

ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№7 (07)
2001

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА,
ФИЗИКА, ХИМИЯ»

Выпуск 1

Редакционная коллегия

д.т.н., профессор Михайлов Г.Г. (*отв. редактор*),

д.ф.-м.н., профессор Бескачко В.П. (*отв. секретарь*),

д.т.н., профессор Гуревич С.Ю., д.ф.-м.н., профессор Менихес Л.Д.,

к.ф.-м.н., профессор Заляпин В.И., д.х.н., профессор Лыкасов А.А.,

д.х.н., профессор Рябухин А.Г.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

АДУКОВ В.М., ИБРЯЕВА О.Л. О структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц ...	3
АДУКОВ В.М., МИКУШИН Д.Н. Асимптотическое поведение полюсов $(\lambda-1)$ -й строки таблицы Паде	13
ШМАТКОВ М.Н. Доказательство теоремы полноты исчисления динамической логики DL	24
АНТОНОВ В.А., ОСМОЛОВСКИЙ В.И. Об одном вопросе из Коуровской тетради ...	35
АМИНЕВА Н.Н. Группы с относительно большими централизаторами инвариантных подгрупп	37
УХАНОВ М.В. Алгоритм построения суммы многогранников	39
ШИРЯЕВ В.И., СМОЛИН В.В. Оценивание состояния и неизвестных параметров фирмы	45

Физика

ПЕТРОВ Ю.В., ШУЛЬГИНОВ А.А., ГОЛУБЕВ Е.В., БОЖКО В.Ф. Исследование возможности определения качества пьезокварца с помощью ультразвука	49
ГУРЕВИЧ С.Б., ТОЛИПОВ Х.Б., ХАБИРОВ К.Б. Преобразование в упругом клине рэлеевских волн в объемные	51
ТОЛИПОВ Х.Б. Прохождение волн Рэлея в упругом клине	56
ШУЛЬГИНОВ А.А. Разработка источника фликкер-шума для целей неразрушающего контроля	60
КУЗНЕЦОВ Г.Ф. Исследование тепловых свойств псевдооживленного слоя	62
БЕРЕЗИН В.М. Испарение летучего компонента из суперионных полупроводников переменного состава	64
САПОЖНИКОВ С.Б. Нелокальный подход к оценке конструкционной прочности тканевых композитов	67
ЕЛЮХИНА И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды	71
ЕЛЮХИНА И.В. К вопросу наблюдаемости упругих свойств жидких сред в вискозиметрическом эксперименте по Швидковскому Е.Г.	77
ЕЛЮХИНА И.В. О нерегулярном режиме крутильных колебаний в вискозиметре Швидковского Е.Г.	82

Химия

ТОЛЧЕВ А.В., ЛОПУШАН В.И., КЛЕЩЕВ Д.Г., ВИКТОРОВ В.В. Факторы, влияющие на формирование монодисперсного корунда при термических превращениях γ -Al(OH) ₃	85
КУЗНЕЦОВ Ю.С., ЛЫКАСОВ А.А., ШТИН С.В., СУДАРИКОВ М.В., КАМЕНЩИКОВА Е.Н. Восстановление вюстита, диоксида титана и ильменита углеродом в режиме непрерывного нагревания	90

О СТРУКТУРЕ ЯДРА ТЕПЛИЦ-ПЛЮС-ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева

В работе изучается структура ядра блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц и на основе этого дается формула для производящего многочлена обратной матрицы для данного класса матриц.

1. Введение

Хорошо известно, что задача описания ядра теплицевых или ганкелевых матриц и задача их обращения тесно связаны между собой [1] – [3]. Обе эти задачи решаются в терминах индексов и существенных многочленов конечной последовательности, порождающей данную теплицеву матрицу [1], [2] (или в терминологии работы [3] в терминах характеристических степеней и характеристических многочленов). Метод оказался также эффективным в задаче явного построения факторизации Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций [4] и при исследовании равномерной сходимости строк таблицы Паде для функций и матриц-функций [5] – [7].

Мы собираемся распространить подход, основанный на понятиях индексов и существенных многочленов, на класс блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц (далее $T + H$ -матриц). Обращение матриц этого класса возникает в задаче приближенного решения интегральных уравнений с ядром, являющимся суммой двух слагаемых: одно из них зависит от разности аргументов, а другое – от суммы. Кроме того, задача нахождения линейной аппроксимации Паде-Чебышева фактически сводится к нахождению ядра $T + H$ -матрицы. Эти применения $T + H$ -матриц и определяют цели данной работы: ввести аналоги индексов и существенных многочленов для случая блочных $T + H$ -матриц и, на этой основе, описать структуру их ядра и предложить метод их обращения.

Для $T + H$ -матриц существует два подхода к определению индексов и существенных многочленов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. В этой статье мы ограничимся описанием только того подхода, который более предпочтителен для применения в задаче обращения $T + H$ -матриц. Другой подход, который дает более тонкое описание структуры ядра этих матриц, будет опубликован отдельно. Его мы собираемся использовать для изучения аппроксимаций Паде-Чебышева.

Структура данной работы такова. В параграфе 2 мы вводим понятия существенных индексов и многочленов, объясняем причины возникновения двух различных подходов и сравниваем их. Структура ядра блочных $T + H$ -матриц описывается одним из методов в параграфе 3. В заключительном параграфе 4 мы приводим результат по обращению блочных $T + H$ -матриц.

2. Определение индексов и существенных многочленов $T + H$ -последовательности

Пусть a_M, a_{M+1}, \dots, a_N и b_0, b_1, \dots, b_{N-M} , ($M < N$) произвольные конечные последовательности комплексных матриц размером $p \times q$. Упорядоченную пару этих двух последова-

тельностью будем называть $T + H$ -последовательностью. Составим с помощью $T + H$ -последовательности семейство блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц:

$$S_k = T_k + H_k = \begin{pmatrix} a_{i-j} + b_{i+j-k} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i-j} + b_{i+j-k} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = k, k+1, \dots, N \\ j = 0, 1, \dots, k-M \end{matrix}$$

$M \leq k \leq N$.

Для того, чтобы ввести понятия индексов и существенных многочленов $T + H$ -последовательности изучим структуру правых $\ker_R S_k$ и левых $\ker_L S_k$ ядер семейства матриц S_k .

Поскольку удобнее иметь дело не с векторами, а с производящими векторными многочленами, перейдем от пространств $\ker_R S_k$ и $\ker_L S_k$ к изоморфным пространствам \mathcal{N}_k^R и \mathcal{N}_k^L производящих векторных многочленов. Для этого введем операторы σ_R^T (σ_R^H), действующие из пространства рациональных матриц-функций вида $R(t) = \sum_{j=-N}^{-M} r_j t^j$ ($R(t) = \sum_{j=0}^{N-M} r_j t^j$), $r_j \in \mathbb{C}^{q \times l}$, в пространство $\mathbb{C}^{p \times l}$ по правилу

$$\sigma_R^T\{R(t)\} = \sum_{j=-N}^{-M} a_{-j} r_j \quad (\sigma_R^H\{R(t)\} = \sum_{j=0}^{N-M} b_j r_j)$$

и σ_L^T (σ_L^H) из пространства рациональных матриц-функций вида $L(t) = \sum_{j=-N}^{-M} l_j t^j$ ($L(t) = \sum_{j=0}^{N-M} l_j t^j$), $l_j \in \mathbb{C}^{l \times p}$, в $\mathbb{C}^{l \times q}$ по правилу

$$\sigma_L^T\{L(t)\} = \sum_{j=-N}^{-M} l_j a_{-j} \quad (\sigma_L^H\{L(t)\} = \sum_{j=0}^{N-M} l_j b_j).$$

Определение 2.1. Определим \mathcal{N}_k^R , $k = M, \dots, N$, как пространство векторных столбцовых многочленов $R(t) = \sum_{j=0}^{k-M} r_j t^j$, $r_j \in \mathbb{C}^{q \times 1}$, таких, что

$$\sigma_R^T\{t^{-i} R(t)\} + \sigma_R^H\{t^{i-k} R(t)\} = 0$$

для $i = k, k+1, \dots, N$.

Пусть также \mathcal{N}_k^L , $k = M, \dots, N$, - пространство векторных строчных многочленов $L(t) = \sum_{j=0}^{N-k} l_j t^j$, $l_j \in \mathbb{C}^{1 \times p}$, таких, что

$$\sigma_L^T\{t^{-i} L(t^{-1})\} + \sigma_L^H\{t^{k-i} L(t)\} = 0$$

для $i = k, k-1, \dots, M$.

Определим пространство \mathcal{N}_{N+1}^R как пространство всех столбцовых многочленов от t формальной степени $N - M + 1$ и положим $\mathcal{N}_{M-1}^R = \mathcal{N}_{M-2}^R = \{0\}$. Введем также пространство \mathcal{N}_{M-1}^L всех многочленов от t формальной степени $N - M + 1$ и положим $\mathcal{N}_{N+1}^L = \mathcal{N}_{N+2}^L = \{0\}$

Очевидно, что $\mathcal{N}_k^R \cong \ker_R S_k$ и $\mathcal{N}_k^L \cong \ker_L S_k$.

Следующая теорема является ключевой при построении всей теории.

Теорема 2.1. Выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} (t+1)\mathcal{N}_k^R &\subseteq \mathcal{N}_{k+1}^R, \quad t\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R, \\ t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^R &= t(t+1)^2\mathcal{N}_{k-2}^R, \quad t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)\mathcal{N}_{k+1}^R = t(t+1)\mathcal{N}_{k-1}^R, \\ (t+1)\mathcal{N}_k^L &\subseteq \mathcal{N}_{k-1}^L, \quad t\mathcal{N}_k^L \subseteq \mathcal{N}_{k-2}^L, \\ t\mathcal{N}_k^L \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^L &= t(t+1)^2\mathcal{N}_{k+2}^L, \quad \mathcal{N}_k^L \cap (t+1)\mathcal{N}_{k-1}^L = t(t+1)\mathcal{N}_{k+1}^L. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $R(t) \in \mathcal{N}_k^R$. Рассмотрим $\tilde{R}(t) = (t + 1)R(t)$. Очевидно, $\deg \tilde{R}(t) \leq k - M + 1$. Используя условия ортогональности из определения 2.1 для $R(t) \in \mathcal{N}_k^R$, получаем

$$\sigma_R^T \{t^{-i} \tilde{R}(t)\} + \sigma_R^H \{t^{i-(k+1)} \tilde{R}(t)\} = 0$$

для $i = k + 1, \dots, N$. Значит, $\tilde{R}(t) \in \mathcal{N}_{k+1}^R$. Аналогично доказывается вложение $t\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R$. Очевидно, что

$$t(t + 1)^2 \mathcal{N}_{k-2}^R \subseteq t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_k^R.$$

Докажем противоположное вложение. Пусть $R(t) \in t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_k^R$ и $k > M - 2$. Тогда, $R(t) = tR_1(t)$, $R_1(t) \in \mathcal{N}_k^R$ и $R(t) = (t + 1)^2 R_2(t)$, $R_2(t) \in \mathcal{N}_k^R$. Значит, $R(t) = t(t + 1)^2 \tilde{R}_2(t)$, где $R_2(t) = t\tilde{R}_2(t)$ и $\deg \tilde{R}_2(t) \leq k - M - 2$. Докажем, что $\tilde{R}_2(t) \in \mathcal{N}_{k-2}^R$, т.е., что выполняются соответствующие условия ортогональности:

$$\sigma_R^T \{t^{-i} \tilde{R}_2(t)\} + \sigma_R^H \{t^{i-(k-2)} \tilde{R}_2(t)\} = 0 \tag{2.1}$$

для $i = k - 2, k - 1, \dots, N$. Используя условия ортогональности для $R_2(t) = t\tilde{R}_2(t)$, получим, что это верно для $i = k - 1, k, \dots, N - 1$. Из условий ортогональности для R_1, R_2 и условия (2.1), взятых при $i = k$, получаем, что (2.1) верно и для $i = k - 2$. Аналогично, из условий ортогональности для R_1, R_2 при $i = N$ и условия (2.1) при $i = N - 2$, получаем, что (2.1) верно для $i = N$. Нетрудно убедиться, что $t\mathcal{N}_M^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_M^R = 0$, $t\mathcal{N}_{M+1}^R \cap (t + 1)^2 \mathcal{N}_{M+1}^R = 0$, т.е. доказываемое соотношение верно и при $k = M, M + 1$.

Аналогично доказывается вложение $t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)\mathcal{N}_{k+1}^R = t(t + 1)\mathcal{N}_{k-1}^R$ и вторая часть теоремы. ■

Таким образом, в отличие от теплицева случая, теперь мы должны рассмотреть вложения трех последовательных пространств $\mathcal{N}_k^R, \mathcal{N}_{k+1}^R, \mathcal{N}_{k+2}^R$, что дает возможность для двух различных вариантов построения дальнейшей теории. Во-первых, мы можем рассмотреть две независимые цепочки вложений: $\mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+2}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+4}^R \dots$ и $\mathcal{N}_{M+1}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+3}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+5}^R \dots$, используя тем самым только вложения $t\mathcal{N}_k^R, (t + 1)^2 \mathcal{N}_k^R$ (или $(t^2 + 1)\mathcal{N}_k^R$) в \mathcal{N}_{k+2}^R . Для этих двух цепочек пространств мы независимо определим два набора индексов и существенных многочленов никак не связанных между собой. Этот способ не использует вложения $(t + 1)\mathcal{N}_{k+1}^R$ в \mathcal{N}_{k+2}^R и потому дает более грубое описание структуры ядра, чем второй способ, использующий это вложение. В последнем случае мы имеем одну цепочку вложенных пространств $\mathcal{N}_k^{R,L}, M \leq k \leq N$ и один набор индексов и существенных многочленов. Однако, при таком подходе многие формулы, относящиеся к задаче обращения $T + H$ -матриц, становятся более сложными. Для обращения матрицы S_0 необязательно рассматривать все пространства $\mathcal{N}_k^{R,L}$. Достаточно рассмотреть только одну цепочку вложений, содержащую \mathcal{N}_0^R . В данной статье мы поступим именно таким образом. Второй подход будет описан в другой работе.

Пусть $\alpha_0 = \dim \mathcal{N}_M^R, \alpha_1 = \dim \mathcal{N}_{M+1}^R, \omega_1 = \dim \mathcal{N}_{N-1}^L, \omega_0 = \dim \mathcal{N}_N^L$. Заметим, что всегда $\alpha_0 \leq \alpha_1, \omega_0 \leq \omega_1$, т.к. $(t + 1)\mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+1}^R, (t + 1)\mathcal{N}_N^L \subseteq \mathcal{N}_{N-1}^L$.

