



ВЕСТНИК

**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2015
Т. 7, № 4**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

**«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (отв. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет:

д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.** (ЮУрГУ)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, ИННА-Университет, г. Инчон, Корея),
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.** (ЮУрГУ)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2015

Vol. 7, no. 4

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

M.M. Brzhezinskaya, Berlin, Germany
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
V.V. Karachik, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
Kishik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
N.D. Kundikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D.A. Mirzaev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, USA
S.B. Sapozhnikov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
A.O. Chernyavskii, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БОГАТЫРЕВА Е.А. Задача стартового управления и финального наблюдения для одного квазилинейного уравнения соболевского типа	5
ДИЛЬМАН В.Л., ДИЯБ А.Н. Напряженное состояние полосы с прослойкой при значительной механической неоднородности	11
ЖУКОВСКИЙ В.И., БЕЛЬСКИХ Ю.А., САМСОНОВ С.П. Коэффициентные критерии при выборе концепций равновесия (на примере линейно-квадратичной игры двух лиц).....	20
ЗАМЫШЛЯЕВА А.А., АЛЬ-ИСАВИ Дж. К. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей	27
КЕЛЛЕР А.В., ЭБЕЛЬ А.А. Численный метод решения задач смешанного управления для систем леонтьевского типа	37
САГАДЕЕВА М.А., ХАСАН Ф.Л. Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах	46

Механика

КУРОПАТЕНКО В.Ф., ФИЛАТОВ С.Ю. Моделирование ударного сжатия и теплового расширения сложных соединений	54
ПАЛЫМСКИЙ И.Б. Об асимптотическом режиме конвекции Рэля–Бенара.....	61

Физика

ГУРЕВИЧ С.Ю., ПЕТРОВ Ю.В., ГОЛУБЕВ Е.В., КАРАСЕВ О.В. Характеристики направленности лазерного импульсного термоакустического излучателя	68
---	----

Краткие сообщения

ЧИСТЯКОВ Е.Ю. О решениях волнового уравнения с младшим членом.....	74
--	----

Персоналии

БЕСКАЧКО В.П. Герман Платонович Вяткин. К 80-летию со дня рождения	77
--	----

CONTENTS

Mathematics

BOGATYREVA E.A. The Start Control and Final Observation Problem for a Quasi-Linear Sobolev Type Equation.....	5
DIL'MAN V.L., DHEYAB A.N. The Stress State of a Strip with a Layer Under Considerable Mechanical Heterogeneity	11
ZHUKOVSKIY V.I., BEL'SKIKH Y.A., SAMSONOV S.P. Coefficient Criteria in Choosing Equilibrium Conceptions (On the Example of Linear-Quadratic Game of Two Persons)	20
ZAMYSHLYAEVA A.A., AL-ISAWI J.K.T. Holomorphic Degenerate Operator Semigroups and Evolutionary Sobolev Type Equations in Quasi-Sobolev Spaces of Sequences	27
KELLER A.V., EBEL A A. A Numerical Method of the Solution of Mixed Control Problems for Leontieff Type Systems	37
SAGADEEVA M.A., HASAN F.L. Existence of Invariant Spaces and Exponential Dichotomies of Solutions of Dynamical Sobolev Type Equations in Quasi-Banach Spaces	46

Mechanics

KUROPATENKO V.F., FILATOV S.Yu. Simulation of Shock Compression and Thermal Expansion of Complex Compounds	54
PALYMSKIY I.B. On the Ultimate Regime of Rayleigh–Bernard Convection	61

Physics

GUREVICH S.Yu., PETROV Yu.V., GOLUBEV E.V., KARASEV O.V. Directional Characteristics of the Laser Pulse Thermoacoustic Emitter	68
--	----

Short communications

CHISTYAKOV E.Y. On Solutions of The Wave Equation with a Minor Term.....	74
--	----

Personalia

BESKACHKO V.P. German Platonovich Vyatkin. To the 80-th Anniversary.....	77
--	----

ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Е.А. Богатырева¹

Получены достаточные условия разрешимости задачи стартового управления и финального наблюдения для одного абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа в слабом обобщенном смысле. На основе абстрактных результатов доказана разрешимость задачи стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта–Гильмана. Данная модель описывает неравновесную противоточную капиллярную пропитку, искомая функция соответствует эффективной насыщенности. Особенностью рассматриваемой модели является учет эффекта неравновесности, что согласуется с постановкой задачи стартового управления и финального наблюдения.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение соболевского типа; задача стартового управления и финального наблюдения; слабое обобщенное решение; модель Баренблатта–Гильмана.

Введение

При исследовании процессов фильтрации в пористых средах [1] возникает задача Коши–Дирихле

$$x(s, 0) = u(s), \quad s \in \Omega, \quad (1)$$

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

для уравнения Баренблатта–Гильмана

$$x_t - \alpha\lambda(\Delta\Phi(x))_t = \alpha\Delta\Phi(x). \quad (3)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $T \in \mathbf{R}_+$, искомая функция $x(s, t)$ соответствует функции эффективной насыщенности, параметры α и λ – вещественны, положительны, характеризуют свойства среды и фаз, $u(s)$ – эффективная насыщенность в начальный момент времени. Функция $\Phi(x) = |x|^{p-2}x$, $p > 2$ – монотонно возрастающая и гладкая.

В подходящих функциональных пространствах (1)–(3) редуцируется к задаче Коши

$$x(0) = u \quad (4)$$

для абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0, \quad L(x) = Ax + \lambda M(x), \quad \lambda \in \mathbf{R}_+. \quad (5)$$

Мы рассматриваем уравнения (3) и (5) как квазилинейные уравнения соболевского типа. С помощью методов, разработанных для этого класса уравнений, в работе [2] были рассмотрены задачи (1)–(3) и (4), (5), доказаны существование и единственность решения указанных задач в слабом обобщенном смысле.

Нас интересует задача стартового управления и финального наблюдения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) &= 0, \quad x(0) = u, \\ J(x(T), u) &\rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \end{aligned} \quad (6)$$

¹ Богатырева Екатерина Александровна – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: bogatyreva@susu.ac.ru

где $J(x(T), u)$ – ограниченный снизу, полунепрерывный снизу, коэрцитивный функционал [3]; U_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений U .

Общие вопросы существования решений задач оптимального управления рассмотрены в [3], доказано существование и единственность решения задачи стартового управления и финального наблюдения для эволюционного уравнения параболического типа. Задачи оптимального управления для линейных и полулинейных уравнений соболевского типа первого и высокого порядков с условиями Коши или Шоултера–Сидорова рассматривались в [4–7]. В работе использован метод Галеркина, применение этого метода для уравнений с двойной нелинейностью рассматривалось в [8–9]. Задача стартового управления и финального наблюдения моделирует ситуацию, когда момент наблюдения результата отделен по времени от начального кратковременного управляющего воздействия. Рассмотрение такой задачи для модели Баренблатта–Гильмана физически обосновано, так как данная постановка хорошо согласуется с учетом эффекта неравновесности, который является особенностью модели.

Статья содержит две части. В первой части доказывается существование решения задачи (6). Во второй части проводится редукция задачи стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта–Гильмана к задаче (6) в подходящих функциональных пространствах. На основе полученных абстрактных результатов делается вывод о разрешимости задачи стартового управления финального наблюдения для модели Баренблатта–Гильмана.

1. Задача стартового управления и финального наблюдения для абстрактной модели

Пусть $H = (H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; (U, U^*) и (P, P^*) – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств.

Построим пространство

$$\mathbf{X} = \{x : x \in L_\infty(0, T; U), \dot{x} \in L_2(0, T; H)\}.$$

Определение 1. Слабым обобщенным решением задачи Коши (4), (5) назовем функцию $x \in \mathbf{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \langle L(x), w \rangle + \langle M(x), w \rangle \right] dt = 0,$$

$$x(0) = u, \forall w \in U, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Замечание 1. Функции из пространства \mathbf{X} после, быть может, изменения на множестве меры нуль из отрезка $[0, T]$ будут непрерывными отображениями $[0, T] \rightarrow U$, таким образом, задача Коши (4), (5) имеет смысл.

В дальнейшем рассмотрении будут использованы следующие условия:

Условия (А):

А1. Вложения $U \subset P \subset H \subset P^* \subset U^*$ плотны и непрерывны.

А2. Пространство U сепарабельно.

А3. Вложение $U \subset P$ компактно.

Условие (В):

В1. Оператор $A \in \mathbf{L}(U; U^*)$ симметричен, положительно определен.

Условия (С):

С1. Оператор $M \in C^{r+1}(U; U^*)$, $r \in \mathbf{N}$, s -монотонен, однороден порядка $k \in \bar{\mathbf{R}}_+$.

С2. Существует $F(s) \geq 0$ при п.в. $s \in [0, \infty)$ такая, что $F \in C[0, \infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, и для п.в. $s \in [0, \infty)$, для любых $u = u(s), v = v(s) \in U$ выполняется

$$\|M(u) - M(v)\|_{P^*} \leq F(s) \|u - v\|_P.$$

С3. Существуют $C^M \geq 0$ и $p \geq 2$ такие, что $\|M(u)\|_* \leq C^M \|u\|^{p-1} \forall u \in U$ и $\langle M(u), u \rangle \geq 0$.

С4. Производная Фреше оператора M симметрична.

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A)–(C), тогда для любого $u \in U$ и для любого $T \in \mathbf{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (4), (5), удовлетворяющее

$$\|x(t)\|_U^p \leq C_1 (\|u\|_U^p + \|u\|_U^2), \text{ при п.в. } t \in (0, T),$$

и

$$\|\dot{x}\|_{L_2(0, T; H)}^2 \leq C_2 \|u\|_U^p.$$

Перейдем к рассмотрению задачи стартового управления и финального наблюдения (6). Введем

Определение 2. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ будем называть *решением задачи (6)*, если $J(\tilde{x}(T), \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x(T), u)$ и (\tilde{x}, \tilde{u}) удовлетворяет задаче (4), (5) в смысле определения 1. Вектор

\tilde{u} будем называть *стартовым управлением в задаче (6)*.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A)–(C), тогда при любом $T \in \mathbf{R}_+$ существует решение $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ задачи (6).

Доказательство. При сформулированных условиях в силу теоремы 1 для задачи (4), (5) при любом $u \in U_{ad}$ существует единственное слабое обобщенное решение. Поэтому можно считать, что

$$J(x(T), u) = J(u).$$

Так как множество значений функционала ограничено снизу, то существует минимизирующая последовательность $\{u_m\} \in U_{ad}$, такая что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = C,$$

где C – точная нижняя грань множества значений функционала. Следовательно, последовательность $\{J(u_m)\}_{m=1}^\infty$ ограничена в \mathbf{R} , а значит, в силу коэрцитивности функционала $J(u)$, последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ограничена в U .

Извлечем из $\{u_m\}$ (переходя, если потребуется, к подпоследовательности) слабо сходящуюся последовательность $u_m \rightarrow \tilde{u}$. В силу теоремы Мазура точка $\tilde{u} \in U_{ad}$.

Обозначим за $x_m = x(u_m)$. В силу условий теоремы 1 можно извлечь такую подпоследовательность, назовем ее снова $\{x_m\}$, что

$$\begin{aligned} x_m &\rightarrow \tilde{x} \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; U); \\ x_m(T) &\rightarrow \tilde{x}(T) \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; U); \\ \tilde{x}_m &\rightarrow \tilde{x} \text{ слабо в } L_2(0, T; U). \end{aligned}$$

В силу ограниченности линейного оператора A и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_\infty(0, T; U)$, получим:

$$\langle Ax_m(t), x_m(t) \rangle \leq \|Ax_m(t)\|_{U^*} \|x_m(t)\|_U \leq C^A \|x_m(t)\|_U^2,$$

значит, $\{Ax_m\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; U^*)$.

В силу условия (C3) и ограниченности $\{x_m\}$ в $L_\infty(0, T; U)$, получим

$$\langle M(x_m(t)), x_m(t) \rangle \leq \|M(x_m(t))\|_{U^*} \|x_m(t)\|_U \leq C^M \|x_m(t)\|_U^p,$$

следовательно, $\{M(x_m)\}$ ограничена в $L_\infty(0, T; U^*)$.

Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что

$$\begin{aligned} Ax_m &\rightarrow A\tilde{x} \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; U^*); \\ M(x_m) &\rightarrow \mu \text{ *-слабо в } L_\infty(0, T; U^*). \end{aligned}$$

Покажем, что $\mu = M(\tilde{x})$. Так как вложение $U \subseteq P$ компактно, то найдется такая подпоследовательность $\{x_m\}$, что при почти всех $t \in (0, T)$ $x_m \rightarrow \tilde{x}$ сильно в P . Заметив, что оператор M удовлетворяет (C2), получим:

$$\|M(x_m) - M(\tilde{x})\|_* \leq F(s) \|x_m - \tilde{x}\| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow +\infty,$$

следовательно, $\mu = M(\tilde{x})$.

В силу сепарабельности пространства U выберем в нем счетную всюду плотную ортонормальную систему функций $\{w_j\}$. Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления можно записать

$$\langle Ax_m(T), w_j \rangle + \lambda \langle M(x_m(T)), w_j \rangle + \int_0^T \lambda \langle M(x_m), w_j \rangle d\tau = \langle Ax_m(0), w_j \rangle + \lambda \langle M(x_m(0)), w_j \rangle.$$

Зафиксируем j и перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$

$$\langle A\tilde{x}(T), w_j \rangle + \lambda \langle M(\tilde{x}(T)), w_j \rangle + \int_0^T \lambda \langle M(\tilde{x}), w_j \rangle d\tau = \langle A\tilde{u}, w_j \rangle + \lambda \langle M(\tilde{u}), w_j \rangle.$$

Тогда получим, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \langle L(\tilde{x}), w \rangle + \langle M(\tilde{x}), w \rangle \right) \varphi(\tau) d\tau = 0,$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{u}, \forall w \in U, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Следовательно, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и в силу полунепрерывности снизу функционала $\liminf_{m \rightarrow \infty} J(u_m) \geq J(\tilde{u})$, значит, \tilde{u} есть стартовое управление в задаче (6).

2. Модель Баренблатта–Гильмана

Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения для уравнения Баренблатта–Гильмана

$$\begin{aligned} x_t - \alpha \lambda (\Delta \Phi(x))_t &= \alpha \Delta \Phi(x), \\ x(s, 0) &= u(s), \quad s \in \Omega, \\ x(s, t) &= 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ J(x, u) &\rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \end{aligned} \tag{7}$$

Положим $H = W_2^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u (-\Delta)^{-1} v dx, \quad u, v \in H,$$

где $(-\Delta)^{-1}$ – оператор Грина однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области Ω . В качестве пространства P выберем пространство $L_p(\Omega)$. Построим пространство управлений $U = \{x: x \in W_q^1(\Omega); x(s, t) = 0, s \in \Omega\}$. В качестве U^* и P^* можно взять пространства, сопряженные к U и P относительно двойственности в $W_2^{-1}(\Omega)$. Выберем $U_{ad} \subset U$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Функционал зададим формулой

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \|x(s, T) - x_d(s)\|_{W_q^1(\Omega)}^q + \frac{1}{2} \|u(s)\|_{W_q^1(\Omega)}^q.$$

В силу теоремы вложения Соболева, если $1 < q < n$ и $2 < p < \frac{2q}{n-q}$, то условия (A1)–(A3) выполнены. Кроме того, (A1)–(A3) выполнены, в случае, если $n = q$ и $p \in (2, +\infty)$.

Построим оператор A :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u (-\Delta)^{-1} v dx, \quad u, v \in U.$$

Лемма 1 [2]. Оператор $A \in \mathbf{L}(U; U^*)$ симметричен, положительно определен.

Построим оператор M :

$$\langle M(u), v \rangle = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv dx, \quad u, v \in U.$$

Лемма 2 [2]. Оператор $M \in C^{r+1}(U; U^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s -монотонен, однороден порядка $k \in \bar{\mathbb{R}}_+$, имеет симметричную производную Фреше и удовлетворяет условиям (C2) и (C3).

Теорема 3 [2]. Пусть $1 < q \leq n$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$, если $q < n$, то $2 < p < \frac{2q}{n-q}$, если $q = n$, то

$p \in (2, +\infty)$. Тогда для любого $u_0 \in W_q^1(\Omega)$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

В силу теоремы 2 и лемм 1 и 2 справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $1 < q \leq n$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$, если $q < n$, то $2 < p < \frac{2q}{n-q}$, если $q = n$, то

$p \in (2, +\infty)$. Тогда при любом $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbf{X} \times U_{ad}$ задачи (7).

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Г.И. Баренблатт, А.А. Гильман // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 456–461.
2. Bogatyreva, E.A. On the Uniqueness of a Nonlocal Solution In The Barenblatt–Gilman Model / E.A. Bogatyreva, I.N. Semenova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 113–119. DOI: 10.14529/mmp140409
3. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.
4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
5. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5(264). – С. 13–24.
6. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоултера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.
7. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.
8. Al'shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev-Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin, N.-Y.: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2011. – 648 p.
9. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 55–61.

Поступила в редакцию 29 июля 2015 г.

THE START CONTROL AND FINAL OBSERVATION PROBLEM FOR A QUASI-LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATION

*E.A. Bogatyreva*¹

Sufficient solvability conditions of the start control and final observation problem in a weak generalized meaning for one abstract quasilinear Sobolev type equation are obtained. Sobolev type equations constitute a large area of nonclassical equations of mathematical physics. Techniques used in this article originated in the theory of semilinear Sobolev type equations. Solvability of the start control and final observation problem for the Barenblatt–Gilman model describing the nonequilibrium countercurrent capillary impregnation was proved on the basis of abstract results. The unknown function corresponds to effective saturation. The main equation of this model is nonlinear and implicit with respect to the time derivative which makes it quite difficult to study. Formulation of this problem agrees with consideration of the effect of disequilibrium, which is the characteristic feature of the considered model.

Keywords: quasi-linear Sobolev type equations; start control and final observation problem; weak generalized solution; Barenblatt–Gilman model.

References

1. Barenblatt G.I., Gil'man A.A. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1987, Vol. 52, no. 3, pp. 456–461. (in Russ.).
2. Bogatyreva E.A., Semenova I.N. On the uniqueness of a nonlocal solution in the Barenblatt - Gilman model. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming*, 2014, Vol. 7, no 4, pp. 113–119. DOI: 10.14529/mmp140409
3. Fursikov A.V. *Optimalnoe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal control of distributed systems. Theory and Applications]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga Publ., 1999. 350 p. (in Russ.).
4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003. 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501
5. Zamyshlyayeva A.A., Tsyplenkova O.N. *Optimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoj zadachi dlya uravneniya Bussineska–Lyava* [The optimal control over solution of the initial-finish value problem for the Boussinesque–Love equation]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming*, 2012, no. 5(264), pp. 13–24. (in Russ.).
6. Keller A.V. Numerical solution of the optimal control problem for degenerate linear system of equations with Showalter–Sidorov initial conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27(127), pp. 50–56. (in Russ.).
7. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An optimal control problem for the Hoff equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, Vol. 1, no. 2, pp. 247–253. DOI: 10.1134/S1990478907020147
8. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations*. Berlin, N.-Y.: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2011. 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294
9. Sviridyuk G.A. *Izv. vuzov. Matematika*, 1989, no. 2, pp. 55–61. (in Russ.).

Received July 29, 2015

¹ Bogatyreva Ekaterina Aleksandrovna is Post-graduate Student, Department of Equation of Mathematical Physics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: bogatyrevaea@susu.ac.ru

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ПРОСЛОЙКОЙ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

В.Л. Дильман¹, А.Н. Дияб²

Изучается напряженное состояние неоднородной полосы, содержащей прямоугольную вставку из менее прочного материала, под действием сжимающей нагрузки при плоской деформации в критический момент нагружения. Отношение прочностных характеристик основного материала и материала вставки предполагается произвольным. Получены явные аналитические выражения для вычисления критической нагрузки.

Ключевые слова: пластический слой; плоская деформация; сжатие; напряженное состояние; критическая нагрузка.

Введение

Теоретическое изучение сжатия пластического слоя впервые проводилось в работе [1] и затем многими авторами. Так как напряжения на контактной поверхности между слоем и основным материалом неизвестны, возникает обратная граничная задача, в которой требуется для определения сжимающего усилия найти нормальные напряжения на контактной поверхности. Дополнительные условия формулируются в виде ограничений на классы функций, в которых ищется решение. Например, в тонких слоях допускают линейную зависимость касательных напряжений по толщине слоя [2, 3]. Ограничения преследуют две цели: упрощение математической модели и постановку обратной граничной задачи. Список таких условий приведен в работах [4, 5]. Часто применяются гипотеза разделения переменных для касательных напряжений [4–6]

$$\tau_{xy} = X(x)Y(y), \quad (1)$$

и гипотеза поперечных плоских сечений [2, 4, 5, 7–10], когда прямые координатной сетки $y = \text{const}$ после деформирования остаются прямыми:

$$v_y = W(y).$$

Здесь v_y – скорость смещения точки слоя в поперечном направлении. В работах [4, 5, 8] деформированные координатные линии аппроксимировались фрагментами синусоид. Это позволило дать описание напряженного состояния слоя в явной аналитической форме. В работах [4, 7, 8] показана эффективность применения гипотезы (1) в форме

$$\tau_{xy} = xY(y) \quad (2)$$

для «не очень» тонких слоев. В работах [11–13] методы работ [2, 4, 5, 7–10] перенесены на неоднородный слой. Одно из обобщений гипотезы (1) использовалось в [14]. В работе [15] подходы работ [2, 4, 5, 7–10] применялись для изучения критического состояния кольцевого слоя в составе растягиваемой цилиндрической оболочки, не обязательно тонкостенной. Эффективность упомянутых методов подтверждается возможностью их применения при решении осесимметричных задач [16–21]. Упомянутые гипотезы распространяются на часть слоя кроме окрестностей свободных поверхностей. Около такой поверхности приходится решать задачу Коши для системы уравнений в частных производных гиперболического типа с разрывными граничными условиями [4, 8, 22]. Основным шагом решения этой задачи является решение задачи сопряжения для напряжений на контактной поверхности [4, 8, 22]. В работе [22] показано, что следствием разрывности граничных условий на контактной поверхности является разрывность напряжений в более прочной части соединения. В работах [4, 23, 24] установлен силовой критерий вовлечения основного материала в процесс пластического деформирования – зависимость коэффициента $K = \sigma_B^+ / \sigma_B^-$ механической неоднородности соединения от угла наклона контактной поверхности.

Здесь σ_B^+ и σ_B^- – пределы прочности основного материала и материала слоя соответственно. В

¹ Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: Dilman49@mail.ru

² Дияб Аус Нидал – аспирант кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: Aws.nth@gmail.com

частности, если слой ортогонален внешнему усилию, коэффициент K имеет критическое значение $K_{cr} = 1,98$. Знание K_{cr} необходимо для получения критериев прочности неоднородных (в частности, сварных) соединений в зависимости от их механических и геометрических параметров и разработки вычислительных схем для определения несущей способности неоднородных соединений.

Методы и результаты упомянутых работ [3–24] относятся к случаю $1 < K < 1,5$, наиболее характерному для сварных соединений. В сварных, а тем более в паяных и клееных, соединениях K может быть больше, чем 1,5. В работах [25–27] исследована прочность наклонных сварных швов тонкостенных цилиндрических оболочек и разработаны вычислительные схемы для ее определения. В этих схемах параметр K заменяется на другую величину K_{incl} вследствие реализации более сложного напряженного состояния в наклонном слое. K_{incl} зависит не только от K , но и от угла наклона слоя и условий нагружения оболочки, и может достигать любых значений в диапазоне $(1; \infty)$.

Целью данной работы является изучение напряженного состояния пластических слоев в неоднородных соединениях под сжимающей нагрузкой при любых значениях параметра K , и разработка вычислительной схемы нахождения прочности таких соединений. Эта схема базируется на полученных в работе аналитических зависимостях для ряда внутренних параметров задачи. В основе лежит исследование математической модели напряженно-деформированного состояния пластического слоя, содержащей гипотезу (2).

Задача сопряжения на контактной границе

Напряженное состояние пластического слоя при плоской деформации в безразмерных переменных задается системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4. \quad (5)$$

Здесь σ_x , σ_y и τ_{xy} – напряжения. Функции из уравнений (3)–(5) определены на прямоугольном сечении B_1A_1AB слоя длиной 2 и толщиной 2κ , $\kappa \in (0; 1]$ с осями симметрии в качестве осей декартовой системы координат. A_1A и B_1B – контактные (длины 2), AB и A_1B_1 – свободные поверхности, точка $H = O_y \cap A_1A$. На осях симметрии слоя касательные напряжения равны нулю:

$$\tau(x, 0) = \tau(0, y) = 0. \quad (6)$$

На свободной поверхности AB ($x=1$)

$$\sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (7)$$

Напряженное состояние в окрестности свободной поверхности определяется решением задачи Коши для уравнений (3)–(5) при условиях (6), (7). Уравнение (5) получено нормировкой размерных уравнений

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4(\sigma_B^\pm)^2$$

величинами σ_B^- в слое и σ_B^+ в основном материале соединения. Поэтому на контактной границе безразмерные напряжения терпят разрыв:

$$\sigma_y^- = K\sigma_y^+; \quad \tau_{xy}^- = K\tau_{xy}^+. \quad (8)$$

Задачей сопряжения для напряжений называется задача нахождения напряжений на контактной границе по уравнениям (8). Обозначим через ω^- угол поворота характеристики при переходе от точки B_1 к точке (обозначим ее F) контактной поверхности. Аналогично, ω^+ – положительный

угол поворота характеристики при переходе от точки свободной поверхности к F в основном материале. Тогда система (8) для всех точек отрезка FA приобретает вид [4, 5, 8]:

$$\begin{cases} 1 + 2\omega^- + \cos 2\omega^- = K(1 - 2\omega^+ + \cos 2\omega^+); \\ \sin 2\omega^- = K \sin 2\omega^+. \end{cases} \quad (9)$$

Отсюда следует, что на отрезке FA углы ω^+ и ω^- постоянны, и поэтому там же постоянны напряжения σ_x^\pm , σ_y^\pm и τ_{xy}^\pm . В работах [4, 5, 8] получено приближенное решение системы (9):

$$\omega^- = \frac{K-1}{2} \left(1 + \frac{(K+1)(K-1)^2}{16} \right); \quad (10)$$

$$\omega^+ = \frac{K-1}{2K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{16} \right). \quad (11)$$

Сравнение формулы (10) этого решения с полученным там же численным решением показало, что при $K < 1,5$ с точностью до 0,005 эти решения совпадают, но при $K > 1,5$ формула (10) непригодна. Формула (11) дает совпадение с численным решением с указанной точностью как минимум на промежутке [1; 2]. В тех же работах на основании численного решения показано, что при $K = 1,9816$ угол $\omega^- = \pi/4$, что является условием прекращения роста внешней нагрузки. При $K > K_{cr} = 1,9816$ основной материал деформируется упруго вплоть до состояния предразрушения материала слоя. Для получения более точного аналитического выражения для напряжения σ_y^- воспользуемся формулой

$$\sigma_y^- = K(1 - 2\omega^+ + \cos 2\omega^+) \quad (12)$$

и формулой (11). Подставляя правую часть (11) в (12), получим, что в точках отрезка FA , то есть в точках с координатами $(x; \kappa)$, $x \in [x_F; 1]$, $\sigma_y^-(x, \kappa) = \sigma_y^{**}$, где

$$\sigma_y^{**} = 2 + (K-1) \left[1 - \frac{(K-1)^2}{8} \left(1 + \frac{4}{K} + \frac{(K-1)^2}{K} \right) \right]. \quad (13)$$

Эта формула дает весьма точные значения для всех $K \in [1; K_{cr}]$. В частности, при $K = K_{cr} = 1,9816$ $\sigma_y^- = 2,5707 = 1 + \pi/2 = 1 + 2(\pi/4) + \cos(2(\pi/4))$. В общем случае, в точках отрезка FA $\sigma_y^- = \sigma_y^*$, где

$$\sigma_y^* = \begin{cases} \sigma_y^{**}, & K \in [1; K_{cr}]; \\ 1 + \pi/2, & K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \quad (14)$$

Здесь σ_y^{**} задано формулой (13). Вычислим касательные напряжения τ_{xy}^{**} в точках отрезка FA . Для всех $K \in [1; K_{cr}]$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{**} &= K \sin(2\omega^+) \approx K \left(2\omega^+ - (2\omega^+)^3/6 \right) = K \left[\frac{K-1}{K} \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{K-1}{K} \right)^3 \left(1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \right)^3 \right] = \\ &= (K-1) \left[1 + \frac{(K-1)^2}{8K} \left(1 - \frac{4}{3K^2} - \frac{(K-1)^3}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, в точках отрезка FA $\tau_{xy}^-(x, \kappa) = \tau_{xy}^*$, где

$$\tau_{xy}^* = \begin{cases} \tau_{xy}^{**}, & K \in [1; K_{cr}]; \\ 1, & K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \quad (16)$$

Математика

Здесь τ_{xy}^{**} задано формулой (15). Найдем абсциссу x_F точки F . Когда $K \in [1; K_{cr}]$, в [4, с. 83] показано, что

$$x_F = 1 - \frac{2\kappa}{\cos \omega^- + \sin \omega^-}, \quad \cos \omega^- + \sin \omega^- = \sqrt{1 + \sin(2\omega^-)} = \sqrt{1 + K \sin(2\omega^-)} = \sqrt{1 + \tau_{xy}^*}.$$

Отсюда

$$x_F = \begin{cases} 1 - \frac{2\kappa}{\sqrt{1 + \tau_{xy}^*}}, & K \in [1; K_{cr}]; \\ 1 - \sqrt{2\kappa}, & K \in [K_{cr}; \infty). \end{cases} \quad (17)$$

Вычисление касательных напряжений

Представим уравнение (5) приближенно в виде [3–6]:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1 - \tau_{xy}^2} \approx 2 - \tau_{xy}^2. \quad (18)$$

Используя (18), исключим из (3) и (4) нормальные напряжения. Получим [4, 5] нелинейное уравнение относительно неизвестной функции τ_{xy} :

$$-\frac{\partial^2(\tau_{xy}^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0. \quad (19)$$

Подставляя в (6) и (19) правую часть (2), получим, что функция $Y(y)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию:

$$Y'' + 4YY' = 0, \quad Y(0) = 0. \quad (20)$$

Решение этой задачи в случае сжатия имеет вид:

$$Y(y) = -0,5a \operatorname{tg}(ay).$$

Здесь a – произвольный положительный параметр. Из (2) следует, что всюду в слое, за исключением зон свободных поверхностей,

$$\tau_{xy} = -0,5a x \operatorname{tg}(ay). \quad (21)$$

Для нахождения параметра a следует приравнять значения τ_{xy} , вычисленные в точке F по формулам (16) и (21). Когда $K \in [1; K_{cr}]$, получим уравнение:

$$ax_F \operatorname{tg}(a\kappa) = 2\tau_{xy}^*. \quad (22)$$

Введем обозначение [4] для функции, обратной функции $y = x \operatorname{tg} x$:

$$x = y \operatorname{tg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{atgd}(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (-\pi/2; \pi/2).$$

Тогда уравнение (22) можно записать в виде:

$$a = \frac{1}{\kappa} \operatorname{atgd}\left(\frac{2\tau_{xy}^*}{x_F}\right). \quad (23)$$

Если $K \in [K_{cr}; \infty)$, то

$$a = \frac{1}{\kappa} \operatorname{atgd}\left(\frac{2}{1 - \sqrt{2\kappa}}\right). \quad (24)$$

Для вычисления приближенных значений функции atgd можно воспользоваться следующей леммой [4].

