\alpha.$$

Откуда

$$\begin{aligned} |x|^m P_m \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) v &= |x|^m \times P_m \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) u - \lambda \frac{|x|^m}{4} \int_0^1 \sum_{k=0}^m p_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} (t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)) \Big|_{|t|=|x|} \frac{\partial^i u}{\partial v^i} \alpha^{i+n/2-1} d\alpha = \\ &= |x|^m P_m \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) u - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \sum_{i=0}^m P_m^{(i)}(|x|, \alpha) |\alpha x|^i \frac{\partial^i u}{\partial v^i} \alpha^{n/2-1} d\alpha, \end{aligned} \tag{7}$$

где обозначено

$$P_m^{(i)}(|x|, \alpha) = |x|^{m-i} \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} (t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)) \Big|_{|t|=|x|}.$$

Пусть $W(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в \bar{S} функция, удовлетворяющая условию $W|_{\partial S} = f$. Выпишем два свойства оператора Λ . Во-первых, из гармоничности в S функции $u(x)$

следует гармоничность в S функции $\Lambda u(x)$. Во-вторых, $|x|^k \frac{\partial^k u}{\partial v^k} = \Lambda^{[k]} u$ [10] и значит, если

$|x|^k \frac{\partial^k u}{\partial v^k} \in C(\bar{S})$ для $k = \overline{0, m}$, то $\Lambda^k u \in C(\bar{S})$ и $\frac{\partial^k u}{\partial v^k} = \Lambda^{[k]} u$ на ∂S также для $k = \overline{0, m}$. Если, те-

перь, воспользоваться этими свойствами оператора Λ , то в силу единственности решения задачи Дирихле, из равенства (7) получим уравнение в гармонических функциях

$$W(x) = P_{[m]}(\Lambda)u(x) - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \sum_{i=0}^m P_m^{(i)}(1, \alpha) \Lambda^{[i]} u(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha, \tag{8}$$

где $x \in \bar{S}$. Откуда, разлагая гармонические функции $W(x)$ и $u(x)$ в ряды в некоторой окрестности нуля $D_0 \subset S$ и приравнявая полиномы с одинаковыми степенями, получим

$$\begin{aligned} W_s(x) &= (P_{[m]}(s) - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \sum_{i=0}^m P_m^{(i)}(1, \alpha) s^{[i]} \alpha^{s+n/2-1} d\alpha) u_s(x) = \\ &= \sum_{i=0}^m s^{[i]} \left(p_i - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} (t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2)) \Big|_{t=1} \alpha^{s+n/2-1} d\alpha \right) u_s(x) = \\ &= \sum_{i=0}^m s^{[i]} \left(p_i + \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} (g_{2s+n}(\lambda t^2) - 1) \Big|_{t=1} \right) u_s(x), \end{aligned}$$

где учтено, что

$$1 - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 t^2 g_4(\lambda(1-\alpha)t^2) \alpha^{m+n/2-1} d\alpha = g_{2m+n}(\lambda t^2), \quad (9)$$

$W_s(x)$ и $u_s(x)$ – однородные полиномы s -й степени из разложения гармонических функций $W(x)$ и $u(x)$ в ряд и $\Lambda^{[i]}u_s(x) = s^{[i]}u_s(x)$. Поэтому

$$W_s(x) = \sum_{i=0}^m s^{[i]} \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} g_{2s+n}(\lambda t^2) \Big|_{t=1} u_s(x).$$

Вспоминая, что

$$g_{2s+n}(\lambda t^2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\lambda)^j \frac{t^{2j}}{(2, 2)_j (2s+n, 2)_j},$$

а это значит, что верно равенство

$$\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} g_{2s+n}(\lambda t^2) \Big|_{t=1} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j)^{[k-i]} \frac{(-\lambda)^j}{(2, 2)_j (2s+n, 2)_j},$$

и используя биномиальную теорему Вандермонда, найдем

$$\begin{aligned} W_s(x) &= u_s(x) \sum_{i=0}^m s^{[i]} \sum_{k=i}^m p_k \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{\infty} (2j)^{[k-i]} \frac{(-\lambda)^j}{(2, 2)_j (2s+n, 2)_j} = \\ &= u_s(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{(2, 2)_j (2s+n, 2)_j} \sum_{k=0}^m p_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} s^{[i]} (2j)^{[k-i]} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_s(x) (-\lambda)^j}{(2, 2)_j (2s+n, 2)_j} \sum_{k=0}^m p_k (2j+s)^{[k]} = u_s(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j P_{[m]}(2j+s)}{(2, 2)_j (2s+n, 2)_j}. \end{aligned}$$

Если теперь учесть определение функции $F_s(t; P_m)$ из (5), то будем иметь

$$W_s(x) = F_s(\lambda; P_m) u_s(x). \quad (10)$$

Отсюда, сразу следует, что если существует решение задачи (1)–(2), то

$$\exists s \in \mathbb{N}_0, F_s(\lambda; P_m) = 0 \Rightarrow W_s(x) = 0.$$

Равенство же $W_s(x) = 0$ в силу [11, Теорема 4] равносильно утверждению

$$\forall H_s(x), \int_{\partial S} f(x) H_s(x) dx = 0.$$

Необходимость условий теоремы доказана.

Достаточность. Покажем, что при выполнении условий теоремы найдется такая гармоническая в S функция $u(x)$, для которой $\Lambda^k u \in C(\bar{S})$ при $k = \overline{0, m}$ и значит $|x|^k \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \in C(\bar{S})$, при $k = \overline{0, m}$ и которая удовлетворяет в \bar{S} уравнению (8). Если такую функцию $u(x)$ подставить в (4), то функция $v(x)$, найденная оттуда, будет обладать свойствами $|x|^k \frac{\partial^k v}{\partial \nu^k} \in C(\bar{S})$ для $k = \overline{0, m}$ и $v \in C^2(S)$, удовлетворять уравнению (1) и условиям (2), т.е. будет решением задачи (1)–(2).

Сделаем в уравнении (8) замену переменных по формуле $v = (\Lambda + 1)^m u$. При гармонической функции u функция v тоже гармоническая. Эта замена однозначно обратима по формуле

$$u(x) = \int_0^1 v(\alpha x) \ln^{m-1,!}(1/\alpha) d\alpha,$$

где несобственный интеграл сходится. Действительно, при $m > 1$

$$\Lambda u(x) = \int_0^1 \alpha \ln^{m-1,!}(1/\alpha) dv(\alpha x) = \alpha v(\alpha x) \ln^{m-1,!}(1/\alpha) \Big|_0^1 - \int_0^1 v(\alpha x) (\ln^{m-1,!}(1/\alpha) - \ln^{m-2,!}(1/\alpha)) d\alpha$$

и значит

$$(\Lambda + 1)u(x) = \int_0^1 v(\alpha x) \ln^{m-2,!}(1/\alpha) d\alpha.$$

Поэтому

$$(\Lambda + 1)^m u(x) = (\Lambda + 1) \int_0^1 v(\alpha x) d\alpha = \alpha v(\alpha x) \Big|_0^1 = v(x).$$

Однозначность замены следует из аналитичности функций $u(x)$ и $v(x)$ в S . Очевидно, что $\Lambda^k u \in C(\bar{S}), k = \overline{0, m} \Rightarrow v \in C(\bar{S})$ и, кроме того, в силу равенства

$$\Lambda u(x) = \int_0^1 v(\alpha x) \ln^{m-2,!}(1/\alpha) d\alpha - u(x)$$

и определения функции $v(x)$ верно и обратное утверждение $v \in C(\bar{S}) \Rightarrow \Lambda^k u \in C(\bar{S}), k = \overline{0, m}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(\alpha) &= \sum_{j=0}^k \ln^{m-j-1,!} \alpha \sum_{i=j}^k (-1)^{m-i-1} \binom{i}{j} S_i^{(k)}, \quad k = \overline{0, m-1} \\ \mathcal{R}_m(\alpha) &= \sum_{j=0}^{m-1} \ln^{m-j-1,!} \alpha \sum_{i=j}^m (-1)^{m-i-1} \binom{i}{j} S_i^{(m)}, \end{aligned}$$

где $S_i^{(k)}$ – числа Стирлинга первого рода. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Lambda^{[k]} u(x) &= \sum_{i=0}^k S_i^{(k)} \Lambda^i u(x) = \sum_{i=0}^k S_i^{(k)} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (\Lambda + 1)^j u(x) = \\ &= \int_0^1 v(\alpha x) \sum_{j=0}^k \ln^{m-j-1,!}(1/\alpha) \sum_{i=j}^k (-1)^{i-j} \binom{i}{j} S_i^{(k)} d\alpha = \int_0^1 \mathcal{R}_k(\alpha) v(\alpha x) d\alpha. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим

$$\begin{aligned} \Lambda^{[m]} u(x) &= \sum_{j=0}^m (\Lambda + 1)^j u(x) \sum_{i=j}^m (-1)^{i-j} \binom{i}{j} S_i^{(m)} = v(x) + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} (\Lambda + 1)^j u(x) \sum_{i=j}^m (-1)^{i-j} \binom{i}{j} S_i^{(m)} = v(x) + \int_0^1 \mathcal{R}_m(\alpha) v(\alpha x) d\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом $p_m = 1$ правая часть уравнения (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} P_{[m]}(\Lambda)u(x) - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \sum_{k=0}^m P_m^{(k)}(1, \alpha) \Lambda^{[k]} u(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha &= v(x) + \int_0^1 \sum_{k=0}^m p_k \mathcal{R}_k(\alpha) v(\alpha x) d\alpha - \\ - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 (P_m^{(m)}(1, \alpha) v(\alpha x) + \sum_{k=0}^m P_m^{(k)}(1, \alpha) \int_0^1 \mathcal{R}_k(\beta) v(\alpha \beta x) d\beta) \alpha^{n/2-1} d\alpha &= v(x) + \\ + \int_0^1 \sum_{k=0}^m (p_k \mathcal{R}_k(\alpha) v(\alpha x) - \frac{\lambda}{4\alpha} P_m^{(k)}(1, \alpha) \int_0^\alpha \mathcal{R}_k(\beta/\alpha) v(\beta x) d\beta - \frac{\lambda}{4} P_m^{(m)}(1, \alpha) v(\alpha x)) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \end{aligned}$$

Переставляя порядок суммирования в кратном интеграле и используя равенство $P_m^{(m)}(1, \alpha) = g_4(\lambda(1 - \alpha))$, получим

$$v(x) + \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^m (p_k \mathcal{R}_k(\alpha) \alpha^{n/2-1} - \frac{\lambda}{4} \int_\alpha^1 P_m^{(k)}(1, \beta) \mathcal{R}_k(\alpha/\beta) \beta^{n/2-2} d\beta) - \frac{\lambda}{4} g_4(\lambda(1 - \alpha)) \alpha^{n/2-1} \right] v(\alpha x) d\alpha.$$

Таким образом, уравнение (8) переписывается в виде

$$W(x) = v(x) + \int_0^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) v(\alpha x) d\alpha, \quad x \in \bar{S}, \tag{11}$$

где обозначено

$$\mathcal{R}(\alpha, \lambda) = \sum_{k=0}^m (p_k \mathcal{R}_k(\alpha) \alpha^{n/2-1} - \frac{\lambda}{4} \int_{\alpha}^1 P_m^{(k)}(1, \beta) \mathcal{R}_k(\alpha/\beta) \beta^{n/2-2} d\beta) - \frac{\lambda}{4} g_4(\lambda(1-\alpha)) \alpha^{n/2-1}. \quad (12)$$

Если в уравнении (11) разложить гармонические функции $W(x)$ и $v(x)$ в ряд по однородным полиномам, то получим равенство

$$W_s(x) = (1 + \int_0^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) \alpha^s d\alpha) v_s(x),$$

а если применить к обеим частям равенства (10) оператор $(\Lambda + 1)^m$, то будем иметь

$$(s + 1)^m W_s(x) = F_s(\lambda; P_m)(\Lambda + 1)^m u_s(x) = F_s(\lambda; P_m) v_s(x).$$

Сравнивая полученные равенства, заключаем: $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{F_k(\lambda; P_m)}{(k + 1)^m} = 1 + \int_0^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) \alpha^k d\alpha. \quad (13)$$

Исследуем интегральное уравнение (11). Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=0}^k |S_i^{(k)}| \leq |x(x-1)\cdots(x-k+1)|_{|x=-1} = k!.$$

Поэтому, для функции $\mathcal{R}_k(\alpha)$ при $k = \overline{0, m-1}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_k(\alpha)| &\leq \sum_{i=0}^k |S_i^{(k)}| \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \ln^{m-j-1}(1/\alpha) = \sum_{i=0}^k |S_i^{(k)}| \ln^{m-i-1}(1/\alpha) \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \ln^{i-j}(1/\alpha) = \\ &= \sum_{i=0}^k |S_i^{(k)}| \ln^{m-i-1}(1/\alpha) (1 - \ln \alpha)^i \leq (1 - \ln \alpha)^{m-1} \sum_{i=0}^k |S_i^{(k)}| \leq k! (1 - \ln \alpha)^{m-1} < m! (2 - \ln \alpha)^m. \end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$|\mathcal{R}_m(\alpha)| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \ln^{m-j-1}(1/\alpha) \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} |S_i^{(m)}| \leq \sum_{i=0}^m |S_i^{(m)}| (1 - \ln \alpha)^{m-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (1 - \ln \alpha)^{i-j} \leq m! (2 - \ln \alpha)^m.$$

В силу этих оценок из (12) следует, что найдутся такие числа $r(\lambda)$ и $p(\lambda) \geq 0$ при которых верна оценка

$$|\mathcal{R}(\alpha, \lambda)| \leq r(\lambda)(2 - \ln \alpha)^m + p(\lambda). \quad (14)$$

Действительно, если выбрать $r_1(\lambda)$, удовлетворяющим неравенствам $|p_k|, |P_m^{(k)}(1, \alpha)| \leq r_1(\lambda)$ при $\alpha \in [0, 1]$, то тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(\alpha, \lambda)| &\leq m! r_1(\lambda) \sum_{k=0}^m ((2 - \ln \alpha)^m + \frac{|\lambda|}{4} \int_{\alpha}^1 (2 - \ln \alpha + \ln \beta)^m \beta^{n/2-2} d\beta) + \\ &+ \frac{|\lambda|}{4} g_4(-|\lambda|) \leq (m + 1)! (1 + \frac{|\lambda|}{2n-4}) r_1(\lambda) (2 - \ln \alpha)^m + \frac{|\lambda|}{4} g_4(-|\lambda|) \end{aligned}$$

и значит константы $r(\lambda)$ и $p(\lambda)$ можно выбрать в виде

$$r(\lambda) = (m + 1)! (1 + \frac{|\lambda|}{2n-4}) r_1(\lambda), \quad p(\lambda) = \frac{|\lambda|}{4} g_4(-|\lambda|).$$

Предположим, что в уравнении (11) $x \in \partial S$ тогда, обозначая ядро интеграла Пуассона через

$$D(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n}$$

и учитывая, что $v(x) = \int_{\partial S} D(x, \xi) v(\xi) d\xi$ при $x \in \bar{S}$ будем иметь

$$f(s) = v(s) + \int_0^1 \int_{\partial S} \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) v(\xi) d\xi d\alpha. \quad (15)$$

Подинтегральная функция в полученном уравнении, в силу оценки (14), равенства $\int_0^1 \ln^{k!}(1/\alpha) d\alpha = 1$ и положительности функции $D(x, \xi)$, при $x, \xi \in S$ является абсолютно интег-

рируемой. Поэтому, воспользовавшись теоремой Фубини [12], изменим порядок интегрирования в равенстве (15). Обозначая

$$Q(s, \xi; \lambda) = \int_0^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) d\alpha,$$

будем иметь

$$f(s) = v(s) + \int_{\partial S} Q(s, \xi; \lambda) v(\xi) d\xi. \tag{16}$$

Итак, функция $v(s)$ – след решения $v(x)$ уравнения (11) на ∂S должна удовлетворять уравнению (16). Верно и обратное: если $v(s)$ – решение уравнения (16), то функция $v(x) = \int_{\partial S} D(x, s) v(s) ds$ является решением уравнения (11). Действительно, умножая обе части уравнения (16) на $D(x, s)$ и интегрируя по ∂S (обе части уравнения – непрерывные функции на ∂S), найдем

$$W(x) = v(x) + \int_{\partial S} D(x, s) \int_{\partial S} \int_0^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) v(\xi) d\alpha d\xi ds.$$

Меняя порядок интегрирования, вынося внутренний интеграл наружу, а внешний – внося вовнутрь и используя равенство

$$D(\alpha x, \xi) = \int_{\partial S} D(x, s) D(\alpha s, \xi) ds, \quad \xi \in \partial S, \alpha \in [0, 1],$$

получим (11). Проведем аналогичные преобразования и с уравнением, союзным к (16) –

$$f(s) = v^*(s) + \int_{\partial S} Q^*(s, \xi; \lambda) v^*(\xi) d\xi, \tag{17}$$

ядро которого имеет вид

$$Q^*(s, \xi; \lambda) = \int_0^1 \overline{\mathcal{R}(\alpha, \lambda)} D(\alpha \xi, s) d\alpha.$$

Умножая обе части уравнения (17) на $D(x, s)$, интегрируя по ∂S и используя равенство

$$D(\alpha s, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - \alpha^2}{|\alpha s - \xi|^n} = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - \alpha^2}{(\alpha^2 - 2\alpha(s, \xi) + 1)^{n/2}} = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - \alpha^2}{|\alpha \xi - s|^n} = D(\alpha \xi, s),$$

в котором $s, \xi \in \partial S$ найдем

$$\begin{aligned} W(x) &= v^*(x) + \int_{\partial S} D(x, s) \int_{\partial S} \int_0^1 \overline{\mathcal{R}(\alpha, \lambda)} D(\alpha s, \xi) v^*(\xi) d\alpha d\xi ds = \\ &= \int_0^1 \overline{\mathcal{R}(\alpha, \lambda)} \int_{\partial S} \left(\int_{\partial S} D(x, s) D(\alpha s, \xi) ds \right) v^*(\xi) d\xi d\alpha = v^*(x) + \int_0^1 \overline{\mathcal{R}(\alpha, \lambda)} \int_{\partial S} D(\alpha x, \xi) v^*(\xi) d\xi d\alpha \end{aligned}$$

и значит

$$W(x) = v^*(x) + \int_0^1 \overline{\mathcal{R}(\alpha, \lambda)} v^*(\alpha x) d\alpha. \tag{18}$$

Предположим, что ядро $Q(s, \xi; \lambda)$ – полярное. Тогда, для уравнения (16) имеют место альтернативы Фредгольма [12] и значит, его решение существует, если

$$\int_{\partial S} f(s) \overline{v^*(s)} ds = 0, \tag{19}$$

где $v^*(x)$ – произвольное решение уравнения (17) при $f(x) = 0$. Для нахождения $v^*(x)$ достаточно решить однородное уравнение (18), а затем взять его след на ∂S . Поскольку $v^*(x)$ – гармоническая в S функция, то она разложима в ряд в некоторой окрестности нуля – \mathcal{D}_0 . Поэтому, используя равенство (13), приведем однородное уравнение (18) в \mathcal{D}_0 к виду

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\lambda; P_m) \overline{v_k^*}(x).$$

Отсюда сразу следует, что если при заданном λ выполняется неравенство $F_k(\lambda; P_m) \neq 0$, то тогда $v_k^*(x) = 0$. Значит, функция $v^*(x)$ представляет собой сумму произвольных однородных гармонических полиномов, степени которых – k таковы, что выполняется равенство $F_k(\lambda; P_m) = 0$.

Возьмем, найденную таким образом функцию $v^*(s)$. Подставляя ее в условие (18) существования решения уравнения (16), убеждаемся в его эквивалентности условию теоремы.

Итак, если выполнены условия теоремы, то выполнены условия альтернативы Фредгольма, а значит решение уравнения (16) существует. Из наличия же решения уравнения (16) вытекает существование решения уравнения (8), а следовательно, в силу формулы (4) и задачи (1)–(2).

Для окончательного доказательства существования решения остается показать полярность ядра $Q(s, \xi; \lambda)$, т.е. непрерывность функции $Q(s, \xi; \lambda)$ на $\partial S \times \partial S$ везде, кроме $s = \xi$, и справедливость неравенства

$$|Q(s, \xi; \lambda)| \leq A |s - \xi|^{-\alpha}, \alpha < n - 1. \quad (20)$$

Непрерывность ядра $Q(s, \xi; \lambda)$ по переменным $s, \xi \in \partial S$ при $s \neq \xi$ следует из непрерывности по этим переменным функции $D(\alpha s, \xi)$, где $\alpha \in [0, 1]$, $s \neq \xi$ и неравенства $\int_0^1 |\mathcal{R}(\alpha, \lambda)| d\alpha < \infty$.

Для доказательства оценки (20) возьмем некоторое $\varepsilon \in (0, 1)$ и выпишем равенство

$$Q(s, \xi; \lambda) = \int_0^\varepsilon \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) d\alpha + \int_\varepsilon^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) d\alpha.$$

Оценим первый интеграл. В силу неравенства (14), при $s, \xi \in \partial S$ получим

$$\left| \int_0^\varepsilon \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) d\alpha \right| \leq \max_{\alpha \in [0, \varepsilon]} D(\alpha s, \xi) \int_0^1 |\mathcal{R}(\alpha, \lambda)| d\alpha \leq C_1,$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$. Далее, нетрудно видеть, что

$$\omega_n D(\alpha s, \xi) = \frac{1 - \alpha^2}{|\alpha s - \xi|^n} \leq 2 \frac{|\xi| - |\alpha s|}{|\alpha s - \xi|^n} \leq 2 \frac{|\xi - \alpha s|}{|\xi - \alpha s|^n} = \frac{2}{|\xi - \alpha s|^{n-1}}$$

и значит при $C_3 = 2/\omega_n$ имеем $D(\alpha s, \xi) \leq C_3 |s - \xi|^{1-n}$. Теперь, учитывая, что $\sup_{\alpha \in [\varepsilon, 1]} |\mathcal{R}(\alpha, \lambda)| \leq C_2(\varepsilon)$, а также пользуясь неравенством

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} \leq \frac{C_4}{|s - \xi|^{k-1}}, \quad (21)$$

где $s, \xi \in \partial S$ и $k \geq 2$ оценим второй интеграл. Имеем

$$\left| \int_\varepsilon^1 \mathcal{R}(\alpha, \lambda) D(\alpha s, \xi) d\alpha \right| \leq C_3 C_2(\varepsilon) \int_\varepsilon^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^{n-1}} \leq \frac{C_2(\varepsilon) C_3 C_4}{|\xi - s|^{n-2}}.$$

Таким образом, при $n \geq 2$ будем иметь

$$|Q(s, \xi; \lambda)| \leq \frac{C_1 |\xi - s|^{n-2} + C_2(\varepsilon) C_3 C_4}{|\xi - s|^{n-2}} \leq \frac{C_1 2^{n-2} + C_2(\varepsilon) C_3 C_4}{|\xi - s|^{n-2}}.$$

Отсюда, полагая $A = C_1 2^{n-2} + C_2(\varepsilon) C_3 C_4$, получим оценку (20) при $\alpha = n - 2$. Осталось доказать справедливость неравенства (21). Пусть $k \geq 2$. Обозначим $\omega = (s, \xi)$ и будем считать, что $s \neq \xi$, а значит $\omega < 1$. Предположим сначала, что $\omega \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} &= \int_0^1 \frac{d\alpha}{(1 + \alpha^2 - 2\omega\alpha)^{k/2}} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{((\alpha - \omega)^2 + 1 - \omega^2)^{k/2}} = \\ &= \frac{1}{(1 - \omega^2)^{k/2}} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{(\alpha - \omega)^2}{1 - \omega^2}\right)^{k/2}} = \frac{1}{(1 - \omega^2)^{(k-1)/2}} \int_a^b \frac{d\alpha}{(1 + \alpha^2)^{k/2}}, \end{aligned}$$

где $a = -\omega/\sqrt{1 - \omega^2}$, $b = \sqrt{(1 - \omega)/(1 + \omega)}$. Так как $|s - \xi| = (2(1 - \omega))^{1/2}$, то

$$1 - \omega^2 = 2^{-1} |s - \xi|^2 (1 + \omega) \geq 2^{-1} |s - \xi|^2$$

и значит, будем иметь

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} \leq \frac{2^{(k-1)/2}}{|s - \xi|^{k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1 + \alpha^2)^{k/2}}.$$

Если $\omega \leq 0$, то тогда $|\alpha s - \xi|^2 = 1 + \alpha^2 - 2\omega\alpha \geq 1 + \alpha^2$ и поэтому

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1 + \alpha^2)^{k/2}}.$$

Поскольку $|s - \xi| \leq 2$, то $2/|s - \xi| \geq 1$ и значит можно записать

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{|\alpha s - \xi|^k} \leq \frac{2^{k-1}}{|s - \xi|^{k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1 + \alpha^2)^{k/2}}.$$

Объединяя два полученных выше неравенства в одно выбором большей константы, получим (21) при

$$C_4 = 2^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(1 + \alpha^2)^{k/2}}.$$

Существование решения задачи (1)–(2) полностью доказано.

Для исследования единственности решения задачи (1)–(2) следует исследовать единственность решения уравнения (8), а следовательно и уравнения (11). Последнее же имеет единственное решение с точностью до однородных гармонических полиномов $H_k(x)$, степени которых – k удовлетворяют уравнению $F_k(\lambda; P_m) = 0$. Подставляя их в формулу (4) и учитывая равенство (9), получим

$$v(x) = \left(1 - \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4(\lambda(1 - \alpha)|x|^2) \alpha^{k+n/2-1} d\alpha\right) H_k(x) = g_{n+2k}(\lambda|x|^2) H_k(x),$$

т.е. $v(x) = v_k^{(\lambda)}(x)$. Итак, если решение задачи (1)–(2) существует, то оно единственно с точностью до функций $v_k^{(\lambda)}(x)$, где числа $k \in \mathbb{N}_0$ такие, что $F_k(\lambda; P_m) = 0$. Теорема полностью доказана.

Литература

1. Соколовский, В.Б. Об одном обобщении задачи Неймана / В.Б. Соколовский // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 714–716.
2. Бицадзе, А.В. К задаче Неймана для гармонических функций / А.В. Бицадзе // Докл. АН СССР, 1990. – Т. 311, № 1. – С. 11–13.
3. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.
4. Карачик, В.В. О разрешимости краевой задачи для уравнения Гельмгольца с нормальными производными высокого порядка на границе / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 907–909.
5. Карачик, В.В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 3. – С. 1501–1503.
6. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами II / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5. – № 32(249). – С. 27–38.
7. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – V. 287, № 2. – P. 577–592.
8. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 2004. – V. 132, № 4. – P. 1049–1058.
9. Карачик, В.В. О некоторых специальных полиномах и функциях / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 205–226.
10. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.
11. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, № 12. – P. 3513–3519.
12. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

13. Менихес, Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач / Л.Д. Менихес // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 242–246.

14. Реконструкция поступления долгоживущих радионуклидов жителям прибрежных сёл реки Теча. Сообщение 1. Стронций-90 / Е.И. Толстых, М.О. Дегтева, Л.М. Перемыслова и др. // Вопросы радиационной безопасности. – 2006. – № S1. – С. 45–67.

Поступила в редакцию 21 мая 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 14–22*

ON A NONCLASSICAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

V.V. Karachik¹

A boundary value problem for the Helmholtz equation in the unit ball, having high-order normal derivatives in the boundary conditions is considered. The theorem of necessary and sufficient solvability conditions of this problem is proved.

Keywords: Helmholtz equation; generalized Neumann problem; eigenvalues; normal derivatives.

References

1. Sokolovskiy V.B. *Differentsial'nye uravneniya*. 1988. Vol. 24, no. 4. pp. 714–716.
2. Bitsadze A.V. *Dokl. AN SSSR*. 1990. Vol. 311, no. 1. pp. 11–13.
3. Karachik V.V. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*. 1991. Vol. 32, no. 5. pp. 51–58.
4. Karachik, V.V. *Differentsialnye uravneniya*. 1992. Vol. 28, no. 5. pp. 907–909.
5. Karachik, V.V. *Differentsialnye uravneniya*. 1996. Vol. 32, no. 3. pp. 1501–1503.
6. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniya differentsialnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koeffitsientami I [Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients II]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 27–38. (in Russ.).
7. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. Vol. 287, no. 2. pp. 577–592.
8. Karachik V.V. On some special polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society*. 2004. Vol. 132, no. 4. pp. 1049–1058.
9. Karachik V.V. O nekotorykh spetsial'nykh polinomakh i funktsiyakh (On Some Special Polynomials and Functions). *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*. 2013. Vol. 10. pp. 205–226. (in Russ.).
10. Karachik V.V. Postroenie polinomial'nykh resheniy nekotorykh zadach dlya uravneniya Puasona (Construction of Polynomial Solutions to Some Boundary Value Problems to Poisson's Equation). *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2011. Vol. 51, no. 9. pp. 1674–1694. (in Russ.).
11. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1998. Vol. 126, no. 12. pp. 3513–3519.
12. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (in Russ.).
13. Menikhes L.D. *Matematicheskie zametki*. 2007. Vol. 82, no. 2. pp. 242–246. (in Russ.).
14. Tolstykh E.I., Degteva M.O., Peremysova L.M., Shagina N.B., Zalyapin V.I., Krivoschchapov V.A., Anspol L.R., Nap'e B.A. Rekonstruktsiya postupleniya dolgozhivushchikh radionuklidov zhitelyam pribrezhnykh syel reki Techa. Soobshchenie 1. Strontsiy-90 (Reconstruction of long-lived radionuclide intakes for Techa riverside residents. Part 1: Strontium-90). *Voprosy radiatsionnoy bezopasnosti*. 2006. no. S1. pp. 45–67. (in Russ.).

Received 21 May 2014

¹ Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.

E-mail: karachik@susu.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА СИЛЫ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГАЗОВЗВЕСИ С ПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ¹

Ю.М. Ковалев²

На основании анализа инвариантности относительно преобразования Галилея известной математической модели, описывающей течение двухфазной среды, было показано, что, несмотря на инвариантность уравнений сохранения компонентов, получающееся уравнение сохранения полной энергии смеси не является достоверным. Подробно исследованы и устранены причины данного несоответствия. Для полученной математической модели двухфазной среды была определена функциональная зависимость силы межфазного взаимодействия.

Ключевые слова: математическая модель; инвариантность; многокомпонентная смесь.

Введение

С течениями гетерогенных сред очень часто приходится сталкиваться в различных областях науки и техники. Это связано с тем, что в природе практически отсутствуют «чистые» вещества. Наличие даже небольшого объемного содержания примеси приводит к существенному изменению картины течения смеси. Все это требует активного развития математических моделей гетерогенных сред, достоверно описывающих изучаемые процессы. Данные математические модели находят широкое применение в различных отраслях науки и техники. Например, перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения эффективных мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). Правильное применение математических моделей многокомпонентных многофазных сред позволяет прогнозировать многие техногенные катастрофы и находить верные средства по их предотвращению. Показано, что перспективными средствами защиты могут быть перемычки, разрушающиеся при взаимодействии с УВ и образующие экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей [1].

В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов. Поэтому с особой остротой встает проблема разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], адекватных тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [3, 4]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу [5, 6].

В настоящей статье с помощью анализа инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели аэровзвеси [7, 8], применяемой для математического моделирования перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, попытаемся определить дефекты данной математической модели [9, 10] и найти способы их устранения.

1. Математическая модель газозвеси

Рассмотрим одномерный плоский случай математической модели течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [8], и проведем оценку ее на инвариантности относительно преобразования Галилея.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13-01-00072.

² Ковалёв Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: yum_kov@mail.ru

Система уравнений сохранения двухфазной аэрозвеси [8] без химических превращений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - nR, \quad \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = nR, \quad (2)$$

$$\rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} = \frac{p \alpha_1}{(\rho_1^\circ)} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + nR(v_1 - v_2) - nq, \quad (3)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = \frac{p \alpha_2}{(\rho_2^\circ)} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + nq \quad (4)$$

$$p = p_1(\rho_1^\circ, T_1) = p_2(\rho_2^\circ, T_2), \quad e_1 = e_1(\rho_1^\circ, T_1), \quad e_2 = e_2(\rho_2^\circ, T_2),$$

$$\rho_1 = \rho_1^\circ \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ \alpha_2, \quad E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2} \quad (i=1,2), \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; ρ_i°, α_i ($i = 1, 2$) – истинные плотности и объемные содержания фаз; $\rho_i, v_i, T_i, e_i, E_i$ – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i -й фазы; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси. Уравнения (1) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (2) – уравнения импульса газа и частиц; (3) и (4) – уравнения сохранения внутренней энергии газа и частиц соответственно.

Получим уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированной фаз.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы на v_1 , а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы на v_2 , получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно

$$v_1 \left[\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} \right] = -v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nRv_1,$$

$$v_2 \left[\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} \right] = nRv_2,$$

которые после простых преобразований принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} = -v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nRv_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} = nRv_2. \quad (6)$$

Проведем анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения (1), (2), (5) и (6).

Запишем уравнения (1), (2), (5) и (6) в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D . Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1H} = v_1 + D, \quad (7)$$

$$v_{2H} = v_2 + D. \quad (8)$$

Координата будет определяться из уравнения

$$x_H = x + Dt. \quad (9)$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_H}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) D. \quad (11)$$

Легко показать [9, 10], что уравнения (1), (2), (5) и (6) инвариантны относительно преобразования Галилея.

Преобразуем левые части уравнений сохранения внутренней энергии газа и частиц. С учетом равенств (1) они могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = \frac{p \alpha_1}{(\rho_1^\circ)} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + nR(v_1 - v_2) - nq, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = \frac{p \alpha_2}{(\rho_2^\circ)} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + nq \quad (13)$$

Из уравнений неразрывности газовой и конденсированной фаз (1) легко получить следующие равенства

$$\alpha_1 \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} = -\rho_1^\circ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} \right),$$

$$\alpha_2 \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} = -\rho_2^\circ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right),$$

Подставляя данные выражения в уравнения (12) и (13) соответственно, получим

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} \right) + nR(v_1 - v_2) - nq, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = -p \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right) + nq. \quad (15)$$

Очевидно, что уравнения сохранения внутренней энергии газовой (3) и конденсированной (4) фаз, преобразованные к виду (14) и (15), инвариантны относительно преобразования Галилея

Получим уравнение сохранения полной энергии смеси. Для этого суммируем левые и правые части уравнений (5), (6), (14), (15). В результате получим

$$\frac{\partial (\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) p]}{\partial x} = -\alpha_2 (v_1 - v_2) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (16)$$

которое не совпадает с уравнением сохранения полной энергии смеси, полученным в работе [7, 8].