Будем называть $T + H$ -последовательность **регулярной**, если $\alpha_0, \alpha_1, \omega_1, \omega_0$ равны нулю. Сами числа $\alpha_0, \alpha_1, \omega_1, \omega_0$ будем называть **дефектами** $T + H$ -последовательности. В случае $\alpha_1 = \omega_1 = 0$, автоматически получаем $\alpha_0 = \omega_0 = 0$.

Обозначим $d_k^R = \dim \mathcal{N}_k^R, d_k^L = \dim \mathcal{N}_k^L$. По определению положим $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-2}^R$ и $\Delta_k^L = d_k^L - d_{k+2}^L$.

Легко убедиться, что для $M - 1 \leq k \leq N - 1$

$$\Delta_{k+2}^R + \Delta_k^L = 2(p + q) \tag{2.2}$$

Чтобы соотношение (2.2) выполнялось и для $k = M - 2, N$ нужно положить $d_{N+2}^R = (N - M + 3)q + p$, и $d_{M-2}^L = (N - M + 3)p + q$, Теперь имеют место следующие равенства: $\Delta_M^R = \alpha_0, \Delta_{M+1}^R = \alpha_1, \Delta_{N+1}^R = 2(p + q) - \omega_1, \Delta_{N+2}^R = 2(p + q) - \omega_0, \Delta_{M-2}^L = 2(p + q) - \alpha_0, \Delta_{M-1}^L = 2(p + q) - \alpha_1, \Delta_{N-1}^L = \omega_1, \Delta_N^L = \omega_0$. Заметим, что определение чисел d_{N+2}^R , и d_{M-2}^L является формальным – сами пространства $\mathcal{N}_{N+2}^R, \mathcal{N}_{M-2}^L$ не определены.

Теперь мы можем установить очень важный для дальнейшего факт – монотонность последовательностей $\Delta_k^{R,L}$.

Теорема 2.2. Пусть $N - M \equiv \epsilon \pmod{2}, \epsilon = 0, 1$. Тогда для любой $T + H$ -последовательности справедливы следующие неравенства:

$$\alpha_\nu = \Delta_{M+\nu}^R \leq \Delta_{M+2+\nu}^R \leq \dots \leq \Delta_{N-[\epsilon+\nu]}^R \leq \Delta_{N+2-[\epsilon+\nu]}^R = 2(p + q) - \omega_{[\epsilon+\nu]}, \quad \nu = 0, 1, \quad (2.3)$$

$$2(p + q) - \alpha_\nu = \Delta_{M-2+\nu}^L \geq \Delta_{M+\nu}^L \geq \dots \geq \Delta_{N-2-[\epsilon+\nu]}^L \geq \Delta_{N-[\epsilon+\nu]}^L = \omega_{[\epsilon+\nu]}, \quad \nu = 0, 1, \quad (2.4)$$

где $\epsilon + \nu \equiv [\epsilon + \nu] \pmod{2}, [\epsilon + \nu] = 0, 1$.

Доказательство. Как показано в теореме 2.1, пространство \mathcal{N}_{k+2}^R содержит подпространство $t\mathcal{N}_k^R + (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R$. Воспользовавшись формулой Грассмана, получим

$$\begin{aligned} \dim(t\mathcal{N}_k^R + (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R) &= \\ \dim t\mathcal{N}_k^R + \dim (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R - \dim(t\mathcal{N}_k^R \cap (t + 1)^2\mathcal{N}_k^R) &= 2d_k^R - d_{k-2}^R \leq d_{k+2}^R. \end{aligned}$$

Это и означает, что $\Delta_k^R \leq \Delta_{k+2}^R$.

Аналогично доказываются остальные неравенства. ■

Перейдем теперь к определению индексов и существенных многочленов для цепочки пространств

$$\mathcal{N}_{M+\nu}^R, \mathcal{N}_{M+2+\nu}^R, \mathcal{N}_{M+4+\nu}^R, \dots, \nu = 0, 1.$$

Из теоремы 2.2 и в силу того, что Δ_k^R целые числа, следует, что цепочка неравенств (2.3) возможна лишь в том случае, если найдется $2(p + q) - \omega_{[\epsilon+\nu]} - \alpha_\nu$ целых чисел $\mu_{\alpha_\nu+1}^\nu \leq \dots \leq \mu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu$ таких, что

$$\begin{aligned} \Delta_M^R &= \dots = \Delta_{\mu_{\alpha_\nu+1}^\nu}^R = \alpha_\nu, \\ &\dots \\ \Delta_{\mu_i^\nu+2}^R &= \dots = \Delta_{\mu_{i+1}^\nu}^R = i, \\ &\dots \\ \Delta_{\mu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu+2}^R &= \dots = \Delta_{N+2-[\epsilon+\nu]}^R = 2(p + q) - \omega_{[\epsilon+\nu]}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если i -я строка в этих соотношениях отсутствует, считаем, что $\mu_i^\nu = \mu_{i+1}^\nu$. Кроме того, по определению будем считать, $\mu_1^\nu = \dots = \mu_{\alpha_\nu}^\nu = M - 2 + \nu$ (в случае $\alpha_\nu \neq 0$) и $\mu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^0+1 = \dots = \mu_{2(p+q)}^0 = N + 2 - [\epsilon + \nu]$ (в случае $\omega_{[\epsilon+\nu]} \neq 0$).

Аналогичным образом для цепочки неравенств (2.4) можно определить $2(p + q)$ целых чисел $\pi_1^\nu \leq \dots \leq \pi_{2(p+q)}^\nu$. Эти числа определяются следующей таблицей:

$$\begin{aligned} \Delta_{M-2+\nu}^L &= \dots = \Delta_{\pi_{\alpha_\nu+1}^\nu-2}^L = 2(p + q) - \alpha_\nu, \\ &\dots \\ \Delta_{\pi_i^\nu}^L &= \dots = \Delta_{\pi_{i+1}^\nu-2}^L = 2(p + q) - i, \\ &\dots \\ \Delta_{\pi_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu}^L &= \dots = \Delta_{N-[\epsilon+\nu]}^L = \omega_{[\epsilon+\nu]} \end{aligned} \quad (2.6)$$

с доопределением $\pi_1^\nu = \dots = \pi_{\alpha_\nu}^\nu = M - 2 + \nu$ (для случая, когда $\alpha_\nu \neq 0$) и $\pi_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}+1}^\nu = \dots = \pi_{2(p+q)}^\nu = N + 2 - [\epsilon + \nu]$, если $\omega_{[\epsilon+\nu]} \neq 0$.

Предложение 2.1. Числа $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$ и $\pi_1^\nu, \dots, \pi_{2(p+q)}^\nu$ совпадают. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu = 2[p(N+1) + q(M-1)].$$

Доказательство. Первая часть предложения легко следует из ранее полученной формулы $\Delta_{k+2}^R + \Delta_k^L = 2(p+q)$.

Докажем формулу для суммы чисел μ_i^ν . С одной стороны,

$$\sum_{i=M}^{N+2} \Delta_i^R = \Delta_M^R + \dots + \Delta_{N+2}^R = d_{N+2}^R + d_{M-2}^R = (N - M + 3)q + p.$$

Здесь знак \sum' означает, что в этой сумме шаг изменения индекса i равен двум. С другой стороны, $\sum_{i=M}^{N+2} \Delta_i^R = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu - 2(p+q)(N+2)$.

Сравнивая, получаем $\sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu = 2[p(N+1) + q(M-1)]$. ■

Заметим, что если $0 \in [M, N]$, то эта сумма равна удвоенному индексу оператора S_0 , взятому с обратным знаком.

Определение 2.2. Целые числа $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$ будем называть индексами порядка ν данной $T + H$ -последовательности.

Перейдем теперь к определению существенных многочленов.

Мы знаем, что $t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R$. Обозначим \mathcal{H}_{k+2}^R дополнение пространства $t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R$ до \mathcal{N}_{k+2}^R , т.е.

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = (t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R) \dot{+} \mathcal{H}_{k+2}^R$$

для $k = M, M+2, \dots$. Тогда $\dim \mathcal{H}_{k+2}^R = \Delta_{k+2}^R - \Delta_k^R$. Из таблицы (2.5) видно, что эта разность $\Delta_{k+2}^R - \Delta_k^R \neq 0$ только для $k = \mu_j^\nu$ и равна кратности индекса μ_j^ν . Таким образом,

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R, \quad k \neq \mu_j^\nu,$$

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = (t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R) \dot{+} \mathcal{H}_{k+2}^R, \quad k = \mu_j^\nu.$$

Аналогично, для случая левых ядер, мы имеем

$$\mathcal{N}_{k-2}^L = t\mathcal{N}_k^L + (t+1)^2\mathcal{N}_k^L, \quad k \neq \mu_j^\nu,$$

$$\mathcal{N}_{k-2}^L = (t\mathcal{N}_k^L + (t+1)^2\mathcal{N}_k^L) \dot{+} \mathcal{H}_{k-2}^L, \quad k = \mu_j^\nu.$$

Определение 2.3. Любые столбцовые многочлены $R_j^\nu(t), R_{j+1}^\nu(t), \dots, R_{j+k_j+1}^\nu(t)$, образующие базис $\mathcal{H}_{\mu_j^\nu+2}^R$, где $k_j = \dim \mathcal{H}_{\mu_j^\nu+2}^R - \text{кратность } \mu_j^\nu$, будем называть правыми существенными многочленами, соответствующими индексу μ_j^ν .

Аналогично, любые строчные многочлены $L_j^\nu(t), L_{j+1}^\nu(t), \dots, L_{j+k_j+1}^\nu(t)$, являющиеся базисом дополнения $\mathcal{H}_{\mu_j^\nu-2}^L$, будем называть левыми существенными многочленами, соответствующими индексу μ_j^ν .

Многочлены $R_1^\nu(t), \dots, R_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu(L_{\alpha_\nu+1}^\nu(t), \dots, L_{2(p+q)}^\nu)$ назовем правыми (левыми) существенными многочленами порядка ν для данной $T + H$ -последовательности.

Если $0 \in [M, N]$ и $M \equiv \nu \pmod{2}$, $\nu = 0, 1$, то нетрудно убедиться, что матрица S_0 обратима тогда и только тогда, когда $T + H$ -последовательность регулярна, все индексы порядка ν равны нулю, и $\mu_1^{[\nu+1]} = \dots = \mu_{p+q}^{[\nu+1]} = -1$, $\mu_{p+q+1}^{[\nu+1]} = \dots = \mu_{2(p+q)}^{[\nu+1]} = 1$. Кроме того, в этом случае все правые существенные многочлены порядка ν мы можем получить, найдя базис $\ker_R S_2$, так как $d_2^R = 2(p+q)$. Аналогично, базис $\ker_L S_{-2}$ состоит из $2(p+q)$ левых существенных многочленов порядка ν . Как мы увидим в дальнейшем, именно эти правые и левые существенные многочлены и будут определять матрицу S_0^{-1} .

3. Структура ядра $T + H$ -матриц

Теперь мы можем описать структуру ядра блочных $T + H$ -матриц в терминах индексов и существенных многочленов.

Теорема 3.1. Пусть $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$, $\nu = 0, 1$, - индексы $T + H$ -последовательности и $R_1^\nu(t), \dots, R_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}^\nu$ - правые существенные многочлены ($(N - M) \equiv \epsilon \pmod{2}$). Тогда, если $l \in [\mu_i^\nu + 2, \mu_{i+1}^\nu]$, то производящие многочлены для элементов базиса $\ker_R S_l$ есть:

$$\left\{ t^{k_j} R_j^\nu(t), t^{k_j-1}(t+1)^2 R_j^\nu(t), \dots, t(t+1)^{2(k_j-1)} R_j^\nu(t), (t+1)^{2k_j} R_j^\nu(t) \right\}_{j=1}^i.$$

Здесь $k_j = \frac{l - \mu_j^\nu}{2} - 1$.

Для удобства в случае $\omega_0 = 0$ положено $\mu_{2(p+q)+1}^\nu = N + 2$ и, если $\omega_1 = 0$, $\mu_{2(p+q)+1}^\nu = N + 1$.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. Очевидно, утверждение теоремы верно для первого пространства $\ker_R S_M$. Предположим, что оно выполняется и для $\ker_R S_k$, $k \leq l - 1$. Докажем, что тогда оно верно и для $\ker_R S_l$. Для упрощения записи опустим верхний индекс ν .

Рассмотрим случай $l \in (\mu_i + 2, \mu_{i+1})$. Производящие многочлены для элементов базиса $\ker_R S_{l-2} \cong \mathcal{N}_{l-2}^R$ есть

$$\left\{ t^{k_j-1} R_j, t^{k_j-2}(t+1)^2 R_j, \dots, t(t+1)^{2(k_j-2)} R_j, (t+1)^{2(k_j-1)} R_j \right\}_{j=1}^i.$$

Тогда $t\mathcal{N}_{l-2}^R$ порождается

$$\left\{ t^{k_j} R_j, t^{k_j-1}(t+1)^2 R_j, \dots, t^2(t+1)^{2(k_j-2)} R_j, t(t+1)^{2(k_j-1)} R_j \right\}_{j=1}^i,$$

и $(t + 1)^2 \mathcal{N}_{i-2}^R$ порождается

$$\left\{ t^{k_j-1} (t + 1)^2 R_j, t^{k_j-2} (t + 1)^4 R_j, \dots, t (t + 1)^{2(k_j-1)} R_j, (t + 1)^{2k_j} R_j \right\}_{j=1}^i.$$

Тогда пространство $\mathcal{N}_i^R = t \mathcal{N}_{i-2}^R + (t + 1)^2 \mathcal{N}_{i-2}^R$ порождается

$$\left\{ t^{k_j} R_j, t^{k_j-1} (t + 1)^2 R_j, \dots, t (t + 1)^{2(k_j-1)} R_j, (t + 1)^{2k_j} R_j \right\}_{j=1}^i. \quad (3.1)$$

Осталось показать, что эти многочлены могут быть выбраны в качестве базисных. Количество многочленов в (3.1) есть

$$\sum_{j=1}^i (k_j + 1) = \sum_{j=1}^i \binom{l - \mu_j}{2} = \frac{l}{2}^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \mu_j.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d_i^R &= \sum_{j=M}^l \Delta_j^R = \alpha_0 \left(\frac{-M + \mu_{\alpha_0+1}}{2} + 1 \right) + (\alpha_0 + 1) \left(\frac{\mu_{\alpha_0+2} - \mu_{\alpha_0+1}}{2} \right) + \dots \\ &+ (i - 1) \left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{2} \right) + i \left(\frac{l - \mu_i}{2} \right) = \frac{l}{2}^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \mu_j. \end{aligned}$$

Так как количество многочленов в (3.1) совпадает с размерностью d_i^R и эти многочлены порождают \mathcal{N}_i^R , то система (3.1) — базис \mathcal{N}_i^R . Аналогично можно рассмотреть случаи $l = \mu_i + 2, l = \mu_{i+1}$.

