Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Механика

Физика

Персоналии

CONTENTS

Mathematics

Mechanics

Physics

Personalia

Математика

УДК 515.162.3

КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ, МИНИМАЛЬНЫЕ ОКТАЭДРАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ КОТОРЫХ НЕ ЛЕЖАТ В КОЛЬЦЕ[1]

А.А. Акимова[2]

Построена таблица узлов в $T\times I$, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и соответствуют графу «октаэдр». Табулирование проводится в три этапа. Сначала мы составляем таблицу таких проекций узлов на T. Далее преобразуем каждую проекцию в набор соответствующих ей диаграмм. После этого, используя в качестве инварианта обобщенную версию скобки Кауфмана, мы отбрасываем дубликаты и доказываем, что все построенные узлы различны.

Ключевые слова: узел; утолщённый тор; таблица узлов.

Введение

Задача табулирования является центральной проблемой теории узлов. Тенденция к развитию теории узлов в трехмерных многообразиях, отличных от трёхмерной сферы S^3, наблюдающаяся в последние годы, привела к задаче табулирования глобальных узлов. Мы рассматриваем продолжение классической теории узлов в S^3 на случай узлов в утолщенном торе $T\times I$, как в одном из самых простых трёхмерных многообразий после S^3. Узлы в $T\times I$ можно задавать диаграммами на T, аналогичными сферическим диаграммам классических узлов. При этом роль преобразований Рейдемайстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Из немногих работ по табулированию узлов в других многообразиях упомянем работы [1, 2] по узлам в проективном пространстве и [3] по узлам в полном торе. Эффективный метод табулирования тэнглов описан в [4]. Таблица виртуальных узлов представлена в [5]. Настоящая статья продолжает исследование, начатое в работах [6, 7].

Автор выражает благодарность профессору С.В. Матвееву за постановку задачи и помощь в её решении.

1. Основной результат

Будем рассматривать узлы (т.е. простые замкнутые кривые) в $T\times I$ с точностью до эквивалентности в смысле гомеоморфизма. Проекция G узла $K\subset T\times I$ представляет собой регулярный граф $G\subset T$ степени 4, для которого прохождение вершин по правилу «прямо вперед» определяет полный обход, отвечающий узлу. Диаграмма D узла K получается из этого графа указанием (путем разрывов обхода), какой из проходящих через каждую вершину участков узла расположен выше, какой – ниже другого в смысле величины координаты $t\subset I$. Две проекции считаются эквивалентными, если одна получается из другой гомеоморфизмом T на себя. Эквивалентность диаграмм имеет тот же смысл, но дополнительно разрешается одновременно изменять типы всех перекрестков.

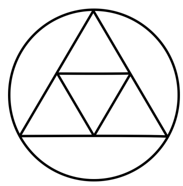


Рис. 1. Граф «октаэдр»

Определение 1. Диаграмма D узла K называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы каждого узла, эквивалентного узлу K. Проекция $G\subset T$ называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Мы будем рассматривать только те узлы в $T\times I$, которые не лежат в утолщенном кольце. Поэтому мы не включаем в таблицу узлы, минимальные диаграммы которых можно расположить в некотором кольце на T. Дело в том, что такие узлы близки к узлам в полном торе, табулирован-

---

[1] Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020), гранта РФФИ № 12-01-00748 и гранта ведущих научных школ 1015.2014.1.

[2] Акимова Алена Андреевна – аспирант, Южно-Уральский государственный университет; лаборатория квантовой топологии, Челябинский государственный университет.
E-mail: akimova_susu@mail.ru

ным в [3]. Заметим также, что мы не рассматриваем локальные узлы, потому что они являются уже табулированными узлами в S^3.

Следующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 1. Существуют ровно 53 различных узла в T×I, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и соответствуют графу «октаэдр», представленному на рис. 1. Эти диаграммы изображены на рис. 2.

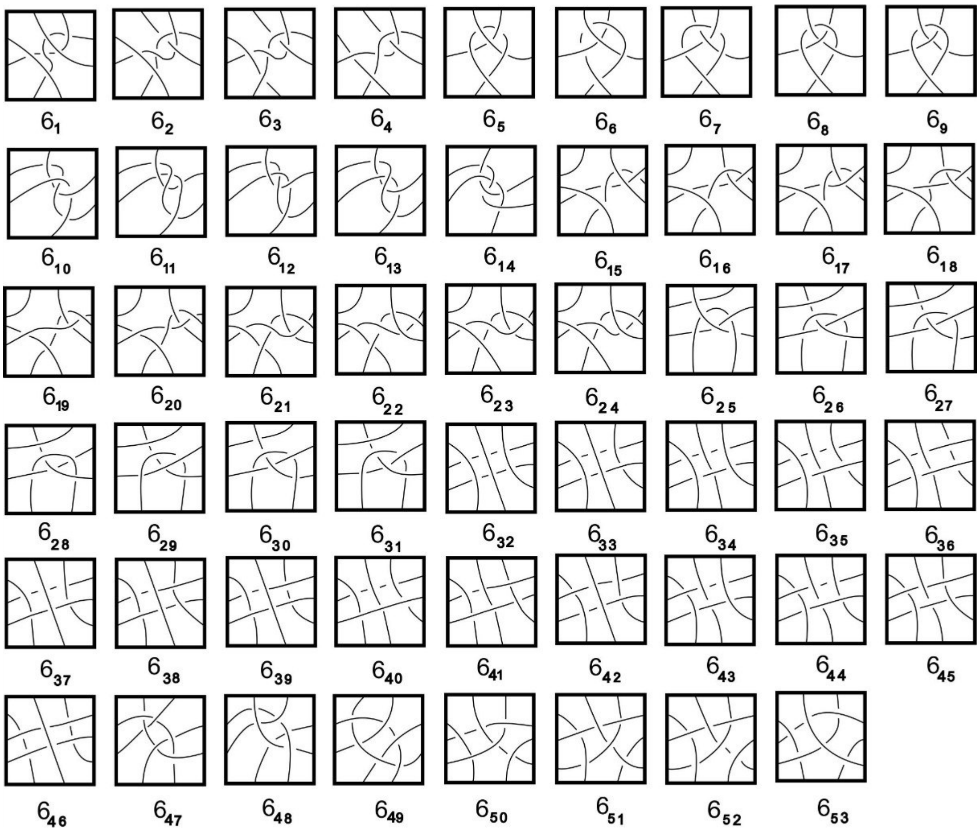


Рис. 2. Диаграммы с 6 перекрестками узлов на торе T, не лежащие в кольце и отвечающие графу типа «октаэдр». Тор T представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Доказательство теоремы 1 состоит из четырех частей и аналогично доказательству соответствующей теоремы, подробно описанному в [6]. Сначала мы перебираем все минимальные проекции с 6 перекрестками на торе T, имеющие октаэдральный тип и не лежащие в кольце, затем – соответствующие им минимальные диаграммы. При этом дубликаты отбрасываются. На последнем этапе мы доказываем, что отвечающие этим диаграммам узлы в T×I различны. В качестве инварианта мы используем обобщенную скобку Кауфмана [8, 9].

2. Перечисление проекций

Теорема 2. Существуют ровно 8 различных проекций узлов в T×I, которые не лежат в кольце и соответствуют графу «октаэдр», см. рис. 3.

Доказательство. Построим G', удовлетворяющую условию теоремы, следующим образом.

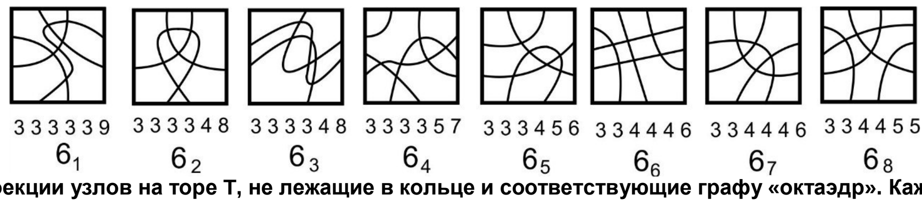


Рис. 3. Проекции узлов на торе T, не лежащие в кольце и соответствующие графу «октаэдр». Каждая строка {i_1, i_2 … i_6} означает, что дополнение к данной проекции есть набор из i_m-угольников, где $1 \le m \le 6$

Шаг 1. Предположим, что $T \backslash G'$ – дополнение к G' на T – содержит пятиугольную грань P.

Шаг 1.1. Покажем, что вершины P различны и соединены между собой ещё тремя ребрами G'.

Рассмотрим пятиугольник P на Т. Отождествление его смежных вершин допустимо при наличии петли в графе, соответствующем G', а несмежных – при наличии кратных ребер, в то время как граф «октаэдр» не содержит этих элементов. Поэтому все вершины P различны (т.е. P – вложенный) и имеют валентность 2.

Оставшаяся шестая вершина N графа, как любая его вершина, имеет валентность 4. Поэтому N соединена четырьмя (в силу отсутствия петель) ребрами с разными (из-за отсутствия кратных ребер) вершинами P. Предположим, что это соединение уже проведено некоторым образом. Тогда P имеет 1 вершину валентности 2 и 4 вершины валентности 3, в то время как все вершины должны иметь валентность 4. Легко видеть, что вершины P необходимо соединены между собой ещё тремя ребрами G'.

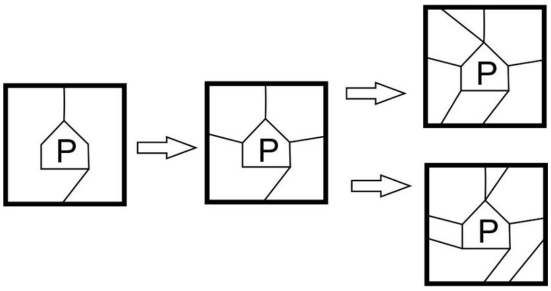


Рис. 4. Способы последовательного добавления трех ребер к пятиугольной грани *P* на Т

Шаг 1.2. Следовательно, построение G' можно начать с рассмотрения вложенного пятиугольника P на Т и соединения вершин P ещё тремя ребрами таким образом, чтобы P содержал 1 вершину валентности 4 и 4 вершины валентности 3 (комбинация валентностей согласована с последующим соединением P с шестой вершиной N). Новые ребра соединяют только несмежные на момент добавления ребра вершины, потому что граф не содержит кратных рёбер. В силу симметрии способ добавления первых двух ребер определяется единственным образом. Третье ребро можно добавить двумя различными способами, см. рис. 4. Имеем фрагмент проекции G'', содержащий 5 вершин и 8 ребер.

Очевидно, что Т\\G'' состоит из 3 дисков. Шестая вершина N проекции G' может находиться в любом из этих дисков, кроме P. Способы проведения оставшихся ребер определяются единственным образом для каждого из возможных вариантов подходов ребер к вершинам пятиугольной грани. Получаются проекции $\mathbf{6_4}$, $\mathbf{6_5}$ и $\mathbf{6_8}$.

Шаг 2. Предположим, что $T\backslash G'$ не содержит пятиугольной грани. В таком случае $T\backslash G'$ включает, по крайней мере, 3 либо треугольных, либо четырехугольных грани, что можно проверить, непосредственно перечислив все возможные комбинации числа углов в гранях.

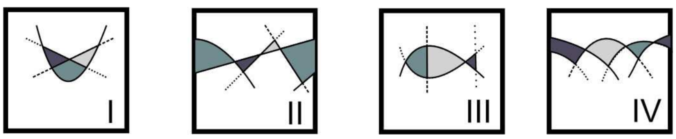


Рис. 5. Варианты взаимного расположения трех треугольных граней на Т так, что общее число их вершин ≤ 6

Шаг 2.1. Предположим, что $T\backslash G'$ содержит 3 треугольные грани. Все они вложенные, потому что граф не содержит петель и кратных ребер. Все четыре варианта взаимного расположения треугольных граней так, что общее число их вершин ≤ 6, показаны на рис. 5.

Рассмотрим вариант I.

Определение 2. Пусть проекция $G \subset T$ и диск $D \subset T$ таковы, что G пересекает D по трем собственным дугам $l_1, l_2, l_3 \subset D$, причем l_1 пересекает l_2 трансверсально в одной точке Q, а l_3 не имеет общих точек с l_1 и l_2. Тогда операция *добавления трех треугольных граней* состоит в замене дуг $l_1, l_2, l_3 \subset D$ на три новые дуги $l_1', l_2', l_3' \subset D$, которые имеют те же концы и, помимо Q, ещё 4 трансверсальные точки пересечения дуги l_3' поочередно с дугами l_1' и l_2'.

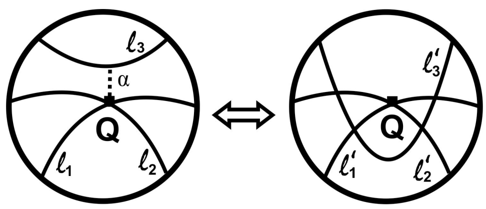


Рис. 6. Операция добавления трех треугольных граней

Для выполнения этой операции достаточно выбрать простую дугу $\alpha \subset T$, соединяющую вершину $Q \subset G$ с точкой на ребре G, а в качестве диска D взять регулярную окрестность этой дуги, см. рис. 6. Обратная операция, то есть замена дуг l_1', l_2', $l_3' \subset D$ на дуги l_1, l_2, $l_3 \subset D$, называется *устранением трех треугольных граней*.

Операция добавления трех треугольных граней увеличивает число перекрестков проекции на 4. Таким образом, чтобы получить G' с 6 перекрестками, содержащую фрагмент, показанный на рис. 6 справа, достаточно рассмотреть все проекции G'' на торе с 2 перекрестками и применить указанную операцию, выбрав дугу α так, чтобы $T \backslash G'' \cup \alpha$ содержало только дисковые компоненты. Имеем проекции $\mathbf{6_1}$–$\mathbf{6_5}$, см. рис. 7.

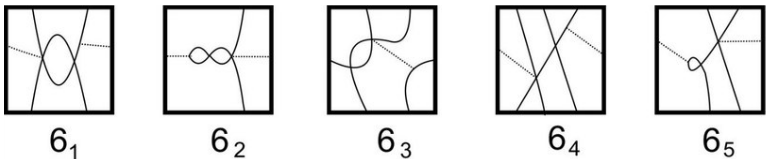


Рис. 7. Получение проекций 6_1–6_5 операцией добавления трех треугольных граней

Рассмотрим варианты II и III.

Покажем, что G', содержащая фрагмент II или III, обязательно содержит и фрагмент I.

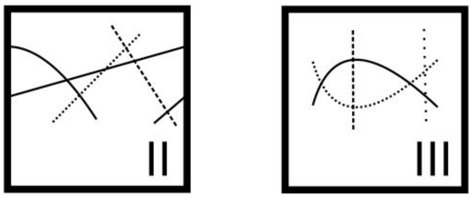


Рис. 8. Нити, из которых составлены фрагменты проекций вариантов II и III

Действительно, фрагменты II и III состоят из, соответственно, 3 и 4 нитей (на рис. 8 они показаны разными типами линий). Для получения G' эти нити нужно соединить в одну. Мы соединяем концы, окрашенные в разные цвета, иначе восстановится проекция зацепления.

Ребро, соединяющее два конца, может проходить

1) нетривиально, т.е. изменять типы компонент $T \backslash G'$,
2) тривиально.

Легко видеть, что соединение пары концов ребром, проходящим тривиально, приводит к созданию петли, кратного ребра или фрагмента I. Следовательно, новое ребро нужно проводить нетривиальным образом, 3 и 4 раза соответственно, в то время как на торе возможно только 2 раза, а в кольце, в котором уже лежит фрагмент II – только 1.

Рассмотрим вариант IV.

Очевидно, что $T \backslash G'$ содержит кольцевую компоненту.

Шаг 2.2. Предположим, что $T \backslash G'$ содержит 3 четырехугольные грани. Любые две из них имеют пару общих вершин, в силу того, что все три грани имеют 12 вершин, в то время как граф – только 6. На рис. 9 (I–III) четырехугольные грани имеют общее ребро, рис. 9 (IV) – только общие вершины. Рассмотрим эти случаи:

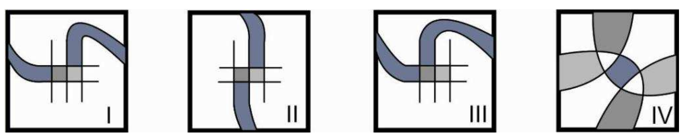


Рис. 9. Способы расположения трех четырехугольных граней

I. Восстанавливается либо проекция зацепления, либо проекция, содержащая двойные ребра или петли, см. рис. 10.

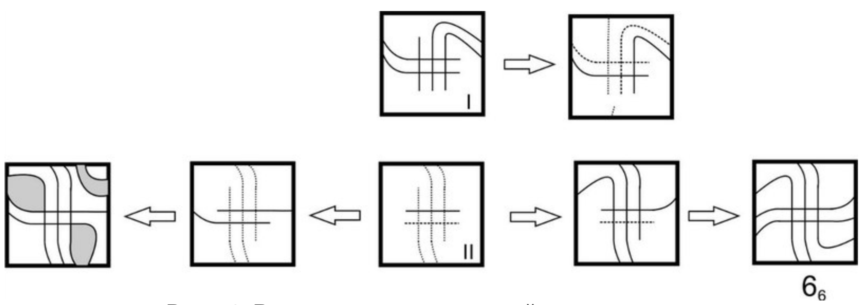


Рис. 10. Восстановление проекций в случаях I и II

II. Восстанавливается проекция $\mathbf{6_6}$ или проекция узла, имеющая двойное ребро, см. рис. 10.

III. Очевидно, что $T\backslash G'$ содержит кольцевую компоненту.

IV. Уже построена проекция $\mathbf{6_7}$.

Покажем, что все проекции на рис. 3 действительно различны. Посчитаем количество углов в каждом из 6 многоугольников, составляющих $T\backslash G'$. Наборов таких чисел достаточно, чтобы различить любые две проекции на рис. 3, за исключением пар (6_2, 6_3) и (6_6, 6_7). Проекции (6_2, 6_3) различны, потому что в первом случае одна из треугольных граней имеет по одному общему ребру с каждой из трёх других, а во втором – нет. Проекции (6_6, 6_7) различны, потому что в первом случае треугольные грани имеют общее ребро. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Восстановим по проекциям, указанным в теореме 2 (см. рис. 3), диаграммы узлов на T, выбрав тип каждого перекрестка. Для проекции с n вершинами это можно сделать 2^n, то есть в нашем случае 64, способами. Однако для каждой проекции достаточно рассмотреть 32 случая, поскольку тип одной вершины можно зафиксировать благодаря симметрии $T\times I$ (тип узла не меняется при одновременной смене типов всех перекрестков диаграммы на противоположный).

Различность всех приведенных в таблице узлов доказывается с помощью вычисления их обобщенных скобок Кауфмана [6, 8, 9]. Точная формула такова:

$$X(K)=(-a)^{-3\omega(K)}\sum a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a^2-a^{-2})^{\gamma(s)}x^{\delta(s)},$$

где $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ – числа сглаживаний типа A и B в состоянии s, а $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ – числа тривиальных и нетривиальных окружностей на торе, полученных в результате сглаживания всех перекрестков, которое соответствует состоянию s. Разумеется, сумма берется по всем возможным состояниям, а $\omega(K)$ обозначает число скручивания диаграммы.

Все полиномы оказались различными. Отсюда следует, что все узлы, приведенные на рис. 2, различны. Попутно мы получаем доказательство минимальности каждой из 8 проекций, указанных в теореме 2.

Литература

1. Дроботухина, Ю.В. Аналог полинома Джонса для зацеплений в RP^3 и обобщение теоремы Кауфмана–Мурасуги / Ю.В. Дроботухина // Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 2, № 3. – С. 613–630.

2. Drobotukhina, Yu.V. Classification of links in RP^3 with at most six crossings / Yu.V. Drobotukhina // Advances in Soviet Mathematics. – 1994. – Vol. 18, № 1. – P. 87–121.

3. Gabrovshek, B. Knots in the solid torus up to 6 crossings / B. Gabrovshek, M. Mroczkowskii // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – Vol. 21, no. 11. – P. 1250106. [43 pages] DOI: 10.1142/S0218216512501064

4. Enumerating the k-tangle projections / A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – Vol. 21, no. 7. – p. 1250069 [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691

5. Green, J. A table of virtual knots / J. Green // http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page

6. Акимова, А.А.Классификация узлов малой сложности в утолщённом торе / А.А. Акимова, С.В. Матвеев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 10–21.

7. Акимова, А.А. Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков / А.А. Акимова// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 8–11.

8. Kauffman, L. State models and the Jones polynomial / L. Kauffman // Topology. – 1987. – Vol. 26, № 3. – P. 395–407.

9. Прасолов, В.В. Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия / В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский // М.: МЦНМО, 1997. – 352 с.

Поступила в редакцию 11 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 1, pp. 5–10

CLASSIFICATION OF KNOTS IN A THICKENED TORUS WITH MINIMAL OCTAHEDRON DIAGRAMS WHICH ARE NOT CONTAINED IN AN ANNULUS

A.A. Akimova[1]

The aim of this research is to tabulate knots in a thickened torus T×I having minimal diagrams which are not contained in an annulus and correspond to the octahedron graph. Tabulation consists of three steps. First, a table of knot projections on T was compiled. Then, every projection was converted into a set of corresponding diagrams. Finally, using a generalized version of the Kauffman bracket as an invariant, duplicates were removed and all the knots obtained were proved to be different.

Keywords: knot; thickened torus; knot table.

References

1. Drobotukhina Yu. V. Analog polinoma Dzhonsa dlya zatsepleniy v RP^3 i obobshchenie teoremy Kaufmana–Murasugi. *Algebra i Analiz*. 1991. Vol. 2, no. 3. pp. 613–630. (in Russ.).

2. Drobotukhina Yu. V. Classification of links in RP^3 with at most six crossings. *Advances in Soviet Mathematics.* 1994. Vol. 18, no. 1. pp. 87–121.

3. Gabrovshek B., Mroczkowskii M. Knots in the solid torus up to 6 crossings. *J. Knot Theory Ramifications.* 2012. Vol. 21, no. 11. p. 1250106. [43 pages] DOI: 10.1142/S0218216512501064.

4. Bogdanov A., Meshkov V., Omelchenko A., Petrov M. Enumerating the k-tangle projections. *J. Knot Theory Ramifications.* 2012. Vol. 21, no. 7. p. 1250069. [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691

5. Green J. *A table of virtual knots.* http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page

6. Akimova A.A., Matveev S.V. Klassifikaciya uzlov maloj slozhnosti v utolshhennom tore [Classification of Low Complexity Knots in the Thickened Torus]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika.* 2012. Vol. 12. Issue 3. pp. 10–21. (in Russ.).

7. Akimova A.A. Classification of knots in the thickened torus with minimal diagrams which are not in a circule and have five crossings. *Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”.* 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 8–11. (in Russ.).

8. Kauffman L. State models and the Jones polynomial. *Topology.* 1987. Vol. 26, no. 3. pp. 395–407.

9. Prasolov V.V., Sosinskiy A.B. *Uzly, zatsepleniya, kosy i tryekhmernye mnogoobraziya* (Knots, coupling, spit, and three-dimensional manifolds). Moscow, MTsNMO Publ., 1997. 352 p. (in Russ.).

Received 11 December 2014.

[1] Akimova Alena Andreevna is Post-graduate Student, South Ural State University; Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University.
E-mail: akimova_susu@mail.ru

УДК 521.328

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНЫХ ЗВЁЗД С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

А.Э. Байдин[1]

Предлагается для определения орбит визуально-двойных звёзд применять генетические алгоритмы (ГА). Рассматриваются три метода: 1) разработанный в CHARA, ранее три неизвестные определялись подбором, использование ГА значительно упрощает и ускоряет работу метода; 2) с помощью ГА определяются все семь элементов орбиты; 3) большая полуось и позиционный угол линии узлов находятся методом наименьших квадратов, остальные элементы орбиты посредством ГА. Методы тестируются на реальных и эталонных данных, используются два языка программирования: Pascal и PHP. В качестве примера определены орбиты Кастора и Сириуса.

Ключевые слова: визуально-двойные звёзды; методы определения орбит; анализ данных; численные методы; генетические алгоритмы.

Введение

Генетические алгоритмы являются стохастическими методами поиска решений различных задач [1]. Идея методов заимствована у природы. Процесс нахождения решений можно сравнить с микроэволюцией – направленным изменением генофонда популяции. В качестве генофонда рассматривается совокупность различных решений, плохо или хорошо удовлетворяющих поставленной задаче. На каждом шаге алгоритма производится скрещивание решений, мутации потомков и отбор, обеспечивающий постепенное улучшение решений. При рассмотрении генетических алгоритмов используются как математические, так и биологические термины: генофонд – совокупность решений задачи на определённом шаге алгоритма, ген или признак – одна из определяемых величин.

В сравнении с обычным подбором генетические алгоритмы значительно ускоряют поиск решения, в отличие от методов, требующих дифференцирования исследуемой функции, являются глобально сходящимися. Эти преимущества привели к широкому распространению генетических алгоритмов, они используются во многих физико-математических областях. В астрономии с их помощью производят обработку спектральных наблюдений звёзд, целью которой является обнаружение экзопланет [2]. Большинство других методов имеют плохую сходимость, когда необходимо выделить несколько периодических возмущений [3].

В данной работе предлагается использовать генетические алгоритмы для определения орбит визуально-двойных звёзд. При постановке задачи используются уравнения, связывающие искомые элементы орбиты с наблюдаемыми величинами

$$\rho_{k(obs)} \approx \rho_{k(cal)} = \rho(T_k, n, a, i, T_p, e, \omega),\ \theta_{k(obs)} \approx \theta_{k(cal)} = \theta(T_k, n, i, \Omega, T_p, e, \omega), \qquad (1)$$

где $\rho_{k(obs)}$ и $\theta_{k(obs)}$ – наблюдаемые полярные координаты звезды-спутника относительно главной компоненты (ρ – разделение, θ – позиционный угол), $\rho_{k(cal)}$ и $\theta_{k(cal)}$ – координаты, вычисляемые с помощью эпох наблюдений T_k и элементов орбиты (n – среднее движение, a – большая полуось, i – наклонение орбиты, Ω – позиционный угол линии узлов, T_p – эпоха прохождения периастра, e – эксцентриситет, ω – угол между линией узлов и периастром). Уравнения (1) являются приближёнными, так как в них входят наблюдаемые величины. В качестве неизвестных выступают элементы орбиты. Используя N наблюдений, можно составить систему $2N$ приближенных уравнений. Наиболее распространённым методом решения систем приближенных уравнений является метод наименьших квадратов.

В общем виде задачу определения орбиты двойной звезды можно сформулировать в полярной или декартовой системе координат

[1] Байдин Алексей Эдуардович – старший преподаватель, кафедра медицинской физики, Ярославская государственная медицинская академия.
E-mail: abaid@rambler.ru

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\rho_{k(obs)}-\rho_{k(cal)}\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\rho_{k(cal)}^2\left(\theta_{k(obs)}-\theta_{k(cal)}\right)^2=\min\,, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(x_{k(obs)}-x_{k(cal)}\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\left(y_{k(obs)}-y_{k(cal)}\right)^2=\min\,. \quad (3)$$

Декартовы координаты связаны с полярными $x=\rho\cos\theta$ и $y=\rho\sin\theta$.

Если уравнения (1) были бы линейны относительно определяемых величин, то для нахождения минимума функции (2) достаточно решить систему семи линейных уравнений. В действительности уравнения (1) нелинейны, поэтому применяется метод дифференциальных поправок [4]. Для приращений функций (1) при постоянстве времени имеем

$$\Delta\rho_k=g_n\Delta n+g_a\Delta a+g_i\Delta i+g_{Tp}\Delta T_p+g_e\Delta e+g_\omega\Delta\omega+\varepsilon_{\rho k}\,, \quad (4)$$

$$\Delta\theta_k=f_n\Delta n+f_i\Delta i+f_\Omega\Delta\Omega+f_{Tp}\Delta T_p+f_e\Delta e+f_\omega\Delta\omega+\varepsilon_{\theta k}\,, \quad (5)$$

где $\Delta\rho_k=\rho_{k(obs)}-\rho_{k(cal)}$, $\Delta\theta_k=\theta_{k(obs)}-\theta_{k(cal)}$; Δn, Δa, Δi, $\Delta\Omega$, ΔT_p, Δe и $\Delta\omega$ – поправки к элементам орбиты, $\varepsilon_{\theta k}$, $\varepsilon_{\rho k}$ – величины, имеющие высший порядок относительно поправок. Значения $\varepsilon_{\theta k}$ и $\varepsilon_{\rho k}$ также зависят от ошибок измерений, то есть даже при вычисленных элементах орбит они будут отличны от нуля.

Ставится задача нахождения минимума выражения

$$\sum_{k=1}^{N}[w_{\theta k}(\rho_{k(cal)}\varepsilon_{\theta k})^2+w_{\rho k}\varepsilon_{\rho k}^2]=\min\,, \quad (6)$$

где N – количество наблюдений, $w_{\theta k}$ и $w_{\rho k}$ – веса наблюдений, множитель $\rho_{k(cal)}$ поставлен для согласования единиц измерения, также он изменяет веса $\theta_{k(obs)}$.