Лемма 1. Функцию atgd можно представить в виде:

$$\operatorname{atgd}(x) = \sqrt{x\psi(-x)}, \quad (25)$$

где функция ψ аналитическая, причем

$$\psi(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{45}x^2 + \frac{16}{945}x^3 + \frac{256}{127575}x^4 + \frac{1984}{33 \cdot 127575}x^5 + \dots \quad (26)$$

Формулы (25), (26) для вычисления функции $y = atgd(x)$ удобны для значений x , близких к нулю, и малоприспособны для x , близких к ∞ . В этом случае можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. Функцию $atgd$ можно представить в виде:

$$atgd(x) = \varphi(1/x),$$

где функция φ аналитическая, причем

$$\varphi(t) = (\pi/2) \left(1 - t + t^2 - (1 - \pi^2/12)t^3 + (1 - \pi^2/3)t^4 - \dots \right). \quad (27)$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $x = 1/t$ в уравнении $x = ytg y$. Продифференцируем по t уравнение $t ytg y = 1$. После преобразований, с повторным использованием последнего уравнения, получим:

$$(1 + t + t^2 y^2) y' + y = 0, \quad y(0) = \pi/2.$$

Представим решение этой задачи $y = \varphi(t)$ в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

После подстановки правой части этого выражения в предыдущее уравнение вместо неизвестной функции y получим бесконечную последовательность рекуррентных соотношений:

$$a_0 = \pi/2; \quad a_1 = -a_0; \quad a_1 + 2a_2 = -a_1; \quad a_0^2 a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -a_2;$$

$$2a_0 a_1^2 + 2a_0^2 a_2 + 3a_3 + 4a_4 = -a_3; \quad a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2 + 3a_0^2 a_3 + 4a_4 + 5a_5 = -a_4;$$

и так далее. Отсюда следует:

$$a_1 = -\pi/2; \quad a_2 = \pi/2; \quad a_3 = (-\pi/2)(1 - \pi^2/12); \quad a_4 = (\pi/2)(1 - \pi^2/3); \quad a_5 = (-\pi/2)(1 - \pi^2/6 + \pi^4/80);$$

и так далее. Вычисления показывают, что при значениях $x < 2,75$ следует использовать формулу (26). В противном случае нужно воспользоваться леммой 2 (формула (27)). Наибольшее отклонение значений функции $y = atgd(x)$, вычисленных по указанным формулам, от полученных численно, составляет около 0,01.

Вычисление нормальных напряжений и критической нагрузки

Существует, как было установлено в работах [4, 27], два различных типа критических состояний менее прочного слоя, связанных с распределением нормальных напряжений σ_y по контактной границе. В первом случае напряжения σ_y^- нигде на контактной границе не достигают наибольшего возможного для них значения $2K$. Во втором случае существует отрезок HM контактной границы, на котором $\sigma_y^- = 2K$. Нормальные напряжения и критическая нагрузка в этих случаях находятся по различным вычислительным схемам.

Первый случай. Подставляя выражение (21) в уравнения равновесия (3) и (4) и используя условие текучести (5), после интегрирования уравнений получим:

$$\sigma_x^- = \frac{a^2 x^2}{4 \cos^2(ay)} - \frac{1}{2} \ln |\cos(ay)| + C,$$

$$\sigma_y^- = \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln |\cos(ay)| - 2 + C. \quad (28)$$

Постоянная C находится из уравнения

$$\sigma_y^-(x_F, \kappa) = \sigma_y^*,$$

где σ_y^* задано формулой (14), а $\sigma_y^-(x_F, \kappa)$ – значение σ_y^- , вычисленное в точке F по формуле (28), причем $x = x_F$ находится по формуле (17), а $y = \kappa$. В результате получаем:

$$\sigma_x^- = \frac{a^2}{4} \left(\frac{x^2}{\cos^2(ay)} - (x_F)^2 \right) + \frac{1}{2} \ln |\cos(a\kappa)| - \sigma_y^* + 2, \quad x \in [0; x_F],$$

$$\sigma_y^- = \frac{a^2}{4} \left(x^2 - (x_F)^2 \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(a\kappa)}{\cos(ay)} \right| - \sigma_y^*, \quad x \in [0; x_F]. \quad (29)$$

Из (29) следует, что на контактной границе, то есть при $y = \kappa$,

$$\sigma_y^-(x, \kappa) = \begin{cases} \frac{a^2}{4} (x^2 - x_F^2) - \sigma_y^*, & x \in [0; x_F], \\ -\sigma_y^*, & x \in [x_F; 1]. \end{cases} \quad (30)$$

Критическая нагрузка определяется средним напряжением σ_{yav} по контактной поверхности:

$$\sigma_{yav} = \int_0^1 \sigma_y^-(x, \kappa) dx. \quad (31)$$

Подставив в формулу (31) правую часть (30), получим:

$$\sigma_{yav} = -\int_0^1 \sigma_y^* dx + 0,25a^2 \int_0^{x_F} (x^2 - x_F^2) dx = -(\sigma_y^* + a^2 x_F^3 / 6). \quad (32)$$

Напомним, что σ_y^* вычисляется по формуле (14), x_F – по формуле (17), коэффициент a – по формулам (23) и (24). Значения функции $y = atgd(x)$ при $0 < x < 2,75$ можно найти по формулам (25), (26), а при $x \geq 2,75$ по формуле (27), положив в ней $t = 1/x$.

Данный случай характеризуется условием:

$$\max_{x \in [0; 1]} |\sigma_y^-(x, \kappa)| \leq 2K.$$

В силу (30) это условие можно представить в виде:

$$\sigma_y^* + a^2 x_F^2 / 4 \leq 2K. \quad (33)$$

Второй случай. Предположим, что условие (33) не выполняется, то есть

$$\sigma_y^* + a^2 x_F^2 / 4 > 2K. \quad (34)$$

В этом случае существует отрезок контактной границы HM ($M \in HF$), на котором $\sigma_y^- = 2K$. На участке MF функция напряжений σ_y^- должна иметь такую же структуру, как в первом случае:

$$\sigma_y^- = a^2 (x - x_M)^2 / 4 + C.$$

Для вычисления постоянных x_M и C есть два уравнения:

$$\begin{cases} \sigma_y^-(x_F, \kappa) = -\sigma_y^*, \\ \sigma_y^-(x_M, \kappa) = -2K. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_M = x_F - (2/a) \sqrt{2K - \sigma_y^*}. \quad (35)$$

На отрезке MF

$$\sigma_y^-(x, \kappa) = \frac{a^2}{4} (x - x_M)^2 - 2K = \frac{a^2}{4} \left(x - x_F + \frac{2}{a} \sqrt{2K - \sigma_y^*} \right)^2 - 2K, \quad x \in [x_M; x_F]. \quad (36)$$

Абсцисса x_M точки M положительна по смыслу этого случая. Заметим, что величина x_M , вычисленная по формуле (35), положительна тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (34).

Вычислим критическую нагрузку. Подставив в интеграл (31) выражение (36), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{yav} &= \int_0^1 \sigma_y^-(x, \kappa) dx = -2K x_M + \int_{x_M}^{x_F} \left(\frac{a^2}{4} (x - x_M)^2 - 2K \right) dx - \sigma_y^* (1 - x_F) = \\ &= -2K x_M - \frac{1}{3} (4K + \sigma_y^*) (x_F - x_M) - \sigma_y^* (1 - x_F). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь x_M вычисляется по формуле (35), σ_y^* вычисляется по формуле (14), x_F – по формуле (17), коэффициент a – по формулам (23) и (24). При условии (33) критическая нагрузка вычисляется по формуле (32), а при условии (34) – по формуле (37).

Литература

1. Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Г. Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Издательство иностр. литературы, 1948. – С. 102–113.
2. Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63–67.
3. Остсемин, А.А. О сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Проблемы прочности. – 1990. – № 7. – С. 107–113.
4. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.
5. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
6. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность сварных швов труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 1998. – №4. – С. 16–20.
7. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38–48.
8. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 3. – № 17(150). – С. 36–58.
9. Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – № 6(46). – С. 19–23.
10. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115–124.
11. Дильман, В.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 11–16.
12. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Известия ВУЗов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.
13. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний пластического слоя / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, вып. 5. – С. 2502–2504.
14. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний неоднородного слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2013. – Т. 46. – С. 176–178.
15. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии пластического кольца при растяжении / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109–120.
16. Дильман, В.Л. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Изв. Челябинского научного центра. – 2006. – Вып. 2(32). – С. 1–4.
17. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния пластического слоя с сечением в форме кольцевого сектора / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып. 7. – № 7(62). – С. 13–20.

18. Дильман, В.Л. Прочность механически неоднородных соединений стержней арматуры / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин, Т.В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – № 9. – С. 13–17.

19. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 4. – № 37(170). – С. 65–77.

20. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // Известия ВУЗов. Математика. – 2011. – № 11. – С. 12–22.

21. Дильман, В.Л. Анализ прочности неоднородных сварных швов стержней арматуры / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Вестник машиностроения. – 2015. – № 2. – С. 29–33.

22. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 89–102.

23. Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного твердого тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40(299). – С. 164–168.

24. Носачева, А.И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом / А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 79–84.

25. Дильман, В.Л. Влияние поверхностных дефектов на статическую прочность сварных швов спиральношовных труб / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2004. – № 2. – С. 16–19.

26. Остсемин, А.А. Статическая прочность механически неоднородных сварных соединений с односторонним поверхностным дефектом при вязком разрушении / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – № 10. – С. 9–12.

27. Дильман, В.Л. Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей прослойку их менее прочного материала / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2013. – № 10. – С. 21–24.

Поступила в редакцию 28 сентября 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 11–19*

DOI: 10.14529/mmph150402

THE STRESS STATE OF A STRIP WITH A LAYER UNDER CONSIDERABLE MECHANICAL HETEROGENEITY

V.L. Dil'man¹, A.N. Dheyab²

The stress state of the inhomogeneous strip, containing a rectangular insertion made from a less strong material was investigated under compressive loading with plane deformation during the critical moment of loading. The relationship between the strength characteristics of the basic material and the insert material is assumed to be arbitrary. Explicit analytical expressions to calculate critical loading were obtained.

Keywords: plastic layer; plane deformation; compression; stress state; critical loading.

References

1. Prandtl L. Beispiele der Anwendung des Hencky's theorem zum Gleichgewicht der plastischen Körper. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1923, Bd. 3, no. 6, pp. 401–406.

¹ Dil'man Valeriy Lazzerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: Dilman49@mail.ru

² Dheyab Aus Nidal is Post-graduate Student, Applied mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: Aws.nth@gmail.com

2. Kachanov L.M. *Izv. AN SSSR. Otd. tekhn. nauk. Mekhanika i mashinostroenie*, 1962, no. 5, pp. 63–67. (in Russ.).
3. Ostsemin A.A., Dil'man V.L. Compression of a plastic layer by two rough plates. *Strength of Materials*, 1990, Vol. 22, Issue 7, pp. 1076–1085. DOI: 10.1007/BF00767561
4. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy miagkikh prosloek v neodnorodnikh soedineniyakh* [Mathematical modeling of critical states of soft layers in inhomogeneous joints]. Chelyabinsk, Izdatelskiy tsentr YUrGU Publ., 2011. 276 p. (in Russ.).
5. Dilman V.L. *Matematicheskie modeli napriazhennogo sostoyaniya neodnorodnikh tonkostennikh tsilindricheskikh obolochek* [Mathematical models of stress states of inhomogeneous thin walled cylindrical shells]. Chelyabinsk, Izdatel'stvo YUrGU Publ. 2007. 202 c. (in Russ.).
6. Dilman V.L. Ostsemin A.A. *Khimicheskoe i neftyanoe mashinostroenie*, 1998, no. 4, pp. 16–19.
7. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashi*, 2005, no. 4, pp. 38–48. (in Russ.).
8. Dil'man V.L. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2009, Issue 3, no. 17(150). pp. 36–58. (in Russ.).
9. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*, 2005. Issue 6. no. 6(46). pp. 19–23. (in Russ.).
10. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2001, no. 6. pp. 115–124. (in Russ.).
11. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. The analysis of the stress strain state of a heterogeneous plastic stripe. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2012, Issue 7, no. 34(293), pp. 11–16. (in Russ.).
12. Dil'Man V.L., Karpeta T.V. *Russian Mathematics*, 2013, Vol. 57, no. 8. pp. 29–36. DOI: 10.3103/S1066369X13080045
13. Dilman V.L., Nosacheva A.I. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, Vol. 18, Issue 5. pp. 2502–2504. (in Russ.).
14. Delmann V.L., Nosacheva A.I. *Trudy matematicheskogo tsentra im. N.I. Lobachevskogo*, 2013, Vol. 46, pp. 176–178. (in Russ.).
15. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2002, no. 2. pp. 109–120. (in Russ.).
16. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*, 2006, Issue 2(32). pp. 1–4. (in Russ.).
17. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*, 2006, Issue 7, no. 7(62), pp. 13–20. (in Russ.).
18. Dilman V.L., Ostsemin A.A., Eroshkina T.V. *Russian Engineering Research*. 2008, Vol. 28, no. 9, pp. 849–853. DOI: 10.3103/S1068798X08090037
19. Dilman V.L., Eroshkina T.V. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2009, Issue 4, no. 37(170), pp. 65–77. (in Russ.).
20. Eroshkina T.V., Dil'man V.L. *Russian Mathematics*, 2011, Vol. 55, no. 11, pp. 9–17. DOI: 10.3103/S1066369X11110028
21. Dilman V.L., Karpeta T.V. *Vestnik mashinostroeniya*, 2015, no. 2, pp. 29–33. (in Russ.).
22. Dilman V.L. *Mechanics of Solids*, 2010, Vol. 45, Issue 2, pp. 226–237. DOI: 10.3103/S0025654410020081
23. Dilman V.L., Nosacheva A.I. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, Issue 14, no. 40(299), pp. 164–168. (in Russ.).
24. Nosacheva A.I. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013. Vol. 6, no. 3. pp. 79–84. (in Russ.).
25. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2004, Vol. 40(1–2), pp. 87–93. DOI: 10.1023/B:CAPE.0000024143.53688.ca
26. Dilman V.L., Ostsemin A.A. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2005, Vol. 41(9–10), pp. 522–529. DOI: 10.1007/s10556-006-0012-6
27. Dilman V.L., Karpeta T.V. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2014, Vol. 49(9–10), pp. 668–674. DOI: 10.1007/s10556-014-9816-y

Received September 28, 2015

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ КРИТЕРИИ ПРИ ВЫБОРЕ КОНЦЕПЦИЙ РАВНОВЕСИЯ (НА ПРИМЕРЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ)¹

В.И. Жуковский², Ю.А. Бельских³, С.П. Самсонов⁴

Найдены коэффициентные критерии и явный вид равновесных по Бержу и по Нэшу ситуаций в бескоалиционной игре двух лиц, а также коэффициентные условия отсутствия этих равновесий.

Ключевые слова: бескоалиционная игра двух лиц; матрицы; вектора; равновесие по Нэшу; равновесие по Бержу.

Введение

Те, кто занимался теорией устойчивости по Ляпунову, помнят коэффициентные условия устойчивости. Суть в том, что по знакам коэффициентов дифференциального уравнения, соотношениям между ними иногда можно судить об устойчивости невозмущенного движения. В предлагаемой читателю статье такая же идея осуществлена для линейно-квадратичной бескоалиционной игры двух лиц. Именно по свойствам коэффициентов функций выигрыша решаются два вопроса: а) существует или отсутствует равновесие по Бержу или по Нэшу; б) если существует, то каков его явный вид.

Постановка задачи и вспомогательные сведения

Рассматриваем бескоалиционную линейно-квадратичную игру

$$\Gamma_2 = \left\langle \{1, 2\}, \{X_i = R^{n_i}\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1, x_2)\}_{i=1,2} \right\rangle.$$

Особенность Γ_2 в том, что отсутствуют ограничения на множества стратегий X_i , именно стратегиями i -го игрока могут быть любые n_i -векторы-столбцы x_i (из n_i -мерного евклидова пространства R^{n_i} с обычной евклидовой нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением); функция выигрыша игрока i пусть имеет вид

$$f_i(x_1, x_2) = x_1' A_i x_1 + 2x_1' B_i x_2 + x_2' C_i x_2 + 2a_i' x_1 + 2c_i' x_2, \quad (i=1, 2), \quad (1)$$

где постоянные симметричные матрицы A_i , C_i , прямоугольная B_i и постоянные вектора a_i , c_i соответствующих размерностей; штрих сверху означает операцию транспонирования; $\det A$ означает определитель матрицы A ; далее $A < 0$ ($>$, \leq) означает, что квадратичная форма $z' A z$ определена отрицательно (соответственно положительно, неположительно); будем использовать следующие операции дифференцирования билинейных форм по векторному аргументу [1, с.13–16]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} [x_1' B_i x_2] = B_i x_2 \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_2} [x_1' B_i x_2] = B_i' x_1 \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} [x_1' A_i x_1] = 2A_i x_1 \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} [2a_i' x_1] = 2a_i \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} x_i' A_i x_i = 2A_i;$$

для скалярной функции $\Psi(x)$ и векторного k -мерного аргумента x достаточными условиями реализации $\max_{x \in R^k} \Psi(x) = \Psi(x^*)$ будут

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-90408 Укр_а) и НАН Украины (грант № 03-01-14).

² Жуковский Владислав Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптимального управления, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

³ Бельских Юлия Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет технологий и управления.

E-mail: fozbelskih@rambler.ru

⁴ Самсонов Сергей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптимального управления, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

E-mail: samsonov@cs.msu.ru

$$\begin{aligned} 1) \quad \left. \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} &= \text{grad } \Psi(x) \Big|_{x=x^*} = 0_k, \\ 2) \quad \left. \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x^*} &< 0, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь 0_k – нулевой k -вектор.

Для бескоалиционных игр вида Γ_2 в последние годы получили распространение два вида равновесий по Нэшу и по Бержу.

Игра Γ_2 происходит следующим образом: каждый i -ый игрок, не объединяясь с другим в коалицию, выбирает свою стратегию $x_i \in R^{n_i}$ ($i=1,2$), в результате образуется ситуация $x = (x_1, x_2) \in R^n$ ($n = n_1 + n_2$). На множестве таких ситуаций определены функции выигрыша $f_i(x)$ для i -го игрока, значение которой определяет выигрыш i -го игрока.

Определение. Ситуация $x = (x_1^B, x_2^B)$ называется равновесной по Бержу в игре Γ_2 , если

$$\max_{(x \| x_i^B) \in R^{n-n_i}} f_i(x \| x_i^B) = f_i(x^B) \quad (i=1,2),$$

а ситуация $x = (x_1^e, x_2^e)$ – равновесна по Нэшу, если

$$\max_{x_i \in R^{n_i}} f_i(x^e \| x_i) = f_i(x^e) \quad (i=1,2);$$

здесь $f_1(x \| z_1) = f_1(z_1, x_2)$, $f_2(x \| z_2) = f_2(x_1, z_2)$. Каждое из двух равновесий имеет свои позитивные и негативные свойства [2–4]. Зная коэффициенты в функциях выигрыша (1), выясним какое из равновесий существует, а какое отсутствует, и, если существует, найдем его явный вид.

Равновесная по Бержу ситуация

С учетом (1) и с помощью (3) приходим к следующему достаточному условию существованию равновесной по Бержу ситуации в игре Γ_2 .

Утверждение 1. Пусть в игре Γ_2

$$A_2 < 0, \quad C_1 < 0 \quad (4)$$

и

$$\det [C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2] \neq 0. \quad (5)$$

Тогда равновесная по Бержу ситуация $x = (x_1^B, x_2^B)$ примет вид

$$\begin{aligned} x_1^B &= -A_2^{-1} B_2 [C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2]^{-1} (B_1' A_2^{-1} a_2 - c_1) - A_2^{-1} a_2, \\ x_2^B &= [C_1 - B_1' A_2^{-1} B_2]^{-1} (B_1' A_2^{-1} a_2 - c_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Согласно определению, ситуация $x = (x_1^B, x_2^B)$ равновесия по Бержу игры Γ_2 , формализуется двумя равенствами

$$\begin{aligned} \max_{x_2 \in R^{n_2}} f_1(x_1^B, x_2) &= f_1(x^B), \\ \max_{x_1 \in R^{n_1}} f_2(x_1, x_2^B) &= f_2(x^B). \end{aligned} \quad (7)$$

В силу (3) и (1) достаточные условия реализации первого равенства из (7) сводятся к

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1(x_1^B, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^B} &= 2B_1' x_1^B + 2C_1 x_2^B + 2c_1 = 0_{n_2}, \\ \left. \frac{\partial^2 f_1(x_1^B, x_2)}{\partial x_2^2} \right|_{x_2=x_2^B} &= 2C_1. \end{aligned}$$

Аналогично для второго равенства из (7)

$$\left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2^B)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^B} = 2A_2x_1^B + 2B_2x_2^B + 2a_2 = 0_{n_1},$$

$$\left. \frac{\partial^2 f_2(x_1, x_2^B)}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=x_1^B} = 2A_2.$$

Так как согласно (4), матрицы $C_1 < 0$ и $A_2 < 0$, то ситуация равновесия по Бержу (x_1^B, x_2^B) игры Γ_2 найдется из матричной системы неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} A_2x_1^B + B_2x_2^B = -a_2, \\ B_1'x_1^B + C_1x_2^B = -c_1. \end{cases} \quad (8)$$

Согласно импликации $[A_2 < 0] \Rightarrow [\det A_2 \neq 0] \Rightarrow [\exists A_2^{-1}]$. Умножим первое из (8) слева на A_2^{-1} , откуда сразу получим

$$x_1^B = -A_2^{-1}B_2x_2^B - A_2^{-1}a_2. \quad (9)$$

Подставляя его во второе уравнение из (8), приходим к

$$[C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2]x_2^B = -c_1 + B_1'A_2^{-1}a_2 \quad (10)$$

или

$$x_2^B = [C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2]^{-1} (B_1'A_2^{-1}a_2 - c_1). \quad (11)$$

Здесь учтено, что, согласно (5), будет $(\det [C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2] \neq 0) \Rightarrow (\exists (C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2)^{-1})$, и поэтому, умножая обе части (10) слева на $[C_1 - B_1'A_2^{-1}B_2]^{-1}$, приходим к справедливости (11). Подставляя найденные x_2^B в (9), получим первые равенства из (6). ■

Аналогично, решая систему (8) умножением второго уравнения слева на C_1^{-1} , получаем

Утверждение 2. Пусть в игре Γ_2 выполнены требования (4) и

$$\det [A_2 - B_2C_1^{-1}B_1'] \neq 0. \quad (12)$$

Тогда равновесная по Бержу ситуация $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ имеет вид

$$x_1^B = [A_2 - B_2C_1^{-1}B_1']^{-1} (B_2C_1^{-1}c_1 - a_2),$$

$$x_2^B = -C_1^{-1}B_1' [A_2 - B_2C_1^{-1}B_1']^{-1} (B_2C_1^{-1}c_1 - a_2) - C_1^{-1}c_1.$$

Замечание 1. Система (8) имеет единственное решение при $A_2 < 0$ и $C_1 < 0$. Авторам удалось привести вид одного из них к другому.

Равновесная по Нэшу ситуация

Приведем аналогичные результаты для равновесия по Нэшу. Здесь уже для игры Γ_2 вместо (7) следует использовать равновесную по Нэшу ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$, которая определяется двумя условиями

$$\max_{x_1 \in R^{n_1}} f_1(x_1, x_2^e) = f_1(x^e), \quad \max_{x_2 \in R^{n_2}} f_2(x_1^e, x_2) = f_2(x^e). \quad (13)$$

Достаточными условиями реализации (13) будут

$$\text{grad}_{x_1} f_1(x_1, x_2^e) \Big|_{x_1=x_1^e} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2^e)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^e} = 2A_1x_1^e + 2B_1x_2^e + 2a_1 = 0_{n_1},$$

$$\text{grad}_{x_2} f_2(x_1^e, x_2) \Big|_{x_2=x_2^e} = \left. \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^e} = 2B_2'x_1^e + 2C_2x_2^e + 2c_2 = 0_{n_2},$$

$$\frac{\partial^2 f_1(x_1, x_2^e)}{\partial x_1^2} = 2A_1 < 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2(x_1^e, x_2)}{\partial x_2^2} = 2C_2 < 0.$$

Из первых двух условий получаем матричную систему линейных алгебраических неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} A_1 x_1^e + B_1 x_2^e = -a_1, \\ B_2' x_1^e + C_2 x_2^e = -c_2. \end{cases}$$

С учетом $A_1 < 0$ и $C_2 < 0$, как и в случае утверждений 1 и 2, приходим к справедливости следующих двух утверждений.

Утверждение 3. Пусть в игре Γ_2

$$A_1 < 0, C_2 < 0 \quad (14)$$

и

$$\det [C_2 - B_2' A_1^{-1} B_1] \neq 0. \quad (15)$$

Тогда ситуация равновесия по Нэшу $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ имеет вид

$$x_1^e = -A_1^{-1} B_1 [C_2 - B_2' A_1^{-1} B_1]^{-1} (B_2' A_1^{-1} a_1 - c_2) - A_1^{-1} a_1,$$

$$x_2^e = [C_2 - B_2' A_1^{-1} B_1]^{-1} (B_2' A_1^{-1} a_1 - c_2).$$

Утверждение 4. Пусть в игре Γ_2 выполняются ограничения (14) и

$$\det [A_1 - B_1 C_2^{-1} B_2'] \neq 0. \quad (16)$$

Тогда равновесная по Нэшу ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ имеет вид

$$x_1^e = [A_1 - B_1 C_2^{-1} B_2']^{-1} (B_1 C_2^{-1} c_2 - a_1),$$

$$x_2^e = -C_2^{-1} B_2' [A_1 - B_1 C_2^{-1} B_2']^{-1} (B_1 C_2^{-1} c_2 - a_1) - C_2^{-1} c_2.$$

Критерии отсутствия равновесия

Приведем довольно любопытное утверждение, которое позволяет отсекалть игры, в которых не существует равновесия по Бержу или (и) по Нэшу.

Лемма 1. Если в игре Γ_2 матрица $A_1 > 0$, то не существует \hat{x}_1 , такого, что при каждом фиксированном x_2 имело место бы равенство

$$\max_{x_1 \in R^{n_1}} f_1(x_1, x_2) = f_1(\hat{x}_1, x_2), \quad (17)$$

т.е. в этом случае максимума по $x_1 \in R^{n_1}$ функции $f_1(x_1, x_2)$ не существует.

Доказательство. «Заморозим» какую-либо стратегию $x_2 \in R^{n_2}$ второго игрока. Тогда функцию выигрыша первого игрока можно представить в виде

$$f_1(x_1, x_2) = x_1' A_1 x_1 + 2x_1' \varphi(x_2) + \psi(x_2),$$

где n_1 -вектор-столбец $\varphi(x_2)$ и скалярная величина $\psi(x_2)$ зависят только от «замороженного» x_2 .

По условию леммы матрица $A_1 > 0$ (определенно положительна). Тогда характеристическое уравнение $\det [A_1 - E_{n_1} \lambda] = 0$ (E_{n_1} – единичная $n_1 \times n_1$ -матрица) имеет n_1 вещественных положительных корней (A_1 симметрична) и, кроме того,

$$x_1' A_1 x_1 \geq \lambda^* \|x_1\|^2 \quad \forall x_1 \in R^{n_1}, \quad (18)$$

где $\lambda^* > 0$ наименьший из указанных корней. Максимум в (17) не существует, если, каким бы большим ни было число $m > 0$, существует стратегия $x_1(m, x_2) \in R^{n_1}$, такая, что $f_1(x_1(m, x_2), x_2) > m$. В силу (18) последнее неравенство имеет место, если

$$\lambda^* \|x_1(m, x_2)\|^2 + 2x_1'(m, x_2)\varphi(x_2) + \psi(x_2) > m. \quad (19)$$

Будем искать решение $x_1(m, x_2)$ неравенства (19) в виде

$$x_1(m, x_2) = \beta e_{n_1}, \quad (20)$$

где число $\beta > 0$ построим ниже, а e_{n_1} – вектор размерности n_1 , все компоненты которого равны единице.

Подставляя (20) в (19), получаем для нахождения β неравенство

$$\lambda^* \beta^2 n_1 + 2\beta(e_{n_1}'\varphi(x_2)) + \psi(x_2) - m > 0.$$

Поэтому при любых постоянных

$$\beta > \beta_+ = \frac{|e_{n_1}'\varphi(x_2)| + \sqrt{(e_{n_1}'\varphi(x_2))^2 + \lambda^* n_1 |\psi(x_2) - m|}}{\lambda^* n_1}$$

и стратегиях первого игрока $x_1(m, x_2) = \beta e_{n_1}$ выполнено $f_1(x_1(m, x_2), x_2) > m$ и поэтому максимум в (17) не существует.

Замечание 2. Тогда, с учетом (17) в игре Γ_2 при $A_1 > 0$ не существует равновесной по Нэшу ситуации. Отсюда и из утверждения 1 получаем

1. Если в игре Γ_2 матрицы $A_1 > 0$ или (и) $C_2 > 0$, а также $A_2 < 0$, $C_1 < 0$ и выполнено (5), то в игре Γ_2 не существует равновесие по Нэшу, но существует равновесие по Бержу, причем ситуация равновесия по Бержу имеет вид (6).

Аналогично,

2. Если $A_2 < 0$, $C_1 < 0$, имеет место требование (5) или (12) и $A_1 > 0$ или (и) $C_2 > 0$, то существует равновесие по Бержу, но отсутствует равновесие по Нэшу.

3. Если $A_1 < 0$, $C_2 < 0$, имеет место требование (15) или (16) и $A_2 > 0$ или (и) $C_1 > 0$, то существует равновесие по Нэшу, но отсутствует равновесие по Бержу.