Теорема доказана. ■

Аналогичная теорема справедлива и для левых ядер.

Теорема 3.2. Пусть $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu, \nu = 0, 1$, — индексы, а $(L_{\alpha_\nu+1}^\nu(t), \dots, L_{2(p+q)}^\nu(t))$ — левые существенные многочлены $T + H$ -последовательности.

Тогда, если $l \in [\mu_{i-1}^\nu, \mu_i^\nu - 2]$, то производящие многочлены для элементов базиса $\ker_L S_l$ есть:

$$\left\{ t^{k_j} L_j^\nu(t), t^{k_j+1} (t + 1)^2 L_j^\nu(t), \dots, t (t + 1)^{2(k_j-1)} L_j^\nu(t), (t + 1)^{2k_j} L_j^\nu(t) \right\}_{j=i}^{2(p+q)}.$$

Здесь $k_j = \frac{\mu_j^\nu - l}{2} - 1$.

Для удобства в случае $\alpha_0 = 0$ положено $\mu_0^\nu = M - 2$ и, если $\alpha_1 = 0, \mu_0^\nu = M - 1$.

4. Обращение $T + H$ -матриц

В заключение приведем формулу для производящей функции для обратной к $T + H$ -матрице.

Положим $M = -m, N = n$. Пусть $S_0 = \|a_{i-j} + b_{i+j}\|$ — обратимая блочная теплиц-плюс-ганкелевая матрица блочных размеров $n \times m$ с блоками из $\mathbb{C}^{p \times q}$ и $B = \|b_{ij}\|_{\substack{i=0,1, \dots, m \\ j=0,1, \dots, n}}$

$(b_{ij} \in \mathbb{C}^{q \times p})$ — обратная к ней матрица.

Введем для матрицы B производящий многочлен от двух переменных t и s :

$$B(t, s) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} t^i s^j.$$

Теорема 4.1. Пусть матрица S_0 обратима и $M \equiv \nu \pmod{2}$, $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$ - правые, а $L_1(t), \dots, L_{2(p+q)}(t)$ - левые существенные многочлены порядка ν данной $T + H$ -последовательности.

Тогда производящий многочлен для обратной матрицы строится по формуле:

$$B(t, s) = \frac{\mathcal{R}(t)\Lambda^{-1}\mathcal{L}(s)}{(t-s)(1-ts)},$$

где $\mathcal{R}(t) = (R_1(t) \dots R_{2(p+q)}(t))$, $\mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_{2(p+q)}(s) \end{pmatrix}$, $\Lambda = \Lambda_L \Lambda_0 \Lambda_R$,

$$\Lambda_L = \left(\mathcal{L}_0 \quad \sigma_L^T \{s^{m+1}\mathcal{L}(s^{-1})\} + \sigma_L^H \{s^{m-1}\mathcal{L}(s)\} \quad \mathcal{L}_{n+2} \quad \sigma_L^T \{s\mathcal{L}(s^{-1})\} + \sigma_L^H \{s^{-1}\mathcal{L}(s)\} \right),$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad \Lambda_R = \begin{pmatrix} \sigma_R^T \{t^{-1}\mathcal{R}(t)\} + \sigma_R^H \{t^{-1}\mathcal{R}(t)\} \\ \mathcal{R}_{m+2} \\ \sigma_R^T \{t^{-n-1}\mathcal{R}(t)\} + \sigma_R^H \{t^{n-1}\mathcal{R}(t)\} \\ \mathcal{R}_0 \end{pmatrix},$$

I_p — единичная матрица порядка p .

Здесь \mathcal{R}_{m+2} и \mathcal{L}_{n+2} — старшие коэффициенты правых и левых существенных многочленов, $\mathcal{R}_0, \mathcal{L}_0$ — их свободные члены. Неявно присутствующие в Λ_R, Λ_L матрицы $a_{-m-1}, a_{n+1}, b_{-1}, b_{m+n+1}$ — любые матрицы размеров $p \times q$.

Доказательство. Всюду далее в этом доказательстве запись $[B(t, s)]^j$ ($[B(t, s)]_j$) будет означать j -й столбец (строку) матрицы $B(t, s)$.

Докажем вначале, что $(t-s)(1-ts)[B(t, s)]^j \in \mathcal{N}_2^R$. Заметим, что для $l = 0, \dots, n$

$$\sigma_R^{T,t} \{t^{-l}B(t, s)\} + \sigma_R^{H,t} \{t^l B(t, s)\} = \sum_{j=0}^n \delta_{lj} I_p s^j = s^l I_p. \tag{4.1}$$

Здесь верхний индекс t у оператора означает, что он действует только на эту переменную.

Из условий (4.1) следует, что для $l = 2, \dots, n$

$$\sigma_R^{T,t} \{t^{-l}(t-s)(1-ts)B(t, s)\} + \sigma_R^{H,t} \{t^{l-2}(t-s)(1-ts)B(t, s)\} = 0.$$

По определению (2.1) это означает, что $(t-s)(1-ts)[B(t, s)]^j \in \mathcal{N}_2^R$. Аналогично, с использованием условия

$$\sigma_L^{T,s} \{s^{-l}B(t, s^{-1})\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-l}B(t, s)\} = t^{-l} I_q, \quad l = 0, -1, \dots, -m$$

можно показать, что для $l = -2, -3, \dots, -m$ выполняется

$$\sigma_L^{T,s} \{s^{-l}(t-s^{-1})(1-ts^{-1})B(t, s^{-1})\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-l}(t-s)(1-ts)B(t, s)\} = 0, \tag{4.2}$$

что по определению (2.1) означает, что $(t - s)(1 - ts)[\mathcal{B}(t, s)]_j \in \mathcal{N}_{-2}^L$.

Так как $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$ базис для \mathcal{N}_2^R , мы имеем

$$(t - s)(1 - ts)[\mathcal{B}(t, s)]^j = \sum_{k=1}^{2(p+q)} R_k(t)V_{kj}(s), \quad j = 1, \dots, p.$$

В матричной форме $(t - s)(1 - ts)\mathcal{B}(t, s) = \mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s)$, где

$$\mathcal{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)), \quad \mathcal{V}(s) = \begin{pmatrix} V_{11}(s) & \dots & V_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{2(p+q)1}(s) & \dots & V_{2(p+q)p}(s) \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} & \sigma_L^{T,s} \{s^{-i}\mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s^{-1})\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i}\mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s)\} = \\ & = \mathcal{R}(t) \begin{pmatrix} \sigma_L^{T,s} \{s^{-i} [\mathcal{V}(s^{-1})]_1\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i} [\mathcal{V}(s)]_1\} \\ \dots \\ \sigma_L^{T,s} \{s^{-i} [\mathcal{V}(s^{-1})]_{2(p+q)}\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i} [\mathcal{V}(s)]_{2(p+q)}\} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

для $i = -2, \dots, -m$. Так как многочлены $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$ линейно независимы, мы имеем $\sigma_L^{T,s} \{s^{-i} [\mathcal{V}(s^{-1})]_j\} + \sigma_L^{H,s} \{s^{-2-i} [\mathcal{V}(s)]_j\} = 0$ для $j = 1, \dots, 2(p+q)$. По определению (2.1) это означает, что $[\mathcal{V}(s)]_j \in \mathcal{N}_{-2}^L$.

Так как $L_1(s), \dots, L_{2(p+q)}(s)$ – базис \mathcal{N}_{-2}^L , мы получаем

$$[\mathcal{V}(s)]_j = \sum_{k=1}^{2(p+q)} v_{jk}L_k(s), \quad j = 1, \dots, 2(p+q), \quad v_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Представим эти уравнения в матричной форме $\mathcal{V}(s) = V\mathcal{L}(s)$, где

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{12(p+q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2(p+q)1} & \dots & v_{2(p+q)2(p+q)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_{2(p+q)}(s) \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$(t - s)(1 - ts)\mathcal{B}(t, s) = \mathcal{R}(t)V\mathcal{L}(s). \tag{4.3}$$

Осталось найти матрицу V . Докажем, что $\Lambda_R V \Lambda_L = \Lambda_0$. Для этого нужно вычислить 16 элементов матрицы $\Lambda_R V \Lambda_L$.

Сравним в (4.3) коэффициенты при s^0 :

$$t\mathcal{B}(t, 0) = \mathcal{R}(t)V\mathcal{L}_0. \tag{4.4}$$

Заметим, что $t\mathcal{B}(t, 0)$ многочлен по t степени не большей $m + 1$, а $\mathcal{R}(t)$ не большей $m + 2$. Тогда получаем следующее условие: $\mathcal{R}_{m+2}V\mathcal{L}_0 = 0$. Фактически мы нашли элемент λ_{21} матрицы Λ_0 . Если сравнить в (4.4) коэффициенты при t^0 , то мы получим элемент $\lambda_{41} = \mathcal{R}_0V\mathcal{L}_0 = 0$.

Далее заметим, что $\sigma_R^T \{B(t, 0)\} + \sigma_R^H \{B(t, 0)\} = I_p$. (Мы не указываем явно на какую переменную действует оператор, если это не вызывает сомнений.) Это приводит к результату $\lambda_{11} = (\sigma_R^T \{t^{-1}R(t)\} + \sigma_R^H \{t^{-1}R(t)\}) V L_0 = I_p$. Аналогично, замечая,

$$\sigma_R^T \{t^{-n}B(t, 0)\} + \sigma_R^H \{t^n B(t, 0)\} = 0,$$

получаем $\lambda_{31} = (\sigma_R^T \{t^{-n-1}R(t)\} + \sigma_R^H \{t^{n-1}R(t)\}) V L_0 = 0$. Аналогично могут быть найдены и оставшиеся элементы. Ввиду ограниченности места мы не приводим полного доказательства.

Итак, $\Lambda_R V \Lambda_L = \Lambda_0$. Все матрицы в этом выражении квадратные и, очевидно, $(\Lambda_0)^{-1} = \Lambda_0$. Тогда каждая из Λ_R, V, Λ_L обратима и

$$V = \Lambda_R^{-1} \Lambda_0 \Lambda_L^{-1} = (\Lambda_L \Lambda_0 \Lambda_R)^{-1} = \Lambda^{-1}.$$

Теорема доказана. ■

Отметим, что уже созданная теория для треплицевых матриц (см. [2]) не является частным случаем этой теории при нулевой H -последовательности, так как в данном случае мы иначе определяем разности Δ_k^R . Этим объясняются некоторые расхождения с результатами для треплицевых матриц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 01-01-96422. Один из авторов (Ибряева О.Л.) благодарит за финансовую поддержку программу молодежных грантов для студентов, аспирантов и молодых ученых Челябинской области.

Литература

1. Адуков В.М. Структура ядра и обращение блочных треплицевых матриц / Ред. Сиб. мат. журн. – Новосибирск, 1985. – 20 с. Деп. в ВИНТИ 29.12.85, N 9030-В.
2. Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices // *Linear Algebra Appl.* – 1998. – V. 274. – P. 85-124.
3. Heinig G., Jankowski P. Kernel structure of block Hankel and Toeplitz matrices and partial realization // *Linear Algebra Appl.* – 1992. – V. 175. – P. 1-30.
4. Адуков В.М. Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций // *Алгебра и анализ.* – 1992. – Т. 4, Вып. 1. – С. 54-74.
5. Адуков В.М. О равномерной сходимости подпоследовательностей $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде // *Известия Челябинского научного центра.* – 2001. – Вып. 1. – С. 3-7.
6. Адуков В.М. О геометрии множества предельных точек полюсов $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде // *Известия Челябинского научного центра.* – 2001. – Вып. 1. – С. 8-11.
7. Adukov V.M. The essential polynomial approach to convergence of matrix Padé approximants // *Contemporary Math.* – 2001. – V. 280. – P. 71-87.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЮСОВ $(\lambda-1)$ -Й СТРОКИ ТАБЛИЦЫ ПАДЕ

В.М. Адуков, Д.Н. Микушин

Целью работы является численное моделирование асимптотического поведения знаменателей аппроксимацией Паде для строки с номером $(\lambda-1)$. Рассмотрены примеры, демонстрирующие разнообразие геометрии множества предельных точек полюсов аппроксимации Паде.

Эта работа является продолжением статей [1], [2]. В них рассматривалась мероморфная в круге $|z| < R$ и аналитическая в окрестности $z = 0$ функция $a(z)$, имеющая в точках z_1, \dots, z_ℓ полюсы кратностей s_1, \dots, s_ℓ , соответственно. Пусть $\lambda = s_1 + \dots + s_\ell$ – общее число полюсов $a(z)$ в данном круге. В работах [1], [2] построена полная теория сходимости $(\lambda-1)$ -й строки таблицы Паде для функции $a(z)$. Оказалось, что предельное поведение полюсов аппроксимации Паде $\pi_{n,\lambda-1}(z) = \frac{P_{n,\lambda-1}(z)}{Q_{n,\lambda-1}(z)}$ при $n \rightarrow \infty$ полностью определяется арифметической природой доминирующих полюсов z_1, \dots, z_ν функции $a(z)$ и коэффициентами A_1, \dots, A_ν старших членов ряда Лорана $a(z)$ в окрестности этих полюсов. Доминирующими полюсами мы называем те полюсы $a(z)$ максимального модуля, которые имеют максимальную кратность. Предельные точки множества полюсов семейства $\{\pi_{n,\lambda-1}(z)\}_{n=0}^\infty$ состоят из точек z_1, \dots, z_ℓ и нулей семейства многочленов $\omega(z, \tau) = \sum_{j=1}^\nu C_j \Delta_j(z) \tau_j$. Последнее множество назовем множеством дополнительных предельных точек и обозначим $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$. Формула для вычисления коэффициентов C_j имеет следующий вид

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j}, \quad (1)$$

где $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $D(z) = (z-z_1)^{s_1} \dots (z-z_\ell)^{s_\ell}$ и A_j – коэффициент при $(z-z_j)^{-s_j}$ в разложении мероморфной функции $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$. Многочлены $\Delta_j(z)$ и параметры τ_j определяются следующим образом: $\Delta_j = \frac{\Delta(z)}{z-z_j}$; $\Delta(z) = (z-z_1) \dots (z-z_\nu)$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in \mathbb{F}$, где \mathbb{F} – монотетическая подгруппа тора \mathbb{T}^ν , полученная замыканием циклической группы с образующей $(e^{2\pi i \Theta_1}, \dots, e^{2\pi i \Theta_\nu})$; $2\pi i \Theta_j$ – аргумент z_j . Группа \mathbb{F} явно вычислена в [1]. Геометрия $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ в некоторых важных частных случаях изучена в [2].