Перед началом работы метода дифференциальных поправок необходимо задать первые приближения (n_0, a_0, i_0, Ω_0, T_{p0}, e_0 и ω_0). Далее посредством (6) определяются поправки, производится уточнение элементов орбиты $n=n_0+\Delta n$ и т.д. После этого процесс повторяется многократно, пока поправки не станут малыми.

Метод дифференциальных поправок не является глобально сходящимся, трудности возникают при попытках определить орбиты, когда наблюдениями не охвачен полный оборот звезды-спутника [5]. Для повышения сходимости можно использовать генетические алгоритмы.

В работе рассматриваются три метода определения орбит визуально-двойных звёзд.

1. Метод, предложенный CHARA [6]. В данном методе три неизвестные (n, $T_{\text{р}}$, e) определяются подбором. Предлагается вместо подбора использовать генетический алгоритм.
2. Генетическим алгоритмом определяются все элементы орбиты (n, a, i, Ω, $T_{\text{р}}$, e, ω).
3. Генетическим алгоритмом определяется пять неизвестных (n, i, $T_{\text{р}}$, e, ω), две другие (a, Ω) линейно связаны с наблюдаемыми величинами (ρ_k, θ_k) и находятся методом наименьших квадратов.

Для проверки предлагаемых методов использовалась программа получения эталонных наблюдений. Особенности её работы: 1) задаются элементы орбиты, два крайних значения позиционного угла (θ_0 и θ_N), количество наблюдений; 2) выбирается способ распределения наблюдений на дуге, например, равномерное покрытие наблюдениями дуги или случайное, подчинённое какому-либо распределению; 3) вычисляются моменты времени, когда звезда-спутник находится в полученных точках на дуге; 4) по моментам времени и элементам орбит определяются относительные положения звезды-спутника; 5) к полученным наблюдениям добавляются ошибки, подчинённые нормальному распределению. В данной работе основное внимание было уделено максимально возможной точности, с которой можно определять элементы орбиты, используя ГА, поэтому большинство тестов проводились на точных данных (ошибки не добавлялись).

Применение генетических алгоритмов для определения орбит

Работу генетического алгоритма можно представить следующей схемой:

1) генерация популяции;

2) выбор родителей;
3) скрещивание (рекомбинация);
4) мутация;
5) формирование новой популяции;
6) проверка критерия окончания цикла.

В случае выполнения условия – вывод лучшего решения или всей совокупности решений, при невыполнении цикл повторяется, начиная с пункта (2).

Особенность генетических алгоритмов – большое количество параметров и операторов, которые влияют на точность результатов. Выбрать наиболее оптимальный алгоритм сложно, критерием точности служит стабильность получаемых результатов при повторных запусках программы.

На начальном этапе перед генерацией популяции необходимо задать интервалы возможных значений искомых величин, для четырёх неизвестных они стандартны: $i\in[0{,}1;89{,}9]$, $\Omega\in[0;179{,}99]$, $e\in[0{,}001;0{,}95]$, $\omega\in[0;359{,}99]$; для остальных (n, a, T_{p}) интервалы желательно задавать, анализируя имеющиеся данные. Интервалы могут быть очень большими, главное, чтобы искомые значения попадали в них. Далее задаётся размер популяции и количество поколений. Размер популяции зависит от количества неизвестных и требуемой точности результатов, чем больше неизвестных, тем больше должен быть размер популяции для получения хорошей точности. Количество поколений зависит от используемого оператора отбора в новую популяцию и процента мутирования: чем больше вероятность мутаций, тем большее количество поколений нужно задавать. На точность результатов сильно влияет характер изучаемой функции. Например, при работе с двойными звёздами на коротких дугах функция (2) может практически не изменяться вблизи минимума [5], поэтому точное определение элементов орбит методами, в основе которых лежит поиск минимума, невозможно. Также могут возникать трудности, характерные для генетических алгоритмов [7].

В качестве оператора выбора родителей использовалась панмиксия – для каждой особи пара выбирается случайно из всей популяции.

В работе применяется два вида рекомбинации:

1) дискретная – случайный обмен генами между родителями;
2) промежуточная – реализуется с помощью выражения

$$\text{Потомок} = \text{Род}1+\alpha\left(\text{Род}2-\text{Род}1\right), \qquad (7)$$

где α – случайное число на отрезке $[-d;1+d]$, в работе $d=0{,}5$, d может быть любым числом больше нуля, наиболее принятым является $d=0{,}25$ [7], но при таком значении оператор рекомбинации с большей вероятностью будет усреднять значения.

Случайные изменения решений реализуются посредством неоднородной мутации – с одинаковой вероятностью используется одна из двух формул

$$y_i'=y_i+(\max_i-y_i)\left(1-r^{\left(1-\frac{t}{T}\right)}\right) \text{ или } y_i'=y_i-(y_i-\min_i)\left(1-r^{\left(1-\frac{t}{T}\right)}\right), \qquad (8)$$

где $\max_i$ и $\min_i$ – граничные значения величины y_i, $r\in[0;1]$ выбирается случайно, t – номер поколения, T – максимальное количество поколений.

При формировании новой популяции применяется элитарный отбор – в новую популяцию выбираются решения, дающие минимальные суммы квадратов отклонений, в соответствии с условием (2) или (3). Для более стабильной работы генетических алгоритмов желательно поддерживать генетическое разнообразие, то есть в популяции не должно быть двух одинаковых решений, поэтому дополнительным условием отбора является неравенство сумм квадратов отклонений.

Метод, предложенный CHARA

Используются моменты времени наблюдений (T_k) и декартовы координаты звезды-спутника относительно главной компоненты (x_k, y_k). Среднее движение (n), эпоха прохождения периастра (T_p) и эксцентриситет (e) определяются подбором. Количество наблюдений $N\geq 4$.

Алгоритм метода.

1. Задаются интервалы возможных значений (n, T_p, e) и вычислительная погрешность, которая определяет размер шага при подборе. Присваиваются различные значения искомым величинам.

2. Из уравнения Кеплера [4] вычисляются эксцентрические аномалии (E_k) на моменты наблюдений (T_k).

3. Определяются приведённые координаты

$$X_k = \cos(E_k) - e, \; Y_k = \sqrt{1-e^2}\sin(E_k). \tag{9}$$

4. Методом наименьших квадратов находятся элементы Тиле–Иннеса (A, B, F, G). Используются $2N$ уравнений

$$x_k = AX_k + FY_k, \; y_k = BX_k + GY_k. \tag{10}$$

5. Выбираются значения n, T_p и e, при которых выполняется условие (3).

6. Производится переход от элементов Тиле–Иннеса к элементам Кэмпбелла.

В данной работе для определения n, T_p и e вместо подбора используется генетический алгоритм. Эксперименты с эталонными орбитами показали, что при численности популяции $N_{pop} = 200$ и максимальном количестве поколений $T_{pop} = 100$ точность результатов определяется вычислительной погрешностью компьютера, при этом можно не использовать мутации и не заботиться о генетическом разнообразии при выборе новой популяции. При понижении численности популяции поддержание генетического разнообразия становится необходимым для получения хороших результатов. Чтобы мутации давали преимущество, необходимо согласовывать процент мутирования и численность поколений.

В качестве примера определим орбиту Кастора (α Gem). Данную двойную звезду открыли в 1719 г. Брэдлей и Пунд. Изучая Кастор и пять других ярких звёзд, Гершель к 1803 г. объяснил их относительные движения гравитационным взаимодействием, что доказывало существование двойных звёздных систем. Кастор относится к широким парам, с момента открытия по настоящее время звезда не совершила полного оборота, повернулась на 300°. Для определения орбиты использовались данные сайта обсерватории Ниццы [8], были добавлены наблюдения (1879–1925 г.) Доберка, ван Бисбрука [9] и современные четвёртого интерферометрического каталога [10], исключены измерения, дающие заметные отклонения в сравнении с основной совокупностью данных: POK 1933.142, T 1938.260, FAT 1945.23, FLE 1955.223, MLR 1967.89, SLE 2004.185. Орбита вычислялась по 431 наблюдению на дуге 200°, веса не задавались, правило 3σ не применялось (в ГА правило 3σ можно включить на определённом поколении, исключение или возвращение данных вести в соответствии с лучшим решением). Позиционные углы приведены к эпохе $T_0 = 2000$.

Параметры генетического алгоритма: размер популяции $N_{pop} = 200$, количество поколений $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 10 %. Элементы орбиты представлены в табл. 1. В каждой ячейке отмечена величина (Δ_x), характеризующая вычислительную погрешность ГА, она равна среднеквадратичному отклонению, вычисленному по результатам пятнадцати запусков алгоритма. В процессе работы программы было получено три результата, отличающихся от представленного. Появление различных решений можно объяснить тем, что наблюдениями не охвачен полный оборот звезды-спутника. Для сравнения представлен результат, полученный методом дифференциальных поправок в полярных координатах (д.п.п.к.), в нижней строке даны элементы орбиты из шестого каталога орбит [11].

Таблица 1

Элементы орбиты Кастора

	P, год	a, "	i, °	Ω, °	T_p, год	e	ω, °
ГА Δ_x	451,6 8×10^{-6}	6,62 7×10^{-8}	114,95 8×10^{-8}	41,5 2×10^{-7}	1959,85 7×10^{-7}	0,331 8×10^{-9}	252,6 10^{-6}
д.п.п.к.	451,6	6,62	114,95	41,5	1959,84	0,331	252,6
6 cat	466,8	6,78	113,56	41,2	1957,3	0,333	249,3

На рис. 1 изображены наблюдения и видимая траектория звезды-спутника относительно главной компоненты, она построена по вычисленным с помощью ГА элементам орбиты. Крестоком отмечено положение главной звезды, тонкая линия – линия узлов (пересечение картинной плоскости с плоскостью истинной орбиты).

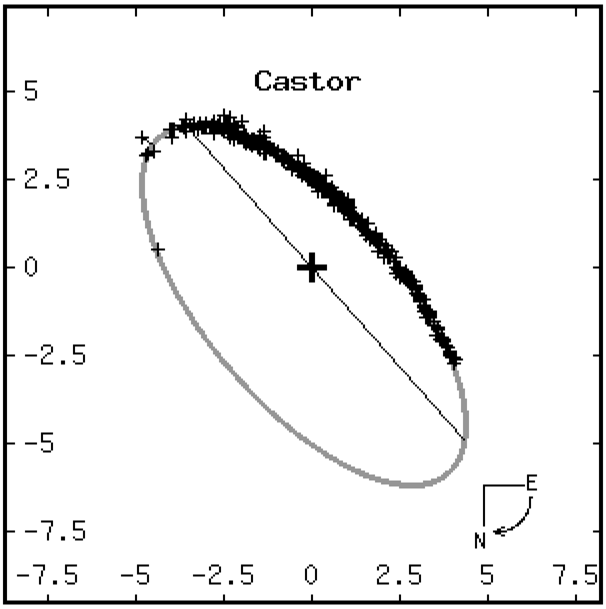


Рис. 1. Кастор. WDS 07346+3153

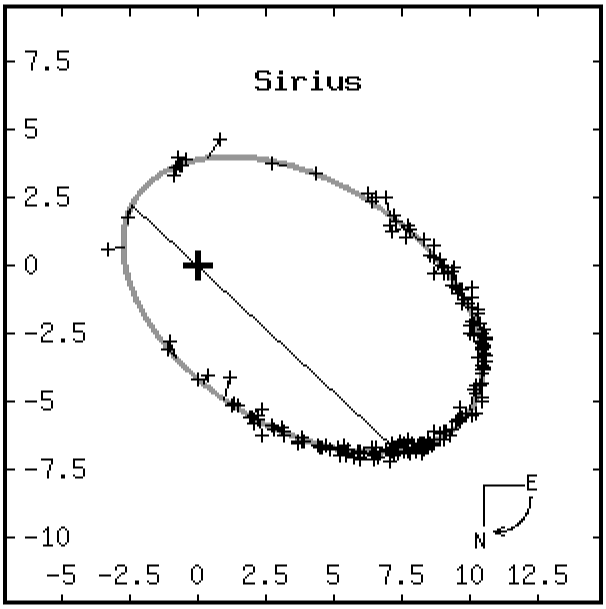


Рис. 2. Сириус. WDS 06451-1643

Методы, работающие с полярными координатами

Используются следующие формулы:

$$E_k - e\sin E_k - n(T_k - Tp) = 0\,, \tag{11}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\nu_k}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E_k}{2}\,, \tag{12}$$

$$\mathrm{tg}(\theta_k - \Omega) = \mathrm{tg}(\nu_k + \omega)\cos i\,, \tag{13}$$

$$\rho_k = a(1 - e\cos E_k)\frac{\cos(\nu_k + \omega)}{\cos(\theta_k - \Omega)}\,, \tag{14}$$

где E_k – эксцентрическая аномалия, ν_k – истинная аномалия.

Метод, в котором все элементы орбиты определяются с помощью генетических алгоритмов.

Рассматривается популяция решений (n_j , a_j , i_j , Ω_j , T_{pj} , e_j , ω_j).

1. С помощью операторов «рекомбинация» и «мутация» создаётся новое поколение.
2. Для каждого решения из выражений (11)–(14) вычисляются относительные координаты звезды-спутника ($\theta_{k(cal)}$, $\rho_{k(cal)}$).
3. Производится формирование новой популяции. Выбираются решения, удовлетворяющие выражению (2).

Пункты 1–3 повторяются, критерием окончания цикла служит количество поколений. Эксперименты с эталонными данными показали, что без обеспечения генетического разнообразия точность результатов является низкой, поэтому при формировании новой популяции были наложены дополнительные условия. В первых поколениях отбор должен быть таким, чтобы обеспечить максимально возможное генетическое разнообразие, что повышает вероятность обнаружения глобального минимума. С каждым новым поколением решения всё лучше удовлетворяют наблюдениям, генетическое разнообразие при этом уменьшается, что должно отражаться в условии отбора. Высокие требования к генетическому разнообразию приводят к неэффективности процессов рекомбинации, низкие – к преждевременной сходимости, в случае одинаковых решений процессы рекомбинации также становятся неэффективны.

При формировании новых поколений использовалось условие: разность сумм квадратов индивидуальных отклонений двух ближайших решений в популяции должна быть больше некоторой величины

$$F_{j+1} - F_j > gF_1, \qquad (15)$$

где F_j – функция (2) для j-ого решения в популяции (в каждом поколении производится сортировка решений по возрастанию F), g – некоторая функция номера поколения, в случае с эталонными точными данными можно использовать константу для обработки наблюдений $g = k\left(1 - \frac{t}{T}\right)$, k – константа, t – номер поколения, T – максимальное количество поколений.

Алгоритм метода с пятью неизвестными отличается тем, что a_j и Ω_j определяются из уравнений (13, 14) методом наименьших квадратов. Стабильность работы ГА при этом повышается, хорошей точности можно добиться без обеспечения генетического разнообразия.

В качестве примера определим орбиту Сириуса (α CMa). Звезда-спутник (α CMa B) была открыта Алваном Кларком 31 января 1862 г. при испытании нового 18,5-дюймового телескопа. Дальнейшие исследования спутника показали, что он принадлежит к новому классу астрономических объектов – Сириус B является первым из обнаруженных белых карликов и одним из самых массивных среди известных.

Использовались данные сайта обсерватории Ниццы [8], были добавлены наблюдения (1863–1923 г.) О. Струве, Холла, Бернхема, Эйткена, ван Бисбрука [9] и современные четвёртого интерферометрического каталога [10]. Из вычислений исключено измерение OL 1932.133 и два неполных измерения WAM и HEI. Для определения орбиты использовалось 179 наблюдений.

Параметры ГА для метода с семью неизвестными: размер популяции $N_{pop} = 300$, количество поколений $T_{pop} = 300$, процент мутирования гена 1 %, коэффициент, обеспечивающий генетическое разнообразие $k = 0{,}0001$; метод, в котором с помощью ГА определяются пять элементов орбиты: $N_{pop} = 500$, $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 5 %. Элементы орбиты Сириуса и величины, характеризующие стабильность работы ГА, представлены в табл. 2. На рис. 2 построена видимая орбита Сириуса с использованием результатов метода с семью неизвестными.

Таблица 2

Элементы орбиты Сириуса

	P, год	a, "	i, °	Ω, °	T_p, год	e	ω, °
7 неизв.	50,108	7,520	135,57	47,11	1894,185	0,5846	149,94
Δ_x	0,001	0,001	0,02	0,02	0,003	0,0001	0,03
5 неизв.	50,108	7,523	135,57	47,12	1894,184	0,5846	149,94
Δ_x	6×10^{-5}	4×10^{-5}	5×10^{-4}	10^{-3}	2×10^{-4}	2×10^{-6}	2×10^{-3}
6 cat	50,090	7,500	136,53	44,57	1894,130	0,5923	147,27

Для сравнения орбита Сириуса также была определена методом CHARA. Параметры ГА: численность популяции $N_{pop} = 100$, количество поколений $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 10 %.

Таблица 3

Элементы орбиты Сириуса. Метод CHARA

	P, год	a, "	i, °	Ω, °	T_p, год	e	ω, °
ГА	50,108	7,518	135,64	47,06	1894,185	0,5850	149,90
Δ_x	5×10^{-6}	10^{-7}	2×10^{-6}	2×10^{-5}	5×10^{-6}	10^{-7}	3×10^{-5}

Возможные сферы применения описанных методов

Основное преимущество рассмотренных в работе методов – отсутствие жестких требований к первым приближениям (интервалы изменения искомых величин могут быть велики). Если наблюдениями охвачено около оборота или более, трудности с первыми приближениями и сходимостью метода дифференциальных поправок возникают редко, поэтому применение ГА рассматривается как один из вариантов, преимущество – не нужно вычислять первые приближения, недостаток – более длительное время работы.

Ситуация на дугах менее оборота резко меняется. Если наблюдениями охвачена дуга ~180°, или наблюдения, произведённые на нескольких оборотах, покрывают только часть дуги в силу вытянутости орбиты и малого разделения, то незначительные отклонения в первых приближениях способны нарушить сходимость метода дифференциальных поправок. Геометрический метод и метод Докобо [12], используемые для определения первых приближений, в силу особенностей формул, лежащих в их основе, на дугах ~$180°$ могут давать значительные погрешности [13]. В этих случаях описанные в работе алгоритмы имеют преимущества, так как позволяют определять орбиты с точностью метода дифференциальных поправок и не требуют вычисления первых приближений. В качестве примера рассмотрим изучаемую в данной работе звезду Кастор. Метод дифференциальных поправок перестаёт сходиться при использовании элементов орбиты шестого каталога в качестве первого приближения, если одновременно произвести операции: $i+10°$ и $e-0,2$ или $\Omega+20°$ и $\omega+20$. Следует отметить, что Кастор является широкой парой, удобной для измерений и хорошо изученной. Для других объектов, у которых наблюдениями охвачено ~$180°$, требования к точности первых приближений гораздо выше, а получить хорошие первые приближения сложнее.

Рассмотренные в работе методы позволяют определять орбиты по малым дугам ~50° и менее, если используются наблюдения, полученные на современных точных инструментах. Метод дифференциальных поправок плохо работает на дугах длиной несколько десятков градусов, так как имеет малую область сходимости. Для тестирования методов было выбрано 14 звёзд, у которых накоплены многочисленные ряды наблюдений звёздным интерферометром с длинной базой Palomar Testbed Interferometer (PTI) на дугах от 25° до 180°. Астрометрическая точность инструмента имеет порядок 10^{-4}" [14]. Орбиты определялись только по данным PTI из каталога [10] версии 08.2014. Изучаемые звёзды длительно наблюдались спекл-интерферометрическими методами, поэтому в шестом каталоге [11] имеются надёжно определённые орбиты. Они использовались для проверки получаемых результатов с помощью ГА. Обнаружено, что половину орбит (WDS 04357+1010, 06041+2316, 15278+2906, 15416+1940, 17217+3958, 21145+1000, 21446+2539) можно определить методом дифференциальных поправок, если в качестве первого приближения брать данные шестого каталога. Если для этой цели применять элементы орбит других исследователей из файла Master file [11], сходимость довольно часто нарушается. Например, элементы орбиты WDS 04357+1010, полученные Балегой (Bag1999b), обеспечивают сходимость, а Харткопфом (Hrt2000a) и Олевичем (Ole2000a) – нет. К неожиданным результатам можно отнести определение орбиты WDS 15278+2906 методом дифференциальных поправок по дуге 25°. Для WDS 15416+1940 при использовании всей совокупности данных PTI сходимость отсутствует, положение меняется после исключения наблюдения Mut 2008.5236. Остальные семь звёзд (WDS 02157+2503, 02537+3820, 15232+3017, 18570+3254, 20375+1436, 21148+3803, 21501+1717) определялись с помощью ГА, метод дифференциальных поправок не сходится.

Таблица 4

Элементы орбиты WDS 02157+2503

	P, год	a, "	i, °	Ω, °	T_p, год	e	ω, °
CHARA ГА	23,594	0,2403	104,231	55,019	1986,154	0,70488	264,542
Δ_x	2,489	0,0127	0,205	0,817	2,486	0,01055	3,833
6 cat	23,608	0,2347	104,437	55,823	1986,182	0,68119	263,927

В качестве примера рассмотрим орбиту WDS 02157+2503, вычисленную по 89 наблюдениям звёздного интерферометра PTI на дуге 40°. При использовании элементов орбит шестого каталога [11] в качестве первого приближения у метода дифференциальных поправок сходимость отсутствует. Орбита определялась методом CHARA ГА с параметрами: $N_{pop}=200$, $T_{pop}=100$, процент мутирования гена 10 %. Результаты и данные шестого каталога приведены в табл. 4. Элементы орбиты шестого каталога, безусловно, точней, они вычислены по всей совокупности данных, но сама возможность определения орбиты по короткой дуге открывает большие перспективы, так как известно множество широких пар с медленным вращением, у которых за столетия наблюдений звезда-спутник поворачивается только на десятки градусов.

Заключение

В работе рассмотрены три метода определения орбит визуально-двойных звёзд с помощью генетических алгоритмов. Эксперименты с эталонными данными показали, что при увеличении численности популяции и количества поколений повышается стабильность работы методов и возрастает точность определяемых элементов орбит. Это ожидаемый результат в силу стохастической природы ГА. Наиболее удобен в использовании метод программы CHARA: обеспечивает высокую точность, время вычислений невелико – в случае обработки 50-ти наблюдений порядка минуты. При увеличении количества наблюдений время работы программы возрастает, так как основные вычислительные затраты связаны с определением сумм квадратов индивидуальных отклонений. У методов, работающих с полярными координатами, для обеспечения стабильности получаемых результатов увеличена численность популяции и количество поколений, что привело к увеличению вычислительных затрат. В методе с семью неизвестными использовался алгоритм, обеспечивающий генетическое разнообразие.

В качестве примера описанными в работе методами определены орбиты Кастора и Сириуса. Полученные результаты близки к представленным в шестом каталоге орбит.

Литература

1. Michalewicz, Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs / Z. Michalewicz. – Berlin: Springer, 1996. – 388 p.

2. The HARPS search for southern extra-solar planets. VIII. μ Arae, a system with four planets / F. Pepe, A.C.M. Correia, M. Mayor *et al.* // Astronomy& Astrophysics. – 2007. – Vol. 462. – P. 769–776.

3. Теоретические методы локализации в пространстве-времени неоткрытых небесных тел: монография (Посвящается 100-летию со дня рождения В.В. Радзиевского) / Н.И. Перов и др.; под ред. Н.И. Перова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. – 203 с.

4. Куто, П. Наблюдения визуально-двойных звёзд / П. Куто. – М.: Мир, 1981. – 238 с.

5. Байдин, А.Э. Особенности определения орбит визуально-двойных звёзд на основе наблюдений коротких дуг видимого движения / А.Э. Байдин // Ярославский педагогический вестник. Том III (Естественные науки). – 2010. – № 4. – С. 32–39.

6. Hartkopf, W.I. Binary star orbits from speckle interferometry. II. Combined visual/speckle orbits of 28 close systems. / W.I. Hartkopf, H.A. McAlister, O.G. Franz // Astron. J. – 1989. – Vol. 98. – P. 1014–1039.

7. Панченко, Т.В. Генетические алгоритмы / Т.В. Панченко; под ред. Ю.Ю. Тарасевича. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.

8. http://sidonie.obs-nice.fr/scripts/SidonieWelcome.asp

9. http://adswww.harvard.edu

10. Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars / W.I. Hartkopf, B.D. Mason, G.L. Wycoff, H.A. McAlister. – Washington: U.S. Nav. Obs., http://ad.usno.navy.mil/wds/int4.html.

11. Hartkopf, W.I. Sixth Catalog of Orbits of Visual Binary Stars / W.I. Hartkopf, B.D. Mason. – Washington: U.S. Nav. Obs., http://ad.usno.navy.mil/wds/orb6.html.

12. Docobo, J.A. On the analytic calculation of visual double star orbits / J.A. Docobo // Celestial Mechanics. – 1985. – Vol. 36. – P. 143–153.

13. Байдин, А.Э. Анализ классических методов определения орбит визуально-двойных звёзд / А.Э. Байдин // Ярославский педагогический вестник. Том III (Естественные науки). – 2011. – № 4. – С. 71–75.

14. Lane, B.F. Differential astrometry of subarcsecond scale binaries at the Palomar Testbed Interferometer / B.F. Lane, M.W. Muterspaugh // The Astrophysical Journal. – 2004. – Vol. 601. – P. 1129–1135.

Поступила в редакцию 18 июня 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 11–19

DETERMINATION OF VISUAL DOUBLE STAR ORBITS BY MEANS OF GENETIC ALGORITHMS

A.E. Baidin[1]

Based on genetic algorithms (GA), three methods are proposed for the calculation of visual double star orbits: 1) the program developed by CHARA; 2) seven orbital parameters are determined by means of GA; 3) the least-square method is used for the calculation of the major semiaxis and the longitude of the ascending node, the rest five unknown quantities are found by GA. The methods are tested on model data. Two programming languages, Pascal and PHP, are used. The methods are applied to the bright stars Castor and Sirius.

Keywords: visual double stars; orbits; methods; data analysis; genetic algorithms.

References

1. Michalewicz Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Berlin: Springer, 1996. 388 p.

2. Pepe F., Correia A.C.M., Mayor M., Tamuz O., Couetdic J., Benz W., Bertaux J.-L., Bouchy F., Laskar J., Lovis C., Naef D., Queloz D., Santos N.C., Sivan J.-P., Sosnowska D., Udry S The HARPS search for southern extra-solar planets. VIII. μ Arae, a system with four planets. *Astronomy& Astrophysics.* 2007. Vol. 462. pp. 769–776.

3. Perov N.I. *Teoreticheskie metody lokalizatsii v prostranstve-vremeni neotkrytykh nebesnykh tel: kollektivnaya monografiya: (posvyashchaetsya 100-letiyu so dnya rozhdeniya V. V. Radzievskogo)* (Theoretical methods of localization in space-time undiscovered celestial bodies: collective monograph: (dedicated to the 100th anniversary of the birth of Vladimir Radzievskii)). Yaroslavl', YaGPU Publ., 2011. 203 p. (in Russ.).

4. Kuto P. *Nablyudeniya vizual'no-dvoynykh zvyezd* (Observations of visual double stars). Moscow, Mir Publ., 1981. 238 p. (in Russ.).

5. Baydin A.E. *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik. Tom III (Estestvennye nauki).* 2010. no. 4. pp. 32–39. (in Russ.).

6. Hartkopf W.I., McAlister H.A., Franz O.G. Binary star orbits from speckle interferometry. II. Combined visual/speckle orbits of 28 close systems. *Astron. J.* 1989. Vol. 98. pp. 1014–1039.

7. Panchenko T.V. *Geneticheskie algoritmy* (Genetic algorithms). Astrakhan', Izdatel'skiy dom «Astrakhanskiy universitet» Publ., 2007. 87 p. (in Russ.).

8. http://sidonie.obs-nice.fr/scripts/SidonieWelcome.asp

9. http://adswww.harvard.edu

10. Hartkopf W.I., Mason B.D., Wycoff G.L., McAlister H.A. *Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars.* Washington, U.S. Nav. Obs., http://ad.usno.navy.mil/wds/int4.html.

11. Hartkopf W.I., Mason B.D. *Sixth Catalog of Orbits of Visual Binary Stars.* Washington, U.S. Nav. Obs., http://ad.usno.navy.mil/wds/orb6.html.

12. Docobo J.A. On the analytic calculation of visual double star orbits. *Celestial Mechanics.* 1985. Vol. 36. pp. 143–153.

13. Baydin A.E. *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik. Tom III (Estestvennye nauki).* 2011. no. 4. pp. 71–75.

14. Lane B.F., Muterspaugh M.W. Differential astrometry of subarcsecond scale binaries at the Palomar Testbed Interferometer. *The Astrophysical Journal.* 2004. Vol. 601. pp. 1129–1135.