4. Если $A_1 > 0$ или (и) $C_2 > 0$ и $A_2 > 0$ или (и) $C_1 > 0$, то в Γ_2 не существует как равновесия по Нэшу, так и по Бержу.

5. Если $A_2 < 0$, $C_1 < 0$, $A_1 < 0$, $C_2 < 0$ и требования (5) или (12), а также (15) или (16), то в Γ_2 существует как равновесие по Нэшу, так и по Бержу.

Заключение

Итак, рассмотрели линейно-квадратичную бескоалиционную игру двух лиц без ограничений ($X_i \in R^{n_i}$ ($i=1,2$)) и функциями выигрыша

$$f_1(x_1, x_2) = x_1' A_1 x_1 + 2x_1' B_1 x_2 + x_2' C_1 x_2 + 2a_1' x_1 + 2c_1' x_2,$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1' A_2 x_1 + 2x_1' B_2 x_2 + x_2' C_2 x_2 + 2a_2' x_1 + 2c_2' x_2;$$

штрих сверху означает операцию транспонирования, A_i – симметричная постоянная порядка $n_1 \times n_1$ матрица, C_i – симметричная постоянная порядка $n_2 \times n_2$ -матрица, B_i – постоянная прямоугольная $n_1 \times n_2$ матрица, a_i (c_i) – постоянные n_1 (соответственно, n_2)-вектора ($i=1,2$); $A > 0$ ($<$) означает, что квадратичная форма $x' A x$ определено положительна (соответственно, отрицательна); кванторы: \exists – существование, \forall – общности, \neg – отрицание.

С помощью утверждений 1–4 можно также сформулировать *коэффициентные условия* существования равновесий в игре Γ_2 (см. таблицу).

Как пользоваться таблицей?

Шаг 1. Прежде всего, проверить знакоопределенность матриц A_1, A_2, C_1 и C_2 ; пусть, например, матрицы $A_1 < 0$, $C_2 < 0$ (определенно отрицательны), а $A_2 > 0$ (определенно положительна).

Шаг 2. Найти соответствующую строку в таблице (условия $A_1 < 0$, $C_2 < 0$ и $A_2 > 0$ занимают третью строку) и проверить невырожденность соответствующей в 5-ом столбце матрицы (15), т.е. $\det [C_2 - B_2' A_1^{-1} B_1] \neq 0$.

Шаг 3. Сразу из столбцов 6 и 7 таблицы следует, что в такой игре Γ_2 не существует равновесия по Бержу, но имеется равновесие по Нэшу при любых матрицах C_1, B_i соответствующих размерностей и векторах a_i, c_i .

Явный вид такого равновесия по Нэшу приведен в утверждении 3 (см. дополнительный столбец впереди таблицы).

Коэффициентные условия существования равновесий

Утверждение	Существует одно из равновесий					РБ	РН	
1	$A_1 > 0$	$A_2 < 0$	$C_1 < 0$		(5)	\exists	$\neg \exists$	$\forall C_2, B_i, a_i, c_i$
2		$A_2 < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 > 0$	(12)	\exists	$\neg \exists$	$\forall A_1, B_i, a_i, c_i$
3	$A_1 < 0$	$A_2 > 0$		$C_2 < 0$	(15)	$\neg \exists$	\exists	$\forall C_1, B_i, a_i, c_i$
4	$A_1 < 0$		$C_1 > 0$	$C_2 < 0$	(16)	$\neg \exists$	\exists	$\forall A_2, B_i, a_i, c_i$
Не существуют равновесия								
	$A_1 > 0$	$A_2 > 0$				$\neg \exists$	$\neg \exists$	$\forall C_i, B_i, a_i, c_i$
	$A_1 > 0$		$C_1 > 0$			$\neg \exists$	$\neg \exists$	$\forall A_2, C_2, B_i, a_i, c_i$
		$A_2 > 0$		$C_2 > 0$		$\neg \exists$	$\neg \exists$	$\forall A_1, C_1, B_i, a_i, c_i$
			$C_1 > 0$	$C_2 > 0$		$\neg \exists$	$\neg \exists$	$\forall A_1, A_2, B_i, a_i, c_i$
Существуют оба равновесия								
	$A_1 < 0$	$A_2 < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	(5) и (15)	\exists	\exists	$\forall B_i, a_i, c_i$
	$A_1 < 0$	$A_2 < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	(12) и (16)	\exists	\exists	$\forall B_i, a_i, c_i$

Литература

1. Жуковский, В.И. Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – Киев: Наукова Думка, 1994. – 320 с.
2. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Нэшу / В.И. Жуковский. – М.: URSS, 2010. – 168 с.
3. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие Бержа–Вайсмана / В.И. Жуковский. – М.: URSS, 2010. – 174 с.
4. Zhukovskiy, V.I. Lyapunov Functions in Differential Games / V.I. Zhukovskiy. – London: Taylor and Francis, 2003. – 281 p.

Поступила в редакцию 28 сентября 2015 г.

COEFFICIENT CRITERIA IN CHOOSING EQUILIBRIUM CONCEPTIONS (ON THE EXAMPLE OF LINEAR-QUADRATIC GAME OF TWO PERSONS)

V.I. Zhukovskiy¹, Y.A. Bel'skikh², S.P. Samsonov³

Coefficient criteria and an explicit form of Berge and Nash equilibrium situations in a non-cooperative game of two persons as well as coefficient conditions of the equilibrium absence have been found.

Keywords: non-cooperative game of two persons; matrixes; vectors; Nash equilibrium; Berge equilibrium.

References

1. Zhukovskiy V.I., Chikriy A.A. *Lineyno-kvadratichnye differentsial'nye igry* [Linear Quadratic Differential Games]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1994. 320 p. (in Russ.).
2. Zhukovskiy V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie po Neshu* [Introduction to differential games with uncertainty. Nash Equilibrium]. URSS Publ., 2010. 168 p. (in Russ.).
3. Zhukovskiy V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie Berzha–Vaysmana* [Introduction to differential games under uncertainty. Berge–Vaisman Equilibrium]. URSS Publ., 2010. 174 p. (in Russ.).
4. Zhukovskiy V.I. *Lyapunov Functions in Differential Games*. London: Taylor and Francis, 2003. 281 p.

Received September 28, 2015

¹ Zhukovskiy Vladislav Iosifovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Optimal Control Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

² Bel'skikh Julia Anatolievna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Moscow State University of Technologies and Management, Moscow, Russia.

E-mail: fozbelskih@rambler.ru

³ Samsonov Sergey Petrovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optimal Control Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

E-mail: samsonov@cs.msu.ru

ГОЛОМОРФНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.А. Замышляева¹, Дж. К. Аль-Исави²

Интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос, более того, возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. Эта необходимость диктуется не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить неклассические модели математической физики в квазибанаховых пространствах. Заметим еще, что уравнения соболевского типа называются эволюционными, если их решения существуют только на полуоси R_+ . Теория голоморфных вырожденных полугрупп операторов, построенная ранее в банаховых пространствах и пространствах Фреше, переносится в квазисоболевы пространства последовательностей.

Статья содержит четыре параграфа. В первом, имеющем вспомогательное значение, рассматриваются квазибанаховы пространства и определенные на них линейные ограниченные и замкнутые операторы. Также вводятся в рассмотрение квазисоболевы пространства, на которых строятся степени квазиоператора Лапласа. Во втором параграфе в качестве операторов L и M рассмотрены многочлены от квазиоператора Лапласа и получены условия, при которых возникают голоморфные вырожденные полугруппы операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей U и F . Другими словами, доказывается первая часть обобщения теоремы Соломяка – Иосиды на квазибанаховы пространства последовательностей. В третьем параграфе строится фазовое пространство однородного уравнения. В последнем параграфе содержится «квазибанахов» аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера.

Ключевые слова: голоморфные вырожденные полугруппы, квазибанаховы пространства, уравнение Дзекцера, квазисоболевы пространства.

Введение

Пусть U – банахово пространство, $L(U)$ – пространство линейных ограниченных операторов. отображение $U \in C(U; L(U))$ называется полугруппой операторов, если при всех $s, t \in R_+$

$$U^s U^t = U^{s+t}. \quad (1)$$

Обычно полугруппа операторов отождествляется с ее графиком $\{U^t : t \in R_+\}$. Полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ называется голоморфной, если она аналитически продолжима с сохранением свойства (1) в некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий полуось R_+ . Голоморфная полугруппа называется вырожденной, если ее единица $P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t$ является проектором в U .

Впервые голоморфные вырожденные полугруппы операторов появились в [1, 2] как разрешающие полугруппы линейных эволюционных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \quad (2)$$

где оператор $L \in L(U; F)$ (т.е. линейен и ограничен), а оператор $M \in Cl(U; F)$ (т.е. линейен, замкнут и плотно определен), F – еще одно банахово пространство. В [3], гл. 3, изложена полная теория таких полугрупп, в [4] эта теория распространена на пространства Фреше.

¹ Замышляева Алена Александровна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: alzama@mail.ru

² Аль-Исави Джавад К.Т. – аспирант кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: jtahir71@gmail.ru

Уравнения вида (2) впервые появились в работах А. Пуанкаре в конце позапрошлого века, однако систематическое их изучение началось во второй половине прошлого века с работ С.Л. Соболева (см. в [5] прекрасный исторический обзор). Поскольку интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос (см. например, монографии [6–9]), то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. Причем необходимость диктуется не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить неклассические модели математической физики [10] в квазибанаховых пространствах [11]. Заметим еще, что уравнения соболевского типа (2) называются динамическими, если их решения продолжимы на всю ось R , и эволюционными, если их решения существуют только на полуоси R_+ [12].

Статья кроме введения и списка литературы содержит четыре параграфа. В первом, имеющем вспомогательное значение, рассматриваются квазибанаховы пространства и определенные на них линейные ограниченные и замкнутые операторы. Также вводятся в рассмотрение квазисоболевы пространства, на которых строятся степени квазиоператора Лапласа. Во втором параграфе показано, при каких условиях на операторы L и M возникают голоморфные вырожденные полугруппы операторов в квазибанаховых пространствах U и F . Другими словами, доказывается первая часть обобщения теоремы Соломыка–Иосиды на квазибанаховы пространства. В последнем параграфе содержится «квазибанахов» аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекера (см., например, [1, 9, 13])

$$(\lambda - \Delta)u_t = \beta \Delta u - \alpha \Delta^2 u + f$$

с начальным условием Шоултера–Сидорова [14]. Список литературы не претендует на полноту, а отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

1. Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах

Пусть U – линеал над полем R . Упорядоченная пара $(U, {}_U\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если функция ${}_U\|\cdot\|: U \rightarrow R$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) ${}_U\|u\| \geq 0$ при всех $u \in U$, причем ${}_U\|u\| = 0$ точно тогда, когда $u = O$, где O – нуль линеала U ;

(ii) ${}_U\|\alpha u\| = |\alpha| {}_U\|u\|$ при всех $u \in U$, $\alpha \in R$;

(iii) ${}_U\|u + v\| = C({}_U\|u\| + {}_U\|v\|)$ при всех $u, v \in U$, где константа $C \geq 1$.

Функция ${}_U\|u\|$ со свойствами (i)–(iii) называется *квазинормой*. Очевидно, что в случае $C = 1$ эта функция будет нормой.

Квазибанаховым пространством называется метризуемое полное квазинормированное пространство. Хорошо известным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q , $q \in (0, 1)$ (при $q \in [1, +\infty)$ пространства ℓ_q – банаховы). Пусть здесь и далее $\{\lambda_k\} \subset R_+$ – монотонная последовательность, такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. *Квазисоболевым* называется квазибанахово пространство

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\lambda_k^2 |u_k|} \right)^q < +\infty \right\}$$

с квазинормой ${}_q^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\lambda_k^2 |u_k|} \right)^q \right)^{1/q}$, $m \in R$. Очевидно, что при $q \in [1, +\infty)$ пространства

ℓ_q^m – банаховы; $\ell_q^0 = \ell_q$, а также имеют место плотные и непрерывные вложения ℓ_q^n в ℓ_q^m при $n \geq m$ и $q \in R_+$.

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L:U \rightarrow F$ называется непрерывным, если $\lim_{k \rightarrow \infty} Lu_k = L\left(\lim_{k \rightarrow \infty} u_k\right)$ для любой последовательности $\{u_k\} \subset U$, сходящейся в U . Нетрудно показать, что линейный оператор $L:U \rightarrow F$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Линеал $L(U;F)$ линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой $_{L(U;F)}\|L\| = \sup_{\|u\|=1} \|Lu\|$, где $_{U}\|\cdot\|$ ($_{F}\|\cdot\|$) – квазинорма в U (F). Последовательность $\{L_k\} \subset L(U;F)$ называется сильно сходящейся к оператору $L \in L(U;F)$, если для любого $u \in U$ выполнено $_{F}\|L_k u - Lu\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$; и равномерно сходящейся, если $_{L(U;F)}\|L_k - L\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Теорема 1.1 (аналог теоремы Банаха–Штейнгауза). Последовательность $\{L_k\} \subset L(U;F)$ равномерно сходится к оператору $L \in L(U;F)$ на некотором линеале U^0 плотном в U точно тогда, когда

- (i) последовательность $\{L_k\}$ ограничена;
- (ii) последовательность $\{L_k\}$ сильно сходится к L на U^0 .

Линейный оператор $L:U \rightarrow F$ называется замкнутым, если его график $graphL = \{(u, f) \in U \times F : f = Lu\}$ замкнут по квазинорме $_{graphL}\|u\| = _U\|u\| + _F\|Lu\|$.

Теорема 1.2. Если оператор $L \in L(U;F)$, то L – замкнутый оператор.

Теорема 1.3. Пусть линейный оператор $L:U \rightarrow F$ замкнут и область определения $domL = U$. Тогда $L \in L(U;F)$.

Теорема 1.4. Пусть оператор $L:U \rightarrow F$ замкнут и существует оператор $L^{-1}:F \rightarrow U$. Тогда L^{-1} – замкнутый оператор.

Линейный оператор $L:U \rightarrow F$ называется плотно определенным, если замыкание линеала $domL = U$. Линеал замкнутых плотно определенных операторов обозначим символом $Cl(U;F)$.

Пример 1.1. Пусть $U = \ell_q^{m+2}, F = \ell_q^m; Q_n(\lambda)$ – многочлен степени n . Рассмотрим оператор $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}, n \in N$, где $\{u_k\} \subset U$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset R_+$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $Q_n(\Lambda) \in Cl(U;F), domQ_n(\Lambda) = \ell_q^{m+2n}$, причем $Q_n(\Lambda): \ell_q^{m+2n} \rightarrow \ell_q^m$ – тоplineйный изоморфизм.

2. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, операторы $L \in L(U;F)$ и $M \in Cl(U;F)$, следуя [1, 2], введем в рассмотрение L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in L(F;U)\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M . Как нетрудно видеть, множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L -спектр оператора M всегда замкнут.

Определение 2.1. Оператор M называется (L, p) -секториальным, $p \in \{0\} \cup N$, если

- (i) существуют константы $a \in R$ и $\theta \in (\pi/2; \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\theta}^L(M) = \{\mu \in C : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu > a\} \subset \rho^L(M);$$

- (ii) существует константа $K \in R_+$ такая, что

$$\max \left\{ _{L(U)}\|R_{(\mu,p)}^L(M)\|, _{L(F)}\|L_{(\mu,p)}^L(M)\| \right\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p |\mu_k - a|}$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a,\theta}^L(M)$. Здесь $R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}^L(M)$ – правая и $L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\mu_k}^L(M)$ – левая (L, p) -резольвенты оператора M , а в свою очередь, $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – правая и левая L -резольвенты оператора M .

Пусть $U = \ell_q^{m+2n}$, $F = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, степени n и s , соответственно, ($n < s$), не имеющие общих корней. Построим операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$ как в примере 1.1. Нетрудно показать, что L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек $\mu_k = R_s(\lambda_k)(Q_n(\lambda_k))^{-1}$, $k \in N$: λ_k – не корень многочлена $Q_n(\lambda)$, с учетом их кратности. Покажем, что оператор M (L, p) -секториален. Действительно, при всех $k \in N$, λ_k , не являющихся корнями многочлена $Q_n(\lambda)$, точки $\sigma^L(M)$ лежат во множестве R , причем $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = -\infty$ при отрицательном отношении старших коэффициентов многочленов $Q_n(\lambda)$, $R_s(\lambda)$, что гарантирует выполнение условия (i) из определения 2.1. Далее

$$R_{\mu}^L(M) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \mu_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N: k \neq \ell} (\mu - \mu_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существуют } \ell \in N: \lambda_{\ell} \text{ – корень } Q_n(\lambda). \end{cases}$$

Здесь $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где единица стоит на k -том месте. Если взять $a > \max\{\mu_k\}$, то выполнение (ii) определения 2.1 очевидно. Для левой L -резольвенты $L_{\mu}^L(M)$ оператора M это условие проверяется аналогично.

Пусть V – квазибанахово пространство, $L(V)$ – пространство линейных ограниченных операторов. Отображение $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+; L(V))$ называется *полугруппой операторов*, если

$$V^s V^t = V^{s+t} \text{ при всех } s, t \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Как и выше, отождествим полугруппу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и назовем *голоморфной*, если она аналитически продолжима с сохранением свойства (3) в некоторый сектор, содержащий \mathbb{R}_+ .

Теорема 2.1. Пусть операторы M и L определены, как выше. Тогда операторы L и M порождают на пространствах U и F голоморфные полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ соответственно, которые к тому же имеют вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \in L(U) \text{ и } F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \in L(F) \quad (4)$$

при $t \in \mathbb{R}_+$, где контур $\Gamma \subset \rho^L(M)$ таков, что $|\arg \mu| \rightarrow \theta$ при $\mu \rightarrow \infty$, $\mu \in \Gamma$.

Приведем набросок доказательства. Прежде всего заметим, что оператор M $(L, 0)$ -секториален и интегралы U^t и F^t равномерно сходятся на любом компакте, содержащемся в секторе $\{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \theta - \frac{\pi}{2}\} = S_{\theta}$. Свойство (3) проверяется аналогично «банахову» случаю (см. напр., [1–3, гл. 3]) при всех $s, t \in S_{\theta}$. Более того, полугруппа U^t представима в виде

$$U^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N: k \neq \ell} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существует } \ell \in N: \lambda_{\ell} \text{ – корень } Q_n(\lambda). \end{cases}$$

Голоморфная полугруппа $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ строится аналогично. Теорема доказана.

Далее, голоморфную полугруппу $\{V^t : t \in R_+\}$ назовем *вырожденной*, если ее единица $V^0 = s - \lim_{t \rightarrow 0+} V^t$ является проектором в пространстве V . Кроме того, заметим, что в определении

2.1 можно положить $a = 0$ ввиду замены $u(t) = e^{at}v(t)$ в (2) и переобозначения $M := M - aL$. Считая, что замена и переобозначение проведены, положим $S_{a,\theta}^L(M) = S_\theta^L(M)$.

Определение 2.2. Оператор M называется *сильно (L, p) -секториальным справа (слева)*, $p \in \{0\} \cup N$, если он (L, p) -секториален и

$$U \left\| R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu \right\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{k=0}^p |\mu_k|} \text{ при всех } u \in U,$$

где $\text{const} = \text{const}(u)$ (существует линейал F^0 плотный в F и такой, что

$$F \left\| M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M)f \right\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{k=0}^p |\mu_k|} \text{ при всех } f \in F^0,$$

где $\text{const} = \text{const}(f)$); при любых $\lambda, \mu_k \in S_\theta^L(M)$, $k = 0, \dots, p$.

Теорема 2.2. Пусть операторы M и L определены, как выше. Тогда голоморфная полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ ($\{F^t : t \in R_+\}$) вырождена.

Доказательство аналогично банахову случаю и очень трудоемко (см. напр., [3, гл. 3]). Поэтому приведем только его схему. Сначала, основываясь на (L, p) -секториальности оператора M , показывается, что ядро $\ker R_{(\mu,p)}^L(M) = U^0$ и замыкание образа $\overline{\text{im} R_{(\mu,p)}^L(M)} = U^1$ не зависят от $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p)$, $\mu_k \in S_\theta^L(M)$. Затем доказывается, что $U^0 = \ker U^t$ при всех $t \in R_+$ и $u = \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u$ при всех $u \in U^1$. Таким образом, учитывая сильную (L, p) -секториальность оператора M справа, получим существование проектора

$$P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t = \begin{cases} I, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ I - \sum_{k \in N: k=\ell} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существует } \ell \in N: \lambda_\ell - \text{корень } Q_n(\lambda). \end{cases}$$

Проектор $Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t$ получается аналогично. Отметим еще, что здесь и на предыдущем этапе главную роль играет теорема 1.1. (Существование проектора $Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t$ доказывается аналогично). Теорема доказана.

Главным следствием сильной (L, p) -секториальности оператора M справа (слева) является расщепление пространства

$$U = U^0 \oplus U^1 \quad (F = F^0 \oplus F^1), \tag{5}$$

где $U^0(F^0)$ – ядро проектора $P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t$ ($Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t$), а $U^1(F^1)$ – его образ. Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на U^k ($\text{dom} M \cap U^k$), $k = 0, 1$.

Следствие 2.1. Пусть операторы M и L определены, как выше. Тогда операторы $L_k \in L(U^k; F^k)$, $M_k \in Cl(U^k; F^k)$, $k = 0, 1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in L(F^0; U^0)$.

Доказательство аналогично банахову случаю (см. напр., [3, гл. 3]), при этом

$$M_0^{-1} = \begin{cases} O, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N: \lambda_k - \text{корень } Q_n(\lambda)} (R_s(\lambda_k))^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k. \end{cases}$$

Следствие доказано.

Положим $H = M_0^{-1}L_0$ ($G = L_0M_0^{-1}$), очевидно, $H \in L(U^0)$ ($G \in L(F^0)$).

Следствие 2.2. В условиях следствия 2.1 оператор $H (G)$ нильпотентен степени 0.

Определение 2.3. Оператор M называется *сильно (L, p) -секториальным*, $p \in \{0\} \cup N$, если он сильно (L, p) -секториален слева и

$${}_{L(F;U)}\|(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M)\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod_{k=0}^p |\mu_k|}$$

при любых $\lambda, \mu_k \in S_{\theta}^L(M)$, $k = 0, \dots, p$ и некоторой $\text{const} \in R_+$.

Заметим, что сильно (L, p) -секториальный оператор M , очевидно, сильно (L, p) -секториален справа.

Теорема 2.3. Пусть операторы M и L определены, как выше. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in L(F^1; U^1)$.

Доказательство аналогично «банахову» случаю (см. напр., [3, гл. 3]), при этом

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N: k \neq \ell} (\lambda - \lambda_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если существует } \ell \in N: \lambda_{\ell} - \text{корень } Q_n(\lambda). \end{cases}$$

Конец доказательства.

Построим операторы $S = L_1^{-1} M_1: \text{dom} M \cap U^1 \rightarrow U^1$ и $T = M_1 L_1^{-1}: M[\text{dom} M] \cap F^1 \rightarrow F^1$.

Нетрудно показать, что $S \in Cl(U^1)$, а $T \in Cl(F^1)$.

Следствие 2.3. В условиях теоремы 2.3 операторы S и T – секториальны.

Замечание 2.1. Подчеркнем, что из сильной (L, p) -секториальности оператора M следует

- существование голоморфных вырожденных полугрупп $\{U^t: t \in R_+\}$ и $\{F^t: t \in R_+\}$ из (4);
- существование их единиц – проекторов $P \in L(U)$ и $Q \in L(F)$, благодаря которым квазибанаховы пространства U и F расщепляются в прямые суммы (5);
- расщепление действий операторов $L_k \in L(U^k; F^k)$, $M_k \in Cl(U^k; F^k)$, $k = 0, 1$ и существование операторов $M_0^{-1} \in L(F^0; U^0)$, $L_1^{-1} \in L(F^1; U^1)$;
- нильпотентность операторов H, G и секториальность операторов S, T .

Именно эти утверждения мы называем *обобщением прямой теоремы Соломыка–Иосиды* на квазибанаховы пространства.

3. Эволюционные уравнения соболевского типа

Пусть U и F – квазибанаховы пространства; $\{U^t: t \in R_+\}$ и $\{F^t: t \in R_+\}$ – голоморфные вырожденные полугруппы операторов, определенные на пространствах U и F соответственно. Тогда существуют проекторы $P = s - \lim_{t \rightarrow 0+} U^t$ и $Q = s - \lim_{t \rightarrow 0+} F^t$, которые расщепляют пространства U и F в прямые суммы $U = U^0 \oplus U^1$, и $(F = F^0 \oplus F^1)$, где $U^0 = \ker P$, $U^1 = \text{im} P$, $F^0 = \ker Q$, $F^1 = \text{im} Q$.

Пусть U и F – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L \in L(U; F)$ и $M \in Cl(U; F)$ построены в п. 2. Рассмотрим линейное эволюционное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \quad (6)$$

Вектор-функцию $u \in C^1(R_+; U)$, удовлетворяющую (6) поточечно, назовем (*классическим*) решением этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (6) назовем *решением ослабленной задачи Коши* (по С.Г. Крейну), если вдобавок для некоторого $u_0 \in U$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0. \quad (7)$$

Определение 3.1. Множество $P \subset U$ называется *фазовым пространством* уравнения (6), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (6) лежит в P поточечно, т.е. $u(t) \in P$ при любом $t \in R_+$;

(ii) при любом $u_0 \in P$ существует единственное решение задачи (6), (7).

Теорема 3.2. Пусть операторы M и L определены, как в п.2. Тогда фазовым пространством уравнения (6) служит подпространство U^1 .

Доказательство. Во-первых, уравнение (6), ввиду замечания 2.1, редуцируется к эквивалентной системе

$$0 = u^0, \quad \dot{u}^1 = Su^1, \quad u^1 = Pu, \quad u^0 = u - u^1. \quad (8)$$

Во-вторых, для второго уравнения (8) при любом $u_0^1 \in U^1$ существует единственное решение $u^1(t) = e^{tS} u_0^1$ задачи $\lim_{t \rightarrow 0+} u^1(t) = u_0^1$, где

$$e^{tS} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu I - S)^{-1} e^{t\mu} d\mu, \quad t \in R_+,$$

а контур Γ такой же, как в теореме 2.1.

Таким образом, при любых $m \in R$ и $q \in R_+$ фазовым пространством уравнения (6) будет подпространство

$$U^1 = \begin{cases} U, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ при всех } k \in N; \\ \{u \in U : u_k = 0, & \text{если } \lambda_k \text{ - корень } Q_n(\lambda)\}. \end{cases}$$

4. Модель Дзекцера в квазисоболевых пространствах

Пусть U и F – квазибаначовы пространства последовательностей, операторы $L \in L(U; F)$ и $M \in Cl(U; F)$ таковы, как в п. 2. Тогда оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален. Рассмотрим ослабленную (в смысле С.Г. Крейна) задачу Шоултера–Сидорова

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P(u(t) - u_0) = 0 \quad (9)$$

для линейного неоднородного эволюционного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad (10)$$

где вектор-функция $f : [0, \tau] \rightarrow U$, $f = f^0 + f^1$, $f^1 = Qf$, $f^0 = f - f^1$ будет определена ниже, $\tau \in R_+$.

Теорема 4.1. Для любой вектор-функции $f = f(t)$, такой, что $f^0 \in C^1((0, \tau); F^0)$ и $f^1 \in C((0, \tau); F^1)$, и любого вектора $u_0 \in U$ существует единственное решение $u \in C^1((0, \tau); U)$ задачи (9) для уравнения (10), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = -M_0^{-1} f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds. \quad (11)$$

Доказательство. Действительно, факт, что $u = u(t)$ удовлетворяет уравнению (10) и условию (9), устанавливается непосредственной проверкой. Единственность вытекает из теоремы 3.2. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим уравнение Дзекцера

$$(\lambda - \Lambda)u_t = (\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda)u + f, \quad \lambda, \beta \in R, \quad \alpha \in R_+ \quad (12)$$

в квазисоболевых пространствах $U = \ell_q^{m+2}$ и $F = \ell_q^m$, $m \in R$, $q \in R_+$. Зададим область определения $\text{dom}(\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda) = \ell_q^{m+4}$. В силу теоремы 4.1 имеет место

Следствие 4.1. При любых $m, \lambda, \beta \in R$, $\tau, q, \alpha \in R_+$, $u_0 \in U$, $f^0 \in C^1((0, \tau); F^0)$ и $f^1 \in C((0, \tau); F^1)$ существует единственное решение $u \in C^1((0, \tau); U)$ задачи (9), (12), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = -M_0^{-1} f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds.$$

Здесь

$$F^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \{f \in F : f_k = 0, k \in N \setminus \{\ell : \lambda_\ell = \lambda\}\}, & \end{cases}$$

$$F^1 = \begin{cases} F, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \{f \in F : f_k = 0, \lambda_k = \lambda\}, & \end{cases}$$

$$M_0^{-1} = \begin{cases} O, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N : \lambda_k = \lambda} (\alpha \lambda_k^2 + \beta \lambda_k)^{-1} e_k. & \end{cases}$$

$$U^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N : k \neq \ell} e^{\mu_k t} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{существует } \ell \in N : \lambda_\ell = \lambda. \end{cases}$$

где $\mu_k = (\alpha \lambda_k^2 + \beta \lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^{-1}$.

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in N; \\ \sum_{k \in N : k \neq \ell} (\lambda - \lambda_k)^{-1} \langle \cdot, e_k \rangle e_k, & \text{существует } \ell \in N : \lambda_\ell = \lambda. \end{cases}$$

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
2. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
4. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160. DOI: 10.4213/sm841.
5. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
6. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
7. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
8. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
9. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
10. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40(299). – С. 7–18.
11. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.
12. Свиридюк, Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 304, № 2. – С. 301–304.

13. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 323–330.

14. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

Поступила в редакцию 12 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 27–36

DOI: 10.14529/mmph150404

HOLOMORPHIC DEGENERATE OPERATOR SEMIGROUPS AND EVOLUTIONARY SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN QUASI-SOBOLEV SPACES OF SEQUENCES

A.A. Zamyshlyeva¹, J.K.T. Al-Isawi²

The interest to Sobolev type equations has significantly increased recently, moreover, the need occurred to consider them in quasi-Banach spaces. This need is explained not by the desire to enrich the theory but rather by the aspiration to comprehend non-classical models of mathematical physics in quasi-Banach spaces.

It should be noted that Sobolev type equations are called evolutionary, provided their solutions exist only on R_+ . The theory of holomorphic degenerate semigroups of operators constructed earlier in Banach and Frechet spaces is transferred to quasi-Sobolev spaces of sequences.