Для того, чтобы убрать это несоответствие, необходимо разделить силу взаимодействия между фазами на две части [11]: на составляющую из-за воздействия макроскопического поля давлений $-\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x}$, которая не связана со скоростной неравновесностью между фазами, и составляющую f , которая связана с несовпадением скоростей:

$$nR = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + nf.$$

Подставляя полученное выражение в равенства (2) и преобразовывая левые части этих равенств к дивергентному виду, получим

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nf, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + nf. \quad (18)$$

К системе уравнений (1), (17) и (18) добавляются уравнения сохранения внутренней и кинетической энергии

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} \right) + nf (v_1 - v_2) - nq, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = -p \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right) + nq, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} = -\alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nfv_1, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} = -\alpha_2 v_2 \frac{\partial p}{\partial x} + nfv_2. \quad (22)$$

В этом случае уравнение сохранения полной энергии смеси будет иметь вид, совпадающий с предлагаемым в работе в [7, 8]

$$\frac{\partial (\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) p]}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

Легко показать, что уравнения (17)–(23) инвариантны относительно преобразования относительно Галилея [9, 10].

2. Определение функциональной зависимости силы межфазного взаимодействия

При проведении анализа инвариантности относительно преобразования Галилея законов сохранения, описывающих поведение газозвесей, предполагалось, что выражение для силы межфазного взаимодействия является инвариантным. Это возможно в том случае, когда силы межфазного взаимодействия являются функциями разности скоростей f_1 (сила Стокса) и функциями разности ускорений f_2 (сила присоединенных масс) [7, 8]. Явный учет выражения для силы присоединенных масс, проведенный в работе [7, 8], приводит к следующим уравнениям сохранения импульса газовой и конденсированной фаз [7, 8]:

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -nf_1, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = nf_1. \quad (25)$$

Из уравнений (24) и (25) следует, что уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированных фаз имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} + \alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -nf_1 v_1, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha_2 v_2 \frac{\partial p}{\partial x} = nf_1 v_2. \quad (27)$$

Легко показать, что уравнения (24)–(27) являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

Рассмотрим уравнение сохранения полной энергии смеси (24) и проведем его анализ на инвариантность относительно преобразования Галилея, используя уравнения сохранения (1), (24)–(27). Используя формулы перехода к новой системе координат (7)–(11), получим

$$\frac{\partial \left(\rho_1 \left(e_1 + \frac{(v_{1H} - D)^2}{2} \right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{(v_{2H} - D)^2}{2} \right) \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho_1 \left(e_1 + \frac{(v_{1H} - D)^2}{2} \right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{(v_{2H} - D)^2}{2} \right) \right)}{\partial x_H} D +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1(v_{1n}-D)\left(e_1+\frac{(v_{1n}-D)^2}{2}\right)+\rho_2(v_{2n}-D)\left(e_2+\frac{(v_{2n}-D)^2}{2}\right)+\right. \\ \left.+(\alpha_1(v_{1n}-D)+\alpha_2(v_{2n}-D))p\right]=0.$$

После простых алгебраических преобразований получаем:

$$\frac{\partial\rho_1\left(e_1+\frac{v_{1n}^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2\left(e_2+\frac{v_{2n}^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1v_{1n}}{\partial x_n}\right)+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2v_{2n}}{\partial x_n}\right)- \\ -D\left(\frac{\partial\rho_1v_{1n}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1v_{1n}^2}{\partial x_n}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_n}\right)-D\left(\frac{\partial\rho_2v_{2n}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2v_{2n}^2}{\partial x_n}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_n}\right)+ \\ +\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial\rho_1v_{1n}\left(e_1+\frac{v_{1n}^2}{2}\right)}{\partial x_n}+\frac{\partial\rho_2v_{2n}\left(e_2+\frac{v_{2n}^2}{2}\right)}{\partial x_n}+ \\ +\frac{\partial}{\partial x_n}\left[(\alpha_1v_{1n}+\alpha_2v_{2n})p\right]=0.$$

Согласно (1) сумма третьего и четвертого слагаемых обращается в ноль, а пятое и шестое слагаемые согласно (24) и (25) будут равны Df_1 и $-Df_1$. В результате получим:

$$\frac{\partial(\rho_1E_{1n}+\rho_2E_{2n})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1v_{1n}E_{1n}+\rho_2v_{2n}E_{2n}+(\alpha_1v_{1n}+\alpha_2v_{2n})p\right]+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_n}=0. \quad (28)$$

В новой системе координат в уравнении полной энергии смеси (28) появился дополнительный член

$$\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_n},$$

который приводит к не инвариантности относительно преобразования Галилея уравнение полной энергии смеси. Появление дополнительного члена в уравнении сохранения полной энергии смеси связано с явным учетом силы присоединенных масс f_2 , которая является функцией разности ускорений фаз. Следовательно, для того чтобы не нарушалась инвариантность законов сохранения, описывающих поведение газозвесей, сила межфазного взаимодействия должна быть только функцией разности скоростей фаз $f = f_1(v_1 - v_2)$.

Автор выражает свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.
2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.
3. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.
4. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.
5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 4–7.

6. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27. – С. 69–73.

7. Нестационарные задачи горения аэрозвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматуллин // Известия АН СССР. Серия «Механика жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

8. Ивандаев, А.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесах / А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев, Р.И. Нигматулин // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНТИ. – 1981. – Т. 16. – С. 209–287.

9. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея двухфазных математических моделей гетерогенных сред / Ю.М. Ковалев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2014. – Т. 6, № 1. – С. 30–35.

10. Ковалев, Ю.М. Математический анализ уравнения сохранения двухфазных смесей / Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 29–37.

11. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию 27 мая 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 23–29*

DETECTION OF A TYPE OF INTERPHASE INTERACTION FORCE FOR MATHEMATICAL MODELS OF GAS SUSPENSION WITH PAIR INTERACTION

*Y.M. Kovalev*¹

Based on the analysis of invariance under Galilean transformations of a known mathematical model describing a two-phase medium flow, it was shown that despite the invariance of the equations for conservation of components, the resulting equation for conservation of total energy of the mixture is not reliable. The reasons for this discrepancy are thoroughly examined and eliminated. Functional dependence of the interphase interaction was determined for the obtained mathematical model of a two-phase medium.

Keywords: mathematical model; invariance; multi-component mixture.

References

1. Kovalev Yu.M. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov"*. 1997. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).
2. Kuropatenko V.F. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 2011. Vol. 84, no. 1. pp. 74–92. (in Russ.).
3. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Doklady Akademii nauk*. 1989. Vol. 308, no. 5. pp. 1074–1078. (in Russ.).
4. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Fizika goreniya i vzryva*. 1989. Vol. 25, no. 6. pp. 72–79. (in Russ.).
5. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analysis of the invariance some mathematical models of multicomponent media (Analiz invariantnosti nekotorykh matematicheskikh modeley mnogokomponentnykh sred). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*. 2012. Issue 6. no. 11(270). pp. 4–7. (in Russ.).

¹ Kovalev Yury Mikhailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Computational Continuum Mechanics Department, South Ural State University.
E-mail: yum_kov@mail.ru

6. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analiz invariantnosti otnositel'no preobrazovaniya Galileya nekotorykh modeley matematicheskikh mnogokomponentnykh sred. (Analysis of the Invariance Under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multicomponent Media). *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2012. no. 27. pp. 69–73. (in Russ.).

7. Vaynshteyn P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatullin Kh.A. *Izvestiya AN SSSR. Seriya "Mekhanika zhidkosti i gaza"*. 1981. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).

8. Ivandaev A.I., Kutushev A.G., Nigmatulin R.I. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika zhidkosti i gaza*. Moscow, VINITI Publ. 1981. Vol. 16. pp. 209–287. (in Russ.).

9. Kovalev Yu.M. Analysis of invariance under Galilean transformation of two-phase mathematical models of heterogeneous media. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2014. Vol. 6, no. 1, pp. 30–35. (in Russ.).

10. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A. Matematicheskiy analiz uravneniya sokhraneniya dvukhfaznykh smesey (A Mathematical Study of the Conservation Equation for Two-Phase Mixtures). *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2014. Vol. 7, no. 2. pp. 29–37. (in Russ.).

11. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* (The fundamentals of the mechanics of heterogeneous media). Moscow, Nauka Publ., 1978. 336 p. (in Russ.).

Received 27 May 2014

МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО СЖАТИЯ И ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ ПЯТИ МЕТАЛЛОВ¹

В.Ф. Куропатенко², С.Ю. Филатов³

Предложен способ построения уравнений состояния в области небольших давлений. Основные параметры уравнения состояния подобраны для пяти металлов при помощи оригинальной версии симплекс метода. Метод использует линейные зависимости скорости ударной волны от скорости вещества и данные по тепловому расширению при постоянном давлении. В качестве целевой функции выбрана сумма квадратичных разностей между расчетными и экспериментальными величинами. Получено удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Ключевые слова: уравнение состояния вещества; симплекс-метод; тепловое расширение; ударное сжатие.

Введение

В настоящее время в литературе описано большое количество уравнений состояния веществ (УРС) от очень простых до очень сложных [1–3]. При изучении поведения сплошных сред, которые подвергаются воздействию динамических нагрузок, применяется математическое моделирование, выполняющееся на электронных вычислительных машинах (ЭВМ). Число компонентов в сложных моделях многокомпонентных сред с химическими реакциями и фазовыми переходами может достигать нескольких десятков, а то и сотен. При расчете смеси в таких моделях затраты машинного времени могут растягиваться на значительное время даже с использованием современных ЭВМ. Предлагаемый малопараметрический УРС значительно сократит время расчета на ЭВМ сложных физических процессов.

Уравнения на поверхности сильного разрыва

В случае идеальной среды (девиатор тензора напряжений равен нулю и отсутствует теплопроводность) законы сохранения массы, импульса и энергии на поверхности сильного разрыва (ударной волны) имеют вид

$$\rho \cdot (D - U) = \rho_0 \cdot (D - U_0), \quad (1)$$

$$\rho \cdot (D - U)U - P = \rho_0 \cdot (D - U_0)U_0 - P_0, \quad (2)$$

$$P_0 = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) величины без индекса характеризуют состояние за разрывом, D – скорость ударной волны. Величины с индексом, такие как ρ_0 – плотность, U_0 – массовая скорость, P_0 – давление, E_0 – удельная внутренняя энергия, описывают состояние вещества перед разрывом. Рассмотрим ударную волну в покоящемся веществе. Согласно [1] уравнение состояния рассматривалось в предположении, что величины P_0 и E_0 пренебрежимо малы по сравнению с P и E . Уравнения (1)–(3) принимают вид при $P_0 = 0$, $E_0 = 0$ и $U_0 = 0$:

$$\rho \cdot (D - U) - \rho_0 D = 0, \quad \rho_0 D U = P, \quad (4)$$

$$E = \frac{1}{2} D U \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right). \quad (5)$$

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №13-01-00072.

² Куропатенко Валентин Федорович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск.

E-mail: v.f.kuropatenko@rambler.ru

³ Филатов Сергей Юрьевич – научный сотрудник, Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики им. академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск.

E-mail: phil@chel.ru

Система, состоящая из трех уравнений, (4), (5) содержит пять величин P , ρ , E , U , D . Если любые две из них получены экспериментальным путем, то остальные величины можно найти из выражений (4) и (5). Точка на ударной адиабате определяется полностью. Зависимость между экспериментально измеренными D и U известна уже более пятидесяти лет и описывается линейным соотношением

$$D = C_0 + b \cdot U. \quad (6)$$

На основе большого количества обработанных экспериментальных данных в справочнике [2] содержится информация по $D(U)$ соотношениям.

Давление P определяется калорическим уравнением состояния (УРС) вида $P = P(\rho, E)$ в том случае, если ρ и E – независимые термодинамические переменные. Сложные и трудоемкие современные УРС рассмотрены в [3], [4], однако, для экспресс-расчетов достаточно использовать простые УРС.

В [1] рассмотрено уравнение состояния вида

$$P = P_X(\rho) + P_T(\rho, S), \quad E = E_X(\rho) + E_T(\rho, S), \quad (7)$$

где

$$P_X = \frac{\rho_0 C_0^2}{n} (x^{-n} - 1), \quad P_T = \rho_0 C_0^2 \cdot f(S) \cdot x^{-\gamma}, \quad (8)$$

$$E_X = \frac{C_0^2}{n-1} \left(\frac{x^{1-n}}{n} + \frac{x(n-1)}{n} - 1 \right), \quad E_T = \frac{C_0^2 \cdot f(S)}{\gamma-1} x^{1-\gamma}. \quad (9)$$

C_0 – скорость звука перед ударной волной при $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, S – энтропия, $n = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, $x = \rho_0 / \rho$.

Зависимости $P_X(E_X, x)$ и $P_T(E_T, x)$ следуют из (8) и (9)

$$P_X = \frac{(n-1)\rho_0 E_X}{x} + \rho_0 C_0^2 \cdot \left(\frac{1-x}{x^{n_0+1}} \right), \quad P_T = \frac{(\gamma-1)\rho_0 E_T}{x}, \quad (10)$$

УРС получим путем подстановки (10) в (7), которое принимает следующий вид

$$P = (\gamma-1)\rho_0 E x^{-1} + \phi(x), \quad (11)$$

где

$$\phi(x) = \frac{n-\gamma}{(n-1)n} x^{-n} + \frac{\gamma-1}{(n-1)x} - \frac{\gamma}{n}.$$

Согласно [1] уравнение (11) называется «уравнением с согласованными γ и n », если $\gamma = n$. Таким образом, уравнение (11) примет вид

$$P = (n-1)\rho_0 E \cdot x^{-1} + \rho_0 C_0^2 (x^{-1} - 1), \quad (12)$$

где ρ_0 , C_0 и n – постоянные величины.

Далее рассмотрим, при каких условиях уравнения (4), (5), (12) согласуются с линейной зависимостью $D(U)$. Зависимость $D(U)$ получим, путем исключения P , E и x в выражениях (4), (5) и (12).

$$D = \frac{n+1}{4} U + \sqrt{C_0^2 + \left(\frac{n+1}{4} U \right)^2}. \quad (13)$$

Сравнивая выражение (13) с выражением (6), можно увидеть, что эти зависимости различаются. Наименьшие отличия находятся в области $\frac{n+1}{4} U \ll C_0$.

Так как предположение о постоянстве n в УРС (12) приводит к нелинейной зависимости $D(U)$ в выражении (13), которая, в свою очередь, не согласуется с линейной зависимостью $D(U)$ (6), сделаем наоборот. Линейную зависимость $D(U)$ (6) примем за основу, P и E выра-

зим через C_0 и b из выражений (4) – (6). Полученные выражения подставим в (11) и найдем уравнение в котором n вдоль ударной адиабаты не может быть постоянной величиной

$$n = 2b \cdot (2 - b \cdot (1 - x)) - 1, \quad (14)$$

Уравнение состояния

Поведение вещества вместо УРС (12) будем описывать уравнением, в котором справедливо предположение, что n не зависит от x

$$P = (n(x) - 1) \cdot \rho_{0K} x^{-1} E + \rho_{0K} C_{0K}^2 \cdot \phi(x). \quad (15)$$

В уравнении (15) ρ_{0K} , C_{0K} – плотность и скорость звука в точке $P = 0$, $T = 0$, $x = 1$.

В [5–7] использовалось УРС типа (15), где величина n зависит от x . В уравнении (14) величина n линейно зависит от x в том диапазоне D и U , в котором справедлива зависимость $D(U)$ (6). Из выражений (4), (5) и (15) следует зависимость $n(x)$ (14), именуемая далее экспериментальной.

Функция $n(x)$ должна иметь максимум в окрестности $x \approx 1$ согласно [2] и [3]. Таким образом, если $x = 0$ и $n = n_0$, то справедливо утверждение, что $n_m > n_0$. Будем использовать простую функцию вида

$$n(x) = n_0 + (n_m - n_0) \frac{ax^2}{ax^2 + (x^2 - x_m^2)^2}, \quad (16)$$

где $a = \frac{16x_m^2}{4 - (n_m - n_0)^2}$.

Зная, что при $x = 0$ и $x = \infty$ $n(x) = n_0$, а также при $x = x_m$ $n(x) = n_m$, из (16) найдем производную $n(x)$ в виде

$$\frac{dn}{dx} = \frac{(n_m - n_0) \cdot 2ax^2 (x_m^2 - x^2)}{\left(ax^2 + (x^2 - x_m^2)^2\right)^2}. \quad (17)$$

Производная $n(x)$ равна нулю при $x = 0$, $x = \infty$ и $x = x_m$. То есть, с большой долей достоверности вещество можно считать газом с $\gamma = n_0$ при бесконечно большом сжатии $x \approx 0$ и бесконечно большом разрежении. Значение n_0 , как и значения n_m , x_m , подберем из условия наилучшего описания экспериментальных данных, т.к. область применимости малопараметрического УРС ограничена конечным сжатием.

Функцию $\phi(x)$ из (15) возьмем в виде, максимально близком к выражению (12)

$$\phi(x) = \frac{1 - x}{x^{n_0 + 1}}. \quad (18)$$

Разделим давление и энергию на холодные и тепловые составляющие для определения температуры и теплоемкости:

$$P = P_X(x) + P_T(x, T), \quad E = E_X(x) + E_T(x, T). \quad (19)$$

В соответствии с [7] зависимость $E_T(x, T)$ возьмем в виде

$$E_T = \frac{AT^2}{\theta(x) + T}, \quad (20)$$

где A – индивидуальная характеристика вещества, для простых веществ близкая к $3R/\mu$; R – универсальная газовая постоянная; μ – молекулярная масса. Дифференцируя выражение (20), получим теплоемкость при постоянном x

$$C_V = \frac{AT \cdot (2\theta(x) + T)}{(\theta(x) + T)^2}. \quad (21)$$

В соответствии с [7] выражение для теплового давления будет иметь вид

$$P_T = -\frac{A}{\theta(x)} \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \cdot \frac{T^2}{\theta(x) + T}. \quad (22)$$

Зная, что справедливо уравнение

$$P_T = (n(x) - 1) \frac{\rho_{0K}}{x} E_T, \quad (23)$$

получим характеристическую функцию $\theta(x)$, которая связана с $n(x)$ уравнением

$$\frac{d \ln \theta(x)}{dx} = -\frac{n(x) - 1}{x}. \quad (24)$$

Зависимость $\theta(x)$ следует из выражений (24) и (16)

$$\theta(x) = \theta_0 \cdot x^{1-n_0} \cdot \left(\frac{x^2 + B \cdot x_m^2}{x^2 + \frac{1}{B} \cdot x_m^2} \right), \quad (25)$$

где $B = \frac{2 + (n_m - n_0)}{2 - (n_m - n_0)}$.

Дополнительно, сделаем такое условие, чтобы изобара $P = 10^{-4}$ ГПа проходила через точку, характеризующую нормальное состояние ($P = 10^{-4}$ ГПа, $T = 293$ °К, $\rho = \rho_0$, $C_P = C_{P0}$), а также через точку плавления при $P = 10^{-4}$ ГПа ($T = T_{nl}$, $C_P = C_{Pnl}$, $\rho = \rho_{nl}$). При описании зависимости $C_P(T)$ при $P = \text{const}$ следует выразить C_P через T и x . С этой целью воспользуемся уравнением из [8]

$$C_P = C_V - \frac{T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_X^2}{\rho_{0K} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T}. \quad (26)$$

Зная, что $\left(\frac{\partial P_X}{\partial T} \right)_X = 0$ продифференцируем выражение (23). Производная $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_X$ запишется в виде

$$\left(\frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_X = \frac{(n(x) - 1) \cdot \rho_{0K}}{x} \cdot C_V. \quad (27)$$

Так как выражение (19) справедливо, то производная $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T$ будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T = \frac{dP_X}{dx} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T. \quad (28)$$

Уравнение состояния вещества определяется совокупностью уравнений (15)–(17) и (25) и содержит 7 параметров: ρ_{0K} , C_{0K} , A , n_0 , n_m , x_m и θ_0 . Численные значения этих параметров определяются таким образом, чтобы наилучшим образом описать поведение ударной адиабаты состояния вещества в точке, характеризующей нормальное состояние $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, $T_0 = 293$ °К, $\rho_0 = \rho(P_0, T_0)$, $C_{P0} = C_P(\rho_0, T_0)$ и в точке плавления $P_{nl} = 10^{-4}$ ГПа, $T_1 = T_{nl}$, $\rho_1 = \rho_{nl}(T_{nl}, P_0)$, $C_{P1} = C_P(T_{nl}, P_0)$.

Результаты расчетов

Расчеты выполнены для нескольких простых веществ – металлов. При помощи оригинальной версии симплекс-метода выполнен подбор основных параметров уравнения состояния. В качестве целевой функции выбрана сумма квадратичных разностей между расчетными и экспериментальными значениями теплового расширения вещества и теплоемкости при постоянном давлении. Для рассмотренных материалов получено удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. На рис. 1 показано сравнение безразмерного давления для ударных адиабат рассчитываемых материалов. Величина безразмерного давления определяется по формуле (29):

$$\Pi = \frac{P}{\rho_0 C_0^2}. \quad (29)$$

В качестве сравниваемых величин давлений используются экспериментальные, взятые из [2], и теоретические, определяемые из выражения (15).

Зависимость теплоемкости от температуры приведена на рис. 2, экспериментальные значения теплоемкости взяты из справочника [9]. В таблицу сведены результаты расчетов подбора основных параметров УРС.

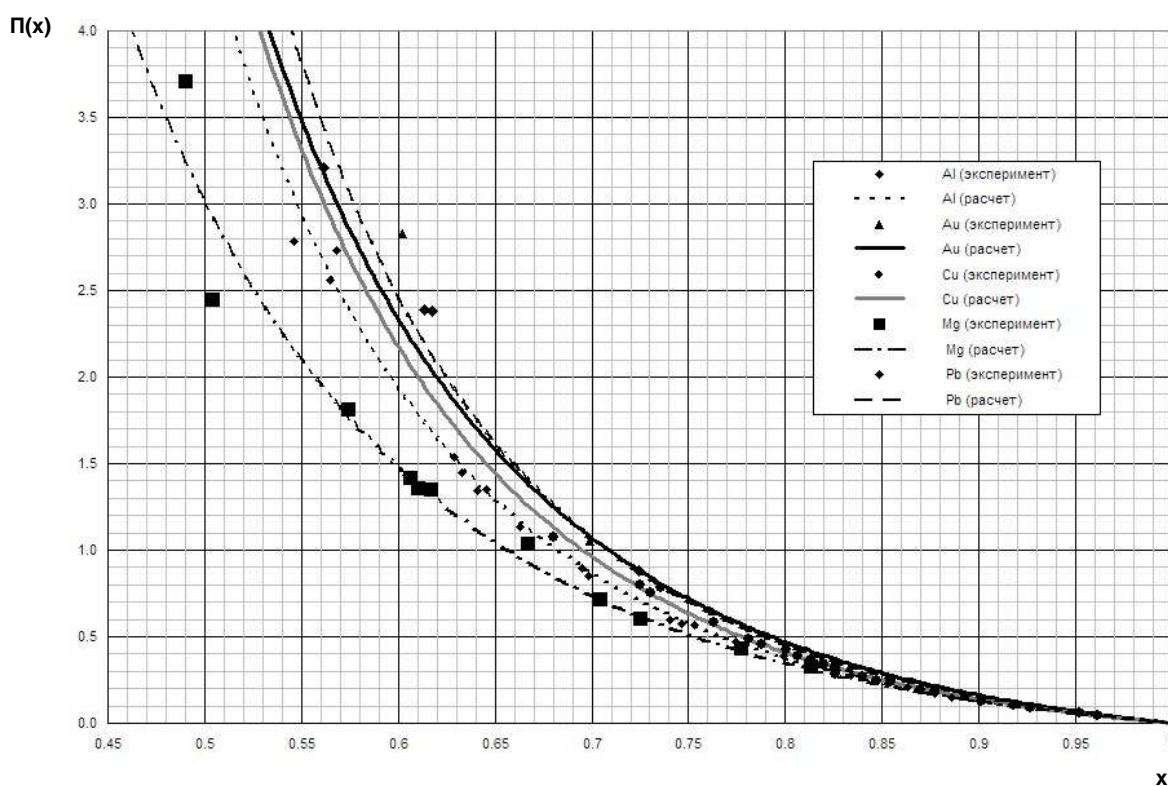


Рис. 1. Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей $\Pi(x)$ на ударной адиабате

Результаты подбора основных параметров уравнения состояния

Величины	Вещества				
	Al (алюминий)	Au (золото)	Mg (магний)	Pb (свинец)	Cu (медь)
n_0	1,62	1,515	1,291	1,719	1,49
n_m	1,933	2,564	1,944	2,027	2,997
x_m	1,908	2,485	2,613	1,66	2,484
ρ_{0K} , г/см ³	2,908	19,668	1,833	11,501	9,014
C_{0K} , км/с	5,642	3,402	4,724	2,102	3,904
$A \cdot 10^6$, кДж/г	920,39	140,65	1106,14	127,6	394,94
θ_0 , К	15,012	8,004	43,141	39,198	1,466

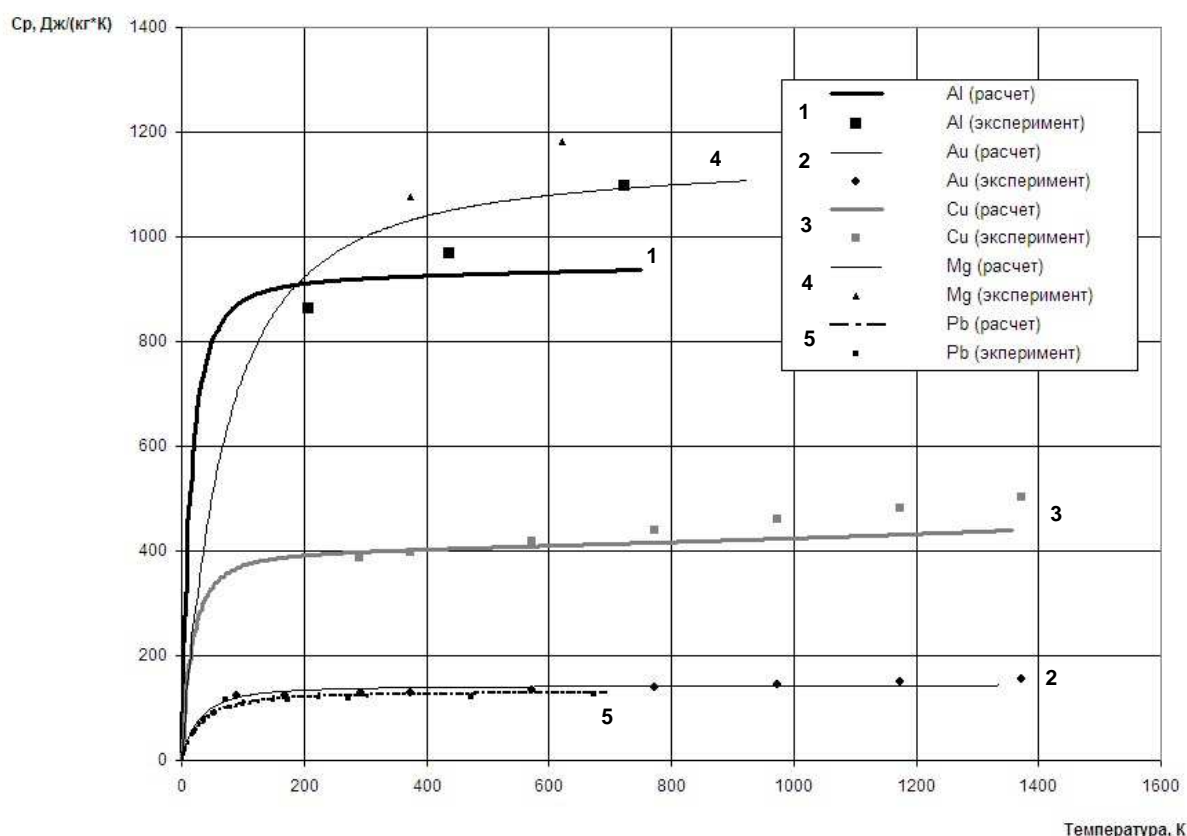


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей $C_p(T)$

Литература

1. Забабахин, Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва / Е.И. Забабахин. – Снежинск: РФЯЦ-ВНИИФ, 1977. – 203 с.
2. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению веществ / Р.Ф. Трунин, Л.Ф. Гударенко, М.В. Жерноклетов, Г.В. Симаков. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001. – 439 с.
3. Жарков, В.И. Уравнение состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах / В.И. Жарков, В.А. Калинин. – М.: Наука, 1968. – 310 с.
4. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния компонентов низкотемпературной плазмы / В.Ф. Куропатенко // Энциклопедия низкотемпературной плазмы: сб. науч. тр. – М.: Янус-К, 2008. – Серия Б, Том VII. – Ч. 2. – С. 436–450.
5. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошных сред. – Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, ИТПМ СО АН СССР, 1977. – Т. 8, №6. – С. 68–71.
6. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации плотных ВВ / В.Ф. Куропатенко // Физика горения и взрыва. – 1989. – № 6. – С. 112–117.
7. Куропатенко, В.Ф. Моделирование отклика веществ на динамическое воздействие / В.Ф. Куропатенко // Химическая физика. – 2002. – Т. 21, № 10. – С. 46–54.
8. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Челябинский государственный университет. – 2007. – 302 с.
9. Физико-химические свойства элементов. Справочник / под ред. Самсонова Г.В. – Киев: Наукова думка, 1965. – 808 с.

Поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

MODELLING OF SHOCK COMPRESSION AND THERMAL EXPANSION OF FIVE METALS

V.F. Kuropatenko¹, S.Yu. Filatov²

The method of building equations of state in the area of low pressures is offered. The method is based on linear dependence of shock wave velocity on a substance velocity and thermal expansion data at constant pressure. Linear dependence of shock wave velocity on mass velocity leads to the dependence of Grüneisen parameters on the density. This data is used together with thermal expansion data at constant pressure. The parameters for the equation of state are computed for five metals with the help of the original version of Simplex method. A sum of quadratic differences between calculated and experimental values is selected as a target function. The theoretical values have agreed with the experimental one.

Keywords: equation of state; Simplex method; thermal expansion; shock compression.

References

1. Zababakhin E.I. *Nekotorye voprosy gazodinamiki vzryva* (Some issues of gas dynamics of explosion). Snezhinsk, RFYaTs-VNIIF, 1977. 203 p. (in Russ.).
2. Trunin R.F., Gudarenko L.F., Zhernokletov M.V., Simakov G.V. *Ekspperimental'nye dannye po udarno-volnovomu szhatiyu i adiabaticheskomu rasshireniyu veshchestv* (Experimental data about shock wave compression and adiabatic expansion of substances). Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2001. 439 p. (in Russ.).
3. Zharkov V.I., Kalinin V.A. *Uravnenie sostoyaniya tverdykh tel pri vysokikh davleniyakh i temperaturakh* (Equation of state for solids at high pressure and temperatures). Moscow, Nauka, 1968. 310 p. (in Russ.).
4. Kuropatenko V.F. *Uravnenie sostoyaniya komponentov nizkotemperaturnoy plazmy* (Equation of state for components of low-temperature plasma). *Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy. Chast 2.* (Encyclopaedia of low-temperature plasma. Part 2). Moscow, Yanus-K Publ., 2008. Series of B. Vol. VII. pp. 436–450. (in Russ.).
5. Kuropatenko V.F. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnykh sred.* Novosibirsk, VTs SO AN SSSR Publ., ITPM SO AN SSSR Publ., 1977. Vol. 8, no. 6. pp. 68–71. (in Russ.).
6. Kuropatenko V.F. *Fizika goreniya i vzryva.* 1989. no. 6. pp. 112–117. (in Russ.).
7. Kuropatenko V.F. *Khimicheskaya fizika.* 2002. Vol. 21, no. 10. pp. 46–54. (in Russ.).
8. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnykh sred* (Models of continuum mechanics). Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2007. 302 p. (in Russ.).
9. Samsonov G.V. (ed.) *Fiziko-khimicheskie svoystva elementov. Spravochnik* (Physical and chemical properties of elements. Handbook). Kiev, Naukova dumka, 1965. 808 p. (in Russ.).

Received 26 June 2014

¹ Kuropatenko Valentin Fedorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Senior Researcher, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk.

E-mail: vfkuropatenko@rambler.ru

² Filatov Sergey Yurjevich is Resercher, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk.

E-mail: phil@chel.ru

h-ОДНОРОДНЫЕ λ -ПРОСТРАНСТВА

С.В. Медведев¹

Пусть X – h -однородное сепарабельное метризуемое несчётное λ -пространство. Тогда: 1) X является CDH-пространством, 2) X гомеоморфно $X \setminus A$ для любого счётного множества A из X .

Ключевые слова: CDH-пространство; h -однородное пространство; λ -пространство; гомеоморфизм.

Все пространства предполагаются сепарабельными метризуемыми.

Сепарабельное топологическое пространство X называется *счётно плотно однородным*, если для любых двух счётных всюду плотных множеств A и B из пространства X существует такой гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$, что $f(A) = B$. Кратко такое пространство X называется *CDH-пространством*. Это понятие применяется только для сепарабельных пространств. Термин «CDH-пространство» был введён Беннетом в 1972 г. Однако понятие CDH-пространства является классическим; оно фактически встречалось ещё в работах Кантора, Брауэра, Фреше и других математиков прошлого века. Важными примерами CDH-пространств служат евклидово пространство \mathbb{R}^n и гильбертов куб $[0;1]^\omega$.

Теорема 1. *Любое абсолютно борелевское CDH-пространство метризуемо полной метрикой.*

Напомним, что *абсолютно борелевским пространством* называется пространство, гомеоморфное борелевскому подмножеству полного метрического пространства. Теорема 1 доказана М. Хрусакон и Б. Авилес [1] в предположении выполнения аксиом теории ZFC. Отметим также [1], что из аксиомы детерминированности вытекает, что любое CDH-пространство метризуемо полной метрикой. В то же время, как известно, аксиома детерминированности противоречит аксиоме выбора.