Цель данной работы – проиллюстрировать на числовых примерах результаты, полученные в [2]. Кроме того, вычисляя нули достаточно обширного подмножества семейства $\{\omega(z, \tau)\}_{\tau \in \mathbb{F}}$, мы численно промоделируем геометрию $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ в тех случаях, когда явно построить это множество не удастся. Все вычисления выполнены с использованием системы "Maple6". Были созданы процедура нахождения группы \mathbb{F} по матрице линейных зависимостей аргументов $\Theta_1, \dots, \Theta_\nu$ (см. §1 статьи [1]), процедура вычисления коэффициентов C_j и процедура нахождения знаменателей аппроксимаций Паде типа $(n, \lambda-1)$ для рациональной дроби $r(z)$ с помощью рекуррентного процесса

$$V_{k+1}(z) = zV_k(z) - v_k D(z), \quad k \geq 0. \quad (2)$$

Здесь v_k старший коэффициент многочлена $V_k(z)$, а начальное условие $V_0(z)$ находится с помощью алгоритма Евклида из уравнения Безу $U_0(z)D(z) + V_0(z)N(z) = 1$, $r(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ – рациональная часть мероморфной функции $a(z)$. Последняя процедура значительно эффективнее стандартной функции "rade" пакета "Maple6".

1⁰ Рассмотрим прежде всего случай $\nu = 1$. Теорема 1 из [2] утверждает, что в этом и только в этом случае вся последовательность $Q_{n,\lambda-1}(z)$ имеет предел. Продемонстрируем этот факт примером.

Пример 1. Рассмотрим мероморфную функцию

$$a(z) = e^z + \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-2)^2}$$

с рациональной частью

$$r(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-2)^2}.$$

В этом случае имеется только один доминирующий полюс $z = 2$ кратности 2 и $\nu = 1$, $\lambda = 4$. Обозначим через $Q_n(a, z)$ и $Q_n(r, z)$ нормированные знаменатели аппроксимаций Падэ типа $(n, 3)$ для функций $a(z)$ и $r(z)$, соответственно. По теореме 1 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(a, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(r, z) = W(z),$$

где $W(z) = (z-1)(z+2)(z-2) = 4 - 4z - z^2 + z^3$

В таблице (см. Приложение) приведены результаты численной проверки с помощью функции "rade" системы "Maple6" асимптотического поведения знаменателей $Q_n(a, z)$ и $Q_n(r, z)$ для $n \in [1; 200]$, которые подтверждают этот вывод.

2⁰. Полное описание геометрии множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ имеется только при $\nu = 2$ (см. теорему 2 в [2]). Если доминирующие полюсы z_1, z_2 лежат в вершинах правильного σ -угольника, то $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ состоит из конечного числа (σ или $\sigma - 1$) точек, лежащих на окружности Аполлония

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \left| \frac{C_1}{C_2} \right|. \tag{3}$$

В противном случае множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ совпадает со всей окружностью Аполлония. Заметим, что окружность Аполлония может вырождаться в прямую при $\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = 1$.

Проиллюстрируем случай, когда конечное число дополнительных предельных точек лежит на прямой.

Пример 2. Рассмотрим мероморфную функцию с рациональной частью

$$r(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4(i + \frac{1}{2})^2(z+i)} + \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

Доминирующие полюсы есть $z_1 = 1$ и $z_2 = -i$, $\nu = 2$, полюсы лежат в точках деления окружности на 4 равные части. Лорановские коэффициенты A_1, A_2 равны соответственно $A_1 = 1, A_2 = 4(i + \frac{1}{2})^{-2}$.

Вычисления показывают, что

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \left| \frac{A_2}{A_1} \right| \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right|^2 = 1,$$

В данном примере формально мы имеем 4 дополнительные предельные точки, которые являются корнями многочленов

$$\omega_j(z) = C_1(z - z_2) + C_2 e^{-\frac{\pi i j}{2}} (z - z_1), \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Легко показать, что $\omega_2 = \text{const}$, следовательно, корней у данного многочлена нет, поэтому в действительности мы имеем только три дополнительные предельные точки (случай вырождения), являющиеся корнями многочленов $\omega_0, \omega_1, \omega_3$. Эти корни есть

$$\zeta_0 = \frac{1-i}{2}, \quad \zeta_1 = 1-i, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad \zeta_3 = 0.$$

Таким образом, множество $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}$ состоит из конечного числа точек, лежащих на прямой. Расположение дополнительных предельных точек в данном случае изображено на рис. 1а.

Следующий пример демонстрирует случай, когда имеется континуум дополнительных предельных точек, лежащих на окружности Аполлония.

Пример 3. Рассмотрим мероморфную функцию с рациональной частью

$$r(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e^{2\pi i\sqrt{2}})(z-\frac{1}{2})}.$$

Доминирующие полюсы: $z_1 = 1$ и $z_2 = e^{2\pi i\sqrt{2}}$, $\nu = 2$, $\lambda = 3$. Ясно, что полюсы z_1, z_2 не лежат в точках деления окружности на равные части, следовательно множество дополнительных предельных точек заполняет всю окружность Аполлония (3), где

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \sqrt{5 - 4 \cos 2\pi\sqrt{2}}.$$

Эта окружность построена на рис. 1б. С помощью функции "pade" легко проверить, что многочлены $Q_n(a, z)$ и $Q_n(r, z)$ становятся достаточно близкими уже начиная с $n = 10$. Поэтому предельные точки множества полюсов аппроксимаций Паде при большом n достаточно близки к нулям знаменателей $Q_n(r, z)$ аппроксимаций Паде для рациональной функции $r(z)$. Поскольку при больших n вычисления $Q_n(r, z)$ с помощью функции "pade" требуют больших затрат времени, мы найдем многочлены $Q_n(r, z)$ с помощью рекуррентной процедуры (2). На рис. 1б показаны нули этих многочленов для $n \in [10, 200]$. Хорошо видно, что все они лежат на окружности Аполлония достаточно плотно заполняя ее.

3^0 . При $\nu \geq 3$ геометрия $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}$ изучена только в некоторых частных случаях. Среди них самый важный – это случай линейно независимых над полем рациональных чисел \mathbb{Q} аргументов $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_\nu$, когда $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}$ состоит из замкнутых областей

$$|C_j \Delta_j(z)| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} |C_k \Delta_k(z)|, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad (4)$$

(теорема 3 в [3]). Это множество обозначим \mathcal{N} . Легко показать, что всегда $\mathcal{M}_{\mathbb{F}} \subseteq \mathcal{N}$.

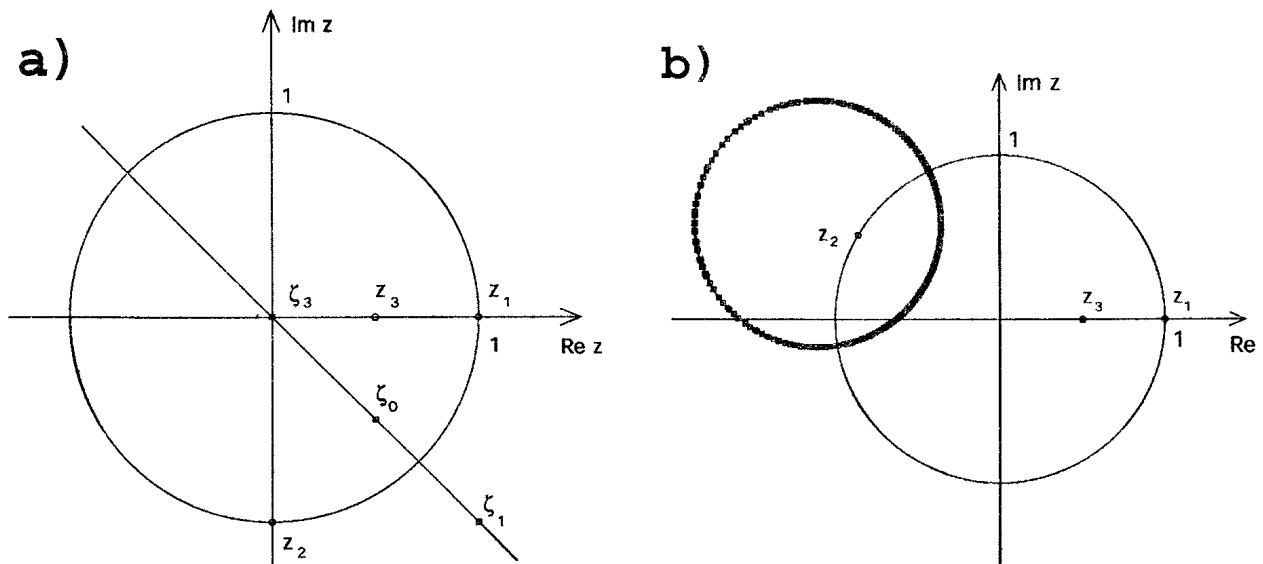


Рис. 1. а) Конечное число предельных точек на прямой ($\nu = 2$), б) континуум предельных точек на окружности Аполлония ($\nu = 2$).

Пример 4. Рассмотрим мероморфную функцию

$$a(z) = e^z + \frac{z^2 + z}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})(z - \frac{1}{2})}$$

с рациональной частью

$$r(z) = \frac{z^2 + z}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})(z - \frac{1}{2})}$$

Здесь доминирующие полюсы есть

$$z_1 = e^{2\pi i\sqrt{2}} = -0.8582161855 + 0.5132883974 i,$$

$$z_2 = e^{2\pi i\sqrt{3}} = -0.1125391807 - 0.9936472879 i,$$

$$z_3 = e^{2\pi i\sqrt{5}} = 0.08742571683 + 0.9961710416 i.$$

Аргументы $\Theta_1 = \sqrt{2}$, $\Theta_2 = \sqrt{3}$, $\Theta_3 = \sqrt{5}$ линейно независимы по модулю \mathbb{Z} над полем \mathbb{Q} . Вычисления коэффициентов C_j формуле (1) дают следующие значения:

$$C_1 = 0.7040076094 + 0.1709505671i, \quad C_2 = 0.07853024260 + 0.1743759673i,$$

$$C_3 = 0.2927491140 + 0.04486932302 i.$$

Граница множества \mathcal{N} состоит из 4 связных компонент. Область \mathcal{N} выделена на рис. 2a серым цветом. Для проверки равенства $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ мы используем рекуррентную процедуру (2). Результат работы процедуры представлен на рис. 2b. Видно, что нули $Q_{n,\lambda-1}(r, z)$ действительно заполняют область \mathcal{N} .

4⁰. В теореме 4 [2] представлен еще один случай, когда множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ вычисляется явно. Из указанной теоремы нетрудно получить два важных следствия.

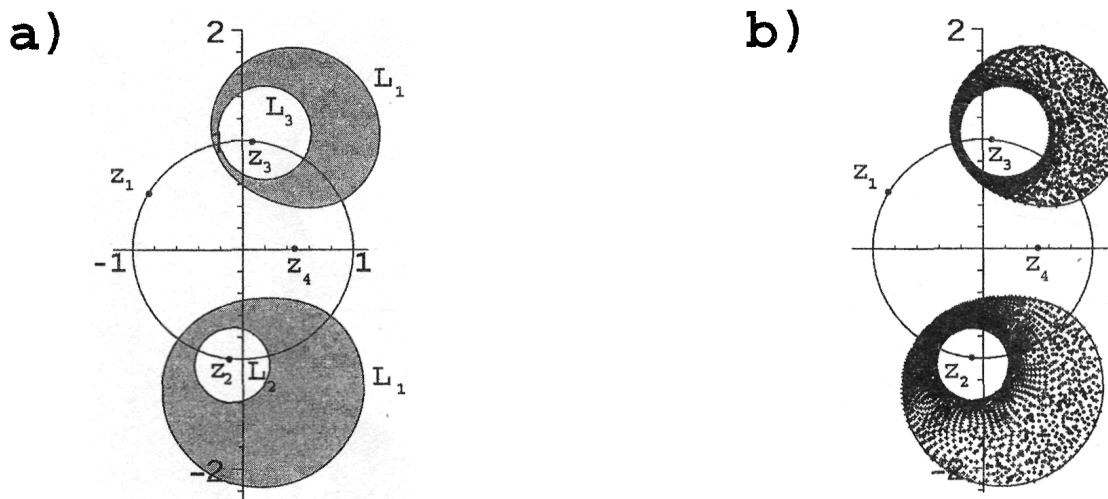


Рис. 2. а) Область $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ для линейно независимых аргументов, б) результат работы рекуррентного процесса (4000 итераций).

Следствие 1. Пусть $\Theta_0 = 1$, Θ_1 линейно независимы над \mathbb{Q} ($r = 1$) и $\Theta_2, \dots, \Theta_\nu$ – рациональные числа, причем

$$\Theta_k = \frac{n_k}{\sigma}, \quad k = 2, \dots, \nu, \quad 0 \leq n_k \leq \sigma - 1.$$

Тогда множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ состоит из σ линий

$$|C_1 \Delta_1(z)| = \rho^{-n} \left| \sum_{k=2}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^n \right|, \quad n = 0, 1, \dots, \sigma - 1.$$

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий это следствие.

Пример 5. Пусть

$$r(z) = \frac{2z - 5}{(z - e^{2\pi i \sqrt{5}})(z + 1)(z - 1)(z - \frac{1}{2})}.$$

Тогда $r = 1$, $\sigma = 2$ и множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ состоит из двух линий

$$\mathcal{N}^0: \quad |C_1 \Delta_1(z)| = |C_2 \Delta_2(z) + C_3 \Delta_3(z)|$$

и

$$\mathcal{N}^1: \quad |C_1 \Delta_1(z)| = |C_2 \Delta_2(z) - C_3 \Delta_3(z)|.$$

Здесь

$$C_1 = 0.007700973064 - 0.08883928653 i,$$

$$C_2 = 0.02380952381 - 0.02181147435 i,$$

$$C_3 = -0.1666666667 - 0.1819342381 i.$$

На рис. 3а построены эти линии. Оказалось, что \mathcal{N}^1 распадается на две связные компоненты. На этом же рисунке показаны нули многочленов $V_n(z)$, т.е. нули знаменателей аппроксимаций Паде рациональной функции $r(z)$, для $n \in [10, 500]$. Видно, что они действительно заполняют линии \mathcal{N}^0 и \mathcal{N}^1 .