Besides the introduction and references the paper contains four paragraphs. In the first, quasi-Banach spaces and linear bounded and closed operators defined on them are considered. Quasi-Sobolev spaces and powers of the Laplace quasi-operator are also taken into consideration. In the second paragraph polynomials of the Laplace quasi-operator are considered for operators L and M and conditions for the existence of degenerate holomorphic operator semigroups in quasi-Banach spaces of sequences are obtained. In other words, the first part of the generalization of the Solomyak–Iosida theorem to quasi-Banach spaces of sequences is stated. In the third paragraph the phase space of the homogeneous equation is constructed. The last paragraph investigates the "quasi-Banach" analogue of the homogeneous Dirichlet problem in a bounded domain with a smooth boundary for the linear Dzekhtser equation.

Keywords: holomorphic degenerate semigroups; quasi-Banach spaces; Dzekhtser equation; quasi-Sobolev spaces.

References

1. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390
2. Sviridyuk G.A. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 5, pp. 1109–1126.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003. 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501
4. Fedorov V.E. Holomorphic Solution Semigroups for Sobolev-type Equations in Locally Convex Spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2004, Vol. 195, no. 8, pp. 1205–1234. DOI: 10.1070/SM2004v195n08ABEH000841

¹ Zamyshlyeva Alyona Aleksandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: alzama@mail.ru

² Jawad K.T. Al-Isawi is Post-graduate student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: jtahir71@gmail.ru

5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433
6. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations*. Moscow, FizMatLit Publ., 2007. 736 p. (in Russ.).
7. Zamyshlyayeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of the High Order*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 107 p. (in Russ.).
8. Manakova N.A. *Problems of Optimal Control For the Semi-linear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 88 p. (in Russ.).
9. Sagadeeva M.A. *Dichotomies of Solutions of Linear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 139 p. (in Russ.).
10. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, Issue 14, no. 40(299), pp. 7–18. (in Russ.).
11. Al-Delfi J.K. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2013, Vol. 5, no. 1, pp. 107–109. (in Russ.).
12. Sviridyuk G.A. *Doklady Akademii Nauk*, 1989, Vol. 304, no. 2, pp. 301–304. (in Russ.).
13. Sviridyuk G.A., Sukhanova M.V. *Differential Equations*, 1992, Vol. 28, no. 3, pp. 323–330. (in Russ.).
14. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seria: Matematika*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

Received September 12, 2015

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер¹, А.А. Эбель²

Приведено точное и приближенное решения задач смешанного управления. Подробно представлен алгоритм численного метода решения задачи смешанного управления, доказана сходимости приближенных решений к точному. Используются методы теории вырожденных (полу)групп, теории оптимального управления. Отмечается значимость введенного функционала качества, вид которого позволяет решать прикладные задачи в экономике и технике.

Ключевые слова: задачи смешанного управления; системы леонтьевского типа; численное решение.

Введение

Системы леонтьевского типа являются частным конечномерным случаем уравнений соболевского типа. Задача оптимального управления для уравнений соболевского типа впервые была поставлена и исследована в работах Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова, например [1]. В этих первых работах было доказано существование единственного решения указанной задачи с начальным условием Коши для случаев относительной ограниченности и относительной секториальности оператора.

Исследованиям задач оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа в случае относительно радиальных операторов посвящены работы В.Е. Федорова и М.В. Плехановой, например [2]. Подчеркнем, что в работах этих авторов используется подход, предложенный Г.А. Свиридюком в работе [1] и развитый в [3]. Затем, исследования задач оптимального управления для уравнений соболевского типа велись по ряду направлений. Достаточные условия разрешимости задачи оптимального управления для некоторых полулинейных уравнений соболевского типа с начальным условием Шоултера–Сидорова получены Н.А. Манаквой [4]. Исследованию задач оптимального управления для уравнений соболевского типа высокого порядка посвящены работы А.А. Замышляевой, например [5]. В работе М.А. Сагадеевой и Келлер А.В. [6] доказано существование и единственность решения задачи оптимального управления Шоултера–Сидорова для нестационарного уравнения соболевского типа с сильно (L, p) -радиальным оператором.

Вместе с тем системы леонтьевского типа (или алгебро-дифференциальные системы, или дифференциально-алгебраические системы) представляют самостоятельный научный интерес в связи с большим числом приложений в экономике [7], технике [8, 9], биологии [10] и др. Алгоритмы численного решения класса задач оптимального управления для систем леонтьевского типа были разработаны в [11]. Важную роль в этих алгоритмах играет начальное условие Шоултера–Сидорова, которое, с одной стороны, сняло требование согласования начальных данных (что было необходимо при использовании условия Коши и часто при большой размерности матриц оказывалось нереализуемым требованием), с другой стороны, оказалось в ряде приложений более естественным условием, чем условие Коши [12]. Построенные алгоритмы были применены как в численном исследовании указанных приложений [7–10], так и придали импульс новым исследованиям стохастических систем леонтьевского типа и стохастических сигналов [13, 14].

Задача смешанного управления для уравнения соболевского типа рассмотрена А.Ф. Исламовой в [15]. Будем рассматривать задачи смешанного управления для систем леонтьевского типа с функционалом, отличным от предложенного в работе [15], так как по мнению ав-

¹ Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: Kellerav@susu.ac.ru

² Эбель Андрей Александрович – аспирант, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: Ebelaa@susu.ac.ru

торов этой статьи введенный ими функционал имеет более естественный экономический смысл, что обеспечивает решение прикладных экономических задач. Более того, преимуществом рассмотрения задачи смешанного управления в сравнении с задачами стартового и оптимального управления является более гибкое регулирование управляющего воздействия.

Точное решение задач смешанного управления

Введем в рассмотрение пространства состояний и управлений:

$$H^1(\mathcal{X}) = \{x \in L_2((0; \tau); \mathcal{X}) : \dot{x} \in L_2((0; \tau); \mathcal{X})\};$$

$$\mathcal{U} = H^{p+1}(\mathcal{Y}) = \{u \in L_2((0; \tau); \mathcal{Y}) : u^{(p+1)} \in L_2((0; \tau); \mathcal{Y})\}, \quad \mathcal{U}^0 = \mathcal{Y}.$$

Выделим в \mathcal{U} и \mathcal{U}^0 компактные и выпуклые множества допустимых управлений: $\mathcal{U}_{ad}, \mathcal{U}_{ad}^0$.

Рассмотрим задачу смешанного управления $\min_{(u_0, u) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}} J(u_0, u)$

$$J(u_0, u) = \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Cx^{(q)}(u_0, u, t) - Cx_0^{(q)}(t)\| dt + \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle dt + \gamma \|u_0\|^2, \quad (1)$$

для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t) \quad (2)$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$\left[R_\mu^L(M) \right]^{p+1} (x(0) - u_0) = 0, \quad (3)$$

где $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – правая L -резольвента оператора, функции $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ лежат в гильбертовых пространствах \mathcal{X} , \mathcal{U} , \mathcal{Y} соответственно, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ($\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ – множество линейных непрерывных операторов, действующих из пространства \mathcal{X} в пространство \mathcal{Y}), $\ker L \neq \{0\}$ и $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (замкнутый оператор $M: \text{dom } M \rightarrow \mathcal{Y}$ с областью определения, плотной в \mathcal{X}), $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, причем оператор M сильно (L, p) -радиален [3], при этом $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\theta = 0, 1, \dots, p+1$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $t \in (0; \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0\}$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ – положительно определенные и самосопряженные операторы.

Определение 1. Тройку $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ назовем решением задачи смешанного управления (1)–(3), если

$$J(v_0, v) = \min_{(u_0, u) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}} J(u_0, u),$$

где $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ удовлетворяют (2), (3).

В [16] доказано существование единственного решения задачи смешанного управления (1)–(3), т.е. справедлива

Теорема 1. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любого $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$ существует единственное сильное решение $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ для задачи смешанного оптимального управления (1)–(3).

Для численного исследования различных прикладных математических моделей, сводящихся к решению задач смешанного управления для систем леонтьевского типа (конечномерному аналогу уравнений соболевского типа), будем использовать пространства состояний и управлений:

$$\mathcal{X} = H^1(\mathbb{R}^n) = \{x \in L_2((0; \tau); \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0; \tau); \mathbb{R}^n)\};$$

$$\mathcal{U} = H^{p+1}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_2((0; \tau); \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0; \tau); \mathbb{R}^n)\}, \quad \mathcal{U}^0 = \mathbb{R}^n,$$

выделяя в \mathcal{U} и \mathcal{U}^0 компактные и выпуклые множества допустимых управлений: $\mathcal{U}_{ad}, \mathcal{U}_{ad}^0$.

Пусть M и L – квадратные матрицы $n \times n$, причем $\det L = 0$, матрица M (L, p) -регулярна ($\exists \lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda L - M) = 0 \quad \exists p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L -резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую точку и равна порядку полюса в противном случае).

Используя результаты разрешимости задачи Шоуолтера–Сидорова для системы леонтьевского типа [3] и

Теорема 2. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем $\det M \neq 0$. Тогда существует единственное решение $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ – точка минимума функционала (4), а $x(v_0, v(t))$ – сильное решение задачи (2), (3) и определяется формулой

$$x(v_0, v(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(v_0, v(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[X_k^t v_0 - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1}(I - Q_k)L \right)^q M^{-1}(I - Q_k)(y(t) + Bv(t))^{(q)} + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k (y(s) + Bv(s)) ds \right], \quad (4)$$

где

$$X_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^k, \quad Q_k = \left(kL_k^L(M) \right)^{p+1}, \quad R_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k-1} \cdot \left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1}.$$

Сходимость. Свойства функционала

Рассмотрим функционал качества (1) на компактных выпуклых множествах $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_{ad}^0 \subset \mathcal{U}^0$. По построению функционал качества (1) является непрерывной функцией, на основании теоремы Вейерштрасса для непрерывных функций на компакте он будет ограничен на $\mathcal{W}_{ad} = \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}^0$ функцией. При исследовании на сходимость важным является свойство выпуклости функции.

Определение 2. Функция $J(w)$ называется сильно выпуклой на выпуклом множестве $A \subset H$ (H – гильбертово пространство), если для любых $w_1, w_2 \in A$, для любого $\omega \in [0, 1]$ и для некоторого числа $T > 0$ выполняется неравенство

$$J(\omega w_1 + (1 - \omega)w_2) \leq \omega J(w_1) + (1 - \omega)J(w_2) - \omega(1 - \omega)T \|w_1 - w_2\|^2.$$

Теорема 3. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, а множества $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_{ad}^0 \subset \mathcal{U}^0$ – компактны и выпуклы. Тогда функционал (4) является сильно выпуклой функцией на $\mathcal{W}_{ad} = \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}^0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $J(\omega w_1 + (1 - \omega)w_2)$ для (1) и проведем тождественные преобразования

$$\begin{aligned} J(\omega w_1 + (1 - \omega)w_2) &= \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(\omega w_1 + (1 - \omega)w_2, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \\ &+ \beta \sum_{q=0}^\theta \int_0^\tau \left\langle N_q(\omega u_1 + (1 - \omega)u_2)^{(q)}(t), (\omega u_1 + (1 - \omega)u_2)^{(q)}(t) \right\rangle dt + \gamma \left\| \omega u_{01} + (1 - \omega)u_{02} \right\|^2 = \\ &= \alpha \omega \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(w_1, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \alpha(\omega^2 - \omega) \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(w_1, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \\ &\quad + \alpha(1 - \omega) \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(w_2, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \\ &\quad + \alpha \left((1 - \omega)^2 - (1 - \omega) \right) \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(w_2, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \\ &\quad + 2\alpha\omega(1 - \omega) \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\langle Cx^{(q)}(w_1, t) - Cx_0^{(q)}(t), Cx^{(q)}(w_2, t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\rangle dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\beta\omega\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_1^{(q)}(t), u_1^{(q)}(t) \rangle dt + \beta(\omega^2 - \omega)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_1^{(q)}(t), u_1^{(q)}(t) \rangle dt + \\
 & +\beta(1-\omega)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_2^{(q)}(t), u_2^{(q)}(t) \rangle dt + \beta((1-\omega)^2 - (1-\omega))\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_2^{(q)}(t), u_2^{(q)}(t) \rangle dt + \\
 & +2\beta\omega(1-\omega)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_1^{(q)}(t), u_1^{(q)}(t) \rangle dt + \\
 & +\gamma\omega^2\|u_{01}\|^2 + 2\gamma\omega(1-\omega)\langle u_{01}, u_{02} \rangle + \gamma(1-\omega)^2\|u_{02}\|^2 = \omega J(w_1) + (1-\omega)J(w_2) + \\
 & +(\omega^2 - \omega)\left[\alpha\sum_{q=0}^1\int_0^{\tau}\|Cx^{(q)}(w_1, t) - Cx_0^{(q)}(t)\|^2 dt + \alpha\sum_{q=0}^1\int_0^{\tau}\|Cx^{(q)}(w_2, t) - Cx_0^{(q)}(t)\|^2 dt - \right. \\
 & -2\alpha\sum_{q=0}^1\int_0^{\tau}\langle Cx^{(q)}(w_1, t) - Cx_0^{(q)}(t), Cx^{(q)}(w_2, t) - Cx_0^{(q)}(t) \rangle dt + \beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_1^{(q)}(t), u_1^{(q)}(t) \rangle dt + \\
 & \left. +\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_2^{(q)}(t), u_2^{(q)}(t) \rangle dt - 2\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q u_1^{(q)}(t), u_2^{(q)}(t) \rangle dt + \gamma\|u_{01} - u_{02}\|^2 \right] = \\
 & = \omega J(w_1) + (1-\omega)J(w_2) - \omega(1-\omega)\left[\alpha\sum_{q=0}^1\int_0^{\tau}\|Cx^{(q)}(w_1, t) - Cx(w_2, t)\|^2 dt + \right. \\
 & \left. +\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\langle N_q (u_1^{(q)}(t) - u_2^{(q)}(t)), u_1^{(q)}(t) - u_2^{(q)}(t) \rangle dt + \gamma\|u_{01} - u_{02}\|^2 \right].
 \end{aligned}$$

Так как все слагаемые входящие в состав выражения в квадратных скобках неотрицательны и $x(w, t)$ является непрерывной функцией при $w \in \mathcal{W}_{ad}$, то по теореме Вейерштрасса она будет ограничена на нем, а значит

$$J(\omega w_1 + (1-\omega)w_2) \leq \omega J(w_1) + (1-\omega)J(w_2) - \omega(1-\omega)T\|w_1 - w_2\|^2.$$

Теорема доказана.

Будем рассматривать задачу смешанного управления (1)–(3) при условиях (L, p)–регулярности матрицы M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$.

Обозначим $(w, x(w, t))$ точным решением, а $(w_k^\ell, \tilde{x}_k^\ell(w_k^\ell, t))$ – приближенное решение задачи смешанного управления.

Необходимо показать, что при $k, \ell \rightarrow \infty$ $(w_k^\ell, x_k^\ell) \rightarrow (w, x)$ так, что $J_k(w_k^\ell) \rightarrow J(w)$.

Лемма 1. Пусть матрица M (L, p)–регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, а функционал (1) является сильно выпуклой функцией на компактном и выпуклом множестве $\mathcal{W}_{ad} \subset \mathcal{U}^0 \times \mathcal{U}$. Тогда последовательность $\{w^\ell\}$ является минимизирующей, сходится к w по норме U при $\ell \rightarrow \infty$, при этом $J_k(w^\ell) \rightarrow J(w)$ и выполняется неравенство

$$q\|w^\ell - w\|^2 \leq J(w^\ell) - J(w).$$

Доказательство. Множество \mathcal{W}_{ad} выпукло и компактно, следовательно, существует последовательность $\{\mathcal{W}_{ad}^\ell\}$ выпуклых компактов $\mathcal{W}_{ad}^\ell \subset \mathcal{W}_{ad}$, монотонно исчерпывающих \mathcal{U}_∂ , т.е.

$\overline{\mathcal{W}_{ad}^\ell} \subset \mathcal{W}_{ad}^{\ell+1}$, $\bigcup_{\ell=p+1}^{\infty} \mathcal{W}_{ad}^\ell = \mathcal{W}_{ad}$. Из этого следует, что $J(w^{\ell+1}) \leq J(w)$, а значит, для последовательности $\{w^\ell\} \subset \mathcal{W}_{ad}$ существует предел $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} J(w^\ell)$ равный $J(w)$ в силу непрерывности функционала (1). Таким образом, последовательность $\{w^\ell\}$ является минимизирующей.

Отметим, что по теореме Мазура компактное и выпуклое множество слабо компактно, т.о. \mathcal{W}_{ad} – слабо компактно. Тогда функционал (1) определен, ограничен на слабокомпактном множестве, а по теореме Вейерштрасса минимизирующая последовательность $\{w^\ell\}$ будет слабо сходиться к w .

Воспользуемся теоремой о сильной выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом компактном множестве (или обобщением теоремы Вейерштрасса). Так как функционал качества (1) является сильно выпуклой и непрерывной функцией на \mathcal{W}_{ad} , последовательность $\{w^\ell\}$ – минимизирующая, а точка минимума w – единственна, следовательно, последовательность $\{w^\ell\}$ сходится при $\ell \rightarrow \infty$ к w по норме \mathbb{U} так, что выполняются неравенство

$$q \|w^\ell - w\|^2 \leq J(w^\ell) - J(w).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. В условиях леммы 1 для задачи смешанного оптимального управления (1) – (3) последовательность $\{x(w^\ell)\}$ является минимизирующей, сходится к $x(w)$ по норме \mathcal{X} при $\ell \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1, а функционал

$$\begin{aligned} J_k(v_k^0, v_k^\ell) = J_k(w_k^\ell) = & \alpha \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Cx_k^{(q)}(w_k^\ell, t) - Cx_0^{(q)}(t)\|^2 dt + \\ & + \beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \langle N_q(v_k^\ell)^{(q)}, (v_k^\ell)^{(q)} \rangle dt + \gamma \|v_k^0\|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

является сильно выпуклой и ограниченной функцией на выпуклом компакте $\mathcal{W}_{ad}^\ell \subset \mathcal{W}_{ad}$. Тогда последовательность $\{w_k^\ell\}$ является минимизирующей, сходится к w^ℓ при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном $\ell > p$ по норме \mathbb{U} , при этом $J_k(w_k^\ell) \rightarrow J(w^\ell)$ и выполняется неравенство

$$q \|w_k^\ell - w^\ell\|^2 \leq J_k(w_k^\ell) - J(w^\ell).$$

Доказательство. Так как $J_k(w_k^\ell)$ и $J(w)$, определяемые формулами (6) и (4) соответственно, являются непрерывными и ограниченными на \mathcal{W}_{ad}^ℓ функциями справедливо неравенство

$$\left| \inf J_k(w_k^\ell) - \inf J(w) \right| \leq \sup |J_k(w_k^\ell) - J(w)|.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} J_k(w_k^\ell) &= J_k(w_k^\ell) + J(w) - J(w), \\ \sup J_k(w_k^\ell) &\leq \sup J(w) + \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)), \\ \sup J_k(w_k^\ell) - \sup J(w) &\leq \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)), \\ -\inf J_k(w_k^\ell) + \inf J(w) &\leq \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)), \\ \left| \inf J_k(w_k^\ell) - \inf J(w) \right| &\leq \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)) \end{aligned}$$

из чего получаем, что

$$\left| \inf J_k(w_k^\ell) - \inf J(w) \right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{w_k^\ell\}$ является минимизирующей при $k \rightarrow \infty$, сходится к w^ℓ так, что $J_k(w_k^\ell) \rightarrow J(w^\ell)$ при фиксированном $\ell > p$.

А так как функционал, определяемый (6) является сильно выпуклой и непрерывной функцией на выпуклом компактном множестве \mathcal{W}_{ad}^ℓ , то по теореме о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом замкнутом множестве последовательность $\{w_k^\ell\}$ сходится к w^ℓ по норме в \mathbb{U} и справедливо неравенство

$$q \|w_k^\ell - w^\ell\|^2 \leq J_k(w_k^\ell) - J(w^\ell).$$

Лемма доказана.

Следствие 2. В условиях леммы 2 для задачи смешанного управления последовательность $\{\tilde{x}_k^\ell\}$ является минимизирующей, при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном $\ell > p$, сходится к $x(w^\ell)$.

Теорема 4. Пусть матрица $M(L, p)$ -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$. Функционал (4) является непрерывной, сильно выпуклой, ограниченной на выпуклом компактном множестве \mathcal{W}_{ad} . Пусть $(w, x(w, t))$ – точное, а $(w_k^\ell, x_k^\ell(w_k^\ell, t))$ – приближенное решение задачи смешанное управления (1) – (4). Тогда последовательность $\{w_k^\ell\}$ сходится к $\{w\}$ по норме \mathbb{U} , последовательность $\{x_k^\ell\}$ сходится к $x(w)$ по норме \mathcal{X} при $k \rightarrow \infty$, $\ell \rightarrow \infty$ так, что $J_k(w_k^\ell) \rightarrow J(w)$, причем выполняется неравенство $q \|w_k^\ell - w^\ell\|^2 \leq J_k(w_k^\ell) - J(w)$.

Доказательство. Из справедливости лемм 1 и 2, следствий из них и теоремы о повторных пределах существует повторный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} J_k(w_k^\ell) = J(w)$, причем $w_k^\ell \rightarrow w^\ell \rightarrow w$ и $x(w_k^\ell) \rightarrow x(w^\ell) \rightarrow x(w)$.

Неравенство справедливо, т.к.

$$\begin{aligned} q \|w_k^\ell - w\|^2 &= q \|w_k^\ell - w^\ell + w^\ell - w\|^2 \leq q \|w_k^\ell - w^\ell\|^2 + q \|w^\ell - w\|^2 \leq \\ &\leq J(\tilde{w}_k^\ell) - J(w^\ell) + J(w^\ell) - J(w) = J(\tilde{w}_k^\ell) - J(w). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Алгоритм численного метода решения задач смешанного управления для систем леонтьевского типа

Будем искать приближенные решения смешанного оптимального управления для систем леонтьевского типа в виде:

$$v^0 = \text{col}(a_{01}, \dots, a_{0n}), \quad v^\ell(t) = \text{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} a_{1j} t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} a_{nj} t^j\right).$$

В этом случае задача нахождения приближенного решения (1)–(3) сведется к решению задачи выпуклого программирования относительно массива $A_{n \times (\ell+2)} = (a_{ij})$.

Этап 1. Вычисление $\det M$. Проверка на отличие его значения от нуля с точностью $\varepsilon = 10^{-30}$. В случае $\det M = 0$ необходимо провести замену $z = e^{\lambda t} x$ и продолжить нахождение решения.

Этап 2. Вычисление порядка полюса $p = n - q$, где $q = \deg \det(\mu L - M)$.

Этап 3. Вычисление числа K , начиная с которого можно вычислять приближенное решение

$$K = \max\{k_1, k_2\}. \quad \text{Здесь } k_1 = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^q |a_i| + 1, \quad k_2 = \frac{1}{\alpha p^p} \sum_{i=0}^q |a_i| (p+1)^{n-i} + 1, \quad \text{где } \alpha = \max\left\{1, \frac{1}{|a_q|} \sum_{i=0}^q |a_i|\right\}.$$

Этап 4. По заданному η и отрезку интегрирования $[0, \tau]$ осуществляется расчет весов ω_j и узлов s_j квадратурной формулы Гаусса

$$\int_0^\tau f(x) dx \approx \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{2\eta+1} \omega_j f\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} s_j\right), \quad j = \overline{1, 2\eta+1},$$

где s_j – нули полинома Лагранжа $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^2]$, $n = 0, 1$, а веса определяются формулой

$$\omega_j = \frac{2}{[P'_n(s_j)]^2 (1 - s_j)^2}.$$

Этап 5. В заданных точках $\vartheta_j \in [0, \tau]$ при нулевых значениях a_{ij} из $v^0 = \text{col}(a_{01}, \dots, a_{0n})$ и $v^\ell(t) = \text{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} a_{1j}t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} a_{nj}t^j\right)$ вычисляются $x_k(0, t)$ и $J_k(0, 0)$.

Этап 6. Находится минимум функционала $J(\tilde{v}_k^0; \tilde{v}_k^\ell)$

$$J(\tilde{v}_k^0; \tilde{v}_k^\ell) = \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{2\eta+1} \left\| Cx_k\left(v^0; v^\ell; \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right) - Cx_0\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right) \right\|^2 \omega_j +$$

$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{2\eta+1} \left\| Cx'_k\left(v^0; v^\ell; \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right) - Cx'_0\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right) \right\|^2 \omega_j +$$

$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{q=0}^{\theta} \sum_{j=1}^{2\eta+1} \left\langle N_q(v^\ell)^{(q)}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right); (v^\ell)^{(q)}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right) \right\rangle$$

и $\tilde{v}_k^0 = \text{col}(a_{0j}^*, \dots, a_{0j}^*)$, $\tilde{v}_k^\ell = \text{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} a_{1j}^*t^j, \dots, \sum_{j=0}^{\ell} a_{nj}^*t^j\right)$, при которых он достигается. В основе алгоритма лежит метод покоординатного многошагового спуска с памятью.

Этап 7. Вычисляется значение $\tilde{x}_k^\ell = x_k(\tilde{v}_k^0; \tilde{v}_k^\ell; t)$.

Обсуждая алгоритм, следует подчеркнуть, что при распараллеливании процессов алгоритм может быть улучшен: выбор изменяемых элементов в строках массива $A_{n \times (\ell+2)} = (a_{ij})$ должен осуществляться при сопоставлении изменений не в одной строке, а во всех одновременно.

Литература

1. Свиридчук, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно р-секториальными операторами / Г.А. Свиридчук, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – С. 1912–1919.
2. Федоров, В.Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1548–1556.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 179 p.
4. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоултера – Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 42–53.
5. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
6. Келлер, А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – Т. 32, № 19(162). – С. 57–66.
7. Келлер, А.В. Методика построения динамической и статической балансовых моделей на уровне предприятия / А.В. Келлер, Т.А. Шишкина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. – 2013. – Т. 7, № 3. – С. 6–11.
8. Shestakov, A.L. The Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, A.V. Keller, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 1. – С. 3–16.
9. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – № 3. – С. 74–82.
10. Ebel, S.I. Numerical Research of Degenerate Dynamic Balance Model of the Cell Cycle / S.I. Ebel // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, № 2. – С. 25–38.

11. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... докт. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.

12. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.

13. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 2. – С. 45–51.

14. Шестаков, А.Л. Оптимальные измерения детерминированных и стохастических сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: сб. науч. тр. – Москва, 16–19 июля 2014 г. – С. 1231–1242.

15. Плеханова, М.В. Задача со смешанным управлением для одного класса линейных уравнений соболевского типа / М.В. Плеханова, А.Ф. Исламова // Вестник Челябинского государственного университета. – 2010. – № 23. – С. 49–58.

16. Keller, A.V. The existence of a unique solution to a mixed control problem for Sobolev-type equations / A.V. Keller, A.A. Ebel // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 121–127.

Поступила в редакцию 3 сентября 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 37–45*

DOI: 10.14529/mmph150405

A NUMERICAL METHOD OF THE SOLUTION OF MIXED CONTROL PROBLEMS FOR LEONTIEFF TYPE SYSTEMS

A.V. Keller¹, A.A. Ebel²

The article presents exact and approximate solutions of mixed control problems. A detailed algorithm for the numerical method of the solution of mixed control problems is presented, the convergence of approximate solutions to the exact one is proved. Methods of the theory of degenerate (semi) groups, of the optimal control theory are used. The importance of the introduced functional quality which enables to solve applied problems in economics and engineering is shown.

Keywords: mixed control problem; Leontieff type system; numerical solution.

References

1. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. *Differentsial'nye uravneniya*, 1995, Vol. 31, pp. 1912–1919. (in Russ.).

2. Fedorov V.E., Plehanova M.V. *Differentsial'nye uravneniya*, 2004, Vol. 40, no. 11, pp. 1548–1556. (in Russ.).

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston: VSP, 2003. 179 p.

4. Manakova N.A., Bogonos E.A. *Izvestiya irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Serya: Matematika*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp.42–53. (in Russ.).

5. Zamyshlyayeva A.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.).

¹ Keller Alevtina Viktorovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Modeling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: Kellerav@susu.ac.ru

² Ebel Andrey Aleksandrovich is Post-graduate Student, Mathematical Modeling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: Ebelaa@susu.ac.ru

6. Keller A.V., Sagadeeva M.A. *Belgorod State University Scientific bulletin. Serya: Matematika, Physica*, 2013, Vol. 32, no. 19(162), pp. 57–66. (in Russ.).
7. Keller A.V., Shyshkina T.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Economics and Management"*, 2013, Vol. 7, no. 3, pp. 6–11. (in Russ.).
8. Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1. pp. 3–16. (in Russ.).
9. Keller A.V., Nazarova E.I. *Izvestiya irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Serya: Matematika*, 2011, no. 3, pp. 74–82. (in Russ.).
10. Ebel, S.I. Numerical Research of Degenerate Dynamic Balance Model of the Cell Cycle. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, Vol. 2, no. 2, pp. 25–38. (in Russ.). DOI: 10.14529/jcem150204
11. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk* [Numerical study of optimal control problems for models of Leontieff type. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Chelyabinsk, The South Ural State University, 2011. 237 p. (in Russ.).
12. Zagrebina S.A., Keller A.V. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*. 2015. Vol. 8, no. 2. pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201
13. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 45–51. (in Russ.).
14. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Yu.V. Optimal'nye izmereniya determinirovannykh i stokhasticheskikh signalov [Optimal measuring of determined and stochastic signals]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014: sb. nauch. tr.* [Proceedings of XII All-Russian conference on the problems the control VSPU 2014]. Moscow, 16–19 July 2014. pp. 1231–1242. (in Russ.).
15. Plehanova M.V., Islamova A.F. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2010, no. 23, pp. 49–58. (in Russ.).
16. Keller A.V., Ebel A.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 121–127. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140313

Received September 3, 2015

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ДИХОТОМИЙ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.А. Сагадеева¹, Ф.Л. Хасан²

Уравнения, неразрешенные относительно производной, начал изучать еще А. Пуанкаре в конце позапрошлого века. Однако систематическое изучение таких уравнений берет начало с работ С.Л. Соболева во второй половине прошлого века, поэтому такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа. В последнее время существенно вырос интерес к уравнениям соболевского типа, в силу чего возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах.

Рассматривается вопрос существования экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа, рассматриваемых в квазибанаховых пространствах. При изучении этого вопроса необходимо рассмотреть относительно спектральную теорему и вопрос существования инвариантных пространств решений. Интерес к такому поведению решений обусловлен тем, что именно оно является наиболее распространенным и отвечающим экспериментальным данным при решении практических задач.

Статья содержит две части. В первой из них вводятся необходимые понятия и приводится относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах. Во второй – показывается существование инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений динамического уравнения соболевского типа в квазибанаховых пространствах.