Теорема 1 показывает, что поиск других CDH-пространств нужно вести среди множеств, устроенных более сложно, чем борелевские множества в польских пространствах. Ниже в теореме 2 указан ещё один класс CDH-пространств. Теорема 2 доказана в системе аксиом ZFC и представляет собой основной результат заметки; она усиливает утверждение 4.9 из статьи [4].

Обозначения. Запись $X \approx Y$ означает, что пространства X и Y гомеоморфны. Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой ω , также $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно является T_1 -пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств. Нульмерное пространство называется *h -однородным*, если любое его непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству. Пространство X называется *пространством первой категории*, если его можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств.

Куратовский [2, §40] ввёл так называемые λ -пространства. Сепарабельное пространство X называется *λ -пространством*, если любое счётное подмножество из X является G_δ -множеством в X . Можно доказать [2], что любое несчётное польское пространство содержит несчётное λ -множество.

Остальные обозначения и применяемые термины можно найти в монографиях [2] и [6].

Отметим следующие связи между λ -пространствами и пространствами первой категории.

Лемма 1 [2]. *Любое λ -пространство является пространством первой категории.*

Лемма 2 [3]. *Любое CDH-пространство первой категории является λ -пространством.*

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

¹ Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Лемма 3 [5]. Пусть в нульмерном метризуемом пространстве X_i дано замкнутое нигде не плотное множество F_i , где $i \in \{1;2\}$. Пусть дан гомеоморфизм $f : F_1 \rightarrow F_2$.

Тогда существует покрытие \mathcal{V}_i множества $X_i \setminus F_i$ попарно не пересекающимися открыто-замкнутыми (в X_i) множествами для каждого $i \in \{1;2\}$ и биекция $\psi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ такие, что для любых множеств $D_1 \subset \bigcup \mathcal{V}_1$ и $D_2 \subset \bigcup \mathcal{V}_2$, связанных произвольной биекцией $g : D_1 \rightarrow D_2$ и удовлетворяющих условию $g(D_1 \cap V) = D_2 \cap \psi(V)$ для любого $V \in \mathcal{V}_1$, комбинированное отображение $f \nabla g : F_1 \cup D_1 \rightarrow F_2 \cup D_2$ непрерывно в каждой точке множества F_1 , а обратное отображение $(f \nabla g)^{-1}$ непрерывно в каждой точке множества F_2 .

В ситуации, описанной леммой 3, мы будем говорить, что:

1) покрытие \mathcal{V}_i множества $X_i \setminus F_i$ образует *остаточное семейство множеств* относительно множества F_i для каждого $i \in \{1;2\}$;

2) биекция $\psi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ согласована с гомеоморфизмом $f : F_1 \rightarrow F_2$;

3) тройка $\langle \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \psi \rangle$ образует *KR-покрытие* для $\langle X_1 \setminus F_1, X_2 \setminus F_2, f \rangle$.

Результат, аналогичный лемме 3, был также получен А.В. Островским и ван Энгеленом. Отметим, что термин «KR-покрытие» был предложен ван Энгеленом.

В доказательстве теоремы 2 используются некоторые идеи из статьи [4].

Теорема 2. Любое h -однородное несчётное λ -пространство является CDH-пространством.

Доказательство. В h -однородном несчётном λ -пространстве X зафиксируем счётные всюду плотные множества A и B .

Так как пространство X нульмерно, то согласно [6, теорема 7.3.1] существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ дискретных открытых покрытий пространства X , что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства X , состоящую из открыто-замкнутых множеств, причём для любого n покрытие \mathcal{U}_{n+1} вписано в покрытие \mathcal{U}_n . По определению h -однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U : X \rightarrow U$.

Счётное множество $A \cup \{\varphi_U(A) : U \in \mathcal{U}\}$ расширим до счётного множества $A' = \{a_n : n \in \omega\}$ таким образом, чтобы множество $A' \setminus A$ было бы всюду плотно в X . Аналогично, счётное множество $B \cup \{\varphi_U(B) : U \in \mathcal{U}\}$ расширим до счётного множества $B' = \{b_n : n \in \omega\}$ таким образом, чтобы множество $B' \setminus B$ было бы всюду плотно в X .

Так как пространство X – несчётное, то $X' = X \setminus (A' \cup B')$ – всюду плотное множество в пространстве первой категории X ; следовательно, X' также является множеством первой категории в X . По определению λ -пространства, $A' \cup B'$ – множество типа G_δ в пространстве X . Тогда $X' = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$, где каждое множество X_n замкнуто и нигде не плотно в X . Так как пространство X нульмерно, то без ограничения общности можно считать, что множества $X_n, n \in \omega$, попарно не пересекаются. По построению, для любых $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \omega$ множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в X , причём $\varphi_U(X_n) \subset U$, $\varphi_U(X_n) \cap A = \emptyset$ и $\varphi_U(X_n) \cap B = \emptyset$.

Построим гомеоморфизм $f : X \rightarrow X$, для которого $f(A) = B$.

Для этого по индукции в пространстве X построим замкнутые нигде не плотные множества F_n и E_n , гомеоморфизм $f_n : F_n \rightarrow E_n$, KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n, \psi_n \rangle$ для $\langle X \setminus F_n, X \setminus E_n, f_n \rangle$, удовлетворяющие следующим условиям для любого $n \in \omega$:

- 1) $X_n \cup F_n \cup \{a_n\} \subset F_{n+1}$;
- 2) $X_n \cup E_n \cup \{b_n\} \subset E_{n+1}$;
- 3) $f_n(A \cap F_n) = B \cap E_n$;

- 4) сужение $f_n|_{F_i} = f_i$ для любого $i < n$;
 5) семейство \mathcal{V}_{n+1} вписано в \mathcal{V}_n , а семейство \mathcal{W}_{n+1} вписано в \mathcal{W}_n ;
 6) если $V \in \mathcal{V}_n$ и $V^* \in \mathcal{V}_m$ для $n < m$, то $V^* \subset V \Leftrightarrow \psi_m(V^*) \subset \psi_n(V)$.

База индукции. Для $n=0$ положим $F_0 = E_0 = \emptyset$, $\mathcal{V}_0 = \mathcal{W}_0 = \{X\}$, $\psi_0(X) = X$ и $f_0(\emptyset) = \emptyset$.

Индуктивный переход. Предположим, что множества F_n и E_n , гомеоморфизм $f_n : F_n \rightarrow E_n$ и KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n, \psi_n \rangle$ для $\langle X \setminus F_n, X \setminus E_n, f_n \rangle$ построены согласно условиям (1)–(6).

Сделаем следующий шаг. Зафиксируем множества $V \in \mathcal{V}_n$ и $W = \psi_n(V) \in \mathcal{W}_n$.

Положим $Y = V \cap X_m$, где m – наименьший индекс, для которого множество $Y \neq \emptyset$. Аналогично, положим $Z = W \cap X_k$, где k – наименьший индекс, для которого множество $Z \neq \emptyset$.

Множество A' всюду плотно в X . Зафиксируем точку $a_i \in V \cap A'$ с наименьшим возможным индексом i . Выберем точку $b_j \in W \cap B'$ с наименьшим возможным индексом j по следующему правилу: $b_j \in B \Leftrightarrow a_i \in A$.

Множество $Y \cup \{a_i\}$ нигде не плотно в V , поэтому существует такое базисное множество $U \in \mathcal{U}$, что $U \subset V$ и $U \cap (Y \cup \{a_i\}) = \emptyset$. Положим $F_V = Y \cup \{a_i\} \cup \varphi_U(Z)$. Аналогично, найдётся базисное множество $U^* \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условиям $U^* \subset W$ и $U^* \cap (Z \cup \{b_j\}) = \emptyset$. Пусть $E_W = Z \cup \{b_j\} \cup \varphi_{U^*}(Y)$. Определим гомеоморфизм $f_V : F_V \rightarrow E_W$ по следующему правилу:

$$f_V(x) = \begin{cases} b_j, & \text{если } x = a_i, \\ \varphi_{U^*}(x), & \text{если } x \in Y, \\ (\varphi_U)^{-1}(x), & \text{если } x \in \varphi_U(Z). \end{cases}$$

По лемме 3 существует KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_V, \mathcal{W}_V, \psi_V \rangle$ для $\langle V \setminus F_V, W \setminus E_W, f_V \rangle$.

Несложно проверить, что $F_{n+1} = F_n \cup \bigcup \{F_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ и $E_{n+1} = E_n \cup \bigcup \{E_{\psi_n(V)} : V \in \mathcal{V}_n\}$ – замкнутые нигде не плотные множества в пространстве X . Зададим отображение $f_{n+1} : F_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$ по следующему правилу:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_V(x), & \text{если } x \in F_V \text{ для некоторого } V \in \mathcal{V}_n, \\ f_n(x), & \text{если } x \in F_n. \end{cases}$$

Из построения вытекает, что отображение f_{n+1} является локальным гомеоморфизмом в точках множества $F_{n+1} \setminus F_n$, а из индуктивного предположения и леммы 3 следует, что отображение f_{n+1} является гомеоморфизмом в точках множества F_n .

Семейство $\mathcal{V}_{n+1} = \{U \in \mathcal{V} : U \in \mathcal{V}_n\}$ образует покрытие множества $X \setminus F_{n+1}$, а семейство $\mathcal{W}_{n+1} = \{\psi_V(U) \in \mathcal{W} : U \in \mathcal{V}_n, V \in \mathcal{V}_n\}$ образует покрытие множества $X \setminus E_{n+1}$. Биекция $\psi_{n+1} : \mathcal{V}_{n+1} \rightarrow \mathcal{W}_{n+1}$ определяется естественным образом: $\psi_{n+1}(U) = \psi_V(U)$, если $U \in \mathcal{V}_n$ для некоторого $V \in \mathcal{V}_n$. Несложно проверить, что биекция ψ_{n+1} согласована с гомеоморфизмом f_{n+1} . Итак, $\langle \mathcal{V}_{n+1}, \mathcal{W}_{n+1}, \psi_{n+1} \rangle$ образует KR-покрытие для $\langle X \setminus F_{n+1}, X \setminus E_{n+1}, f_{n+1} \rangle$.

Ясно, что все условия (1)–(6) выполняются. Индуктивный переход завершён.

Из условий (1) и (2) следует, что $X = \bigcup \{F_n : n \in \omega\} = \bigcup \{E_n : n \in \omega\}$.

Зададим отображение $f : X \rightarrow X$ по правилу $f(x) = f_n(x)$, если $x \in F_n$ для некоторого n . Это определение корректно в силу условия (4). Более того, f – биекция. По построению, сужение $f|_{F_n}$ является гомеоморфизмом. Из леммы 3 вытекает, что f – гомеоморфизм.

Из условия (3) следует, что $f(A) = B$.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2, леммы 1 и леммы 2 вытекает следующая неожиданная характеристика λ -пространств.

Следствие 1. Пусть дано h -однородное несчётное пространство X . Тогда X является λ -пространством тогда и только тогда, когда X – CDH-пространство первой категории.

Следствие 2. Пусть $X = \bigoplus \{X_n : n \in \omega\}$, где каждое X_n является h -однородным несчётным λ -пространством. Тогда X – CDH-пространство.

Установим ещё одно свойство h -однородных λ -пространств.

Теорема 3. Пусть дано h -однородное несчётное λ -пространство X . Тогда X гомеоморфно своему подпространству $X \setminus A$ для любого счётного множества $A \subset X$.

Доказательство. Так как пространство X нигде не счётно, то дополнение $X \setminus A$ является всюду плотным подмножеством в X . Согласно лемме 1, X – пространство первой категории. Тогда [2] дополнение $X \setminus A$ также будет пространством первой категории относительно себя.

Так как пространство X нульмерно, то согласно [6, теорема 7.3.1] существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ дискретных открытых счётных покрытий пространства X , что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства X , причём для любого n покрытие \mathcal{U}_{n+1} вписано в покрытие \mathcal{U}_n . По определению h -однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U : X \rightarrow U$.

Рассмотрим счётное множество $A^* = A \cup \bigcup \{\varphi_U(A) : U \in \mathcal{U}\}$. Из определения λ -множества следует, что A^* – множество типа G_δ в пространстве X . Несложно проверить, что $X^* = X \setminus A^*$ – всюду плотное множество в пространстве первой категории X ; следовательно, X^* также является множеством первой категории в X . Более того, X^* – множество типа F_σ в пространстве X . Поэтому множество X^* можно представить в виде счётного объединения $X^* = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$ замкнутых (в X) нигде не плотных множеств X_n . Из построения вытекает, что множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в X , причём $\varphi_U(X_n) \subset U \setminus A$ для любых $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \omega$.

Применяя лемму 4 из [5], делаем вывод, что любое открытое множество из пространства $X \setminus A$ содержит нигде не плотное замкнутое (относительно $X \setminus A$) подмножество, гомеоморфное пространству X . Тогда по теореме 3 из [5] пространство $X \setminus A$ гомеоморфно h -однородному расширению $h(X, \omega)$ пространства X относительно пространств первой категории. В [5] было показано, что для любого сепарабельного h -однородного пространства X первой категории расширение $h(X, \omega)$ гомеоморфно самому пространству X .

Теорема 3 доказана.

Замечание. Интересно выяснить, останутся ли теоремы 2 и 3 верными для (нульмерных) однородных пространств.

Литература

1. Hrusak, M. Countable dense homogeneity of definable spaces / M. Hrusak, B. Zamora Aviles // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 133. – Issue 11. – P. 3429–3435.
2. Куратовский, К. Топология: моногр: в 2 т. / К. Куратовский; пер. с англ. М.Я. Антоновского. – М.: Мир, 1966. – Т.1. – 595 с.
3. Fitzpatrick, Jr. B. Countable dense homogeneity and the Baire property / B. Fitzpatrick Jr., H-X. Zhou // Topology Applic. – 1992. – Vol. 43. – P. 1–14.
4. Hernandez-Gutierrez, R. Countable dense homogeneity and λ -sets / R. Hernandez-Gutierrez, M. Hrusak, J. van Mill // Fund. Math. – 2014. – Vol. 266. – Issue 2. – P. 157–172.
5. Medvedev, S.V. About closed subsets of spaces of first category / S.V. Medvedev // Topology Applic. – 2012. – Vol. 159. – P. 2187–2192.
6. Engelking, R. General Topology / R. Engelking. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 529 p.

Поступила в редакцию 5 июня 2014 г.

h-HOMOGENEOUS λ -SPACES**S.V. Medvedev¹**

Let X be an h -homogeneous separable metrizable uncountable λ -space. Then: 1) X is a CDH-space, 2) X is homeomorphic to $X \setminus A$ for any countable subset A of X .

Keywords: CDH-space; h -homogeneous space; λ -space; homeomorphism.

References

1. Hrusak M., Zamora Aviles B. Countable dense homogeneity of definable spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2005. Vol. 133. Issue 11. pp. 3429–3435.
2. Kuratowski K. *Topologiya: monografiya* (Topology: the monograph). Moscow, Mir Publ., 1966. Vol. 1. 595 pp. (in Russ.). [Kuratowski K. *Topology*. New York and London, Academic Press, 1966. Vol. 1. 560 pp. (in Eng.).]
3. Fitzpatric Jr.B., Zhou H-X. *Topology Applic.* 1992. Vol. 43. pp. 1–14.
4. Hernandez-Gutierrez R., Hrusak M., van Mill J. Countable dense homogeneity and λ -sets. *Fund. Math.* 2014. Vol. 266. Issue 2. pp. 157–172.
5. Medvedev S.V. About closed subsets of spaces of first category. *Topology Applic.* 2012. Vol. 159. pp. 2187–2192.
6. Engelking R. *General Topology*. Berlin, Heldermann Verlag, 1989. 529 pp.

Received 5 June 2014

¹ Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: medv@math.susu.ac.ru

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННО ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА С УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

В.Л. Пасиков¹

Изучаются некоторые игровые ситуации сближения-уклонения для управляемых динамических объектов, эволюция которых описывается собственно линейными интегро-дифференциальными и интегральными системами Вольтера с управляющими воздействиями под знаком интеграла, что наделяет управляемую систему новыми существенными особенностями по сравнению с управляемыми обыкновенными дифференциальными системами. Вводится новое определение позиции игры, для вычисления которой, в каждый момент прицеливания, требуется использовать полную память по управляющим воздействиям. Для решения этих задач используются предлагаемые автором некоторые модификации известных экстремальных конструкций академика Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: интегро-дифференциальная система; задача наведения; управляющее воздействие; программный максимум; позиция игры.

В предлагаемой работе исследованы задачи наведения в пространстве R^n объектов, динамика которых описывается собственно линейными интегро-дифференциальными и интегральными системами типа Вольтера с управляющими воздействиями под знаком интеграла. Такие задачи здесь трактуются как динамические игры с полной памятью по управлениям при подходящем выборе пространства позиций. Приведен модельный пример. Работа примыкает к исследованиям [1–5].

1. Эволюция динамического объекта описывается собственно линейной интегро-дифференциальной системой Вольтера с управляющими воздействиями под знаком интеграла

$$\dot{x}(t) = \varphi(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \int_0^t B(t,s)f(s,u(s),v(s))ds, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, u \in U \subset R^1, v \in V \subset R^r,$$

здесь x – n -мерный фазовый вектор; u, v – управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, их реализации $u[t], v[t]$ на $[0, \theta], \theta > 0$, измеримые по Лебегу вектор-функции, U, V – компакты; $A(t)$ – матрица $n \times n$ с непрерывными элементами при $0 \leq s \leq t \leq \theta$, $\varphi(t)$ – измеримая по Лебегу с ограниченной вариацией на $[0, \theta]$ функция – вектор внешних воздействий; $f(t, u(t), v(t))$ – n -мерная вектор-функция, непрерывная при каждом $t \in [0, \theta]$ по совокупности переменных u, v , а при фиксированных значениях u, v – функция f измерима по t , интегралы понимаются в смысле Лебега.

Согласно [6, с. 9] система (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $x(0) = x_0$.

Это можно показать и непосредственно. По плану доказательства теоремы 27 [7], проинтегрируем (1) по Лебегу по переменной t

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t A(s)x(s)ds + \int_0^t \left[\int_0^\tau K(\tau, s)x(s)ds \right] d\tau + \int_0^t \left[\int_0^\tau B(\tau, s)f(s, u(s), v(s))ds \right] d\tau,$$

меняем порядок интегрирования по формуле Дирихле [7, с. 38]

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t \left[A(s) + \int_0^\tau K(\tau, s)d\tau \right] x(s)ds + \int_0^t \left[\int_0^\tau B(\tau, s)d\tau \right] f(s, u(s), v(s))ds. \quad (2)$$

¹ Пасиков Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра естественно-математических дисциплин, Орский филиал Оренбургского государственного института менеджмента.
E-mail: pasikov_fmfm@mail.ru

Обозначим $Q(t, s) = A(s) + \int_s^t K(\tau, s) d\tau$, тогда (2) является линейным интегральным уравнением

Вольтерра 2-го рода с непрерывным ядром $Q(t, s)$, которое согласно [8, с. 132] имеет единственное абсолютно-непрерывное решение, а, следовательно, система (1) имеет единственное абсолютно непрерывное решение, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$. Получим теперь по схеме из [7] формулу состояния системы (1) в момент $t \in [0, \theta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Положим $k(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$, тогда решение уравнения $\dot{x}(t) = k(t) + A(t)x(t), x(0) = x_0$ записывается по формуле Коши [1]

$$x(t) = X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)k(s)ds. \tag{3}$$

Здесь $X(t, s)$ – матрица Коши однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$; подставляем $k(t)$ и $x(t)$ из (3) в (1) и меняем порядок интегрирования:

$$k(t) = \varphi(t) + \int_0^t K(t, \tau)X(\tau, 0)d\tau \cdot x_0 + \int_0^t \int_s^t K(t, \tau)X(\tau, s)d\tau k(s)ds + \int_0^t B(t, s)f(s, u(s), v(s))ds. \tag{4}$$

Теперь обозначим $\psi(t) = \varphi(t) + \Phi(t, 0)x_0$, $\psi(0) = \varphi(0)$ и подставим в (4)

$$k(t) = \psi(t) + \int_0^t B(t, s)f(s, u(s), v(s))ds + \int_0^t \Phi(t, s)k(s)ds. \tag{5}$$

Равенство (5) относительно $k(t)$ является линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода, пусть $R(t, s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t, s)$ и $\Psi(t, s) = E + \int_s^t R(t, \tau)d\tau$, E – единичная матрица, тогда согласно [8, с. 133] получаем решение (5) в следующей форме

$$k(t) = \Psi(t, 0)\varphi(0) + \int_0^t \Psi(t, s)d[\psi(s) + \int_0^s B(s, \tau)f(\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau],$$

меняя здесь порядок интегрирования имеем

$$k(t) = \Psi(t, 0)\varphi(0) + \int_0^t \Psi(t, s)d\psi(s) + \int_0^s [\Psi(t, s)B(s, s) + \int_s^t \Psi(t, \tau) \frac{\partial B(\tau, s)}{\partial \tau} d\tau] f(s, u(s), v(s))ds, \tag{6}$$

обозначим $\chi(t, s) = \Psi(t, s)B(s, s) + \int_s^t \frac{\partial B(\tau, s)}{\partial \tau} d\tau$, подставляем в (6) и для $k(t)$ получаем формулу

$k(t) = \Psi(t, 0)\varphi(0) + \int_0^t \Psi(t, s)d\psi(s) + \int_0^t \chi(\tau, s)f(s, u(s), v(s))ds$, подставляем $k(t)$ в (3), тогда

$$x(t) = X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)\Psi(s, 0)ds \cdot \varphi(0) + \int_0^t \int_0^s X(t, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau d\psi(s) + \int_0^t \int_0^s X(t, \tau)\chi(\tau, s)d\tau f(s, u(s), v(s))ds. \tag{7}$$

В (7) положим

$$x(\theta, t_0) = X(t_0, 0)x_0 + \int_0^{\theta} X(\theta, s)\Psi(s, 0)ds \cdot \varphi(0) + \int_0^{\theta} \int_0^s X(\theta, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau d\psi(s) + \int_0^{t_0} \int_0^{\theta} X(\theta, \tau)\chi(\tau, s)d\tau f(s, u(s), v(s))ds,$$

тогда состояние системы (1) в момент t согласно (6), (7) определяем формулой

$$x(\theta, t) = x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \int_s^{\theta} X(\theta, \tau)\chi(\tau, s)d\tau f(s, u(s), v(s))ds,$$

т.е. полагаем, что после момента t $f(t, u(t), v(t)) \equiv 0$.

2. Игра будет рассматриваться на отрезке $[0, \theta]$ и плата γ будет изображаться равенством

$$\gamma = \|x(\theta)\|, \quad (8)$$

где $\|\bullet\|$ – символ нормы в евклидовом пространстве. Программный максимум [1] записывается в следующей форме, согласно (8):

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} \{l'x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \min_{u \in U} \max_{v \in V} [(l'X(\theta, \tau))\chi(\tau, s)] f(s, u(s)) ds\}. \quad (9)$$

Отметим, что здесь $l'_0 X(\theta, t)$ – решение дифференциальной системы $\dot{\alpha} = -A(t)\alpha$ с краевым условием l_0 , где l_0 – решение задачи (9) [1]; обозначим $l'_0 X(\theta, t) = \alpha^e(t)$, штрих означает транспонирование. Далее обозначим $x^e(t) = \int_t^{\theta} \alpha^e(\tau)\chi(\tau, t)d\tau$, тогда (9) переписывается в следующей

форме:

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} \{l'x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \min_{u \in U} \max_{v \in V} x^e(s) f(s, u(s), v(s)) ds\}.$$

Пусть t_0 – начало процесса управления, $t_0 \in [0, \theta]$.

Определение 2.1. Позицией игры называется пара $p = \{t, x(\theta, t)\}$ в каждый момент t прицеливания, $p_0 = \{t_0, x(\theta, t_0)\}$ – начальная позиция.

Определение 2.2. Допустимой стратегией первого (второго игрока) называется правило, по которому каждой реализовавшейся позиции $p = \{t, x(\theta, t)\}, t \in [t_0, \theta]$ ставится в соответствие ограниченное, замкнутое, полунепрерывное сверху по включению при изменении t и x множество $U(t, x) \subset U(V(t, x) \subset V)$, эти множества также называются стратегиями.

Аналогично [1, с. 83] можно сформулировать три игровые задачи наведения.

Задача 2.1. Среди допустимых стратегий $U(t, x)$ первого игрока требуется найти оптимальную минимаксную (экстремальную) стратегию $U^e(t, x)$, которая удовлетворяет условию $\|x(\theta)\| \leq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$ при любой допустимой стратегии второго игрока.

Задача 2.2. Среди допустимых стратегий $V(t, x)$ второго игрока найти оптимальную максиминную (экстремальную) стратегию $V^e(t, x)$, которое удовлетворяет условию $\|x(\theta)\| \geq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$ при любой допустимой стратегии первого игрока.

Задача 2.3. Среди допустимых стратегий $U(t, x)$ и $V(t, x)$ требуется найти пару оптимальных (экстремальных) стратегий $U^e(t, x)$ и $V^e(t, x)$, которые определяют седловую точку игры $\|x(\theta)\| = \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$.

Определим экстремальные стратегии обоих игроков.

Для того, чтобы рассматриваемые задачи решались в чистых стратегиях, будем предполагать, что функция $f(t, u(t), v(t))$ удовлетворяет условию седловой точки в «маленькой игре» [2] на $[0, \theta]$ $\min_{u \in U} \max_{v \in V} l'f(t, u, v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} l'f(t, u, v)$, l – произвольный n -мерный вектор.

Определение 2.3. Пусть n -мерный вектор l_0 в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$, $t_0 \in [0, \theta)$ доставляет наибольшее значение правой части (9), тогда, если позиция $p = \{t, x(\theta, t)\}$ такова, что $\varepsilon_0(t, x(\theta, t)) > 0$, то с этой позиции будем сопоставлять множество всех векторов $U^e(t, x(\theta, t)) \subset U(V^e(t, x(\theta, t)) \subset V)$, которые удовлетворяют условию

$$x^e(t) f(t, u^e(t), v^e(t)) = \min_{u \in U} x^e(t) f(t, u, v^e(t)), (x^e(t) f(t, u^e(t), v^e(t)) = \max_{v \in V} x^e(t) f(t, u^e(t), v)).$$

В работе рассматривается регулярный случай, т.е. в (9) наибольшее значение достигается на единственном векторе l_0 .

Теорема 2.1. В регулярном случае, при выборе первым игроком своей экстремальной стратегии $V^e = V^e(t, x(\theta, t), t \in [t_0, \theta], t \in [0, \theta])$, ему будет гарантирован результат игры $\|x(\theta)\| \leq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$ при любом допустимом способе управления второго игрока.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon(t, x(\theta, t)) = I'_0 x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \max_{v \in V} x^e(s) f(s, u^e(s), v(s)) ds + \int_t^\theta x^e(s) f(s, u^e(s), v(s)) ds. \quad (10)$$

Здесь $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)) = \|x(\theta)\|$ в случае, когда первый игрок применяет свою экстремальную стратегию, а второй произвольную допустимую; $\varepsilon(\theta, x(\theta, \theta))$ – значение программного максимина (9). Вычисляем в (10) производную

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \max_{v \in V} x^e(t) f(t, u^e(t), v) - x^e(t) f(t, u^e(t), v(t)) \geq 0,$$

и, таким образом, при замене в (10) произвольной стратегии второго игрока на экстремальную, значение $\varepsilon(t, x(\theta, t))$ может только увеличиться, отсюда $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)) \leq \varepsilon(t_0, x(\theta, \theta)) = \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$.

Теорема доказана.

Теорема 2.2. В регулярном случае, при выборе вторым игроком своей экстремальной стратегии $V^e = V^e(t, x(\theta, t), t \in [t_0, \theta], t \in [0, \theta])$, ему будет гарантирован результат игры $\|x(\theta)\| \geq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$ при любом допустимом способе управления первого игрока.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon(t, x(\theta, t)) = I_0 x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \min_{u \in U} x^e(s) f(s, u(s), v^e(s)) ds + \int_t^\theta x^e(s) f(s, u(s), v^e(s)) ds. \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) = \|x(\theta)\|$ – в случае, когда второй игрок применяет свою стратегию, а первый произвольную допустимую; $\varepsilon(\theta, x(\theta, \theta))$ – значение программного максимина (9). Вычисляем в (11) производную

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \min_{u \in U} x^e(t) f(t, u, v^e(t)) - x^e(t) f(t, u(t), v^e(t)) \leq 0,$$

и, таким образом, при замене в (11) произвольной допустимой стратегии первого игрока на экстремальную значение $\varepsilon(\theta, x(\theta, t))$ может только уменьшаться, тогда $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)) \geq \varepsilon(t_0, x(\theta, \theta)) = \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$.

Теорема доказана.

Прямым следствием теорем 2.1 и 2.2 является теорема о седловой точке игры.

Теорема 2.3. Если в регулярном случае игры функция $f(t, u, v)$ удовлетворяет условию седловой точки, то экстремальные стратегии игроков $U^e(t, x(\theta, t))$ и $V^e(t, x(\theta, t), t \in [t_0, \theta], t \in [0, \theta])$ доставляют седловую точку игры, причем $\|x(\theta)\| = \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$.

Пример. Пусть движение объекта описывается скалярным уравнением,

$$\dot{z}(t) = e^t + \int_0^t z(s) ds + \int_0^t [u^2(s) + (-v^2(s))] ds, z(0) = 1.$$

Здесь $\varphi(t) = e^t$, $K(t, s) = 1$, $B(t, s) = 1$, $A(t) = 0$, $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, $f(t, u(t), v(t)) = u^2(t) + (-v^2(t))$. Соответствующая однородная дифференциальная система имеет вид $\dot{z} = 0$, в качестве фундаментальной матрицы выбираем $Z(t) = 1$, матрица Коши имеет вид $Z(t, s) = Z(t)Z^{-1}(s) = 1$, $Z(t, 0) = 1$.

Функция $f(t, u, v) = [u^2(t) + (-v^2(t))]$ имеет седловую точку $u = 0, v = 0$; $\min_{u \in U} \max_{v \in V} f = \max_{v \in V} \min_{u \in U} f = 0$. Вычисляем матрицу

$$\Phi(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) X(\tau, s) d\tau = \int_s^t d\tau = t - s, \Phi(t, 0) = t,$$

резольвента этой матрицы определяется формулой $R(t, s) = \text{sh}(t - s)$ [9, с. 22], тогда

$$\psi(t, s) = 1 + \int_s^t \operatorname{sh}(t - \tau) d\tau = (1 - \operatorname{ch}(t - \tau)) \Big|_{\tau=s}^{\tau=t} = \operatorname{ch}(t - s).$$

Отсюда $\chi(t, s) = \operatorname{ch}(t - s)$, далее записываем $z(t)$,

$$z(t) = 1 + \int_0^1 \operatorname{ch} s ds + \int_0^t \left[\int_s^t \operatorname{ch}(\tau - s) d\tau \right] e^s ds + \int_0^t \left[\int_s^t \operatorname{ch}(\tau - s) d\tau \right] [u^2(s) + (-v^2(s))] ds.$$

Вычисляем интегралы $\int_s^t \operatorname{ch} s ds + \operatorname{sh} s \Big|_0^t = \operatorname{sh} t$,

$$\begin{aligned} \int_s^t \operatorname{ch}(\tau - s) d\tau &= \operatorname{sh}(\tau - s) \Big|_{\tau=s}^{\tau=t} = \operatorname{sh}(t - s), \int_0^t \operatorname{sh}(t - s) e^s ds = \int_0^t \frac{e^{t-s} - e^{-t+s}}{2} e^s ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (e^t - e^{-t+2s}) ds = \frac{1}{2} \left(e^t s \Big|_{s=0}^{s=t} - \frac{1}{2} e^{-t+2s} \Big|_{s=0}^{s=t} \right) = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} = \frac{1}{2} t e^t - \operatorname{sh} t, \end{aligned}$$

тогда

$$z(t) = 1 + \operatorname{sh} t + \frac{1}{2} t e^t - \operatorname{sh} t + \int_0^t \operatorname{sh}(t - s) [u^2(s) + (-v^2(s))] ds, \quad (12)$$

или $z(t) = 1 + \frac{1}{2} t e^t + \int_0^t \operatorname{sh}(t - s) [u^2(s) + (-v^2(s))] ds$, здесь $z(0) = 1$, обозначим

$$z(\theta, t_0) = 1 + \frac{1}{2} \theta e^{\theta} + \int_0^{t_0} \operatorname{sh}(\theta - s) [u^2(s) + (-v^2(s))] ds,$$

это позиция игры, далее определяем программный максимум:

$$\varepsilon_0(t_0, z(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} \{ l' z(\theta, t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \min_{u \in U} \max_{v \in V} l' \operatorname{sh}(\theta - t) [u^2(t) + (-v^2(t))] dt \}.$$

Теперь рассматривается система двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e^t + \int_0^t x(s) ds + \int_0^t [u^2(s) + (-v^2(s))] ds, x(0) = 1, \\ \dot{y}(t) = e^t + \int_0^t y(s) ds + \int_0^t [u^2(s) + (-v^2(s))] ds, y(0) = 1. \end{cases}$$

Из формулы (12) получаем начальное положение системы – точку (1,1), экстремальный вектор t_0 направлен по прямой $y = x$ от начала координат, движение осуществляется от точки (1,1) к началу координат прямой $y = x$, что иллюстрирует доказанные теоремы.

3. Пусть теперь динамика объекта описывается интегральным векторным уравнением Вольтерра

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^t A(t, s) x(s) ds + \int_0^t B(t, s) f(s, u(s), v(s)) ds. \quad (13)$$

Здесь x – n -мерный вектор; $A(t, s)$ – матрица $n \times n$, $B(t, s)$ – матрица $n \times r$, непрерывно дифференцируемые по первому аргументу и непрерывные по второму при $0 \leq s \leq t \leq \theta$; $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывная на $[0, \theta]$ функция; $f(t, u, v)$ – n -мерная вектор-функция, непрерывная при каждом $t \in [0, \theta]$ по совокупности переменных u, v , а при фиксированных u, v функция измерима по t , интегралы понимаются в смысле Лебега.