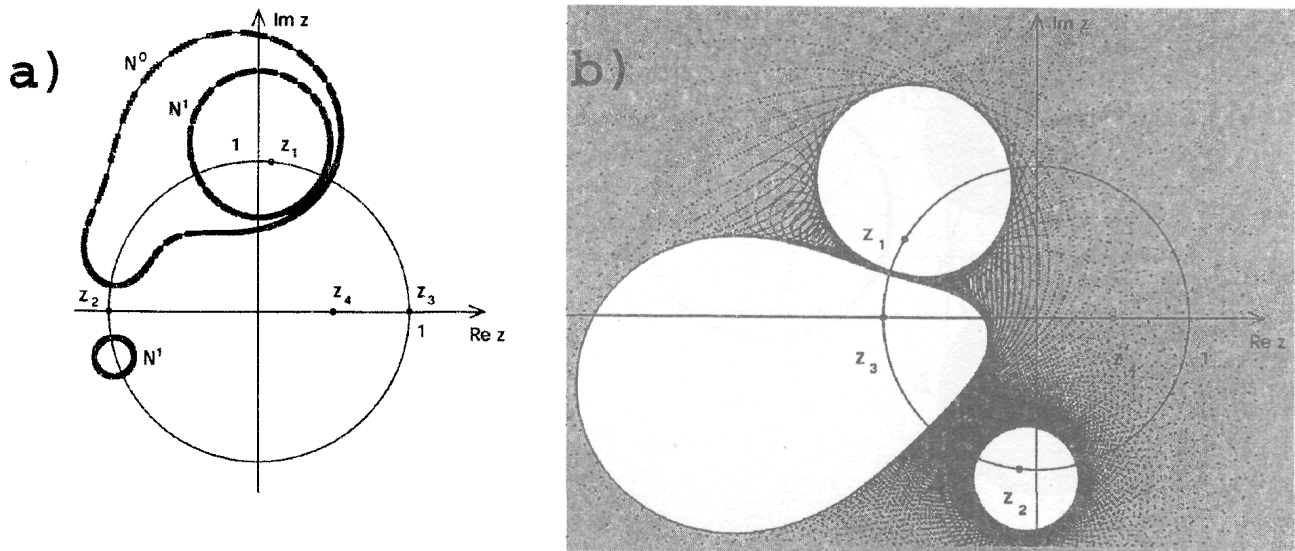


Рис. 3. а) Пример множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$, состоящего из конечного числа линий в случае $r = 1$, б) заполнение множества \mathcal{N} нулями многочленов из семейства $\omega(z, \tau)$ в случае $r = \nu - 1$.

Следствие 2. Если $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_{\nu-1}$ линейно независимы над \mathbb{Q} ($r = \nu - 1$) и Θ_{ν} рациональное число, то множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$.

Рассмотрим пример.

Пример 6. Пусть

$$r(z) = \frac{z}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z + 1)(z - \frac{1}{2})}.$$

В этом случае $\nu = 3, r = 2, \sigma = 2$.

По следствию 2 имеем $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$. Для проверки этого равенства найдем нули достаточно обширного подмножества семейства многочленов $\omega(z, \tau), \tau \in \mathbb{F}$. На рис. 3b область \mathcal{N} показана серым цветом и продемонстрировано ее заполнение нулями семейства $\omega(z, \tau)$, когда на торе \mathbb{T}^2 взято 140^2 точек.

Продемонстрируем теорему 4 [2] в случае $1 \leq r \leq \nu - 1$. Следующий пример показывает, что при этом множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ является подмножеством \mathcal{N} .

Пример 7. Пусть

$$r(z) = \frac{z^3}{(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - 1)(z + 1)(z - \frac{1}{2})}.$$

Доминирующие полюсы в этом случае есть

$$z_1 = e^{2\pi i\sqrt{5}}, \quad z_2 = e^{2\pi i\sqrt{3}},$$

$$z_3 = 1, \quad z_4 = -1.$$

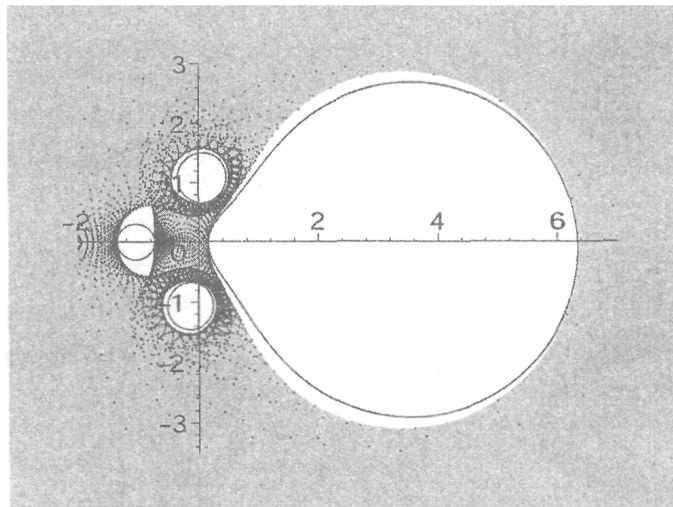


Рис. 4. Пример множества \mathcal{N}_F не совпадающего с \mathcal{N} .

Здесь $\Theta_0 = 1, \Theta_1 = \sqrt{5}, \Theta_2 = \sqrt{3}$ линейно независимы над \mathbb{Q} , $\Theta_3 = 0, \Theta_4 = \frac{1}{2}$. По теореме 4 [2] область \mathcal{N}_F является частью области \mathcal{N} . Границы множества \mathcal{N}_F , найденные по этой теореме, есть

$$L_1 : \left| \frac{C_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4}{(z - z_4)} \right| = \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_2 : \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| = \left| \frac{C_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_3 : \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right| = \left| \frac{C_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right|$$

$$L_4 : \left| \frac{C_3 z_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4 z_4}{(z - z_4)} \right| = \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_5 : \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right| = \left| \frac{C_3 z_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4 z_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right|$$

$$L_6 : \left| \frac{C_2}{(z - z_2)} \right| = \left| \frac{C_3 z_3}{(z - z_3)} + \frac{C_4 z_4}{(z - z_4)} \right| + \left| \frac{C_1}{(z - z_1)} \right|.$$

На рис. 4 построена граница области \mathcal{N} , область $\mathcal{N}_F \subset \mathcal{N}$ окрашена серым цветом, и показаны нули знаменателей аппроксимаций Паде $r(z)$, найденные с помощью рекуррентной процедуры (2) при 3500 итерациях.

5⁰. Рассмотрим теперь примеры функций, для которых множество \mathcal{N}_F в явном виде в работах [1], [2] не найдено. Прежде всего изучим случай $r = 1$.

Пример 8. Пусть мероморфная функция имеет рациональную часть

$$r(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - e^{2\pi i \sqrt{3}})(z - e^{2\pi i(1/2 - \sqrt{3}/3)})(z - e^{2\pi i(1 + 3\sqrt{3}/4)})(z - \frac{1}{2})}$$

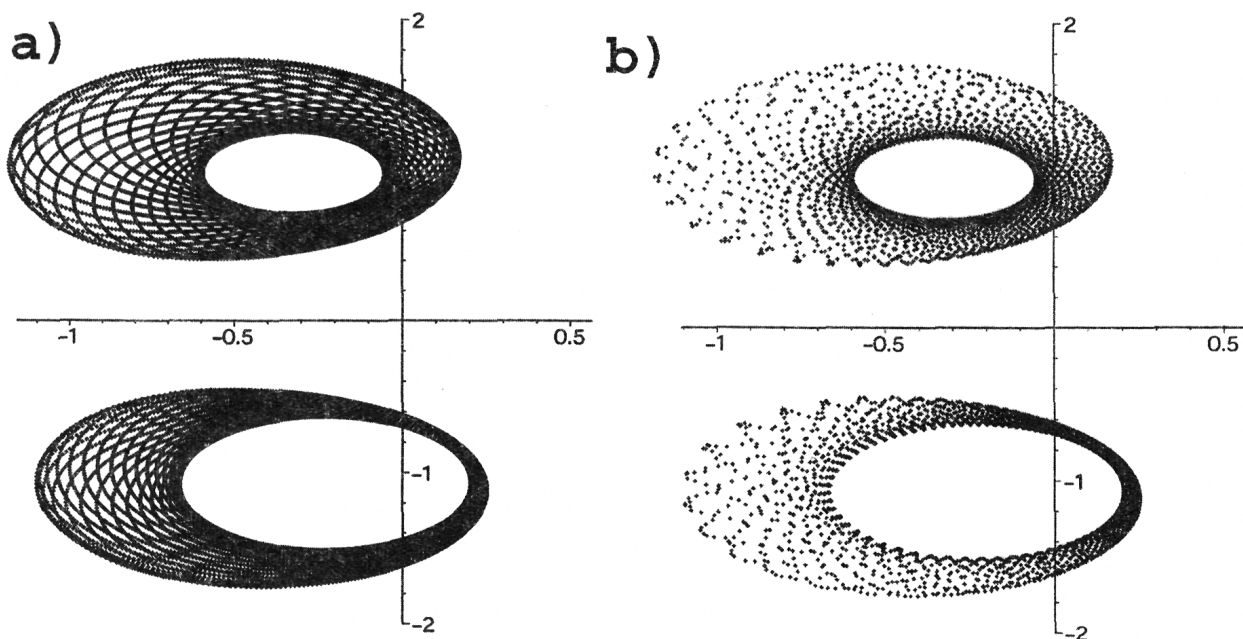


Рис. 5. а) Расположение предельных точек в случае $r = 1, \nu = 3$, б) результат работы рекуррентного процесса (3500 итераций).

Тогда $\Theta_0 = 1, \Theta_1 = \sqrt{3}, \Theta_2 = \frac{1}{2}\Theta_0 - \frac{1}{3}\Theta_1, \Theta_3 = \Theta_0 + \frac{3}{4}\Theta_1$ и матрица линейных зависимостей имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Вычисление группы параметров \mathbb{F} для данных линейных зависимостей дает следующий результат:

$$\mathbb{F} = \{(t_1^{-12}, (-1)^j t_1^4, t_1^{-9}) | t_1 \in \mathbb{T}, j = 0, 1\}.$$

В нашем случае теория не дает точного ответа о геометрии множества дополнительных предельных точек, поэтому промоделируем построение этого множества, вычисляя нули достаточно обширного подмножества семейства $\omega(z, \tau)$. Результаты этого моделирования показаны на рис. 5а. Здесь окружность \mathbb{T} разбита на двадцать тысяч равных сегментов и параметр t_1 принимает дискретные значения. Этот и другие аналогичные примеры позволяют сделать предположение о том, что множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ в случае $r = 1$ состоит из конечного числа линий.

Сравним теперь результаты моделирования множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ с численным экспериментом. Для этого воспользуемся рекуррентным процессом (2). На рис. 5б показаны результаты этого эксперимента.

Как мы видели выше (см. пример 6) множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ может совпадать с \mathcal{N} не только для линейно независимых $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \dots, \Theta_\nu$. Как показывают следующие примеры это может осуществляться достаточно часто. Рассмотрим вначале такой случай, когда $r = \nu - 1$, но не выполняются условия следствия 2.

Пример 9.

$$r(z) = \frac{1}{(z - e^{2\pi i\sqrt{2}})(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})(z - e^{2\pi i\Theta_3})(z - \frac{1}{2})},$$

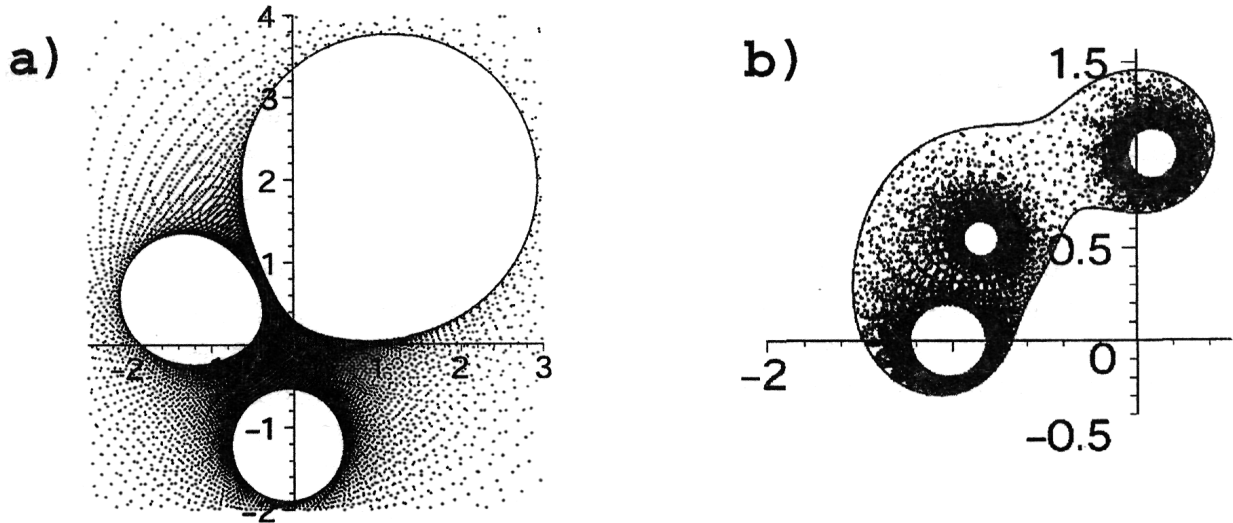


Рис. 6. а) Совпадение $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ в случае $r = \nu - 1$ (пример 9), б) совпадение $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$ в случае $1 \leq r \leq \nu - 2$ (пример 10).

Здесь $\Theta_3 = \frac{1}{2}\Theta_0 + \Theta_1 + \frac{3}{4}\Theta_2$. На рис. 6а показано заполнение множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ нулями семейства многочленов $\omega(z, \tau)$, когда на торе \mathbb{T}^2 взято 160^2 точек. Это моделирование достаточно убедительно подтверждает равенство $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$.

Промоделируем построение множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ для $1 \leq r \leq \nu - 2$. Оказывается, что и в этом случае возможно совпадение множеств $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ и \mathcal{N} .