Received 18 June 2013

[1] Baidin Alexey Eduardovich is Senior Lecturer, Department of Medical Physics, Yaroslavl State Medical Academy.
E-mail: abaid@rambler.ru

УДК 517.9

ГОЛОМОРФНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.В. Келлер[1], *Дж.К. Аль-Делфи*[2]

Дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно старшей производной, впервые появились, по-видимому, в конце позапрошлого века. Отдавая дань С.Л. Соболеву, который начал систематическое исследование таких уравнений, их часто называют уравнениями соболевского типа. В силу того, что интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос, то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах.

Теория голоморфных вырожденных групп операторов, развитая в банаховых пространствах и пространствах Фреше, переносится в квазибанаховы пространства. Абстрактные результаты иллюстрированы конкретными примерами.

Статья кроме введения и списка литературы содержит три части. В первой из них приводятся сведения об относительно *p*-ограниченных операторах в квазибанаховых пространствах. Во второй части строятся голоморфные группы разрешающих операторов. А в третьей приводятся достаточные условия для того, чтобы пара операторов порождала группу разрешающих операторов.

Ключевые слова: вырожденные группы операторов; квазибанаховы пространства; уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть U – банахово пространство, обозначим $L \in \boldsymbol{L}(U)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на U и действующих в U. Отображение $V^{\bullet} \in C(R; \boldsymbol{L}(U))$ назовем *группой операторов*, если

$$V^s V^t = V^{s+t} \tag{1}$$

при всех $t, s \in R$. Обычно группу операторов отождествляют с ее графиком $\{V^t : t \in R\}$. Группу $\{V^t : t \in R\}$ назовем *голоморфной*, если она аналитична во всей комплексной плоскости C, причем (1) выполняется при всех $t, s \in C$. Наконец, голоморфная группа $\{V^t : t \in R\}$ называется *вырожденной*, если ее единица V^0 является проектором в U.

Впервые голоморфные вырожденные группы операторов появились в [1] как разрешающие группы линейных уравнений соболевского типа (термин ввел в обиход Р.Е. Шоуолтер [2])

$$L\dot{u} = Mu \tag{2}$$

с (L, p)-ограниченным оператором M. Первая монография, посвященная голоморфным вырожденным группам и полугруппам, а также вырожденным сильно непрерывным полугруппам вышла в свет в 2003 году [3]. К настоящему времени голоморфные вырожденные группы нашли применение в теории динамических измерений [4], в теории оптимального управления [5], при изучении дихотомий уравнений вида (2) [6, 7], а также при изучении вырожденных операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка [8]. Кроме того, теория вырожденных групп и полугрупп операторов была перенесена в пространства Фреше [9].

Уравнения вида (2) впервые начал изучать А. Пуанкаре, однако систематическое их изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева (см. прекрас-

[1] Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: alevtinak@inbox.ru
[2] Аль-Делфи Джавад Кадим – аспирант кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: rassian71@mail.ru

ный исторический обзор в [10]). Ныне уравнения соболевского типа – активно изучаемая область неклассических уравнений математической физики, и число монографий, посвященных им полностью [11] либо частично [12, гл. 6], растет лавинообразно.

Как известно [13, п. 3.11], квазибанаховы пространства ненормируемы, но метризуемы. Расхожим примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q\in(0,1)$. В работе [14] построены квазибанаховы пространства ℓ_q^m, $q\in(0,1)$, $m\in R$, $\ell_q^0=\ell_q$, которые названы *квазисоболевыми*. Именно этими пространствами мы воспользуемся для иллюстраций абстрактных результатов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе, профессору Е.Ю. Панову за строгую, но конструктивную критику и доценту М.А. Сагадеевой за добросовестную правку рукописи.

1. Относительно *p*-ограниченные операторы

Линеал U над полем R назовем квазинормированным, если на нем задана функция ${}_U\|\cdot\|:U\to R$ со следующими свойствами:

(i) ${}_U\|u\|\ge 0$ при всех $u\in U$, причем ${}_U\|u\|=0$ точно тогда, когда $u=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нуль линеала U;

(ii) ${}_U\|\alpha u\|=|\alpha|\,{}_U\|u\|$ при всех $u\in U$, $\forall\alpha\in R$;

(iii) ${}_U\|u+v\|\le C\left({}_U\|u\|+{}_U\|v\|\right)$ при всех $u,v\in U$, где константа $C\ge 1$.

Функция ${}_U\|\cdot\|$ со свойствами (i)–(iii) называется *квазинормой*. В частном случае, когда $C=1$, квазинорма ${}_U\|\cdot\|$ называется нормой, а линеал U с нормой ${}_U\|\cdot\|$ – нормированным. Квазинормированный линеал (U, ${}_U\|\cdot\|$) метризуем [13, лемма 3.10.1], поэтому мы располагаем понятием фундаментальной последовательности $\{u_k\}\subset U$: ${}_U\|u_k-u_l\|\to 0$ при $k,l\to\infty$. Определим *квазибанахово пространство* как полный квазинормированный линеал.

Пример 1. Пусть $\{\lambda_k\}\subset R_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$, а $q\in R_+$. Положим

$$\ell_q^m=\left\{u=\{u_k\}\subset R:\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^q<+\infty\right\}.$$

Линеал ℓ_q^m при всех $m\in R$, $q\in R_+$ с квазинормой элемента $u=\{u_k\}\in\ell_q^m$

$${}_q^m\|u\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

является квазибанаховым пространством (при $q\in[1,+\infty)$ – банаховым). Заметим, что если $q\in(0,1)$, то в (iii) константа $C=2^{1/q}$. Пространства ℓ_q^m названы в [14] *квазисоболевыми*.

Пусть (U, ${}_U\|\cdot\|$) и (F, ${}_F\|\cdot\|$) – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L:U\to F$ с областью определения $dom\,L=U$ назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty}Lu_k=L(\lim\limits_{k\to\infty}u_k)$ для любой сходящейся в U последовательности $\{u_k\}\subset U$. Заметим, что в данном случае линейный оператор $L:U\to F$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Обозначим через $\boldsymbol{L}(U;F)$ линеал (над полем R) линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой

$${}_{L(U;F)}\|L\|=\sup_{\|u\|=1}{}_F\|Lu\|.$$

Пусть операторы $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$. Следуя [1; 3, п. 2.1], введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in \mathbf{L}(F;U)\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Рассуждая аналогично замечанию 2.1.2 [3], нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M всегда замкнут. Кроме того, если $\rho^L(M) \neq \varnothing$, то L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M голоморфна на $\rho^L(M)$ [3, теорема 2.1.1]. Назовем оператор M (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a \in R_+ \quad \forall \mu \in C \quad (|\mu| > a) \Rightarrow \left(\mu \in \rho^L(M)\right).$$

Итак, пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Выберем контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)\,d\mu \qquad \text{и} \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)\,d\mu,$$

где интегралы понимаются в смысле Римана. Заметим, что в силу голоморфности правой $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левой $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвент оператора M, операторы P и Q не зависят от радиуса r контура γ. Рассуждая аналогично доказательству [3, лемма 4.1.1], нетрудно показать, что операторы $P \in \mathbf{L}(U)$ ($\equiv \mathbf{L}(U;U)$) и $Q \in \mathbf{L}(F)$ – проекторы. Положим $U^0 = \ker P$, $U^1 = im P$, $F^0 = \ker Q$, $F^1 = im Q$; и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L(M) на U^k, $k = 0,1$.

Теорема 1 (теорема о расщеплении). *Пусть операторы* $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$, *причем оператор* M (L,σ)-*ограничен. Тогда*

(i) *операторы* $L_k, M_k \in \mathbf{L}(U^k;F^k)$, $k = 0,1$;

(ii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathbf{L}(F^1;U^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathbf{L}(F^0;U^0)$.

Идея **доказательства** теоремы излагалась на весьма представительном форуме [15]. Положим $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$. Очевидно, операторы $H \in \mathbf{L}(U^0)$ и $S \in \mathbf{L}(U^1)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при всех* $\mu \in C : \mu > a$ *имеет место*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Назовем точку ∞ *устранимой особой точкой* L-резольвенты оператора M, если $H = \mathrm{O}$; *полюсом порядка* p, если $H^p \neq \mathrm{O}$, а $H^{p+1} = \mathrm{O}$; *существенно особой точкой*, если $H^k \neq \mathrm{O}$ при всех $k \in N$. Удобно устранимую особую точку считать полюсом порядка нуль. Назовем (L,σ)-ограниченный оператор M (L,p)-*ограниченным*, $p \in \{0\} \cup N$, если точка ∞ – полюс порядка p L-резольвенты оператора M.

Вектор $\varphi \in U$ назовем M-*присоединенным вектором* оператора L, если существует вектор $\psi \in U$ такой, что $L\psi = M\varphi$. Упорядоченное множество

$$\{\varphi_k : k \in \{0\} \cup N, \quad L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad \varphi_0 \in \ker L\} \equiv \{\varphi_k : k \in \{0\} \cup N\}$$

назовем *цепочкой* M-*присоединенных векторов* оператора L. Цепочка векторов может быть бесконечной, однако она обязательно конечна, если существует вектор $\varphi_r \in \{\varphi_k : k \in \{0\} \cup N\}$ такой, что $M\varphi_r \notin im L$. Мощность конечной цепочки назовем ее длиной. Напомним еще, что оператор $L \in \mathbf{L}(U;F)$ называется *фредгольмовым*, если $\dim\ker L = \operatorname{codim} im L < \infty$.

Теорема 2. *Пусть операторы* $L \in \mathbf{L}(U;F)$ *фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор* M (L,p)-*ограничен*, $p \in \{0\} \cup N$;

(ii) *длина любой цепочки* M *-присоединенных векторов оператора* L *не превышает* p *и существует по крайней мере одна цепочка длины* p.

Доказательство теоремы 2 в общем случае довольно сложно (см. [3, гл. 4]), однако в частном случае $p = 0$ (т.е. оператор L не имеет M -присоединенных векторов) очень просто [7].

Пример 2. Введем в рассмотрение *квазиоператор Лапласа* с помощью формулы $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, $u \in \ell_q^m$. Как нетрудно показать [16], оператор $\Lambda : \ell_q^{m+2} \to \ell_q^m$ – топлинейный изоморфизм при всех $m \in R$, $q \in R_+$. Обратный оператор $\Lambda^{-1} u = \{\lambda_k^{-1} u_k\}$ назовем *квазиоператором Грина*.

Далее, построим операторы $L = \lambda - \Lambda$ и $M = \alpha\Lambda$, $\alpha \in R$. Покажем, что при всех $\alpha \in R \setminus \{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен. Если $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, то утверждение тривиально. Если же $\lambda = \lambda_k$ при некоторых $k \in N$ (их обязательно конечное множество в виду монотонной сходимости $\lambda_k \to +\infty$), то утверждение следует из теоремы 2.

2. Разрешающие группы операторов

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in \boldsymbol{L}(U;F)$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{3}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(R;U)$ назовем *решением уравнения* (3), если она удовлетворяет ему. Решение $u = u(t)$ уравнения (3) назовем решением задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

для уравнения (3) (коротко, задачи (3), (4)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (4) при некотором $u_0 \in U$. Заметим, что вообще говоря, задача (3), (4) неразрешима при любых $u_0 \in U$, и для уравнений вида (3) приходится ставить другие задачи, например, с условием Шоуолтера–Сидорова $L\big(u(0) - u_0\big) = 0$ [4, 17].

Определение 1. Множество $\wp \subset U$ называется *фазовым пространством* уравнения (3), если

(i) при любом $u_0 \in \wp$ существует единственное решение задачи (3), (4);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (3) лежит в $\wp$ как траектория (то есть $u(t) \in \wp$ при всех $t \in R$).

Теорема 3. *Пусть оператор* M (L, p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup N$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (3) *служит подпространство* U^1.

Приведем набросок **доказательства**. В силу теоремы 1 уравнение (3) эквивалентно системе из двух уравнений

$$H\dot{u}^0 = u^0, \qquad \dot{u}^1 = Su^1, \tag{5}$$

где $u^0 = u^0(t) \in U^0$ и $u^1 = u^1(t) \in U^1$ при всех $t \in R$. Дифференцируя первое уравнение по t и применяя оператор H слева, последовательно получим

$$0 = H^{p+1} \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} u^0(t) = H^p \frac{d^p}{dt^p} u^0(t) = \ldots = Hu^0(t) = u^0(t).$$

Значит, все решения уравнения (3) лежат в U^1 как траектории. Однозначная разрешимость задачи $u^1(0) = u_0^1$ для второго уравнения (5) при любых $u_0^1 \in U^1$ очевидна в виду ограниченности оператора $S \in \boldsymbol{L}(U^1)$.

Пусть далее $\left\{V^t : t \in R\right\}$ – вырожденная голоморфная группа операторов, а V^0 – ее единица. Введем в рассмотрение образ $im\, V^\bullet = im\, V^0$ и ядро $\ker V^\bullet = \ker V^0$ этой группы. Назовем группу $\left\{V^t : t \in R\right\}$ *разрешающей группой* уравнения (3), если, во-первых, вектор-функция $u(t) = V^t u_0$ является решением уравнения (3) при любом $u_0 \in U$, а во-вторых, образ $im\, V^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (3).

Теорема 4. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p\in\{0\}\cup N$. *Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (3), которая к тому же имеет вид*

$$V^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu,\qquad t\in R,$$

где контур $\gamma=\{\mu\in C:|\mu|=r>a\}$.

Доказательство теоремы аналогично случаю банаховых пространств (см. [1; 3, гл. 4]), поэтому опускается.

Пример 3. Пусть $U=\ell_q^{m+2}$, $F=\ell_q^m$, $m\in R$, $q\in(0,1)$, где квазисоболевы пространства ℓ_q^m определены в примере 1, а операторы L и M построены в примере 2. Рассмотрим уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной как наиболее известное из неклассических уравнений математической физики [18]

$$(\lambda-\Lambda)\dot u=\alpha\Lambda u. \tag{6}$$

Как нетрудно показать, голоморфная разрешающая группа уравнения (6) будет иметь вид

$$V^t=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_{0k}e^{\mu_k t}e_k, & \text{если}\quad \lambda\ne\lambda_k,\quad k\in N;\\ \sum\limits_{k\ne l}u_{0k}e^{\mu_k t}e_k, & \text{если существует } l\in N:\lambda=\lambda_l.\end{cases}$$

Здесь $\mu_k=\dfrac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}$ – точки L-спектра оператора M, последовательность $\{u_{0k}\}=u_0\in\ell_q^{m+2}$, векторы $e_k=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (6) будет множество

$$U^1=\begin{cases}U, & \text{если } \lambda\ne\lambda_k,\ k\in N;\\ \{x\in U:\ x_l=0,\ \lambda=\lambda_l\}.\end{cases}$$

Замечание 1. В условиях теоремы 4 операторы L и M на пространстве F порождают вырожденную голоморфную группу

$$W^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu$$

– разрешающую группу уравнения $L(\beta L-M)^{-1}\dot f=M(\beta L-M)^{-1}f$, где $\beta\in\rho^L(M)$.

3. Порождающие операторы вырожденных голоморфных групп

Пусть квазибанаховы пространства U и F расщепляются в прямые суммы

$$U=U^0\oplus U^1\qquad\text{и}\qquad F=F^0\oplus F^1. \tag{7}$$

Пусть существуют топлинейные изоморфизмы

$$A:U^0\to F^0\qquad\text{и}\qquad B:U^1\to F^1. \tag{8}$$

Пусть на U^1 (F^1) задана голоморфная группа операторов

$$e^{tS}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^k}{k!}t^k\qquad\left(e^{tT}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{k!}t^k\right), \tag{9}$$

где $S\in\mathbf{L}(U^1)$ $(T\in\mathbf{L}(F^1))$ – некоторый оператор. Пусть существует такой оператор $C\in\mathbf{L}(U^0;F^0)$, что оператор

$$A^{-1}C=H\in\mathbf{L}(U^0)\ \text{нильпотентен степени } p\in\{0\}\cup N. \tag{10}$$

Построим операторы

$$L=C(I-P)+BP\quad\text{и}\quad M=A(I-P)+BSP, \tag{11}$$

где $P\in\mathbf{L}(U)$ – проектор из первого расщепления (7) (т.е. $\ker P=U^0$, $im\,P=U^1$). По построению операторы $L,M\in\mathbf{L}(U;F)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (7)–(11). *Тогда оператор* M (L,p)*-ограничен.*

Действительно, $\mu L - M = (\mu C - A)(I-P) + B(\mu I - S)P$, откуда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k H^k A^{-1}(I-Q) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}B^{-1}Q\,, \qquad (12)$$

где $Q \in \boldsymbol{L}(F)$ проектор из второго расщепления (7). Поскольку $\sigma^L(M) = \sigma(S)$, а спектр $\sigma(S)$ ограниченного оператора ограничен, то число $\mu \in C$ в (12) достаточно взять таким, что $\mu > {}_{L(U^1)}\|S\|$.

В силу теорем 5 и 4 простроенные операторы L и M порождают на U голоморфную вырожденную группу операторов $V^t = \mathrm{O}(I-P) + e^{tS}P$, $t \in R$. (Если вдобавок оператор $T = BSB^{-1}$, то эти же операторы порождают на F голоморфную вырожденную группу $W^t = \mathrm{O}(I-Q) + e^{tT}Q$.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

2. Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, № 1 (2). – P. 15–22 (P. 81–99).

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.

4. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

5. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 17 (234). – С. 113–114.

6. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

7. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

8. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

9. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160.

10. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.

11. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

12. Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.

13. Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. – М.: Мир, 1980. – 264 р.

14. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

15. Свиридюк, Г.А. Квазиоператор Лапласа в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Тезисы Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2013. – С. 247

16. Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (31). – С. 13–16.

17. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

18. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

Поступила в редакцию 15 января 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 20–27

HOLOMORPHIC DEGENERATE GROUPS OF OPERATORS IN QUASI-BANACH SPACES

A.V. Keller[1], J.K. Al-Delfi[2]

Probably, Sobolev type equations, i.e. unsolved with respect to the highest derivative, first appeared in the late nineteenth century. Due to the fact that the interest to the Sobolev type equations recently significantly increased, the need arose for their consideration in quasi-Banach spaces. Specifically, this study aimed at understanding non-classical models of mathematical physics in quasi-Banach spaces.

The theory of holomorphic degenerate groups of operators, developed in Banach spaces and Frechet spaces is transferred to quasi-Banach spaces. Abstract results are illustrated by specific examples.

The article besides the introduction and the references contains three parts. The first part provides the necessary information regarding the theory of relatively *p*-bounded operators in quasi-Banach spaces. The second one represents the construction of the holomorphic group of solving operators. The third part contains the sufficient conditions for pair of operators to generate group of solving operators.

Keywords: degenerate groups of operators; quasi-Banach spaces; Sobolev type equations.

References

1. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. Russian Mathematical Surveys, 1994. Vol. 49, no. 4. P. 45–74. http://dx.doi.org/10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

2. Showalter R.E. The Sobolev type equations. I (II). *Appl. Anal*. 1975. vol. 5, no. 1 (2). pp. 15–22 (pp. 81–99).

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003. 216 p.

4. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*. 2012. vol. 73, no. 1. pp. 97–104.

5. Manakova N.A., Dylkov A.G. ptimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoy zadachi dlya lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa (Optimal Control of Solutions of Initial-Finish Problem for the Linear Sobolev Type Equations). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2011. no. 17 (234). pp. 113–114. (in Russ.).

6. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariant spaces and dichotomies of solutions of a class of linear equations of Sobolev type. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*). 1997. Vol. 41, no. 5. pp. 57–65.

7. Sagadeeva M.A. *Dikhotomii resheniy lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa* (Dichotomies of the Solutions for the Linear Sobolev Type Equations). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 139 p. (in Russ.).

8. Zamyshlyaeva A.A. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* (Linear Sobolev Type Equations of Hihg Order). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 88 p. (in Russ.).

9. Fedorov V.E. Holomorphic Solution Semigroups for Sobolev Type Equations in Locally Convex Spaces. *Sbornik: Mathematics*. 2004. Vol. 195, no. 8. pp. 1205–1234. http://dx.doi.org/10.1070/-SM2004v195n08ABEH000841

[1] Keller Alevtina Viktorovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Modeling Department, South Ural State University.
E-mail: alevtinak@inbox.ru
[2] Al-Delfi Jawad Kadim is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University.
E-mail: rassian71@mail.ru

10. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p.

11. Sveshnikov A.G., Al’shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Equation of Sobolev Type). Moscow, FizMatLit Publ., 2007. 736 p. (in Russ.).

12. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.

13. Bergh J., Löfström J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1976. 207 p.

14. Al-Delfi J.K. Kvazisobolevy prostranstva ℓ_p^m (Quasi-Sobolev Spaces ℓ_p^m). *Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”*. 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 107–109. (in Russ.).

15. Sviridyuk G.A., Al-Delfi J.K. The Laplace Quasi-Operator in the Quasi-Banach Spaces. *Differential Equations. Function Spaces. Approximation Theory. Abstracts of International Conference Dedicated to the 105th Anniversary of the Birthday of S.L. Sobolev*. Novosibirsk, 2013. p. 247. (in Russ.).

16. Al-Delfi J.K. Kvazioperator Laplasa v kvazisobolevykh prostranstvakh (The Laplace' Quasi-operator in Quasi-Sobolev spaces). *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki.* 2013. Issue 2 (31). pp. 13–16. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1213

17. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Zadacha Shouoltera–Sidorova kak fenomen uravneniy sobolevskogo tipa. (The Showalter–Sidorov problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations). *Bulletin of Irkutsk State University. Series: "Mathematics"*. 2010. Vol. 3, no. 1. pp. 104–125. (in Russ.).

18. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Neklassicheskie modeli matematicheskoy fiziki (Nonclassical Models of Mathematical Physics). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2012. no. 40 (299). pp. 7–18. (in Russ.).

Received 15 January 2015

УДК 519.22:539.12.08

СРАВНЕНИЕ БУТСТРАП И АНАЛИТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ ФОНОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЖИТЕЛЕЙ УРАЛЬСКОГО РЕГИОНА

Ю.С. Тимофеев[1]

Сегодня при анализе экспериментальных данных в различных областях знаний приобретают популярность методы ресамплинга. В частности, в эконометрике [1], экологии и биологии [2, 3] для построения интервальных оценок и анализа погрешностей активно используется бутстрап (*bootstrap*)-метод [4]. В настоящей работе приводится сравнение результатов аналитических и бутстрап-оценок погрешностей параметров распределения фоновых доз ионизирующего излучения. Результаты, полученные разными методами, хорошо согласуются между собой.

Ключевые слова: статистическая модель; ЭПР измерения; bootstrap.

Введение

Ионизирующее излучение индуцирует в эмали зубов человека стабильные CO_2^- радикалы. Метод дозиметрии на основе электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) зубной эмали позволяет оценить количество этих радикалов в зубах, удаленных по медицинским показаниям [5]. Таким образом, в результате ЭПР измерения оценивается суммарная поглощенная доза радиации в эмали зубов, накопленная за время жизни донора (до момента экстракции зуба), включая воздействие как антропогенных, так и естественных источников излучения. Естественный радиационный фон представляет собой ионизирующее излучение природных источников космического и земного происхождения. В ЭПР-дозиметрии важной является оценка дозы, полученной в результате изучаемого инцидента, поэтому из общей измеренной дозы необходимо исключить фоновую составляющую.

Средние значения и распределения фоновых ЭПР-доз в разных популяциях могут отличаться [6], так как они зависят от радиационного фона конкретной местности, стиля жизни, типичного для населения региона, а также от индивидуальной вариабельности радиационной чувствительности эмали зубов в популяции [7]. Задача по выделению фонового распределения осложняется тем, что фоновые уровни доз близки к пределу детектирования ЭПР-дозиметрии [8], поэтому погрешность каждого отдельного измерения может быть сопоставима с индивидуальной вариабельностью доз в популяции (зашумленные данные).

В предыдущих исследованиях был предложен подход к выделению фонового распределения доз на основе статистического метода моментов в рамках модели, когда фоновое распределение доз имеет логнормальное распределение, а ошибка измерения – нормальное с зависимой от дозы дисперсией [9]. С его помощью были оценены параметры логнормального распределения фоновых доз сельских жителей Уральского региона: LogN (3,9±0,5; 0,7±0,1), что соответствует среднему значению 61±47 мГр.

С развитием компьютерной техники статистические подходы с использованием бутстрап метода приобретают все большую популярность и в некоторых, особенно в сложных, задачах конкурируют с аналитическими подходами. Целью данной работы является сравнение оценок погрешностей параметров логнормального распределения с помощью бутстрап метода и сравнение их с оценками, полученными аналитически.

Материалы и методы

Используемые в исследованиях образцы были получены от людей, для которых не велась точная история их жизни и перемещений на изучаемой территории. Поэтому нельзя исключить «внешние» в текущей задаче источники радиационного облучения, которыми являются, например, фоновое излучение на других территориях. Некоторые полученные измерения (2–3 %) превышают 500 мГр. Полагая, что к таким результатам привело какое-то внешнее облучение, такие измерения были исключены из анализа.

[1] Тимофеев Юрий Сергеевич – научный сотрудник ООО «Прикладные технологии».
E-mail: ystimofeev@gmail.com

ЭПР-измерения эмали зубов человека – это сложная и многоступенчатая процедура, на каждом шаге которой в получаемый результат привносятся ошибки. Каждая лаборатория использует свои методики измерений, поэтому ошибка измерений также зависит от лаборатории. При измерении фоновых доз получаемые значения сопоставимы с общей погрешностью измерения и большая их часть оказывается ниже предела детектирования используемого ЭПР-метода. Предел детектирования – доза, при которой на высоком уровне значимости статистическими тестами подтверждается нулевая гипотеза «образец был облучен». Были использованы 65 ЭПР-измерений фоновых доз в эмали зубов сельских жителей Уральского региона в возрасте 40–80 лет, проводившихся в Гельмгольц-Центре Мюнхена (HMGU) [10], где более 50 % измерений были выше предела детектирования.

Модель ЭПР измерений

Общая измеренная $\hat{D}$ доза состоит из фоновой составляющей D и ошибки измерения E (1):

$$\hat{D} = D + E \tag{1}$$

Распределение фоновых доз принимается логнормальным $D = LogN[m,s]$ с неизвестными параметрами m и s, а ошибка измерения имеет нормальное распределение с неизвестным средним и известным стандартным отклонением – $N[C, g(D)]$. Форма стандартного отклонения оценивается с помощью компьютерной программы «EPR-dosimetry performance», разработанной авторами [11]. Для изучаемого метода стандартное отклонение описывается функцией (2):

$$g(D) = \begin{cases} 47; \ D \le 100, \\ 30{,}9 + \dfrac{15{,}8}{1 + \exp\left(\dfrac{D - 304}{42}\right)}; \ D > 100. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, окончательная модель измерений становится (3):

$$\hat{D} = LogN[m,s] + N[C, g(D)]. \tag{3}$$

Приравнивания теоретические моменты распределения (M_i) правой части уравнения (2) с их выборочными аналогами ($\hat{M}_i$), полученными из экспериментальных данных, с учетом трёх неизвестных параметров получаем систему из трёх уравнений (4):

$$M_i(m,s,C) = \hat{M}_i, \ i = 1,2,3 \tag{4}$$

Решая эту систему, используя данные единственно удовлетворительного ЭПР метода, находим неизвестные параметры m, s и C, а также погрешности этих оценок. Более подробно метод описан в работе [9]. Полученные оценки параметров m = 3,9 и s = 0,7, с погрешностями 0,5 и 0,1 соответственно. Среднее значение фоновой дозы при этих оценках будет 61±47 мГр. Учитывая, что возраст доноров на момент извлечения зуба около 60 лет, то ежегодная доза, получаемая от естественных источников радиационного излучения для жителей Уральского региона, находится на уровне 1 мГр/год.

Бутстрап подход

Статистический бутстрап (*bootstrap*) - метод определения статистик вероятностных распределений, основанный на многократной генерации выборок методом Монте-Карло на базе имеющейся выборки. Метод позволяет просто и быстро оценивать различные статистики (доверительные интервалы, дисперсию) для сложных моделей.

Пусть $\hat{D}_i$ – измерения, полученные ЭПР-методом, $i = 1,...,65$. Из имеющегося пула измерений с помощью бутстрап метода сгенерируем j новых выборок $\tilde{D}_j$ (5) такого же размера, что и исходная выборка ($j = 1,...,65$). Каждое значение генерируемой выборки равновероятно выбирается среди значений исходной выборки, при этом выбранное значение не исключается из выбора следующего значения и может быть выбрано повторно.

$$\hat{D}_i \xrightarrow{bootstrap} \tilde{D}_j^k, \ i, j = 1,...,65, \ \ k = 1,...,1000. \tag{5}$$

Решая систему (4) для каждой бутстрап выборки, находим новые оценки параметров m^k, s^k и их стандартные отклонения – 0,6 и 0,2 соответственно.