Согласно [10] состояние системы (13) в момент $t \in [0, \theta]$ определяется формулой

$$x(t) = \Phi(t, 0) \varphi(0) + \int_0^t \Phi(t, s) d\varphi(s) + \int_0^{t_0} X(t, s) f(s, u[s], v[s]) ds + \int_{t_0}^t X(t, s) f(s, u(s), v(s)) ds. \quad (14)$$

Здесь $u[t], v[t]$ – реализация допустимых управлений на $[0, t_0]$; $u(t), v(t)$ – пока не определенные управления при $t > t_0$ после момента t полагаем $u \equiv 0, v \equiv 0$.

В (14), аналогично [10],

$$\Phi(t, s) = E + \int_s^t R(t, \tau) d\tau, \quad \Phi(\theta, t) = E + \int_t^\theta \Phi(\theta, s) * A(s, t) ds, \quad *A(s, t) = A(s, s) + \int_t^s \frac{\partial A(s, \sigma)}{\partial s} d\sigma,$$

E – единичная матрица, умножив теперь $\Phi(\theta, t)$ вектор l , получаем, как и в [10], интегральное уравнение

$$z(t) = l' + \int_t^\theta z(s) * A(s, t) ds, \quad z(t) = l' \Phi(\theta, t),$$

сопряженное с уравнением

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^t A(t, s) x(s) ds,$$

решая которое можно получить $z(t)$, причем $z(\theta) = l'$,

$$X(\theta, t) = \Phi(\theta, t) B(t, t) + \int_t^\theta \Phi(\theta, s) \frac{\partial B(s, t)}{\partial s} ds.$$

Записываем величину

$$x(\theta, t_0) = \Phi(\theta, 0) \varphi(0) + \int_0^\theta \Phi(\theta, s) d\varphi(s) + \int_0^{t_0} X(\theta, s) f(s, u[s], v[s]) ds.$$

Для системы (13) решаем задачи аналогичные (8)–(10). Позиция игры определяется аналогично, $p = \{t, x(\theta, t)\}$, $p_0 = \{t_0, x(\theta, t_0)\}$. В каждый момент прицеливания позиция является начальной.

Программный максимум для начальной позиции определяется равенством

$$\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} [l' x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^\theta \min_{u \in U} \max_{v \in V} \{l' X(\theta, s) f(s, u(s), v(s))\} ds]. \quad (15)$$

Обозначим $l'_0 X(\theta, t) = x^e(t)$, где l_0 – единственное решение задачи (15) в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$, $t_0 \in [0, \theta)$.

Определение 3.1. Пусть n -мерный вектор l_0 в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$, $t_0 \in [0, \theta)$ доставляет наибольшее значение правой части (15), тогда, если позиция игры $p_0 \{t, x(\theta, t_0)\}$ такова, что $\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) > 0$, то этой позиции поставим в соответствие множество

$$U^e(t_0, x(\theta, t_0)), (V^e(t_0, x(\theta, t_0))) \text{ всех векторов } u^e \in U (v^e \in V), \text{ которые удовлетворяют условию}$$

$$\max_{v \in V} x^e(t_0) f(t_0, u^e, v) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} x^e(t_0) f(t_0, u, v), (\min_{u \in U} x^e(t_0) f(t_0, u, v^e) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} x^e(t_0) f(t_0, u, v)).$$

Множества $U^e (V^e)$ называются экстремальными стратегиями первого (второго) игроков аналогично [1, 2] можно показать, что стратегии $U^e (V^e)$ допустимы.

По плану доказательств аналогичных теорем из [1, 2], а также теорем настоящей работы можно проверить справедливость следующих утверждений.

Теорема 3.1. В регулярном случае при выборе первым (вторым) игроком стратегии $U^e (V^e)$ ему будет гарантирован результат игры $\|x(\theta)\| \leq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) (\|x(\theta)\| \geq \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)))$ $U^e (V^e)$ при любой допустимой стратегии управления второго(первого) игрока.

Теорема 3.2. В регулярном случае, при выборе обоими игроками своих экстремальных стратегий U^e и V^e или будет гарантирован результат игр $\|x(\theta)\| = \varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0))$.

Литература

1. Красовский, Н.Н. Игровые задачи о встрече движений / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
2. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 287 с.
4. Осипов, Ю.С. Дифференциальные игры систем с последствием / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196, № 4. – С. 779–782.
5. Субботин, А.И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью / А.И. Субботин // ДАН СССР. – 1972. – Т. 206, № 3 – С. 211–213.
6. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – С. 224.
7. Ландо, Ю.К. Элементы математической теории управления движением: учебное пособие / Ю.К. Ландо. – М.: Просвещение, 1984. – 88 с.
8. Цалюк, З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. – М.: ВИНТИ, 1977. – Т. 15. – С. 199–266.
9. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
10. Пасиков, В.Л. Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтера / В.Л. Пасиков // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. XXII, № 5. – С. 907–909.

Поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 42–49*

GUIDANCE GAME PROBLEMS FOR LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEMS OF VOLTERRA TYPE WITH CONTROL ACTION UNDER THE INTEGRAL SIGN

V.L. Pasikov¹

The paper is focused on pursuit-evasion game situations for controlled dynamic objects, the development of which is described by linear integro-differential and integral systems of Volterra type with control action under the integral sign. As a result, the control system has new essential features that are not obtained by traditional controlled differential systems. The author formulates a new definition of game position, the calculation of which requires the total memory of control action in a moment of aiming. Well-known extreme constructions by an academician N.N. Krasovskiy modified by the author are used to solve these problems.

Keywords: integro-differential system; guidance problem; control action; program maximin; game position.

References

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Motion game problems). Moscow, Nauka Publ., 1970. 420 p. (in Russ.).
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Position differential games). Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p. (in Russ.).
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiia garantii v zadachakh upravleniia* (Guarantee optimization in control problems). Moscow, Nauka, 1981. 287 p. (in Russ.).
4. Osipov Yu.S. *DAN SSSR*. 1971. Vol. 196, no. 4. pp. 779–782. (in Russ.).
5. Subbotin A.I. *DAN SSSR*. 1972. Vol. 206, no. 3. pp. 211–213. (in Russ.).

¹ Pasikov Vladimir Leonidovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Natural and Mathematical Disciplines, Orsk branch of the Orenburg State Institute of Management.
E-mail: pasikov_fmfm@mail.ru

6. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential equations with diffuse right member). Moscow, Nauka Publ., 1985. 224 p. (in Russ.).

7. Lando Yu.K. *Elementy matematicheskoi teorii upravleniya dvizheniem: uchebnoe posobie* (Elements of a mathematical motion control theory: study guide). Moscow, Prosveshchenie Publ., 1984. 88 p. (in Russ.).

8. Tsaliuk Z.B. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskii analiz*. Moscow, VINITI Publ., 1977. Vol. 15. pp. 199–266.

9. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Integral'nye uravneniya. Zadachi i uprazhneniya* (Integral equations. Tasks and exercises). Moscow, Nauka Publ., 1976. 216 p. (in Russ.).

10. Pasikov V.L. *Differentsial'nye uravneniya*. 1986. Vol. 22. no. 5. pp. 907–909. (in Russ.).

Received 27 March 2014

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕКОТОРЫХ КРУЖЕВНЫХ УЗЛОВ¹

В.В. Таркаев², Е.А. Фоминых³

Находятся точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями.

Ключевые слова: кружевной узел; сложность.

1. Введение

Пусть M – компактное трехмерное многообразие с непустым краем. Напомним [1], что подполиэдр $P(M)$ называется спайном многообразия M , если многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $(M \times (0,1))$. Спайн P называется почти простым, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4 , называются истинными вершинами спайна P . Сложность $c(M)$ многообразия M определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

Табулирование трехмерных многообразий заданной сложности и получение точных значений сложности для больших классов многообразий дают естественный подход к проблеме их классификации. Задача вычисления сложности многообразий является весьма трудной. К настоящему времени точные значения сложности известны только для конечного числа табулированных многообразий [2, 3], для нескольких бесконечных семейств многообразий с краем [4–7] и замкнутых многообразий [8, 9]. Оценки сложности дополнительных пространств торических узлов получены в [10].

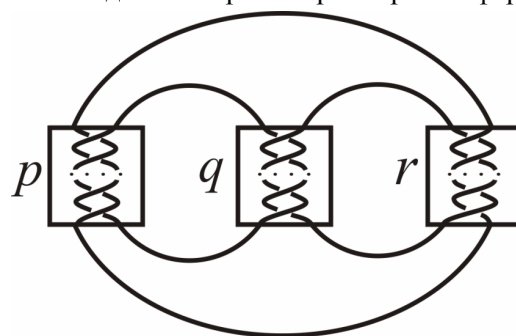
В работе находятся точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями.

2. Основной результат

Кружевное зацепление (*pretzel link*) с тремя нитями $K(p, q, r)$ (см. рисунок), лежащее в трехмерной сфере, определяется тройкой (p, q, r) целых ненулевых чисел. Зацепление $K(p, q, r)$ не изменится при любой перестановке чисел p, q, r местами. Поэтому можно считать, что $p \leq q \leq r$. Хорошо известно, что зацепление $K(p, q, r)$ является узлом тогда и только тогда, когда среди чисел p, q, r как минимум два нечетны.

Следующая теорема устанавливает точные значения и верхние оценки сложности дополнительных пространств некоторых кружевных узлов с тремя нитями вида $K(1, q, r)$. Здесь под дополнительным пространством узла понимается компактное подмногообразие трехмерной сферы S^3 , получающееся вырезанием из S^3 открытой трубчатой окрестности узла. Для каждой пары натуральных чисел q, r , где $q \leq r$, определим целое число $f(q, r)$ следующим образом:

$$f(q, r) = \begin{cases} 0, & \text{если } q = r = 1, \\ 2, & \text{если } q = 1, r = 2, \\ \lfloor r/2 \rfloor + 2, & \text{если } q = 1, r > 2, \\ \lfloor (q+r)/2 \rfloor + 3, & \text{если } q > 1, r \geq q. \end{cases}$$



Кружевное зацепление с тремя нитями

¹ Исследования были поддержаны грантом РФФИ 14-01-00441, грантом НШ-1015.2014.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом 12-Т-1-1003/2 ОМН РАН

² Таркаев Владимир Викторович – научный сотрудник, Челябинский государственный университет и Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: trk@csu.ru

³ Фоминых Евгений Анатольевич – старший научный сотрудник, Челябинский государственный университет и Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: fominykh@csu.ru

Теорема. Пусть $1 \leq q \leq r \leq 15$ и зацепление $K(1, q, r)$ является узлом. Тогда сложность $c(q, r)$ дополнительного пространства узла $K(1, q, r)$ удовлетворяет условию $c(q, r) \leq f(q, r)$. Более того, если $f(q, r) \leq 8$, то $c(q, r) = f(q, r)$.

3. Доказательство теоремы

Опираясь на метод, описанный в доказательстве предложения 2.1.11 из [1], строим почти специальный спайн $P(1, q, r)$ дополнительного пространства узла $K(1, q, r)$. При помощи преобразований из [1, параграф 7.2] упрощаем спайн $P(1, q, r)$ до тех пор пока это возможно. Число истинных вершин полученного почти простого спайна $Q(1, q, r)$ и дает нам искомую верхнюю оценку сложности $f(q, r)$ дополнительного пространства узла.

Поскольку узел $K(1, 1, 1)$ является трилистником, то сложность его дополнительного пространства равна 0 (см. [10]). Если спайн $Q(1, q, r)$ имеет не более 8 истинных вершин, то дополнительное пространство узла $K(1, q, r)$ содержится в списке многообразий из [11, 12], сложность которых известна.

Литература

1. Matveev, S. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds / S. Matveev // Algorithms and Computation in Mathematics: сб. науч. тр. – Springer, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2007. – Vol. 9. – 492 p.
2. Матвеев, С.В. Табулирование трехмерных многообразий / С.В. Матвеев // Успехи матем. наук. – 2005. – Т. 60, № 4. – С. 97–122.
3. Frigerio, R. Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Experimental Mathematics. – 2004. – Vol. 13, No. 2. – P. 171–184.
4. Anisov, S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds / S. Anisov // Moscow Math. J. – 2005. – Vol. 5, No. 2. – P. 305–310.
5. Frigerio, R. Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Pacific J. Math. – 2003. – Vol. 210, No. 2. – P. 283–297.
6. Веснин, А.Ю. Точные значения сложности многообразий Паолоцци–Циммермана / А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых // Докл. Акад. наук. – 2011. – Т. 439, № 6. – С. 727–729.
7. Веснин, А.Ю. О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем / А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 4. – С. 781–793.
8. Jaco, W. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2, No. 1. – P. 157–180.
9. Jaco, W. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // Algebraic & Geometric Topology. – 2011. – Vol. 11, No. 3. – P. 1257–1265.
10. Fominykh, E. Upper bounds for the complexity of torus knot complements / E. Fominykh, B. Wiest // Journal of Knot Theory and its Ramifications. – 2013. – Vol. 22, No. 10. (article number 1350053).
11. Callahan, P. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement / P. Callahan, M. Hildebrand, J. Weeks // Math. Comp. – 1999. – Vol. 68, No. 225. – P. 321–332.
12. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. – URL: <http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/>, (дата обращения: 11.03.2014).

Поступила в редакцию 6 июня 2014 г.

UPPER BOUNDS FOR THE COMPLEXITY OF SOME PRETZEL KNOTS COMPLEMENTS

V.V. Tarkaev¹, E.A. Fominykh²

Exact values and upper bounds for the complexity of some 3-strand pretzel knot complements are established.

Keywords: pretzel knot; complexity.

References

1. Matveev, S. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2007. Vol. 9. 492 p.
2. Matveev, S.V. *Russian Mathematical Surveys*. 2005. Vol. 60, no. 4. pp. 673–698. DOI: 10.4213/rm1446
3. Frigerio R., Martelli B., Petronio C. Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary. *Experimental Mathematics*. 2004. Vol. 13, No. 2. pp. 171–184.
4. Anisov S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds. *Moscow Math. J.* 2005. Vol. 5, No. 2. pp. 305–310.
5. Frigerio R., Martelli B., Petronio C. Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds. *Pacific J. Math.* 2003. Vol. 210, No. 2. pp. 283–297.
6. Vesnin A.Yu., Fominykh E.A. *Doklady Akademii nauk*. 2011. Vol. 439, no. 6. pp. 727–729. (in Russ.).
7. Vesnin A.Yu., Fominykh E.A. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*. 2012. Vol. 53, no. 4. pp. 781–793. (in Russ.).
8. Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces. *J. Topology*. 2009. Vol. 2, no. 1. pp. 157–180.
9. Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds. *Algebraic & Geometric Topology*. 2011. Vol. 11, no. 3. pp. 1257–1265.
10. Fominykh E., Wiest B. Upper bounds for the complexity of torus knot complements. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. 2013. Vol. 22, no. 10. (article number 1350053). DOI: 10.1142/S0218216513500533
11. Callahan P., Hildebrand M., Weeks J. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement. *Math. Comp.* 1999. Vol. 68, no. 225. pp. 321–332.
12. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. URL: <http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/> (date: 11.03.2014).

Received 6 June 2014

¹ Tarkaev Vladimir Viktorovich is Research Fellow, Chelyabinsk State University and Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg.

E-mail: trk@csu.ru

² Fominykh Evgeny Anatol'evich is Senior Staff Scientist, Chelyabinsk State University and Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg.

E-mail: fominykh@csu.ru

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

В.И. Ухоботов¹, И.В. Измestьев²

Построены оптимальные управления игроков в линейной дифференциальной игре с импульсным управлением.

Ключевые слова: дифференциальная игра; импульсное управление.

1. Введение

Задачи управления механическими системами переменного состава, в которых допускается мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью, сводятся к задачам с импульсным управлением [1, с. 85–87]. Наличие импульсных управлений может приводить к мгновенному изменению фазового состояния системы, поэтому при исследовании дифференциальных игр с импульсными управлениями возникают специфические особенности [2–6].

В данной статье рассмотрена игровая задача импульсной встречи, которая является модификацией игры «изотропные ракеты» [7, с. 139]. Преследователь управляет движением точки переменного состава, выбирая в каждый момент времени реактивную силу. В отдельные моменты времени конечное количество реактивной массы может отделяться с постоянной по величине скоростью. Убегающий движется с ограниченной по величине скоростью. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени сделать расстояние между собой и вторым игроком не больше одного заданного числа, но не меньше другого заданного числа. Это условие выделяет в фазовом пространстве игры терминальное множество, которое не является выпуклым. Цель второго игрока противоположна.

2. Постановка задачи

Первый игрок управляет движением точки переменного состава x в пространстве \mathbb{R}^n , выбирая в каждый момент времени реактивную силу [1]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad dx_2 = dU,$$

где U – управление первого игрока, которое является функцией с ограниченным изменением. Расход ресурсов, затраченных на формирование этого управления на произвольном отрезке $[t, \tau]$, задается формулой

$$\int_t^\tau \|dU(r)\| = \sup \sum \|U(r_{i+1}) - U(r_i)\|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям r_i отрезка $[t, \tau]$. В начальный момент времени t_0 зафиксирован запас ресурсов $\mu(t_0) \geq 0$, который не может быть перерасходован в процессе управления.

Второй игрок управляет движением точки, выбирая в каждый момент времени ее скорость, которая ограничена по величине заданным числом $b > 0$

$$\dot{y} = bv, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \leq 1.$$

Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени p осуществить неравенство $\varepsilon_1 \leq \|x(p) - y(p)\| \leq \varepsilon_2$. Здесь $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ – заданные числа. Цель второго игрока противоположна.

3. Формализация задачи

В переменных $z(t) = y(t) - x_1(t) - (p-t)x_2(t)$ рассматриваемая задача примет вид

$$dz = -(p-t)dU + bv, \quad \varepsilon_1 \leq \|z(p)\| \leq \varepsilon_2. \quad (1)$$

¹ Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет. E-mail: ukh@csu.ru

² Измestьев Игорь Вячеславович – аспирант кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет. E-mail: j748e8@gmail.com

Условие не перерасхода запаса ресурсов запишем в виде неравенства $\mu(t) = \mu(t_0) - \int_{t_0}^t \|dU(r)\| \geq 0$.

Управлением второго игрока является произвольная функция $v: (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению $\|v(t, z)\| \leq 1$.

Управлением первого игрока является функция вида $U(t, z) = \varphi(t)u(t, z)$, где $u: [t_0, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольная функция, удовлетворяющая равенству $\|u(t, z)\| = 1$. При выборе функции $\varphi(t)$ в отдельные моменты времени осуществляется её коррекция, которая проводится следующим образом. Первый игрок в начальный момент времени выбирает конечный набор моментов коррекций $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q < p$. В момент времени τ_i , зная реализовавшееся состояние $\|z(\tau_i)\|, \mu(\tau_i)$, он выбирает абсолютно-непрерывную, неубывающую и неотрицательную функцию $\varphi: [\tau_i, \tau_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int_{\tau_i}^t \dot{\varphi}(r) dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}. \quad (2)$$

Движение, порожденное выбранными управлениями на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, определим с помощью ломаных. Для этого зафиксируем разбиение:

$$\omega: \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}$$

с диаметром разбиения $d(\omega) = \max_{0 \leq j \leq k} (t^{(j+1)} - t^{(j)})$ и построим ломаную [6, с. 75]

$$z_\omega(t) = z_\omega(\tau_i) - (\Delta_i + \int_{\tau_i}^t (p-r)\dot{\varphi}(r)dr)u(\tau_i, z_\omega(\tau_i)) + b(t - \tau_i)v(\tau_i, z_\omega(\tau_i)), \quad \text{при } \tau_i < t \leq t^{(1)}$$

и

$$z_\omega(t) = z_\omega(t^{(j)}) - \int_{t^{(j)}}^t (p-r)\dot{\varphi}(r)dr u(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})) + b(t - t^{(j)})v(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})), \quad \text{при } t^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}. \quad (3)$$

Можно показать, что все ломаные $z_\omega(t)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [8, с. 236]. Под движением $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения $d(\omega_k) \rightarrow 0$.

4. Формулировка результатов

Определим для $t < p, \mu \geq 0$ следующие функции:

$$g(t, \mu) = \begin{cases} \varepsilon_1 - (\mu - b)(p - t), & \text{при } \mu < \xi(t), t_1 \leq t < p, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - (p - t) \left(\mu - b \ln \frac{p - t}{p - t_1} \right), & \text{при } \mu < \xi(t), t < t_1, \\ 0, & \text{при } \mu \geq \xi(t), \forall t, \end{cases}$$

$$G(t, \mu) = \begin{cases} \varepsilon_2 + (\mu - b)(p - t), & \text{при } t_1 \leq t < p, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + (p - t) \left(\mu - b \ln \frac{p - t}{p - t_1} \right), & \text{при } t_2 \leq t < t_1, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + (p - t)(\mu - c) - b(t_2 - t), & \text{при } t_3 \leq t < t_2, \\ (p - t) \left(\mu - c - b \ln \frac{p - t}{p - t_3} \right), & \text{при } t < t_3, \end{cases}$$

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{p-t} + b, & \text{при } t_1 \leq t < p, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2(p-t)} + b \ln \frac{p-t}{p-t_1}, & \text{при } t_c \leq t < t_1, \\ c, & \text{при } t < t_c, \end{cases} \quad M(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t_1 \leq t < p, \\ b \ln \frac{p-t}{p-t_1}, & \text{при } t_2 \leq t < t_1, \\ c, & \text{при } t_3 \leq t < t_2, \\ c + b \ln \frac{p-t}{p-t_3}, & \text{при } t < t_3. \end{cases}$$

Здесь $t_1 = p - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2b}$, $t_c = p - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2b}$, $t_2 = p - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2b}e$, $t_3 = p - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2b}(e+1)$, $c = b \left(1 + \ln \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right)$.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$. Покажем, что из любого начального состояния $(z(t_0), \mu(t_0))$ первый игрок сможет осуществить неравенства (1) тогда и только тогда, когда $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t)$, где

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : g(t, \mu) \leq \|z\| \leq G(t, \mu), \mu \geq M(t)\}. \quad (4)$$

5. Задача преследования

Обозначим

$$w(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } \|z\| > 0 \text{ и } w(z) = \forall w : \|w\| = 1 \text{ при } \|z\| = 0. \quad (5)$$

Теорема 5.1. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_1 \leq t_0 < p$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение неравенств (1) при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z_0\| > \varepsilon_2 - b(p - t_0)$. Первый игрок берет $u(t, z) = w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\phi(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$; $\Delta_0 = \frac{\|z_0\| - \varepsilon_2}{p - t_0} + b$.

Тогда, согласно (4), $\mu(p) = \mu(t_0) - \Delta_0 \geq 0$, т.е. верно условие (2). Далее, с помощью (5) и определения t_1 , можно показать, что для любой ломаной (3) выполнено неравенство

$$\varepsilon_1 \leq \|z_\omega(p)\| \leq \varepsilon_2. \quad (6)$$

Случай 2. Пусть $\varepsilon_1 + b(p - t_0) \leq \|z_0\| \leq \varepsilon_2 - b(p - t_0)$. Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $\Delta_0 = 0$ и $\phi(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$. Тогда $\mu(p) = \mu(t_0) \geq 0$ и для любой ломаной (3) выполнено неравенство (6).

Случай 3. Пусть $\|z_0\| < \varepsilon_1 + b(p - t_0)$. Первый игрок берет $u(t, z) = -w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\phi(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$; $\Delta_0 = \frac{\varepsilon_1 - \|z_0\|}{p - t_0} + b$.

Как и в случае 1 число Δ_0 удовлетворяет условию (2). Далее, с помощью (5) и определения t_1 , можно показать, что это управление обеспечивает неравенства (6).

Из (6) следует, что для любого движения $z(t)$ выполнено условие (1).

Лемма 5.1. Пусть заданы моменты времени $t_* < t^* < p$ такие, что $\|z(t_*)\| = \alpha \geq 0$ и $\mu(t_*) \geq b \ln \frac{p - t_*}{p - t^*} + \gamma$, где $\gamma \geq 0$, тогда на отрезке $[t_*, t^*]$ существует управление первого игрока,

которое обеспечивает выполнение условий $\|z(t^*)\| = \alpha$, $\mu(t^*) \geq \gamma$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\alpha = 0$. Доказательство следует из [6, с. 82–84].

Случай 2. Пусть $\alpha > 0$. Тогда первый игрок выбирает управление

$$u(t, z) = \begin{cases} w(z), & \text{при } \|z\| \geq \alpha, \\ -w(z), & \text{при } \|z\| < \alpha, \end{cases} \quad \phi(t) = b \ln \frac{p - t_*}{p - t} = b \int_{t_*}^t \frac{1}{p - r} dr. \quad (7)$$

Далее, возьмем разбиение $\Omega: t_* = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(m+1)} = t^*$ такое, что диаметр разбиения $d(\Omega) < \frac{\alpha}{2b}$, и покажем, что для каждой ломаной (3) выполнены неравенства

$$\alpha - 2bd(\Omega) \leq \|z_\Omega(t)\| \leq \alpha + 2bd(\Omega) \text{ при } t_* < t \leq t^*.$$

Из (5) и (7) следует, что для ломаной (3) выполнены соотношения

$$z_\Omega(t^{(1)}) = \alpha \frac{z(t_0)}{\|z(t_0)\|} - b(t^{(1)} - t^{(0)})(w(z(t_0)) - v(t_0, z(t_0))),$$

$$\alpha - 2b(t^{(1)} - t^{(0)}) \leq \|z_\Omega(t^{(1)})\| \leq \alpha \leq \alpha + 2b(t^{(1)} - t^{(0)}).$$

Поэтому, при $j=1$ верны неравенства

$$\alpha - 2b \max_{1 \leq k \leq j} (t^{(k)} - t^{(k-1)}) \leq \|z_\Omega(t^{(j)})\| \leq \alpha + 2b \max_{1 \leq k \leq j} (t^{(k)} - t^{(k-1)}). \quad (8)$$

Предположим, что они выполнены для некоторого $j \leq l$. Покажем, что эти неравенства выполнены и для $j+1$. Обозначим

$$\delta = 2b \max_{1 \leq k \leq j} (t^{(k)} - t^{(k-1)}).$$

Тогда (8) примет вид

$$\alpha - \delta \leq \|z(t_\Omega^{(j)})\| \leq \alpha + \delta.$$

Пусть $\|z_\Omega(t^{(j)})\| \geq \alpha$. Тогда из (3), (5) и (7) следует оценка

$$\alpha - \max\{\delta, 2b(t^{(j+1)} - t^{(j)})\} \leq \|z_\Omega(t^{(j+1)})\| \leq \alpha + \delta.$$

Пусть $\|z_\Omega(t^{(j)})\| < \alpha$. Тогда из (3), (5) и (7) следует оценка

$$\alpha - \delta \leq \|z_\Omega(t^{(j+1)})\| \leq \alpha + \max\{\delta, 2b(t^{(j+1)} - t^{(j)})\}.$$

Выполнен шаг индукции, следовательно, система неравенств (8) верна.

Заметим, что $\max_{0 \leq k \leq j} (t^{(k+1)} - t^{(k)}) \leq d(\Omega)$ при $j = 0, m$. Следовательно, при $d(\Omega) \rightarrow 0$ получим,

что для любого движения $z(t)$ при $t_* < t \leq t^*$ будет выполнено равенство $\|z(t)\| = \alpha$.

Неравенство $\mu(t^*) \geq \gamma$ следует из определения функции $\varphi(t)$ в (7).

Теорема 5.2. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_2 \leq t_0 < t_1$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_1), \mu(t_1)) \in W(t_1)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z(t_0)\| \geq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$. Первый игрок берет $u(t, z) = w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\Delta_0 = \frac{2\|z_0\| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(p - t_0)}$.

Случай 2. Пусть $\|z(t_0)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Случай 2.1. Пусть $t_c \leq t_0$. Первый игрок берет $u(t, z) = -w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и

$$\Delta_0 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 2\|z(t_0)\|}{2(p - t_0)}.$$

Для случаев 1 и 2.1, согласно (3)–(5), имеем

$$\|z(t_0 + 0)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \mu(t_0 + 0) = \mu_0 - \Delta_0 \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{b}{p - r} dr.$$

Из леммы 5.1 получим, что для состояния $t_0, z(t_0 + 0), \mu(t_0 + 0)$ существует управление первого игрока такое, что оно обеспечивает выполнение равенства $\|z(t_1)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ при любом управлении второго игрока.

Случай 2.2. Пусть $t_0 < t_c$. Первый игрок берет $u(t, z) = \forall w: \|w\| = 1, \tau_0 = t_0$ и $\Delta_0 = 0$.

Если $\|z(t)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ при всех $t \in [t_0, t_c)$, то, принимая t_c за начальный момент времени, переходим к случаю 2.1.

Если существует $\tilde{t} \in [t_0, t_1)$ такой, что $\|z(\tilde{t})\| \geq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ и $\|z(t)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ при всех $t \in [t_0, \tilde{t})$, то, принимая \tilde{t} за начальный момент времени, переходим к случаю 1.

В заключение заметим, что выполнена система неравенств

$$g(t_1, \mu(t_1)) = \max \left\{ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \mu(t_1)(p - t_1), 0 \right\} \leq \|z(t_1)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \mu(t_1)(p - t_1) = G(t_1, \mu(t_1)).$$

Отсюда имеем заявленное включение $(z(t_1), \mu(t_1)) \in W(t_1)$.

Теорема 5.3. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_3 \leq t_0 < t_2$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_2), \mu(t_2)) \in W(t_2)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.1 из работы [6, с. 76] при $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Теорема 5.4. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_0 < t_3$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_3), \mu(t_3)) \in W(t_3)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.5 из работы [6, с. 82].

6. Задача убегания

Лемма 6.1. Управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает при любом управлении первого игрока для любого движения $z(t)$ и для любых моментов времени $t_* < t^* \leq p$ выполнение неравенства

$$\|z(t^*)\| \geq \|z(t_*)\| - (\mu(t_*) - \mu(t^*))(p - t_*) + b(t^* - t_*). \quad (9)$$

Доказательство следует из [6, с. 78–79].

Лемма 6.2. Пусть $t_* < t^* \leq p$ и $\|z(t_*)\| < g(t_*, \mu(t_*))$, тогда управление второго игрока $v(t, z) = -w(z)$ обеспечивает при любом управлении первого игрока для любого движения $z(t)$ выполнение неравенства $\|z(t^*)\| < g(t^*, \mu(t^*))$.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $t_*, t^* \in [t_1, p]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[t_*, t^*]$ ω с моментами коррекции первого игрока τ_i . Покажем, что, если в некоторый момент времени τ_l выполнено неравенство

$$\|z(\tau_l)\| < g(\tau_l, \mu(\tau_l)), \quad (10)$$

то при любом $0 \leq \Delta \leq \mu(\tau_l)$ выполнено неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta). \quad (11)$$

Из уравнения ломаной (3) следует неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < \|z(\tau_l)\| + \Delta(p - \tau_l). \quad (12)$$

Из (10) и (12), учитывая (4), имеем неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < \varepsilon_1 - \mu(\tau_l)(p - \tau_l) + b(p - \tau_l) + \Delta(p - \tau_l) = \varepsilon_1 - (\mu(\tau_l) - \Delta)(p - \tau_l) = g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta).$$

Затем на $(\tau_l, \tau_{l+1}]$ зафиксируем произвольную непрерывную функцию $\mu(t)$, которая удовлетворяет условию (2) на данном множестве. Далее, доказательство следует из [9, с. 115].

Случай 2. Пусть $t_*, t^* \in (t_c, t_1]$. Покажем, что из (10) следует (11). В самом деле, из (10) и (12), учитывая (4), получим неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - (p - \tau_l) \left(\mu - b \ln \frac{p - \tau_l}{p - t_1} \right) + \Delta(p - \tau_l) = g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta).$$

Дальнейшее доказательство проводится по аналогии со случаем 1.

Теорема 6.1. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_1 \leq t_0 < p$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$.

1) Если

$$\|z(t_0)\| > G(t_0, \mu(t_0)) = \varepsilon_2 + (\mu(t_0) - b)(p - t_0), \quad (13)$$

тогда управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| > \varepsilon_2$ при любом управлении первого игрока.

2) Если

$$\|z(t_0)\| < g(t_0, \mu(t_0)) = \varepsilon_1 - (\mu(t_0) - b)(p - t_0), \quad (14)$$

тогда управление второго игрока $v(t, z) = -w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| < \varepsilon_1$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство. 1) Из (9) при $t_* = t_0, t^* = p$ следует, что

$$\|z(p)\| \geq \|z(t_0)\| - (\mu(t_0) - \mu(p))(p - t_0) + b(p - t_0).$$

Из этого неравенства и неравенства (13) получим $\|z(p)\| > \varepsilon_2 + \mu(p)(p - t_0) \geq \varepsilon_2$.

2) Из леммы 6.2 при $t_* = t_0, t^* = p$ и (14) следует, что $\|z(p)\| < \varepsilon_1$.

Теорема 6.2. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_2 \leq t_0 < t_1$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$, тогда существует управление второго игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_1), \mu(t_1)) \notin W(t_1)$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z(t_0)\| > G(t_0, \mu(t_0))$, тогда второй игрок выбирает управление $v(t, z) = w(z)$. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.3 из работы [6, с. 80].

Случай 2. Пусть $\|z(t_0)\| < g(t_0, \mu(t_0))$, тогда второй игрок выбирает управление $v(t, z) = -w(z)$. Отсюда и из леммы 6.2 при $t_* = t_0, t^* = t_1$ следует, что $\|z(t_1)\| < g(t_1, \mu(t_1))$.

Теорема 6.3. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_3 \leq t_0 < t_2$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$, тогда управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает выполнение включения $(z(t_2), \mu(t_2)) \notin W(t_2)$ при любом управлении первого игрока. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.2 из работы [6, стр. 79] при $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Теорема 6.4. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_0 < t_3$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$, тогда управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает выполнение включения $(z(t_3), \mu(t_3)) \notin W(t_3)$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.3. из работы [6, с. 80].

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
2. Красовский, Н.Н. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы / Н.Н. Красовский // Прикл. матем. и мех. – 1968. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 177–184.

3. Пожарицкий, Г.К. Импульсное преследование в случае однотипных объектов второго порядка / Г.К. Пожарицкий // Прикл. матем. и мех. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5. – С. 897–907.