Пример 10.

$$r(z) = \frac{A_1}{(z - e^{2\pi i\sqrt{3}})} + \frac{A_2}{(z - e^{2\pi i\sqrt{5}})} + \frac{A_3}{(z - e^{2\pi i\Theta_3})} + \frac{A_4}{(z - e^{2\pi i\Theta_4})},$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{2}, \Theta_4 = \Theta_1 + \frac{3}{4}\Theta_2.$$

Здесь нам удобнее задать значения C_j :

$$C_1 = 10, C_2 = -1, C_3 = -2, C_4 = -1$$

и по формуле (1) восстановить следующие значения A_j :

$$A_1 = 0.002650640428 + 0.004101033363i,$$

$$A_2 = -0.06279967837 - 0.08717534896i,$$

$$A_3 = 0.2925425007 + 0.2844910223i,$$

$$A_4 = -0.3431243703 + 0.9610937484i.$$

Группа параметров \mathbb{F} имеет следующий вид

$$\mathbb{F} = \{(t_1^{-1}t_2^{-3}, (-1)^j t_1^{-6}, t_2, t_1^{-5}t_2^{-3}) \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2, j = 0, 1\}.$$

На рис. 6б показано заполнение множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ нулями семейства многочленов $\omega(z, \tau)$, когда на торе \mathbb{T}^2 взято 2×80^2 точек. Скорее всего и в этом случае выполняется равенство $\mathcal{N}_{\mathbb{F}} = \mathcal{N}$.

Заключение

Моделирование на числовых примерах асимптотического поведения полюсов аппроксимаций Паде $(\lambda - 1)$ -й строки показало полное согласие с ранее развитой теорией. Продемонстрировано разнообразие геометрии множества предельных точек \mathcal{M}_F . В случаях, когда множество \mathcal{M}_F явно не найдено, численное моделирование позволило выдвинуть ряд предположений о его структуре.

Авторы благодарят за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (проект N 01-01-96422). Кроме того, один из авторов (Д.Н. Микушин) благодарит за финансовую поддержку программу молодежных грантов для студентов, аспирантов и молодых ученых Челябинской области.

Литература

1. Адуков В.М. – О равномерной сходимости подпоследовательностей $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде // *Известия Челябинского научного центра*. – 2001. – Вып. 1. – С. 3–7.
2. Адуков В.М. – О геометрии множества предельных точек полюсов $(\lambda - 1)$ -й строки таблицы Паде // *Известия Челябинского научного центра*. – 2001. – Вып. 1. – С. 8–11.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сравнение предельного поведения знаменателей аппроксимаций Паде для
мероморфной функции и для ее рациональной части

Табл. Знаменатели аппроксимаций Паде для примера 1

n	$Q_n(r, z), Q_n(a, z)$
1	$Q_1(r, z) = 2.181818182 - 2.545454545 z - 0.545454545 z^2 + z^3$ $Q_1(a, z) = 2.195765082 + 0.2253296045 z - 0.8365960847 z^2 + z^3$
2	$Q_2(r, z) = 3.259259259 - 4.000000000 z - 0.222222222 z^2 + z^3$ $Q_2(a, z) = -5.112562852 + 8.917347241 z - 4.541724681 z^2 + z^3$
3	$Q_3(r, z) = 2.880000000 - 3.146666667 z - 0.720000000 z^2 + z^3$ $Q_3(a, z) = -6.078460011 + 10.22941291 z - 4.956565554 z^2 + z^3$
4	$Q_4(r, z) = 3.508771930 - 4.000000000 z - 0.5029239766 z^2 + z^3$ $Q_4(a, z) = 51.00773518 - 63.97380408 z + 11.88952593 z^2 + z^3$
5	$Q_5(r, z) = 3.203747073 - 3.400468384 z - 0.8009367681 z^2 + z^3$ $Q_5(a, z) = 4.476359610 - 2.522937121 z - 2.974811072 z^2 + z^3$
...
20	$Q_{20}(r, z) = 3.875000031 - 4.000000000 z - 0.8750000084 z^2 + z^3$ $Q_{20}(a, z) = 3.875000029 - 3.999999998 z - 0.8750000092 z^2 + z^3$
21	$Q_{21}(r, z) = 3.764705897 - 3.823529412 z - 0.9411764743 z^2 + z^3$ $Q_{21}(a, z) = 3.764705897 - 3.823529413 z - 0.9411764742 z^2 + z^3$
22	$Q_{22}(r, z) = 3.885714293 - 4.000000000 z - 0.8857142876 z^2 + z^3$ $Q_{22}(a, z) = 3.885714293 - 4.000000000 z - 0.8857142876 z^2 + z^3$
23	$Q_{23}(r, z) = 3.783783787 - 3.837837838 z - 0.9459459468 z^2 + z^3$ $Q_{23}(a, z) = 3.783783787 - 3.837837838 z - 0.9459459468 z^2 + z^3$
...
195	$Q_{195}(r, z) = 3.972881356 - 3.979661017 z - 0.9932203390 z^2 + z^3$ $Q_{195}(a, z) = 3.972881356 - 3.979661017 z - 0.9932203390 z^2 + z^3$
196	$Q_{196}(r, z) = 3.986486486 - 4.000000000 z - 0.9864864865 z^2 + z^3$ $Q_{196}(a, z) = 3.986486486 - 4.000000000 z - 0.9864864865 z^2 + z^3$
197	$Q_{197}(r, z) = 3.973154362 - 3.979865772 z - 0.9932885906 z^2 + z^3$ $Q_{197}(a, z) = 3.973154362 - 3.979865772 z - 0.9932885906 z^2 + z^3$
198	$Q_{198}(r, z) = 3.986622074 - 4.000000000 z - 0.9866220736 z^2 + z^3$ $Q_{198}(a, z) = 3.986622074 - 4.000000000 z - 0.9866220736 z^2 + z^3$
199	$Q_{199}(r, z) = 3.973421927 - 3.980066445 z - 0.9933554817 z^2 + z^3$ $Q_{199}(a, z) = 3.973421927 - 3.980066445 z - 0.9933554817 z^2 + z^3$
200	$Q_{200}(r, z) = 3.986754967 - 4.000000000 z - 0.9867549669 z^2 + z^3$ $Q_{200}(a, z) = 3.986754967 - 4.000000000 z - 0.9867549669 z^2 + z^3$
	$W(z) = 4 - 4z - z^2 + z^3$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПОЛНОТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ DL

М.Н. Шматков

В данной работе рассматриваются вопросы, относящиеся к теории вычислимости. Проводится подробное детальное доказательство теоремы о полноте исчисления динамической логики DL, приведенной Ю.Л. Ершовым в работе [6].

Введение

Проблема вычислимости является в настоящее время в математике объектом все более активного изучения и исследования. Наряду с потребностями развития теории, это в значительной степени обусловлено быстрым развитием и широким использованием электронной вычислительной техники в самых различных областях человеческой деятельности.

Одними из наиболее актуальных в настоящее время задач проблемы вычислимости являются задачи обобщенной теории вычислимости в произвольных допустимых множествах. К таким задачам относятся задачи динамической логики.

Целью настоящей работы является выполнение нигде ранее не опубликованного подробного детального доказательства теоремы о полноте исчисления динамической логики DL, сформулированной со схемой доказательства Ю.Л. Ершовым в работе [6].

Данная теорема имеет фундаментальное значение для установления доказуемости выражений в исчислении динамической логики DL, так как позволяет значительно повысить эффективность исследований доказуемости выражений в исчислении динамической логики DL путем сведения синтаксического анализа выражения к его семантическому анализу.

Автор благодарен всем, кто оказывал ему помощь и поддержку при выполнении настоящей работы. Отдельная благодарность академику Ю.Л. Ершову за постановку данной проблемы.

1. Предварительные сведения

В обозначениях и определениях, относящихся к теории допустимых множеств, теории вычислимости и исчислению динамической логики DL, будем следовать обозначениям и определениям, принятым в работе [6].

Пусть P входит позитивно в Φ , $\sigma_0 \equiv \sigma \setminus \langle P^k \rangle$, \mathfrak{A}_0 — алгебраическая система сигнатуры σ_0 , $Q \subseteq A_0^k$, $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle$ есть обогащение \mathfrak{A}_0 до σ и $P^{\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle} = Q$.

Предложение 1.1. ([6], Предложение 1.3.2) Если предикат $R \subseteq A_0^k$ таков, что $Q \subseteq R$, то для любой интерпретации $\gamma : FV(\Phi) \rightarrow A_0$ имеет место импликация $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathfrak{A}_0, R \rangle \models \Phi[\gamma]$.

Теорема 1.1. ([6], Теорема 3.6.1) [Ганди] Пусть $\Phi(x_0, x_1, P_0, \dots, P_{n-1}, P_n)$ — Σ^+ -формула сигнатуры σ^{n+1} . Существует Σ^+ -формула $\Psi(x_0, x_1, P_0, \dots, P_{n-1})$ сигнатуры σ^n такая, что для любых KPU⁺-модели \mathbb{A}^+ сигнатуры σ^n и элемента $a \in A$ множество $\Psi(x_0, a, \bar{P})^{\mathbb{A}^+}[x_0]$ является неподвижной точкой оператора $\Gamma : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, определенного по формуле Φ так:

$$\Gamma(Q) \equiv \{b \in A \mid \langle \mathbb{A}, Q_0, \dots, Q_{n-1}, Q \rangle \models \Phi(b, a, \bar{P}, P_n)\}, \quad Q \subseteq A.$$

Замечание 1.1. ([6], Замечание 3.6.1) Можно утверждать существование формулы Ψ , определяющей наименьшую формульную неподвижную точку оператора Γ или даже наименьшее формульное подмножество среди всех таких M что $\Gamma(M) \subseteq M$.

Теорема 1.2. (Гёделя о полноте, [6]) Формула является доказуемой тогда и только тогда, когда она тождественно истинна.

Лемма 1.1. ([6], Лемма 3.7.1) Пусть $\Phi(x, \bar{x}, \bar{P}, P_n) - \Sigma^+$ -формула сигнатуры σ^{n+1} и $\Phi_G(x, \bar{x}, \bar{P}) - \Sigma^+$ -формула сигнатуры σ^n , которая выражает следующее:

$\exists f \exists \alpha (Ord(\alpha) \wedge f - \text{функция})$

$$\wedge \delta_f = \alpha \wedge f(0) = \emptyset \wedge \forall \beta \in \alpha \forall y \in f(\beta) \\ \Phi(y, \bar{x}, \bar{P}, \bigcup_{\gamma \in \beta} f(\gamma)) \wedge \exists \beta \in \alpha (x \in f(\beta)).$$

Тогда для любой KPU⁺-модели $\langle \mathbb{A}, Q_0, \dots, Q_{n-1} \rangle$ сигнатуры σ^n и любых $a_0, \dots, a_{k-1} \in A$ множество $\Phi_G^{\langle \mathbb{A}, \bar{Q} \rangle}(x, \bar{a}, \bar{P})[x]$ есть наименьшая (среди Σ^+ -подмножеств $\langle \mathbb{A}, \bar{Q} \rangle$) неподвижная точка оператора, определенного Σ^+ -формулой $\Phi(x, \bar{a}, \bar{Q}, P_n^+)$.

Теорема 1.3. ([6], Теорема 3.7.1) Справедливы следующие утверждения:

- (а) для любой Σ^+ -формулы Φ языка DL существуют число $n \in \omega$ и такая Σ^+ -формула Φ_* сигнатуры σ^n , что $FV_*(\Phi) = FV(\Phi_*)$, а для любой пары $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle$, где \mathbb{A} — KPU-модель, \mathcal{P} — Σ -допустимое семейство для \mathbb{A} , и для любой интерпретации $\gamma : X \rightarrow A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных $\Phi(\Phi_*)$ имеет место эквивалентность

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma];$$

- (б) для любой программы α существуют число $n \in \omega$, Σ^+ -формула Φ_α сигнатуры σ^n и предметная переменная $x \notin FV_*(\alpha)$ такие, что $FV(\Phi_\alpha) = FV_*(\alpha) \cup \{x\}$, а для любой пары $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle$, где \mathbb{A} — KPU-модель, \mathcal{P} — Σ -допустимое семейство для \mathbb{A} , и для любой интерпретации $\gamma : X \rightarrow A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных α имеет место равенство

$$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = [\lambda x \Phi_\alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].$$

Лемма 1.2. ([6], Лемма 3.7.2) Справедливы следующие утверждения:

- (а) для любой Σ^+ -формулы Φ языка DL, если Φ_* — Σ^+ -формула сигнатуры σ^n , построенная по Φ в доказательстве теоремы 3.7.1, то в исчислении DL доказуемо выражение $\Phi \equiv \Phi_*$,
- (б) для любой программы α , если Φ_α — Σ^+ -формула сигнатуры σ^n , построенная по α в доказательстве теоремы 3.7.1, то в исчислении DL доказуемо выражение $\alpha \equiv [\lambda x \Phi_\alpha]$.

2. Теорема о полноте исчисления динамической логики DL

В данном разделе проводится подробное доказательство теоремы о полноте исчисления динамической логики DL, приведенной Ю.Л. Ершовым в работе [6].

Далее, если не оговорено особо, будем использовать следующие обозначения:

$$\gamma_a \equiv (\gamma \setminus (\{x\} \times A)) \cup \{(x, a)\} \\ \gamma_Q \equiv (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P})) \cup \{(P_n, Q)\}$$

Теорема [о полноте]. Справедливы следующие утверждения:

- (a) если Φ и Ψ — Σ^+ -формулы языка DL, то выражение $\Phi \sqsubseteq \Psi$ доказуемо в исчислении DL тогда и только тогда, когда для любых KPU-модели \mathbb{A} , Σ -допустимого семейства \mathcal{P} для \mathbb{A} и интерпретации $\gamma : X \rightarrow A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных формул Φ и Ψ имеет место импликация

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Psi[\gamma];$$

- (b) если α и β — программы, то выражение $\alpha \sqsubseteq \beta$ доказуемо в исчислении DL тогда и только тогда, когда для любых KPU-модели \mathbb{A} , Σ -допустимого семейства \mathcal{P} для \mathbb{A} и интерпретации $\gamma : X \rightarrow A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных программ α и β имеет место включение

$$\alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \subseteq \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

\Rightarrow : Зафиксируем произвольно KPU-модель \mathbb{A} , Σ -допустимое семейство \mathcal{P} для \mathbb{A} и интерпретацию $\gamma : X \rightarrow A \cup \mathcal{P}$

1. Проверим заключение теоремы для аксиом.

!

$E \sqsubseteq E$:

- (a) E — Σ^+ -формула Φ . Тогда $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma]$.
 (b) E — программа α . Тогда $\alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \subseteq \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma]$.