Ключевые слова: квазисоболево пространство; относительно спектральная теорема; инвариантные пространства решений; экспоненциальные дихотомии решений; уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть U, F – банаховы пространства, обозначим $L, M \in L(U; F)$ (т.е. линейны и непрерывны). Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$Li = Mi. \quad (1)$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(R; U)$, удовлетворяющую уравнению (1), назовем его *решением*. Множество $D \subset U$ назовем *фазовым пространством* уравнения (1), если, во-первых, любое решение $u = u(t)$ лежит в D поточечно (т.е. $u(t) \in D$ при всех $t \in R$), а во-вторых, при любом $u_0 \in D$ существует единственное решение задачи Коши

$$u(0) = u_0 \quad (2)$$

для уравнения (1). Заметим, что если существует оператор $L_1^{-1} \in L(F; U)$, то фазовым пространством уравнения (1) служит все пространство U . В случае же необратимости оператора L фазовое пространство D может быть подпространством в U .

Далее, пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup N$ (т.е. L -спектр оператора M ограничен, а точка ∞ является либо устранимой особой точкой ($p = 0$), либо полюсом порядка $p \in N$ L -резольвенты оператора M). В этом случае фазовое пространство D уравнения (1) либо совпадает с пространством U , либо является подпространством в U [1]. Если вдобавок

¹ Сагадеева Минзиля Алмасовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет
E-mail: sam79@74.ru

² Хасан Фаза Лафта – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: fahas90@yahoo.co.uk

$\sigma^L(M) \cap iR = \emptyset$, то фазовое пространство то фазовое пространство расщепляется в прямую сумму инвариантных относительно уравнения (1) пространств: $D = J^s \oplus J^u$, причем $\|u(t)\| \leq C_s \|u_0\| e^{-at}$, если $a \in R_+$, $u_0 \in J^s$, $t \in R_+$, и $\|u(t)\| \geq C_u \|u_0\| e^{at}$, если $a \in R_+$, $u_0 \in J^u$, $t \in R_+$, для любых решений задачи (1), (2). Такое поведение решений задачи (1), (2) было названо в [2] экспоненциальной дихотомией. К настоящему времени дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа как динамических (т.е. тех, чьи решения существуют на всей оси R), так и эволюционных (их решения существуют только на полуоси R_+) полностью изучены в банаховых пространствах [3]. Настало время распространить эту теорию на квазибанаховы пространства. Причем нами руководит не столько желание пополнить теорию, сколько стремление к осмысленно неклассических моделей математической физики [4] в квазисоболевых пространствах [5].

Заметим еще, что хотя уравнения вида (1) изучать начал еще А. Пуанкаре в конце позапрошлого века, их систематическое изучение началось с работ С.Л. Соболева во второй половине прошлого века (см. прекрасный исторический обзор в [6]). Термин «уравнения соболевского типа» ввел в обиход Р. Шоултер [7]. В настоящее время уравнения соболевского типа привлекают внимание все большего числа исследователей, и аспекты, в которых они изучаются, весьма разнообразны [8–10].

Статья содержит две части. В первой вводятся необходимые понятия и приводится доказательство относительно спектральной теоремы в квазибанаховых пространствах. Во второй – доказывается существование инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений уравнения (1) в квазибанаховых пространствах при условии (L, p) -ограниченности оператора M . Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах

Пусть U – линеал над полем R . Упорядоченная пара $(U, \|\cdot\|_U)$ называется *квазинормированным пространством*, если функция $\|\cdot\|_U: U \rightarrow R$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $\|u\|_U \geq 0$ при всех $u \in U$, причем $\|u\|_U = 0$ точно тогда, когда $u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нуль линеала U ;
- (ii) $\|\alpha u\|_U = |\alpha| \|u\|_U$ при всех $u \in U$, $\forall \alpha \in R$;
- (iii) $\|u + v\|_U \leq C(\|u\|_U + \|v\|_U)$ при всех $u, v \in U$, где константа $C \geq 1$.

Функция $\|\cdot\|_U$ со свойствами (i)–(iii) называется *квазинормой*. Ясно, что в случае $C = 1$ эта функция будет нормой.

Квазинормированные пространства нормируемы только в случае $C = 1$, но в любом случае они метризуемы [11, гл. 3]. Значит, в них мы располагаем понятиями фундаментальной последовательности и полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Широко известным примером квазибанахова пространства служит пространство последовательностей, ℓ_q при $q \in (0, 1)$, константа $C = 2^{1/q}$ (при $q \in [1, +\infty)$ пространство ℓ_q – банахово). Кроме того, в [5] построены так называемые квазисоболевы пространства ℓ_q^m при всех $m \in R$, $q \in R_+$, причем $\ell_q^0 = \ell_q$.

Далее, пусть $(U, \|\cdot\|_U)$ и $(F, \|\cdot\|_F)$ – квазибанаховы пространства. Линейный оператор $L: U \rightarrow F$ назовем *непрерывным*, если $\lim_{k \rightarrow \infty} Lu_k = L(\lim_{k \rightarrow \infty} u_k)$ для любой последовательности $\{u_k\} \subset U$ сходящейся в U , и ограниченным, если при любом $u \in U$ справедливо $\|Lu\|_F \leq K \|u\|_U$ и $K \in R_+$ не зависит от u . Нетрудно показать, что линейный оператор $L: U \rightarrow F$ с областью определения $dom L = U$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные).

Линеал $L(U; F)$ линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой

$$\|L\|_{L(U;F)} = \sup_{\|u\|=1} \|Lu\|_F.$$

Пример. [12] Пусть $\{\lambda_k\} \subset R_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$, а $q \in R_+$. В квазисоболевых пространствах

$$\ell_q^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset R : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{q}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\}$$

рассмотрим квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_q^{m+2} \rightarrow \ell_q^m$, заданный с помощью формулы $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$, $u \in \ell_q^m$. Этот оператор $\Lambda : \ell_q^{m+2} \rightarrow \ell_q^m$ является линейным, ограниченным и непрерывно обратимым при всех $m \in R$, $q \in R_+$.

Замечание 1. В примере приведено построение оператора в квазибанаховых пространствах последовательностей в явном виде. Соответственно в квазибанаховых пространствах последовательностей (а именно в квазисоболевых пространствах) существуют линейные отображения отличные от нулевого и тривиального, что в функциональных квазибанаховых пространствах не всегда очевидно, а иногда и просто неверно [13].

Замечание 2. В дальнейших рассуждениях пространства U, F – квазисоболевы.

Теперь, пусть операторы $L, M \in L(U; F)$, введем в рассмотрение L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in L(F; U)\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M . В работе [14] показано, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M всегда замкнут.

Операторнозначные функции комплексного переменного $\mu \in \rho^L(M) \subset C$ вида $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ назовем соответственно L -резольвентой, правой L -резольвентой и левой L -резольвентой оператора M .

Лемма 1. [14] Пусть $L, M \in L(U; F)$, тогда L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.

Введем в рассмотрение условие

$$\left. \begin{aligned} &\text{ пусть } \sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M) \text{ и } \sigma_1^L(M) \text{ не пусто,} \\ &\text{ причем существует ограниченная область } \Omega_1 \subset C \\ &\text{ с границей класса } C^1, \text{ что } \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \text{ и } \bar{\Omega}_1 \cap \sigma_2^L(M) \text{ пусто.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При выполнении этого условия, в силу леммы 1, а также результатов из [15] ясно, что существуют операторы, заданные с помощью интегралов

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu \text{ и } Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} L_\mu^L(M) d\mu,$$

где $\gamma_1 = \partial\Omega_1$. По построению операторы $P_1 \in L(U)$ и $Q_1 \in L(F)$.

Лемма 2. Пусть $L, M \in L(U; F)$ и выполнено условие (3), тогда операторы $P_1 \in L(U)$ и $Q_1 \in L(F)$ являются проекторами в соответствующих пространствах.

Доказательство. Операторы $P_1 \in L(U)$ и $Q_1 \in L(F)$ по построению. Для доказательства утверждения теоремы надо показать идемпотентность этих операторов.

Из условия (3) и замкнутости $\sigma^L(M)$ следует существование замкнутого контура $\gamma' \subset C$, такого, что $\sigma^L(M) \cap \gamma' = \emptyset$ и ограничивающего область, содержащую контур γ_1 . Из аналитичности резольвенты $R_\mu^L(M)$ следует, что оператор

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} R_\lambda^L(M) d\lambda.$$

Используя аналоги тождеств Гильберта [16] и теорему о вычетах, которая справедлива в силу [15], нетрудно показать, что

$$P_1^2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma'} R_\lambda^L(M) R_\mu^L(M) d\mu d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int_{\gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\gamma'} R_\mu^L(M) d\mu + \int_{\gamma_1} R_\lambda^L(M) d\lambda \int_{\gamma'} \frac{d\mu}{\lambda - \mu} \right) = P_1.$$

Здесь $\mu \in \gamma'$ лежит внутри области, ограниченной контуром γ_1 , а точка $\lambda \in \gamma_1$ находится вне области, ограниченной контуром γ' .

Утверждение относительно Q_1 доказывается аналогично. Лемма доказана.

Положим $U^{11} = im P_1$, $F^{11} = im Q_1$, $U^{10} = \ker P_1$, $F^{10} = \ker Q_1$; и через L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на U^{11} .

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда

- (i) операторы $L_{11}, M_{11} \in L(U^{11}; F^{11})$;
- (ii) существует оператор $L_{11}^{-1} \in L(F^{11}; U^{11})$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из построения операторов $P_1 \in L(U)$ и $Q_1 \in L(F)$, так как $LP_1 = Q_1L = L_{11}$ и $MP_1 = Q_1M = M_{11}$.

Утверждение (ii) следует из леммы 1 в силу того, что оператор L_{11}^{-1} равен сужению на подпространство F^{11} оператора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\mu L - M)^{-1} d\mu.$$

Теорема доказана.

Наконец, рассмотрим случай, когда существует ограниченная область $\Omega \subset C$, содержащая весь L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M . По аналогии с банаховым [1] в этом случае оператор M называется (L, σ) -ограниченным. По лемме 2 (в которой $\sigma_2^L(M) = \emptyset$) существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_\mu^L(M) d\mu,$$

где $\gamma \subset \rho^L(M)$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую область Ω .

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 2 и оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда $P_1 = PP_1 = P_1P$ и $Q_1 = QQ_1 = Q_1Q$.

Построим операторы $P_2 = P - P_1$ и $Q_2 = Q - Q_1$. В силу следствия 1 эти операторы являются проекторами. Положим $U^0 = \ker P$, $U^1 = im P$, $F^0 = \ker Q$, $F^1 = im Q$; $U^{12} = im P_2$, $F^{12} = im Q_2$ и через L_{12} (M_{12}) обозначим сужение оператора L (M) на U^{12} .

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда

- (i) $U = U^0 \oplus U^1$, $F = F^0 \oplus F^1$, $U^1 = U^{11} \oplus U^{12}$, $F^1 = F^{11} \oplus F^{12}$;
- (ii) операторы $L_{12}, M_{12} \in L(U^{12}; F^{12})$;
- (iii) существует оператор $L_{12}^{-1} \in L(F^{12}; U^{12})$.

Инвариантные пространства и экспоненциальные дихотомии решений

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in L(U; F)$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа (1). Вектор-функцию $u \in C^\infty(R; U)$ назовем (классическим) решением уравнения (1), если она (поточечно) удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем решением задачи Коши (2) для уравнения (1) (коротко, задачи (1), (2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2) при некотором $u_0 \in U$.

Отображение $V^\bullet \in C(R; L(U))$ назовем группой операторов, если

$$V^s V^t = V^{s+t} \tag{4}$$

при всех $t, s \in R$. Следуя традиции (см. напр. [1]), отождествим группу с ее графиком $\{V^t : t \in R\}$ и назовем ее *голоморфной*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость с сохранением свойства (4). Далее группу $\{V^t : t \in R\}$ назовем *вырожденной*, если $\ker V^0 \neq \{0\}$ (в силу (4) единица V^0 группы $\{V^t : t \in R\}$ является проектором в U). Наконец, назовем $\{V^t : t \in R\}$ *разрешающей группой* уравнения (1), если вектор-функция $u(t) = V^t u_0$ является решением уравнения (1).

Теорема 2. [16] Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда существует голоморфная разрешающая группа уравнения (1).

Искомая группа может быть задана, например [15], интегралом

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, t \in R, \quad (5)$$

где контур $\gamma \subset \rho^L(M) \subset C$ такой же, как выше.

Группа (5) не единственная голоморфная разрешающая группа уравнения (1), что легко увидеть, заменив контур γ в интеграле, например на контур γ_1 . Однако, она обязательно вырождена, если $\ker L \neq \{0\}$.

Для решения вопроса о единственности группы (5) введем несколько понятий.

Определение 1. Множество $D \subset U$ называется *фазовым пространством* уравнения (1), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1) лежит в D поточечно (то есть $u(t) \in D$ при всех $t \in R$);

(ii) при любом $u_0 \in D$ существует единственное решение задачи (1), (2).

Далее, пусть $\{V^t : t \in R\}$ – голоморфная группа, введем в рассмотрение ее образ $im U^{\bullet} = im U^0$. Ввиду голоморфности группы (5) имеем $im U^{\bullet} = im U^t$ при всех $t \in R$. Очевидно, образ группы (5) – первый кандидат на роль фазового пространства уравнения (1). Найдем условия, когда эти множества совпадают. Обозначим через L_0 (M_0) сужение оператора L (M) на U^0 .

Теорема 3. [16] Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, тогда $L_0, M_0 \in L(U^0; F^0)$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in L(F^0; U^0)$.

Определение 2. Построим оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in L(U^0)$. Назовем (L, σ) -ограниченный оператор M (L, p) -ограниченным, $p \in N$, если $H^p \neq 0$ и $H^{p+1} = 0$. Присовокупим сюда случай $(L, 0)$ -ограниченного оператора M , т.е. случай когда $\ker L = U^0$.

Теорема 4. [16] Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup N$. Тогда образ группы (5) совпадает с фазовым пространством уравнения (1).

Определение 3. Пусть D – фазовое пространство уравнения (1), подмножество $J \subset D$ называется *инвариантным пространством* уравнения (1), если при любом $u_0 \in J$ решение $u = u(t)$ задачи (1), (2) лежит в J поточечно (т.е. $u(t) \in J$ при всех $t \in R$).

Теорема 5. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup N$ и выполнено условие (3). Тогда образ группы

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, t \in R, \quad (6)$$

будет инвариантным пространством уравнения (1).

Доказательство следует из равенства $im U^{\bullet} = im P_1 = U^{11}$, которое в свою очередь очевидно следует из теоремы 2 и следствий 1, 2.

Определение 4. Будем говорить, что решения уравнения (1) имеют экспоненциальную дихотомию, если

(i) фазовое пространство уравнения (1) представимо в виде $D = J^1 \oplus J^2$, где $J^{1(2)}$ – инвариантное пространство уравнения (1);

(ii) для любого $u_0 \in J^1$ ($u_0 \in J^2$) решение $u = u(t)$ задачи (1), (2) таково, что $\|u(t)\| \leq C_1(u_0)e^{-at}$ ($\|u(t)\| \geq C_2(u_0)e^{at}$) при некотором $a > 0$ и всех $t \in R$.

Теорема 6. Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup N$ и выполнено условие

$$\sigma^L(M) \cap iR = \emptyset \quad (7)$$

Тогда решения уравнения (1) имеют экспоненциальную дихотомию.

Идея доказательства этой теоремы основана на построении оценок решений в зависимости от расположения компонент относительного L -спектра оператора M . Опираясь на результаты относительно спектральной теоремы в квазибанаховых пространствах [3], по аналогии с результатами [4,5] можно получить указанные оценки.

Заметим, что если при выполнении (7) окажется, что $\sigma_2^L(M) = \emptyset$, то $J^1 = imV^*$, где imV^* – фазовое пространство уравнения (1). В этом случае решения уравнения (1) уместно назвать экспоненциально асимптотически устойчивыми.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
2. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.
3. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
4. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40(299). – С. 7–18.
5. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.
6. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.
7. Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, № 1 (2). – P. 15–22 (P. 81–99).
8. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
9. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
10. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
11. Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. – М.: Мир, 1980. – 264 p.
12. Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (13). – С. 13–16.
13. Rolewicz, S. Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. – Warsaw: PWN, 1985. – 459 p.
14. Аль-Делфи, Дж.К. Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Дж. К. Аль-Делфи. – Воронеж, 2015. – 98 с.

15. Keller, A.V. On Integration in Quasi-Banach Spaces of Sequences / A.V. Keller, A.A. Zamyshlyayeva, M.A. Sagadeeva // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2015. – Vol. 2, № 1. – P. 52–56.

16. Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

Поступила в редакцию 25 мая 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 46–53*

DOI: 10.14529/mmph150406

EXISTENCE OF INVARIANT SPACES AND EXPONENTIAL DICHOTOMIES OF SOLUTIONS OF DYNAMICAL SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN QUASI-BANACH SPACES

M.A. Sagadeeva¹, F.L. Hasan²

At the end of the nineteenth century A. Poincare began to study equations which were unsolved with respect to high derivative equations. The systematical study of such equations began in S.L. Sobolev's works in the second part of the last century. Therefore, such equations are called Sobolev type equations. The increased interest to Sobolev type equations led to the necessity to consider them in quasi-Banach spaces.

This article presents the results of the existence of exponential dichotomies of solutions of dynamical Sobolev type equations studied in quasi-Banach spaces.

The relatively spectral theorem and the problem of the existence of invariant solution spaces were considered. The interest to such solution is explained by the fact that it is the most popular and reflects experimental data while solving practical tasks.

Besides the introduction and the references the article contains two parts. The first part provides necessary notions and a relatively spectral theorem in quasi-Banach spaces. The second one represents the existence of invariant spaces and exponential dichotomies of solutions of the dynamical Sobolev type equation in quasi-Banach spaces.

Keywords: quasi-Sobolev space; relatively spectral theorem; invariant spaces; exponential dichotomies of solutions; Sobolev type equations.

References

1. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1994, Vol. 49, no. 4(298), pp. 47–74. (in Russ.). DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

2. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariantnye prostranstva i dikhotomii resheniy odnogo klassa lineynykh uravneniy tipa Soboleva [Invariant spaces and dichotomies of solutions of a class of linear equations of Sobolev type]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Matematika* [Russian Math.], 1997, Vol. 41, no. 5, pp. 57–65. (in Russ.).

3. Sagadeeva M.A. *Dichotomies of Solutions of Linear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 139 p. (in Russ.).

4. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2012, no. 40 (299), pp. 7–18. (in Russ.).

¹ Minzilia Almasovna Sagadeeva is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Modelling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: sam79@74.ru

² Hasan Faza Lafta is Post-graduate student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: fahas90@yahoo.co.uk

5. Al-Delfi J.K. Quasi-Sobolev Spaces ℓ_p^m . *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2013, Vol. 5, no. 1, pp. 107–109. (in Russ.).
6. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433
7. Showalter R.E. The Sobolev type equations. I (II). *Appl. Anal*, 1975, Vol. 5, no. 1 (2), pp. 15–22 (pp. 81–99).
8. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations*. Moscow, FizMatLit Publ., 2007. 736 p. (in Russ.).
9. Zamyshlyayeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 88 p. (in Russ.).
10. Manakova N.A. *Problems of Optimal Control for the Semilinear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 107 p. (in Russ.).
11. Bergh J., Löfström J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1976. 207 p. DOI: 10.1002/zamm.19800600916
12. Al-Delfi J.K. The Laplace' Quasi-operator in Quasi-Sobolev spaces. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, Issue 2 (31), pp. 13–16. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1213
13. Rolewicz S. *Metric Linear Spaces*. Warsaw, PWN, 1985. 459 p.
14. Al-Delfi J.K. *Issledovanie vyrozhdennykh golomorfnykh grupp v kvazibanakhovykh prostanstvakh* [The Study of Degenerated Holomorphic Groups in Quasi-Banach spaces]. Cand. phys. and math. sci. diss., Voronezh, 2015. 98 p. (in Russ.).
15. Keller A.V., Zamyshlyayeva A.A., Sagadeeva M.A. On Integration in Quasi-Banach Spaces of Sequences. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, Vol. 2, no. 1, pp. 52–56. DOI: 10.14529/jcem150106
16. Keller A.V., AL-Delfi J.K. Holomorphic Degenerate Groups of Operators in Quasi-Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics, Mechanics, Physics"*, 2015, Vol. 7, no. 1, pp. 20–27. (in Russ.).

Received May 25, 2015

МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО СЖАТИЯ И ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ СЛОЖНЫХ СОЕДИНЕНИЙ¹

В.Ф. Куропатенко², С.Ю. Филатов³

Предложен способ построения уравнений состояния в области небольших давлений. Основные параметры уравнения состояния подобраны для сложных химических соединений при помощи оригинальной версии симплекс-метода. Метод использует линейные зависимости скорости ударной волны от скорости вещества и данные по тепловому расширению при постоянном давлении. В качестве целевой функции выбрана сумма квадратичных разностей между расчетными и экспериментальными величинами. Получено удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Ключевые слова: уравнение состояния вещества; симплекс-метод; тепловое расширение; ударное сжатие.

Введение

На сегодняшний день в литературе описано большое количество уравнений состояния веществ (УРС) от самых простых до очень сложных [1–3]. При изучении поведения сплошных сред, которые подвергаются воздействию динамических нагрузок, применяется математическое моделирование, выполняющееся на электронных вычислительных машинах (ЭВМ). Число компонентов в сложных моделях многокомпонентных сред с химическими реакциями и фазовыми переходами может достигать нескольких десятков, а то и сотен. При расчете смеси в таких моделях затраты машинного времени могут растягиваться на значительное время даже с использованием современных ЭВМ. Предлагаемое малопараметрическое УРС существенно сократит время расчета на ЭВМ сложных физических процессов.

Уравнения на поверхности сильного разрыва

Законы сохранения массы, импульса и энергии на поверхности сильного разрыва (ударной волны) в случае идеальной среды (девиатор тензора напряжений равен нулю и отсутствует теплопроводность) имеют вид

$$\rho \cdot (D - U) = \rho_0 \cdot (D - U_0), \quad (1)$$

$$\rho \cdot (D - U)U - P = \rho_0 \cdot (D - U_0)U_0 - P_0, \quad (2)$$

$$P_0 = 0. \quad (3)$$

Величины без индекса в уравнениях (1)–(3) характеризуют состояние за разрывом, D – скорость ударной волны. Величины с индексом 0, такие как ρ_0 – плотность, U_0 – массовая скорость, P_0 – давление, E_0 – удельная внутренняя энергия описывают состояние вещества перед разрывом. Рассмотрим ударную волну в покоящемся веществе. Согласно [1], уравнение состояния рассматривалось в предположении, что величины P_0 и E_0 пренебрежимо малы по сравнению с P и E . Уравнения (1)–(3) принимают вид при $P_0 = 0$, $E_0 = 0$ и $U_0 = 0$.

$$\rho \cdot (D - U) - \rho_0 D = 0, \quad \rho_0 D U = P, \quad (4)$$

$$E = \frac{1}{2} D U \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad (5)$$

Система, состоящая из трех уравнений (4), (5) содержит пять величин P , ρ , E , U , D . Если любые две из них получены экспериментальным путем, то остальные величины можно найти из

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №13-01-00072.

² Куропатенко Валентин Федорович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск, Российская Федерация.

³ Филатов Сергей Юрьевич – научный сотрудник, ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск, Российская Федерация.

E-mail: phil@chel.ru

выражений (4) и (5). Точка на ударной адиабате определяется полностью. Зависимость между экспериментально измеренными D и U известна уже более пятидесяти лет и удовлетворительно описывается линейным соотношением

$$D = C_0 + b \cdot U. \quad (6)$$

На основе большого количества обработанных экспериментальных данных в справочнике [2] содержится информация по $D(U)$ соотношениям для элементов и соединений.

Давление P определяется калорическим уравнением состояния (УРС) вида $P = P(\rho, E)$ в том случае, если ρ и E – независимые термодинамические переменные. Сложные и трудоемкие современные УРС рассмотрены в [3, 4], однако для экспресс-расчетов достаточно использовать достаточно простые УРС.

В [1] рассмотрено уравнение состояния вида

$$P = P_X(\rho) + P_T(\rho, S), \quad E = E_X(\rho) + E_T(\rho, S), \quad (7)$$

где

$$P_X = \frac{\rho_0 C_0^2}{n} (x^{-n} - 1), \quad P_T = \rho_0 C_0^2 \cdot f(S) \cdot x^{-\gamma}, \quad (8)$$

$$E_X = \frac{C_0^2}{n-1} \left(\frac{x^{1-n}}{n} + \frac{x(n-1)}{n} - 1 \right), \quad E_T = \frac{C_0^2 \cdot f(S)}{\gamma-1} x^{1-\gamma}. \quad (9)$$

C_0 – скорость звука перед ударной волной при $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, S – энтропия, $n = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, $x = \rho_0 / \rho$.

Зависимости $P_X(x)$, $E_X(x)$ и $P_T(E_T, x)$ следуют из (8) и (9)

$$P_X = \frac{(n-1)\rho_0 E_X}{x} + \rho_0 C_0^2 \cdot \left(\frac{1-x}{x} \right), \quad P_T = \frac{(\gamma-1)\rho_0 E_T}{x}. \quad (10)$$

УРС получим путем подстановки (10) в (7), которое принимает следующий вид

$$P = (\gamma-1)\rho_0 E x^{-1} + \rho_0 C_0^2 \cdot \phi(x), \quad (11)$$

где $\phi(x) = \frac{n-\gamma}{(n-1)n} x^{-n} + \frac{\gamma-1}{(n-1)x} - \frac{\gamma}{n}$.

Согласно [1] уравнение (11) называется «уравнением с согласованными γ и n », если $\gamma = n$. Таким образом, уравнение (11) примет вид

$$P = (n-1)\rho_0 E \cdot x^{-1} + \rho_0 C_0^2 \frac{1-x}{x}, \quad (12)$$

где ρ_0 , C_0 и n – постоянные величины.

Далее рассмотрим, при каких условиях уравнения (4), (5), (12) согласуются с линейной зависимостью $D(U)$. Зависимость $D(U)$ получим путем исключения P , E и x в выражениях (4), (5) и (12).

$$D = \frac{n+1}{4} U + \sqrt{C_0^2 + \left(\frac{n+1}{4} U \right)^2}. \quad (13)$$

Сравнивая выражение (13) с выражением (6), можно увидеть, что эти зависимости различаются. Наименьшие отличия находятся в области $\frac{n+1}{4} U \ll C_0$.

Так как предположение о постоянстве n в УРС (12) приводит к нелинейной зависимости $D(U)$ в выражении (13), которая, в свою очередь, не согласуется с линейной зависимостью $D(U)$ (6), сделаем наоборот. Линейную зависимость $D(U)$ (6) примем за основу, P и E выразим через C_0 и b из выражений (4)–(6). Полученные выражения подставим в (11) и найдем уравнение в котором n вдоль ударной адиабаты не может быть постоянной величиной

$$n = 2b \cdot (2 - b \cdot (1 - x)) - 1. \quad (14)$$

Уравнение состояния

Поведение вещества вместо УРС (12) будем описывать уравнением, в котором справедливо предположение, что n зависит от x

$$P = (n(x) - 1) \cdot \rho_{0K} x^{-1} E + \rho_{0K} C_{0K}^2 \cdot \phi(x). \quad (15)$$

В уравнении (15) ρ_{0K} , C_{0K} – плотность и скорость звука в точке $P = 0$, $T = 0$, $x = 1$.

В [5–7] использовалось УРС типа (15), где величина n зависит от x . В уравнении (14) величина n линейно зависит от x в том диапазоне D и U , в котором справедлива зависимость $D(U)$ (6). Из выражений (4), (5) и (15) следует зависимость $n(x)$ (14), именуемая далее экспериментальной.

Функция $n(x)$ должна иметь максимум в окрестности $x \approx 1$ согласно [2] и [3]. Таким образом, если $x = 0$ и $n = n_0$, то справедливо утверждение, что $n_m > n_0$. Будем использовать простую функцию вида

$$n(x) = n_0 + (n_m - n_0) \frac{ax^2}{ax^2 + (x^2 - x_m^2)^2}, \quad (16)$$

где $a = \frac{16x_m^2}{4 - (n_m - n_0)^2}$. Зная, что при $x = 0$ и $x = \infty$ $n(x) = n_0$, а также при $x = x_m$ $n(x) = n_m$, из

(16) найдем производную $n(x)$ в виде

$$\frac{dn}{dx} = \frac{(n_m - n_0) \cdot 2ax^2 (x_m^2 - x^2)}{\left(ax^2 + (x^2 - x_m^2)^2\right)^2}. \quad (17)$$

Производная $n(x)$ равна нулю при $x = 0$, $x = \infty$ и $x = x_m$. Значение n_0 , как и значения n_m , x_m подберем из условия наилучшего описания экспериментальных данных, т.к. область применимости малопараметрического УРС ограничена конечным сжатием.

Функцию $\phi(x)$ из (15) возьмем в виде, максимально близком к выражению (12)

$$\phi(x) = \frac{1 - x}{x^{n_0 + 1}}. \quad (18)$$

Разделим давление и энергию на холодные и тепловые составляющие для определения температуры и теплоемкости.

$$P = P_X(x) + P_T(x, T), \quad E = E_X(x) + E_T(x, T). \quad (19)$$

В соответствии с [7] зависимость $E_T(x, T)$ возьмем в виде

$$E_T = \frac{AT^2}{\theta(x) + T}, \quad (20)$$

где A – индивидуальная характеристика вещества, для простых веществ близкая к $3R/\mu$; R – универсальная газовая постоянная; μ – молекулярная масса. Дифференцируя выражение (20), получим теплоемкость при постоянном x

$$C_V = \frac{AT \cdot (2\theta(x) + T)}{(\theta(x) + T)^2}. \quad (21)$$

В соответствии с [7] выражение для теплового давления будет иметь вид

$$P_T = -\frac{A}{\theta(x)} \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \cdot \frac{T^2}{\theta(x) + T}. \quad (22)$$

Зная, что справедливо уравнение

$$P_T = (n(x) - 1) \frac{\rho_{0K}}{x} E_T, \quad (23)$$

получим характеристическую функцию $\theta(x)$, которая связана с $n(x)$ уравнением

$$\frac{d \ln \theta(x)}{dx} = -\frac{n(x)-1}{x}. \quad (24)$$

Зависимость $\theta(x)$ следует из выражений (24) и (16)

$$\theta(x) = \theta_0 \cdot x^{1-n_0} \cdot \left(\frac{x^2 + B \cdot x_m^2}{x^2 + \frac{1}{B} \cdot x_m^2} \right), \quad (25)$$

где $B = \frac{2 + (n_m - n_0)}{2 - (n_m - n_0)}$.