4. Субботина, Н.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков / Н.Н. Субботина, А.Н. Субботин // Прикл. матем. и мех. – 1975. – Т. 39. – Вып. 3. – С. 397–406.

5. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей / Н.Н. Петров // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 2. – С. 38–44.

6. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – 124 с.

7. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 479 с.

8. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

9. Ухоботов, В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца / В.И. Ухоботов // Некоторые задачи динамики и управления: сб. научных трудов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – С. 108–123.

Поступила в редакцию 25 июня 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 53–59

ON A GAME OF IMPULSE MEETING WITH A TERMINAL SET IN THE FORM OF A RING

V.I. Ukhobotov¹, I.V. Izmestyev²

Optimum controls for players in a linear differential game with pulse control have been found.

Keywords: differential game; pulse control.

References

1. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (The Theory of Motion Control). Moscow, Nauka Publ., 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1968. Vol. 32. Issue 2. pp. 177–184. (in Russ.).

3. Pozharitskiy G.K. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1966. Vol. 30. Issue 5. pp. 897–907. (in Russ.).

4. Subbotina N.N., Subbotin A.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1975. Vol. 39. Issue 3. pp. 397–406. (in Russ.).

5. Petrov, N.N. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2009. no. 2. pp. 38–44. (in Russ.).

6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide). Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ.. 2005. 124 p. (in Russ.).

7. Ajzeks R. *Differentsial'nye igry* (Differential Games). Moscow, Mir, 1967. 479 p. (in Russ.). [Isaacs R. *Differential Games*. John Wiley and Sons, 1965.]

8. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. *Jelementy funkcional'nogo analiza* (Elements of functional analysis). Moscow, Nauka Publ., 1965. 520 p. (in Russ.).

9. Ukhobotov V.I. *Odnotipnaya differentsial'naya igra s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa* (One-type differential game with a terminal set in the form a ring). *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya: sb. nauchnykh trudov*. (Some dynamic and control problems: collection of research papers) Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ.. 2005. pp. 108–123.

Received 25 June 2014

¹ Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University. E-mail: ukh@csu.ru

² Izmestyev Igor Vyacheslavovich is Post-graduate Student, Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University. E-mail: j748e8@gmail.com

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ КЕРАМИКИ В ИЗДЕЛИЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ¹

О.А. Кудрявцев², С.Б. Сапожников³

Предложен способ косвенной оценки прочности конструкционной технической керамики в готовых изделиях сложной формы. Способ предполагает проведение испытаний изделий на сжатие вплоть до разрушения в комплексе с анализом напряженного состояния в опасной точке, статистической обработкой данных и исследованием микроструктуры с помощью СЭМ.

Ключевые слова: техническая керамика; предел прочности при растяжении; дискретные керамические элементы; напряженное состояние.

Введение

Оценка упругих и прочностных свойств конструкционных материалов проводится, как правило, с помощью испытаний стандартных образцов при одноосном растяжении. Для технической керамики этот метод неприемлем из-за трудности обеспечения равномерности распределения напряжений и устранения их концентрации в местах закрепления образцов, что, в свою очередь, приводит к невозможности обеспечения объективной оценки.

В настоящее время в России не существует стандартов, регламентирующих методику определения такого важного параметра конструкционной технической керамики, как предел прочности при растяжении. Часто приходится использовать указания стандартов [1–5], разработанных для других материалов, имеющих сходные механизмы разрушения. Общепринятыми считаются испытания образцов технической конструкционной керамики прямоугольного поперечного сечения в условиях трехточечного или четырехточечного изгиба [6, 7, 8–10]. В работе [7] можно найти описание других типов образцов, например, кольцевых для испытаний на растяжение при действии внутреннего давления или со сложными галтельными переходами (прямых по терминологии автора) для испытаний на растяжение.

Полученные значения предела прочности могут сильно колебаться в зависимости от принятой методики испытаний. Так метод четырехточечного нагружения при изгибе дает значения прочности на 10–15 % меньше, чем трехточечный [8]. Уменьшение толщины и размеров испытуемых образцов, шлифовка, полировка, химическая обработка их поверхности приводят к увеличению прочности за счет минимизации поверхностных дефектов.

Следует отметить, что паспортизация свойств керамических изделий с помощью партии образцов редко дает объективную информацию; зачастую свойства образцов и готовых керамических изделий сильно расходятся [11]. Образцы изготавливаются в других пресс-формах, могут иметь отличающуюся микроструктуру по ряду технологических причин. Поэтому необходимо уметь определять механические свойства готовых изделий.

Однако без изучения микроструктуры нельзя сделать окончательный вывод о качестве керамики, так как количество предоставляемых заказчиком изделий по причине их высокой стоимости обычно невелико (1–10 шт). Ниже предложен способ определения предела прочности при



Рис. 1. Виды дискретных керамических элементов

¹ Исследование выполнено в Южно-Уральском государственном университете (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00327).

² Кудрявцев Олег Александрович – аспирант, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: kudryavtsevoa.susu@gmail.com

³ Сапожников Сергей Борисович – профессор, доктор технических наук, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: ssb@susu.ac.ru, sbsapozhnikov@mail.ru

растяжении для дискретных керамических элементов (ДКЭ) (рис. 1), широко используемых в настоящее время в средствах защиты; представлены данные о микроструктуре и её влиянии на прочность.

Определение предела прочности изделий

Керамика является хрупким материалом и для нее, очевидно, справедлив критерий наибольшего растягивающего напряжения (I теория прочности), следовательно, можно рассчитать напряженное состояние образца при разрушающей нагрузке и определить максимальное первое главное напряжение, которое можно с высокой вероятностью считать пределом прочности на растяжение представленной керамики. Этот метод является приближенным, так как в опасной точке действует сложное напряженное состояние, но это вполне допустимо, учитывая наличие стандарта [4] на испытания хрупких углеграфитовых материалов на растяжение-раскол (рис. 2). Отмеченный стандарт предполагает сжатие дисков постоянной толщины t и диаметром d . Наибольшие растягивающие напряжения имеют место в центре диска, при этом сжимающие напряжения в этом же месте в три раза превосходят растягивающие. По этому стандарту предел прочности на растяжение хрупких материалов можно определить по зависимости

$$\sigma_{вр} = 0,636 P_{разр} / d \cdot t. \quad (1)$$

Однако ДКЭ редко имеют плоские торцовые поверхности и не соответствуют требуемой по стандарту [4] форме, что не позволяет использовать рекомендованные аналитические зависимости для вычисления напряжений. Предел прочности данных изделий при растяжении можно определить из испытаний на сжатие до разрушения в совокупности с анализом напряженно-деформированного состояния методом конечных элементов (МКЭ).

Для определения предела прочности проводили испытания образцов (см. рис. 1) на сжатие до разрушения с целью определения величины разрушающей нагрузки. Возможные схемы испытаний представлены на рис. 3.

Схему *a* использовать не рационально, так как при таком нагружении шестигранных элементов в разломе явно прослеживаются две ярко выраженные зоны разрушения: около рёбер (1) и в центре (2) пеллета (рис. 4). В связи с этим нельзя выявить преобладающий механизм разрушения. При испытаниях по второй схеме такой проблемы не возникло (рис. 5), поверхность разрушения была однородной. Нагружение проводили через пластины из мягкой стали, которые позволяют за счет развития зоны контакта исключить влияние контактных напряжений на механизм и нагрузку разрушения и избежать порчи плит испытательной машины.

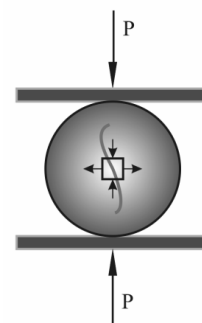


Рис. 2. Испытания углеграфитовых дисков на раскол

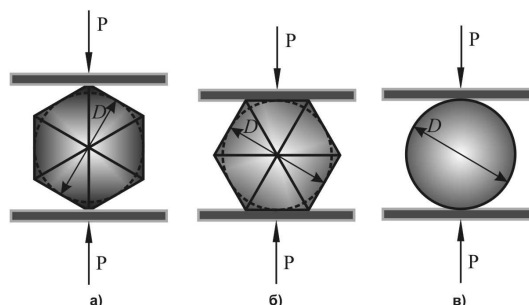


Рис. 3. Схемы испытаний различных видов ДКЭ

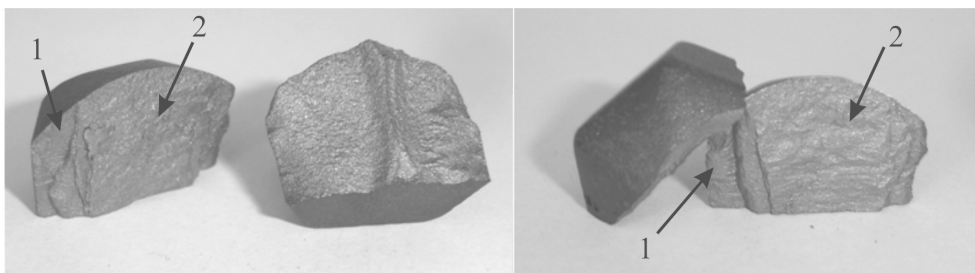


Рис. 4. Образцы после разрушения при испытании по схеме 3, а

Напряженное состояние изучали методом конечных элементов (пакет ANSYS) на основе трехмерной модели, построенной в пакете SolidWorks. Пример такого расчета для ДКЭ, показанного на рис. 3, в (рассматривается 1/8 часть ввиду симметрии), представлен на рис. 6.

На поверхности пеллета в точке с максимальными растягивающими напряжениями

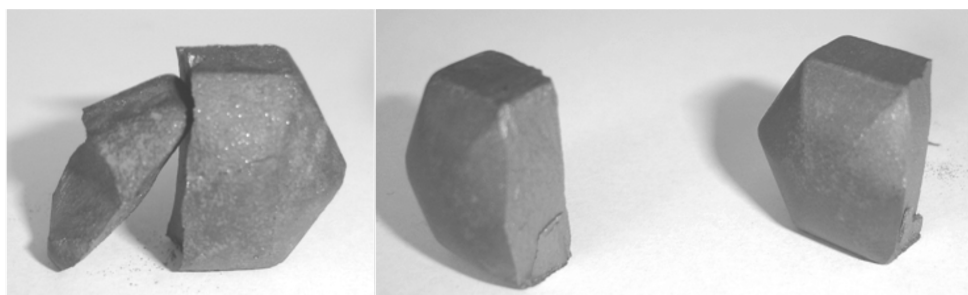


Рис. 5. Образцы после разрушения при испытании по схеме 3, б

(195 МПа) действуют сжимающие напряжения (338 МПа). Соотношение напряжений составляет 1/1,73. Поскольку прочность керамики при сжатии многократно превышает прочность при растяжении, величину наибольшего растягивающего напряжения с достаточной для инженерных приложений точностью можно считать пределом прочности при растяжении.

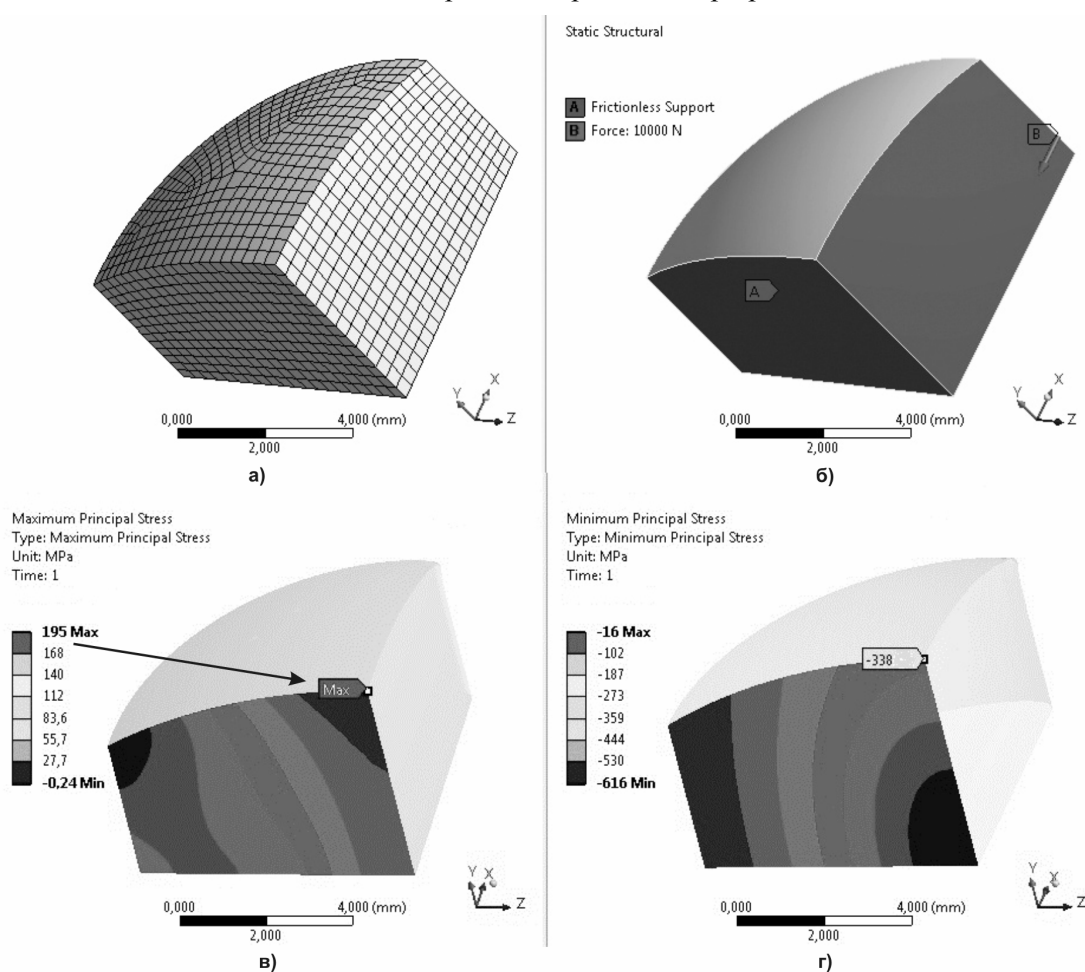


Рис. 6. Расчет напряженного состояния в ДКЭ (рис. 3, в) при сжатии: а) сетка конечных элементов; б) граничные условия и нагрузка; в) распределение первых главных напряжений; г) распределение третьих главных напряжений

Микроструктурные исследования и статистическая обработка данных

Исследование микроструктуры позволяет сформировать окончательную оценку качества керамического изделия. Как правило, качественной прочной керамике свойственны: низкая пористость, отсутствие включений и низкопрочных фаз, мелкозернистость. В качестве примера можно привести исследование ДКЭ бочкообразной формы (рис. 3, в) из шихты оксида алюминия двух разных составов на сканирующем электронном микроскопе JEOL JEM-7500F (рис. 7).

Керамика №1 (рис. 7, а) имеет средний размер зерна на уровне 2–3 мкм, в то время как в керамике №2 (рис. 7, б) встречаются зерна больше 10 мкм, поры с размерами 4–5 мкм. Становится понятна значительная разница в прочности: для керамики № 1 среднее значение предела прочности при растяжении – 360 МПа, для керамики № 2 – 220 МПа.

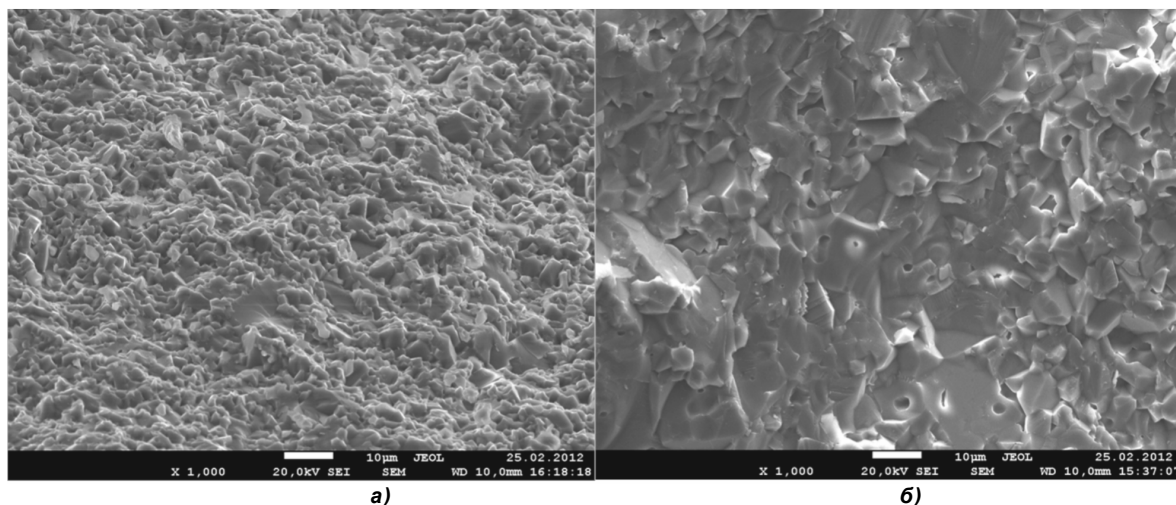


Рис. 7. Микроструктура исследуемой оксидной керамики:
а) – керамика из качественной шихты (№1); б) – керамика из шихты низкого качества (№2)

После испытаний была проведена статистическая обработка данных: проверена гипотеза о нормальности распределения параметра разрушающей нагрузки по критерию Колмогорова–Смирнова для малых выборок, определены коэффициент вариации и среднеквадратичное отклонение (С.К.О.), построены интегральные кривые вероятности. Это позволило объективно сравнить исследованные керамики (рис. 8).

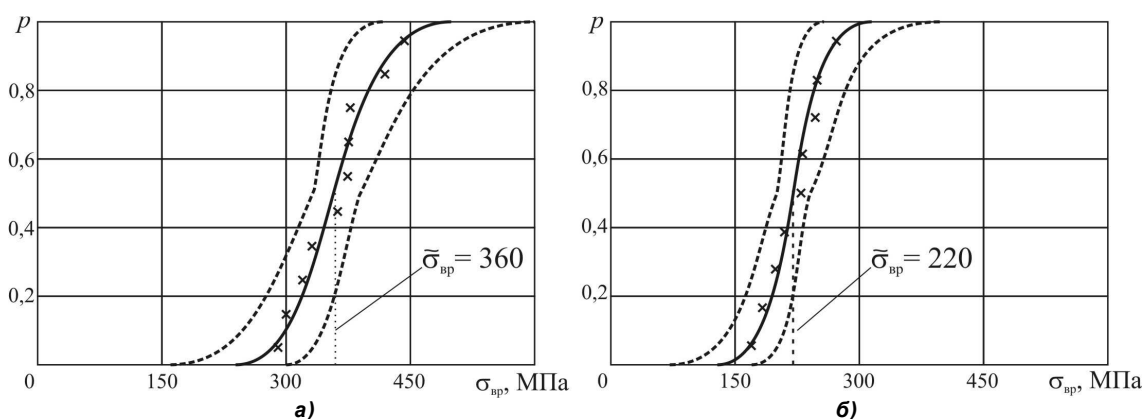


Рис. 8. Интегральные кривые вероятности с доверительными интервалами ($\alpha = 0,95$) для предела прочности материала ДКЭ: а) – керамика из качественной шихты (№1); б) – керамика из шихты низкого качества (№2)

Вывод

Предложен способ косвенной оценки прочности керамики в изделиях сложной формы на основании испытаний на сжатие до разрушения, анализа напряженного состояния, возникающего при квазистатическом нагружении численных моделей изделий усилиями разрушения, электроно-микроскопического исследования микроструктуры поверхности излома образцов и статистической обработки данных испытаний небольших по объему партий.

Литература

- ГОСТ 473.7-81. Изделия химически стойкие и термостойкие керамические. Метод определения предела прочности при разрыве. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 23 с.
- ГОСТ 473.8-81. Изделия химически стойкие и термостойкие керамические. Метод определения предела прочности при статическом изгибе. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 23 с.

3. ГОСТ 20019-74. Сплавы твердые спеченные. Метод определения предела прочности при поперечном изгибе. – М.: Изд-во стандартов, 1986. – 10 с.
4. ГОСТ 23775-79. Изделия углеродные. Методы определения предела прочности на сжатие, изгиб, разрыв (диаметральное растяжение). – М.: Изд-во стандартов, 2001. – 12 с.
5. ГОСТ 24409-80. Материалы электротехнические керамические. Методы испытаний. – М.: Изд-во стандартов, 2005. – 30 с.
6. Hazell, P.J. Ceramic armour: design and defeat mechanisms / P.J. Hazell. – Canberra: Argos Press, 2006. – 168 p.
7. Эванс, А.Г. Конструкционная керамика / А.Г. Эванс, Т.Г. Лэнгдон; пер. с англ. – М.: Металлургия, 1980. – 256 с.
8. Вакуумно-плотная керамика и её спаи с металлами / В.Н. Батыгин и др.; под ред. Н.Д. Девяткова. – М.: Энергия, 1973. – 408 с.
9. Basu, B. Advanced Structural Ceramics / B. Basu, K. Balani. – Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011. – 512 p.
10. Carter, C.V. Ceramic materials: science and engineering / C.V. Carter, M.G. Norton. – New York: Springer, 2007. – 716 p.
11. Керамика для машиностроения / А.П. Гаршин, В.М. Гропянов, Г.П. Зайцев, С.С. Семенов. – М.: Научтехлитиздат, 2003. – 384 с.

Поступила в редакцию 23 июня 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 60–65*

STRENGTH ASSESSMENT OF TECHNICAL CERAMICS IN GOODS OF IRREGULAR SHAPE

O.A. Kudryavtsev¹, S.B. Sapozhnikov²

The technique for strength assessment of structural technical ceramics in goods of irregular shape was developed. The technique suggests carrying out compression tests up to fracture together with stress analysis in critical point, statistical data manipulation, and the study of microstructure with the help of SEM.

Keywords: technical ceramics; ultimate tensile strength; discrete ceramic elements; stress condition.

References

1. GOST 473.7-81. *Izdeliya khimicheski stoykie i termostoykie keramicheskie. Metod opredeleniya predela prochnosti pri razryve.* (Chemically resistant and heat resistant and ceramic goods. Estimation method of ultimate tensile rupture strength.). Moscow, Izdatelstvo standartov Publ., 2002. 23 p. (in Russ.).
2. GOST 473.8-81. *Izdeliya khimicheski stoykie i termostoykie keramicheskie. Metod opredeleniya predela prochnosti pri staticheskom izgibe* (Chemically resistant and heat resistant and ceramic goods. Estimation method of ultimate tensile bending strength). Moscow, Izdatelstvo standartov Publ., 2002. 23 p. (in Russ.).
3. GOST 20019-74. *Splavy tverdye spechennye. Metod opredeleniya predela prochnosti pri poperechnom izgibe* (Solid sintered alloys. Estimation method of ultimate tensile transverse bending strength). Moscow, Izdatelstvo standartov Publ., 1986. 10 p. (in Russ.).
4. GOST 23775-79. *Izdeliya uglerodnye. Metody opredeleniya predela prochnosti na szhatie, izgib, razryv (diametral'noe rastyazhenie)* (Carbonic goods. Estimation method of ultimate tensile compres-

¹ Kudryavtsev Oleg Alexandrovich is Post-graduate Student, Applies Mechanics, Dynamic and Strength of Machines Department, South Ural State University.

² Sapozhnikov Sergei Borisovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Applies Mechanics, Dynamic and Strength of Machines Department, South Ural State University.

E-mail: ssb@susu.ac.ru, sbsapozhnikov@mail.ru

sive, bending, and rupture strength (diametrical extension)). Moscow, Izdatelstvo standartov Publ., 2001. 12 p. (in Russ.).

5. GOST 24409-80. *Materialy elektrotekhnicheskie keramicheskie. Metody ispytaniy.* (Electrical ceramic materials. Assessment methods.). Moscow, Izdatelstvo standartov Publ., 2005. 30 p. (in Russ.).

6. Hazell P.J. *Ceramic armour: design and defeat mechanisms.* Canberra, Argos Press, 2006. 168 p.

7. Evans A.G., Lengdon T.G. *Konstruktsionnaya keramika* (Constructional ceramics). Moscow, Metallurgiya Publ., 1980. 256 p. (in Russ.). [Evans A.G., Langdon T.G. *Structural ceramics.* New York, Pergamon press, 1976. 271 p.]

8. Batygin V.N. *et al. Vakuumno-plotnaya keramika i eye spai s metallami* (Leak-tight ceramics and its seams with metals). Moscow, Energiya Publ., 1973. 408 p. (in Russ.).

9. Basu B, Balani K. *Advanced Structural Ceramics.* Hoboken, John Wiley & Sons, Inc., 2011. 512 p.

10. Carter C.B., Norton M.G. *Ceramic materials: science and engineering.* New York, Springer, 2007. 716 p.

11. Garshin A.P., Gropoyanov V.M., Zaytsev G.P., Semenov S.S. *Keramika dlya mashinostroeniya* (Ceramics for machine engineering). Moscow, Nauchtekhlitizdat Publ., 2003. 384 p. (in Russ.).

Received 23 June 2014

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ СТРУН С ПЕРЕМЕННЫМИ НАТЯЖЕНИЯМИ

М.А. Осипенко¹

Предложена модель струны с переменным непрерывным натяжением на основе предельного перехода для струны из многих звеньев с различными постоянными натяжениями. Рассмотрена задача об одностороннем контакте под заданной нагрузкой двух таких струн различной длины с закрепленным левым концом и свободным правым. Сформулирована строгая постановка задачи, доказана единственность решения и построены аналитические решения в некоторых частных случаях. Показано, что соприкосновение струн может происходить как в одной точке, так и на отрезке.

Ключевые слова: струна; переменное натяжение; контактная задача; аналитическое решение.

Введение

Струна является одним из классических объектов математической физики [1]. С точки зрения механики, струна – простейший из тонкостенных объектов, к которым относятся также стержни, балки, пластины и оболочки. Для таких объектов, как и для «трехмерных» тел, могут быть рассмотрены контактные задачи [2–7]; для струн такие задачи не являются еще в достаточной мере исследованными. В [6] построено аналитическое решение контактной задачи для системы произвольного числа струн, аналогичной многолистовой рессоре как системе балок. В [7] построено в частном случае аналитическое решение задачи о контакте струны и твердого тела.

В настоящей работе рассматривается обобщение задачи [6] для двух струн; оно состоит в том, что натяжения струн являются переменными и непрерывными. Такая модель струны не является стандартной [1], но допускает наглядную интерпретацию (см. ниже). В работе сформулирована строгая постановка соответствующей контактной задачи, доказана единственность решения и построены аналитические решения в некоторых частных случаях. Этим построением одновременно доказывается существование решения.

Струна с переменным непрерывным натяжением

Рассмотрим малые статические поперечные перемещения струны в плоскости; левый конец струны закреплен; правый – свободен (рис. 1); $L > 0$ – длина струны. Из стандартной теории (уравнение равновесия: $Ty'' = -q$; краевые условия: $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$; см. [1, с. 29, 44]) следует, что форма $y^{(1)}(x)$ струны под нагрузкой имеет вид:

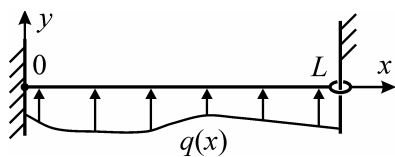


Рис. 1. Струна с закрепленным и свободным концами

$$y^{(1)}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T^{(1)}} \int_s^L q(t) dt \right) ds,$$

где $q(x)$ – плотность нагрузки, $T^{(1)} > 0$ – (постоянное) натяжение струны. Продольными перемещениями точек струны (за счет поперечной нагрузки) пренебрегаем, так как они являются величинами более высокого порядка малости (по параметру qL/T) чем y . Пусть теперь под той же нагрузкой находится струна, состоящая из N звеньев длины L/N каждое (рис. 2) с натяжениями $T^{(i)} = T(iL/N)$, где $1 \leq i \leq N$, $T(x) > 0$ – некоторая

непрерывная функция. Тогда нетрудно установить, что $\lim_{N \rightarrow \infty} y^{(N)}(x) = y(x)$, где $y^{(N)}(x)$ – форма

составной струны

¹ Осипенко Михаил Анатольевич – доцент, кандидат физ.-мат. наук, кафедра теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.

E-mail: osipenko.michael@yandex.ru

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T(s)} \int_s^L q(t) dt \right) ds. \quad (1)$$

Такую получающуюся предельным переходом $N \rightarrow \infty$ систему и будем считать струной с переменным непрерывным натяжением $T(x)$, изображая ее так же как на рис. 1 (без показа деления на звенья).

Постановка контактной задачи

Рассмотрим две струны с переменными непрерывными натяжениями (рис. 3); $L_1 > L_2$ – длины струн; $T_1(x)$, $T_2(x)$ – натяжения струн; нагрузка приложена к нижней струне. В отсутствие нагрузки струны плотно прилегают друг к другу (на рис. 3 струны для наглядности показаны разнесенными по вертикали). Трение между струнами отсутствует. Из (1) следует, что формы струн имеют вид:

$$y_1(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T_1(s)} \left(\int_s^{L_1} q(t) dt - \int_s^{L_2} f(t) dt \right) \right) ds, \quad (2)$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{T_2(s)} \int_s^{L_2} f(t) dt \right) ds, \quad (3)$$

где $f(x)$ – плотность сил взаимодействия струн. Задача заключается в отыскании $f(x)$. Будем считать, что эта функция имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \quad (4)$$

где $p(x) \geq 0$ – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при $0 < x \leq L_2$ и непрерывна справа при $x = 0$; $P_i \geq 0$; $x_i > 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между струнами). Из (2), (3) следует, что

$$r(x) = \int_0^x a(s) \left(\int_s^{L_2} f(t) dt - k(s) \right) ds, \quad (5)$$

где $a(x) = 1/T_1(x) + 1/T_2(x)$, $k(x) = \frac{1}{1 + T_1(x)/T_2(x)} \int_x^{L_1} q(s) ds$.

Будем считать, что $q(x) \geq 0$ непрерывна при $0 \leq x \leq L_1$, а $T_1(x)$ и $T_2(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq L_2$; тогда $k(x) \geq 0$ непрерывно дифференцируема при $0 \leq x \leq L_2$.

Условие контакта струн состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между струнами неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, – равно нулю. Окончательно, приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача. Найти функцию $f(x)$ вида (4) такую, что при $0 \leq x \leq L_2$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \geq 0 & (f(x) = 0), \end{cases} \quad (6)$$

где $r(x)$ выражается формулой (5), в которой $a(x) > 0$ непрерывна при $0 \leq x \leq L_2$, $k(x) \geq 0$ непрерывно дифференцируема при $0 \leq x \leq L_2$.

Доказательство единственности решения

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $f^*(x)$ – два решения задачи. По формуле (5) им соответствуют функции $r(x)$ и $r^*(x)$. Обозначим

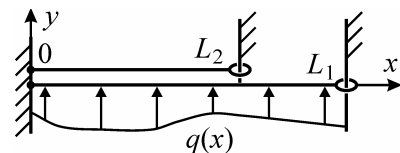


Рис. 3. Контакт двух струн

$$\varphi(x) = f(x) - f^*(x). \quad (7)$$

Так как $f(x)$ и $f^*(x)$ имеют вид (4), то $\varphi(x)$ также имеет вид (4), но $p(x)$ и P_i в (4) могут быть неположительными. Обозначим

$$E = \int_0^{L_2} (r(x) - r^*(x))\varphi(x)dx. \quad (8)$$

Из (6), (7) нетрудно установить, что в (8) подынтегральная функция неположительна; следовательно, $E \leq 0$. С другой стороны, подставляя (5) в (8) и учитывая (7), найдем

$$E = \int_0^{L_2} a(x)J^2(x)dx, \quad (9)$$

где

$$J(x) = \int_x^{L_2} \varphi(s)ds. \quad (10)$$

Из (9) следует, что $E \geq 0$. Так как выше было доказано неравенство $E \leq 0$, то $E = 0$. Далее, учитывая (10) и упомянутый выше вид $\varphi(x)$, легко установить, что из (9) и равенства $E = 0$ следует, что $J(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Тогда $\varphi(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Действительно, $\varphi(x) = p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i)$; предположим, что $p(x) > 0$ при некотором $x_* > 0$. Тогда, в силу непрерывности $p(x)$ слева и конечности суммы, можно найти такие $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, что отрезок $0 < x_* - \varepsilon_1 \leq x \leq x_* - \varepsilon_2$ не содержит ни одной точки x_i и $p(x) > 0$ на этом отрезке; это противоречит равенству $J(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Аналогично устанавливается невозможность неравенств $p(x) < 0$ при $x > 0$ и $p(0) \neq 0$; следовательно, $p(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$, откуда $\varphi(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$. Пусть $x_* > 0$ – максимальное из чисел x_i , соответствующих ненулевым значениям P_i . Тогда из (10) следует, что $J(x) \neq 0$ в некоторой левой полуокрестности x_* , что противоречит равенству $J(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Таким образом, $\varphi(x) = 0$ и $f(x) = f^*(x)$ при $0 \leq x \leq L_2$; тем самым утверждение 1 доказано.

Аналитическое решение задачи в некоторых частных случаях

Утверждение 2. Если $k'(x) < 0$ при $0 \leq x \leq L_2$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = -k'(x) + k(L_2)\delta(x - L_2) \quad (11)$$

(соприкосновение по всему отрезку $0 \leq x \leq L_2$, рис. 4, а).

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (11) в (5), найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$; таким образом, (6) выполнено.

Утверждение 3. Если $k'(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_2$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \quad (12)$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 4, б; здесь и далее соприкосновение в точке закрепления не упоминается), где

$$F = \int_0^{L_2} a(x)k(x)dx / \int_0^{L_2} a(x)dx. \quad (13)$$

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (12) в (5), найдем

$$r(x) = \int_0^x a(s)(F - k(s))ds. \quad (14)$$

Из (13), (14) следует, что $r(L_2) = 0$. Так как $k'(x) \geq 0$, то из последнего равенства вытекает, что $k(0) \leq F \leq k(L_2)$ (иначе из (14) следует, что либо $r(L_2) < 0$, либо $r(L_2) > 0$). Тогда существует $0 \leq x_* \leq L_2$ такое, что $F = k(x_*)$, и из (14) следует, что $r(x)$ не убывает при $0 \leq x \leq x_*$ и не возрастает при $x_* \leq x \leq L_2$. Отсюда и из равенств $r(0) = 0$, $r(L_2) = 0$ вытекает неравенство $r(x) \geq 0$

при $0 \leq x \leq L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительно только при $x = L_2$, а $r(L_2) = 0$; таким образом, (6) выполнено.