$E_i \sqsubseteq E_0 \vee E_1, i = 0, 1$:

- (a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем: $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_i[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma]$.
 (b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Имеем:
 $\alpha_i^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \subseteq \alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \cup \alpha_1^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] = (\alpha_0 \vee \alpha_1)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma]$.

$E_0 \wedge E_1 \sqsubseteq E_i, i = 0, 1$:

- (a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_i[\gamma], i = 0, 1$.
 (b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Имеем:
 $(\alpha_0 \wedge \alpha_1)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] = \alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \cap \alpha_1^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \subseteq \alpha_i^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma], i = 0, 1$.

$x = y \wedge (E)_x^z \sqsubseteq (E)_y^z$:

- (a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (x = y \wedge (\Phi)_x^z)[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) = \gamma(y)$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_{\gamma(y)}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_y^z[\gamma]$
 где $\gamma_a = (\gamma \setminus (\{z\} \times A)) \cup \{(z, a)\}$.
 (b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Определим γ_a как в пункте (a). Имеем:

$$\begin{aligned} (x = y \wedge (\alpha)_x^z)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &= \begin{cases} (\alpha)_x^z{}^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x = y[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_{\gamma(x)}], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x = y[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_{\gamma(y)}], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x = y[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &\subseteq ((\alpha)_y^z)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma]. \end{aligned}$$

$\Phi \sqsubseteq T$:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x_0 = x_0[\gamma].$$

$\alpha \sqsubseteq \tau$:

$$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq A = \tau^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].$$

II

$\forall x \in t_0 E \wedge t_1 \in t_0 \sqsubseteq (E)_{t_1}^x$:

(a) E — Σ^+ -формула Φ . Имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\forall x \in t_0 \Phi \wedge t_1 \in t_0)[\gamma] &\Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \forall x \in t_0 \Phi[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \Rightarrow \\ &(\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a] \text{ для любого } a \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma]) \text{ и } a_1 \Rightarrow t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_{a_1}] \Rightarrow \\ &\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_{t_1}^x[\gamma]. \end{aligned}$$

(b) E — программа α . Имеем:

$$\begin{aligned} &(\forall x \in t_0 \alpha \wedge t_1 \in t_0)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \\ &= \begin{cases} [\forall x \in t_0 \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cap \{ \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \}, & \text{если } a_1 \Rightarrow t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &\subseteq \begin{cases} \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &\subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}] = ((\alpha)_{t_1}^x)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]. \end{aligned}$$

$(E)_{t_1}^x \wedge t_1 \in t_0 \sqsubseteq \exists x \in t_0 E$:

(a) E — Σ^+ -формула Φ . Имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models ((\Phi)_{t_1}^x \wedge t_1 \in t_0)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_{t_1}^x[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a] \text{ } a \Rightarrow t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in t_0 \Phi.$$

(b) E — программа α . Имеем:

$$\begin{aligned} ((\alpha)_{t_1}^x \wedge t_1 \in t_0)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] &= \begin{cases} ((\alpha)_{t_1}^x)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a], & \text{если } a \Rightarrow t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &\subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \subseteq \cup \{ \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}] \mid a_1 \in A, a_1 \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \} \\ &= [\exists x \in t_0 \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]. \end{aligned}$$

$(E)_t^x \wedge \alpha(t) \sqsubseteq \exists x \in \alpha E$:

(a) E — Σ^+ -формула Φ . Имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models ((\Phi)_t^x \wedge \alpha(t))[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_t^x[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(t)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_t^x[\gamma] \text{ и } a \Rightarrow t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a] \text{ и } a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in \alpha \Phi[\gamma].$$

(b) E — программа β . Имеем:

$$\begin{aligned} ((\beta)_t^x \wedge \alpha(t))[\gamma] &= \begin{cases} ((\beta)_t^x)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(t)[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a], & \text{если } a \Rightarrow t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \\ &\subseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \\ &\subseteq \cup \{ \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}] \mid a_1 \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \} \\ &= [\exists x \in \alpha \beta]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]. \end{aligned}$$

$\exists x \in \alpha E \sqsubseteq \exists y(\alpha(y) \wedge (E)_y^x)$ для $y \neq x$, не встречающегося в α и E :

(a) E — Σ^+ -формула Φ . Имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in \alpha \Phi[\gamma] &\Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a] \text{ для некоторого } a \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow \\ \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(y)[\gamma'_a] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_y^x[\gamma'_a] &\Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\alpha(y) \wedge (\Phi)_y^x)[\gamma'_a] \Rightarrow \\ \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists y (\alpha(y) \wedge (\Phi)_y^x)[\gamma], &\text{ где } \gamma'_a = (\gamma \setminus (\{y\} \times A)) \cup \{y, a\}. \end{aligned}$$

(b) E — программа β . Имеем:

$$\begin{aligned} (\exists x \in \alpha \beta)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &= \cup \{ \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \} \\ &= \cup \{ ((\beta)_y^x)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma'_a] \mid a \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \} \\ &= \cup \{ (\alpha(y) \wedge (\beta)_y^x)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma'_a] \mid a \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \} \\ &\subseteq \cup \{ (\alpha(y) \wedge (\beta)_y^x)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma'_a] \mid a \in A \} \\ &= \exists y (\alpha(y) \wedge (\beta)_y^x)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma], \end{aligned}$$

где γ'_a определено как в пункте (a).

$(E)_t^x \sqsubseteq \exists x E$:

(a) E — Σ^+ -формула Φ . Имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_t^x[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_{t^A}[\gamma]] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \Phi[\gamma].$$

(b) E — программа α . Имеем:

$$((\alpha)_t^x)^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] = \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_{t^A}[\gamma]] \subseteq \cup \{ \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_a] \mid a \in A \} = \exists x \alpha.$$

III

$[\lambda x \Phi](x) \equiv \Phi$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\lambda x \Phi](x)[\gamma] &\Leftrightarrow \gamma(x) \in [\lambda x \Phi]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Leftrightarrow \\ \gamma(x) \in \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a] \} &\Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma]. \end{aligned}$$

$[\lambda x P_0(x)] \equiv P_0$:

$$[\lambda x P_0(x)]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] = \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models P_0(x)[\gamma_a] \} = \{ a \mid a \in A, a \in \gamma(P_0) \} = \gamma(P_0) = P_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma].$$

IV

$\alpha(x) \wedge \beta(x) \sqsubseteq [\alpha \wedge \beta](x)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x) \wedge \beta(x)[\gamma] &\Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x)[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \beta(x)[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \text{ и } \\ \gamma(x) \in \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &\Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \cap \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in [\alpha \wedge \beta]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\alpha \wedge \beta](x)[\gamma]. \end{aligned}$$

$[\alpha \vee \beta](x) \sqsubseteq \alpha(x) \vee \beta(x)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\alpha \vee \beta](x)[\gamma] &\Rightarrow \gamma(x) \in [\alpha \vee \beta]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \cup \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \\ \text{или } \gamma(x) \in \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &\Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x)[\gamma] \text{ или } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \beta(x)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x) \vee \beta(x)[\gamma]. \end{aligned}$$

$[\alpha \wedge \Phi](x) \equiv [\Phi \wedge \alpha](x) \equiv \alpha(x) \wedge \Phi$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\alpha \wedge \Phi](x)[\gamma] &\Leftrightarrow \gamma(x) \in [\alpha \wedge \Phi]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\Phi \wedge \alpha]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\Phi \wedge \alpha](x)[\gamma] \\ \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\Phi \wedge \alpha]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &\Leftrightarrow \gamma(x) \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x)[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \\ \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x) \wedge \Phi[\gamma]. & \end{aligned}$$

$[\alpha \vee \Phi](x) \equiv [\Phi \vee \alpha](x) \equiv \alpha(x) \vee \Phi$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\alpha \vee \Phi](x)[\gamma] &\Leftrightarrow \gamma(x) \in [\alpha \vee \Phi]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\Phi \vee \alpha]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models [\Phi \vee \alpha](x)[\gamma] \Leftrightarrow \\ \gamma(x) \in [\Phi \vee \alpha]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &\Leftrightarrow \gamma(x) \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \text{ или } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x)[\gamma] \\ \text{или } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] &\Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(x) \vee \Phi[\gamma]. \end{aligned}$$

V

$\Phi \sqsubseteq \Psi$, если Φ и Ψ — Σ^+ -формулы сигнатуры σ^n и $\Phi \rightarrow \Psi$ есть теорема теории KPU⁺ сигнатуры σ^n .

По теореме Гёделя 1.2 о полноте, формула доказуема тогда и только тогда, когда она тождественно истинна. Поэтому, формула $\Phi \rightarrow \Psi$ тождественно истинна. Далее:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi \rightarrow \Psi)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \not\models \Phi[\gamma] \text{ или } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Psi[\gamma] \Rightarrow \\ \left(\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \text{ следует } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Psi[\gamma] \right).$$

VI

$\langle P_n \rangle [\lambda x \Phi(x, \bar{x}, \bar{P}, P_n)] \equiv [\lambda x \Phi_G(x, \bar{x}, \bar{P})]$, где Φ и Φ_G — те же, что и в лемме 1.1([6], 3.7.1).

$(\langle P_n \rangle [\lambda x \Phi(x, \bar{x}, \bar{P}, P_n)])^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma]$ — наименьшая неподвижная точка оператора Γ , определенного равенством:

$$\Gamma(Q) = [\lambda x \Phi(x, \bar{x}, \bar{P}, P_n)]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma_Q] = \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi(a, \bar{x}, \bar{P}, P_n)[\gamma_Q]\}$$

Это в точности есть оператор из теоремы Ганди(1.1([6], 3.6.1)). По замечанию 1.1([6], 3.6.1) $[\lambda x \Phi_G(x, \bar{x}, \bar{P})]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma]$ — наименьшая неподвижная точка того же оператора, следовательно

$$(\langle P_n \rangle [\lambda x \Phi(x, \bar{x}, \bar{P}, P_n)])^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma] = [\lambda x \Phi_G(x, \bar{x}, \bar{P})]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma].$$

VII

$(\alpha)_{\langle P_n \rangle \alpha}^{P_n} \equiv \langle P_n \rangle \alpha$:

$$\left((\alpha)_{\langle P_n \rangle \alpha}^{P_n} \right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma_{(\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma]}] = \Gamma \left((\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma] \right) = (\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma].$$

2. Проверим для каждого правила вывода, что если выражение над чертой удовлетворяет заключению теоремы, то и выражение под чертой удовлетворяет заключению теоремы.

I

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{(E_0)_t^x \sqsubseteq (E_1)_t^x}:$$

(а) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0)_t^x[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma_{t^A[\gamma]}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma_{t^A[\gamma]}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_1)_t^x[\gamma].$$

(б) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Имеем:

$$(\alpha_0)_t^x \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle [\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma_{t^A[\gamma]}] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma_{t^A[\gamma]}] = (\alpha_1)_t^x \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle [\gamma].$$

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{(E_0)_\alpha^{P_n} \sqsubseteq (E_1)_\alpha^{P_n}}:$$

(а) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0)_\alpha^{P_n}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma'] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma'] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_1)_\alpha^{P_n}[\gamma],$$

где $\gamma' = (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P}) \cup \{\langle P_n, \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \rangle\})$.

(б) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Имеем:

$$(\alpha_0)_\alpha^{P_n} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle [\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma'] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle} [\gamma'] = (\alpha_1)_\alpha^{P_n} \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle [\gamma], \text{ где } \gamma' \text{ определено в пункте (а).}$$

II

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1, E_1 \sqsubseteq E_2}{E_0 \sqsubseteq E_2}.$$

- (a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1, 2$. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_2[\gamma]$.
- (b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1, 2$. Имеем:
 $\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_2^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E, E_1 \sqsubseteq E}{E_0 \vee E_1 \sqsubseteq E}.$$

- (a) E, E_0, E_1 — Σ^+ -формулы Φ, Φ_0, Φ_1 соответственно. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma]$ или
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma]$.
- (b) E, E_0, E_1 — программы $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ соответственно. Имеем:
 $(\alpha_0 \vee \alpha_1)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cup \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cup \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E \sqsubseteq E_0, E \sqsubseteq E_1}{E \sqsubseteq E_0 \wedge E_1}.$$

- (a) E, E_0, E_1 — Σ^+ -формулы Φ, Φ_0, Φ_1 соответственно. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma]$.
- (b) E, E_0, E_1 — программы $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ соответственно. Имеем:
 $\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \Rightarrow \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cap \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$
 $= [\alpha_0 \wedge \alpha_1]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{E_0 \sqsubseteq E_1 \wedge T}.$$

- (a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1, T = (x_0 = x_0)$. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x_0 = x_0[\gamma] \Rightarrow$
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_1 \wedge T)[\gamma]$.
- (b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1, T = \lambda x_0[x_0 = x_0]$. Имеем:
 $\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cap A = \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cap T^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = [\alpha_1 \wedge T]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{E_0 \wedge T \sqsubseteq E_1}.$$

- (a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1, T = (x_0 = x_0)$. Имеем:
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \wedge x_0 = x_0)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x_0 = x_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow$
 $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma]$.
- (b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1, T = \lambda x_0[x_0 = x_0]$. Имеем:
 $[\alpha_0 \wedge T]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cap T^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cap A = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

III

$$\frac{(x \in t \wedge E_0) \sqsubseteq E_1}{E_0 \sqsubseteq \forall x \in t E_1}, \text{ если } x \text{ не входит свободно в } E_0:$$

(a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Зафиксируем $a \in t^A[\gamma]$. Поскольку x не входит свободно в Φ_0 имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \gamma_a(x) \in t^A[\gamma] \text{ и } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (x \in t \wedge \Phi_0)[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma_a]$$

Отсюда $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma_a]$ для любого $a \in t^A[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \forall x \in t \Phi_1[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Зафиксируем $a \in t^A[\gamma]$. Поскольку x не входит свободно в α_0 имеем:

$$\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] = [x \in t \wedge \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a].$$

Следовательно, $\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \bigcap \{ \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in t^A[\gamma] \} = [\forall x \in t \alpha_1]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$\frac{(x \in t \wedge E_0) \sqsubseteq E_1}{\exists x \in t E_0 \sqsubseteq E_1}$, если x не входит свободно в E_1 :

(a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:

$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in t \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma_a]$ для некоторого $a \in t^A[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x \in t[\gamma_a]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (x \in t \wedge \Phi_0)[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma]$ так как x не входит свободно в Φ_1 .