Дополнительно сделаем такое условие, чтобы изобара $P = 10^{-4}$ ГПа проходила через точку, характеризующую нормальное состояние ($P = 10^{-4}$ ГПа, $T = 293$ К, $\rho = \rho_0$, $C_P = C_{P0}$), а также через точку плавления при $P = 10^{-4}$ ГПа ($T = T_{пл}$, $C_P = C_{Pпл}$, $\rho = \rho_{пл}$). При описании зависимости $C_P(T)$ при $P = \text{const}$ следует выразить C_P через T и x . С этой целью воспользуемся уравнением из [8]

$$C_P = C_V - \frac{T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_x^2}{\rho_{0K} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T}. \quad (26)$$

Зная, что $\left(\frac{\partial P_x}{\partial T} \right)_x = 0$, продифференцируем выражение (23). Производная $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_x$ запишется в виде

$$\left(\frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_x = \frac{(n(x)-1) \cdot \rho_{0K}}{x} \cdot C_V. \quad (27)$$

Так как выражение (19) справедливо, то производная $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T$ будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T = \frac{dP_x}{dx} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_T. \quad (28)$$

Уравнение состояния вещества определяется совокупностью уравнений (15)–(17) и (25) и содержит 7 параметров: ρ_{0K} , C_{0K} , A , n_0 , n_m , x_m и θ_0 . Численные значения этих параметров определяются таким образом, чтобы наилучшим образом описать поведение ударной адиабаты состояние вещества в точке, характеризующей нормальное состояние $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, $T_0 = 293$ К, $\rho_0 = \rho(P_0, T_0)$, $C_{P0} = C_P(\rho_0, T_0)$ и в точке плавления $P_{пл} = 10^{-4}$ ГПа, $T_1 = T_{пл}$, $\rho_1 = \rho_{пл}(T_{пл}, P_0)$, $C_{P1} = C_P(T_{пл}, P_0)$.

Результаты расчетов

Расчеты выполнены для нескольких сложных химических соединений. При помощи оригинальной версии симплекс-метода выполнен подбор основных параметров уравнения состояния. В качестве целевой функции выбрана сумма квадратичных разностей между расчетными и экспериментальными значениями теплового расширения вещества и теплоемкости при постоянном давлении. Для рассмотренных материалов получено удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. На рис. 1 показано сравнение безразмерного давления для ударных адиабат рассчитываемых материалов. Величина безразмерного давления определяется по формуле (29)

$$\Pi = \frac{P}{\rho_0 C_0^2}. \quad (29)$$

В качестве сравниваемых величин давлений используются экспериментальные, взятые из [2], и теоретические, определяемые из выражения (15).

Зависимость теплоемкости от температуры приведена на рис. 2, экспериментальные значения теплоемкости взяты из справочников [9–12]. В таблице сведены результаты расчетов подбора основных параметров УРС. Указанные в таблице значения n_0 являются подгоночными параметрами и в области, где $n < 1$ не применяется.

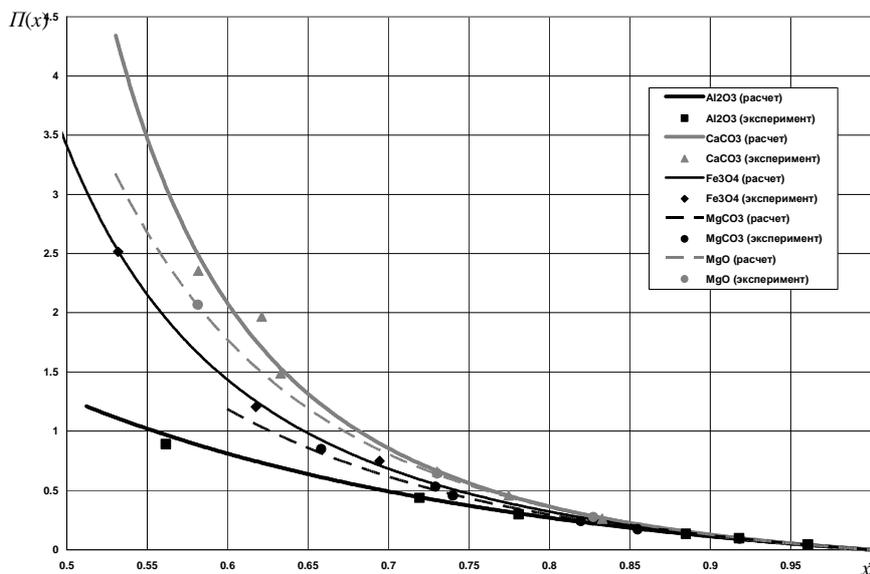


Рис. 1. Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей $\Pi(x)$ на ударной адиабате

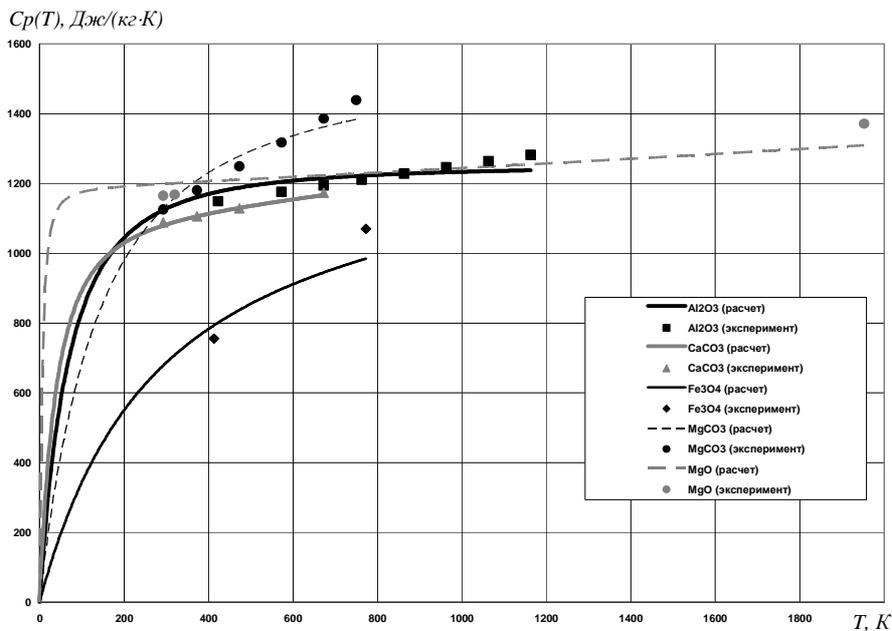


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей $C_p(T)$

Результаты подбора основных параметров уравнения состояния

Величины	Вещества				
	Al ₂ O ₃ (корунд)	CaCO ₃ (кальцит)	Fe ₃ O ₄ (магнетит)	MgCO ₃ (магнезит)	MgO (периклаз)
n_0	0,554	1,1617	0,518	0,897	1,073
n_m	1,242	2,375	2,353	2,120	2,220
x_m	1,522	0,621	1,041	1,415	0,852
ρ_{0K} , г/см ³	3,969	2,755	5,294	3,183	3,501
C_{0K} , км/с	8,757	3,813	4,722	6,482	5,972
$A \cdot 10^6$, кДж/г	1251	1092	1064	1440	1184
θ_0 , К	50,912	33,174	18,762	42,445	4,003

Литература

1. Забабахин, Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва / Е.И. Забабахин. – Снежинск: РФЯЦ-ВНИИФ, 1977. – 203 с.
2. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению веществ / Р.Ф. Трунин, Л.Ф. Гударенко, М.В. Жерноклетов, Г.В. Симаков. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001. – 439 с.
3. Жарков, В.И. Уравнение состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах / В.И. Жарков, В.А. Калинин. – М.: Наука, 1968. – 310 с.
4. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния компонентов низкотемпературной плазмы. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Часть 2. / В.Ф. Куропатенко. – М.: Янус-К, 2008. – серия Б, Том VII. – С. 436–450.
5. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошных сред. – 1977. – Т. 8. № 6. – С. 68–71.
6. Куропатенко, В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации плотных ВВ / В.Ф. Куропатенко // ФГВ. – 1989. – № 6. – С. 112–117.
7. Куропатенко, В.Ф. Моделирование отклика веществ на динамическое воздействие / В.Ф. Куропатенко // Химическая физика. – 2002. – Т. 21, № 10. – С. 46–54.
8. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Челябинский государственный университет, 2007. – 302 с.
9. Самсонов, Г.В. Тугоплавкие соединения (Справочник) / Г.В. Самсонов, И.М. Виницкий. – М.: Металлургия, 1969. – 456 с.
10. Кикоин, И.И. Таблицы физических величин. Справочник. / Под. ред. И.И. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
11. Физико-химические свойства окислов. Справочник. / Под. ред. Самсонова Г.В. – М.: Металлургия, 1969. – 456 с.
12. Рябин, В.А. Термодинамические свойства веществ. Справочник / В.А. Рябин, М.А. Остроумов, Т.Ф. Свит. – Л.: Химия, 1977. – 392 с.

Поступила в редакцию 11 августа 2015 г

SIMULATION OF SHOCK COMPRESSION AND THERMAL EXPANSION OF COMPLEX COMPOUNDS¹

V.F. Kuropatenko², S.Yu. Filatov³

A new method of the formulation of state equations in the area of not very big pressures is offered. Basic parameters of the state equation are selected for complex chemical compounds using the original version of the Simplex-method.

The method uses linear dependences of the shock wave velocity against the substance velocity and thermal expansion data under constant pressure. For the target function a sum of quadratic differences between calculated and experimental values has been selected. Satisfactory coincidence of theoretical and experimental values is obtained.

Keywords: state equation; Simplex-method; thermal expansion; shock compression.

References

1. Zababakhin E.I. *Nekotorye voprosy gazodinamiki vzryva* [Some questions of dynamics of gas explosion]. Snezhinsk: RFYaTs-VNIIF Publ., 1977. 203 p. (in Russ.).
2. Trunin R.F., Gudarenko L.F., Zhernokletov M.V., Simakov G.V. *Eksperimental'nye dannye po udarno-volnovomu szhatiyu i adiabaticheskomu rasshireniyu veshchestv* [The experimental data on shock compression and adiabatic expansion of materials]. Sarov, RFYaTs-VNIIEF Publ., 2001. 439 p. (in Russ.).
3. Zharkov V.I., Kalinin V.A. *Uravnenie sostoyaniya tverdykh tel pri vysokikh davleniyakh i temperaturakh* [The equation of the solids state at high pressures and temperatures]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 310 p. (in Russ.).
4. Kuropatenko V.F. *Uravnenie sostoyaniya komponentov nizkotemperaturnoy plazmy. Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy. Chast' 2.* [The equation of the components state of low-temperature plasma. Encyclopedia of low-temperature plasma. Part 2]. Moscow, Yanus-K Publ., 2008. Series B, Vol. VII. pp. 436–450. (in Russ.).
5. Kuropatenko V.F. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnykh sred*, 1977, Vol. 8, no. 6, pp. 68–71. (in Russ.).
6. Kuropatenko V.F. *Fizika gorennya i vzryva*. 1989. no. 6. pp. 112–117. (in Russ.).
7. Kuropatenko V.F. *Khimicheskaya fizika*. 2002. Vol. 21, no. 10. pp. 46–54. (in Russ.).
8. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnykh sred* [Models of continuum mechanics]. Chelyabinsk: Chelyabinskiiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2007. 302 p. (in Russ.).
9. Samsonov G.V., Vinnitskiy I.M. *Tugoplavkie soedineniya (Spravochnik)* [Refractory compounds (Reference)]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1969. 456 p.
10. Kikoin I.I. *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* [Tables of physical quantities. Guide.]. Moscow, Atomizdat Publ., 1976. 1008 p. (in Russ.).
11. Samsonova G.V. (Ed.) *Fiziko-khimicheskie svoystva okislov. Spravochnik* [Physical-chemical properties of oxides. Guide]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1969. 456 p. (in Russ.).
12. Ryabin V.A., Ostroumov M.A., Svit T.F. *Termodinamicheskie svoystva veshchestv. Spravochnik* [Thermodynamic properties of substances. Guide]. Leningrad, Khimiya Publ., 1977. 392 p. (in Russ.).

Received August 11, 2015

¹ The paper was supported by RFBR. Grant 13-01-00072.

² Kuropatenko Valentin Fedorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Scientist Officer, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation.

³ Filatov Sergey Yurjevich is Scientist Officer, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation.

E-mail: phil@chel.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА¹

И.Б. Палымский²

Рассматривается двумерная и нестационарная конвекция вязкой, несжимаемой жидкости в узком вертикальном канале при подогреве снизу. Численным решением получен новый асимптотический режим конвекции с линейной зависимостью чисел Нуссельта и Рейнольдса от числа Рэлея. Полученный асимптотический закон может быть рассмотрен как дополнение к общепринятому корневому закону.

Ключевые слова: конвекция; асимптотический режим; число Рэлея; число Прандтля; спектр; линейная неустойчивость.

Введение

Конвективные течения широко распространены в природе и наблюдаются в океане, атмосфере Земли, других планет и звезд, мантии Земли. Интенсивность конвекции зависит от числа Рэлея – безразмерного параметра, определяющего поведение жидкости под действием градиента температуры (определение см. ниже). При достаточно сильном подогреве снизу число Рэлея превышает его критическое значение и развивается неустойчивость равновесного режима. Как правило, число Рэлея в природных течениях значительно больше его значений в лабораторных экспериментах. Для примера укажем, что порядковые значения числа Рэлея в океанических течениях 10^{24} – 10^{27} , атмосфере – 10^{22} и Солнце – 10^{24} – 10^{27} [1], в то время как наибольшее достигнутое значение числа Рэлея в лабораторном эксперименте имеет порядок 10^{17} [2]. Огромный разрыв между значениями числа Рэлея не позволяет делать какие-либо выводы о характере природных конвективных течений и прогнозировать значения различных интегральных величин, например, интенсивности теплообмена и удельной кинетической энергии.

Зависимости интегральных величин от числа Рэлея, как правило, представляют степенными функциями. Кажется естественным ожидать, что показатели степенных законов должны выходить на свои предельные значения при достаточно большом числе Рэлея. Степенные законы, в которых показатели степени равны своим предельным (асимптотическим) значениям, называются асимптотическими (*ultimate regime*). Отметим, что, несмотря на очевидную важность таких исследований, вопрос о существовании асимптотического режима конвекции Рэлея–Бенара при высоком числе Рэлея до сих пор открыт и каких-либо убедительных экспериментальных и численных аргументов в пользу его существования или отсутствия не получено.

Вопрос об асимптотическом режиме конвекции интенсивно изучался экспериментально [2–6], теоретически и численно [7–9]. Как правило, считается, что асимптотический режим с точностью до зависимости от числа Прандтля совпадает с корневым законом Крэйчнана [7] для чисел Нуссельта и Рейнольдса $Nu \sim Ra^{0.5}$ и $Re \sim Ra^{0.5}$. Как показано ниже, эти корневые законы соответствуют предположению о том, что время жизни нагретой частицы достаточно большое и частица проходит весь путь между нижней и верхней горизонтальными границами.

Отметим, что результаты экспериментальных исследований конвекции Рэлея–Бенара при экстремально больших значениях числа Рэлея отличаются большим разбросом и зачастую противоречивы: в [3] при $r = 2 \cdot 10^{11}$ число Нуссельта выходит на асимптотический закон $Nu \sim Ra^{0.38}$, в то время как в двух других исследованиях [2, 4] получены близкие к $Nu \sim Ra^{0.3}$ законы, справедливые во всем интервале изменения числа Рэлея. При этом во всех трех работах использовался газообразный гелий при криогенной температуре вблизи критической точки (около 5°K) и цилиндрическая область с одинаковым (0,5) отношением диаметра цилиндра к его высоте. Такое же увеличение показателя степенного закона для числа Нуссельта получено в эксперименте с использованием газа SF₆ в качестве рабочей жидкости [5], однако эти результаты противоречат результатам того же автора, полученным на том же оборудовании [6].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант №15-08-05166.

² Палымский Игорь Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики, Сибирский государственный университет телекоммуникации и информатики, Новосибирск, Российская Федерация.

E-mail: palymsky@hnet.ru

В этой связи полезно обратить внимание на аналогию между конвекцией Рэлея-Бенара и другими видами конвекции. Смешанная центробежная конвекция возникает в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами при вращении их с одинаковыми угловыми скоростями и нагреве наружного, при увеличении скорости вращения смешанная конвекция асимптотически переходит в центробежную, с центробежной силой инерции вместо силы тяжести. В экспериментах по центробежной конвекции наблюдается близкий к линейному закон для теплообмена $Nu \sim Ra^{6/5}$ [10]. Подобный закон получен в экспериментах и расчетах для конвекции в пористой среде [11].

Численные расчеты однородной конвекции, то есть конвекции с периодическими граничными условиями во всех пространственных направлениях не показывают убедительно выход на асимптотический режим степенного закона для числа Нуссельта [8]. Более подробный анализ экспериментальных, численных и теоретических исследований с соответствующими ссылками можно найти в обзоре [1].

Как уже отмечалось, основная проблема при исследовании асимптотического режима связана с огромными значениями числа Рэлея. Однако физические соображения показывают, что необходимое для выхода на асимптотический режим число Рэлея может быть существенно уменьшено, если рассматривать конвекцию в узком вертикальном канале. Большая вертикальная протяженность области и турбулентный характер течения могут приводить к тому, что время жизни нагретой жидкой частицы станет сравнимым со временем ее движения между нижней и верхней горизонтальными границами. Под нагретой жидкой частицей здесь и далее понимается небольшая область пространства, состоящая из одних и тех же частиц среды. Как показано ниже, уменьшение времени жизни нагретой частицы приводит к установлению степенного закона k^4 в спектре скорости и другим (корневой закон заменяется линейным) асимптотическим соотношениям для числа Нуссельта и Рейнольдса $Nu \sim Ra$ и $Re \sim Ra$.

Такая физическая ситуация представляется в первом приближении нечувствительной к размерности задачи и виду граничных условий, и это обуславливает целесообразность численного моделирования конвекции в двумерной постановке со всеми свободными от касательных напряжений границами на первом этапе исследования.

Итак, целью данной работы является исследование двумерной стохастической конвекции вязкой несжимаемой жидкости в узком вертикальном канале (отношение высоты к ширине порядка 10) при подогреве снизу и высоком значении числа Рэлея ($\sim 2 \cdot 10^9$).

Постановка задачи

В работе рассматривается двумерная конвекция вязкой несжимаемой жидкости в узком канале (отношение горизонтального размера к вертикальному равно $\pi/30 \sim 0,1$) при подогреве снизу.

Система уравнений записана для отклонений от равновесного решения (нулевого для скорости и линейного для температуры) в переменных функция тока, вихрь и температура [12]:

$$\begin{aligned} \omega_t + \frac{1}{Pr}(\psi_z \omega_x - \psi_x \omega_z) &= \Delta \omega + Ra Q_x, \\ \Delta \psi &= -\omega, \\ Q_t + \frac{1}{Pr}(\psi_z Q_x - \psi_x Q_z) &= \frac{1}{Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \psi_x. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве масштаба длины выбрана высота области H , скорости – χ/H , времени – H^2/ν , dQ – разность температур на нижней и верхней границах, здесь χ – температуропроводность, ν – кинематическая вязкость, β – коэффициент теплового расширения и g – ускорение свободного падения. Здесь $Ra = g\beta H^3 dQ/\chi\nu$ и $Pr = \nu/\chi$ безразмерные числа Рэлея и Прандтля.

Постановка граничных условий стандартная и соответствует классической задаче Рэлея [12]. Все границы считаются фиксированными и свободными от касательных напряжений с обращением в нуль вертикальной компоненты скорости и касательного напряжения (функция тока ψ и вихрь ω равны нулю), горизонтальные границы при этом изотермические ($Q = 0$), а поток тепла через боковые стенки отсутствует ($Q_x = 0$).

Используется предложенный ранее спектрально-разностный численный метод, его описание, результаты линейного, нелинейного анализа и подробных тестовых расчетов приведены в [12]. Число Прандтля выбрано равным 10, число учитываемых в расчетах гармоник равно 65·513 для

$r \leq 10^3$ и $129 \cdot 1025$ при $r > 10^3$, здесь $r = Ra/Ra_{cr}$ – надкритичность, максимальное значение числа Рэлея и его критическое значение равнялись $2 \cdot 10^9$ и $Ra_{cr} = 837\,000$ соответственно.

Предварительные соображения

Источником конвективного движения является сила плавучести. Это обстоятельство и равенство размерности позволяет считать кинетическую энергию конвективного движения Ek пропорциональной работе силы плавучести: $v^2 \sim Ek \sim Ra \cdot Q \cdot S$, где S есть путь, проходимый нагретой жидкой частицей за время ее жизни. Здесь через v обозначена средняя скорость конвективного течения, а число Рейнольдса $Re = vH/\nu$ вычислено по средней скорости v , высоте слоя H и кинематической вязкости ν .

Время жизни нагретой жидкой частицы t_l определяется ее размером d и коэффициентом температуропроводности χ , размерностные соображения приводят к однозначному соотношению $t_l = d^2/\chi$. Другим характерным временным масштабом является время подъема жидкой частицы от нижней границы на высоту слоя H , которое с учетом соотношения для скорости свободного падения $v_f \sim (2g\beta \cdot dQ \cdot H)^{0.5}$ может быть оценено как $t_a = H^2/\nu \cdot (2Pr/Ra)^{0.5}$. При этом относительное время жизни нагретой жидкой частицы равно $\tau = t_l/t_a = C \cdot d^2/H^2$, где коэффициент $C = 0,7(Pr \cdot Ra)^{0.5}$ оказывается большим $C \gg 1$, в настоящей работе до $C \sim 10^5$.

Таким образом, время жизни частицы не слишком малого размера d много больше времени ее подъема и сила плавучести совершает работу на всем вертикальном перемещении и $Ek \sim v^2 \sim Ra \cdot Q \cdot l$. Учитывая, что отклонение температуры $Q = O(1)$, находим, что: $v \sim Re \sim Ra^{0.5}$, $Ek \sim Ra$. Из соотношения для числа Нуссельта $Nu = 1 + \langle (1 - y + Q) \cdot w \rangle$, где w есть вертикальная скорость $w \sim v \sim Ra^{0.5}$. Находим асимптотический закон для числа Нуссельта как $Nu \sim Ra^{0.5}$. Полученные корневые асимптотические законы для чисел Нуссельта и Рейнольдса с точностью до зависимости от числа Прандтля эквивалентны асимптотике Крэйчнана [7] и обычно рассматриваются в качестве асимптотически окончательного (*ultimate*) режима конвекции [1, 8].

Ситуация может измениться, если благодаря интенсивному турбулентному перемешиванию и/или связанному с этим уменьшению размера частиц, время жизни жидких нагретых частиц уменьшится так, что $\tau = t_l/t_a < 1$. Тогда за время жизни частица проходит расстояние $S = v \cdot t_l$ и, следовательно $v^2 \sim Ra \cdot Q \cdot v \cdot t_l$, $v \sim Ra$, $Ek \sim Ra^2$ и $Nu \sim Ra$.

Время жизни частицы зависит от ее размера d (волнового числа $k = 2\pi/d$) как $t_l \sim d^2 \sim k^{-2}$ (см. определение t_l выше). Учитывая, что скорость частицы может быть оценена как $v = \beta g \cdot dQ \cdot t_l$, находим, что $v \sim k^{-2}$, $Ek \sim v^2 \sim k^{-4}$. Таким образом, в спектре скорости может появиться степенной закон k^{-4} , отражающий уменьшение времени жизни нагретых жидких частиц.

Для полноты картины рассмотрим одномерные решения системы (1), а именно решения, не зависящие от вертикальной координаты z . Исходная система уравнений (1) при этом упрощается и становится линейной:

$$\omega_t = \omega_{xx} + Ra Q_x, \quad \psi_{xx} = -\omega, \quad Q_t = \frac{1}{Pr} Q_{xx} - \frac{1}{Pr} \psi_x.$$

Полученная система уравнений имеет семейство решений вида:

$$\omega(t, x) = \Omega \cdot e^{\lambda t + ikx}, \quad \psi(t, x) = \Psi \cdot e^{\lambda t + ikx}, \quad Q(t, x) = \Theta \cdot e^{\lambda t + ikx},$$

где Ω , Ψ и Θ – вещественные константы и при $\lambda > 0$ решение экспоненциально нарастает во времени, а при $\lambda < 0$ – затухает.

Для инкремента λ находим:

$$\lambda^2 + \lambda \cdot k^2(1 + 1/Pr) + k^4/Pr - Ra/Pr = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -k^2 \left(\frac{1+Pr}{2Pr} \right) \pm \sqrt{\frac{k^4(1-Pr)^2}{4 \cdot Pr^2} + \frac{Ra}{Pr}}.$$

Из приведенных соотношений можно видеть, что оба значения инкремента λ всегда вещественные, причем для корня, соответствующему наибольшему значению инкремента

$$\lambda_2 = -k^2 \left(\frac{1+Pr}{2Pr} \right) + \sqrt{\frac{k^4(1-Pr)^2}{4 \cdot Pr^2} + \frac{Ra}{Pr}}$$

находим, что $\lambda_2 \approx (Ra/Pr)^{0.5}$ при $k \ll 1$ и $\lambda_2 > 0$ при $0 < k < k^*$, где $k^* = Ra^{0.25}$. Таким образом, отсутствие зависимости решения от вертикальной координаты z означает его длинноволновую

линейную неустойчивость и монотонное увеличение протяженности области неустойчивости в пространстве волновых чисел с ростом числа Рэлея.

С другой стороны, решения исходной системы (1) крупномасштабны, так как вихри большого масштаба имеют наибольшее время жизни $t_l \sim d^2$ и, как следствие, наиболее устойчивы. Это и большой вертикальный размер области должны приводить к формированию структуры течения канального типа с восходящей и нисходящей струями по боковым границам области, без зависимости искомых полей от вертикальной координаты, обуславливая этим обращение в нуль всех нелинейных членов, интенсификацию течения через развитие линейной неустойчивости и последующее разрушение сформировавшегося крупномасштабного течения неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. В дальнейшем через некоторое время течение вновь становится крупномасштабным и описанный сценарий повторяется.

Результаты расчетов

На рис. 1 и 2 изображено число Нуссельта как функция надкритичности, на рис. 1 координаты двойные логарифмические. Рис. 1 показывает отсутствие участка с ростом числа Нуссельта по степенному закону. А из рис. 2 видно, что число Нуссельта в диапазоне надкритичности $100 < r < 2120$ растет по линейному закону с коэффициентом корреляции 0,9983.

На рис. 3 изображено число Рейнольдса как функция надкритичности. Видно, что число Нуссельта в диапазоне надкритичности $100 < r < 2120$ также растет по линейному закону с коэффициентом корреляции 0,9992. Среднеквадратичное значение функции тока ψ_{rms} есть мера интенсивности движения, так как $v \sim \psi_{rms}$. На рис. 4 изображено значение ψ_{rms} от надкритичности, виден участок линейного роста (корреляция 0,9989) при $100 < r < 2120$.

На рис. 5 приведено значение кинетической энергии как функции надкритичности. Видно, что при $100 < r < 2120$ Ek растет по квадратичному закону. На рис. 6 приведено среднее относительное время жизни жидкой частицы $\tau = t/t_a$ в зависимости от надкритичности. Значение t_l здесь определено как величина обратно пропорциональная характерной средней частоте, вычисленной по временному энергетическому спектру числа Нуссельта. Видно, что τ при $r > 10^3$ резко спадает приблизительно по обратному корневому закону до значений порядка единицы. Нефизично низкие значения τ при $r \leq 10^2$ обусловлены, по-видимому, простым периодическим режимом течения.

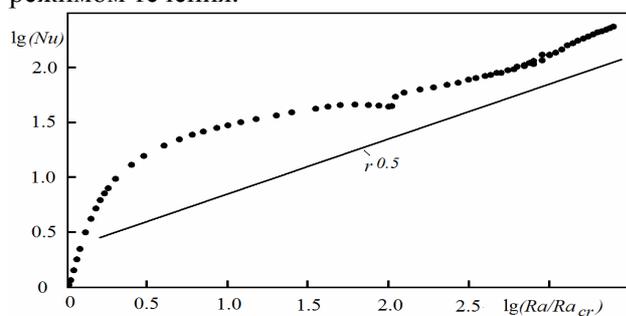


Рис. 1. Число Нуссельта в двойных логарифмических координатах

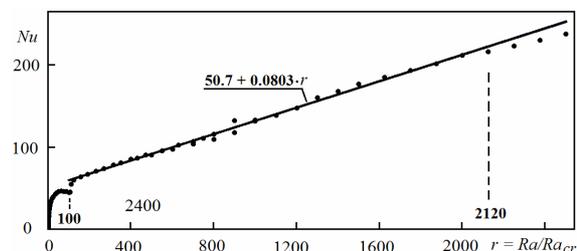


Рис. 2. Число Нуссельта как функция надкритичности

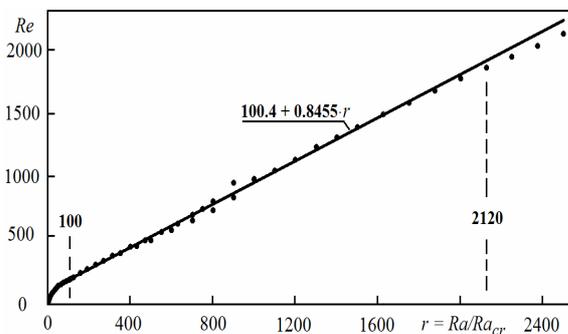


Рис. 3. Число Рейнольдса

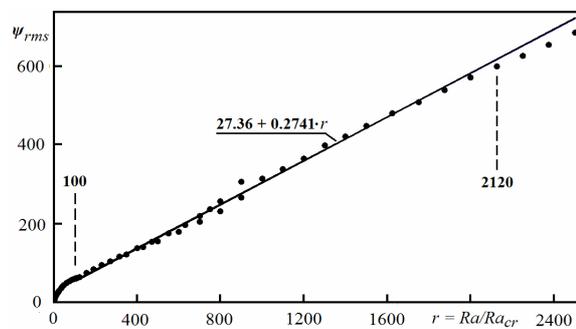


Рис. 4. Среднеквадратичное значение функции тока

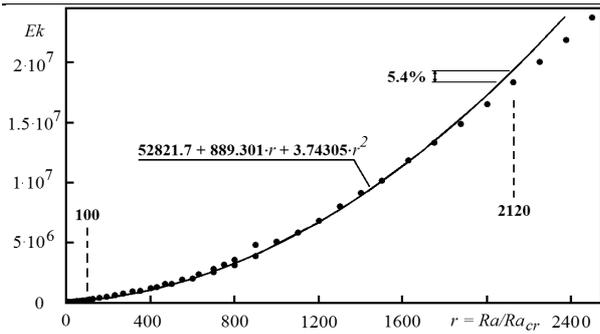


Рис. 5. Кинетическая энергия от r

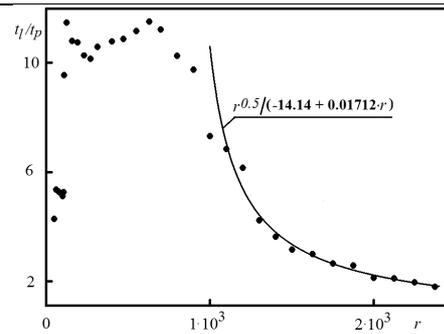


Рис. 6. Время жизни частицы

На рис. 7 изображен одномерный спектр скорости в горизонтальном x -направлении при $r = 314$, здесь K_x – волновое число в x -направлении. На больших масштабах во всех расчетах при $157 \leq r \leq 2375$ виден спектр уменьшенного времени жизни k^{-4} . А в вертикальном z -направлении определяющая роль силы плавучести обуславливает спектр Больджиано–Обухова [12] $k^{-11/5}$ во всех расчетах при $470 \leq r \leq 2375$.