Заключение

Использование бутстрап подхода в текущей задаче оценке погрешностей параметров лог-нормального распределения фоновых доз сельского населения Уральского региона дает погрешности 0,6 и 0,2, которые сравнимы с оценками 0,5 и 0,1, полученными аналитически. При этом большие величины, полученные методом бутстрап, вполне ожидаемы, поскольку при выборе с возвращениями, реализуемом в бутстрапе, могут генерироваться нереалистические выборки (например, не исключена возможность получить выборку из повторяющегося одного и того же значения). Таким образом, бутстрап оценка может рассматриваться как консервативное приближение (не занижающее оценки погрешностей и ширины доверительного интервала). Учитывая вышесказанное, а также принимая во внимание, что временные затраты для поиска параметров фонового распределения для каждой сгенерированной выборки несопоставимы с затратами на получение аналитических оценок, применение бутстрап подхода представляется оправданным только в случае невозможности аналитического подхода в решении задачи.

Литература

1. Орлов, А.И. Эконометрика. Учебник / А.И. Орлов. – М.: Издательство «Экзамен», 2002. – 576 с.

2. Van Dongen, S. One and two-sample tests for single locus inbreeding coefficients using the bootstrap / S. Van Dongen, T. Backeljau // Heredity. – 1995. – Vol. 74. – P. 129–135.

3. Manly, B. F. J. Randomization, Bootstrap and Monte Carlo Methods in Biology. 2nd edition. / B. F. J. Manly. – Chapman and Hall, London, 1997. – 300 p.

4. Davison, A.C. Bootstrap Methods and their Application / A.C. Davison, D.V. Hinkley. – Cambridge University Press, Cambridge, 1997. – 582 p.

5. Ikeya, M. ESR dosimetry for atomic bomb survivors using shell buttons and tooth enamel / M. Ikeya, J. Miyajima, S. Okajima // Japanese J. of Applied Physics. – 1984. – Vol. 23. – P. 697–699.

6. Individual biodosimetry at the natural radiation background level / A.A. Romanyukha, V. Nagy, M.F. Desrosiers *et al*. // Health Phys. – 2001. – Vol. 80. – P. 71–73.

7. Variability of the radiation sensitivity for tooth enamel of the Ural residents / E. Shishkina, E. Tolstykh, M. Degteva *et al.* // ANRI (Instruments and Methods of Radiat. Meas.). – 2012. – Vol. 69. – P. 41–50.

8. Assessment of performance parameters for EPRdosimetry with tooth enamel / A. Wieser, P. Fattibene, E.A. Shishkina *et al.* // Radiation Measurements. – 2008. – Vol. 43. – P. 731–736.

9. Заляпин, В.И. Статистическая реконструкция распределения фоновых доз облучения по результатам ЭПР измерений / В.И. Заляпин, Ю.С. Тимофеев, Е.А. Шишкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2014. – Т. 6, № 1. – С. 22–27.

10. Shishkina, E.A. EPR dosimetry of radiation background in the Urals region / E.A. Shishkina, P. Fattibene, A. Wieser *et al.* // Proceedings of Second European IRPA congress on radiation protection - Radiation protection: from knowledge to action. – 2006. – CD, № TA-33. – P. 12.

11. Shishkina, E.A. Software for evaluation of EPR-dosimetry performance / E.A. Shishkina, Y.S. Timofeev, D.V. Ivanov // Radiation Protection Dosimetry. – 2014. – Vol. 159, no. 1–4. – P. 188–193.

Поступила в редакцию 11 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 28–31

COMPARISION OF BOOTSTRAP AND ANALYTICAL ERRORS OF ESTIMATED PARAMETERS OF BACKGROUND DISTRIBUTION OF THE POPULATION OF THE URAL REGION

Yu.S. Timofeev[1]

Data analysis methods based on data resampling are becoming popular today. Particularly, the bootstrap method is used in econometrics [1], ecology and biology [2, 3] to estimate such statistical values as standard deviation, confidence interval, etc [4]. The comparison of analytical and bootstrap errors of parameters of background distribution is presented in this work. Bootstrap results are in good agreement with the analytical ones.

Keywords: statistical model; EPR measurements; bootstrap.

References

1. Orlov A.I. *Ekonometrika. Uchebnik* (Econometrics. Textbook). Moscow: Izdatel'stvo "Ekzamen" Publ., 2002. 576 p. (in Russ.).

2. Van Dongen S., Backeljau T. One and two-sample tests for single locus inbreeding coefficients using the bootstrap. *Heredity.* 1995. Vol. 74. pp. 129–135. doi:10.1038/hdy.1995.19

3. Manly B.F.J. *Randomization, Bootstrap and Monte Carlo Methods in Biology, 2nd edition.* Chapman and Hall, London, 1997. 300 p.

4. Davison A.C., Hinkley D.V. *Bootstrap Methods and their Application.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. 582 p. doi: 10.1017/CBO9780511802843

5. Ikeya M., Miyajima J., Okajima S. ESR dosimetry for atomic bomb survivors using shell buttons and tooth enamel. *Japanese J. of Applied Physics.* 1984. Vol. 23. pp. 697–699.

6. Romanyukha A.A., Nagy V., Desrosiers M.F., Jiang J., Heiss A. Individual biodosimetry at the natural radiation background level. *Health Phys*. 2001. Vol. 80. pp. 71–73.

7. Shishkina E., Tolstykh E., Degteva M., Ivanov D., Aladova E. Variability of the radiation sensitivity for tooth enamel of the Ural residents. *ANRI (Instruments and Methods of Radiat. Meas.)*. 2012. Vol. 69. pp. 41–50.

8. Wieser A., Fattibene P., Shishkina E.A., Ivanov D.V., De Coste V., Güttler A., Onori S. Assessment of performance parameters for EPRdosimetry with tooth enamel. *Radiation Measurements*. 2008. Vol. 43. pp. 731–736.

9. Zalyapin V.I., Timofeev Yu.S., Shishkina E.A. Statistical Reconstruction of the Distribution of Background Doses Based on the Results of the EPR Measurements. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2014. Vol. 6, no. 1. pp. 22–27.

10. Shishkina E.A., Fattibene P., Wieser A., Degteva M.O., Onori S., Ivanov D.V., Shved V.A., Bayankin S.N., Knyazev V.A., Vasilenko E.K., Gorelov M. EPR dosimetry of radiation background in the Urals region. *Proceedings of Second European IRPA congress on radiation protection – Radiation protection: from knowledge to action.* 2006. CD, № TA-33. p. 12.

11. Shishkina E.A., Timofeev Y.S., Ivanov D.V. Software for evaluation of EPR-dosimetry performance. *Radiation Protection Dosimetry*. 2014. Vol. 159, no. 1–4. pp. 188–193. doi:10.1093/rpd/ncu167

Received 11 December 2014

[1] Timofeev Yury Sergeevich is Researcher, «Applied Technologies» Ltd.
E-mail: ystimofeev@gmail.com

УДК 519.816

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В.И. Ухоботов[1], *Е.С. Михайлова*[2]

Рассмотрен один подход сравнения нечетких чисел. Он может быть применим в задачах принятия решений с нечеткой информацией о помехе. Этот подход основан на сравнении множеств уровня нечетких чисел. Для некоторых классов нечетких чисел предложенный метод сравнения приводит к нахождению решения в лексикографическом смысле некоторой многокритериальной задачи. Для трапецеидальных и колоколообразных нечетких чисел дана геометрическая интерпретация решения этой задачи.

Ключевые слова: нечеткое число; нечеткое множество; сравнение нечетких чисел.

Введение

Для целого класса экономических и социальных задач информация о переменных носит нечеткий расплывчатый характер. Для исследования таких задач используются нечеткие числа. С момента опубликования Л. Заде своей работы по нечетким множествам [1], вышло большое количество работ, в которых рассматриваются действия с нечеткими числами [2, 3].

В задачах принятия решения, когда лицо, принимающее решение, в зависимости от выбранной им стратегии получает информацию о реализации этой стратегии в виде нечеткого числа, возникает проблема сравнения нечетких чисел.

К настоящему времени предложено достаточное количество различных методов сравнения нечетких чисел [4]. Ни один из них не является универсальным. Возникает проблема с интерпретацией тех или иных методов, не все они понятны интуитивно.

При решении прикладных задач в вопросах принятия решений при выборе того или иного метода сравнения нечетких чисел нужно исходить из специфики задачи.

В данной работе продолжаются исследования, начатые в работе [5].

Постановка задачи

Пусть задана функция $\mu_A : R \to [0;1]$. Нечетким числом A называется [1] совокупность пар вида $\left(x \mid \mu_A(x)\right), x \in R$. Функция $\mu_A(x)$ называется функцией принадлежности нечеткого числа A, а её значение на конкретном числе $x \in R$ называется степенью (или мерой) принадлежности этого числа x нечеткому числу A.

Для каждого числа $\alpha \in [0;1]$ обычное множество $A(\alpha) = \{x \in R : \mu_A(x) \ge \alpha\}$ называется множеством уровня нечеткого числа A. Эти множества уровня удовлетворяют следующим свойствам:

$$A(0) = X;\ 0 \le \alpha \le \beta \le 1 \Rightarrow A(\beta) \subset A(\alpha);\ 0 < \alpha \le 1 \Rightarrow \bigcap_{0 \le t < \alpha} A(t) = A(\alpha). \tag{1}$$

Пусть при каждом $0 \le \alpha \le 1$ определено множество $A(\alpha) \subset R$. Если совокупность этих множеств удовлетворяет свойствам (1), то оно является семейством множеств уровня нечеткого числа A, функция принадлежности которого равна

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in [0;1] : x \in A(\alpha)\}.$$

Поэтому нечеткое число A можно задать семейством множеств $A(\alpha) \subset R$, при каждом $0 \le \alpha \le 1$, удовлетворяющих свойствам (1).

В данной работе будем рассматривать нечеткие числа, множества уровня которых имеют вид отрезков [6]

[1] Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: ukh@csu.ru
[2] Михайлова Екатерина Сергеевна – аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: mihailova.katherine@gmail.com

$$A(\alpha)=[a+\varepsilon f(\alpha);b-\delta\phi(\alpha)]. \quad (2)$$

Функции $f,\varphi:(0;1]\to(-\infty;0]$ и коэффициенты a,ε,b,δ удовлетворяют следующим свойствам:

$$0<\alpha_1<\alpha_2\le 1\Rightarrow f(\alpha_1)\le f(\alpha_2),\ \varphi(\alpha_1)\le\varphi(\alpha_2);\ f(1)=\varphi(1)=0;$$
$$\lim_{t\to\tau-0} f(t)=f(\tau),\ \lim_{t\to\tau-0}\varphi(t)=\varphi(\tau),\ \varepsilon\ge 0,\delta\ge 0,a\le b. \quad (3)$$

При выполнении условий (3) отрезки (2) удовлетворяют свойствам (1).

Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР), может выбрать одну из двух стратегий. Цель ЛПР заключается в том, чтобы выигрыш $x\in R$, который он получит при выборе i-й стратегии, был как можно больше. Однако информацию о возможном результате он получает в виде нечеткого числа A_i.

Зафиксируем число $0<\alpha\le 1$ и будем считать, что ЛПР интересует только те выигрыши, значения которых $x\in A_i(\alpha), i=1,2$. Приходим к задаче о сравнении отрезков $[g_1(\alpha);G_1(\alpha)]$ и $[g_2(\alpha);G_2(\alpha)]$. Вид функций $g_i(\alpha)$ и $G_i(\alpha)$ следует из формулы (2). На плоскости z_1Oz_2 рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (см. рис.1). На этом рисунке прямая ON является множеством точек (z_1,z_2), у которых $z_1 = z_2$. Считаем, что отрезок $[g_i(\alpha);G_i(\alpha)]$ предпочтительнее для ЛПР отрезка $[g_j(\alpha);G_j(\alpha)]$ тогда и только тогда, когда площадь фигуры $AKNCD$ не меньше площади фигуры KBN.

Этим определением мы формализуем тот факт, что «число» пар (z_1,z_2) выигрышей $z_1\in[g_i(\alpha),G_i(\alpha)]$ и $z_2\in[g_j(\alpha),G_j(\alpha)]$, у которых $z_1\ge z_2$ не меньше, чем число пар выигрышей, у которых $z_1\le z_2$.

Нетрудно показать, что [7] площадь фигуры $AKNCD$ не меньше площади фигуры KBN тогда и только тогда, когда

$$g_i(\alpha)+G_i(\alpha)\ge g_j(\alpha)+G_j(\alpha).$$

Последнее неравенство означает, что середина i-го отрезка не меньше середины j-го отрезка.

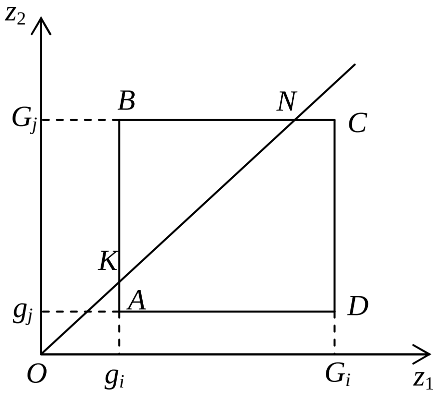


Рис. 1. Задача о сравнении отрезков

Обобщим изложенный подход. С этой целью зафиксируем число $0\le\lambda\le 1$ и рассмотрим величину

$$Q_i(\alpha)=(1-\lambda)\big(g_i(\alpha)+G_i(\alpha)\big)+\lambda\big(g_i(\alpha)-G_i(\alpha)\big). \quad (4)$$

Выбор наибольшего из двух чисел $Q_i(\alpha)$ и $Q_j(\alpha)$ отражает намерение ЛПР выбрать отрезок, у которого, по возможности, больше середина и меньше длина. Сравнение нечетких чисел A_i и A_j будем проводить с помощью неравенства

$$Q_i(\alpha)\ge Q_j(\alpha). \quad (5)$$

Слабая предпочтительность нечетких чисел

Определение 1. Будем говорить, что нечеткое число A_i предпочтительней нечеткого числа A_j в слабом смысле, если существует число $0<\gamma\le 1$ такое, что неравенство (5) выполнено при всех $\gamma<\alpha\le 1$.

Пример 1. Функция принадлежности нечеткого числа A = «примерно b или более» может быть задана следующей формулой:

$$\mu(x)=\frac{1}{\gamma}\left(1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)\right) \text{ при } 0\le x\le b, \mu(x)=\exp\left(-\left(\frac{x-b}{\delta}\right)^2\right) \text{ при } b\le x;\ \gamma=\left(1-e^{-\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2}\right). \quad (6)$$

График этой функции приведен на рис. 2. Множества уровня этого нечеткого числа являются отрезками $[g(\alpha);G(\alpha)]$ с функциями

$$g(\alpha) = \varepsilon\sqrt{-\ln(1-\alpha\gamma)},\ G(\alpha) = b + \delta\sqrt{-\ln\alpha}\ .$$

Поэтому функция (4) равна

$$Q(\alpha) = \varepsilon\sqrt{-\ln(1-\alpha\gamma)} + (1-2\lambda)\left(b + \delta\sqrt{-\ln\alpha}\right)\ .$$

Обозначим

$$t = \sqrt{-\ln\alpha} \Rightarrow \alpha = e^{-t^2}, 0 \le t < +\infty; \quad \alpha \to 1 \Leftrightarrow t \to 0.$$

Тогда множество

$$D(t) = Q\left(\exp(-t^2)\right)$$

равно

$$D(t) = \varepsilon\sqrt{-\ln\left(1-\gamma+(1-\exp\left(-t^2\right))\gamma\right)} + (1-2\lambda)\left(b+\delta t\right).$$

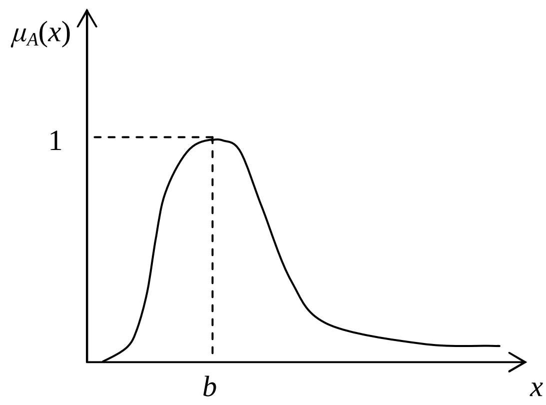


Рис. 2. График функции принадлежности «примерно *b* и не более»

Разлагая это выражения по степеням t и используя вид числа γ(6), получим

$$D(t) = b\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2b^2}\left(1-\exp\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2\right)t^2\right) + (1-2\lambda)\left(b+\delta t\right) + o(t^2). \quad (7)$$

Запишем неравенство (5) в виде

$$D_i(t) \ge D_j(t) \text{ при малых } t > 0. \quad (8)$$

Из формулы (7) получим, что, если $b_i > b_j$, то (8) будет выполнено. Пусть $b_i = b_j = b$. Тогда, если $\delta_i > \delta_j$, то (8) выполнено. Пусть $b_i = b_j = b$, $\delta_i = \delta_j = \delta$. Тогда (8) будет выполнено, если

$$\frac{e^{\tau_i}-1}{\tau_i} < \frac{e^{\tau_j}-1}{\tau_j}, \tau = \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2.$$

Поскольку функция $\dfrac{e^{\tau}-1}{\tau}$ возрастает при $\tau > 0$, то предыдущее неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $\varepsilon_i > \varepsilon_j$. Если $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, то, как следует из формулы (6), нечеткие числа A_i и A_j совпадают.

В общем случае анализ слабой предпочтительности нечетких чисел можно проводить с помощью разложения в степенные ряды функции принадлежности.

Из формул (2) и (4) следует, что неравенство (5) равносильно следующему неравенству:

$$\varepsilon_i f_i(\alpha) - \varepsilon_j f_j(\alpha) + (1-2\lambda)(\delta_j\varphi_j(\alpha) - \delta_i\varphi_i(\alpha)) \ge a_j - a_i + (1-2\lambda)(b_j - b_i). \quad (9)$$

Из формулы (9) и из условий $f_S(1) = \varphi_S(1) = 0$ следует, что, если

$$a_i + (1-2\lambda)b_i > a_j + (1-2\lambda)b_j, \quad (10)$$

то нечеткое число A_i предпочтительнее в слабом смысле нечеткого числа A_j.

Рассмотрим случай, когда в формуле (10) стоит равенство. Будем предполагать, что функции $f_S(\alpha)$ и $\varphi_S(\alpha)$ представимы рядом Тейлора

$$f_S(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}f_S^{(k)}(1), \varphi_S(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}\varphi_S^{(k)}(1)\ .$$

Подставим эти формулы в (9). Получим:

$$f_S(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}\left(\varepsilon_i f_i^{(k)}(1) - \varepsilon_j f_j^{(k)}(1) + (1-2\lambda)\left(\delta_i\varphi_j^{(k)}(1) - \delta_i\varphi_i^{(k)}(1)\right)\right) \ge 0.$$

Отсюда видно, что если

$$\varepsilon_i f_i'(1) - (1-2\lambda)\delta_i\varphi_i'(1) < \varepsilon_j f_j'(1) - (1-2\lambda)\delta_j\varphi_j'(1), \quad (11)$$

то найдется число $0 < \gamma < 1$, такое, что неравенство (9) будет выполнено при всех $\gamma < \alpha \le 1$.

Если в неравенстве (11) стоит знак равенства, то рассмотрим следующие слагаемые и так далее.

Таким образом, задача сводится к нахождению оптимального в лексикографическом смысле решения многокритериальной задачи

$$a_i + (1-2\lambda)b_i \to \max, (-1)^k \left(\varepsilon_i f_i^{(k)}(1) - (1-2\lambda)\delta_i \varphi_i^{(k)}(1)\right) \to \max, i = 1,2. \qquad (12)$$

Пример 2. Рассмотрим случай трапецеидальных чисел (см. рис. 3). Их лингвистическое описание имеет вид A = «примерно в интервале $[a, b]$, но не менее $a-\varepsilon$ и не более $b+\delta$».

Формула (2) примет вид:

$$A(\alpha) = [a + (\alpha-1)\varepsilon; b - (\alpha-1)\delta], 0 < \alpha \le 1.$$

В этом примере $f_S(1) = \varphi_S(1) = \alpha - 1$, при $s = 1, 2$. Поэтому $f'_S(1) = \varphi'_S(1) = 1$, $f_S^{(k)}(1) = \varphi_S^{(k)}(1) = 0$, $k \ge 2$. Задача (9) примет вид

$$a_i + (1-2\lambda)b_i \to \max, -\varepsilon_i + (1-2\lambda)\delta_i \to \max, i = 1,2. \qquad (13)$$

В случае $\lambda = 0$ задачу (13) запишем в виде

$$a_i + b_i \to \max, -\varepsilon_i + \delta_i \to \max, i = 1,2.$$

Допустим, что нечеткое число A_i предпочтительнее A_j, но $a_i + b_i = a_j + b_j$. Тогда из второго критерия получим, что $\delta_i - \varepsilon_i \ge \delta_j - \varepsilon_j$. Как видно из рис. 3, разность $\delta_S - \varepsilon_S$ равна разности $Q_S^{(2)} - Q_S^{(1)}$ площадей треугольников.

Таким образом, если середины отрезков, являющиеся ядрами нечетких чисел A_i и A_j [7], совпадают, то предпочтительней из них в слабом смысле то, у которых разность $Q_S^{(2)} - Q_S^{(1)}$ больше.

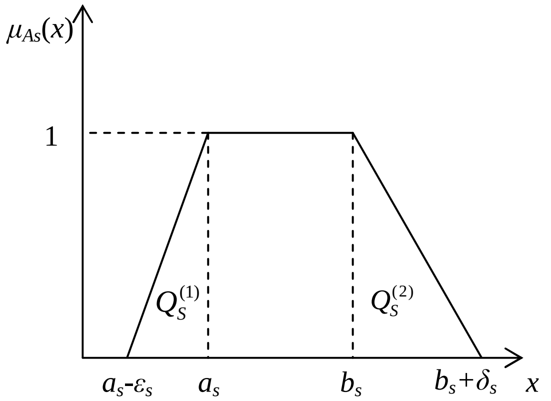


Рис. 3. К иллюстрации оптимальности в лексикографическом смысле

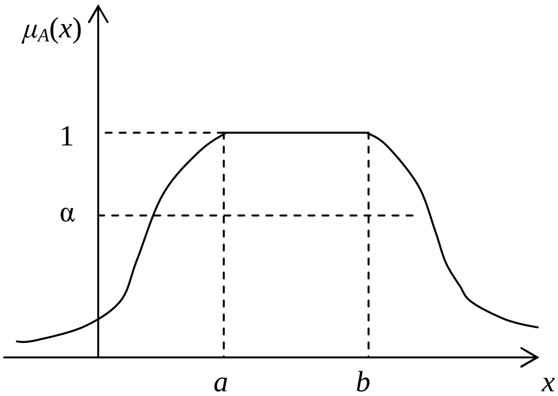


Рис. 4. График функции принадлежности колоколообразного числа

Сильная предпочтительность нечетких чисел

Определение 2. Будем говорить, что нечеткое число A_i предпочтительней нечеткого числа A_j в сильном смысле, если неравенство (5) выполнено при всех $0 < \alpha \le 1$.

Рассмотрим случай, когда $f_S(\alpha) = \varphi_S(\alpha) = \psi(\alpha), s = 1,2$. Функция $\psi : (0;1] \to (-\infty; 0]$ не убывает и $\psi(1) = 0$. Обозначим $t = \psi(\alpha)$ и

$$t_* = \lim_{\alpha \to 0-} \psi(\alpha). \qquad (14)$$

Тогда неравенство (9) можно записать в следующем виде:

$$\left((\varepsilon_i - \varepsilon_j) - (1-2\lambda)(\delta_i - \delta_j)\right) t + a_i - a_j + (1-2\lambda)(b_i - b_j) \ge 0 \text{ при } t \le 0. \qquad (15)$$

Случай $t_* = -\infty$. Тогда неравенство (15) выполнено при всех $t \le 0$ в том и только том случае, когда выполнено неравенство (10) и

$$\varepsilon_i - (1-2\lambda)\delta_i \le \varepsilon_j - (1-2\lambda)\delta_j. \qquad (16)$$

Случай $t_* > -\infty$. В этом случае неравенство (15) выполнено при всех $t_* < t \le 0$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (10) и

$$\left(\varepsilon_i - (1-2\lambda)\delta_i\right) t_* + a_i + (1-2\lambda)b_i \ge \left(\varepsilon_j - (1-2\lambda)\delta_j\right) t_* + a_j + (1-2\lambda)b_j. \qquad (17)$$

Пример 3. Рассмотрим случай колоколообразных нечетких чисел A, у которых функция принадлежности имеет вид (см. рис. 4):

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)^2\right) \text{ при } x \le a; \ \mu_A(x) = 1 \text{ при } a \le x \le b;$$

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-b}{\delta}\right)^2\right) \text{ при } b \le x.$$

Здесь числа $a \le b, \varepsilon > 0, \delta > 0$ заданы. Лингвистическое описание таких нечетких чисел имеет вид A = «примерно в интервале $[a, b]$». Для таких нечетких чисел множества уровня равны

$$A(\alpha) = \left[a + \varepsilon\psi(\alpha), b - \delta\psi(\alpha)\right], \psi(\alpha) = \sqrt{-\ln\alpha} \ . \qquad (18)$$

Из формул (12) и (14) получим, что $t_* = -\infty$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 0$. Тогда неравенства (10) и (16) примут вид:

$$a_i + b_i \ge a_j + b_j, \ \varepsilon_i - \delta_i \le \varepsilon_j - \delta_j.$$

Дадим геометрическую интерпретацию (см. рис. 4). Условие $a_i + b_i \to \max$ означает, что для ЛПР предпочтительнее то число, у которого середина отрезка больше.

Выясним смысл условия $\varepsilon_i - \delta_i \le \varepsilon_j - \delta_j$. Для этого вычислим площадь $Q_S^{(1)}$ (см. рис. 5). Используя формулу для значения интеграла Лапласа [8, с. 248], получим

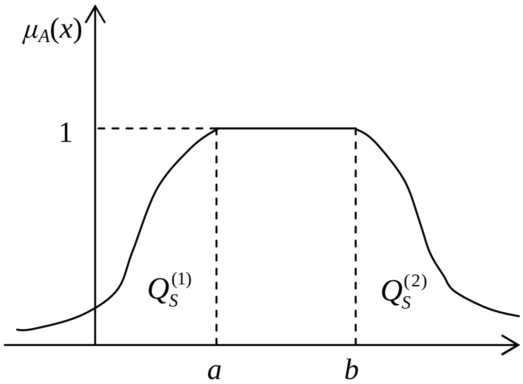


Рис. 5. Геометрическая интерпретация

$$Q_S^{(1)} = \int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon_S^{\,2}}\right)dx = \varepsilon_S \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-t^2\right)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\varepsilon_S \ .$$

Аналогично,

$$Q_S^{(2)} = \int_{b}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{\delta_S^{\,2}}\right)dx = \delta_S \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta_S \ .$$

Поэтому $\varepsilon_i - \delta_i \le \varepsilon_j - \delta_j \Leftrightarrow Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)} \le Q_j^{(2)} - Q_j^{(1)}$. Таким образом, если середины отрезков, являющиеся ядрами нечетких чисел, совпадают, то предпочтительней из них в сильном смысле будет то, у которого разность $Q_S^{(2)} - Q_S^{(1)}$ больше.

Литература

1. Zadeh, L.A. Fuzzy Sets / L.A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

2. Dutta, P. Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study / P. Dutta, H. Boruah, T. Ali // International Journal of Latest Trends in Computing. – March 2011. – Vol. 2. – P. 99–107.

3. Bansal, A. Trapezoidal Fuzzy Numbers (a.b.c.d.): Arithmetic Behavior / A. Bansal // International Journal of Physical and Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 2, № 1. – P. 39–44.

4.Chen, S. Fuzzy multiple attribute decision making methods and applications / S. Chen, C. Hwang. – Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1992.

5. Ухоботов В.И. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел / В.И. Ухоботов, П.В. Щичко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 10. – № 37(254). – С. 54–62.

6. Галлямов, Е.Р. Компьютерная реализация операций с нечеткими числами / Е.Р. Галлямов, В.И. Ухоботов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2014. – Т. 3, № 3. – С. 97–108.

7. Ухоботов, В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск, Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. – 245 с.

8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 266 с.

Поступила в редакцию 3 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 32–37

AN APPROACH TO THE COMPARISON OF FUZZY NUMBERS IN DECISION-MAKING PROBLEMS

V.I. Ukhobotov[1], *E.S. Mihailova*[2]

In decision-making problems, when a decision maker has information about unmanageable factors in fuzzy numbers, the problem of its comparison appears. Nowadays, a lot of different methods of comparing fuzzy numbers have been proposed. However, none of them is universal. Moreover, almost each method has pitfalls such as the difficulty of interpretation and inconsistency with human intuition. In the decision making theory the character of the applied problem is a dominant factor of choosing the method of comparing fuzzy numbers.

In this paper an approach of comparing fuzzy numbers has been proposed based on the comparison of α-cuts. Conceptions of strong and soft preferences are proposed. According to these definitions trapezoidal and bell-shaped fuzzy numbers have been compared. This method leads to finding the solution in the lexicographic meaning of a certain multi-objective problem for some classes of fuzzy numbers. Geometrical interpretation has been given for trapezoidal and bell-shaped fuzzy numbers.

Keywords: fuzzy set; fuzzy number; comparison of fuzzy numbers; α-cut.