Утверждение 4. Пусть существует $0 < x_0 < L_2$ такое, что $k'(x) > 0$ при $0 \leq x < x_0$, $k'(x_0) = 0$, $k'(x) < 0$ при $x_0 < x \leq L_2$; тогда решение поставленной задачи имеет следующий вид:

a) если $\Phi(L_2) \geq 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \tag{15}$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 4 b);

b) если $\Phi(L_2) < 0$, то

$$f(x) = k(L_2)\delta(x - L_2) + \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \lambda), \\ -k'(x) & (\lambda < x \leq L_2) \end{cases} \tag{16}$$

(соприкосновение по части отрезка $0 \leq x \leq L_2$, рис. 4 c), где

$$\Phi(\Lambda) = \int_0^\Lambda a(x)(k(\Lambda) - k(x))dx, \tag{17}$$

$$x_0 < \lambda < L_2 \text{ – корень уравнения } \Phi(\Lambda) = 0, \tag{18}$$

F выражается формулой (13).

Доказательство

a) Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (15) в (5), найдем для $r(x)$ выражение (14). Из (13), (14) следует, что $r(L_2) = 0$. Из (13), (17) и условия $\Phi(L_2) \geq 0$ следует, что $F \leq k(L_2)$. Из свойств функции $k(x)$ тогда вытекает, что $F \geq k(0)$ (иначе из (14) следует, что $r(L_2) < 0$). Из этих же свойств тогда следует, что существует $0 \leq x_* \leq x_0$ такое, что $F = k(x_*)$; рассуждая затем так же, как при доказательстве утверждения 3, получим, что $r(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_2$ и условия (6) выполнены.

b) Существование корня $x_0 < \lambda < L_2$ следует из непрерывности $\Phi(\Lambda)$ при $x_0 \leq \Lambda \leq L_2$ и значений $\Phi(x_0) > 0$ (так как функция $k(x)$ достигает максимума в точке x_0), $\Phi(L_2) < 0$; единственность корня следует из утверждения 1. Так как $k'(x) < 0$ при $x_0 < x \leq L_2$, а $\lambda > x_0$, то $f(x)$ имеет вид (4). Подставляя (16) в (5), найдем с учетом (17), (18)

$$r(x) = \begin{cases} \int_0^x a(s)(k(\lambda) - k(s))ds & (0 \leq x \leq \lambda), \\ 0 & (\lambda \leq x \leq L_2). \end{cases} \tag{19}$$

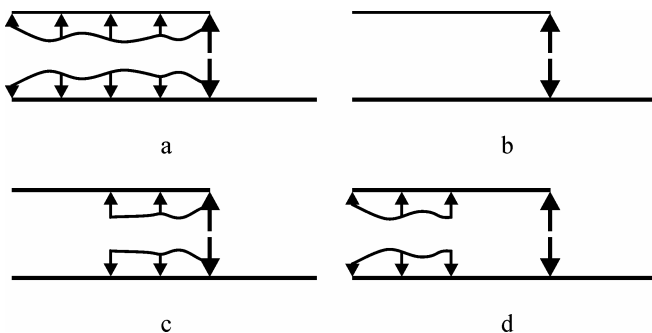


Рис. 4. Варианты сил взаимодействия в системе двух струн

Заметим, что $k(\lambda) \geq k(0)$; действительно, если $k(\lambda) < k(0)$, то, в силу свойств функции $k(x)$, $k(\lambda) < k(x)$ при $0 < x < \lambda$; тогда из (19) следует, что $r(\lambda) < 0$, тогда как $r(\lambda) = 0$. Из неравенства $k(\lambda) \geq k(0)$ следует, что существует $0 \leq x_* \leq x_0$ такое, что $k(\lambda) = k(x_*)$; рассуждая затем так же, как при доказательстве утверждения 3, получим, что $r(x) \geq 0$ при

$0 \leq x \leq L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительно только при $\lambda < x \leq L_2$, а на этом отрезке $r(x) = 0$; таким образом, (6) выполнено.

Утверждение 5. Пусть существует $0 < x_0 < L_2$ такое, что $k'(x) < 0$ при $0 \leq x < x_0$, $k'(x_0) = 0$, $k'(x) > 0$ при $x_0 < x \leq L_2$; тогда решение поставленной задачи имеет следующий вид:

a) если $\Psi(0) \leq 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2)$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 4, *b*).

b) если $\Psi(0) > 0$, то

$$f(x) = k(\mu)\delta(x - L_2) + \begin{cases} -k'(x) & (0 \leq x \leq \mu), \\ 0 & (\mu < x \leq L_2), \end{cases}$$

(соприкосновение по части отрезка $0 \leq x \leq L_2$ и в точке, рис. 4, *d*), где

$$\Psi(M) = \int_M^{L_2} a(x)(k(M) - k(x))dx,$$

$0 < \mu < x_0$ – корень уравнения $\Psi(M) = 0$, F выражается формулой (13).

Доказательство аналогично доказательству утверждения 4 и поэтому здесь не приведено.

Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Можно показать, что утверждения 1–5 остаются справедливыми и при заметном ослаблении требований на гладкость функции $k(x)$. Эту функцию можно считать лишь кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой, если понимать $k'(x)$ в «обобщенном смысле»: в точках излома $k(x)$ доопределять $k'(x)$ по непрерывности слева, а в точках разрыва $k(x)$ (первого рода) добавлять к $k'(x)$ соответствующую δ -функцию.

Использованный подход к постановке и решению контактной задачи для двух струн может быть применен как для дальнейшего исследования данной задачи (случаи, когда $k'(x)$ меняет знак более одного раза), так и для решения близких контактных задач (для балок).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
2. Григолюк, Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 415 с.
3. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
4. Кравчук, А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во МГАПИ, 1997. – 340 с.
5. Няшин, Ю.И. К теории изгиба листовой рессоры / Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, Р.Н. Рудаков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 134–143.
6. Осипенко, М.А. Об одной контактной задаче для системы струн / М.А. Осипенко // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2005. – № 1. – С. 82–86.
7. Осипенко, М.А. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач / М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин // Известия Саратовского университета. Новая серия. сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 77–84.

Поступила в редакцию 24 сентября 2013 г.

CONTACT PROBLEM FOR TWO STRINGS WITH VARIABLE TENSIONS**M.A. Osipenko¹**

The model of a string with the variable continuous tension is proposed. This model is based on the limiting process for an N -tier string with different constant tensions. The one-side contact problem for two strings under the given loading is considered. The left end of each string is fixed and the right one is free. The problem is stated clearly, uniqueness of the solution is proved, and analytical solutions of the problem for some special cases are found. It is shown that the strings may contact both at one point and in the segment.

Keywords: string; variable tension; contact problem; analytical solution.

References

1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Uravnenija matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, MGU Publ., 1999. 798 p. (in Russ.).
2. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaknyye zadachi teorii plastin i obolochek* (Contact problems of the theory of plate and shell). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 415 p. (in Russ.).
3. Dzhonson K. *Mekhanika kontaktного vzaimodeystviya* (Contact Mechanics). Moscow, Mir Publ., 1989. 510 p. (in Russ.). [Johnson K.L. Contact Mechanics. London, Cambridge University Press, 1985. 452 p. (in Eng.)]
4. Kravchuk A.S. *Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva v mekhanike* (Variational and quasivariational inequalities in mechanics). Moscow, MGAPI Publ., 1997. 340 p. (in Russ.).
5. Nyashin Yu.N., Osipenko M.A., Rudakov R.N. On the theory of bending of a leaf spring. *Mech. Solids*. 2002. Vol. 37, no. 6. pp. 114–122.
6. Osipenko M.A. *Vestnik PGTU. Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2005. no. 1. pp. 82–86. (in Russ.).
7. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2011. Vol. 11. Issue 1. pp. 77–84. (in Russ.).

Received 24 September 2013

¹ Osipenko Michael Anatolyevich is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Theoretical Mechanics Department, Perm National Research Polytechnic University.
E-mail: osipenko.michael@yandex.ru

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОЛОННЫ ГИБКИХ ТРУБ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНЫХ И СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ

В.Б. Порошин¹, В.Б. Буксбаум², П.С. Дружинин³

Предлагается методика прогнозирования долговечности колонны гибких труб, которая, в отличие от известных, способна отразить полную историю неупругого деформирования и накопления повреждения конкретным объектом, необходимую для его мониторинга. Методика опирается на систему лабораторных и стендовых механических испытаний. Также ее элементами являются разработанные в пакете ANSYS Mechanical специализированные программные модули для расчета кинетики неупругого деформирования фрагмента гибкой трубы в стендовых испытаниях и участка гибкой трубы при выполнении типовой спуско-подъемной операции.

Ключевые слова: колтюбинг; длинномерная гибкая труба; прогноз долговечности; циклические характеристики прочности и пластичности; накопление повреждения; лабораторные и стендовые испытания; расчет кинетики неупругого деформирования и накопления повреждения трубчатого образца и колонны гибких труб в среде ANSYS Mechanical.

Технология колтюбинга (*coiled tubing*) с использованием длинномерных гибких труб все шире применяется как в процессе бурения скважин, так и при проведении геофизических исследований, ремонтных и других работ. Возможные аварии в ходе таких операций сопряжены с серьезными экономическими и материальными потерями. В этих условиях как для изготовителя колтюбинга, так и для его потребителя немаловажным является вопрос – с какой вероятностью может быть дана оценка долговечности конкретного изделия.

В течение одного типового технологического цикла (спускоподъемной операции – СПО – по терминологии эксплуатирующих организаций) отдельные области трубы несколько раз подвергаются неупругому знакопеременному деформированию: во время спуска – при размотке трубы с барабана, изгибе на направляющей дуге, выпрямлении в инжекторе и далее при погружении в скважину и подаче давления; во время подъема – при прохождении через направляющую, выпрямлении после направляющей и, наконец, при намотке на барабан. При этом в опасном сечении трубы реализуется как «жесткое» (ограниченное по деформации), так и «мягкое» (ограниченное по напряжению) нагружение, которое может сопровождаться односторонним накоплением деформации. Характер изменения деформации в одной из точек такого сечения для одного технологического цикла показан на рис. 1. Отметим, что при эксплуатации одного и того же бунта гибкой трубы на одной подвижной колтюбинговой установке, обслуживающей несколько скважин, могут изменяться как длина размотки трубы, так и давление продувки, таким образом, в общем случае нагружение объекта носит нестационарный характер. В этих условиях наиболее вероятным предельным состоянием конструкции

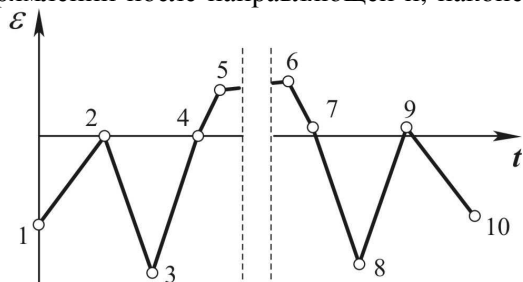


Рис. 1. Схема деформирования материала в опасной точке опасного сечения трубы в типичном технологическом цикле (СПО): 1-2 – размотка с барабана; 2-3 – изгиб на направляющей; 3-4 – выпрямление после схода с направляющей; 4-5 – приложение эксплуатационных нагрузок; 5-6 – технологический процесс; 6-7 – снятие нагрузок; 7-8 – изгиб на направляющей; 8-9 – выпрямление после направляющей; 9-10 – намотка на барабан

трубы реализуется как «жесткое» (ограниченное по деформации), так и «мягкое» (ограниченное по напряжению) нагружение, которое может сопровождаться односторонним накоплением деформации. Характер изменения деформации в одной из точек такого сечения для одного технологического цикла показан на рис. 1. Отметим, что при эксплуатации одного и того же бунта гибкой трубы на одной подвижной колтюбинговой установке, обслуживающей несколько скважин, могут изменяться как длина размотки трубы, так и давление продувки, таким образом, в общем случае нагружение объекта носит нестационарный характер. В этих условиях наиболее вероятным предельным состоянием конструкции

¹ Порошин Вадим Борисович – кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: poroshin2816@mail.ru

² Буксбаум Виктор Борисович – кандидат технических наук, начальник технического отдела, ОАО «Уралтрубмаш», г. Челябинск.

E-mail: vbuksbaum@utbm.ru

³ Дружинин Павел Сергеевич – инженер отдела технической поддержки по направлению «Динамика и прочность машин», ГК Делкам-Урал, г. Екатеринбург.

E-mail: kriegel44@yandex.ru

является образование трещин малоциклового усталости (МЦУ), приводящих к разгерметизации трубы, и, в итоге, к ее разделению на части.

Анализ доступных литературных источников показал, что в этой области практика, к сожалению, значительно обгоняет теорию, так как не существует не только соответствующих отраслевых нормативных документов, но и единой методики оценки остаточного ресурса и долговечности колонны гибких труб (КГТ). Отечественные разработки (ведущиеся, в частности, в Тюменском нефтегазовом государственном университете) отличаются недостаточной, на наш взгляд, адекватностью используемых математических моделей деформационных и прочностных свойств металлических материалов в условиях повторно-переменного нагружения. Коммерческие программные комплексы (как правило, зарубежные – *CTLIFE*, *FACT*, *CERBERUS* и другие), хоть и обещают решение многих проблем, носят закрытый характер, поэтому анализ используемых в них подходов затруднителен. В показанном на рис. 2 примере (окно *Inputs* модуля *Achilles*) свойства материала определяются маркой стали, механические характеристики которой «защиты» в соответствующей базе данных пакета. Следовательно, если нужная марка стали, скажем, отечественного производства, в библиотеке отсутствует, такой пакет оказывается бесполезен.

К тому же в большинстве известных нам зарубежных программных продуктов в качестве

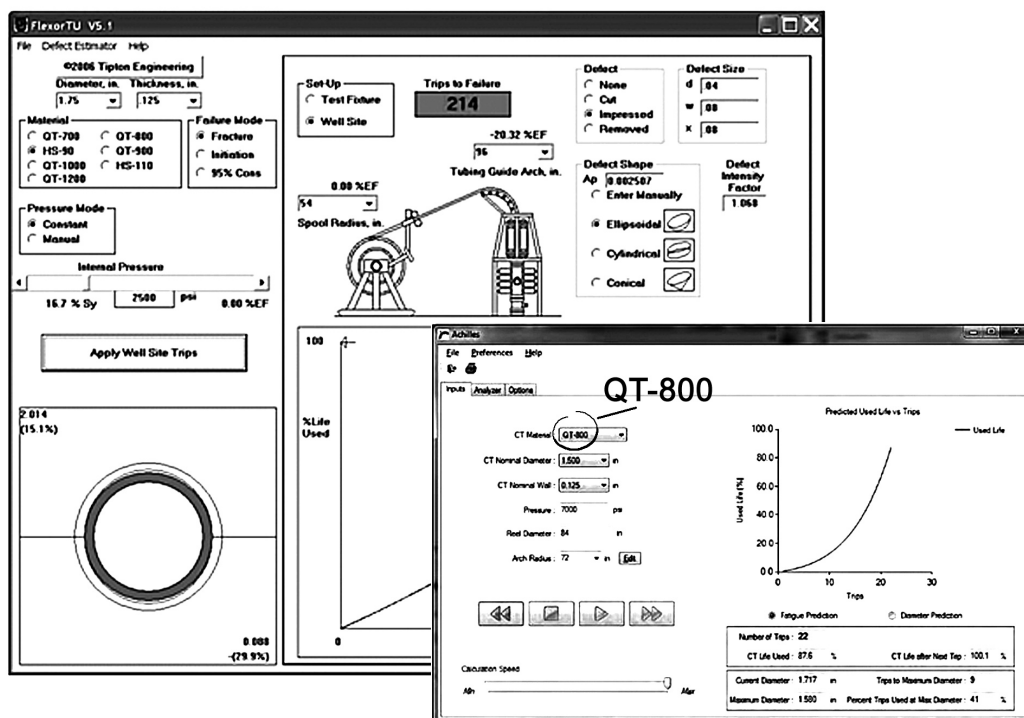


Рис. 2. Окна задания исходных данных в одном из зарубежных программных комплексов

механических характеристик материала используются показатели прочности и пластичности, отвечающие *монотонному однократному* статическому нагружению, а сопротивление малоциклового усталости описывается уравнениями типа Мэнсона–Лэнджера вида

$$\varepsilon_a = \frac{A\bar{\sigma}_f}{E} (N)^{-\alpha} + B\bar{\varepsilon}_f (N)^{-\beta},$$

где A , B , α , β – постоянные материала (или группы материалов); ε_a – амплитуда полной деформации; N – число циклов до разрушения; $\bar{\sigma}_f$ – истинное сопротивление разрыву; $\bar{\varepsilon}_f$ – ресурс пластичности материала. Последние характеристики также соответствуют однократному нагружению, поэтому подобные соотношения носят весьма приближенный характер.

Исходя из сказанного актуальным становится разработка методики прогнозирования долговечности колонны гибких труб, способной, в отличие от известных, отразить полную историю неупругого деформирования объекта, в том числе, работу при различных величинах давления, длинах размотки плети, а также перенос колтубинга с одной установки на другую и со скважины на скважину. Столь высокий ее потенциал обеспечивает использование математических моделей

деформационных и прочностных свойств [1, 2] инкрементального типа. Такой подход позволяет производить расчет кинетики неупругого деформирования и накопления повреждения с учетом особенностей деформационных и прочностных свойств материала, проявляемых при повторно-переменном нагружении, а также их естественного разброса.

Методика опирается на систему механических испытаний, предусматривающую:

- экспериментальные исследования стандартных плоских образцов, вырезанных из поступающего на завод листового проката, по результатам которых определяют деформационные и прочностные характеристики стали в условиях однократного и циклического знакопеременного нагружения;

- и стендовые испытания (с использованием установки ОАО «Уралтрубмаш») натуральных образцов, вырезанных из длинномерной трубы, под давлением и без него, по данным которых производится коррекция свойств с тем, чтобы учесть влияние геометрии и технологии производства реального объекта.

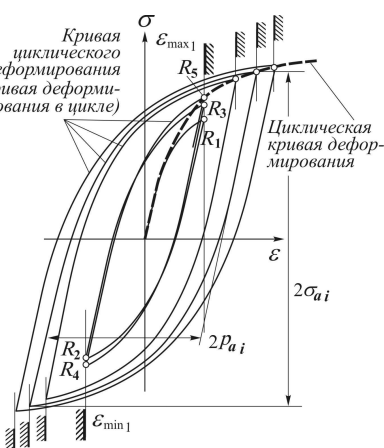


Рис. 3. Схема построения циклической кривой с помощью петель гистерезиса в стабильных циклах



Рис. 4. Сопоставление кривой циклического деформирования, циклической и статической кривых стали А606-4

Деформационные характеристики, в частности, кривую циклического деформирования (кривую деформирования в цикле), а также циклическую кривую получали в ходе лабораторных испытаний плоских образцов по программе блочно-го нагружения с увеличивающимся от блока к блоку размахом деформации. В каждом блоке испытания велись в режиме жесткого симметричного по деформациям нагружения до стабилизации процесса деформирования. На рис. 3 показаны схемы соответствующих петель неупругого гистерезиса, характерные для циклически стабилизирующегося в сторону упрочнения материала. На них отмечены кривые циклического деформирования, представляющие траекторию движения точки состояния в пространстве «напряжение ~ деформация», и циклическая кривая, которая, как видно, строится по вершинам петель гистерезиса стабильных циклов.

В результате испытаний до разрушения (образования макротрещины) таких же образцов в жестком цикле при ряде значений размаха деформации определяли характеристики модели повреждаемости, необходимые для расчета долговечности.

В соответствии с этим обработаны результаты опытов на образцах из стали А606-4 и получены требуемые механические характеристики. На рис. 4 приведено сопоставление кривой циклического деформирования, циклической кривой и кривой, отвечающей однократному нагружению (статической кривой) для этой стали. Что касается циклической кривой, то в данных условиях она отражает изотропное упрочнение материала в процессе циклического деформирования. Ее вид зависит от материала (т.е. химсостава), начального состояния объекта

(термообработки, наклепа, наличия остаточных напряжений и т.п.), коэффициента асимметрии цикла и, как видно на графике, от амплитуды пластической деформации. Наибольшее отличие, особенно при значительных величинах пластической деформации, наблюдается между статической кривой и диаграммой циклического деформирования. Таким образом, распространенная в расчетах практика – использование характеристик материала, снятых со статической диаграммы – может привести к существенным погрешностям. В условиях «мягкого» нагружения – к ошибке «в запас» по неупругой деформации, что может повлечь неоправданно заниженную оценку долговечности и снятие с эксплуатации вполне работоспособного изделия. При «жестком» нагружении – к ошибке «не в запас» по действующим напряжениям.

Второй составляющей системы механических испытаний является комплекс стендовых ресурсных испытаний натуральных образцов, вырезанных из длинномерной трубы, в условиях знако-

переменного изгиба. С этой целью на предприятии «Уралтрубмаш» спроектирован и изготовлен специальный стенд [3]. Нагружение образца носит кинематический характер и осуществляется синхронным движением круговых секторов, жесткость которых значительно превосходит жесткость испытуемого объекта. Условия закрепления образца соответствуют с одной стороны жесткой, с другой – скользящей заделкам. Испытания могут проводиться как под давлением, так и без него. К сожалению, в ходе подобных опытов фиксируются лишь величина давления и число циклов до разрушения, но этих данных недостаточно для экспериментального определения напряженно-деформированного состояния образца.

В связи с этим для расчета процесса деформирования трубчатого образца на стенде в пакете *ANSYS Mechanical* разработан соответствующий программный модуль. В результате анализа моделей материала из библиотеки *ANSYS* применительно к рассматриваемым условиям была выбрана модель Бесселинга с мультилинейным кинематическим упрочнением. Конечно-элементной моделью системы «образец–стенд» воспроизводятся радиусы кривизны оправок испытательной установки, предусмотрена возможность задания внутреннего давления, закрепление модели соответствует указанным ранее граничным условиям. Нагружение образца осуществляется синхронным возвратно-вращательным движением оправок.

Результаты расчета кинетики неупругого деформирования материала в опасной точке трубчатого образца диаметром 38,1 и толщиной стенки 3 мм под давлением 22 МПа представлены в виде петли гистерезиса на рис. 5. На ее основе с привлечением характеристик малоциклового усталости, полученных при испытании плоских образцов, подсчитано число циклов до разрушения (образования макротрещины).

Вместе с тем в результате систематизации и статистической обработки данных стендовых испытаний натурных образцов получены параметры нормального закона распределения долговечности. Сравнение матожидания и расчетного числа циклов до разрушения указывает на необходимость корректировки изначальных параметров кривой МЦУ (рис. 6). Тем самым предполагается исключить систематические ошибки, связанные с погрешностью определения деформационных и прочностных свойств материала по результатам лабораторных испытаний вырезанных из листового проката образцов, для которых учет геометрии трубы и технологии производства затруднителен. Там же показана схема поверхности, отражающая изменение распределения плотности вероятности долговечности с ростом внутреннего давления p для определенного типоразмера трубчатого образца, и одно из ее сечений.

В качестве примера применения методики проанализирована работа колтюбинга на установке с заданными конструктивными параметрами в типичном эксплуатационном цикле (СПО). Для расчета кинетики деформирования гибкой трубы в пакете *ANSYS Mechanical* была разработана соответствующая программа. Разбиение на конечные элементы фрагмента трубы выполнено с помощью объемных элементов типа *SOLID 186*. Изгиб и распрямление объекта в различные моменты времени имитировали путем задания сечениям трубы соответствующих углов поворота. Программа изменения угла поворота в течение одной СПО представлена на схеме (рис. 7).

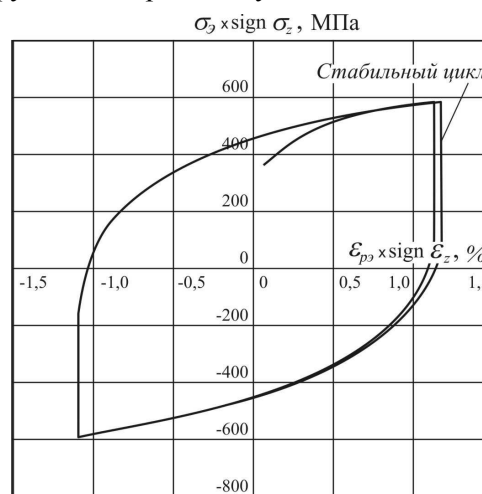


Рис. 5. Диаграмма циклического деформирования стали А606-4 в опасной точке трубчатого образца размером 38,1×3,0 мм под давлением 22 МПа в условиях стендовых испытаний

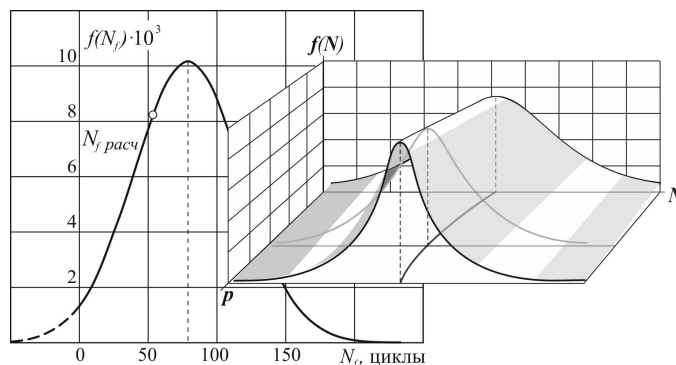


Рис. 6. Схема поверхности, описывающей распределения плотности вероятности долговечности, и сопоставление расчетного значения числа циклов до разрушения с одним из ее сечений (образец – 38,1×3,0 мм; давление 22 МПа)

Там же показана полученная расчетом кинетики диаграмма деформирования в представительной точке элемента трубы. Буквенными индексами отмечены участки кривой, отвечающие тем или иным этапам программы изменения угла. На этой основе рассчитано изменение усталостного и квазистатического повреждений в течение одной СПО, а затем, в предположении повторения данного цикла вплоть до исчерпания ресурса, с использованием гипотезы линейного суммирования повреждений определена долговечность гибкой трубы. Подсчет усталостного повреждения с помощью кинетической модели повреждаемости [2] в данных условиях близок к соответствующей процедуре метода «дождевого потока» (*rainflow counting*), рекомендованного *ASTM* в качестве метода схематизации программ нагружения с переменной амплитудой напряжения для подсчета повреждения, вносимого каждым циклом, и последующей оценке долговечности [4]. Квазистатическое повреждение определяется вполне традиционно: отношением односторонне накопленной деформации к ресурсу пластичности материала с учетом вида напряженного состояния.

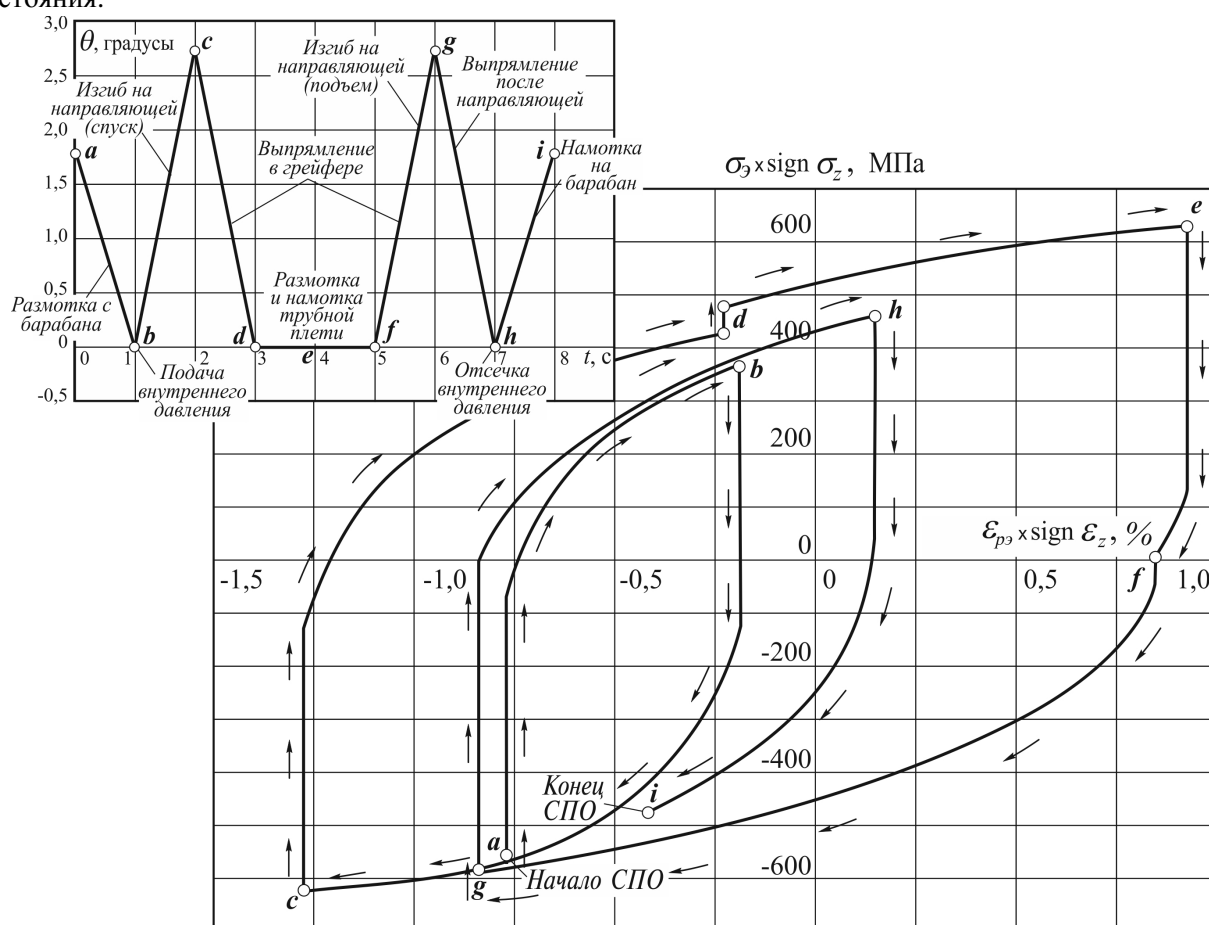


Рис. 7. Диаграмма циклического деформирования в опасной точке фрагмента трубы из стали А606-4 в типичном эксплуатационном цикле (диаметр барабана – 3,6 м, радиус кривизны направляющей – 1,2 м, длина трубной плети в скважине – 4000 м, давление 22 МПа)

Таким образом, показано, что предлагаемая расчетно-экспериментальная методика прогнозирования долговечности колонны гибких труб отражает индивидуальную историю неупругого деформирования и накопления повреждения конкретным объектом. Такой подход позволяет учесть особенности работы колтюбинга при различных величинах давления, длинах размотки плети и его эксплуатации на разных мобильных базах и скважинах, что совершенно необходимо для адекватного мониторинга объекта.

Литература

1. Гохфельд, Д.А. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях / Д.А. Гохфельд, О.С. Садаков. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.

2. Gokhfel'd, D.A. Plasticity and Creep, LCF and Crack Propagation Processes: Related State Equation / D.A. Gokhfel'd, V.B. Poroshin, O.S. Sadakov // SMiRT 11 Transactions. – Tokyo, Japan, August 1991. – Vol. L. – P. 283–288.

3. К оценке долговечности длинномерных гибких труб / А.В. Брылкин, В.Б. Буксбаум, К.И. Колесников и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 75–80.

4. E 1049-85. (Reapproved 2005). Standard practices for cycle counting in fatigue analysis. ASTM International.

Поступила в редакцию 9 июня 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 72–77*

TECHNIQUE FOR FORECASTING THE OPERATING LIFE OF COIL TUBING ON THE BASIS OF LABORATORY AND BENCH TESTS

V.B. Poroshin¹, V.B. Buksbaum², P.S. Druzhinin³

A technique for forecasting the operating life of coil tubing, as opposed to the known methods can reflect a full history of inelastic deformation and accumulation of the damage by a specified object is proposed in the paper. This technique is based on laboratory and bench mechanical tests. Also, authors rely on special software modules developed in the ANSYS Mechanical package for the calculation of kinetics of inelastic deformation of a coil tubing fragment in bench tests and a section of coil tubing when a standard operating procedure is carried out.

Keywords: coil tubing; coil tubing unit; operating life forecasting; cyclic strength and plasticity characteristics; damage accumulation; laboratory and bench tests; calculation of kinetics of inelastic deformation and damage accumulation of tubular model and coil tubing in the system of ANSYS Mechanical.

References

1. Gokhfel'd D.A., Sadakov O.S. *Plastichnost' i polzuchest' ehlementov konstrukcij pri povtornykh nagruzenijakh* (Plasticity and creep of the structural components under repeated loading). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 256 p. (in Russ.).

2. Gokhfel'd D.A., Poroshin V.B., Sadakov O.S. Plasticity and Creep, LCF and Crack Propagation Processes: Related State Equation. *SMiRT 11 Transactions*. Tokyo, Japan, August 1991. Vol. L. pp. 283–288.

3. Brylkin A.V., Buksbaum V.B., Kolesnikov K.I., Poroshin V.B., Usova M.V. K otsenke dolgochnosti dlinnomernykh gibkikh trub (Estimation of long Coiled Tubing Durability). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2012. Issue 7. no. 34(293). pp. 75–80. (in Russ.).

4. E 1049-85. (Reapproved 2005). *Standard practices for cycle counting in fatigue analysis*. ASTM International.

Received 9 June 2014

¹ Poroshin Vadim Borisovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University.

E-mail: poroshin2816@mail.ru

² Buksbaum Victor Borisovich is Cand. Sc. (Engineering), Chief of Technical Department of JSC "Uraltrubmash", Chelyabinsk.

E-mail: vbuksbaum@utbm.ru

³ Druzhinin Pavel Sergeevich is Engineer, Technical Support Department (Dynamics and Strength of Machines), Delcam-Ural, LLC, Ekaterinburg.