Как уже отмечалось, наибольшее время жизни и, как следствие, наибольшую устойчивость имеют вихри наибольшего масштаба. На рис. 8 показаны изолинии функции тока (вертикальный и горизонтальный масштабы изображения отличаются примерно на порядок) с указанием направления движения нисходящей и восходящей струй вдоль боковых границ и временная динамика числа Нуссельта при $r = 314$, изолинии функции тока изображены в момент времени, когда значение числа Нуссельта максимально. Видно, что наиболее интенсивный теплоперенос связан с установлением крупномасштабной структуры течения.

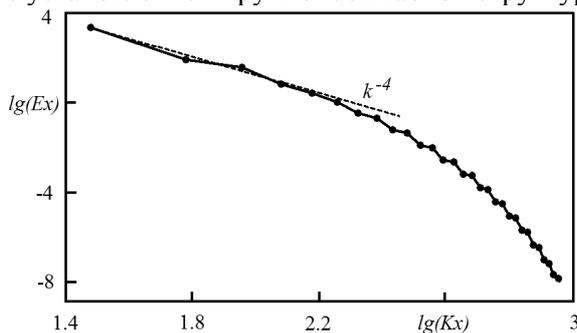


Рис. 7. Спектр скорости

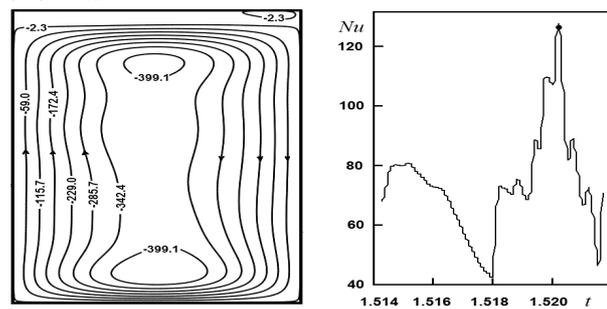


Рис. 8. Функция тока и число Нуссельта

Учитывая также, что вертикальный размер ϵ \ll λ и $\lambda \ll$ l , где λ – горизонтальный, можно считать, что максимальный теплообмен связан с установлением течения канального типа без зависимости искомых полей от вертикальной координаты. Последнее обуславливает обращение в нуль нелинейных членов, развитие длинноволновой линейной неустойчивости и, как следствие, интенсификацию течения. В дальнейшем сформировавшееся крупномасштабное течение разрушается неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. А через некоторое время опять формируется крупномасштабная вихревая структура и в дальнейшем все повторяется.

Динамика развития числа Нуссельта во времени крайне сложная, так как время от времени включающийся механизм развития линейной неустойчивости приводит к изобилию резких пиков на графиках зависимости числа Нуссельта (рис. 8 а также среднеквадратичного значения скорости и функции тока, числа Рейнольдса и кинетической энергии) от времени, формируя непрерывный спектр (рис. 7) и турбулентный характер течения [12]. Наблюдаемые отклонения от линейного закона при высокой надкритичности на рис. 2–4 и квадратичного на рис. 5 связаны с потерей точности вычислений из-за больших значений числа Рейнольдса.

Заключение

Сформулируем основные результаты исследования. Рассмотрение конвекции в узком канале позволило получить новый асимптотический режим с линейным законом роста для чисел Нуссельта и Рейнольдса как $Nu \sim Ra$ и $Re \sim Ra$. Возможность появления такого режима обусловлена тем, что благодаря развитию турбулентного перемешивания время жизни нагретой жидкой час-

тицы становится сравнимым со временем ее движения между горизонтальными границами. Зависимость времени жизни нагретой жидкой частицы от ее размера как $t_l \sim d^2$ обуславливает наибольшую устойчивость вихрей самого крупного размера из допускаемых геометрией области. Большая вертикальная протяженность области и крупномасштабный характер течения приводят к относительно слабой зависимости решения от вертикальной координаты, обращению в нуль всех нелинейных членов и линейной неустойчивости течения.

Итак, физический механизм интенсификации течения может быть схематично представлен как установление крупномасштабного течения каналového типа с восходящей и нисходящей струями по боковым границам области, без зависимости искомых полей от вертикальной координаты, как следствие – обращение в нуль нелинейных членов и интенсификация течения через развитие линейной неустойчивости и последующее разрушение сформировавшегося крупномасштабного течения неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. В дальнейшем через некоторое время снова формируется крупномасштабная структура течения и все повторяется.

Отметим, что на данный момент времени для линейного асимптотического режима не получено экспериментального подтверждения, как впрочем и для корневого закона [1, 7, 8] и теоретической оценки числа Нуссельта [9] $Nu \leq 0,2891 \cdot Ra^{5/12}$ из-за недостаточно больших значений числа Рэлея в лабораторных экспериментах и большого разброса результатов. Однако полученный в работе расчетный режим течения широко известен как классический при конвекции в пористой среде [11] и центробежной конвекции [10]. Очевидная аналогия между различными видами конвекции позволяет нам быть уверенными, что полученный в наших расчетах линейный режим существует и может быть обнаружен и в других экспериментальных и расчетных работах по конвекции Рэлея–Бенара, если числа Рэлея в исследованиях будут выбраны достаточно большими.

Автор благодарит к.ф.-м.н. П.А. Фомина, И.В. Фролова и А.В. Трилиса за помощь в проведении расчетов и обсуждение результатов.

Литература

1. Chillà, F. New perspectives in turbulent Rayleigh–Benard convection / F. Chillà, J. Schumacher // *Eur. Phys. J. E.* – 2012. – Vol. 35, no. 7, p.58. DOI: 10.1140/epje/i2012-12058-1
2. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers / J.J. Niemela, L. Skrbek, K.R. Sreenivasan, R.J. Donnelly // *Nature.* – 2000. – Vol. 404, № 20. – P. 837–840.
3. Turbulent Rayleigh-Benard convection in gaseous and liquid He / X. Chavanne, F. Chilla, B. Chabaud, B. Castaing, B. Hebral // *Phys. Fluids.* – 2001. – Vol. 13, № 5. – P. 1300–1320.
4. Wu, X.-Z. Scaling relations in thermal turbulence: the aspect-ratio dependence / X.-Z. Wu, A. Libchaber // *Phys. Rev. A.* – 1992. – Vol. 45, № 2. – P. 842-845.
5. He, X.-Zh. Transition to the ultimate state of turbulent Rayleigh–Benard convection / X.-Zh. He, D. Funfschilling, H. Nobach *et al.* // *Phys. Rev. Let.* – 2012. – Vol. 108. – P. 024502-1-5.
6. Ahlers, G. Transition in heat transport by turbulent convection at Rayleigh numbers up to 10^{15} / G. Ahlers, D. Funfschilling, E. Bodenschatz // *New journal of physics.* – 2009. – Vol. 11. – P. 123001-123018.
7. Kraichnan, R.H. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number / R.H. Kraichnan // *Phys. Fluids.* – 1962. – Vol. 5. – P. 1374.
8. Rayleigh and Prandtl number scaling in the bulk of Rayleigh–Benard turbulence / E. Calzavarini, D. Lohse, F. Toschi, R. Tripicciono // *Phys. Fluids.* – 2005. – Vol. 17. – P.055107-1-7.
9. Whitehead, J.P. Ultimate state of two-dimensional Rayleigh–Benard convection between free-slip fixed-temperature boundaries / J.P. Whitehead, C.R. Doering // *Phys. Rev. Let.* – 2011. – Vol. 106. – P. 244501-1-4.
10. Boundary layer control of rotating convection systems / E.M. King, S. Stellmach, J. Noir *et al.* // *Nature.* – 2009. – Vol. 457, № 7227. – P. 301–304.
11. Hewitt, D.R. Ultimate regime of high Rayleigh number convection in a porous medium / D.R. Hewitt, J.A. Neufeld, J.R. Lister // *Phys. Rev. Let.* – 2012. – Vol. 108. – P. 224503-1-4.
12. Палымский, И.Б. Турбулентная конвекция Рэлея–Бенара. Численный метод и результаты расчетов / И.Б. Палымский. – Germany: LAP, 2011. – 232 с.

Поступила в редакцию 25 марта 2015 г.

ON THE ULTIMATE REGIME OF RAYLEIGH-BERNARD CONVECTION

I.B. Palymskiy¹

A two-dimensional and non-stationary convection of a viscous incompressible liquid in a vertical narrow channel during down heating is discussed.

A new asymptotic regime of convection with a linear dependence of Nusselt and Reynolds numbers on the Rayleigh number was derived. The asymptotic law derived can be considered as an addition to the fundamental root law.

Keywords: convection; asymptotic regime; Rayleigh number; Prandtl number; spectrum; linear instability.

References

1. Chillà F., Schumacher J. New perspectives in turbulent Rayleigh–Benard convection. *Eur. Phys. J. E*, 2012, Vol. 35, no. 7, p. 58. DOI: 10.1140/epje/i2012-12058-1
2. Niemela J.J., Skrbek L., Sreenivasan K.R., Donnelly R.J. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers. *Nature*, 2000, Vol. 404, no. 20, pp. 837–840. DOI: 10.1038/35009036
3. Chavanne X., Chilla F., Chabaud B., Castaing B., Hebral B. Turbulent Rayleigh–Benard convection in gaseous and liquid He. *Phys. Fluids*, 2001, Vol. 13, no. 5, pp. 1300–1320. DOI: 10.1063/1.1355683
4. Wu X.-Z., Libchaber A. Scaling relations in thermal turbulence: the aspect-ratio dependence. *Phys. Rev. A*, 1992, Vol. 45, no. 2, pp. 842–845. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.842
5. He X.-Zh., Funfschilling D., Nobach H., Bodenschatz E., Ahlers G. Transition to the ultimate state of turbulent Rayleigh–Benard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, Vol. 108, p. 024502-1-5. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.024502
6. Ahlers G., Funfschilling D., Bodenschatz E. Transition in heat transport by turbulent convection at Rayleigh numbers up to 10^{15} . *New journal of physics*, 2009, Vol. 11, pp. 123001–123018. DOI: 10.1088/1367-2630/11/12/123001
7. Kraichnan, R.H. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluids*, 1962, Vol. 5, p. 1374. DOI: 10.1063/1.1706533
8. Calzavarini E., Lohse D., Toschi F., Tripicciono R. Rayleigh and Prandtl number scaling in the bulk of Rayleigh–Benard turbulence. *Phys. Fluids*, 2005, Vol. 17, pp. 055107-1-7. DOI: 10.1063/1.1884165
9. Whitehead J.P., Doering C.R. Ultimate state of two-dimensional Rayleigh–Benard convection between free-slip fixed-temperature boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, Vol. 106, pp. 244501-1-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.244501
10. King E.M., Stellmach S., Noir J., Hansen U., Aurnou J.M. Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature*, 2009, Vol. 457, no. 7227, pp. 301–304. DOI: 10.1038/nature07647
11. Hewitt D.R., Neufeld J.A., Lister J.R. Ultimate regime of high Rayleigh number convection in a porous medium. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, Vol. 108, p. 224503-1-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.224503
12. Palymskiy I.B. *Turbulentnaya konvektsiya Releya–Benara. Chislennyy metod i rezul'taty raschetov* [Turbulent Rayleigh–Benard convection. Numerical method and calculation results]. Germany: LAP, 2011. 232 p.

Received March 25, 2015

¹ Palymskiy Igor Borisovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Physics Department, Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, Russia.

E-mail: palymsky@hnet.ru

ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСНОГО ТЕРМОАКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

С.Ю. Гуревич¹, Ю.В. Петров², Е.В. Голубев³, О.В. Карасев⁴

Приведены результаты экспериментального исследования по выявлению зависимости характеристик направленности импульсного лазерного термоакустического излучателя объемных ультразвуковых волн от его энергетических и геометрических параметров. Описаны экспериментальный стенд и методика измерений. Полученные результаты можно использовать при создании средств бесконтактного у.з. контроля качества металлических материалов и изделий.

Ключевые слова: лазерный термоакустический излучатель; характеристики направленности; широкополосный электромагнитоакустический приемник.

Введение

При лазерной генерации у.з. волн в металлических материалах и изделиях источником у.з. колебаний является нагреваемый световыми импульсами участок поверхности металла [1]. Как показывает опыт, эффективность работы такого лазерного импульсного термоакустического (ТА) излучателя определяется в основном мощностью его теплового излучения и направленностью. От мощности зависит интенсивность возбуждаемых у.з. волн, а от направленности – способность излучать их в одних направлениях в большей степени, чем в других.

Направленность у.з. излучателя обычно описывают характеристикой направленности. Она определяет такие его свойства как чувствительность, погрешности измерения толщины изделия, скоростей у.з. волн или координат дефектов, а также избирательность (по угловым координатам) [2]. Имеется ряд работ [3–5], в которых исследовалась характеристика направленности лазерного импульсного ТА излучателя при *термоупругом* механизме оптоакустического преобразования в металле. При повышении интенсивности возбуждаемого ультразвука за счет увеличения мощности лазерного излучения к термоупругому механизму добавляются *гидродинамический* и *испарительный* [6].

Смена механизма лазерной генерации у.з. волн может оказать существенное влияние как на направленность ТА излучателя, так и на амплитуду, форму, длительность и спектр (амплитудный и фазовый) возбуждаемых у.з. импульсов. Кроме того, в указанных работах недостаточно подробно исследован вопрос о влиянии площади ТА излучателя на его направленность и основные характеристики возбуждаемых упругих импульсов.

Таким образом, проведение исследований зависимости направленности лазерного импульсного ТА излучателя и основных характеристик возбуждаемых излучателем у.з. импульсов от его энергетических и геометрических параметров значительно ускорит внедрение лазерных бесконтактных генераторов ультразвука в практику дефектоскопии металлических материалов и изделий.

Описание экспериментальной установки. Методика проведения исследований

Для проведения экспериментальных исследований использовали установку, схема которой показана на рис. 1. Нагрев поверхности металла осуществляется импульсным лазером Nd: YAG

¹ Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: gurevichsi@susu.ac.ru

² Петров Юрий Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: petrovuv@susu.ac.ru

³ Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: ev_golubev@mail.ru

⁴ Карасев Олег Викторович – заведующий лабораторией, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Brilliant-B фирмы QUANTEL с модулированной добротностью. Длина волны лазерного излучения – 1064 нм, длительность лазерных импульсов от 4 до 6 нс, их энергия 0,85 Дж. Диаметр лазерного пучка – 9,5 мм, его расхождение – менее чем 0,7 мрад.

Для регулирования и измерения параметров лазерного излучения использовали оптический аттенуатор и прибор ИМО-2Н. Изменение формы и размеров ТА излучателя осуществляли с помощью диафрагм. В качестве образцов, в которых возбуждаются объемные у.з. волны, использовали полудиски из железоникелевого сплава 32НКД и дюралюминиевого сплава Д-16Т. Диаметр и толщина полудисков равны, соответственно, 220 и 50 мм. На боковой поверхности образцов нанесена шкала углов излучения θ с ценой наименьшего деления 5° . Отсчет углов ведется в обе стороны от нормали к центру основания диска.

Для регистрации возбуждаемых у.з. волн использовали широкополосный (от 0,5 до 60 МГц) приемный тракт. Он состоит из последовательно соединенных электромагнитного (ЭМА) приемника, усилителей тока, напряжения и широкополосного цифрового осциллографа GDS-2202. Конструкция ЭМА приемника может обеспечивать наиболее оптимальный прием как продольных, так и поперечных у.з. волн [7]. В осциллографе осуществляли цифровое запоминание регистрируемых ЭМА приемником электрических импульсов, автоматическую установку их изображений, автоматическое измерение амплитудно-временных параметров, быстрое преобразование Фурье (БПФ) с выводом результатов на экран дисплея.

На рис. 2 приведена одна из осциллограмм зарегистрированного ЭМА приемником электромагнитного импульса и его амплитудно-частотного спектра при лазерной термоакустической генерации продольных волн в железоникелевом полудиске. Угол излучения ультразвука 0° , средняя мощность лазерных импульсов 7,0 Вт, площадь ТА излучателя – 70,9 мм². Считается, что наблюдаемые и измеряемые на экране осциллографа форма, амплитуда, длительность и спектры электромагнитных импульсов пропорциональны соответствующим величинам в возбуждаемых у.з. импульсах. Предел допускаемых значений относительной погрешности измеряемых величин не превышает $\pm 3\%$.

Результаты исследований и их обсуждение

В качестве образца был выбран железоникелевый полудиск. Лазерное излучение средней мощности $\langle P_T \rangle = 7,0$ Вт с частотой 10,0 Гц направляли в центр основания полудиска. В ходе опыта использовали диафрагму с отверстием, диаметр которого изменяли от 8,0 мм до 1,0 мм с шагом 1,0 мм. При этом соответственно изменялись площадь S и средняя мощность $\langle P_T \rangle$ теплового излучения ТА излучателя.

Таким образом, в первом приближении можно считать, что на поверхности металла действует ТА излучатель со средней мощностью теплового излучения

$$\langle P_T \rangle \approx \langle P_\lambda \rangle (1-k) \frac{S^*}{S},$$

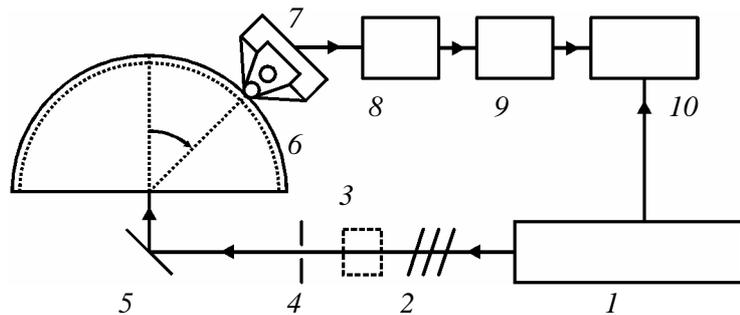


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 – лазер, 2 – оптический аттенуатор, 3 – измеритель мощности лазерного излучения, 4 – диафрагма, 5 – полупрозрачное зеркало, 6 – металлический полудиск со шкалой углов излучения, 7 – ЭМА приемник, 8 – усилитель тока, 9 – усилитель напряжения, 10 – цифровой осциллограф

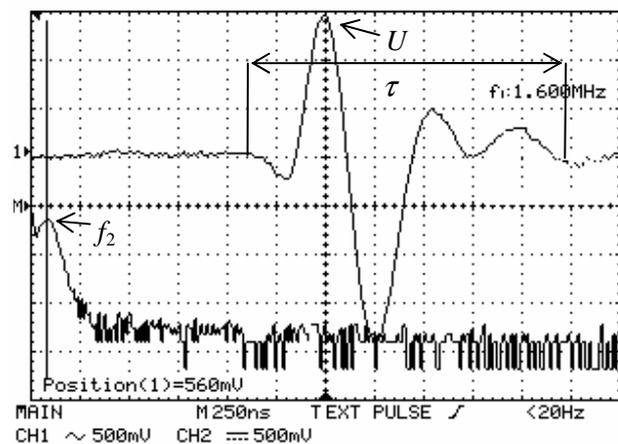


Рис. 2. Осциллограмма электромагнитного импульса и его амплитудно-частотного спектра, зарегистрированного ЭМА приемником. Цена делений масштабной сетки дисплея: по вертикали – CH1 = 500 mV, по горизонтали – M = 250 ns, U – максимальная амплитуда, τ – длительность импульса, f₂ – частота, на которую приходится максимум спектра импульса

где $S^* = \pi D^2 / 4$ – площадь ТА излучателя, $D = 1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0; 7,0; 8,0; 9,5$ мм – его диаметр, $k = 0,6$ – коэффициент отражения лазерного излучения от металла, $S = 70,9 \text{ мм}^2$ – площадь сечения лазерного луча. Средняя поверхностная плотность мощности теплового излучения ТА излучателей оценивалась по формуле

$$\langle q \rangle = \frac{\langle P_T \rangle}{S^* \nu \tau} = \frac{\langle P_\lambda \rangle}{S \nu \tau} (1 - k),$$

где $\tau = 5,0$ нс, $\nu = 10,0$ Гц – длительность и частота следования лазерных импульсов. Подставив числовые значения, получим

$$\langle q \rangle = \frac{7,0 \cdot}{70,9 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 10} (1 - 0,6) = 7,9 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{Вт}}{\text{мм}^2} \right) = 79 \left(\frac{\text{МВт}}{\text{см}^2} \right).$$

ЭМА приемник, настроенный на регистрацию продольных волн, перемещался по средней линии поверхности полудиска от 0° с шагом 5° до 80° шкалы углов излучения. В результате по полученным осциллограммам были определены как функции площади ТА излучателя:

- характеристики направленности (зависимости максимальной амплитуды у.з. импульса от угла излучения);
- ширина основного «лепестка» характеристики направленности по уровню 0,7;
- форма и длительность у.з. импульса для разных углов излучения.

Кроме того, с помощью БПФ была исследована зависимость амплитудно-частотного спектра у.з. импульсов, возбуждаемых ТА излучателями разной площади S , от угла излучения. Основные результаты исследований отображены на рис. 3–8.

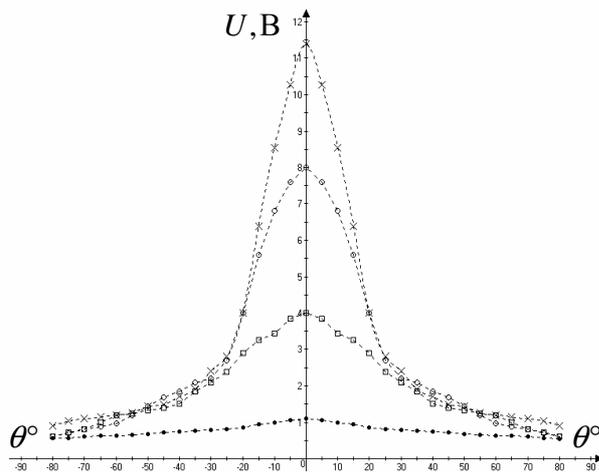


Рис. 3. Характеристики направленности лазерного ТА излучателя продольных волн площадью: $\Delta\theta^\circ$ – $70,9 \text{ мм}^2$; \circ – $28,3 \text{ мм}^2$; \square – $12,6 \text{ мм}^2$; \bullet – $3,1 \text{ мм}^2$

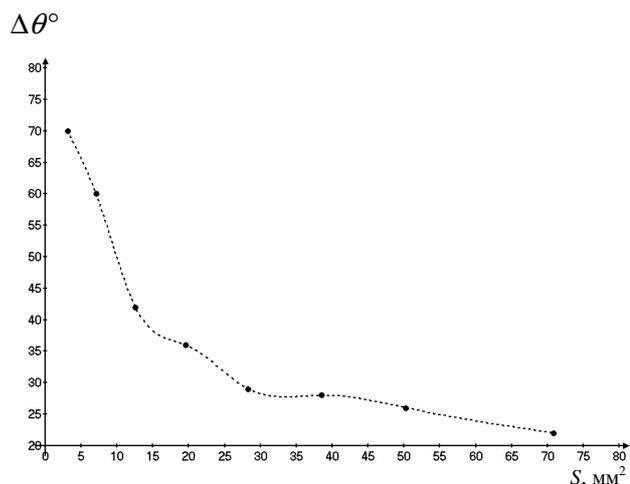


Рис. 4. Зависимость ширины основного «лепестка» $\Delta\theta^\circ$ характеристики направленности ТА излучателя от его площади S

На рис. 3 представлены некоторые результаты экспериментального определения характеристик направленности лазерного импульсного ТА излучателя продольных волн в зависимости от его площади. Из рисунка следует, что излучение у.з. волн сосредоточено в пределах одного (основного) «лепестка» характеристики направленности и его максимум направлен по нормали к центру поверхности ТА излучателя. Боковые «лепестки» характеристик направленности практически отсутствуют. С увеличением площади отчетливо проявляется более эффективное распределение энергии у.з. колебаний (рост амплитуды, уменьшение углов излучения.). Это подтверждается рис. 4, на котором приведена зависимость ширины основного «лепестка» (по уровню 0,7 от максимальной амплитуды) характеристики направленности ТА излучателя от его площади. По мере увеличения площади ширина «лепестка» уменьшается по зависимости, напоминающей экспоненциальную. Для площадей от $3,0$ до $30,0 \text{ мм}^2$ эта «экспонента» более крутая, чем для площадей более $30,0 \text{ мм}^2$.

На рис. 5 представлена зависимость наибольшей амплитуды у.з. импульса от площади ТА излучателя в максимуме основного «лепестка», то есть при угле излучения у.з. волн, равном ну-

лю. Видно, что с увеличением площади амплитуда монотонно увеличивается по экспоненте, но темп её роста разный: для площадей от 3,0 до 30,0 мм² он значительно больше, чем для площадей больших 30,0 мм².

На рис. 6 приведена зависимость длительности у.з. импульса продольных волн, возбуждаемых ТА излучателем разной площади, от угла излучения. Из графиков следует, что, независимо от величины площади ТА излучателя, длительность импульса с увеличением угла излучения растет практически линейно.

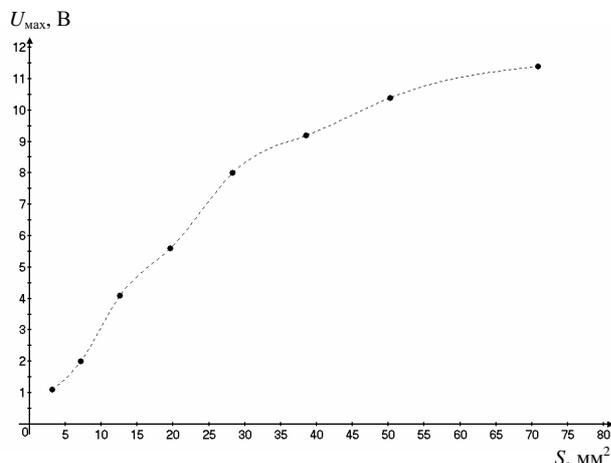


Рис. 5. Зависимость амплитуды U_{\max} акустического импульса в максимуме основного лепестка характеристики направленности ТА излучателя от его площади S

Зависимость длительности у.з. импульса от площади ТА излучателя для разных углов излучения можно увидеть на рис. 7. Для небольших углов (до 20°) эта зависимость практически линейная. С увеличением угла излучения она становится экспоненциальной, и чем больше площадь ТА излучателя, тем больше темп роста экспоненты, а значит и длительности импульса.

Исследование зависимости формы у.з. импульса от площади ТА излучателя для разных углов излучения показало, что начиная с 30°, для площадей от 70,9 до 28,3 мм² он разделяется на два. Для площадей от 19,6 до 12,6 мм² подобное разделение начинается с угла излучения 50°. Для площадей от 7,1 до 3,1 мм² разделение у.з. импульса во всем диапазоне углов излучения не происходит. В качестве примера на рис. 8 приведена осциллограмма у.з. импульса, возбуждаемого ТА излучателем площадью 70,9 мм² под углом 30°. Видно, что первоначальный импульс разделился на два импульса, каждый из которых имеет максимальную амплитуду, длительность и спектр.

Причина разделения заключается в том, что возбуждаемые диаметрально противоположными краями ТА излучателя у.з. импульсы при нулевом угле излучения достигают ЭМА приемника одновременно, и мы наблюдаем моноимпульс (рис. 2). С увеличением угла излучения импульсы от краев проходят до приемника разные расстояния. Максимум импульса от дальнего края регистрируется позже, чем от ближнего. При определенном угле излучения «время запаздывания» у.з. импульсов друг относительно друга становится сравнимым с их длительностью и моноимпульс начинает разделяться. С уменьшением площади ТА излучателя «время запаздывания» становится меньше длительности моноимпульса и тогда независимо от угла излучения его разделение не происходит.

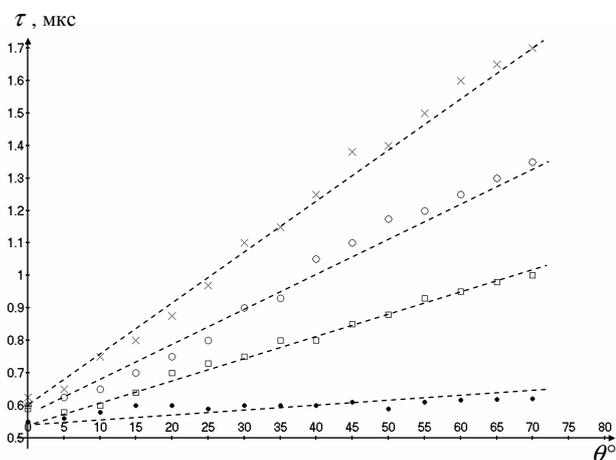


Рис. 6. Зависимость длительности акустического импульса продольных волн от угла излучения для ТА излучателем площадью: × – 70,9; ○ – 28,3; □ – 12,6; ● – 3,1 мм²

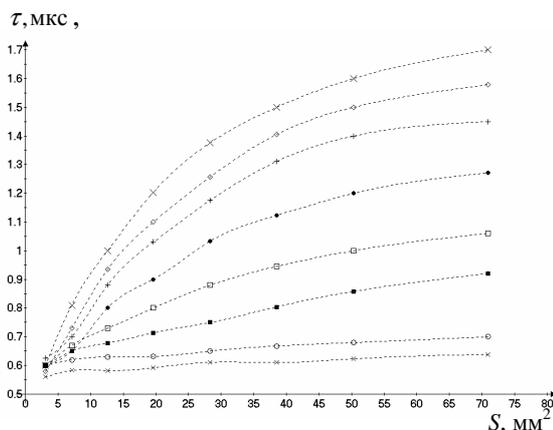


Рис. 7. Зависимость длительности τ акустических импульсов, возбуждаемых ТА излучателем, от его площади для углов излучения: × – 0°, ○ – 10°, ■ – 20°, □ – 30°, ● – 40°, + – 50°, ◇ – 60°, X – 70°

На рис. 9 приведены некоторые результаты по определению зависимости частоты f_1 , на которую приходится максимум амплитуды в спектре у.з. импульсов, возбуждаемых ТА излучателями, от их площади и углов излучения.