References

1. Zadeh L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control.* 1965. Vol. 8. pp. 338–353.

2. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study. *International Journal of Latest Trends in Computing.* March 2011. Vol. 2. pp. 99–107.

3. Bansal A. Trapezoidal Fuzzy Numbers (a.b.c.d.): Arithmetic Behavior. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 2, no. 1. pp. 39–44.

4. Chen S., Hwang C. *Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications.* Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1992.

5. Ukhobotov V.I., Shchichko P.V. Ob odnom podhode k sravneniu nechetkih chisel (An approach to ranking fuzzy numbers). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie I programmirovanie"*. 2011. Issue 10. no. 37(254). pp. 54–62. (in Russ.).

6. Gallyamov E.R., Ukhobotov V.I. Komp'uternaya realizasia operasii s nechetkimi chislami. (Computer implementation of operations with fuzzy numbers). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Vychislitel'naya matematika i informatika"*. 2014. Issue 3. no. 3. pp. 97–108. (in Russ.).

7. Ukhobotov V.I. *Izbrannye glavy teorii nechetkix mnozhestv: uchebnoe posobie* (The Selected Chapters of the Theory of Fuzzy Sets: study guide). Chelyabinsk, Publishing of Chelyabinsk State University, 2011. 245 p. (in Russ.).

8. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki.* (The Course of Higher Mathematics). Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1974. 266 p. (in Russ.).

Received 3 December 2014

[1] Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, The Head of Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University.
E-mail: ukh@csu.ru
[2] Mihailova Ekaterina Sergeevna is Post-Graduate Student, Theory of the Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University.
E-mail: mihailova.katherine@gmail.com

Механика

УДК 531.55

МИНИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ НАХОЖДЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЛА В ЗОНЕ ОПАСНОСТИ

О.Л. Арапов[1], *Ю.С. Зуев*[2]

Предлагается способ формирования траектории движения неуправляемого летательного аппарата для уменьшения времени нахождения в опасных зонах. Задача рассматривается в детерминированной постановке при известных характеристиках зоны опасности. Решение задачи сводится к определению начальных условий движения летательного аппарата, которые обеспечивают повышение вероятности преодоления зоны опасности. Представлены результаты численного эксперимента по исследованию ряда типовых траекторий.

Ключевые слова: аэродинамическое тело; угол наклона траектории; зона опасности.

Постановка задачи

Одной из известных мер по увеличению вероятности преодоления летательным аппаратом (ЛА) опасных зон (пожары, сложные погодные условия и др.) является пространственное маневрирование ЛА.

Однако данный поход неприменим для ЛА, не имеющего двигателя и органов управления, в этом случае требуется реализация иных мер по увеличению вероятности преодоления опасных зон. Условно назовём подобный ЛА аэродинамическим телом (АДТ).

Для увеличения вероятности преодоления АДТ зоны опасности предлагается минимизировать время нахождения АДТ в этой зоне за счёт формирования соответствующей траектории полёта АДТ. Формирование траектории возможно путём изменения начальных условий движения неуправляемого АДТ. К начальным условиям, которые определяют параметры траектории, относятся скорость АДТ υ_0 и его угол наклона траектории Θ_0 в точке начала движения [1].

Изменение начальной скорости АДТ υ_0 на практике является более сложной задачей по сравнению с изменением его начального угла наклона траектории Θ_0. В статье рассматривается влияние угла Θ_0 на время нахождения АДТ в зоне опасности при одинаковом значении скорости υ_0.

Для оценки результатов преодоления зоны опасности в качестве показателя принимается время нахождения АДТ в этой зоне. Время нахождения внутри зоны опасности Ω_{OP} определяется с момента её пересечения траекторией движения АДТ:

$$t_{\text{OP}} \in \Omega_{\text{OP}} \text{ при } D_{\text{ADT}} < H_{\text{OP}}, \tag{1}$$

где t_{OP} – время нахождения внутри зоны опасности; Ω_{OP} – зона опасности; D_{ADT} – высота полёта АДТ над земной поверхностью; H_{OP} – максимальная высота зоны опасности.

Расчёты полёта АДТ проводятся при следующих положениях и допущениях:

– движение АДТ рассматривается в нормальной земной (стартовой) системе координат, которая полагается инерциальной.

– параметры атмосферы стандартные [2], ветер отсутствует;

– вращение Земли и ее кривизна поверхности не учитываются;

– АДТ движется как материальная точка;

– баллистический коэффициент рассматривается в диапазоне $9{,}4\cdot10^{-5}\ldots\ 2{,}2\cdot10^{-4}$ м^2/кг.

[1] Арапов Олег Леонидович – аспирант, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СФТИ НИЯУ МИФИ) г. Снежинск.
E-mail: aol_snz@mail.ru
[2] Зуев Юрий Семёнович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой технической механики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СФТИ НИЯУ МИФИ), г. Снежинск.

Влияние угла Θ_0 на характер траекторий полёта АДТ показано на рис. 1. На нём представлены зависимости высоты D_{ADT} от времени полёта АДТ при различных начальных углах наклона траектории (Θ_0 = 0°, 30°, 50°, 70°). Начальная скорость для всех расчётных траекторий приня-

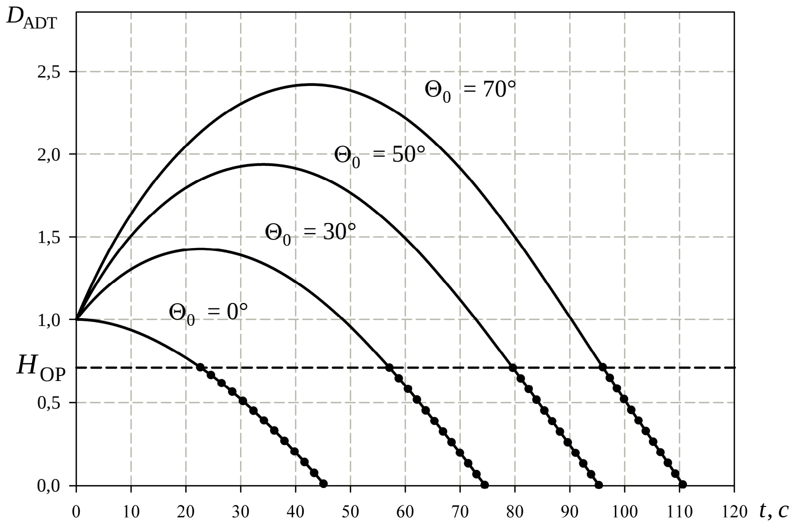


Рис. 1. Зависимости высоты полёта D_{ADT} от времени полёта АДТ t, с

та одинаковой. Пунктирной линией обозначена максимальная высота зоны опасности H_{OP}.

Круглые маркеры чёрного цвета определяют время пребывания АДТ внутри зоны опасности Ω_{OP}.

На рис. 2 представлены зависимости времени нахождения внутри зоны опасности t_{OP} от начального угла наклона траектории Θ_0 для трёх значёний коэффициента (k = 0,7, 0,8, 0,9). На дан-

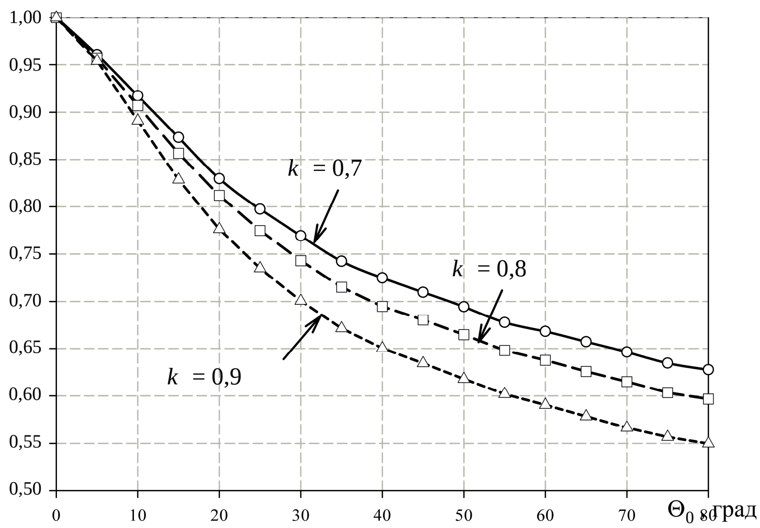


Рис. 2. Изменение времени нахождения внутри зоны опасности t_{OP}
от начального угла наклона траектории Θ_0 и коэффициента k

ном рисунке коэффициентом k, $k = H_{\text{OP}}/H_0$ обозначено отношение максимальной высоты зоны опасности H_{OP} к начальной высоте полёта АДТ H_0. Время нахождения внутри зоны опасности t_{OP} при угле наклона траектории Θ_0 = 0° принято за относительную единицу.

Из рис. 2 видно, что увеличение угла наклона траектории Θ_0 для рассмотренных траекторий приводит к уменьшению времени нахождения внутри зоны опасности t_{OP} (на 35 % от начального значения при угле Θ_0 = 65° при k = 0,7). С увеличением коэффициента k тенденция уменьшения времени нахождения внутри зоны опасности при увеличении угла наклона траектории также сохраняется.

С изменением угла Θ_0 изменяется и дальность полёта L_{ADT}. Зависимость дальности полёта L_{ADT} от начального угла наклона траектории Θ_0 представлена на рис. 3. Дальность полёта L_{ADT} при угле наклона траектории Θ_0 = 0° принята за относительную единицу.

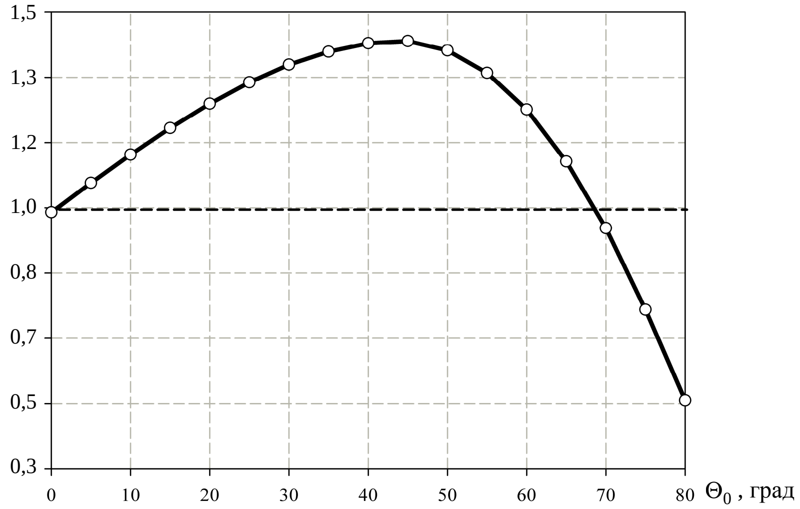


Рис. 3. Влияние начального угла наклона траектории Θ_0 на дальность полёта L_{ADT}

Из рис. 3 подтверждается аксиома о том, что одному и тому же значению дальности полёта L_{ADT} соответствуют два значения угла Θ_0 (до и после 45°). При этом большему углу Θ_0 соответствует меньшее время пребывания в зоне опасности.

При решении задачи попадания АДТ с неизменной начальной скоростью движения в заданную точку пространства с минимальным временем нахождения внутри зоны опасности возможны следующие варианты:

1) Изменение расстояния (в вертикальной и/или горизонтальной плоскости) между АДТ и заданной точкой пространства;

2) Увеличение начального угла Θ_0 (более 45°), который бы обеспечивал попадание АДТ в заданную точку пространства;

3) Сочетание вариантов 1 и 2.

Принятие мер по минимизации времени нахождения внутри зоны опасности всецело зависит от различного рода ограничений в каждой конкретной ситуации. Однако одно только увеличение начального угла Θ_0 обеспечивает уменьшение времени t_{OP} (на 35–40 %) при одинаковой дальности полёта АДТ.

Выводы

Принятая методика формирования траектории движения аэродинамического тела, а также способ её осуществления показывают принципиальную возможность минимизации времени нахождения в опасной зоне. Метод позволяет уменьшить время нахождения аэродинамического тела в зоне на 35–40 % и существенно повысить вероятность преодоления зоны опасности.

Литература

1. Дмитриевский, А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский. – М.: Машиностроение, 1972. –584 с.

2. ГОСТ 4401-81 «Атмосфера стандартная. Параметры». – М.: ИПК Издательство стандартов, 1981.

Поступила в редакцию 20 ноября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 38–41

MINIMIZATION OF THE FLYING TIME OF THE AERODYNAMIC BODY IN A DANGER ZONE

O.L. Arapov[1], Yu.S. Zuyev[2]

A method of creating an uncontrolled mechanical trajectory of an aircraft with the aim to reduce the flying time in a danger zone is offered. The problem is considered in the deterministic setting with known characteristics of a danger zone.

One of the known measures to increase the probability of overcoming a danger zone (fire, severe weather conditions, etc.) is the aircraft's spatial maneuvering.

However, this approach is not applicable for devices that do not have the motor and controls. In this case implementation of other measures to increase the probability of overcoming danger zones is required. Such a device can be conventionally called an aerodynamic body (AB).

To increase the probability of overcoming a danger zone, it is offered to minimize the flying time of the aerodynamic body in this zone by forming the corresponding AB trajectory. The trajectory can be formed by changing initial conditions of AB motion. Initial conditions that determine trajectory parameters include AB speed and the slope of the flight path at the start point of movement.

The solution of the problem is reduced to the determination of initial conditions of the aircraft motion, which provide an increase of probability of overcoming a danger zone. The paper presents the results of a numerical experiment in studying a number of typical trajectories.

Keywords: aerodynamic body; slope of the flight path; danger zone.

References

1. Dmitrievskiy A.A. *Vneshnyaya ballistika* (External ballistics). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 584 c. (in Russ.).

2. GOST 4401-81 *Atmosfera standartnaya. Parametry* (GOST 4401-81 Standard atmosphere. Parameters). Moscow, IPK Izdatel'stvo standartov Publ., 1981. (In Russ.).

Received 20 November 2013

[1] Arapov Oleg Leonidovich is Post-graduate Student, National Nuclear Research University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk.
E-mail: aol_snz@mail.ru
[2] Zuyev Yuriy Semyonovich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, Chief of the Engineering Mechanics Department, National Nuclear Research University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk.

УДК 539.3

ПРОГРЕССИРУЮЩЕЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ ДИСКОВ ПРИ ТЕПЛОСМЕНАХ БЕЗ МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК[1]

О.Ф. Чернявский[2]

Показано, что циклическое перемещение теплового фронта или волны по радиусу диска может приводить к непрекращающемуся остаточному увеличению или уменьшению его радиуса при небольших перепадах температуры: от нескольких десятков градусов для стальных дисков. На примере изгиба диска показано, что аналогичные явления могут быть обусловлены также температурно-временной зависимостью свойств материала.

Ключевые слова: приспособляемость; прогрессирующее формоизменение; ползучесть; диски.

Плоский диск из изотропного идеально упругопластического материала с постоянным пределом текучести σ_s подвергается циклическим воздействиям подвижного температурного поля типа теплового фронта или волны. Для отчетливого выявления качественных особенностей процесса деформирования принята простейшая схематизация распределения температуры: последняя постоянна и равна t в одной части диска и нулю в другой его части. Рассматривается три возможных варианта: движение границы нагретой периферийной части диска от периферии к центру и обратно, $t \geq 0$ (рис. 1, *а*), расширение и последующее сужение нагретой центральной зоны, $t \leq 0$ (рис. 1, *б*) и движение горячей волны (рис. 1, *в*).

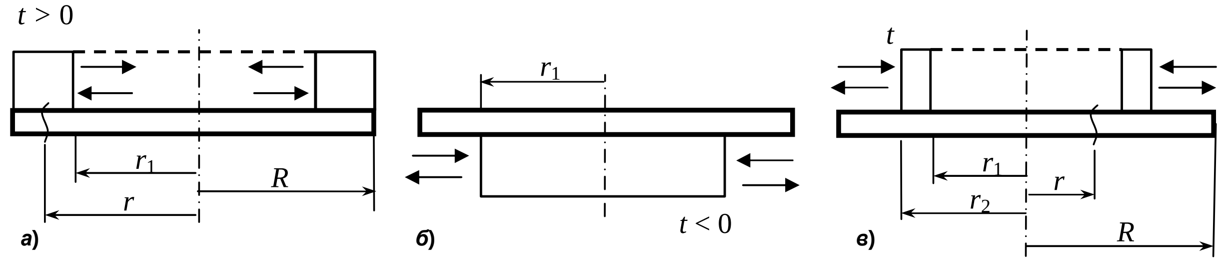


Рис. 1. Температурное поле диска

Целью расчета является определение температуры t, при которой начинается стабильное (не прекращающееся с ростом числа циклов) накопление остаточных перемещений в диске, а также распределения этих перемещений по радиусу. Решение этих задач выполняется в предположении полной круговой симметрии на основе кинематической и статической теорем теории приспособляемости в форме, приведенной в [1]. В соответствии с кинематической теоремой прогрессирующее накопление остаточных перемещений в диске реализуется, если существуют какие-либо приращения остаточных радиальных перемещений за цикл Δu и связанных с ними условиями совместности приращений радиальных и окружных пластических деформаций $\Delta\varepsilon_r$, $\Delta\varepsilon_\varphi$, для которых

$$\int_v \min_\tau \left[\left(\sigma_r - \sigma_r^{(e)}\right)\Delta\varepsilon_r + \left(\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^{(e)}\right)\Delta\varepsilon_\varphi\right] dv + \int_{S_\mu} \min_\tau \left(\sigma_S - \sigma_r^{(e)}\right)\Delta u' dS \leq 0 \,. \tag{1}$$

Здесь σ_r, σ_φ – напряжения на поверхности текучести материала, связанные с приращениями пластических деформаций $\Delta\varepsilon_r$, $\Delta\varepsilon_\varphi$ ассоциированным законом течения; $\sigma_r^{(e)}$, $\sigma_\varphi^{(e)}$ – температурные напряжения, вычисленные в предположении идеальной упругости материала, σ_S – расчетный предел текучести материала [1], v – объем диска, $\Delta u'$ – разрыв приращения радиального перемещения на поверхности S_μ.

Условия совместности приращений пластических деформаций и перемещений за цикл имеют для диска вид [2]

---

[1] Работа выполнялась при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта «Создание производства модельного ряда микротурбинных энергоустановок нового поколения» по договору № 02.G25.31.0078 от 23.05.2013 г.

[2] Чернявский Олег Федорович – доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ, профессор кафедры прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: a.o.cher@mail.ru

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{d(\Delta u)}{dr}, \quad \Delta\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta u}{r}. \qquad (2)$$

Изображенному на рис. 1, *а* мгновенному распределению температур соответствуют термоупругие напряжения [2]

$$\sigma_r^{(e)} = \sigma_\varphi^{(e)} = \frac{\alpha E t}{2}\left(1-\rho_1^2\right) \text{ при } 0 \le \rho \le \rho_1 \quad \left(\rho = \frac{r}{R},\ \rho_1 = \frac{r_1}{R}\right),$$

$$\sigma_r^{(e)} = \frac{\alpha E t}{2}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}\left(1-\rho^2\right), \quad \sigma_\varphi^{(e)} = -\frac{\alpha E t}{2}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}\left(1+\rho^2\right) \text{ при } \rho_1 \le \rho \le 1. \qquad (3)$$

Рис. 2 иллюстрирует изменение этих напряжений по радиусу при различных значениях ρ_1 (т.е. в разные моменты времени цикла) при положительном перепаде температур (рис. 1, *а*). Радиальным и окружным напряжениям соответствуют сплошные линии на рис. 2; штриховыми линиями показано объемлющее распределение. Максимальное значение радиальных и минимальное значение окружных напряжений достигаются в каждой точке диска одновременно – в момент прохождения через нее теплового фронта ($\rho = \rho_1$). Разность этих напряжений больше каждого из них:

$$\max_\tau\left(\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}\right) = \alpha E t, \qquad \min_\tau\left(\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}\right) = 0. \qquad (4)$$

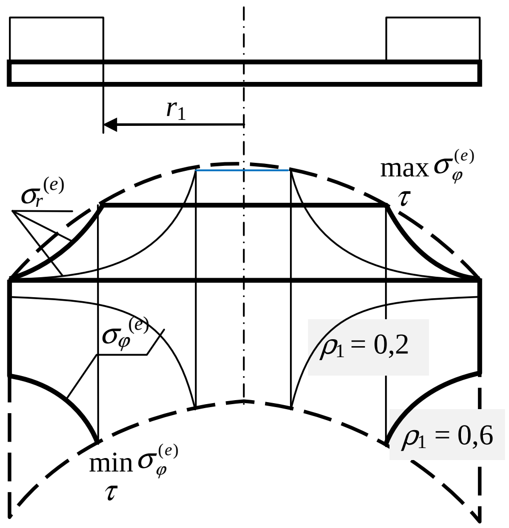


Рис. 2. Термоупругие напряжения в пластине в разные моменты времени

При действии температурного поля, изображенного на рис. 1, *б*, напряжения отличаются от представленных на рис. 2 только знаком. При этом

$$\max_\tau\left(\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}\right) = 0. \quad \min_\tau\left(\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}\right) = -\alpha E t. \qquad (5)$$

В соответствии с приближенным кинематическим методом теории приспособляемости примем, что приращения за цикл остаточных радиальных перемещений в диске при $t \ge 0$

$$\Delta u = \frac{C}{r}, \quad C = \text{const}, \quad C \le 0. \qquad (6)$$

Тогда в соответствии с (2)

$$\Delta\varepsilon_r = -\frac{C}{r^2}, \quad \Delta\varepsilon_\varphi = \frac{C}{r^2}, \ \Delta\varepsilon_r \ge 0. \qquad (7)$$

При условии текучести Треска–Сен-Венана

$$\max(|\sigma_r|, |\sigma_\varphi|, |\sigma_r - \sigma_\varphi|) = \sigma_s \qquad (8)$$

приращениям пластических деформаций (7) соответствуют (согласно ассоциированному закону течения) напряжения на поверхности текучести

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = \sigma_s. \qquad (9)$$

Подставляя в баланс работ (1) соотношения (7), (9) и (4), получим верхнюю оценку условий начала прогрессирующего формоизменения:

$$\alpha E t_f = \sigma_s. \qquad (10)$$

Здесь t_f – значение температуры t, при котором начинается прогрессирующее формоизменение. Нетрудно доказать, что эта верхняя оценка совпадает с точным решением, поскольку при напряжениях (3), условии (10) и нулевых значениях, не зависящих от времени остаточных напряжений, выполняются все требования статической теоремы теории приспособляемости [1].

Таким образом, в диске из материала с несущественным деформационным упрочнением повторные перемещения по радиусу границы нагретой периферийной зоны приводят при условии

(10) к прогрессирующему перемещению всех точек в направлении центра диска (уменьшению любого заданного радиуса r по закону (6)). При этом вследствие пластического деформирования ликвидируются любые имевшиеся ранее остаточные напряжения. Из условия несжимаемости материала при пластическом деформировании следует, что при этом толщина диска не меняется.

В качестве примера отметим, что при рассматриваемых здесь воздействиях для диска из стали 12Х18Н9 (коэффициент линейного теплового расширения α = 18,2 1/град, модуль упругости E = 165 ГПа, расчетный предел текучести σ_s = 118 МПа при температуре 500 °С) температурный перепад начала прогрессирующего формоизменения t_f составляет 40 °С. С уменьшением расчетного предела текучести эта величина уменьшается.

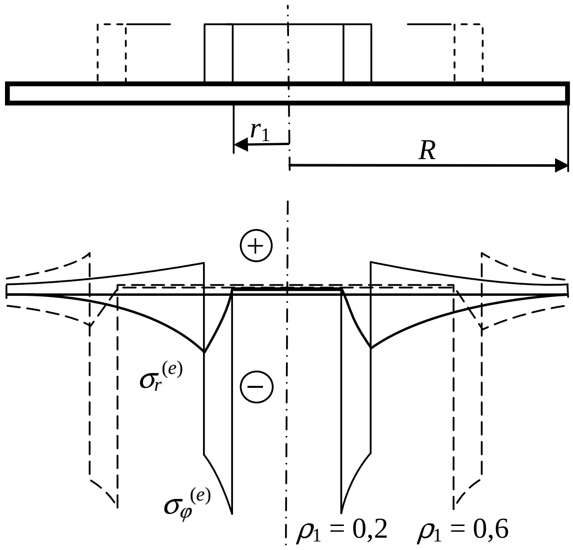


Рис. 3. Термоупругие напряжения при движении тепловой волны

Следует отметить, что приращения остаточных перемещений и деформаций за цикл (6) и (7) соответствуют движению изображенного на рис.1, *а* температурного фронта по всему диску – от центра до периферии. Очевидно, что в центральной части диска такое поле температур не может существовать по условиям теплообмена. Чтобы приблизить условия нагружения диска к реальным, примем, что в центральной части диска с радиусом a температура не изменяется в течение цикла, а приращения перемещений здесь равны нулю. С учетом разрыва приращений перемещений из (1) тогда следует, что

$$\alpha E t_f = \sigma_s \left(1 + \ln\frac{R}{a}\right) \Big/ \ln\frac{R}{a}.$$

При повторных перемещениях границы между холодной периферией и горячим центром диска результаты аналогичного расчета отличаются только знаком константы C в (6), т.е. при перепаде температуры, превышающем определенный из (10), имеет место прогрессирующее увеличение радиуса диска.

Рассмотрим теперь циклические воздействия тепловой волны, изображенной на рис. 1, *в*. Термоупругие напряжения в этом случае могут быть вычислены как комбинация решений для полей, изображенных на рис. 1, *а* и *б*. С учетом обозначений, показанных на рис. 1, *в*, получим

$$\sigma_r^{(e)} = \sigma_\varphi^{(e)} = \frac{\alpha E t}{2}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right) \quad \text{при } 0 \le \rho \le \rho_1 \quad \left(\rho = \frac{r}{R},\ \ \rho_1 = \frac{r_1}{R}\right).$$

При $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$

$$\sigma_r^{(e)} = -\frac{\alpha E t}{2}\left[1 - \frac{\rho_1^2}{\rho^2} - \left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)\right], \quad \sigma_\varphi^{(e)} = -\frac{\alpha E t}{2}\left[1 + \frac{\rho_1^2}{\rho^2} - \left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)\right]. \tag{11}$$

При $\rho_2 \le \rho \le 1$

$$\sigma_r^{(e)} = -\frac{\alpha E t}{2}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)\frac{1-\rho^2}{\rho^2}, \quad \sigma_\varphi^{(e)} = \frac{\alpha E t}{2}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)\frac{1+\rho^2}{\rho^2}.$$

Распределение этих напряжений по радиусу диска иллюстрирует рис. 3 для двух значений ρ_1 при $\rho_2 - \rho_1$ = 0,1. Максимальное значение разности радиальных и окружных напряжений (превышающее максимальные значения каждой составляющей) достигается на внутренней стороне горячей волны:

$$\max_\tau \left(\sigma_r^{(e)} - \sigma_\varphi^{(e)}\right) = \alpha E t,$$

и условие начала прогрессирующего формоизменения для «узкой» волны, когда $\rho_2 - \rho_1 \ll 1$, практически совпадает с (10). Однако в отличие от движущегося теплового фронта, минимальное значение разности термоупругих радиальных и окружных напряжений не равно нулю; оно достигается в холодной зоне на внешней границе горячей тепловой волны:

$$\max_{\tau}\left(\sigma_r^{(e)}-\sigma_\varphi^{(e)}\right)=-\alpha Et\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho^2}. \tag{12}$$

В результате в небольшой центральной части диска реализуется знакопеременное неупругое деформирование, начинающееся раньше, чем прогрессирующее формоизменение. Как и в случае движения теплового фронта, особенности решения в центре диска исчезают, если принять, что в центральной части температура постоянна в течение цикла. Можно, по-видимому, ожидать, что при одинаковых максимальных температурах повторные проходы тепловой волны приведут к меньшим остаточным перемещениям, чем проходы теплового фронта. Количественная оценка различий требует расчета кинетики неупругого деформирования.

В рассмотренных примерах необходимое условие существования прогрессирующего формоизменения (неизохронность неупругого деформирования [1]) выполнялось за счет движения зоны действия максимальных напряжений. Покажем теперь, что накопление остаточных перемещений и деформаций при теплосменах без механической нагрузки возможно даже при однопараметрических тепловых воздействиях, если температурно-временная зависимость свойств материала приводит к неодновременности неупругого деформирования по объему диска. Диск постоянной толщины $2h$ с жестким ободом, изображенный на рис. 4, *а*, подвергается повторным нагревам и охлаждениям с линейным распределением температуры по толщине в каждый момент времени цикла (рис. 4, *б*) при равномерном нагреве обода до средней температуры диска. На кратковременных режимах нагрева и охлаждения перепад температуры по толщине отличен от нуля (температуры в разные моменты времени иллюстрируют тонкие линии на рис. 4, *б*, максимальному значению перепада $\Delta t = t_1 - t_2$ соответствует линия 1). При этом расчетный предел текучести σ_S (равный пределу прочности материала [3]) остается постоянным, а термоупругие напряжения

$$\sigma_r^{(e)}=\sigma_\varphi^{(e)}=\frac{\alpha E\Delta t(\tau)}{2(1-\mu)}\frac{z}{h}. \tag{13}$$

На длительном стационарном режиме температура t_0 постоянна по толщине (линия 2 на рис. 4, *б*) и термоупругие напряжения отсутствуют, а предел длительной прочности $\sigma_{S\tau}$ меньше, чем σ_S.