E-mail: kriegler44@yandex.ru

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕНЗОРА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

О.С. Садаков¹, А.О. Щербакова²

Отказ от гипотезы малости перемещений в механике деформируемого тела приводит к проблемам, связанным с геометрической нелинейностью, которые до сих пор не решены до конца, несмотря на свою актуальность для практических приложений. Одна из таких проблем относится к понятию логарифмической деформации. Скалярная логарифмическая деформации в ряде случаев полезна, но тензор логарифмической деформации обычно лишен смысла.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность; конечные деформации; логарифмическая деформация; тензор Генки; инженерная деформация; простой сдвиг.

Введение

Тензор логарифмической деформации в настоящее время является одной из наиболее популярных мер деформации тела при решении геометрически нелинейных задач. Он представляет собой обобщение скалярной логарифмической деформации

$$e = \int_{l_0}^l \frac{1}{x} dx = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right), \quad (1)$$

введенной Людвигом в 1909 г., перенесенной на область тензоров [1]. Идея Людвиг состояла в том, чтобы сравнивать текущую длину растягиваемого стержня не с начальной длиной l_0 , как при использовании обычной инженерной деформации

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2)$$

а с длиной стержня в предыдущем состоянии. Логарифмическая деформация (1) однозначно выражается через инженерную деформацию

$$e = \ln(1 + \varepsilon) \quad (3)$$

и наоборот, инженерная выражается через логарифмическую

$$\varepsilon = \exp(e) - 1. \quad (4)$$

Таким образом, зная одну, легко получить другую. Для величины e Людвиг в свое время ввел термин *effective specific strain* – особая эффективная деформация, а несколько позже Надаи предложил новое название – *натуральная деформация* [2]. В настоящее время широкое распространение получили термины: *истинная деформация* и *логарифмическая деформация*.

В 1928 г. Генки [3] предложил распространить идею Людвиг на случай трехмерной деформации, введя по аналогии с выражением (3) *тензор логарифмической деформации*, иногда называемый его именем – *тензором Генки*

$$e = \ln(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (5)$$

Здесь и ниже тензоры и векторы обозначены жирными символами – для того, чтобы отличать их от скаляров. В выражении (5) $\boldsymbol{\varepsilon}$ – это *тензор инженерной деформации*, связывающий векторы l_0 волокон тела в начальном состоянии (до деформирования) с векторами l в деформированном состоянии

$$\Delta l = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot l_0, \quad \Delta l = l - l_0, \quad (6)$$

¹ Садаков Олег Сергеевич – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

² Щербакова Алла Олеговна – кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: AllaScherbakova@list.ru

\mathbf{I} – единичный тензор. Сумму тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и единичного тензора обычно называют *тензором удлинений* (иначе, *тензором растяжения* или *тензором коэффициентов длины*)

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7)$$

В 1956 г. Дойл и Эрикссон [4] ввели понятие обобщенной деформации

$$\mathbf{E}^{(m)} = \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}). \quad (8)$$

Здесь разные значения m соответствовали разным мерам деформации. В частности, при $m = 0$ у Дойла и Эрикссона получился тензор логарифмической деформации.

Таким образом, как и в случае одноосной деформации, в общем случае имеются две альтернативные меры деформации: инженерная и логарифмическая. И, как показывает практика, логарифмическая деформация более популярна среди инженеров-механиков (при решении геометрически нелинейных задач). Это, по-видимому, объясняется тем, что использование логарифма позволяет заменять произведения суммами, упрощая решение задач. Например, чтобы найти относительное изменение объема элемента твердого тела, можно вместо традиционного выражения

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1, \quad (9)$$

использовать более простое:

$$\ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = e_1 + e_2 + e_3. \quad (10)$$

Условие несжимаемости среды при этом принимает вид

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad (11)$$

то есть тензор логарифмической деформации напоминает девиатор. Удобно также разделять логарифмическую деформацию \mathbf{e} на упругую составляющую и неупругую:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_e + \mathbf{e}_p. \quad (12)$$

Эта сумма напоминает геометрически линейный подход.

При решении инженерных задач тензор логарифмической деформации связывают с некоторыми мерами напряжений, например, Кирхгофа [5] или Коши [6, 7]. Однако достоверность полученных результатов при этом вызывает серьезные сомнения [8]. Ниже будет показано, что использование тензора логарифмической деформации имеет смысл только в главных осях.

Вычисление тензора логарифмической деформации

Известно [9], что для получения какой-либо функции двухвалентного тензора \mathbf{T} достаточно знать его главные числа $\{\lambda_i\}$ и главные направления, которые обычно задают единичными векторами $\{\mathbf{c}_i\}$ – главными векторами. Особенность главных векторов состоит в том, что при скалярном умножении на тензор \mathbf{T} они не поворачиваются:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{c}_i = \lambda_i \mathbf{c}_i. \quad (13)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$|\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0 \quad (14)$$

позволяет найти главные числа и векторы тензора \mathbf{T} . Для вычисления функции тензора необходимо записать его в главных координатах, применив эту функцию к главным значениям. У симметричного тензора все главные числа вещественны, а главные направления взаимно ортогональны. Следовательно, натуральный логарифм тензора \mathbf{U} определяется в трехмерном пространстве суммой трех слагаемых

$$\ln \mathbf{U} = \ln(u_i) \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i, \quad (15)$$

где $i = 1 \dots 3$, u_i – это главные числа тензора \mathbf{U} , а \mathbf{c}_i – векторы декартового базиса, совпадающие с главными направлениями тензора \mathbf{U} . Отметим, что, согласно выражениям (7) и (13), тензоры \mathbf{U} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют одинаковые главные направления, а их главные числа отличаются на единицу

$$u_i = \varepsilon_i + 1. \quad (16)$$

В матричной форме выражение (16) имеет вид

$$[e] = \begin{bmatrix} \ln u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln u_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln u_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

При записи матричных выражений следует помнить о том, в каком именно базисе это сделано. Например, выражение (17) содержит координаты тензора, записанного в декартовом базисе, направления которого совпадают с главными направлениями этого тензора. В другом базисе координаты будут другими.

Деформации и жесткие повороты

При неоднородном деформированном состоянии тела обычно рассматривают деформированные элементарные объемы, материальные волокна которых бесконечно малы. Тогда деформированное состояние каждого из таких объемов можно принять однородным. В этом случае волокна, прямые до деформирования, при деформировании не искривляются, и их удобно обозначать векторами. При деформировании элементарного объема его *главные волокна* (волокна, описываемые главными векторами тензора деформации) не поворачиваются, а только удлиняются или укорачиваются. Однако деформирование соседних элементарных объемов способно вызывать жесткий поворот последнего, при этом его главные волокна поворачиваются. Оператором линейной связи между векторами элементарных волокон в начальном и деформированном состоянии в этом случае служит тензор дисторсии F

$$l = F \cdot l_0, \quad (18)$$

включающий в себя деформацию элементарного объема и его жесткий поворот

$$F = R \cdot U = V \cdot R. \quad (19)$$

В этом выражении, которое обычно называют полярным разложением тензора дисторсии, U и V – это соответственно правый и левый тензоры удлинений (симметричные тензоры):

$$U = \varepsilon_U + I, \quad V = \varepsilon_V + I, \quad (20)$$

выраженные соответственно через правый ε_U и левый ε_V тензор инженерной деформации, а R – тензор жесткого поворота на угол φ против часовой стрелки вокруг оси, заданной единичным вектором n

$$R = nn + (I - nn) \cos \varphi + \mathcal{E} \cdot n \sin \varphi. \quad (21)$$

Здесь $\mathcal{E} = -\delta_{ijk} e_i e_j e_k$ – это тензор Леви–Чевитты (δ_{ijk} – символ Веблена). На плоскости, перпендикулярной вектору n , в декартовом базисе матрица этого тензора имеет довольно простой вид

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Поскольку тензор жесткого поворота является ортогональным тензором (то есть $R^{-1} = R^T$), связь между левым и правым тензором удлинений, следующая из полярного разложения дисторсии (19), линейна

$$V = R \cdot U \cdot R^T. \quad (23)$$

Это выражение означает, что левый тензор удлинений получается поворотом правого тензора на угол жесткого поворота.

Полярная декомпозиция тензора дисторсии основана на следующих соображениях. На рис. 1 показана схема дисторсии элементарного объема тела (для наглядности рассмотрена двумерная задача), в результате которой материальные волокна вытянулись (либо укоротились) и повернулись. Произвольный вектор l_0 , отвечающий некоторому множеству материальных волокон в начальном состоянии, изменил свою длину и направление. Сейчас это вектор $l_F = F \cdot l_0$, отвечающий тому же множеству материальных волокон в деформированном состоянии. Этот вектор можно представить двумя способами. В первом способе сначала рассматривают деформацию элементарного объема, получая при этом вектор $l_U = U \cdot l_0$, а затем его жесткий поворот

$$l_F = R \cdot l_U = \underbrace{R \cdot U}_F \cdot l_0. \quad (24)$$

В результате тензор дисторсии выражается через правый тензор растяжений $F = R \cdot U$. Во втором способе сначала рассматривают жесткий поворот, получая вектор $l_R = R \cdot l_0$, а затем деформацию

$$l_F = V \cdot l_R = \underbrace{V \cdot R}_F \cdot l_0. \quad (25)$$

Рис. 1. Дисторсия элементарного объема

Тензор дисторсии при этом выражается через правый тензор растяжений $F = V \cdot R$.

По аналогии с введением двух тензоров удлинений – правого и левого, вводят два тензора логарифмической деформации. Взятие логарифмической функции тензоров U и V , дает соответственно правый и левый тензоры логарифмической деформации:

$$e_U = \ln U, \quad e_V = \ln V. \quad (26)$$

Смысл координат

Обычно тензоры логарифмической деформации записывают в главных координатах, так как именно эта форма записи позволяет извлечь из них полезную информацию в виде *логарифмических деформаций главных волокон*. Например, координаты тензора

$$e_U = \ln u_x c_x c_x + \ln u_y c_y c_y, \quad (27)$$

записанного в декартовом базисе $\{c_x, c_y\}$ (см. рис. 1), векторы которого направлены вдоль главных осей x_U и y_U этого тензора, представляют логарифмические деформации главных волокон. Этим, собственно, и ограничивается полезная с точки зрения механики информация, содержащаяся в этом тензоре. Получить какую-либо информацию о деформировании других волокон с помощью этого тензора невозможно.

Что касается тензора e_V , то он согласно выражениям (23) и (26) получается жестким поворотом правого тензора удлинений

$$e_V = \ln(R \cdot U \cdot R^T).$$

Следовательно, его главные координаты (x_V и y_V на рис. 1) совпадают с главными координатами тензора e_U (x_U и y_U на рис. 1). По сути, тензор e_V содержит ту же информацию, что и тензор e_U . Однако для получения этой информации необходимо не только направить базисные векторы вдоль главных осей, но и следить за их жестким поворотом, что усложняет координатную и матричную форму записи тензорных выражений [10].

В отличие от тензора логарифмической деформации (левого или правого), тензор инженерной деформации содержит существенно больше полезной информации о деформировании тела. Во-первых, согласно выражению (6), его проекция на вектор, задающий некоторое материальное волокно, дает вектор изменения этого волокна, определяющий его удлинение (укорочение) и поворот. Во-вторых, столбцы матрицы тензора ϵ представляют изменения базисных векторов, причем базисные векторы могут и не совпадать с главными направлениями тензора ϵ . В-третьих, диагональные элементы матрицы $[\epsilon]$ представляют линейные деформации волокон в направле-

нии базисных векторов, а недиагональные – угловые деформации. И в-четвертых, тензор инженерной деформации, позволяя найти линейную деформацию любого волокна, дает с помощью выражения (3) возможность расчета скалярной логарифмической деформации

$$e = \ln(1 + \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad \Delta l = l - l_0 = |l_0 + \varepsilon \cdot l_0| - l_0. \quad (28)$$

Простой сдвиг

Одной из ключевых тестовых геометрически нелинейных задач является задача о простом сдвиге треугольной конструкции, схема которой показана на рис. 2, а. На рис. 2, а в начальном состоянии конструкция изображена прерывистой линией, а в деформированном – сплошной; оси x и y – произвольные оси декартового базиса; x_V и y_V – главные оси деформации. Задача о простом сдвиге имеет ряд существенных достоинств. Во-первых, деформация конструкции при простом сдвиге однородна; во-вторых, дисторсия содержит как деформацию, так и жесткий поворот; в-третьих, дисторсия в любой момент времени определяется только одним скалярным параметром – смещением q .

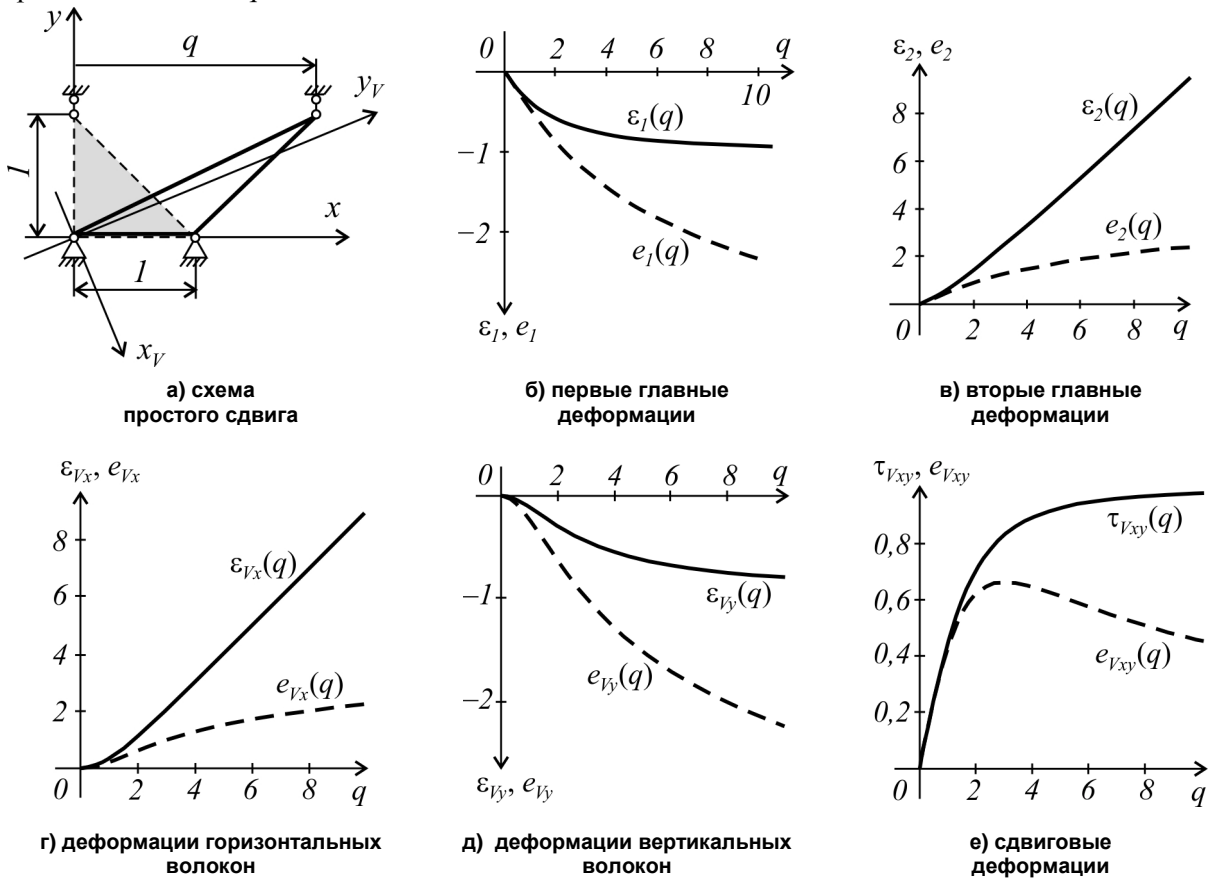


Рис. 2. Простой сдвиг

На примере простого сдвига удобно демонстрировать различие между главными инженерными деформациями ε_1 и ε_2 , а также соответствующими главными логарифмическими деформациями $e_1 = \ln(\varepsilon_1 + 1)$ и $e_2 = \ln(\varepsilon_2 + 1)$ в зависимости от смещения q . На рис. 2, а и 2, б главные инженерные деформации изображены сплошными линиями, а главные логарифмические – прерывистыми. При деформациях, превышающих 100 %, инженерные деформации могут отличаться от логарифмических в несколько раз. Однако при деформациях менее 10 % (что соответствует в данном примере смещению $q = 0,2$) различие не превышает 5 %, что легко объясняется использованием логарифмической функции.

Иногда тензоры логарифмической деформации записывают не в главных, а в произвольных координатах, применяя к выражениям (26) операцию перехода к новому базису

$$[e'] = [H][e][H]^T. \quad (29)$$

Здесь матрица $[e']$ содержит координаты тензора логарифмической деформации в новом базисе, матрица $[e]$ – координаты тензора логарифмической деформации в старом базисе, а $[H]$ – матрица перехода к новому базису. Отметим, что в случае, когда тензоры логарифмической деформации записаны в произвольном базисе, смысл координат этих тензоров как мер деформации исчезает. На рис. 2 z , d и e показаны изменения координат тензоров инженерной и логарифмической деформации при простом сдвиге в осях x и y :

$$[\varepsilon_V] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{Vx} & \varepsilon_{Vxy} \\ \varepsilon_{Vxy} & \varepsilon_{Vy} \end{bmatrix}, \quad [e_V] = \begin{bmatrix} e_{Vx} & e_{Vxy} \\ e_{Vxy} & e_{Vy} \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} \ln(\varepsilon_1 + 1) & 0 \\ 0 & \ln(\varepsilon_2 + 1) \end{bmatrix} [R]. \quad (30)$$

Как и в случае главных деформаций, здесь различие между инженерными и логарифмическими деформациями возрастает с ростом q . Однако, в отличие от главных деформаций, даже при малых q это различие может быть значительным. Например, при $q = 0,2$ разница между инженерной и логарифмической деформацией в направлении оси x составляет порядка 30 % (ε_{Vx} при этом равно 1,5 %), а в направлении оси y – порядка 100 % (ε_{Vy} при этом равно 0,5 %). Различие между сдвиговыми деформациями начинает превышать 5 % при $q > 1,18$ (τ_{Vxy} при этом равно 51 %).

В расчетах кинетики деформирования, когда главные направления деформаций поворачиваются в процессе деформирования, в разные моменты процесса деформирования тензоры логарифмической деформации (правый и левый) дают информацию о разных волокнах тела. На рис. 3 показано, что разным смещениям q отвечают разные пары главных направлений (оси x_V и y_V). Значит, волокна, информацию о которых содержат тензоры логарифмической деформации, также будут различаться в зависимости от q .

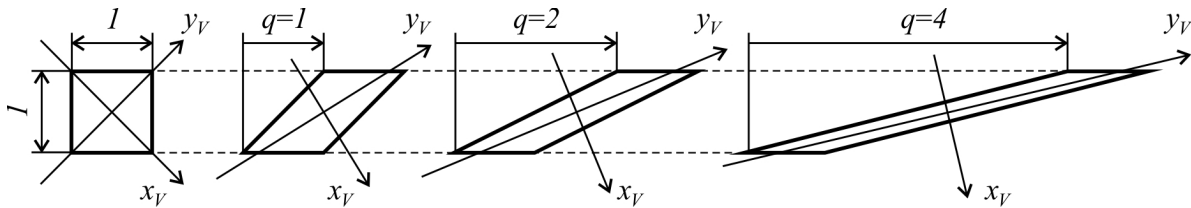


Рис. 3. Однородная дисторсия квадратного элемента при простом сдвиге

Логарифмическая деформация произвольного волокна легко вычисляется с помощью тензора инженерной деформации (28), тогда как попытка использовать вместо него тензор логарифмической деформации приводит к ошибочному результату. Этот факт проиллюстрирован на рис. 4 на примере волокна a , заданного в начальном состоянии в координатах x и y вектором

$$[a] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

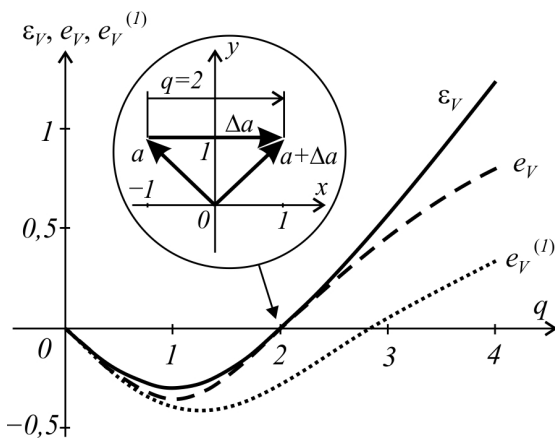


Рис. 4. Деформации волокна a при простом сдвиге

На рис. 4 изображен график изменения функции линейной деформации этого волокна в зависимости от параметра q (сплошная линия)

$$\varepsilon_V = \frac{|a + \varepsilon_V \cdot a| - a}{a},$$

график скалярной логарифмической деформации (прерывистая линия)

$$e_V = \ln(\varepsilon_V + 1),$$

и величины

$$e_V^{(1)} = \ln\left(\frac{|a + e_V \cdot a| - a}{a} + 1\right),$$

вычисленной по аналогии с линейной деформацией, когда вместо тензора инженерной деформации используется тензор логарифмической деформации (пунктирная линия). Ошибочность использования тензора логарифмической деформации становится очевидна при $q = 2$, когда волокно a зеркально отражается относительно оси y , не изменив длины. Его деформация (как инже-

нерная, так и логарифмическая) при этом должна быть равна нулю. Однако величина $e_V^{(1)}$ при $q = 2$ нулю не равна, она составляет $-0,272$.

Выводы

1. Скалярная логарифмическая деформация связана однозначной зависимостью с инженерной деформацией, то есть одна легко выражается через другую. Скалярную логарифмическую деформацию удобно использовать в тех случаях, когда в выражениях логарифмируется произведение инженерных деформаций. Тогда это произведение можно заменить суммой логарифмических деформаций и выражение при этом станет линейным.

2. Тензор логарифмических деформаций (правый и левый) содержит информацию только о логарифмических деформациях главных волокон. Если записать его в произвольном базисе, то координаты этого тензора с точки зрения деформирования объекта теряют смысл.

3. В расчетах кинетики деформирования, когда главные направления деформаций поворачиваются в процессе деформирования, тензор логарифмической деформации в разные моменты процесса деформирования дает информацию о разных волокнах тела.

4. Тензор инженерной деформации в отличие от тензора логарифмической деформации содержит следующую информацию о деформировании объекта.

- Его проекция на вектор, задающий некоторое материальное волокно, дает вектор изменения этого волокна, определяющий его удлинение (укорочение) и поворот.
- Столбцы его матрицы представляют изменения базисных векторов, причем базисные векторы могут и не совпадать с главными направлениями деформации.
- Диагональные элементы его матрицы представляют линейные деформации волокон в направлении базисных векторов, а недиагональные – угловые деформации.
- Тензор инженерной деформации, позволяя найти линейную деформацию любого волокна, дает возможность расчета скалярной логарифмической деформации.

Литература

1. Ludwik, P. Elemente der Technologischen Mechanik / P. Ludwik. – Berlin: Applied Mechanics, Verlag von J. Springer, 1909. – 57 p.
2. Nadai, A. Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I / A. Nadai // J. Appl. Phys. – 1937. – Vol. 8. – P. 205–213.
3. Hencky, H. Uber die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen / H. Hencky // Zeit. Tech. Phys. – 1928. – Vol. 9. – P. 215–220.
4. Doyle, T.C. Nonlinear elasticity / T.C. Doyle, J.L. Ericksen // Advances in applied mechanics IV. – New York: Academic Press, Inc. – 1959. – P. 53–115.
5. Аннин, Б.Д. Допустимые формы упругих законов деформирования в определенных соотношениях упруго-пластичности / Б.Д. Аннин, С.Н. Коробейников // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 21–34.
6. ANSYS – a general purpose finite element program. Rev. 5.0. / Houston (PA): Swanson analysis system Inc. – 1996. – 510 p.
7. Горлач, Б.А. Конечные деформации в задачах формования неупругих тел / Б.А. Горлач, Е.А. Ефимов // Математическое моделирование систем и процессов. – 1992. – № 1. – С. 67–81.
8. Садаков, О.С. Конечные деформации в механике деформируемого твердого тела / О.С. Садаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – № 6(46) – С. 114–121.
9. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука. – 1973. – 280 с.
10. Truesdell, C. The Classical Field Theories / C. Truesdell, R. Toupin; S. Flugge (ed) // Encyclopedia of Physics. – Berlin: Springer-Verlag, 1960. – Vol. III/1. – P. 226–793.

Поступила в редакцию 5 марта 2014 г.

ON THE USE OF LOGARITHMIC STRAIN TENSOR

O.S. Sadakov¹, A.O. Scherbakova²

The rejection of the small displacements hypothesis in the mechanics of deformable solids leads to some problems connected with geometrical nonlinearity. At present, these problems are still not completely solved despite their relevance to practical applications. One of these problems is the concept of logarithmic strain. The scalar logarithmic strain is effective in some cases but the logarithmic strain tensor is usually useless.

Keywords: geometrical nonlinearity; finite strains; logarithmic strain; Hencky strain tensor; engineering strain; simple shear.

References

1. Ludwik P. *Elemente der Technologischen Mechanik*. Berlin: Applied Mechanics, Verlag von J. Springer, 1909. 57 p.
2. Nadai A. Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I. *J. Appl. Phys.* 1937. Vol. 8. pp. 205–213.
3. Hencky H. Uber die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. *Zeit. Tech. Phys.* 1928. Vol. 9. pp. 215–220.
4. Doyle T.C., Ericksen J.L. Nonlinear elasticity. *Advances in applied mechanics IV*. New York: Academic Press, Inc. 1959. pp. 53–115.
5. Annin B.D., Korobeynikov S.N. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 1998. Vol. 1, no. 1. pp. 21–34. (in Russ.).
6. ANSYS – a general purpose finite element program. Rev. 5.0. Houston (PA), Swanson analysis system Inc, 1996. 510 p.
7. Gorlach B.A., Efimov E.A. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 1992. no. 1. pp. 67–81.
8. Sadakov O.S. Konechnye deformatsii v mekhanike deformiruемого tverdogo tela (Finite deformations in mechanics of deformable solids). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika, fizika, khimiya»*. 2005. Issue 6. no. 6(46). pp. 114–121. (in Russ.).
9. Lancaster P. *Teoriya matrits* (Theory of matrices). Moscow, Nauka Publ, 1973. 280 p.
10. Truesdell C., Toupin R., Flugge S. (ed) *The Classical Field Theories. Encyclopedia of Physics*. Berlin, Springer-Verlag, 1960. Vol. III/1. pp. 226–793.

Received 5 March 2014

¹ Sadakov Oleg Sergeevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines, South Ural State University.

² Scherbakova Alla Olegovna is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines, South Ural State University.

E-mail: AllaScherbakova@list.ru

AB-INITIO МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГИИ РАСТВОРЕНИЯ АТОМА УГЛЕРОДА В ПАРАМАГНИТНОМ ГЦК-ЖЕЛЕЗЕ¹

Я.М. Ридный², А.А. Мирзоев³, Д.А. Мирзаев⁴

С использованием программного пакета WIEN2k проведено ab-initio моделирование равновесной структуры и свойств ГЦК-железа с примесями углерода. Произведено вычисление энергии растворения атомов углерода в парамагнитном ГЦК-железе. Вычисленное значение энергии растворения составило $0,25 \pm 0,09$ эВ.

Ключевые слова: ГЦК-железо; первопринципное моделирование; примеси углерода; WIEN2k; метод LAPW.

Введение

Углеродистая сталь – это наиболее распространённый конструкционный материал в машиностроении. Углерод, растворённый в железе, повышает его прочность в несколько раз. Обычно используется сталь на основе низкотемпературной ОЦК-фазы железа. Поэтому поведение углерода в сплавах на основе ОЦК-железа изучено достаточно хорошо [1]. Микроструктура сталей зависит от концентрации углерода и условия охлаждения изделий от температуры аустенизации, при которой железо существует в виде ГЦК-фазы (γ -Fe). Эта фаза термодинамически стабильна в интервале температур между 911 и 1391 °С, но при растворении углерода температурный интервал устойчивости γ -фазы расширяется. Однако, кристаллы γ -фазы можно получить при старении сплавов Fe-Cu. Выделяющиеся при распаде мелкие частицы γ -Fe в этом случае устойчивы до 0 К, и, именно благодаря их исследованию, стало известно, что при низких температурах γ -Fe является антиферромагнетиком с точкой Нееля 70 К, а выше нее превращается в парамагнетик, у которого атомный магнитный момент составляет $0,6 \mu_B$ [2–3]. В парамагнитном состоянии внутри объёма кристалла вследствие теплового движения атомных моментов могут возникать различные локальные магнитные структуры (локальные флуктуации магнитного порядка). Если атом углерода попадает в области с различным магнитным порядком, он может обладать различной энергией растворения, а средняя энергия по сплаву будет представлять собой усреднённое значение по таким локальным параметрам. В статье Окатова [4] проводилось моделирование парамагнитного состояния ОЦК и ГЦК-железа двумя способами: методом когерентного потенциала (DLM) [5] и на основе использования спин-спиральных (SS) [6] магнитных упорядочений с различными волновыми векторами q , которые вращаются вокруг оси соответствующей направлению бейновской деформации (001). Было получено, что в ГЦК-железе наиболее стабильными являются: антиферромагнитное однослойное АФМ1-состояние и состояние, полученное методом SS с $q = 0,3$. Однако, в цитируемой работе не изучалось влияние парамагнетизма на энергетические характеристики примесных атомов (например энергия растворения углерода в ГЦК-железе).

Растворение углерода в ГЦК-железе представляет собой эндотермическую реакцию (протекает с поглощением тепла). Экспериментальные значения энергии растворения и значения, полученные с помощью термодинамической оценки, приведены в ряде работ [7–9], из анализа которых можно сделать вывод, что она лежит в интервале от 0,36 до 0,42 эВ. Попытки компьютерного моделирования энергии растворения углерода были предприняты в работах [1, 10–12], но в

¹ Данная работа поддержана грантом РФФИ № 13-03-00138.

² Ридный Ярослав Максимович – студент, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: yaroslav@physics.susu.ac.ru

³ Мирзоев Александр Аминулаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: mirzoev@physics.susu.ac.ru

⁴ Мирзаев Джалал Аминулович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра физического металловедения и материаловедения, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: mirzaev@physmet.susu.ac.ru

них использовались только упорядоченные магнитные состояния, тогда как реальное парамагнитное ГЦК-железо является неупорядоченным.

Очень интересно оценить диапазон возможных значений энергии растворения, как функцию локального магнитного порядка. Поэтому в данной работе предложен метод моделирования парамагнитного состояния и проведён расчёт энергии растворения углерода. Различные неэквивалентные магнитные конфигурации были получены с помощью программы BINAR [13].

В основе алгоритма программы BINAR лежит анализ степени неупорядоченности множества случайных конфигураций, полученных «вбрасыванием» атомов железа со спином вверх в подрешетку атомов железа со спином вниз с использованием генератора случайных чисел (в нашей суперячейке из 32 атомов – 16 атомов со спином вверх и 16 со спином вниз). После этого производится отбраковка конфигураций, не соответствующих критерию неупорядоченности. В качестве такого критерия используется величина суммы квадратов отклонений числа разнородных пар атомов во второй координационной сфере для рассматриваемой конфигурации от статистических средних значений для полностью неупорядоченной бинарной смеси (критерий согласия Пирсона χ^2). В результате определялись магнитные конфигурации, в наибольшей степени соответствующие неупорядоченной ориентации атомных магнитных моментов по узлам суперячейки.

Методы

В данной работе расчёты проводились из первых принципов полнопотенциальным методом LAPW, с учетом обобщенного градиентного приближения PBE-GGA в программном пакете WIEN2k [14], обеспечивающим высокую точность расчета полной энергии при минимальном количестве подгоночных параметров. Это наиболее точные методы используемые в рамках теории функционала плотности DFT [15]. Для расчётов использовался мощный вычислительный комплекс Торнадо [16]. При интегрировании в обратном пространстве и вычислении электронной плотности использовалась схема Монхорста–Пака [17] с сеткой $4 \times 4 \times 4$ k -точек зоны Бриллюэна, для оптимизации геометрических параметров, и сеткой из $7 \times 7 \times 7$ k -точек, для обеспечения точности расчёта полной энергии системы в 1 мРб. Расчёты проводились при значениях параметров моделирования [18], параметр сходимости $K_{\max} = 5$ а.е.⁻¹, радиусы МТ-сфер $R_{\text{mt}}(\text{Fe}) = 2,00$ а.е., $R_{\text{mt}}(\text{C}) = 1,20$ а.е.

Температурный диапазон существования ГЦК-железа лежит выше 1000 К, но особенности программного пакета WIEN2k позволяют провести моделирование только основного состояния системы при 0 К. Поэтому при моделировании ГЦК-железа объёмная минимизация не проводилась, а равновесные параметры решётки были взяты из экспериментальной работы Онинка [19] для $T = 1400$ К: $a = 3,667$ Å – для чистого ГЦК-Fe и $a = 3,687$ Å – для системы из 32 атомов железа и растворённого атома углерода. Магнитные конфигурации, по которым происходило усреднение, строились с помощью программы BINAR.

Для определения энергии растворения углерода относительно фазы графита использовалась формула:

$$\Delta H = E(\text{Fe}_{32}\text{C}) - E(\text{Fe}_{32}) - E(\text{C}), \quad (1)$$

где $E(\text{Fe}_{32}\text{C})$ – энергии отрелаксированной суперячейки, состоящей из 32 атомов железа и одного атома углерода, находящегося в октапоре, $E(\text{Fe}_{32})$ – энергия суперячейки, состоящей из 32 атомов железа, а $E(\text{C})$ – энергия одного атома углерода в решётке графита. Параметры структуры графита были взяты из работы Джанг [1] ($a = 2,462$ Å, $c = 6,656$ Å, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$).