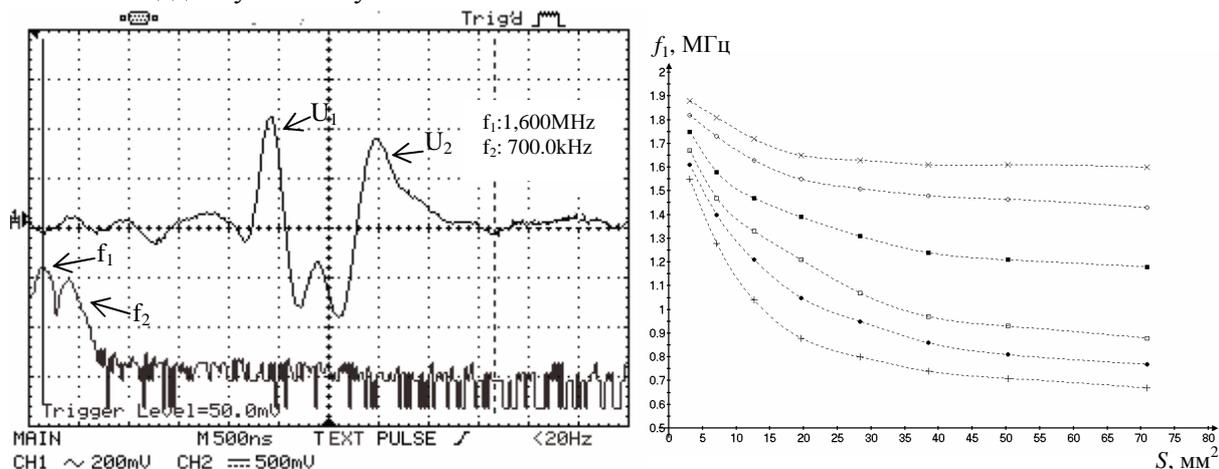


Рис. 8. Осциллограмма разделенного у.з. импульса и его амплитудно-частотного спектра. Цена делений масштабной сетки дисплея: по вертикали – CH1 = 200 mV, по горизонтали – M = 500 ns, U_1 , U_2 – максимальные амплитуды, разделенных импульсов, f_1 , f_2 – частоты, на которые приходятся максимумы их спектров

Рис. 9. Зависимость частоты f_1 , на которую приходится максимум спектра возбуждаемых ТА излучателем импульсов, от его площади для углов излучения: \times – 0°, \circ – 10°, \blacksquare – 20°, \square – 30°, \bullet – 40°, $+$ – 50°

Видно, что полученные зависимости при одних и тех же углах излучения по форме с точностью «до наоборот» совпадают с зависимостями длительности у.з. импульса от площади ТА излучателя (рис. 7). То есть при углах излучения меньше 20° для площадей больше 30 мм² частота f_1 зависит от площади ТА излучателя практически линейно, а с уменьшением площади увеличивается по экспоненте. Для углов излучения больших 20°, эта зависимость становится чисто экспоненциальной, и чем меньше площадь ТА излучателя, тем больше темп роста экспоненты, а значит и частоты f_1 .

Выводы

1. Разработан, изготовлен и испытан в лабораторных условиях стенд для определения характеристик направленности лазерного импульсного термоакустического излучателя.
2. В результате исследований были определены как функции площади ТА излучателя: характеристики направленности, ширина основного «лепестка» характеристик направленности, форма и основные параметры возбуждаемых у.з. импульсов при разных углах излучения.
3. Исследована зависимость амплитудно-частотного спектра у.з. импульсов, возбуждаемых ТА излучателями разной площади, от угла излучения.
4. Результаты исследований позволяют обоснованно выбрать оптимальные геометрические и энергетические параметры лазерного импульсного ТА излучателя при создании аппаратуры для бесконтактного ультразвукового контроля качества металлических материалов и изделий.

Литература

1. Возбуждение ультразвука в железе при фазовом переходе под действием лазерных импульсов / Г.А. Буденков, С.Ю. Гуревич, А.Д. Каунов, А.Ф. Маскаев // Акустич. журнал. – 1983. – Т. 29, № 4. – С. 561–562.
2. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. Справочник. В 2-х книгах. Кн. 2 / Под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1986. – 352 с.
3. Электромагнитно-акустический преобразователь для регистрации упругих волн, возбуждаемых лучом лазера / Ю.В. Петров, В.Н. Уманец, В.Ю. Тросман, В.А. Ершов // Дефектоскопия. – 1989. – № 11. – С. 89–91.
4. Гуревич, С.Ю. Стенд для определения характеристик направленности бесконтактных излучателей ультразвука / С.Ю. Гуревич, Ю.Г. Гальцев // Дефектоскопия. – 1991. – № 12. – С. 23–27.

5. Петров, Ю.В. Экспериментальное исследование поперечных волн, возбуждаемых в металле лазерным импульсом / Ю.В. Петров, А.В. Шушарин // Дефектоскопия. – 2000. – № 9. – С. 87–94.

6. О границах механизмов термоакустического преобразования при лазерной генерации ультразвука в металлах / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, А.А. Шульгинов, К.В. Прокопьев // Дефектоскопия. – 2001. – № 4. – С. 69–75.

7. ЭМА-регистрация ультразвуковых волн Лэмба, возбуждаемых лазерными нанопульсами / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Е.В. Голубев, А.А. Шульгинов // Дефектоскопия. – 2013. – № 8. – С. 3–8.

Поступила в редакцию 5 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 68–73

DOI: 10.14529/mmph150409

DIRECTIONAL CHARACTERISTICS OF THE LASER PULSE THERMOACOUSTIC EMITTER

S.Yu. Gurevich¹, Yu.V. Petrov², E.V. Golubev³, O.V. Karasev⁴

Results of experimental studies to identify the dependence of directional characteristics of the laser pulse thermoacoustic emitter of bulk ultrasonic waves on its energy and geometrical parameters are shown. The experimental stand and measurement technique are described. The results obtained can be used to create a non-contact means of the ultrasonic quality control of metallic materials and products.

Keywords: laser thermoacoustic emitter; directional characteristics; broadband; electromagnet acoustic receiver.

References

1. Budenkov G.A., Gurevich S.Yu., Kaunov A.D., Maskaev A.F. *Akusticheskiy zhurnal*, 1983, Vol. 29, no. 4, pp. 561–562. (in Russ.).

2. Klyuev V.V. (Ed.) *Pribory dlya nerazrushayushchego kontrolya materialov i izdeliy. Spravochnik. V 2-kh knigakh. Kn. 2* [Devices for non-destructive testing of materials and products. Guide. In 2 books. Bk. 2]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 352 p. (in Russ.).

3. Petrov Yu.V., Umanets V.N., Trosman V.Yu., Ershov V.A. *Defektoskopiya*, 1989, no. 11, pp. 89–91. (in Russ.).

4. Gurevich S.Yu., Gal'tsev Yu.G. *Defektoskopiya*, 1991, no. 12, pp. 23–27. (in Russ.).

5. Petrov Yu.V., Shusharin A.V. *Defektoskopiya*, 2000, no. 9, pp. 87–94. (in Russ.).

6. Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V., Shul'ginov A.A., Prokop'ev K.V. On Boundaries between Mechanisms of Thermoacoustic Conversion of Laser Pulses to Ultrasound in Metals. *Russian Journal of Non-destructive Testing*, 2001, Vol. 37, Issue 4, pp 296–300. (in Russ.). DOI: 10.1023/A:1012363207713

7. Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V., Golubev E.V., Shulginov A.A. EMA Recording of Ultrasound Lamb Waves Excited by Laser Nanopulses. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2013, Vol. 49, no. 8, pp. 431–435. DOI: 10.1134/S1061830913080056.

Received September 5, 2015

¹ Gurevich Sergei Yurevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: gurevichsi@susu.ac.ru

² Petrov Yuriy Vladimirovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: petrovyv@susu.ac.ru

³ Golubev Evgeniy Valerievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: ev_golubev@mail.ru

⁴ Karasyev Oleg Viktorovich is Head of the Laboratory, General and Experimental Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

О РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

Е.Ю. Чистяков¹

Установлено взаимно однозначное соответствие между решениями волнового уравнения и волнового уравнения с младшим членом в звёздной области. Этот результат является аналогом соответствующего результата, полученного ранее для уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: волновое уравнение; нормированная система функций.

В работе [1] для решений уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in R,$$

в звездной области Ω было установлено взаимно-однозначное соответствие. Это было сделано с помощью метода нормированных систем функций [2], на основании результатов, полученных в работах [3–5]. Пусть L – линейный оператор, действующий на функции $f(x)$, $x \in \Omega$, определенные в некоторой области $\Omega \in R^n$ и принадлежащие множеству X такому, что $LX \subset X$.

Определение 1. Упорядоченную систему функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ из X , где $N_0 = N \cup \{0\}$ назовем f – нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω с основанием $f_0(x)$, если всюду в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), \quad k \in N, \quad x \in \Omega.$$

Важным частным случаем введенного понятия является случай, когда $L_2 = I$, а I – единичный оператор. Тогда, f – нормированная система функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ относительно (L, I) обладает свойством

$$L f_0(x) = f(x), L f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad k \in N, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Будем называть систему функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$, обладающую свойством (1) f – нормированной относительно оператора L . Приведем основное свойство f – нормированных систем функций. Пусть задано линейное уравнение вида

$$(L_1 - L_2)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

и пусть $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ – некоторая f – нормированная относительно (L_1, L_2) в области Ω система функций. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ будет формальным решением уравнения (2) в области Ω . Метод нормированных систем функций позволил построить полиномиальные решения уравнений в частных производных [6, 7].

Рассмотрим волновой оператор $\square = \Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, где Δ_x – оператор Лапласа. Исследуем связь между решениями уравнения

$$\square v(x, t) + \lambda v(x, t) = 0, \quad (3)$$

при $\lambda \in R$ и волновыми в Ω функциями – решениями уравнения $\square v(x, t) = 0$. Для этого определим функции $g_m(t)$, зависящие от целого параметра m равенством

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(2, 2)_k (m, 2)_k}.$$

где $(a, b)_k = a(a+b) \dots (a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера.

¹ Чистяков Евгений Юрьевич – бакалавр, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.
E-mail: evgeniy_chistyak@mail.ru

Теорема 1. Система функций $\{G_k(x,t;u) : k \in N_0\}$, где $G_0(x,t;u) = u(x,t)$ и

$$G_k(x,t;u) = \frac{1}{4^k} \frac{|x|_t^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1} \alpha^{(n+1)/2-1}}{(k-1)!} u(\alpha x, \alpha t) d\alpha, \quad k \in N,$$

где $|x|_t^2 = |x|^2 - t^2$, а $u(x,t)$ – некоторая волновая в Ω функция, является 0 – нормированной системой функций относительно волнового оператора \square в Ω .

На основании этой теоремы сформулируем следующий основной результат.

Теорема 2. Для любой функции $v \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющей в Ω уравнению (3) существует единственная волновая в Ω функция $u(x,t)$ такая, что выполнено равенство

$$v(x,t) = u(x,t) - \lambda \frac{|x|_t^2}{4} \int_0^1 g_4(\lambda(1-\alpha)|x|_t^2) u(\alpha x, \alpha t) \alpha^{(n+1)/2-1} d\alpha.$$

Пример. Возьмем волновой полином 2-й степени вида $u(x,t) = |x|^2 + nt^2$. По методу нормированных систем функций решение уравнения (3), которое ему соответствует, имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |x|_t^{2k} \frac{(-\lambda)^k u_m^{(0)}(x,t)}{(2,2)_k (n+1+2m,2)_k},$$

откуда для $u_2^{(0)}(x,t) = |x|^2 + nt^2$ и $u_m^{(0)}(x,t) = 0$ при $m \neq 2$, получаем

$$v(x,t) = (|x|^2 + nt^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \frac{(|x|^2 - t^2)^k}{(2,2)_k (n+5,2)_k} = (|x|^2 + nt^2) g_{n+5}(\lambda(|x|^2 - t^2)).$$

Это решение волнового уравнения с младшим членом (3), которому соответствует волновой полином $u(x,t) = |x|^2 + nt^2$.

Литература

1. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol. 287, № 2. – P. 577–592. DOI:10.1016/S0022-247X(03)00583-3
2. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.
3. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими / В.В. Карачик // Математические труды. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 142–162.
4. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2008. – Т. 83, № 3. – С. 370–380. DOI: 10.4213/mzm4525
5. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238. DOI: 10.4213/mzm10114
6. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of AMS. – 1998. – Vol. 126, № 12. – P. 3513–3519.
7. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.

Поступила в редакцию 27 июня 2015 г.

ON SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION WITH A MINOR TERM

E. Y. Chistyakov¹

A correspondence between solutions of the wave equation and the wave equation with a minor term in a star-like domain was obtained. This result is an analogue of the corresponding result obtained earlier for both the Helmholtz equation and the Laplace equation.

Keywords: wave equation; normalized system of functions.

References

1. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, Vol. 287, no. 2, pp. 577–592. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00583-3
2. Karachik V.V. *Metod normirovannykh sistem funktsiy* [Method of normalized systems of functions] Chelyabinsk: Izdatel'skiy tsentr YuUrGU, 2014. 452 p. (in Russ.).
3. Karachik V.V. On one representation of analytic functions by harmonic functions. *Siberian Advances in Mathematics*, 2008, Vol. 18, no. 2, pp.103–117. DOI: 10.3103/S1055134408020041
4. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes*, 2008, Vol. 83, no. 3, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X
5. Karachik V.V. On the arithmetic triangle arising from the solvability conditions for the Neumann problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, no. 2, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232
6. Karachik V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, Vol. 126, no. 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9
7. Karachik V.V. Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2011, Issue 4, no. 10(227), pp. 4–17. (in Russ.).

Received June 27, 2015

¹ Chistyakov Evgeny Yuryevich is Bachelor Student, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: evgeniy_chistyakov@mail.ru

Персоналии

герман Платонович Вяткин. к 80-летию со дня рождения

*В.П. Бескачко*¹

1 мая 2015 года исполнилось 80 лет со дня рождения известного ученого, член-корреспондента Российской академии наук, доктора химических наук, профессора Германа Платоновича Вяткина.

Ключевые слова: персоналии; юбилеи; творческая биография.



Герман Платонович Вяткин родился 1 мая 1935 года в Челябинске. Род Вяткиных идет от металлургов Урала, семь его поколений работали на Сысертском металлургическом заводе. В 1958 г. Г.П. Вяткин закончил Челябинский политехнический институт и стал работать горновым доменного цеха Челябинского металлургического завода. С 1959 г. по 1966 г. – лаборант, младший и старший научный сотрудник Челябинского научно-исследовательского института металлургии. В 1966 г. Г.П. Вяткин перешел на педагогическую работу: сначала доцентом кафедры технологии металлов Челябинского института механизации и электрофикации сельского хозяйства, а с 1967 г. – доцентом кафедры металлургии стали Челябинского политехнического института. С 1980 г. Г.П. Вяткин – заведующий кафедрой физики № 1, с 1983 г. – проректор по научной работе, с января 1985 г. по июнь 2005 г. – ректор ЧПИ (ЧГТУ, ЮУрГУ), а в настоящее время – президент Южно-Уральского государственного университета (ЮУрГУ). В 1963 г. Г.П. Вяткин защитил кандидатскую диссертацию, а в 1977 г. – докторскую. В декабре 1987 г. избран членом-

корреспондентом АН СССР и членом президиума УрО АН СССР.

Научная работа Г.П. Вяткина связана с интересами металлургической промышленности. Первые работы были выполнены в области экспериментальной металлургии и посвящены изучению возможностей использования на металлургических заводах Южного Урала местного железорудного сырья, совершенствования технологии доменной плавки, исследованию доменных процессов и путей их интенсификации.

В середине 60-х годов Г.П. Вяткиным была выполнена серия работ по исследованию физико-химических свойств высокомагнезиальных шлаков, определен оптимальный и допустимый их состав, что позволило создать эффективную технологию переработки руд Бакальского месторождения. Вслед за этим были решены проблемы получения передельного чугуна из руд Лисаковского месторождения, использования в доменной плавке кокса из шихт с большим содержанием углей Кузнецкого бассейна взамен коксующихся донецких углей.

Опыт, приобретенный Г.П. Вяткиным в области экспериментальной металлургии, привел его к выводу о том, что дальнейшее совершенствование металлургической технологии упирается в недостаток знаний о физико-химической природе металлургических расплавов. Большой массив экспериментальных данных о физико-химических свойствах металлургических расплавов, накопленный к 70-м годам, требовал систематизации, обобщения и интерпретации с фундаментальной точки зрения. В то время физика жидкого состояния находилась еще в начале своего развития и сильно уступала по своей предсказательной способности и обоснованности физике твердого и газообразного состояний. Хотя основные принципы статистической теории жидкостей были

¹ Бескачко Валерий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Персоналии

сформулированы еще за тридцать – сорок лет до этого благодаря пионерским работам Боголюбова, Борна, Грина и Кирквуда, прогресс в использовании этих принципов был весьма незначительным ввиду чрезвычайной сложности уравнений, описывающих систему сильно взаимодействующих частиц (молекул) в отсутствие какой-либо симметрии в их расположении. К семидесятым годам ситуация стала меняться в связи с появлением производительной вычислительной техники, с одной стороны, и общефизическим интересом к неупорядоченным системам – с другой. Появление компьютеров дало возможность численного исследования уравнений теории жидкостей и сравнения ее предсказаний с опытными данными, что послужило, в свою очередь, дальнейшим стимулом к развитию теории. Независимо от статистической теории появились так называемые методы компьютерного моделирования атомной структуры и свойств жидкостей, заключающиеся либо в прямом интегрировании уравнений движения для частиц (метод молекулярной динамики), либо в прямой оценке конфигурационного интеграла системы (метод Монте-Карло).

Одним из главных центров страны, в котором эти методы начали осваиваться и применяться в исследованиях высокотемпературных расплавов, был Екатеринбург, где Олегом Алексеевичем Есиным была создана мощная школа физико-химиков. Выходцами из этой школы являются известные российские ученые: академик РАН Н.А. Ватолин, член-корреспондент РАН Э.А. Пастухов, профессор С.И. Попель и другие. Сейчас уже трудно оценить количество специалистов высшей квалификации, «генетически» связанных со школой О.А. Есина. Эта школа являлась признанным лидером в исследованиях высокотемпературных расплавов как в Советском Союзе, так и за его пределами.

В 70-е годы О.А. Есин работал консультантом Института металлургии (Имет) УрО РАН, которым руководил академик Н.А. Ватолин. В 1974 году в Имете появился молодой докторант из Челябинска – Г.П. Вяткин, прибывший в Екатеринбург с объемистым багажом результатов своих исследований, в которых он намеревался навести порядок, используя самые современные методы микроскопического описания жидкостей. В то время в Имете уже находилось двое челябинцев из ЧПИ – аспиранты В.П. Бескачко и В.Д. Монькин. Все челябинцы работали в лаборатории фазового состава, которой руководил Н.А. Ватолин, а в числе сотрудников были В.Ф. Ухов (главный ученый секретарь УНЦ СССР в 1974–1978 г.г., позднее член-корреспондент Киргизской АН, зав. лабораторией Института физической химии), Э.А. Пастухов (позднее зав. лабораторией, зам. директора Имет, член-корреспондент РАН), Б.Р. Гельчинский (зав. лабораторией Института Физической химии АН Киргизии, позднее – Главный ученый секретарь Челябинского центра УрО РАН, профессор ЮУрГУ, теперь зав. лабораторией Имет УрО РАН). Здесь Г.П. Вяткиным интегральные теории жидкости (Боголюбова–Борна–Грина, Перкуса–Йефика) и методы компьютерного моделирования были впервые применены к расчету структуры и свойств двухкомпонентных жидкостей с кулоновским взаимодействием – ионных расплавов. Благодаря этим исследованиям стало возможным изучать микроскопические механизмы структурообразования и формирования свойств этого важного класса жидкостей и на более фундаментальном уровне интерпретировать опытные данные. Результаты этой работы были положены в основу докторской диссертации Г.П. Вяткина.

В то же время (70-е годы) в Челябинске продолжались интенсивные экспериментальные исследования ионных расплавов, которые к середине 80-х годов сосредоточились в лаборатории физической химии гетерогенных систем. Совместно со своим учеником – аспирантом Юрием Геннадьевичем Измайловым (позднее – заведующим этой лабораторией, доктором химических наук, профессором, проректором ЮУрГУ) – Г.П. Вяткиным был подробно исследован один из классов ионных систем – тройные взаимные системы с летучими компонентами, такие как, например, система $\text{CaO}-\text{A}_2\text{O}_3-\text{CaF}_2$. Эти системы представляют значительный интерес как с практической точки зрения (ввиду их широкого использования в металлургии), так и в теоретическом плане – вследствие их неравновесности в открытых условиях. Были установлены важнейшие закономерности их поведения: 1) несмотря на летучесть продуктов обменной реакции система в состоянии достигнуть равновесия из-за развития параллельно идущих реакций комплексообразования; 2) скорость обменных реакций ограничивается сравнительно медленным процессом испарения летучих продуктов со свободной границы расплава, что позволяет рассматривать систему в каждый момент времени как квазиравновесную и строить соответствующие «диаграммы состояния», которые в совокупности с предложенной техникой так называемых диаграмм испарения

являются сегодня важным инструментом в прогнозировании свойств и поведения таких систем в металлургических процессах.

Для количественной интерпретации накопленных опытных данных о свойствах ионных расплавов с летучими компонентами было необходимо более детально изучить процессы открытого испарения жидкостей вообще с учетом всех факторов, способных повлиять на результаты экспериментов. Для этого был выполнен комплекс теоретических исследований над жидкостями разной природы, испаряющимися в различных условиях, близких к тем, что имеют место в натуральных экспериментах. Предложенные математические модели верифицировались в специально выполненных экспериментах. Разработанные в результате методы, математические модели и программы позволили адекватно анализировать закономерности процессов массопереноса при испарении чистых жидкостей, растворов и расплавов бинарных и тройных взаимных систем, полученные в экспериментальных условиях, а также дали возможность для расчета транспортных и термодинамических характеристик расплавов по опытным данным о скоростях испарения.

Выполненные разработки существенно расширили круг возможностей физико-химического исследования массообменных процессов с участием систем, содержащих летучие соединения. Они использовались как для оптимизации составов растворов и расплавов, применяемых в химических и металлургических производствах, так и для разработки экологически чистых технологий.

В конце 80-х годов в связи с известной дискуссией о причинах аномалий в поведении физико-химических свойств жидких металлов совместно с докторантом В.П. Бескачко (ныне доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и теоретической физики ЮУрГУ) были начаты работы, развивающие теоретические основы экспериментальных методик: методов измерения вязкости, электропроводности, скоростей растворения и пр. В области вискозиметрии было получено обобщение теории, впервые предложенной Е.Г. Швидковским, позволяющее учесть ряд факторов, способных существенно повлиять на интерпретацию опытных данных и быть причиной указанных аномалий: присутствие вязких (оксидных) пленок на поверхности расплава и магнитного поля, создаваемого нагревателем, в его объеме. Располагая обобщенным вариантом теории, оказалось возможным наблюдать механические свойства таких пленок и обосновать новый метод измерения электропроводности расплава – по наблюдениям за колебаниями вискозиметра в осевом статическом магнитном поле. Последний метод служит альтернативой широко распространенному методу измерения электропроводности расплавов – методу вращающегося магнитного поля. Его преимущество в том, что, будучи более обоснованным теоретически, он является абсолютным, а не относительным. Кроме того, он допускает измерение вязкости в том же самом эксперименте. Действуя в том же направлении, удалось обобщить теорию крутильного вискозиметра на случай, когда он заполнен двумя и более несмешиваемыми жидкостями, или даже жидкостью, стратифицированной по высоте. Первое дает возможность для изучения явлений расслоения в расплавах, а второе позволяет наблюдать процессы в неоднородных жидкостях, например, седиментацию неметаллических включений. В связи с экспериментами по влиянию магнитного поля на скорость растворения твердых тел в металлических расплавах, измеряемую методом вращающегося диска, было найдено точное решение магнитогидродинамической задачи о массообмене между расплавом и материалом диска для случая, когда магнитное поле имеет осевое направление. Полученное решение служит обобщением найденного Б.Н. Левичем и положенного в обоснование упомянутого экспериментального метода. Оно указывает на возможность управления скоростью массообменных процессов с помощью магнитного поля, представляющую интерес, например, в связи с технологиями выращивания кристаллов по методу Чохральского. Это решение интересно также в связи с некоторыми задачами в гео- и астрофизике.

Примерно в то же время (конец 70-х – начало 80-х годов) резко усилился интерес к исследованию так называемых суперионных проводников – твердых тел, обладающих свойством «подрешеточного плавления», когда атомы подрешетки одного из компонентов системы приобретают почти такую же подвижность, как и в жидкостях, но задолго до плавления кристалла в целом. Совместно с докторантом В.М. Березиным (ныне доктор физико-математических наук, профессор) были синтезированы керамические высокотемпературные твердые электролиты типа насикон, позволившие экспериментальным методом ЭДС гальванической цепи исследовать термодинамику перехода твердый суперионик–расплав. Для образцов с различной нестехиометрией было

Персоналии

показано, что в точке подрешеточного плавления химический потенциал атомов металла скачкообразно уменьшается до значений, близких к химическому потенциалу чистого металла. Впервые экспериментально был установлен эффект влияния внешнего магнитного поля на скорость испарения летучего компонента (халькогена) из суперионных фаз халькогенидов меди и серебра («магнитоиспарение»). Экспериментально исследованы условия инверсии эффекта в смешанных суперионных полупроводниках. Предложен механизм эффекта магнитоиспарения, включающий два конкурирующих процесса: 1) синглет – триплетные интеркомбинационные переходы в спиновой системе, 2) электронный магнеторезистивный эффект. На основе системных экспериментальных исследований величины ионной проводимости в халькогенидах и галогенидах меди, серебра, их твердых растворах была установлена корреляция с величиной параметра кубической элементарной ячейки.

Направлением исследований, начатых в 80-е годы вместе с доцентом Т.П. Приваловой (ныне – профессором, доктором химических наук), было изучение поверхностных явлений с целью получения информации о составе поверхности сплавов в твердом и жидком состояниях, о поверхностных фазах, о кинетике процессов термической десорбции и адсорбции и кинетике поверхностной сегрегации. Для ответа на эти вопросы был создан автоматизированный измерительный комплекс, позволивший реализовать один из современных спектроскопических методов – метод температурно-программируемой десорбции (ТПД), совмещенный с измерениями работы выхода электрона (РВЭ). Были разработаны методики изучения поверхностной сегрегации компонентов сплавов в твердом и жидком состояниях, предложены методы определения поверхностных концентраций компонентов двойных и тройных металлических систем. Этими средствами были выполнены исследования двойных систем Cu–S, Cu–Ag, Fe–C, Ti–C, Fe–Mn–C и Fe–C–S в твердом и жидком состояниях, позволившие выявить закономерности в изменении состава и строения поверхностных слоев по мере роста температуры. При этом было обнаружено явление десорбции, стимулированной фазовым переходом жидкое–твердое, когда в окрестности этого перехода скорость испарения какого-либо компонента сплава может увеличиться на порядок и более величины.

После распада СССР в 1993 году на кафедре физики № 1 появляется новый сотрудник – А.А. Мирзоев, работавший до этого в Таджикском государственном университете (г. Душанбе). В 1996 г. А.А. Мирзоев поступает в докторантуру к Г.П. Вяткину, а в 1999 г. защищает докторскую диссертацию (ныне доктор физико-математических наук, профессор). С тех пор на кафедре начинает развиваться направление, связанное с компьютерным моделированием конденсированных фаз на атомистическом уровне.

Всего Г.П. Вяткиным подготовлено 17 докторов и несколько десятков кандидатов наук.

Г.П. Вяткин – автор около 300 научных работ, включая 6 монографий, предложенные им технические решения защищены 36 авторскими свидетельствами. Он является председателем специализированных Советов при ЮУрГУ по защите докторских диссертаций по специальностям «Физическая химия» и «Металлургия черных металлов», был членом межведомственной комиссии по научно-технической политике при Правительстве Российской Федерации. Г.П. Вяткин – член редколлегии журнала РАН «Расплавы», заместитель главного редактора журнала «Вестник ЮУрГУ», член научных Советов РАН по теории металлургических процессов и физической химии ионных расплавов. Г.П. Вяткин – председатель Совета ректоров Челябинской области, с 1990 по 2005 г – вице-президент Союза ректоров ВУЗов РФ. С 2000 г. он председатель регионального экспертного совета по проведению конкурса РФФИ-Урал.

Под руководством Г.П. Вяткина Челябинский политехнический институт успешно преодолел бурный период экономических реформ, и был преобразован сначала в технический (1990) университет, а затем в университет (1997). Это потребовало существенной перестройки как гуманитарного, так и естественнонаучного образования. Были открыты новые факультеты и специальности (прикладной математики и физики, психологии, лингвистики, экономики и права, архитектуры, физкультуры и спорта, сервиса и туризма и т.д.), в процесс обучения введены современные информационные технологии.

На протяжении всей своей жизни Герман Платонович вел большую общественную работу. Избирался депутатом Верховного Совета РСФСР, работал председателем мандатной комиссии съезда народных депутатов России. Трудовая и общественная деятельность Г.П. Вяткина отмечена государственными наградами: медалью «За трудовое отличие» (1981), орденом Дружбы наро-

дов (1993), «300 лет Российскому Флоту» (1996), орденом «За заслуги перед Отечеством» IV степени (2000), а также почетными званиями: лауреат премии Президента РФ в области образования (1998), «Ректор года – 2005», Почетный гражданин Челябинской области (2008), Почетный гражданин г. Челябинска (2010).

Искренне желаем Герману Платоновичу крепкого здоровья и дальнейших успехов на ниве образования и науки!

Поступила в редакцию 5 октября 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 4, pp. 77–81*

GERMAN PLATONOVICH VYATKIN. TO THE 80-TH ANNIVERSARY

V.P. Beskachko¹

May 1, 2015 is celebrated as 80-th anniversary of a well-known scientist German Platonovich Vyatkin, professor, doctor of chemistry sciences, corresponding member of Russian Academy of Science.

Keywords: personnel; anniversary; creative biography.

Received October 5, 2015

¹ Beskachko Valeriy Petrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», Е29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, ответственному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sofya Aleksandrovna, Differential and Stochastic Equations Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: vestnik@physics.susu.ac.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. www.vestnik.susu.ac.ru/mmph.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.yourgpu.rf/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор А.Ю. Федерякин

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 06.10.2015. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 9,53. Тираж 500 экз. Заказ 513/629.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.