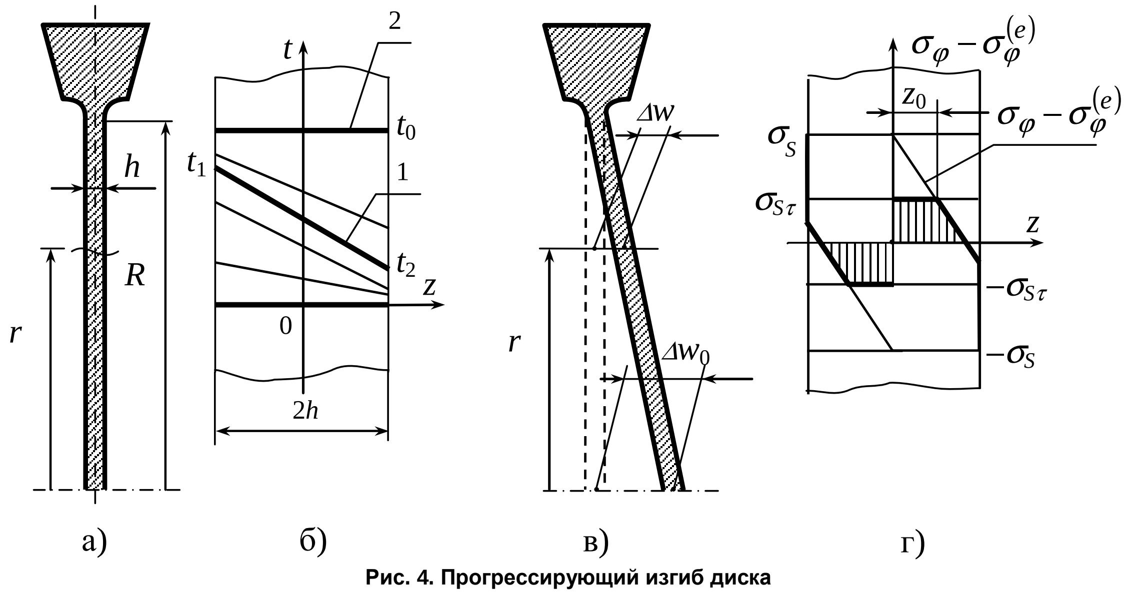


Рис. 4. Прогрессирующий изгиб диска

Предположим, что приращения прогибов диска за один стабильный цикл распределяются как показано на рис. 4, *в*:

$$\Delta w=\Delta w_0\left(1-\frac{r}{R}\right). \tag{14}$$

Им соответствуют приращения радиальных и окружных неупругих деформаций

$$\Delta\varepsilon_r = -z\frac{d^2(\Delta w)}{dr^2} \equiv 0, \qquad \Delta\varepsilon_\varphi = -\frac{z}{r}\frac{d(\Delta w)}{dr} = \frac{z}{r}\frac{\Delta w_0}{R} \quad . \tag{15}$$

На цилиндрической поверхности $r = R$, $-h \le z \le h$ имеет место разрыв приращений радиальных перемещений за цикл на величину

$$\Delta u' = -z\frac{\Delta w_0}{R}. \tag{16}$$

Соотношение (1) принимает тогда вид

$$\int_0^R r\int_{-h}^{h} \min_\tau\left[\left(\sigma_\varphi \operatorname{sign} z - \sigma_\varphi^{(e)}\right)\frac{z\Delta w_0}{rR}\right]dz + R\int_{-h}^{h}\min_\tau\left[\left(\sigma_r \operatorname{sign}(-z) - \sigma_r^{(e)}\right)\left(-z\frac{\Delta w_0}{R}\right)\right]dz \le 0. \tag{17}$$

Определение значений разности окружных напряжений на поверхности текучести $\sigma_\varphi$signz при условии текучести Треска–Сен-Венана и термоупругих напряжений $\sigma_\varphi^{(e)}$, которые доставляют минимум первому подынтегральному выражению в (17), иллюстрирует рис. 4, *г*. В приповерхностных слоях диска (при $|z| \ge z_0$) они достигаются (т.е. реализуется неупругое деформирование) на кратковременном переходном режиме при достаточно больших максимальных термических напряжениях. В остальной части неупругое деформирование реализуется в виде ползучести на стационарном режиме.

В зоне разрыва приращений перемещений (16) минимальное значение второго подынтегрального выражения в (17) достигается всюду на стационарном режиме. Таким образом, выполняется необходимое условие существования прогрессирующего накопления остаточных перемещений: неизохронность неупругого деформирования. Из соотношения (17) после подстановки значений напряжений, показанных на рис. 4, *г*, следует достаточное условие:

$$q + \frac{(1-a)^3}{2q^2} - \frac{3}{2}(1+a) \ge 0,\ \ q \ge 1-a, \quad q = \frac{\alpha E\Delta t_f}{2(1-\mu)\sigma_S},\ \ \Delta t_f = t_1 - t_2,\ \ a = \frac{\sigma_{S\tau}}{\sigma_S}.$$

Зависимость предельного перепада температуры от величины a иллюстрирует рис. 5. Для сравнения отметим, что условие реализации знакопеременного течения имеет вид [3]

$$\frac{\alpha E\Delta t_f}{2(1-\mu)} \ge \sigma_{0,2} + \sigma_{0,2/\tau},$$

где $\sigma_{0,2}$ – предел текучести, а $\sigma_{0,2/\tau}$ – предел ползучести при длительности выдержки в одном цикле. Очевидно, что при характерной для повышенных температур небольшой разнице величин σ_S, $\sigma_{0,2}$, $\sigma_{0,2/\tau}$ прогрессирующее формоизменение реализуется при меньших перепадах температуры, чем знакопеременное течение.

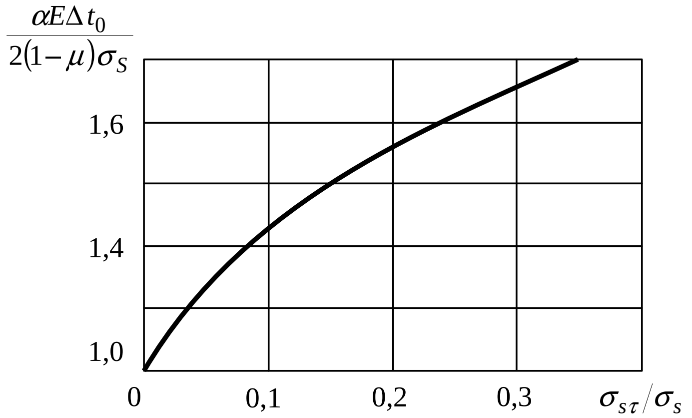


Рис. 5. Зависимость предельного перепада температуры от величины $\sigma_{S\tau}/\sigma_S$

Рассмотренные особенности накопления остаточных перемещений и деформаций могут оказывать существенное влияние на работоспособность дисков газотурбинных установок, подов нагревательных печей, плоских днищ термонапряженных сосудов.

Литература

1. Gokhfeld, D.A. Limit analysis of structures at thermal cycling / D.A. Gokhfeld, O.F. Cherniavsky – The Netherlands; – Rockville, USA: Sijthoff and Noordhoff. Int. Publ. Alphen aan den Rijn, 1980. – 577 p.

2. Малинин, Н.Н. Прочность турбомашин / Н.Н. Малинин. – М.: Машгиз, 1962. – 291 с.

3. Чернявский, О.Ф. Приспособляемость конструкций в условиях ползучести / О.Ф. Чернявский // Динамика, прочность и износостойкость машин. – 2001. – № 8. – С. 43–56.

Поступила в редакцию 30 октября 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 42–47

PROGRESSIVE DISC COLLAPSE AT THERMAL CYCLING WITHOUT MECHANICAL LOADING

O.F. Chernyavsky[1]

The cyclic movement of the heat front or wave along the disk radius is shown to lead to the residual unceasing increase or decrease of its radius at small temperature differences – from a few tens of degrees for steel disks. By the example of a disk bending it was shown that similar effects can also be caused by time-temperature dependences.

Keywords: shakedown; progressive disc collapse; creep; disks; strength of turbomachinery.

References

1. Gokhfeld D.A., Cherniavsky O.F. *Limit analysis of structures at thermal cycling.* The Netherlands; Rockville, USA: Sijthoff and Noordhoff. Int. Publ. Alphen aan den Rijn, 1980. 577 p.

2. Malinin N.N. *Prochnost' turbomashin* (Strength of turbomachinery). Moscow, Mashgiz Publ., 1962. 291 p. (in Russ.).

3. Cherniavsky O.F. Prisposoblyaemost' konstruktsiy v usloviyakh polzuchesti (Shakedown of structures at creep). *Dinamika, prochnost' i iznosostoykost' mashin* (Dinamics, strength and wear-resistance of machines). 2001. no. 8. pp. 43–56. (in Russ.).

Received 30 October 2014

[1] Cherniavsky Oleg Fedorovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Honoured Scientist and Engineer of Russian Federation, professor of applied mechanics, dynamics and durability of machines department, South Ural State University.
E-mail: a.o.cher@mail.ru

Физика

УДК 538.915

DFT МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОДОРОДА С ВАКАНСИЕЙ В ОЦК-ЖЕЛЕЗЕ[1]

А.В. Верховых[2], А.А. Мирзоев[3]

Впервые представлены результаты первопринципного моделирования взаимодействия атома водорода с вакансией ОЦК-железа в парамагнитном состоянии, которое сопоставляется с аналогичной величиной в магнито-упорядоченном ферромагнитном состоянии. Показано, что расстояния между атомом водорода и соответствующей октапорой для ферромагнитного и парамагнитного состояния оказываются одинаковыми и составляют 0,23 Å. Энергия связи комплекса водород-вакансия составила 0,60 и 0,27 для ферромагнитного и парамагнитного ОЦК-железа, соответственно.

Ключевые слова: расчеты из первых принципов; ОЦК-железо; водород; вакансия; энергия связи.

Введение

Известно, что водород оказывает значительное влияние на физические и механические свойства железа и сплавов на его основе [1–3]. Современное понимание механизма водородного охрупчивания предполагает, что водород из окружающей среды растворяется в стали, мигрирует к центрам внутреннего напряжения, таким как вершины трещин, где он накапливается, и, в конечном счете, способствует зарождению и распространению трещин, разрушающих материал [4]. Важную роль в этом процессе играет захват водорода дефектами решетки, такими как примесные атомы, дислокации, границы зерен, межфазные границы [5–7]. Поскольку примеси внедрения, к числу которых относится водород, обладают низкой растворимостью и высокой мобильностью в железе и в сталях, экспериментальные исследования микроскопических механизмов взаимодействия водорода с дефектами в металлах являются достаточно трудоемкими. В условиях устойчивого роста вычислительной мощности и прогресса в развитии эффективных алгоритмов, моделирование на атомном уровне является альтернативным способом проведения исследований указанных процессов. В работах [8, 9], было проведено исследование взаимодействия атомов водорода с примесными атомами замещения при помощи первопринципных расчетов. Данная работа посвящена взаимодействию водорода с другим видом точечных дефектов – вакансиями. Связано это, прежде всего с тем, что в ряде исследований отмечено существование притяжения между вакансиями и атомами водорода в α-железе [9–12]. Оказалось, что в одной вакансии могут накапливаться до шести атомов водорода [7, 13]. Подобное взаимодействие приводит к росту концентрации вакансий, о чем свидетельствует ряд экспериментов [14, 15].

Несколько вычислительных работ было посвящено исследованию поведения водорода в железе, включая энергию его растворения, предпочтительное расположение, диффузионный барьер, энергию связи водорода с моновакансиями, дислокациями и примесными атомами [16–23]. В работах [24–26] было также показано, что изменения, связанные с примесями в электронных и магнитных свойствах могут быть также важны. Однако есть еще несколько открытых вопросов, в частности тех, которые касаются взаимодействия между водородом и вакансиями в разных магнитных состояниях. В этой работе мы впервые провели расчет взаимодействия водорода с вакансией в парамагнитном состоянии, и сравнили его с результатом для ферромагнитного ОЦК железа [27].

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 14-03-00618.

[2] Верховых Анастасия Владимировна – аспирант, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: ursaeva@physics.susu.ac.ru
[3] Мирзоев Александр Аминулаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: mirzoev@physics.susu.ac.ru

Методы

Первопринципные расчёты были выполнены в рамках теории функционала плотности (DFT) методом линейных присоединенных плоских волн (LAPW) с учётом обобщённого градиентного приближения (GGA'96) в программном пакете WIEN2k. Это наиболее точные методы, используемые в рамках теории функционала плотности (DFT). Для расчётов использовался мощный вычислительный комплекс Торнадо [28]. При интегрировании в обратном пространстве и вычисления электронной плотности использовалась схема Монхорста–Пака с сеткой $3\times3\times3$ k-точек зоны Бриллюэна. Расчёты проводились при значениях параметров моделирования: параметр сходимости Kmax = 5 а.е.$^{-1}$, радиусы МТ-сфер Rmt(Fe) = 2,00 а.е. [29], Rmt(H) = 0,70 a.e [20]. Эти параметры обеспечивают погрешность результатов расчётов не более 0,01 эВ.

ОЦК-решетка железа устойчива при температурах ниже 1184 К причем в области ниже точки Кюри (1043 К) система ферромагнитна, а в диапазоне температур 1043–1183 К – парамагнитна. Особенности программного пакета WIEN2k позволяют провести моделирование только основного состояния системы при 0 К. Поэтому при моделировании ОЦК-железа в ферромагнитном состоянии параметр решетки определялся минимизацией полной энергии системы и был равен a = 2,84 Å [29]. Поскольку нас интересует влияние магнитного состояния на взаимодействия водорода с вакансией, то крайне важно использовать реалистичную плотность электронного газа характерного для парамагнитного состояния. По этой причине мы использовали не равновесный параметр решетки при 0 К, а параметр полученный из эксперимента при соответствующей температуре парамагнитного состояния [30]: a = 2,90 Å (для 1110 К). Суперячейка состоит из 54 атомов железа. Оптимизация геометрии выполняется до тех пор, пока сила, действующая на каждый атом, не станет меньше 0,0257 эВ/ Å (0.001 Рб/Бор).

Расчёт энергии образования вакансии для суперячейки, состоящей из N атомов железа и одной вакансии, производился по следующей формуле:

$$E_{\text{vac}}^{f}(N) = E(N-1,1,\Omega) - \frac{N-1}{N}E(N,0,\Omega),$$

где $E(N, m, \Omega)$ – энергия структуры, содержащей N атомов и m вакансий в равновесном объёме Ω.

Энергия захвата атома водорода в одиночную вакансию, содержащую n – 1 атомов водорода, с образованием комплекса VH_n, определялась соотношением:

$$E_{\text{trap}}(1,n) = E(1,n-1,\Omega) + E(0,1,\Omega) - E(0,0,\Omega) - E(1,n,\Omega),$$

где E(1, n, Ω) – энергия системы, состоящей из 53 атомов железа и n атомов водорода, находящихся внутри вакансии в равновесном положении с объемом Ω; E(0,1,Ω) – энергия системы из 54 атомов железа и атома водорода в тетрапоре; E(0,0,Ω) – энергия системы из 54 атомов чистого железа при равновесном объёме Ω.

Результаты и обсуждение

Ферромагнитное состояние ОЦК-железа

Было рассчитано значение энергии образования вакансии, равное $E_{\text{vac}}^{f}(N)$ = 2,15 эВ для ферромагнитного состояния, что находится в хорошем согласии как с экспериментальными данными 1,6÷2,2 эВ [31], так и с результатами других вычислительных работ. В работе [32] с использованием программного пакета VASP в таком же приближении было получено аналогичное значение $E_{\text{vac}}^{f}(N)$ = 2,15 эВ, а в работе [23] с использованием того же программного продукта энергия образования вакансии $E_{\text{vac}}^{f}(N)$ = 2,17 эВ.

На следующем этапе было вычислена энергия связи комплекса водород–вакансия. Для этого необходимо было определить равновесное положение атома водорода в ячейке с вакансией. В первую очередь водород был помещен в вакансию, так как, на первый взгляд, это положения кажется наиболее предпочтительным ввиду высокой симметрии данной конфигурации. Однако значение энергии образования вакансии в такой системе $E_{\text{vac}}^{f}(N)$ = 2,70 эВ, что существенно выше энергии образования вакансии для чистого железа, а энергия связи водорода с вакансией E_{trap} (1,1) = –0,22 эВ, что может свидетельствовать о том, что вакансия пытается вытолкнуть водород.

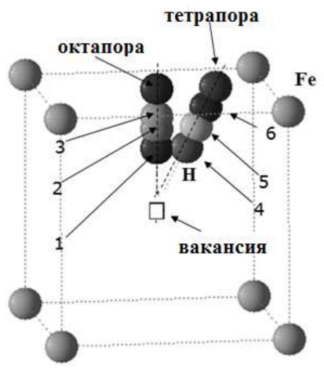
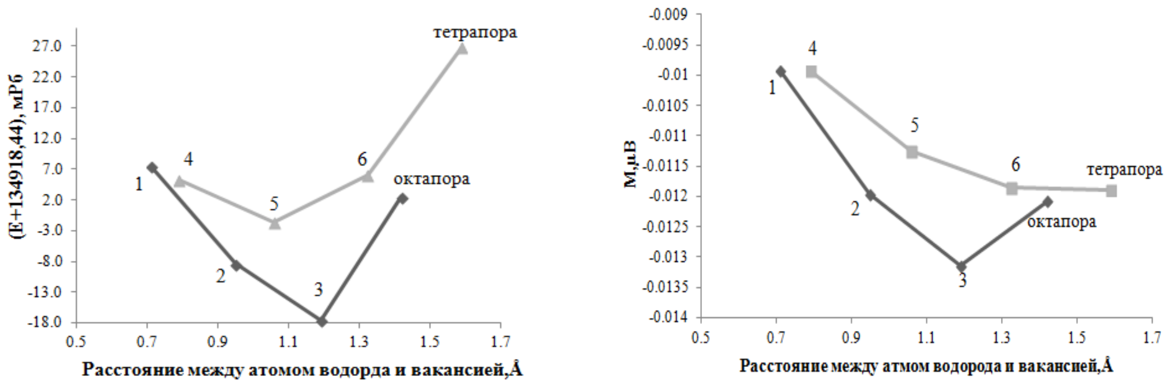


Рис. 1. Схематическое представление положения атома водорода (1,2,3,4,5,6) в ячейки с вакансией ОЦК-железа



а) б)

Рис. 2. Зависимость энергии системы (а) и магнитного момента (б) от расстояния между атомом водорода и вакансией

С целью нахождения оптимального положения водорода были выбраны точки вдоль двух прямых, одна из которых соединяет вакансию с октапорой, а другая – с тетрапорой (рис. 1). На рис. 2, *а* представлен график зависимости энергии системы от расстояния между атомом водорода и вакансией. Таким образом, было показано, что водород смещается на 0,23 Å от октапоры в направлении вакансии. Данному положению водорода соответствует минимум зависимости магнитного момента (рис. 2, *б*). Отметим, что направление магнитного момента на атоме водорода антипараллельно магнитному моменту на атомах Fe. Возможно, что положение равновесия для атома водорода определяется именно магнитным взаимодействием с окружающей матрицей. Данной конфигурации соответствует энергия связи $E_{\text{trap}}\ (1{,}1) = 0{,}60$ эВ.

В экспериментах по захвату дейтерия в ОЦК-железе было показано, что водород располагается на расстоянии 0,4±0,1 Å от октапоры, что соответствует $E_{\text{trap}}\ (1{,}1) = 0{,}63$ эВ [33]. В работе [16], в которой также использовался метод DFT, расстояние между водородом и октапорой составляет 0,22 Å и $E_{\text{trap}}\ (1{,}1) = 0{,}55$ эВ. В работе [23] водород находится на расстоянии 0,20 Å от октапоры и $E_{\text{trap}}\ (1{,}1) = 0{,}57$ эВ. Таким образом, полученные результаты хорошо согласуются как с экспериментом, так и с данными расчетов других авторов.

Парамагнитное состояние ОЦК-железа

Одна из основных проблем моделирования парамагнитного состояния заключается в том, что в реальном парамагнитном ОЦК-железе магнитные моменты атомов разупорядочены. При моделировании неупорядоченных бинарных сплавов важно добиться, чтобы конфигурации в рассматриваемой суперячейке не были близки к какой-либо упорядоченной структуре. Дело в том, что сплавы с неупорядоченной и упорядоченной структурой имеют существенно разную энергию, и это может исказить результат моделирования. Для получения такого неупорядоченного распределения использовался программный пакет BINAR [34]. Программа перебирает все возможные способы расположения атомов с различными направлениями спина в суперячейке, разбивая анализируемые конфигурации на группы. При этом в одну группу включаются все конфигурации, которые могут быть получены друг из друга при помощи операций симметрии разрешенных для данной кристаллической решетки. Полученные таким образом конфигурации, относящиеся к разным группам, проверяются на соответствие критерию «неупорядоченности», и в случае несоответствия отбраковываются. В программе в качестве критерия используется гистограмма статистического распределение атомов во втором окружении для биномиального распределения (абсолютно неупорядоченный сплав). В данной работе, с помощью программы BINAR были получены 15 различных неэквивалентных магнитных конфигураций. Для дальнейшего анализа были выбраны 5 конфигураций, лежащие ниже остальных по энергии.

По известной разности энергии n-конфигурации системы и энергии системы в основном состоянии, была вычислена каноническая статистическая сумма (S):

$$S = \sum_{n=1}^{5} S_n, \quad S_n = \exp\left(-\frac{E_n - E_0}{kT}\right),$$

где E_0 – энергия основного состояния, а E_n – энергия системы в n-ом энергетическом состоянии; k-коэффициент Больцмана, T = 1110 К (средняя температура существования ОЦК-фазы железа в парамагнитном состоянии).

Из отношения вклада в статсумму от данной конфигурации ко всей статсумме была вычислена вероятность существования магнитного состояния и, соответственно, степень влияния данного состояния на энергию формирования вакансии ОЦК-железа и энергию захвата атома водорода вакансией:

$$P_n = \frac{S_n}{S}.$$

В табл. 1 представлены: разница в энергии $E_n – E_0$, вероятность P_n и соответствующие энергии формирования вакансии. Видно, что парамагнитное состояние снижает энергию формирования вакансии на 0,37 эВ (17 %), что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Это говорит о работоспособности выбранного нами метода и возможности моделирования им других энергетических характеристик, таких как энергия захвата атома водорода вакансией.

Таблица 1

Энергии и вероятности существования 5 парамагнитных конфигураций ОЦК-железа и соответствующие энергии формирования вакансии.

Номер конфигурации n	$E_n - E_0$, эВ	Вероятность P_n, %	Энергия формирования вакансии, эВ
1	0,69	0,06	1,96
2	0	79,69	1,67
3	0,14	17,42	2,12
4	0,70	0,05	1,93
5	0,31	2,90	2,49
Среднее	—	—	1,78
Эксперимент: [35] [36] [37] [38] [39]	—	—	 1,5±0,1 1,53±0,15 1,40±0,10 1,60±0,10 1,79±0,10
Ферромагнитное состояние	—	—	2,15

Таблица 2

Расстояние между атомом водорода и соответствующей октапорой и энергия захвата для различных пространственных конфигураций спинов в парамагнитном ОЦК железе

Номер конфигурации n	Вероятность P_n, %	Расстояние Н–октапора, Å	Энергия захвата атома водорода вакансией, эВ
1	0,06	0,18	0,39
2	79,69	0,24	0,26
3	17,42	0,19	0,30
4	0,05	0,17	0,44
5	2,90	0,24	0,42
Среднее	—	0,23	0,27
Ферромагнитное состояние	—	0,23	0,60

В парамагнитном состоянии ОЦК-железа водород был помещен в 5 различных конфигураций на расстоянии 0,23 Å от октапоры, а затем была выполнена релаксация структур для нахождения оптимального положения атомов систем. В табл. 2 представлены значения энергии захвата атома водорода вакансией, расстояния между атомом водорода и октапорой, а также соответствующие вероятности существования различных магнитных структур. Данные результаты показывают, что энергия захвата атома водорода вакансией понижается почти в 2 раза, а расстояние между атомом водорода и центром октапоры остается таким же, как и в случае ферромагнитного состояния. Однако, из-за того, что в парамагнитном состоянии параметр решетки равен 2,90 Å, что на 2 % больше, чем в случае ферромагнитного состояния, расстояние между центром вакансии и октапорой увеличивается, следовательно, и расстояние между водородом и центром вакансии увеличивается. Поскольку во всех парамагнитных конфигурациях параметр решетки один и тот же, то различия энергий наблюдаемых в табл. 2 не может быть связано с геометрическим фактором, таким образом, мы приходим к выводу, что изменения энергии в различных конфигурациях может быть связано только с флуктуациями магнитного порядка. Таким образом, следует признать, что локальный магнитный порядок значительно влияет на растворение водорода.

Заключение

В работе проведено DFT компьютерное моделирование энергии взаимодействия водорода с вакансией в ОЦК железе. С использованием пакета BINAR получены значения энергии образования вакансии и энергия захвата атома водорода одиночной вакансией в парамагнитном состоянии в ОЦК железе. Среднее значение энергии формирования вакансии 1,78 эВ, хорошо согласуется с существующими экспериментальными данными. Обнаруженная зависимость энергии захвата водорода вакансией в парамагнитном случае от ближнего магнитного порядка свидетельствует о магнитной природе снижения данной величины по сравнению с ферромагнитным ОЦК-железом при 0 К.

Литература

1. Водород в металлах / Под ред. Г. Алефельда и И. Фёлькля; пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 480 с.; Т. 2. – 432 с.

2. Hydrogen in Metals III: Properties and Applications / под ред. H. Wipf. (Topics in Applied Physics. Vol. 73.) – Berlin *et al.*: Springer-Verlag, 1997. – 350 p.

3. Hirth, J.P. Effects of hydrogen on the properties of iron and steel / J.P. Hirth // Met. Trans. – 1980. – Vol. 11A, № 6. – P. 861–890.

4. Borchers, C. Effect of Hydrogen on the Mechanical Properties of Stainless Steels / C. Borchers, T. Michler, A. Pundt // Advanced Engineering Materials. – 2008. – Vol. 10, № 1–2. – P. 11–23.

5. Pressouyre, G.M. A quantitative analysis of hydrogen trapping / G.M. Pressouyre, I.M. Bernstein // Met. Trans. – 1978. – Vol. 9A, № 11. – P. 1571–1580.

6. The role of traps in the microstructural control of hydrogen embrittlement of steels: Hydrogen degradation of ferrous alloys / I.M. Bernstein, G.M. Pressouyre; под ред. R.A. Oriani, J.P. Hirth and M. Śmiałowski. – Park Ridge, N.J.: Noyes Publications, 1985. – P. 641–685.

7. Besenbacher, F. Multiple Hydrogen Occupancy of Vacancies in Fe. / F. Besenbacher, S.M. Myers, P. Nordlander, J.K. Nørskov // J. Appl. Phys. – 1987. – Vol. 61, № 5. – P. 1788–1794.

8. Theory of hydrogen solubility in binary iron alloys based on *ab initio* calculation results / D.A. Mirzaev, A.A. Mirzoev, K.Yu. Okishev, M.S. Rakitin // Molec. Phys. – 2012. – Vol. 110, № 11–12. – P. 1299–1304.

9. Hydrogen trapping in iron and steels: Hydrogen embrittlement and stress corrosion cracking / R. Gibala, A.J. Kumnick; под ред. R. Gibala, R.F. Hehemann // Proceedings of a troiano festschrift symposium. – Ohio: ASM, 1984.

10. Myers, S.M. Defect Trapping of Ion-Implanted Deuterium in Fe / S.M. Myers, S.T. Picraux, R.E. Stolz // J. Appl. Phys. – 1979. – Vol. 50, № 9. – P. 5710–5719.

11. Hydrogen-induced equilibrium vacancies in fcc iron-base alloys / V.G. Gavriljuk, V.N. Bugaev, Yu.N. Petrov *et al.* // Scripta Mat. – 1996. – Vol. 34, № 6. – P. 903–907.

12. Fukai, Y. Formation of Superabundant Vacancies in *M*–H Alloys and Some of Its Consequences: A Review / Y. Fukai // Journal of Alloys and Compounds. – 2003. – Vol. 356–357. – P. 263–269.

13. Mao, J. Thermodynamics of Hydrogen and Vacancies in Metals (PhD thesis) / J. Mao. – Houston, 2002.

14. Fukai, Y. Evidence of Copious Vacancy Formation in Ni and Pd Under a High Hydrogen Pressure. / Y. Fukai, N. Okuma // Japanese J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 32. – pt. 2. – № 9A. – P. L1256–L1259.

15. Iwamoto, M. Superabundant Vacancy Formation in Iron Under High Hydrogen Pressures: Thermal Desorption Spectroscopy / M. Iwamoto, Y. Fukai // Mat. Tran. JIM. – 1999. – Vol. 40. – № 7. – P. 606–611.