Растворение углерода в ГЦК-железе

В данной работе, с помощью программы BINAR были получены 16 различных неэквивалентных магнитных конфигураций. Среди них были выбраны 5, лежащих ниже остальных по энергии, конфигураций (рис. 1). По известной разности энергии n -конфигурации системы и энергии системы в наименьшем (основном состоянии), была вычислена каноническая статсумма (S):

$$S = \sum_{n=1}^5 S_n, \quad (2)$$

$$S_n = \exp(-(E_n - E_0)/kT), \quad (3)$$

где E_0 – энергия основного состояния, а E_n – энергия системы в n -м энергетическом состоянии; k – коэффициент Больцмана, $T = 1400$ К (средняя температура существования ГЦК-фазы железа).

Из отношения вклада в статсумму от данной конфигурации к всей статсумме была вычислена вероятность существования магнитного состояния и, соответственно, степень влияния данного состояния на энергию растворения углерода в ГЦК-железе.

$$P = \frac{S_n}{S} \quad (4)$$

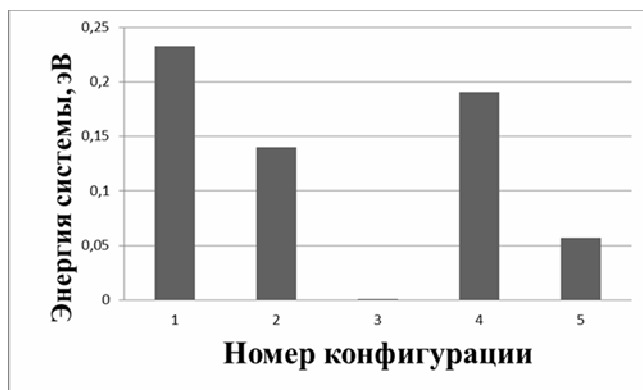


Рис. 1. График зависимости энергии системы от номера конфигурации. Энергии систем взяты относительно энергии самой низкой конфигурации

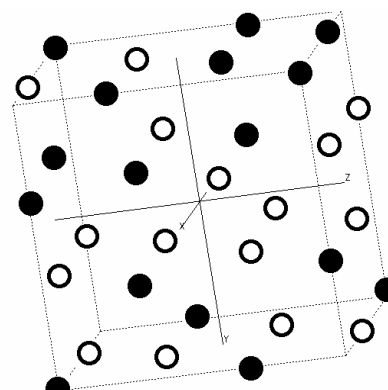


Рис. 2. Магнитная конфигурация суперячейки из 32 атомов железа, использованная для моделирования парамагнитного состояния в ГЦК-железе, обладающая наименьшей энергией: ● – атомы железа со спином вверх, ○ – со спином вниз

При растворении углерод не равномерно расталкивает ближайшие атомы железа, в зависимости от конфигурации, но в среднем на 6,1 %. Это меньше чем при растворении в немагнитном (НМ) 7,5 % и антиферромагнитном двухслойном (АФМД) 6,5 % состояниях. Значения энергии растворения углерода и соответствующие вероятности существования различных магнитных структур внесены в табл. 1.

Таблица 1
Вероятность существования 5 различных парамагнитных конфигураций матрицы ГЦК-железа и энергия растворения углерода в них

Номер конфигурации	Вероятность	Энергия растворения, эВ
1	6 %	-0,08
2	14 %	0,24
3	44 %	0,3
4	9 %	0,19
5	27 %	0,29

Из анализа табл. 1 видно, что энергия растворения в парамагнитном состоянии составила $0,25 \pm 0,09$ эВ. Сравнение значений энергии растворения углерода для концентрации 3 ат. % углерода, проведено в табл. 2.

Таблица 2
Энергии растворения углерода в парамагнитном ГЦК-железе

Работа	Энергия растворения, эВ
Данная работа	$0,25 \pm 0,09$
Данная работа (АФМД)	0,34
Эксп.[7]	0,36
Термодин. [8]	0,42
Эксп.[9]	$0,42 \pm 0,02$

Результаты табл. 2, показывают, что учёт парамагнетизма снижает энергию растворения углерода на 35 %. Однако, значение энергии, полученное теоретически, неплохо совпадает с экспериментальными результатами, что говорит о работоспособности выбранного нами метода и возможности моделирования им других энергетических характеристик, таких как энергия взаимодействия, вклад упругих эффектов и т.д.

Заключение

1. Результат усреднения по наиминимум по энергии магнитным конфигурациям, наиболее близким к парамагнитному беспорядку, показал, что после внедрения в решётку γ -железа атом углерода расталкивает ближайшие атомы железа в среднем на 6,1 %, что меньше чем при растворении в НМ 7,5 % и АФМД 6,5 % состояниях.

2. Энергия растворения углерода в парамагнитном состоянии γ -Fe составила $0,25 \pm 0,09$ эВ. Таким образом, учёт парамагнетизма снижает энергию растворения на 35 %. Однако, значение энергии, полученное этим методом, неплохо совпадает с экспериментальными результатами, что говорит о его работоспособности.

Литература

1. Jiang, D.E. Carbon dissolution and diffusion in ferrite and austenite from first principles / D.E. Jiang, E.A. Carter // *Physical Review B*. – 2003. – Vol. 67. – P. 214103.

2. Acet, M. The Role of the Nature of Magnetic Coupling on the Martensitic Transformation in Fe-Ni / M. Acet, E.F. Wassermann, K. Andersen *et al.* // *Journal de Physique IV France*. – 1997. – Vol. 7, № C5. – P. 401–404.

3. Weiss, R.J. Components of the Thermodynamic Functions of Iron / R.J. Weiss, K.J. Tauer // *Physical Review*. – 1956. – Vol. 102, № 6. – P. 1491–1495.

4. Effect of magnetic state on the γ - α transition in iron: First-principles calculations of the bain transformation path / S.V. Okatov, V.N. Urtsev, M.I. Katsnelson *et al.* // *Physical Review B*. – 2009. – Vol. 79. – P. 094111.

5. A first-principles theory of ferromagnetic phase transitions in metals / B.L. Gyorffy, A.J. Pindor, J. Staunton *et al.* // *Journal of Physics F: Metal Physics*. – 1985. – Vol. 15, № 6. – P. 1337–1386.

6. Marsman, M. Broken symmetries in the crystalline and magnetic structures of γ -iron / M. Marsman, J. Hafner // *Physical Review B*. – 2002. – Vol. 66. – P. 224409.

7. Gustafson, P. Thermodynamic evaluation of the Fe-C system / P. Gustafson // *Scandinavian Journal of Metallurgy*. – 1985. – Vol. 14. – Issue 5. – P. 259–267.

8. Могутнов, Б.М. Термодинамика сплавов железа / Б.М. Могутнов, И.А. Томилин, Л.А. Шварцман. – М.: Металлургия, 1984. – 206 с.

9. Lobo, J.A. Thermodynamics of carbon in austenite and Fe-Mo austenite / J.A. Lobo, G.H. Geiger // *Metallurgical Transactions A*. – 1976. – Vol. 7, № 8. – P. 1359–1364.

10. First-principles study of helium, carbon, and nitrogen in austenite, dilute austenitic iron alloys, and nickel / D.J. Hepburn, D. Ferguson, S. Gardner, G.J. Ackland // *Physical Review B*. – 2013. – Vol. 88. – P. 024115.

11. Magnetism and Local Distortions near Carbon Impurity in γ -Iron / D.W. Boukhvalov, Y.N. Gornostyrev, M.I. Katsnelson, A.I. Lichtenstein // *Physical Review Letters*. – 2007. – Vol. 99. – P. 247205.

12. Slane, J.A. Experimental and Theoretical Evidence for Carbon-Vacancy Binding in Austenite / J.A. Slane, C. Wolverton, R. Gibala // *Metallurgical and Materials Transactions A*. – 2004. – Vol. 35, № 8 – P. 2239–2245.

13. Деянов, П.З. ODSS(Ordered-Disordered-Solid-Solution) Ver.1.–binar Программа расчета неупорядоченных сверхячеек для моделирования твердых растворов замещения / П.З. Деянов, Н.Н. Еремин, В.С. Урусов. – М., 2006–2007. – <http://cryst.geol.msu.ru/odss/binar.pdf>

14. Schwarz, K. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material science / K. Schwarz, P. Blaha, G.K.H. Madsen // *Computer Physics Communications*. – 2002. – Vol. 147. – P. 71–76.

15. Cottenier, S. Density Functional Theory and the family of (L)APW-methods: a step-by-step introduction / S. Cottenier. – 2004. – http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/DFT_and_LAPW-2_cottenier.pdf

16. <http://supercomputer.susu.ac.ru/computers/tornado/>

17. Monkhorst, H.J. Special points for Brillouin-zone integrations / H.J. Monkhorst, J.D. Pack // *Physical Review B*. – 1976. – Vol. 13, № 12. – P. 5188–5192.

18. Ридный, Я.М. *Ab-initio* моделирование влияния ближнего окружения примесей углерода на энергию их растворения в ГЦК-железе / Я.М. Ридный, А.А. Мирзоев, Д.А. Мирзаев // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 108–116.

19. The lattice parameters of austenite and ferrite in Fe-C as functions of carbon concentration and temperature / M. Onink, C.M. Brakman, F.D. Tichelaar *et al.* // Scripta Metallurgica Et Materialia. – 1993. – Vol. 29, № 8. – P. 1011–1016.

Поступила в редакцию 19 мая 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 86–91*

AB-INITIO SIMULATION OF DISSOLUTION ENERGY OF CARBON ATOM IN THE PARAMAGNETIC STATE OF FCC-IRON

Ya.M. Ridnyi¹, A.A. Mirzoev², D.A. Mirzaev³

Ab-initio simulation of an equilibrium structure and FCC-iron characteristics was carried out using the WIEN2k software package. The dissolution energy of a carbon atom in the paramagnetic states of FCC-iron was calculated according to statistical methods, obtaining the result of $0,25 \pm 0,09$ eV.

Keywords: FCC-iron; first principle simulation; carbon impurities; WIEN2k; LAPW method.

References

1. Jiang D.E., Carter E.A. Carbon dissolution and diffusion in ferrite and austenite from first principles. *Physical Review B*. 2003. Vol. 67. p. 214103.
2. Acet M., Wassermann E.F., Andersen K., Murani A., Scharpf O. The Role of the Nature of Magnetic Coupling on the Martensitic Transformation in Fe-Ni. *Journal de Physique IV France*. 1997. Vol. 7, no. C5. pp. 401–404.
3. Weiss R.J., Tauer K.J. Components of the Thermodynamic Functions of Iron. *Physical Review*. 1956. Vol. 102, no. 6. pp. 1491–1495.
4. Okatov S.V., Urtsev V.N., Katsnelson M.I., Kuznetsov A.R., Gornostyrev Yu.N. Effect of magnetic state on the γ - α transition in iron: First-principles calculations of the bain transformation path. *Physical Review B*. 2009. Vol. 79. p. 094111. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.79.094111>
5. Gyorffy B.L., Pindor A.J., Staunton J., Stocks G.M., Winter H. A first-principles theory of ferromagnetic phase transitions in metals. *Journal of Physics F: Metal Physics*. 1985. Vol. 15, no. 6. pp. 1337–1386.
6. Marsman M., Hafner J. Broken symmetries in the crystalline and magnetic structures of g-iron. *Physical Review B*. 2002. Vol. 66. pp. 224409.
7. Gustafson P. Thermodynamic evaluation of the Fe-C system. *Scandinavian Journal of Metallurgy*. 1985. Vol. 14. Issue 5. pp. 259–267.
8. Mogutnov B.M., Tomilin I.A., Shvartsman L.A. *Termodinamika splavov zheleza* (Thermodynamics of ferroalloys). Moscow, Metallurgiya, 1984. 206 p. (in Russ.).
9. Lobo J.A., Geiger G.H. Thermodynamics of carbon in austenite and Fe-Mo austenite. *Metallurgical Transactions A*. 1976. Vol. 7, no. 8. pp. 1359–1364.
10. Hepburn D.J., Ferguson D., Gardner S., Ackland G.J. First-principles study of helium, carbon, and nitrogen in austenite, dilute austenitic iron alloys, and nickel. *Physical Review B*. 2013. Vol. 88. p. 024115. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.88.024115>
11. Boukhalov D.W., Gornostyrev Y.N., Katsnelson M.I., Lichtenstein A.I. Magnetism and Local Distortions near Carbon Impurity in g-Iron. *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99. pp. 247205.

¹ Ridnyi Yaroslav Maksimovich is Student, South Ural State University.

E-mail: yaroslav@physics.susu.ac.ru

² Mirzoev Aleksander Aminulaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

E-mail: mirzoev@physics.susu.ac.ru

³ Mirzaev Dzhalal Aminulovich is Dr. Sc.(Physics and Mathematics), Professor, Department of Physical Metallurgy and Material Science, Southern Ural State University.

E-mail: mirzayev@physmet.susu.ac.ru

12. Slane J.A., Wolverton C., Gibala R. Experimental and Theoretical Evidence for Carbon-Vacancy Binding in Austenite. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2004. Vol. 35, no. 8. pp. 2239–2245.

13. Deyanov R.Z., Eremin N.N., Urusov V.S. *ODSS (Ordered-Disordered-Solid-Solution) Ver.1.–binary. Programma rascheta neuporyadochennykh sverkhycheeek dlya modelirovaniya tverdykh rastvorov zameshcheniya* (Calculation of unordered supercells for simulation of substitution solid solution). Moscow, 2006–2007. [<http://cryst.geol.msu.ru/odss/binar.pdf>].

14. Schwarz K., Blaha P., Madsen P. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material science. *Computer Physics Communications*. 2002. Vol. 147. pp. 71–76.

15. Cottenier S. Density Functional Theory and the family of (L)APW-methods: a step-by-step introduction. 2004. [http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks//DFT_and_LAPW-2_cottenier.pdf].

16. <http://supercomputer.susu.ac.ru/computers/tornado/>

17. Monkhorst H.J., Pack J.D. Special points for Brillouin-zone integrations. *Physical Review B*. 1976. Vol. 13, no. 12. pp. 5188–5192.

18. Ridnyi Ya.M., Mirzoev A.A., Mirzaev D.A. Ab-initio modelirovanie vliyaniya blizhnego okruzheniya primesey ugleroda na energiyu ikh rastvoreniya v GTsK-zheleze (*Ab-initio* simulation of influence of short-range ordering carbon impurities on the energy of their dissolution in the FCC-iron). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2013. Vol. 5, no. 2. pp. 108–116. (in Russ.).

19. Onink M., Brakman C.M., Tichelaar F.D., Mittemeijer E.J., Van der Zwaag S., Root J.H., Kon-
yer N.B. The lattice parameters of austenite and ferrite in Fe-C as functions of carbon concentration and temperature. *Scripta Metallurgica Et Materialia*. 1993. Vol. 29, no. 8. pp. 1011–1016.

Received 19 May 2014

ОБРАТНЫЙ БЕТА-РАСПАД ИТТРИЯ-90 ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРИНО УЛЬТРАНИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

О.С. Стадник¹, А.А. Шульгинов²

Проведено экспериментальное исследование процесса бета-распада ⁹⁰Y с целью обнаружения признаков влияния нейтрино ультранизких энергий на скорость распада. Для концентрации потоков нейтрино использовалась свинцовая линза. Исследования показали: с вероятностью около 90 % можно утверждать, что имеются признаки такого процесса.

Ключевые слова: бета-распад; нейтрино ультранизких энергий; статистический анализ; критерий Роснера.

Введение

Реакция обратного бета-распада используется специалистами по физике нейтрино для исследования процессов, происходящих внутри Солнца. При термоядерных реакциях возникает поток нейтрино, способных произвести обратный бета-распад: $^{37}\text{Cl} + \nu_e = ^{37}\text{Ar} + e^-$ или $^{71}\text{Ga} + \nu_e = ^{71}\text{Ge} + e^-$ [1]. Этот процесс крайне маловероятен. Так, в галлий-германиевом эксперименте, проводимом в Баксанской нейтринной обсерватории ИЯИ РАН, в 50 т галлия под воздействием солнечных нейтрино возникает всего около 2 атомов германия в сутки! Это обусловлено тем, что сечение рассеяния нейтрино на ядрах при энергиях сотни кэВ исключительно мало – $\sigma \sim 10^{-43}$ см². Причём, эта реакция пороговая, т.е. минимальная энергия нейтрино, необходимая для неё – 233 кэВ. Главный вопрос о природе нейтрино остаётся открытым: массивны ли эти частицы? Исследователи склоняются к тому, что масса нейтрино не равна нулю. По последним данным сумма масс всех трёх типов нейтрино не более 0,28 эВ [2].

А.Г. Пархомов предложил для исследования космических нейтрино беспороговую реакцию: $^{90}\text{Y} + \nu_e = ^{90}\text{Zr} + e^-$ [3–5]. Иттрий-90 – дочерний изотоп, образующийся при бета-распаде стронция-90. Чтобы отделить электроны, образующиеся при возможных обратных бета-распадах, от тех электронов, которые образуются при спонтанных распадах иттрия-90 и стронция-90, было предложено ослабить поток бета-частиц с помощью металлических пластинок. Максимальная энергия бета-спектра при распаде ⁹⁰Sr составляет 0,546 МэВ, а при распаде ⁹⁰Y – 2,28 МэВ. Поскольку при обратном бета-распаде практически всю энергию распада уносит электрон, то максимальную энергию в спектре бета-частиц будут иметь электроны, возникшие при обратном бета-распаде иттрия. Это позволяет их относительно легко выделить на фоне остальных электронов. К достоинствам этого метода обнаружения обратного бета-распада относится и то, что ⁹⁰Sr – ⁹⁰Y – чистый бета-источник, который не даёт гамма-фона. Другим преимуществом предложенного метода является отсутствие энергетического порога, а значит, она может протекать даже при нулевой энергии нейтрино. Сечение взаимодействия частиц с ядрами $\sigma \sim 1/V^2$ в нерелятивистском случае, где V – скорость частицы. Значит, следует ожидать, что при ультранизких энергиях нейтрино (менее 1 эВ) их сечение взаимодействия с ядром возрастёт на много порядков и может достичь значений, при которых эта реакция станет доступной для обнаружения даже несложными детекторами. Кроме того, при малых скоростях движения нейтрино их длина волны де Бройля становится гораздо больше, чем межатомное расстояние в твёрдых веществах. Это приводит к тому, что взаимодействие нейтрино с твёрдыми веществами должно носить макроскопический характер. Следовательно, можно ввести понятие «показатель преломления» для нейтринных волн n . Как показали исследования А.Г. Пархомова [3], для стекла $n = 0,95$, а для свинцово-оловянного сплава $n = 0,80–0,85$. Так как $n < 1$, то плосковогнутая линза из металла должна фокусировать по-

¹ Стадник Ольга Степановна – доцент, кандидат биологических наук, кафедра адаптивной физической культуры, физиологии и биохимии, Институт спорта, туризма и сервиса, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: stadnikos@susu.ac.ru

² Шульгинов Александр Анатольевич – доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра общей и экспериментальной физики, Физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: shulginovaa@susu.ac.ru; a.a.shulginov@yandex.ru

токи нейтрино ультранизких энергий. Таким образом, на скорость бета-распада могут влиять внешние условия, например, изменяющиеся потоки нейтрино ультранизких энергий, которые могут составлять часть скрытой материи. В работах других исследователей [6–8] было также доказано, что скорость бета-распада некоторых радионуклидов подвержена вариациям различной длительности.

Экспериментальные исследования обратного бета-распада

В данной работе поставлена цель – исследовать обратный бета-распад радионуклидов ^{90}Y под воздействием космических потоков нейтрино ультранизких энергий. Согласно гипотезе А.Г. Пархомова вокруг центра Галактики, вокруг Солнца и планет существует нейтриносфера из частиц, движущихся со скоростью от нескольких км/с до нескольких сотен км/с. Потоки этих частиц попадают на Землю и могут быть сфокусированы с помощью параболических зеркал, специальных дифракционных решёток, или фокусирующих металлических линз. Астрофизик Н.А. Козырев для фокусировки потоков частиц использовал зеркало телескопа-рефлектора Крымской астрофизической обсерватории [9]. В данной работе для фокусировки использована свинцовая плосковогнутая линза диаметром $d = 82$ мм и радиусом кривизны вогнутой поверхности $R = 62$ мм. Если предположить, что показатель преломления потоков нейтрино для свинца $n = 0,8$ [3], то фокусное расстояние линзы составляет $f = R/(n-1) = 310$ мм. Бета-источник – ^{90}Sr – ^{90}Y был помещён в предполагаемом главном фокусе свинцовой линзы. Главная оптическая ось линзы была направлена в окно на восток под углом примерно 30° к горизонту и, её ориентация не изменялась в течение всего эксперимента. Поток электронов, образующийся при бета-распаде, проходил через несколько алюминиевых пластин толщиной 0,3 мм. Число пластин было выбрано 4 и 5, исходя из того, чтобы через них проходили только самые высокоэнергетические частицы. Они регистрировались с помощью трубки Гейгера СБМ-20, соединённой с компьютером. Длительность измерений составляла 2–3 суток. Этот детектор чувствителен также и на гамма-частицы, которые создают изменяющийся фон. Исследованию особенностей гамма-фона была посвящена работа [10]. Средний поток бета-частиц, регистрируемых детектором, был примерно равен среднему уровню гамма-фона. Если повысить поток регистрируемых электронов путём уменьшения числа пластин, то детектор будет регистрировать не только электроны, возникающие в результате обратного бета-распада, но и те электроны, которые возникли в результате спонтанного бета-распада иттрия.

Компьютер круглосуточно в автоматическом режиме регистрировал сигналы от трубки Гейгера и обрабатывал их, а также производил запись результатов в файл. Длительность одного измерения составляла 30 с. За каждый i -й промежуток времени определялось количество сигналов, средний промежуток времени между сигналами Δt_i и коэффициент вариации $V_i = \sigma_i/\Delta t_i$, где σ_i – стандартное отклонение промежутков времени от среднего значения за время i -го промежутка времени. Измерения проводились при наличии линзы и без неё. В качестве исследуемых параметров были выбраны: средняя частота сигналов $f_i = 1/\Delta t_i$ и коэффициент вариации V_i . Число таких измерений за время одной серии составляло 5000–8000. Далее каждая серия разделялась на отдельные выборки по 100 измерений. С помощью критерия Роснера в каждой выборке выделялись выбросы по массивам f_i и V_i . Такой критерий успешно использовался для выделения выбросов флуктуаций проводимости различных металлов [11]. Средняя частота сигналов – это энергетическая характеристика процесса, коэффициент вариации это его информационная характеристика, которая показывает быстроту изменения процесса. Если внешнего воздействия нет, то средний коэффициент вариации должен стремиться к 1. В этих исследованиях необходимо было проверить статистику именно положительных выбросов f_i и V_i в каждой выборке. Если обратный бета-распад происходит в течение коротких промежутков времени (гораздо меньше времени измерения 30 с), то это может вызвать положительный скачок коэффициента вариации V_i , а если этот процесс имеет длительность, соизмеримую со временем измерения, то могут наблюдаться скачки f_i .

Критерий Роснера, использованный для выделения скачков [12, с. 557], применяется, когда количество выбросов m заранее неизвестно. Алгоритм критерия Роснера состоит в следующем. По начальной выборке x_1, x_2, \dots, x_n вычисляют \bar{x} , σ_x и параметр $\tau_1 = \max(|x_j - \bar{x}|/\sigma_x)$. Затем из выборки удаляется то значение, которое более других удалено от среднего \bar{x} . Так повторяется k

раз, пока $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k > \tau_{k+1}$. После этого, параметры τ_i ($i = 1..k$) сравнивают с критическими значениями $\tau_{i,k,n}^*(p)$, где p – доверительная вероятность, которая была выбрана равной 0,95. Необходимо найти максимальное значение i_{\max} , которое удовлетворяет условию: $\tau_{i_{\max}} > \tau_{i_{\max},k,n}^*(p)$, тогда количество выбросов $m = i_{\max}$. Помимо количества положительных выбросов N в каждой серии измерений были определены их величины относительно критических значений: $\xi_i = \tau_i - \tau_{i,k,n}^*(p)$. Эти величины показывают силу выбросов. Кроме того, был введён дополнительный параметр, характеризующий силу выбросов: $\eta_i = \xi_i^2$.

Анализ результатов измерений показал, что по средней частоте f сигналов с трубки Гейгера никаких статистически значимых различий при наличии линзы и при её отсутствии не обнаружено ни при каком количестве алюминиевых пластин. Для дальнейшего анализа были выбраны коэффициенты вариации ($x_i = V_i$). Результаты статистического анализа коэффициентов вариации приведены в таблице. P – вероятность того, что $\bar{\xi}_1 > \bar{\xi}_2$ [12 с. 389].

Результаты измерений коэффициента вариации V

№	Дата начала измерения	Длительность измерения, ч	Число пластин	Наличие линзы	$\bar{\xi}$	σ_{ξ}	N	$P, \%$	$\bar{\eta}$
1	14-04-2014	45,7	4	Есть, $l = 300$ мм*	1,26	1,29	34	93	3,22
2	16-04-2014	72,5	4	Нет	0,86	0,96	47		1,64
3	19-04-2014	49,7	5	Нет	1,03	1,18	46	86	2,42
4	21-04-2014	43,8	5	Есть, $l = 280$ мм	1,35	1,22	26		3,27
5	23-04-2014	85,6	5	Есть, $l = 300$ мм	1,31	1,29	49	85	3,35
6	26-05-2014	45,8	5	Есть, $l = 200$ мм	1,04	1,05	34		2,16

* l – расстояние от плоской поверхности линзы до бета-источника.

Статистический анализ положительных выбросов коэффициентов вариации показал, что, если иттрий-90 помещён вблизи предполагаемого фокуса свинцовой линзы (измерения № 1 и 4), то скачки коэффициента вариации ξ_i становятся сильнее, чем без линзы (измерения № 2 и 3). Аналогичный вывод можно сделать из анализа коэффициентов η_i . Кроме того, если бета-источник значительно удалён от предполагаемого фокуса линзы (измерение № 6), то результат будет мало отличаться от результата, полученного без применения линзы (измерение № 3).

Выводы

1. Обнаружены признаки обратного бета-распада иттрия-90 под воздействием нейтрино ультранизких энергий.
2. Воздействия потоков нейтрино носят, вероятно, кратковременный характер длительностью гораздо меньше 30 с.
3. Свинцовая плосковогнутая линза способна фокусировать потоки нейтрино ультранизких энергий. Показатель преломления нейтрино в свинце оказался близким к значению, полученному А.Г. Пархомовым [3], $n = 0,8$.

Литература

1. Гаврин, В.Н. Российско-американский галлиевый эксперимент SAGE / В.Н. Гаврин // УФН. – 2011. – Т. 181, № 9. – С. 975–984.
2. Thomas, S.A. Upper Bound of 0.28 eV on Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey / S.A. Thomas, F.B. Abdalla, O. Lahav // Physical Review Letters. – 2010. – V. 105, № 3. – P. 031301.
3. Пархомов, А.Г. Космос. Земля. Человек. Новые грани науки / А.Г. Пархомов. – М.: Наука, 2009. – 272 с.
4. Пархомов, А.Г. Исследование неслучайных вариаций результатов измерения радиоактивности / А.Г. Пархомов // Атлас временных вариаций природных, антропогенных и социальных процессов. – М.: Янус-К, 2002. – Т. 3. – С. 607–612.
5. Parkhomov, A.G. Bursts of Count Rate of Beta-Radioactive Sources during Long-Term Measurements / A.G. Parkhomov // International Journal of Pure and Applied Physics. – 2005. – V. 1, № 2. – P. 119–128.
6. Экспериментальные исследования изменений в скорости бета-распада радиоактивных элементов / Ю.А. Бауров, Ю.Г. Соболев, В.Ф. Кушнирук и др. // Физическая мысль России. – 2000. – № 1. – С. 1–7.
7. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах / С.Э. Шноль, В.А. Коломбет, Э.В. Пожарский и др. // УФН. – 1998. – Т. 168, № 10. – С. 1129–1140.
8. Goleminov, N.G. Possible nuclear activity of dark matter / N.G. Goleminov // Gravitation and cosmology. – 2002. – V. 8. – P. 2017–2020.
9. Козырев, Н.А. Избранные труды / Н.А. Козырев. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1991. – 448 с.
10. Шульгинов, А.А. Двумерная функция распределения результатов измерений гамма-фона / А.А. Шульгинов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2014. – Т. 6, № 2. – С. 68–71.
11. Шульгинов, А.А. Фликкер-шумовая спектроскопия флуктуаций проводимости плёнок платины и пермаллоя / А.А. Шульгинов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2009. – Вып. 1. – № 22(155). – С. 105–107.
12. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.

Поступила в редакцию 30 мая 2014 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 92–96*

INVERSE BETA DECAY OF YTTRIUM-90 UNDER THE INFLUENCE OF NEUTRINO ULTRA-LOW ENERGIES

O.S. Stadnik¹, A.A. Shulginov²

This work is devoted to the study of inverse beta decay of yttrium under the influence of neutrino ultralow energies. A.G. Parkhomov proposed for the study of cosmic neutrinos thresholdless reaction: ${}^{90}\text{Y} + \nu_e = {}^{90}\text{Zr} + e^-$ [3–5]. Since in the case of inverse beta decay, almost all the energy decay takes the electron, the maximum energy in the spectrum beta-particles will have the electrons arising due to inverse beta decay of yttrium. Therefore, such electrons easy separate on the background. Besides, the section of interaction of ultralow energy neutrinos (less than 1 eV) with the nucleus increase by many or-

¹ Stadnik Olga Stepanovna is Cand. Sc. (Biology), Associated Professor, Adaptive Physical Culture, Physiology and Biochemistry Department, Institute of Sport, Tourism and Service, South Ural State University.

E-mail: stadnikos@susu.ac.ru

² Shulginov Alexandr Anatolyevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associated Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University.

E-mail: shulginovaa@susu.ac.ru; a.a.shulginov@yandex.ru

ders of magnitude is compared with neutrinos of nuclear energy (> 100 keV). We focused on neutrino fluxes by lead planar-concave lens. According to the results [3], the refractive index neutrinos of ultralow energies in matter less than 1 and is about 0,8 for lead. The flow of electrons generated in beta decay, passed through several aluminum plates, and their number was selected so that only very high-energy particles passed through plates. The electrons were registered by the GM tube connected to a computer. Beta-source – ^{90}Sr - ^{90}Y was placed in the supposed main focus of lead lens. The main optical axis of the lens was directed to the window to the east at an angle of about 30 degrees to the horizon and its orientation did not change during the whole experiment. The duration of measurements was 2–3 days. The average frequency f_i and the variation coefficient V_i were chosen as investigated parameters. Outliers of f_i and V_i were separated by using the Rosner criterion. The statistical analysis of the positive outliers of variation coefficients V_i has shown a significant increase in their average value in using the focusing of neutrinos.

Keywords: beta decay; neutrino ultralow energies; statistical analysis; Rosner criterion.

References

1. Gavrilin V.N. The Russian-American gallium experiment SAGE. *Phys. Usp.* 2011. Vol. 54. pp. 941–949. DOI: 10.3367/UFNe.0181.201109g.0975
2. Thomas S.A., Abdalla F.B., Lahav O. Upper Bound of 0.28 eV on Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey. *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 105, no. 3. p. 031301.
3. Parkhomov A.G. *Kosmos. Zemlya. Chelovek. Novye grani nauki* (Space. Earth. People. New facets of science). Moscow, Nauka Publ., 2009. 272 p. (in Russ.).
4. Parkhomov A.G. Issledovanie necluchaynykh variatsiy rezul'tatov izmereniya radioaktivnosti (Investigation of the non-random variations of the results of measurements of radioactivity). *Atlas vremennykh variatsiy prirodnykh, antropogennykh i social'nykh processov*. Vol. 3. Moscow, Yanus-K Publ., 2002. pp. 607–612. (in Russ.).
5. Parkhomov A.G. Bursts of Count Rate of Beta-Radioactive Sources during Long-Term Measurements. *International Journal of Pure and Applied Physics*. 2005. Vol. 1, no. 2. pp. 119–128.
6. Baurov Yu.A., Sobolev Yu.G., Kushniruk V.F. Eksperimental'nye issledovaniya izmeneniy v skorosti beta-raspada radioaktivnykh elementov (Experimental studies of changes in the rate of beta-decay of radioactive elements). *Fizicheskaya mysl' Rossii*. 2000. no. 1. pp. 1–7. (in Russ.).
7. Shnoll S.E., Kolombet V.A., Pozharskii E.V., Zenchenko T.A., Zvereva I.M., Konradov A.A. Realization of discrete states during fluctuations in macroscopic processes. *Phys. Usp.* 1998. Vol. 41. pp. 1025–1035. DOI: 10.1070/PU1998v041n10ABEH000463.
8. Goleminov, N.G. Possible nuclear activity of dark matter. *Gravitation and cosmology*. 2002. Vol. 8. pp. 2017–2020.
9. Kozyrev N.A. *Izbrannye trudy* (Selected Works). Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta Publ., 1991. 448 p. (in Russ.).
10. Shulginov A.A. Dvumernaya funktsiya raspredeleniya rezul'tatov izmereniy gamma-fona (Two-dimensional distribution function for the results of gamma background measuring). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2014. Vol. 6, no. 1. pp. 139–142. (in Russ.).
11. Shulginov A.A. Flicker-shumovaya spektroskopiya fluktuatsiy provodimosti plyenok platiny i permalloya (Flicker-noise spectroscopy of fluctuation of platinum films and permalloy conductivity). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2009. Vol. 1, no. 22. pp. 105–107. (in Russ.).
12. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* (Applied Mathematical Statistics. For engineers and scientists). Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 816 p. (in Russ.).

Received 30 May 2014

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации от 19 февраля 2010 г. № 6/6 журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Периодичность выхода – 4 раза в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (не более 500 знаков с пробелами), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, аннотация (или реферат статьи объемом до 1800 знаков с пробелами), список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, физический факультет, кафедра ОиТФ, ответственному редактору профессору Мирзоеву Александру Аминулаевичу [Prof. Mirzoev Aleksander Aminulaevich, General and Theoretical Physics Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: vestnik@physics.susu.ac.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>) следуя ссылкам: «Информация о научных исследованиях», «Издательская деятельность», «Вестник ЮУрГУ», «Серии».

10. Журнал распространяется по подписке. Подписной индекс журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Математика. Механика. Физика»: 29211, каталог «Пресса России». Интернет-каталог агентства «Книга-Сервис», подписной индекс: E29211. Электронная версия: см. www.elibrary.ru.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор *М.Н. Атауллина*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 01.10.2014. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 11,62. Тираж 500 экз. Заказ 301/392.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.