16. Tateyama, Y. Stability and Clusterization of Hydrogen-Vacancy Complexes in α-Fe: An *ab Initio* Study / Y. Tateyama, T. Ohno // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 67. – P. 174105.

17. Hayward, E. Interplay between hydrogen and vacancies in α-Fe / E. Hayward, C.-C. Fu // Phys. Rev. B. – 2013 – Vol. 87. – P. 174103.

18. Jiang, D.E. Diffusion of Interstitial Hydrogen into and Through Bcc Fe from First Principles / D.E. Jiang, E.A. Carter // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70. – P. 064102.

19. The location of a hydrogen atom and hydrogen molecules in BCC Fe: an ASED-MO approach / B. Irigoyen, R. Ferullo, N. Castellani, A. Juan // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. – 1995. – Vol. 3. – P. 319–330.

20. Hydrogen in α-iron: Stress and diffusion / J. Sanchez, J. Fullea, C. Andrade, P.L. de Andres // Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 78. – P. 014113.

21. Configuration and binding energy of multiple hydrogen atoms trapped in monovacancy in bcc transition metals / K. Ohsawa, K. Eguchi, H. Watanabe *et al.* // Phys. Rev. B. − 2012. – Vol. 85. – P. 094102.

22. Hayward, E. Multiple hydrogen trapping at monovacancies / E. Hayward, B. Beeler, C. Deo // Philos. Mag. Lett. – 2012. – Vol. 92. – P. 217–225.

23. Counts, W.A. First-Principles Energetic of Hydrogen Traps in α-Fe: Point Defects / W.A. Counts, C. Wolverton, R. Gibala // Acta Materialia. – 2010. – Vol. 58. – P. 4730–4741.

24. Magnetism and Local Distortions near Carbon Impurity in γ-Iron / D.W. Boukhvalov, Yu.N. Gornostyrev, M.I. Katsnelson, A.I. Lichtenstein // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99 – P. 247205.

25. Dependence of vacancy-solute interactions on magnetic state in dilute iron-based alloys / O.I. Gorbatov, P.A. Korzhavyi, A.V. Ruban, Y.N. Gornostyrev // Solid State Phenomena. – 2011. – Vol. 172–174. – P. 979–984.

26. Ponomareva, A.V. Ab initio calculation of the solution enthalpies of substitutional and interstitial impurities in paramagnetic fcc Fe / A.V. Ponomareva, Yu.N. Gornostyrev, I.A. Abrikosov // Phys. Rev. B. – 2014. – Vol. 90. – P. 014439.

27. Hydrogen–vacancy interaction in bcc iron: ab initio calculations and thermodynamics / D.A. Mirzaev, A.A. Mirzoev, K.Yu. Okisheva, A.V. Verkhovykh // Mol. Phys. – 2014. – Vol. 112. – P. 1745–1754.

28. http://supercomputer.susu.ac.ru/computers/tornado/

29. Урсаева, А.В. Выбор оптимальных параметров для построения максимально точной модели ОЦК-железа / А.В. Урсаева, Г.Е. Рузанова, А.А. Мирзоев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 2. – № 9(185). – С. 97–101.

30. The lattice parameters of austenite and ferrite in Fe-C as functions of carbon concentration and temperature / M. Onink, C.M. Brakman, F.D. Tichelaar *et al.* // Scripta Metallurgica Et Materialia. – 1993. – Vol. 29, № 8. – P. 1011–1016.

31. Atomic Defects in Metals / by ed. H.Ullmaier (Landolt–Börnstein New Series, III/25.) – Berlin, Springer-Verlag, 1991. – 509 p.

32. Ohnuma, T. First-Principles Calculations of Vacancy-Solute Element Interactions in Body-Centered Cubic Iron / T. Ohnuma, N. Soneda, M. Iwasawa // Acta Materialia. – 2009. − Vol. 57, № 20. − P. 5947–5955.

33. Hydrogen Interactions with Defects in Crystalline Solids / S.M. Myers, M.I. Baskes, H.K. Birnbaum *et al.* // Reviews of Modern Physics. – 1992. – Vol. 64, № 2. – P. 559–617.

34. Deyanov, R.Z. ODSS (Ordered-Disordered-Solid-Solution). Ver. 1. BINAR. A Program for Calculation of Disordered Supercells for Modelling of Substitutional Solid Solutions / R.Z. Deyanov, N.N. Eremin, V.S. Urusov. – Moscow, 2006–2007. (in Russ.) [http://cryst.geol.msu.ru/odss/binar.pdf]

35. High temperature positron annihilation experiments in BCC metals / K. Maier, H. Metz, D. Herlach, H.E. Schaefer // Journal of Nuclear Materials. – 1978. – Vol. 69–70. – P. 589–592.

36. Vacancy Formation in Iron Investigated by Positron Annihilation in Thermal Equilibrium / H.-E. Schaefer, K. Maier, M. Weller *et al.* // Scripta Metallurgica. – 1977. – Vol. 11, № 9. – P. 803–809.

37. Kim, S. Vacancy Formation Energy in Iron by Positron Annihilation. / S. Kim, W.J.L. Buyers // Journal of Physics F: Metal Physics. – 1978. – Vol. 8, no. 5. – P. L103–L108.

38. Matter, H. Phase Transformations and Vacancy Formation Energies of Transition Metals by Positron Annihilation / H. Matter, J. Winter, W. Triftshäuser // Appl. Phys. – 1979. – Vol. 20. – P. 135–140.

39. Positron Annihilation on Pure and Carbon-Doped α-Iron in Thermal Equilibrium / L. De Schepper, D. Segers, L. Dorikens-Vanpraet *et al.* // Phys. Rev. B. – 1983. – Vol. 27, № 9. – P. 5257–5269.

Поступила в редакцию 20 октября 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 1, pp. 48–56

DFT MODELLING OF INTERACTION OF HYDROGEN WITH BBC IRON VACANCIES

***A.V. Verkhovykh*[1]*, A.A. Mirzoev*[2]**

The paper presents the results of ab initio modelling of the interaction of the hydrogen atom with a *bbc* iron vacancy in both ferromagnetic and (for the first time) paramagnetic bcc iron. Fifteen non-equivalent magnetic configurations were obtained. Five of them having the lowest energy were chosen for further analysis. The H-O-site distance is 0,23 Å in both paramagnetic and ferromagnetic *bcc* iron. The energy of the hydrogen-vacancy binding is 0,60 and 0,27 for bbc iron paramagnetic and ferromagnetic states, respectively.

Keywords: first-principles calculations; bcc iron; hydrogen; vacancy; binding energy.

[1] Verkhovykh Anastasia Vladimirovna is Post-graduate Student, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.
E-mail: ursaeva@physics.susu.ac.ru
[2] Mirzoev Aleksandr Aminulaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.
E-mail: mirzoev@physics.susu.ac.ru

References

1. Alefeld G. (ed.), Völkl J. (ed.) *Hydrogen in Metals.* Vol. 1, 2. (Topics in Applied Physics. Vol. 28, 29). Berlin *et al.*: Springer-Verlag, 1978.

2. Wipf H. (ed.) *Hydrogen in Metals III: Properties and Applications.* (Topics in Applied Physics. Vol. 73.). Berlin *et al.*: Springer-Verlag, 1997. 350 p. DOI 10.1007/BFb0103398

3. Hirth J.P. Effects of hydrogen on the properties of iron and steel. *Met. Trans.* 1980. Vol. 11A, no. 6. pp. 861–890.

4. Borchers C., Michler T., Pundt A. Effect of Hydrogen on the Mechanical Properties of Stainless Steels. *Advanced Engineering Materials.* 2008. Vol. 10, no. 1–2. pp. 11–23.

5. Pressouyre G.M., Bernstein I.M. A quantitative analysis of hydrogen trapping. *Met. Trans.* 1978. Vol. 9A, no. 11. pp. 1571–1580.

6. Bernstein I.M., Pressouyre G.M. *The role of traps in the microstructural control of hydrogen embrittlement of steels: Hydrogen degradation of ferrous alloys.* Park Ridge, N.J.: Noyes Publications, 1985. pp. 641–685.

7. Besenbacher F., Myers S.M., Nordlander P., Nørskov J.K. Multiple Hydrogen Occupancy of Vacancies in Fe. *J. Appl. Phys.* 1987. Vol. 61, no. 5. pp. 1788–1794.

8. Mirzaev D.A., Mirzoev A.A., Okishev K.Yu., Rakitin M.S. Theory of hydrogen solubility in binary iron alloys based on *ab initio* calculation results. *Molec. Phys.* 2012. Vol. 110, no. 11–12. pp. 1299–1304.

9. Gibala R, Kumnick A.J.; ed. by Gibala R., Hehemann R.F. Hydrogen trapping in iron and steels: Hydrogen embrittlement and stress corrosion cracking. *Proceedings of a troiano festschrift symposium.* Ohio: ASM, 1984.

10. Myers S.M., Picraux S.T., Stolz R.E. Defect Trapping of Ion-Implanted Deuterium in Fe. *J. Appl. Phys.* 1979. Vol. 50, no. 9. pp. 5710–5719.

11. Gavriljuk V.G., Bugaev V.N., Petrov Yu.N., Tarasenko A.V., Yanchitski B.Z. Hydrogen-induced equilibrium vacancies in fcc iron-base alloys. *Scripta Mat.* 1996. Vol. 34, no. 6. pp. 903–907.

12. Fukai Y. Formation of Superabundant Vacancies in *M*–H Alloys and Some of Its Consequences: A Review. *Journal of Alloys and Compounds.* 2003. Vol. 356–357. pp. 263–269.

13. Mao J. Thermodynamics of Hydrogen and Vacancies in Metals (PhD thesis). Houston, 2002.

14. Fukai Y., Okuma N. Evidence of Copious Vacancy Formation in Ni and Pd Under a High Hydrogen Pressure. *Japanese J. Appl. Phys.* 1993. Vol. 32. pt. 2. no. 9A. pp. L1256–L1259.

15. Iwamoto M., Fukai Y. Superabundant Vacancy Formation in Iron Under High Hydrogen Pressures: Thermal Desorption Spectroscopy. *Mat. Tran. JIM.* 1999. Vol. 40, no. 7. pp. 606–611.

16. Tateyama Y., Ohno T. Stability and Clusterization of Hydrogen-Vacancy Complexes in α-Fe: An *ab Initio* Study. *Phys. Rev. B.* 2003. Vol. 67. p. 174105.

17. Hayward E., Fu C.-C. Interplay between hydrogen and vacancies in α-Fe. *Phys. Rev. B.* 2013. Vol. 87. p. 174103.

18. Jiang D.E., Carter E.A. Diffusion of Interstitial Hydrogen into and Through Bcc Fe from First Principles. *Phys. Rev. B.* 2004. Vol. 70. p. 064102.

19. Irigoyen B., Ferullo R., Castellani N., Juan A. The location of a hydrogen atom and hydrogen molecules in BCC Fe: an ASED-MO approach. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 1995. Vol. 3. pp. 319–330.

20. Sanchez J., Fullea J., Andrade C., de Andres P.L. Hydrogen in α-iron: Stress and diffusion. *Phys. Rev. B.* 2008. Vol. 78. p. 014113.

21. Ohsawa K., Eguchi K., Watanabe H., Yamaguchi M., Yagi M. Configuration and binding energy of multiple hydrogen atoms trapped in monovacancy in bcc transition metals. *Phys. Rev. B.* 2012. Vol. 85. p. 094102.

22. Hayward E., Beeler B., Deo C. Multiple hydrogen trapping at monovacancies. *Philos. Mag. Lett.* 2012. Vol. 92. pp. 217–225.

23. Counts, W.A., Wolverton C., Gibala R. First-Principles Energetic of Hydrogen Traps in α-Fe: Point Defects. *Acta Materialia.* 2010. Vol. 58. pp. 4730–4741.

24. Boukhvalov D.W., Gornostyrev Yu.N., Katsnelson M.I., Lichtenstein A.I. Magnetism and Local Distortions near Carbon Impurity in γ-Iron. *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. p. 247205.

25. Gorbatov O.I., Korzhavyi P.A., Ruban A.V., Gornostyrev Y.N. Dependence of vacancy-solute interactions on magnetic state in dilute iron-based alloys. *Solid State Phenomena.* 2011. Vol. 172–174. pp. 979–984.

26. Ponomareva A.V., Gornostyrev Yu.N., Abrikosov I.A. Ab initio calculation of the solution enthalpies of substitutional and interstitial impurities in paramagnetic fcc Fe. *Phys. Rev. B.* 2014. Vol. 90. p. 014439.

27. Mirzaev D.A., Mirzoev A.A., Okisheva K.Yu., Verkhovykh A.V. Hydrogen–vacancy interaction in bcc iron: ab initio calculations and thermodynamics. *Mol. Phys.* 2014. Vol. 112. pp. 1745–1754.

28. http://supercomputer.susu.ac.ru/computers/tornado/

29. Ursaeva A.V., Ruzanova G.E., Mirzoev A.A. Vybor optimal'nykh parametrov dlya postroeniya maksimal'no tochnoy modeli OTsK-zheleza (Selection of Optimal Parameters for Formation the Most Accurate Model of Bcc Iron). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics".* 2010. no. 9 (185). Issue 2. pp. 97–101. (in Russ.)

30. Onink M., Brakman C.M., Tichelaar F.D., Mittemeijer E.J., Van der Zwaag S., Root J.H., Konyer N.B. *Scripta Metallurgica Et Materialia.* 1993. Vol. 29, no. 8. pp. 1011–1016.

31. Ullmaier H. (ed.) *Atomic Defects in Metals.* (Landolt–Börnstein New Series, III/25). Berlin, Springer-Verlag, 1991. 509 p.

32. Ohnuma T., Soneda N., Iwasawa M. First-Principles Calculations of Vacancy-Solute Element Interactions in Body-Centered Cubic Iron. *Acta Materialia.* 2009. Vol. 57, no. 20. pp. 5947–5955.

33. Myers S.M., Baskes M.I., Birnbaum H.K., Corbett J.W., DeLeo G.G., Estreicher S.K., Haller E.E., Jena P., Johnson N.M., Kirchheim R., Pearton S.J., Stavola M.J. Hydrogen Interactions with Defects in Crystalline Solids. *Reviews of Modern Physics.* 1992. Vol. 64, no. 2. pp. 559–617.

34. Deyanov R.Z., Eremin N.N., Urusov V.S. ODSS (Ordered-Disordered-Solid-Solution). Ver. 1. BINAR. *A Program for Calculation of Disordered Supercells for Modelling of Substitutional Solid Solutions.* Moscow, 2006–2007. (in Russ.) [http://cryst.geol.msu.ru/odss/binar.pdf]

35. Maier K., Metz H., Herlach D., Schaefer H.E. High temperature positron annihilation experiments in BCC metals. *Journal of Nuclear Materials.* 1978. Vol. 69–70. pp. 589–592.

36. Schaefer H.-E., Maier K., Weller M., Herlach D., Seeger A., Diehl J. Vacancy Formation in Iron Investigated by Positron Annihilation in Thermal Equilibrium. *Scripta Metallurgica.* 1977. Vol. 11, no. 9. pp. 803–809.

37. Kim S., Buyers W.J.L. Vacancy Formation Energy in Iron by Positron Annihilation. *Journal of Physics F: Metal Physics.* 1978. Vol. 8, no. 5. pp. L103–L108.

38. Matter H., Winter J., Triftshäuser W. Phase Transformations and Vacancy Formation Energies of Transition Metals by Positron Annihilation. *Appl. Phys.* 1979. Vol. 20. pp. 135–140.

39. De Schepper L., Segers D., Dorikens-Vanpraet L., Dorikens M., Knuyt G., Stals L.M., Moser P. Positron Annihilation on Pure and Carbon-Doped α-Iron in Thermal Equilibrium. *Phys. Rev. B.* 1983. Vol. 27, no. 9. pp. 5257–5269.

Received 20 October 2014

УДК 534.2, 537.6

ИЗЛУЧАТЕЛЬ И ПРИЕМНИК УЛЬТРАЗВУКА ДЛЯ БЕСКОНТАКТНОГО КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ТОНКОЛИСТОВЫХ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ

***Ю.В. Петров*[1], *С.Ю. Гуревич*[2], *Е.В. Голубев*[3]**

Приведены результаты исследования по выявлению зависимости основных характеристик ультразвуковых волн Лэмба, возбуждаемых в металлических пластинах термооптическим излучателем, от его геометрических и энергетических параметров. Таким излучателем ультразвука считается нагретая зона поверхности металла при его облучении наносекундными оптическими импульсами. Регистрация возбуждаемых волн Лэмба осуществлялась специальным широкополосным ЭМА-приемником. Полученные результаты можно использовать при создании средств бесконтактного ультразвукового контроля качества тонких металлоизделий.

Ключевые слова: ультразвуковые волны Лэмба; лазерное возбуждение; термооптический излучатель; широкополосный ЭМА-приемник.

Введение

В практике ультразвуковой дефектоскопии широко используются методы контроля качества тонколистовых металлоизделий и созданных на их основе композитных материалов с помощью волн Лэмба. Поскольку применение контактных жидкостей при ультразвуковой дефектоскопии ответственных композитных изделий не допускается, то способы генерации и приема ультразвука должны быть бесконтактными, например, с помощью наносекундных лазерных импульсов и электромагнитно-акустического (ЭМА) приемника [1–4].

При облучении наносекундными лазерными импульсами листовых металлоизделий нагретая часть поверхности металла становится источником ультразвуковых волн Лэмба. Эффективность такого «термооптического» излучателя (в дальнейшем – ТО-излучатель) зависит от теплофизических свойств металла и его толщины, поверхностной плотности мощности теплового излучения, которая задается мощностью лазерного излучения. Существенное значение имеют и геометрические размеры ТО-излучателя. Все это определяет тип возбуждаемых волн Лэмба, величину амплитуды, форму и длительность ультразвуковых импульсов, а также частоту их заполнения.

В работах [4, 5] для бесконтактной регистрации ультразвуковых волн Лэмба использовался ЭМА-приемник объемных волн. Чувствительность и надежность такого приемника можно существенно повысить, если в его конструкцию внести изменения, учитывающие некоторые особенности движения упругих частиц в волнах Лэмба разных номеров [6].

Таким образом, чтобы довести контролирующую аппаратуру, созданную на базе импульсного лазера и широкополосного ЭМА-приемника, до внедрения на производстве необходимо:

– разработать и изготовить ЭМА-приемник симметричных и антисимметричных волн Лэмба;

– провести исследования по выявлению зависимости основных характеристик волн Лэмба, возбуждаемых ТО-излучателем, от его геометрических и энергетических параметров, теплофизических свойств и толщины листового металла.

Методика проведения исследований

Для проведения экспериментальных исследований использовалась установка, схема которой показана на рис. 1.

[1] Петров Юрий Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: petrovyv@susu.ac.ru
[2] Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: gurevichsi@susu.ac.ru
[3] Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: ev_golubev@mail.ru

Нагрев поверхности образца осуществляется импульсным лазером Nd: YAG Brilliant B фирмы QUANTEL с модулируемой добротностью. Длина волны лазерного излучения 1064 нм, длительность и энергия световых импульсов равны соответственно 4–6 нс и 0,85 Дж. Средняя мощность лазера при частоте следования импульсов 10 Гц составляет 8,5 Вт. Диаметр светового пучка 9,5 мм, его расхождение менее чем 0,7 мрад. Для регулирования мощности лазерного излучения используется оптический аттенюатор в виде набора тонких плоскопараллельных стеклянных пластин, расположенных под небольшим углом к лучу лазера. Мощность лазерного излучения измеряется прибором ИМО-2Н. Изменение размеров ТО-излучателя осуществляется с помощью круглых диафрагм и собирающей линзы. Образцами служили стальные пластины размерами 270x60 мм и толщиной от 0,6 до 2,5 мм.

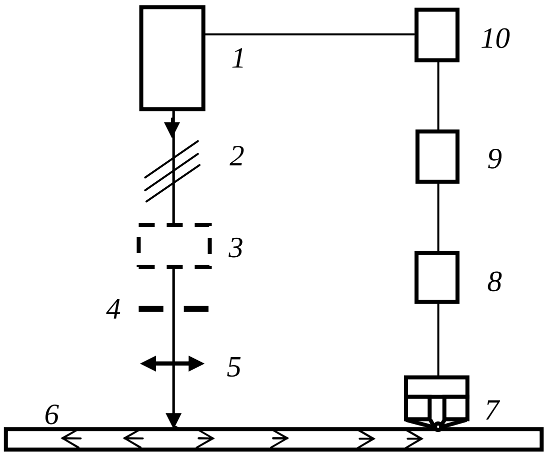


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 **– лазер,**
2 **– оптический аттенюатор,**
3 **– измеритель мощности,**
4 **– диафрагма,** ***5*** **– линза,**
6 **– металлическая пластина,**
7 **– ЭМА-приемник,**
8 **– усилитель тока,**
9 **– усилитель напряжения,**
10 **– цифровой осциллограф**

Для регистрации возбуждаемых волн Лэмба использовался широкополосный (от 20 до 200 МГц) приемный тракт. Он состоит из последовательно соединенных ЭМА-приемника, усилителей тока, напряжения и цифрового осциллографа GDS-2202. Конструкция ЭМА-приемника обеспечивала наиболее оптимальный прием симметричных и антисимметричных ультразвуковых волн. Достигалось это необходимой ориентацией поляризующего магнитного поля относительно образца (за счет изменения формы концентраторов полюсов постоянного магнита) и расположения индуктора ЭМА-приемника.

Амплитуда, форма, длительность и частота колебаний в электрических импульсах, наблюдаемых на экране дисплея осциллографа, считаются пропорциональными соответствующим величинам в упругих импульсах. Пределы допускаемых значений относительной погрешности измеряемых величин не превышают ± 3 %.

Результаты исследований и их обсуждение

1. Зависимость характеристик импульсов волн Лэмба от диаметра ТО-излучателя с постоянной мощностью теплового излучения

Мощность теплового излучения ТО-излучателя P_T связана с мощностью лазерного излучения P_λ через коэффициент отражения *k*. Величина этого коэффициента для большинства сталей равна примерно 60 % [7]. Для нашего случая $P_T = 0,4P_\lambda$. Лазерное излучение мощностью 7,0 Вт направлялось через диафрагму с круглым отверстием на пластину толщиной 0,6 мм. В результате на её поверхности начинает действовать ТО-излучатель с постоянной мощностью теплового излучения $P_T = 2,8$ Вт. В ходе эксперимента диаметр отверстия диафрагмы, а значит и диаметр ТО-излучателя, изменялся от 1,0 до 9,0 мм с шагом 1,0 мм.

По полученным осциллограммам были определены зависимости максимальных амплитуд, формы, длительности и частоты колебаний импульсов симметричных и антисимметричных волн Лэмба от диаметра и площади ТО-излучателя. На рис. 2 приведены графики для максимальных амплитуд. Разброс значений амплитуд может быть вызван неравномерным распределением энергии по площади ТО-излучателя, анизотропией тепловых свойств металла, а также погрешностями при аналого-цифровом преобразовании электрического импульса, подаваемого с выхода приемного тракта на вход осциллографа.

Из результатов эксперимента видно, что с увеличением диаметра (площади) ТО-излучателя амплитуды увеличиваются, но происходит это различным образом. Для диаметров от 1,0 до 3,5 мм (площадей от 0,8 до 10 мм^2) темп роста амплитуд значительно больше, чем для диаметров от 3,5 до 9,0 мм (площадь от 10 до 65 мм^2).

Исследование зависимости формы, длительности и частоты колебаний регистрируемого импульса от диаметра (площади) ТО-излучателя показало, что до 3,0 мм (7,1 мм^2) эти характеристики существенно не изменяются. Порядок величин этих характеристик можно оценить из приведенной на рис. 3, *а*) осциллограммы импульса симметричных волн Лэмба, возбуждаемых ТО-излучателем диаметром 1,0 мм (площадь 0,8 мм^2). Из осциллограммы следует, что длительность импульса равна 3,0 мкс, средняя частота колебаний 1,5 МГц.

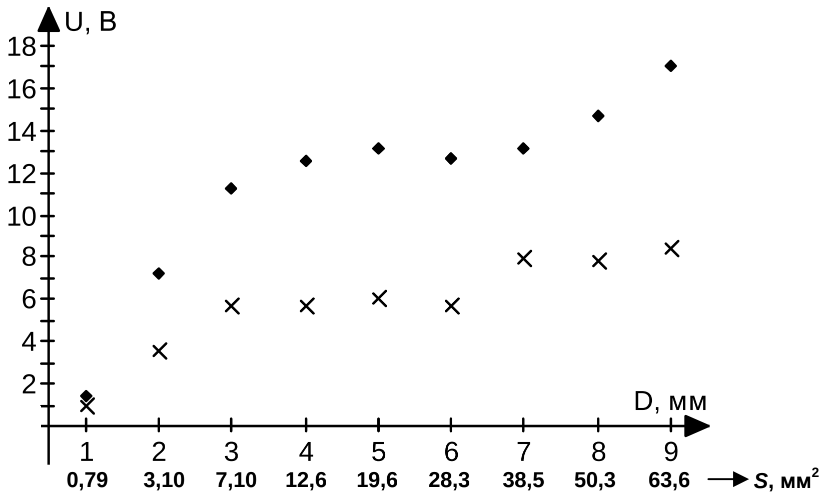


Рис. 2. Зависимость максимальных амплитуд импульсов волн Лэмба от диаметра и площади термооптического излучателя: ■ – симметричные волны; × – антисимметричные волны

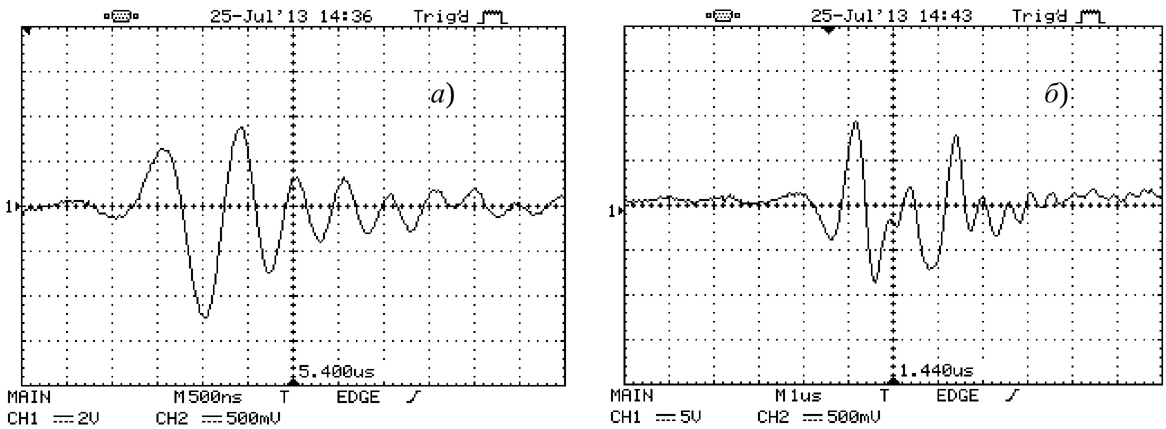


Рис. 3. Импульсы симметричных волн Лэмба, генерируемые термооптическим излучателем: а) *D* = 1,0 мм (*S* = 0,8 мм^2); б) *D* = 9,0 мм (*S* = 63,4 мм^2).

Дальнейшее увеличение диаметра (площади) ТО-излучателя приводит к изменениям формы и некоторых характеристик регистрируемого импульса. Так на рис. 3, *б* приведена осциллограмма импульса симметричной волны Лэмба от ТО-излучателя диаметром 9,0 мм (площадь 63,6 мм^2). Видно, что произошло его разделение на два разных по форме и амплитуде импульса. Длительность разделенных импульсов одинакова и равна 2,8 мкс, а средние частоты колебаний отличаются примерно в два раза (у первого 0,7 у второго 1,3 МГц). В случае, когда по каким-либо причинам разделение ультразвукового импульса нежелательно, диаметр ТО-излучателя следует выбирать не больше 3,0 мм.

2. Зависимость характеристик импульсов волн Лэмба от мощности теплового излучения ТО-излучателя с постоянным диаметром

Лазерный пучок мощностью P_λ = 7,0 Вт и диаметром D = 9,5 мм направлялся на образец через оптический аттенюатор. В результате на поверхности металла начинает действовать ТО-излучатель такого же диаметра. В ходе эксперимента диаметр излучателя оставался постоянным, а мощность его теплового излучения изменялась с помощью оптического аттенюатора и рассчитывалась по формуле $P_T = 0,4P_\lambda^*$, где P_λ^* – мощность лазерного излучения, измеренная на выходе аттенюатора. По полученным осциллограммам были определены зависимости максимальной амплитуды, формы, длительности и частоты колебаний импульсов симметричных и антисимметричных волн Лэмба от мощности теплового излучения. На рис. 4 приведены графики такой зависимости для указанных максимальных амплитуд.

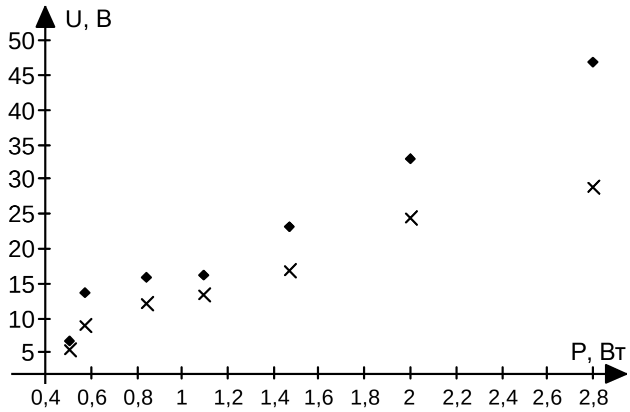


Рис. 4. Зависимость максимальных амплитуд импульсов волн Лэмба от средней тепловой мощности термооптического излучателя: ■ – симметричные волны, × – антисимметричные волны

Поскольку диаметр ТО-излучателя больше 3,0 мм, то, как было отмечено ранее, ЭМА-приемник регистрирует раздвоенный акустический импульс. Результаты, отраженные на рис. 4, относятся к максимуму первого импульса. Из графиков следует, что полученные зависимости почти линейные: чем больше тепловая мощность, тем больше амплитуды. Однако темп амплитуд при минимальных (до 0,6 Вт) и максимальных мощностях (0,6 до 2,8 Вт) значительно отличаются друг от друга. На рис. 5 приведена осциллограмма импульсов симметричной и антисимметричной волн Лэмба возбужденных ТО-излучателем с максимальной тепловой мощностью – 2,8 Вт.

Как следует из осциллограммы, длительность и средняя частота колебаний в первом акустическом импульсе равны соответственно 2,8 мкс и 0,7 МГц. Эти же величины во втором импульсе равны соответственно 3,0 мкс и 1,3 МГц. С уменьшением мощности теплового излучения значение этих параметров не изменялось.

Рис. 5. Импульсы волн Лэмба, возбуждаемые термооптическим излучателем, тепловая мощность которого 2,8 Вт, *D* = 9,5 мм: *а*) симметричные волны; *б*) антисимметричные волны

3. Зависимость характеристик импульсов волн Лэмба от поверхностной плотности мощности теплового излучения ТО-излучателя

Лазерное излучение мощностью $\langle P_\lambda \rangle$ = 0,28 Вт направлялось через собирающую линзу с фокусом 12,0 см на металлическую пластину. В результате, на поверхности пластины начинает действовать ТО-излучатель, диаметр которого определяется расстоянием между линзой и поверхностью образца. Перемещением линзы в пределах двойного фокусного расстояния формировались ТО-излучатели с диаметрами от 0,5 до 4,5 мм с шагом 0,5 мм. Измерение диаметров проводилось с помощью светочувствительной бумаги и микрометра. Средняя поверхностная плотность мощности теплового излучения рассчитывалась по формуле

$$\langle q \rangle = \frac{\langle P_T \rangle}{(\pi D^2/4)\cdot\tau\cdot\nu} = \frac{1,6\cdot\langle P_\lambda \rangle}{\pi D^2\cdot\tau\cdot\nu} ,$$

здесь D –диаметр ТО-излучателя, τ и ν соответственно длительность и частота лазерных импульсов. Потери световой энергии при прохождении лазерного луча через линзу не учитывались.

По полученным осциллограммам были найдены зависимости характеристик симметричных и антисимметричных волн Лэмба от средней поверхностной плотности мощности теплового излучения $\langle q \rangle$. На рис. 6 приведены графики зависимости максимальных амплитуд упругих смещений от $\ln\langle q \rangle$. Логарифмическая шкала выбрана по причине резкого возрастания величины $\langle q \rangle$ при уменьшении диаметра излучателя. Анализ полученной зависимости удобнее проводить вместе с экспериментальным графиком, приведенным на рис. 7.

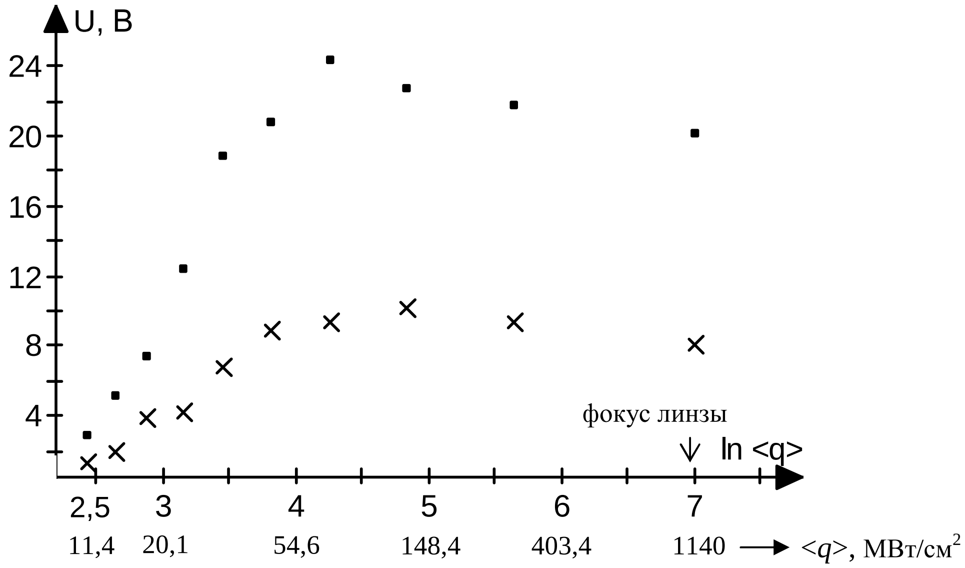


Рис. 6. Зависимость максимальных амплитуд импульсов волн Лэмба, возбуждаемых термооптическим излучателем, от его средней поверхностной плотности тепловой мощности: ■ – симметричные волны, × –антисимметричные волны

Из результатов эксперимента следует, что изменение амплитуд в зависимости от $\langle q \rangle$ и диаметра ТО-излучателя почти симметрично относительно фокуса линзы. По этой причине формировать ТО-излучатели на поверхности образца с помощью линзы можно как до, так и после её фокуса. Максимумы упругих смещений в импульсах волн Лэмба при данной мощности лазерного импульса достигаются при значении поверхностной плотности мощности теплового излучения 126,8 МВт/см^2. Это соответствует диаметру ТО-излучателя 2,0 мм.

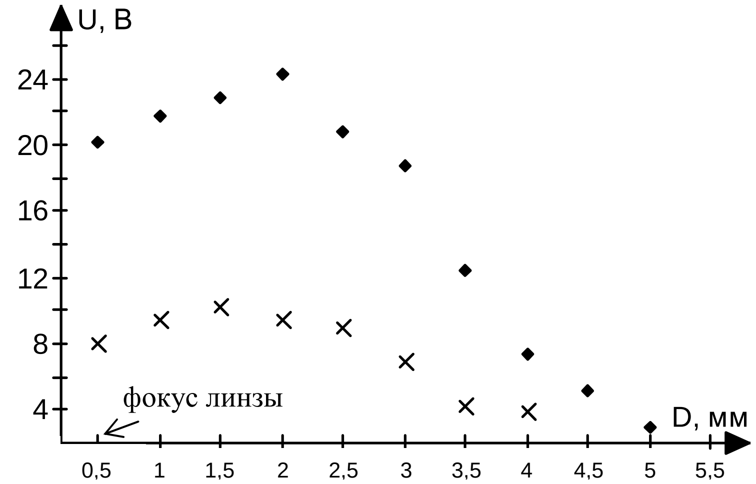


Рис. 7. Зависимость максимальных амплитуд импульсов волн Лэмба, возбуждаемых термооптическим излучателем, от его диаметра: ■ – симметричные волны, × – антисимметричные волны

Увеличение плотности мощности теплового излучения до максимальной (1140 МВт/см^2) или уменьшение диаметра ТО-излучателя до минимального (0,5 мм), снижает амплитуду смещений примерно на 18 %. Причина этого заключается в том, что в механизм лазерной генерации ультразвука включается испарительный процесс и возникающая при этом плазма экранирует поверхность образца от лазерного излучения. Как следует из опыта, при этом начинается заметное разрушение поверхности образца.

Зависимость амплитуды смещений от диаметра ТО-излучателя является довольно критичной. Так, его увеличение от 2,0 мм до 4,0 мм приводит к уменьшению амплитуды в три раза. Это соответствует уменьшению $\langle q \rangle$ от 71 до 18 МВт/см^2. Таким образом, для целей дефектоскопии наиболее оптимальной для ТО-излучателя является поверхностная плотность мощности теплового излучения $\langle q \rangle$ от 32 до 71 МВт/см^2. Это соответствует его диаметру от 2,0 до 3,0 мм.

На рис. 8 приведены зависимости длительности τ импульсов волн Лэмба и средней частоты $\langle \nu \rangle$ колебаний в них от средней поверхностной плотности мощности теплового излучения $\langle q \rangle$ ТО-излучателя. Анализ полученных зависимостей удобнее проводить вместе с экспериментальными графиками, приведенными на рис. 9.

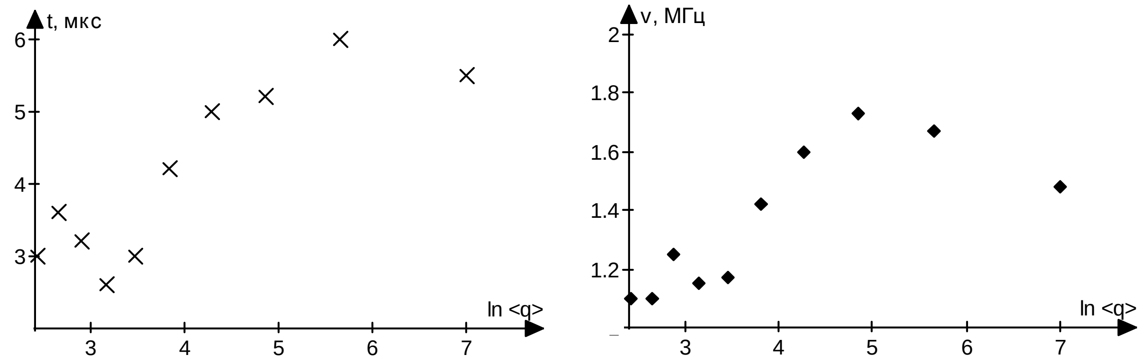


Рис. 8. Зависимость параметров импульсов симметричных волн Лэмба, возбуждаемых термооптическим излучателем, от его поверхностной плотности тепловой мощности: × – длительность, ■ – средняя частота колебаний

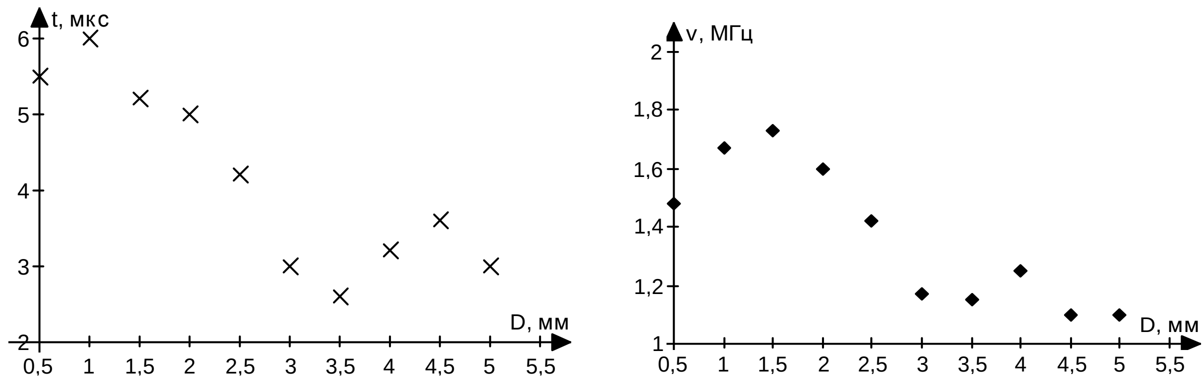


Рис. 9. Зависимость параметров импульсов симметричных волн Лэмба возбуждаемых термооптическим излучателем, от его диаметра: × –– длительность импульса, ■ – средняя частота колебаний

Видно, что с увеличением $\langle q \rangle$ (уменьшением диаметра ТО-излучателя) частота колебаний в упругих импульсах и их длительность увеличиваются. Излучатели с $\langle q \rangle$ = от 20,0 до 55,0 МВт/см^2 (диаметром $3 \pm 0{,}5$ мм) генерируют короткие импульсы. Частота колебаний в этих импульсах минимальна. Импульсы, генерируемые ТО-излучателями с $\langle q \rangle$ = от 90,0 до 1140 МВт/см^2 (диаметром $1 \pm 0{,}5$ мм), имеют наибольшие длительность и частоту. На рис. 10 приведены осциллограммы соответствующих импульсов.

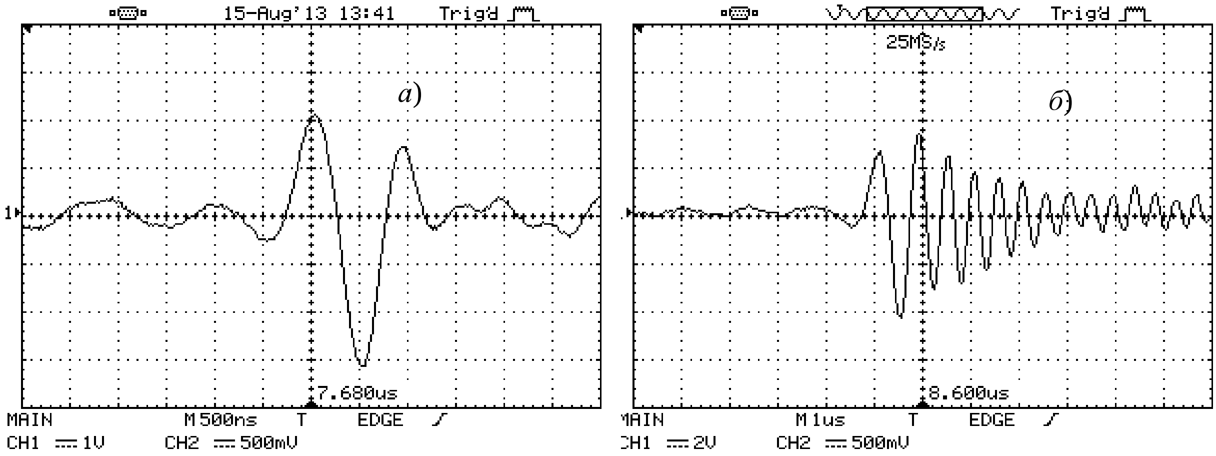


Рис. 10. Импульс симметричной волны Лэмба, возбуждаемый термооптическим излучателем: а) $\langle q \rangle$ = 32 МВт/см^2, (D = 3,0 мм); б) $\langle q \rangle$ = 1140 МВт/см^2. D = 0,5 мм

Выводы

1. Разработан, изготовлен и испытан в лабораторных условиях широкополосный ЭМА-приемник симметричных и антисимметричных ультразвуковых волн Лэмба, обладающий достаточной для практических целей чувствительностью и надежностью.

2. С помощью ЭМА-приемника проведены исследования по выявлению зависимостей основных характеристик волн Лэмба, генерируемых в металлических пластинах ТО-излучателем – нагретой частью металла в зоне поглощения наносекундных лазерных импульсов:

– от диаметра ТО-излучателя при его постоянной мощности теплового излучения;

– от мощности теплового излучения ТО-излучателя при его постоянном диаметре;

– от поверхностной плотности мощности теплового излучения ТО- излучателя.

3. Из полученных результатов, в зависимости от поставленных задач, выработаны рекомендации по выбору оптимальных геометрических и энергетических параметров ТО-излучателя ультразвука при создании приборов для контроля качества тонких металлоизделий. Базой таких приборов служит импульсный лазер, с помощью которого формируется ТО-излучатель и широкополосный ЭМА-приемник.

Литература

1. Анализ ультразвуковых волн, возбуждаемых в металлической пластине лазерными импульсами наносекундной длительности / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, А.В. Шушарин, Е.В. Голубев // Дефектоскопия. – 2009. – № 4. – С. 35–40.

2. Шушарин, А.В. Экспериментальное исследование волн Лэмба при лазерной генерации / А.В. Шушарин // Дефектоскопия. – 2009. – № 10. – С. 4–15.

3. Петров, Ю.В. Экспериментальное определение параметров волн Лэмба при их лазерной генерации / Ю.В. Петров, С.Ю. Гуревич, Е.В. Голубев // Дефектоскопия. – 2010. – № 3. – С. 45–49.

4. ЭМА-регистрация ультразвуковых волн Лэмба, возбуждаемых лазерными наноимпульсами / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Е.В. Голубев, А.А. Шульгинов // Дефектоскопия. – 2013. – № 8. – С. 3–8.

5. Петров, Ю.В. Экспериментальное исследование ультразвуковых волн, возбуждаемых в металле лучом лазера / Ю.В. Петров, А.В. Шушарин // Дефектоскопия. – 1994. – № 8. – С. 90–92.

6. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.

7. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.

Поступила в редакцию 20 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 1, pp. 57–64

THE TRANSMITTER AND ULTRASOUND RECEIVER FOR NON-CONTACT QUALITY CONTROL OF THIN-SHEET METAL PRODUCTS

Yu.V. Petrov[1], S.Yu. Gurevich[2], E.V. Golubev[3]

A broadband EMA receiver with symmetric and antisymmetric ultrasound Lamb waves with sufficient for practical purposes sensitivity and reliability was designed, manufactured and tested in the laboratory.

Research has been conducted to identify dependences of main characteristics of ultrasonic Lamb waves excited in metal plates on geometrical and energy parameters of thermal-optic emitter (TO) – the heated zone of the metal surface during its radiation by nanosecond optical pulses.

According to the research and based on the tasks, recommendations were made to select optimal geometric and energy parameters of the TO ultrasound emitter in creating devices for the quality control of thin-sheet metal products. The basis of such devices is a pulsed laser which enables to produce a TO transmitter and a wideband EMA receiver.

Keywords: ultrasonic Lamb waves; laser excitation; the thermo-optical transducer; broadband EMA receiver.

References

1. Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V., Shusharin A.V., Golubev E.V. Analysis of ultrasonic waves excited in a metal plate by nanosecond laser pulses. *Russian Journal of Nondestructive Testing.* 2009. Vol. 45, no. 4. pp. 247–251. doi: 10.1134/S1061830909040044.
2. Shusharin A.V. *Defektoskopiya.* 2009. no. 10. pp. 4–15. (in Russ.).
3. Petrov Yu.V., Gurevich S.Yu., Golubev E.V. Experimental determination of parameters of laser-generated Lamb waves. *Russian Journal of Nondestructive Testing.* 2010. Vol. 46, no. 3. pp. 185–188. doi: 10.1134/S1061830910030058.
4. Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V., Golubev E.V., Shulginov A.A. EMA Recording of Ultrasound Lamb Waves Excited by Laser Nanopulses. *Russian Journal of Nondestructive Testing.* 2013. Vol. 49, no. 8. pp. 431–435. doi: 10.1134/S1061830913080056.
5. Petrov Yu.V., Shusharin A.V. *Defektoskopiya.* 1994. no. 8. pp. 90–92. (in Russ.).
6. Viktorov I.A. *Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lemba v tekhnike* (Physical Fundamentals of Applying Rayleigh and Lamb Ultrasonic Waves in Engineering). Moscow, Nauka Publ., 1966. 168 p. (in Russ.).
7. Kikoin I.K (ed.) *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* (Tables of physical quantities. A handbook). Moscow, Atomizdat Publ., 1976. 1005 p. (in Russ.).

Received 20 May 2014

[1] Petrov Yuriy Vladimirovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University.
E-mail: petrovyv@susu.ac.ru
[2] Gurevich Sergei Yurevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University.
E-mail: gurevichsi@susu.ac.ru
[3] Golubev Evgeniy Valerievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University.
E-mail: ev_golubev@mail.ru

Персоналии

УДК 518:51(09)

БОРИС АНИСИМОВИЧ БОНДАРЕНКО. К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

В.И. Заляпин[1], В.В. Карачик[2], Л.Д. Менихес[3], Е.В. Харитонова[4]

19 октября 2013 г исполнилось 90 лет со дня рождения и 60 лет научно-педагогической деятельности известного ученого, заслуженного деятеля науки Узбекистана, академика Академии наук Республики Узбекистан, доктора физико-математических наук, профессора Бориса Анисимовича Бондаренко.

Профессор Бондаренко Б.А. широко известен не только у нас в стране, но и за рубежом. Значителен его вклад в математический анализ и теорию функций, дифференциальные уравнения и математическую теорию упругости, дискретную математику и комбинаторный анализ.

Ключевые слова: персоналии; юбилеи; творческая биография.

Борис Анисимович Бондаренко родился 19 октября 1923 года в г. Давлеканово Башкирской АССР. В 1928 г. переехал с родителями в г. Ташкент. В 1942 г., после окончания средней школы № 7 г. Ташкента, Б.А. Бондаренко был призван в армию и зачислен в Ташкентское военное пехотное училище, а затем участвовал в боях на различных фронтах Второй Мировой войны. В 1948 г., возвратившись из армии в г. Ташкент, Б.А. Бондаренко поступил и в 1953 г. успешно окончил физико-математический факультет Среднеазиатского государственного университета по специальности «Математика».

Свою трудовую деятельность Б.А. Бондаренко начал в 1953 г. в Институте математики и механики (ныне Институт математики Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека) в должности младшего научного сотрудника. Активно работая в области специальных функций математической физики и их приложений к решению классических задач математической теории упругости в 1962 г., защитил кандидатскую, а в 1970 г. докторскую диссертации.

В 1972 г. Б.А. Бондаренко перешел на педагогическую работу в Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, где до 1980 г. заведовал кафедрой «Теоретическая механика», продолжая наряду с успешной преподавательской деятельностью, научную работу по актуальным проблемам математики и механики, а также читал не только учебные, но и специальные циклы лекций по теоретической механике и ее приложениям. В 1974 г. Б.А. Бондаренко было присвоено ученое звание профессора.

[1] Заляпин Владимир Ильич – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: vzal@susu.ac.ru

[2] Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: karachik@susu.ru

[3] Менихес Леонид Давидович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: leonid.menikhes@gmail.com

[4] Харитнова Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
E-mail: alena@math.susu.ac.ru.

В 1980 г. Б.А. Бондаренко был приглашен на работу в Институт кибернетики Научно-производственного объединения «Кибернетика» Академии наук Узбекистана. В этом институте он занимал должности заведующего лабораторией «Численные методы», заместителя директора института по науке, а также заместителя генерального директора НПО «Кибернетика». С 1993 по 2012 г. Б.А. Бондаренко являлся ведущим научным сотрудником лаборатории «Алгоритмизация».

Значителен его вклад в математический анализ и теорию функций, дифференциальные уравнения и математическую теорию упругости, дискретную математику и комбинаторный анализ. Свыше 200 научных работ, в том числе 12 монографий и учебно-методических пособий, содержат принципиально новые результаты в перечисленных выше направлениях математики, механики и кибернетики.

Первая из монографий Б.А. Бондаренко «Полигармонические полиномы» (1968) составила основу его докторской диссертации и посвящена теории нового класса специальных полиномов и специальных функций и их приложениям к решению классических задач математической теории упругости. Ответственным редактором монографии был С.Г. Михлин. В монографии «Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости» (1978) построен новый класс специальных функций, названных квазиполиномиальными, и разработаны методы их применения к решению сложных и практически важных задач статики и динамики теории упругости.

Большой цикл научных исследований Б.А. Бондаренко связан с изучением полигармонических, поливолновых, поликалорических, поливибрационных и других полилинейных дифференциальных уравнений. Обосновав важность рассмотрения полилинейных уравнений, Б.А. Бондаренко поставил и исследовал аналоги задач Коши, Рикье, Гурса, Николеску н новых задач дня таких уравнений. Им были разработаны операторные методы и дискретные алгоритмы построения точных и приближенных решений указанных задач. Наиболее полное изложение теории и приложений полилинейных уравнений содержатся в книгах Б.А. Бондаренко «Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях» (1984) и «Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных» (1987).

Многие из результатов Б.А. Бондаренко получены на методами дискретной математики, в том числе методами комбинаторного анализа и теории чисел. Путем введения нормализованных *p*-латинских квадратов он изучил теоретико-числовые и комбинаторные свойства так называемых арифметических фрактальных структур, составленных из вычетов классических и новых комбинаторных чисел по простым, степеням простых и составным модулям. Этим вопросам посвящен ряд основополагающих работ Б.А. Бондаренко, в том числе монография «Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля» (1990) и книга «Generalized Pascal Triang]es and Pyramids, their Fractals, Graphs, and Applications» (USA, Santa Clara: Fibonacci Association, 1993), трижды переизданная в США Фибоначчиевой Ассоциацией.

Б.А. Бондаренко ввел в рассмотрение новый класс полилинейных уравнений, преобразовав системы линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричные дифференциальные уравнения, содержащие степени матриц-операторов. Наиболее полно изучены полилинейные векторно-матричные уравнения статики и динамики теории упругости, полилинейные векторно-матричные уравнения движения вязкопластичных сред и другие полилинейные уравнения, обобщающие классические математические модели, связанные с задачами механики и математической физики. Для введенных уравнений Б.А. Бондаренко построил векторно-матричные представления их точных решений и разработал эффективные комбинаторные алгоритмы точного и приближенного решения конкретных задач.

Научные исследования Б.А. Бондаренко привлекли в эту область математики многочисленных учеников и последователей. Под его руководством защищено 10 кандидатских диссертаций, а по ряду докторских он является научным консультантом. Книги и научные статьи Б.А. Бондаренко получили признание зарубежных ученых, причем многие из его основополагающих результатов цитируются в книгах зарубежных ученых, в том числе в учебных пособиях по специальным функциям математической физики, комбинаторному анализу и механике деформируемого твердого тела.

С 1972 г. он – член Американского математического общества, с 1993 г. сотрудничает с Фибоначчиевой Ассоциацией США, является рецензентом и референтом ряда зарубежных научных журналов. Б.А. Бондаренко выступал с лекциями в университетах Германии, Румынии, Болгарии, Югославии и Кипра, а также с докладами на многих научных международных съездах и конференциях.

Научная и педагогическая деятельность Б.А. Бондаренко широко освещалась в отечественной и зарубежной печатью. Так Международный Биографический центр в Кембридже (Англия) включил Б.А. Бондаренко в число 100 наиболее выдающихся ученых мира за 2008 и 2012 г. В книге «The Golden Fund of Science of Uzbekistan», Ташкент, 2011, он включен в число ученых золотого фонда Узбекистана. Краткие описания его научной деятельности содержатся в различных энциклопедических и других изданиях.

За плодотворную научную деятельность и подготовку научных кадров Б.А. Бондаренко в 1983 г. присуждено почетное звание «Заслуженный деятель науки Узбекистана», в 1984 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 2000 г. – академиком Академии наук Республики Узбекистан.

Б.А. Бондаренко участник Второй Мировой войны, ветеран Ташкентского высшего общевойскового командного училища, награжден двумя орденами и двадцатью медалями, в том числе медалью «Жасорат»[1].

Коллеги, друзья и ученики искренне желает Борису Анисимовичу здоровья, долголетия и дальнейших успехов в его научной деятельности.

Поступила в редакцию 19 декабря 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 65–67

BORIS ANISIMOVITCH BONDARENKO. TO THE 90-TH ANNIVERSARY

V.I. Zalyapin[2], V.V. Karachik[3], L.D. Menikhes[4], Ye.V. Kharitonova[5]

October 19, 2013 is celebrated as 90 years since the birth and 60 years of scientific and pedagogical activity of a well-known scientist Boris Anisimovitch Bondarenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, an Honored Scientist of Uzbekistan, academician of the Academy of Sciences of Uzbekistan.

Professor B.A. Bondarenko is widely known not only in our country but also abroad. He made a significant contribution to the mathematical analysis and the theory of functions, differential equations and the mathematical theory of elasticity, discrete mathematics and the combinatorial analysis.

Keywords: personnel; anniversary; creative biography.

Received 19 December 2014

1 Медалью «Жасорат» награждаются военнослужащие за проявленные храбрость и отвагу при выполнении воинского или служебного долга. Узбекский аналог медали «За Отвагу».

[2] Zalyapin Vladimir Illich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional analysis Department, South Ural State University.
E-mail: vzal@susu.ac.ru
[3] Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: karachik@susu.ru
[4] Menikhes Leonid Davidovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: leonid.menikhes@gmail.com
[5] Kharitonova Yelena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Plekhanov Russian University of Economics.
E-mail: alena@math.susu.ac.ru

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», Е29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, физический факультет, кафедра ОиТФ, ответственному редактору профессору Мирзоеву Александру Аминулаевичу [Prof. Mirzoev Aleksander Aminulaevich, General and Theoretical Physics Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: vestnik@physics.susu.ac.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. www.vestnik.susu.ac.ru/mmph.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, http://вестник.юургу.рф/mmph.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор А.Ю. Федерякин

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 28.01.2015. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 7,90. Тираж 500 экз. Заказ 15/53.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.