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Поскольку x не входит свободно в α_1 имеем:

$$\begin{aligned} [\exists x \in t \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] &= \bigcup \{ \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t^A[\gamma] \} \\ &= \bigcup \{ [x \in t \wedge \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t^A[\gamma] \} \\ &\subseteq \bigcup \{ \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t^A[\gamma] \} \\ &= \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]. \end{aligned}$$

$\frac{\alpha(x) \wedge E_0 \sqsubseteq E_1}{\exists x \in \alpha E_0 \sqsubseteq E_1}$, если x не входит свободно в E_1 :

(a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:

$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in \alpha \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma_a]$ для некоторого $a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\alpha(x) \wedge \Phi_0)[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma]$ так как x не входит свободно в Φ_1 .

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Поскольку x не входит свободно в α_1 имеем:

$$\begin{aligned} [\exists x \in \alpha \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] &= \bigcup \{ \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \} \\ &= \bigcup \{ [\alpha(x) \wedge \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \} \\ &\subseteq \bigcup \{ \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \} \\ &= \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]. \end{aligned}$$

$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{\exists x E_0 \sqsubseteq E_1}$, если x не входит свободно в E_1 :

(a) E_i — Σ^+ -формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:

$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma_a]$ для некоторого $a \in A \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma]$ так как x не входит свободно в Φ_1 .

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Поскольку x не входит свободно в α_1 имеем:

$$\begin{aligned} [\exists x \alpha_0]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] &= \cup \{ \alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \} \\ &\subseteq \cup \{ \alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_a] \mid a \in A \} \\ &\subseteq \cup \{ \alpha_1^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma_a] \mid a \in A \} \\ &= \cup \{ \alpha_1^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \mid a \in A \} \\ &= \alpha_1^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma]. \end{aligned}$$

IV

$$\frac{\alpha \sqsubseteq \beta}{\alpha(t) \sqsubseteq \beta(t)}:$$

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(t)[\gamma] \Rightarrow t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \beta(t)[\gamma].$$

$$\frac{\alpha \sqsubseteq \beta}{(E)_{\alpha}^{P_n} \sqsubseteq (E)_{\beta}^{P_n}}:$$

(a) E — Σ^+ -формула Φ . По теореме 1.3 ([6], 3.7.1) существуют $n \in \omega$, Σ^+ -формула Φ_* сигнатуры σ^n такие, что для любых подходящих $\mathbb{A}', \mathcal{P}', \gamma'$ выполняется $\langle \mathbb{A}', \mathcal{P}' \rangle \models \Phi[\gamma'] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}', \mathcal{P}' \rangle \models \Phi_*[\gamma']$. Определим

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha &= (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P})) \cup \{ \langle P_n, \alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \rangle \} \\ \gamma^\beta &= (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P})) \cup \{ \langle P_n, \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \rangle \} \end{aligned}$$

Имеем:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_{\alpha}^{P_n}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma^\alpha] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma^\alpha]$$

Поскольку P_n входит в Φ_* положительно, $\alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \subseteq \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma]$, по предложению 1.1 ([6], 1.3.2) цепочку импликаций можно продолжить следующим образом:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma^\alpha] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma^\beta] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma^\beta] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)_{\beta}^{P_n}[\gamma].$$

(b) E — программа α_0 . По теореме 1.3 ([6], 3.7.1) существуют $n \in \omega$, Σ^+ -формула Φ_* сигнатуры σ^n такие, что для любых подходящих $\mathbb{A}', \mathcal{P}', \gamma'$ выполняется $\alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P}')}[\gamma'] = [\lambda x \Phi_*]^{(\mathbb{A}', \mathcal{P}')}[\gamma']$. Определим γ^α и γ^β как в пункте (a). Имеем:

$$(\alpha_0)_{\alpha}^{P_n}[\gamma] = \alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma^\alpha] = [\lambda x \Phi_*]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma^\alpha] = \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma_a^\alpha] \}$$

Поскольку P_n входит в Φ_* положительно, $\alpha^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] \subseteq \beta^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma]$, по предложению 1.1 ([6], 1.3.2) цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma_a^\alpha] \} &\subseteq \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma_a^\beta] \} \\ &= [\lambda x \Phi_*]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma^\beta] \\ &= \alpha_0^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma^\beta] \\ &= (\alpha_0)_{\beta}^{P_n}[\gamma]. \end{aligned}$$

$$\frac{\Phi \sqsubseteq \Psi}{[\lambda x \Phi] \sqsubseteq [\lambda x \Psi]}:$$

$$[\lambda x \Phi]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma] = \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a] \} \subseteq \{ a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Psi[\gamma_a] \} = [\lambda x \Psi]^{(\mathbb{A}, \mathcal{P})}[\gamma].$$

V

$$\frac{(\alpha)_\beta^{P_n} \sqsubseteq \beta}{\langle P_n \rangle \alpha \sqsubseteq \beta}:$$

По условию имеет место включение: $\Gamma(\beta^{\langle A, P \rangle}[\gamma]) = ((\alpha)_\beta^{P_n})^{\langle A, P \rangle}[\gamma] \sqsubseteq \beta^{\langle A, P \rangle}[\gamma]$, где Γ — оператор, определенный следующим равенством:

$$\Gamma(Q) = \alpha^{\langle A, P \rangle}[\gamma_Q], \quad \gamma_Q = \gamma \cup \{\langle P_n, Q \rangle\}$$

По замечанию 1.1 ([6], 3.6.1) к теореме Ганди 1.1 ([6], 3.6.1) наименьшая неподвижная точка Δ оператора Γ удовлетворяет условию: $\Delta \sqsubseteq \beta^{\langle A, P \rangle}[\gamma]$, но $\Delta = (\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle A, P \rangle}[\gamma]$.

$$\frac{\beta \sqsubseteq \langle P_n \rangle \alpha}{(\alpha)_\beta^{P_n} \sqsubseteq \langle P_n \rangle \alpha}:$$

Имеет место включение: $\beta^{\langle A, P \rangle}[\gamma] \sqsubseteq (\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle A, P \rangle}[\gamma]$. В силу монотонности оператора Γ , определенного выше, и определения $\langle P_n \rangle \alpha$ имеем:

$$(\alpha)_\beta^{P_n}{}^{\langle A, P \rangle}[\gamma] = \Gamma(\beta^{\langle A, P \rangle}[\gamma]) \sqsubseteq \Gamma((\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle A, P \rangle}[\gamma]) = (\langle P_n \rangle \alpha)^{\langle A, P \rangle}[\gamma].$$

Пусть E_i — Σ^+ -формула Φ_i или программа α_i , $i = 0, 1$, и выражение $E_0 \sqsubseteq E_1$ доказуемо в исчислении DL. Пусть

$$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n = (E_0 \sqsubseteq E_1)$$

доказательство выражения $E_0 \sqsubseteq E_1$ в DL.

Индукцией по длине доказательства докажем, что для выражения $E_0 \sqsubseteq E_1$ выполнено заключение теоремы.

База индукции. По определению вывода \mathfrak{S}_0 может быть только аксиомой DL, следовательно, по доказанному выше, для \mathfrak{S}_0 выполнено заключение теоремы.

Шаг индукции. Пусть $0 < k \leq n$ и для всех $l < k$ доказано, что для \mathfrak{S}_l выполнено заключение теоремы. Тогда имеет место один из двух случаев.

- (1) \mathfrak{S}_k — аксиома DL. Тогда по доказанному выше для \mathfrak{S}_k выполнено заключение теоремы.
- (2) \mathfrak{S}_k — результат применения одного из правил вывода исчисления DL к выражению \mathfrak{S}_l , $l < k$ (к выражениям $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_m$, $l, m < k$). Но по предположению индукции для выражения \mathfrak{S}_l (для выражений $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_m$) заключение теоремы выполнено, следовательно, по доказанному выше, заключение теоремы выполнено и для \mathfrak{S}_k .

Поэтому, в силу принципа математической индукции, для $\mathfrak{S}_n = (E_0 \sqsubseteq E_1)$ выполнено заключение теоремы.

\Leftarrow : Докажем теорему в обратную сторону.

СЛУЧАЙ (а).

Пусть Φ, Ψ — Σ^+ -формулы такие, что

$$\langle A, P \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle A, P \rangle \models \Psi[\gamma]$$

при всех подходящих A, P, γ .

По лемме 1.2 ([6], 3.7.2) существуют Σ^+ -формулы Φ_*, Ψ_* сигнатуры σ^n такие, что выражения $\Phi \equiv \Phi_*$, $\Psi \equiv \Psi_*$ доказуемы в DL. Тогда по уже доказанной первой части теоремы имеем:

$$\langle A, P \rangle \models \Phi_*[\gamma] \Rightarrow \langle A, P \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle A, P \rangle \models \Psi[\gamma] \Rightarrow \langle A, P \rangle \models \Psi_*[\gamma] \text{ для всех подходящих } A, P, \gamma.$$

Но тогда по теореме Гёделя 1.2 о полноте $\Phi_* \rightarrow \Psi_*$ — теорема теории КРУ⁺ сигнатуры σ^n , следовательно, $\Phi_* \sqsubseteq \Psi_*$ — аксиома DL. Отсюда выражения $\Phi \sqsubseteq \Phi_*$, $\Phi_* \sqsubseteq \Psi_*$, $\Psi_* \sqsubseteq \Psi$ доказуемы в DL. Поэтому выражение $\Phi \sqsubseteq \Psi$ доказуемо в DL, что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ (b).

Пусть α, β — программы такие, что

$$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \sqsubseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$$

при всех подходящих $\mathbb{A}, \mathcal{P}, \gamma$.

По лемме 1.2([6], 3.7.2) существуют Σ^+ -формулы Φ_α, Φ_β сигнатуры σ^n такие, что выражения $\alpha \equiv [\lambda x \Phi_\alpha], \beta \equiv [\lambda x \Phi_\beta]$ доказуемы в DL. Тогда по уже доказанной первой части теоремы имеем:

$$\begin{aligned} \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_\alpha[\gamma_a]\} &= [\lambda x \Phi_\alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \\ &\subseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = [\lambda x \Phi_\beta]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \\ &= \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_\beta[\gamma_a]\}, \end{aligned}$$

то есть

$$\{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_\alpha[\gamma_a]\} \subseteq \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_\beta[\gamma_a]\}.$$

Отсюда $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_\alpha[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_\beta[\gamma]$ при всех подходящих $\mathbb{A}, \mathcal{P}, \gamma$. Тогда по теореме Гёделя 1.2 о полноте $\Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\beta$ — теорема теории КРУ⁺ сигнатуры σ^n , следовательно, $\Phi_\alpha \sqsubseteq \Phi_\beta$ — аксиома DL. Поэтому выражение $[\lambda x \Phi_\alpha] \sqsubseteq [\lambda x \Phi_\beta]$ доказуемо в DL.

Таким образом, в DL доказуемы выражения

$$\alpha \sqsubseteq [\lambda x \Phi_\alpha], \quad [\lambda x \Phi_\alpha] \sqsubseteq [\lambda x \Phi_\beta], \quad [\lambda x \Phi_\beta] \sqsubseteq \beta$$

отсюда выражение $\alpha \sqsubseteq \beta$ доказуемо в DL, что и требовалось доказать.

Литература

1. Ершов Ю.Л., Теория нумераций.—М., 1977.
2. Ершов Ю.Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели.—М., 1980.
3. Ершов Ю.Л., Динамическая логика над допустимыми множествами // ДАН СССР.— 1983. —273:5. —С. 1045-1048.
4. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика.—М., 1987.
5. Ершов Ю.Л., Σ -определимость и теорема Гёделя о неполноте.—Новосибирск, 1995.
6. Ершов Ю.Л., Определимость и вычислимость.—Новосибирск, 1996.

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ИЗ КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ

В.А. Антонов, В.И. Осмоловский

Приведено решение вопроса 10.1 из Коуровской тетради.

С.Н. Адамов и А.Н. Фомин поставили задачу ([1], вопрос 10.1.) описания групп порядка p^9 и степени нильпотентности 2, содержащих такие подгруппы X и Y , что $|X| = |Y| = p^3$ и любые неединичные элементы $x \in X$ и $y \in Y$ неперестановочны. Решением этой задачи является следующая теорема.

Теорема. Пусть G – двуступенно нильпотентная группа порядка p^{3n} . Группа G в том и только том случае содержит такие подгруппы X и Y порядков p^n , что любые неединичные элементы $x \in X$ и $y \in Y$ неперестановочны, когда

$$G = (x \times Z)\lambda Y,$$

где

$$X = \prod_{i=1}^n \langle x_i \rangle, Y = \prod_{i=1}^n \langle y_i \rangle, Z = \prod_{i=1}^n \langle z_i \rangle -$$

элементарные абелевы группы порядка p^n , $[y_i, z_j] = 1$, $[x_i, y_j] = \sum_{k=1}^n z_k^{t_{jk}}$ для $i, j = 1, 2, \dots, n$, при-

чем матрицы $A_k = (t_{jk})$ D -независимы, т.е. из $\det(\sum_{k=1}^n \beta_k A_k) \equiv 0(p)$ следует, что $\beta_k \equiv 0(p)$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть G – группа из условия теоремы, $Z = Z(G)$. Так как $Z \cap X = Z \cap Y = 1$ и фактор-группа G/Z абелева, то подгруппы X и Y тоже абелевы и $X \times Z \triangleleft G$. Из $X \times Z \leq C(X)$ следует, что $(X \times Z) \cap Y = 1$. Если $x \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ неединичные элементы, то из $[x, y_1] = [x, y_2]$ получим, что $y_1 y_2^{-1} \in C(x) \cap Y = 1$. Поэтому $Z = G'$ имеет порядок p^n , $G = (X \times Z)\lambda Y$ и для любых неединичных элементов $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$ выполняются равенства

$$Z = \{[x_1, y] \mid y \in Y\} = \{[x, y_1] \mid x \in X\}.$$

Пусть $x \in X$, $y \in Y$, $g = xy \neq 1$ и $y_1 \in Y$. Из предыдущего абзаца доказательства следует, что найдется такой элемент $x_1 \in X$, что $[x, y_1] = [x_1, y]$. Но тогда $x_1 y_1 \in C(g)$. Это означает, что $|C(g)| = p^{2n}$ для любого $g \in G \setminus Z$. Но тогда $C^2(g) = C(C(g))$ является минимальным централизатором в группе G . Поэтому подгруппы вида $C^2(g)$, где $g \in G$, индуцируют расщепление абелевой группы G/Z . Так как это расщепление содержит две компоненты порядка p^n (XZ/Z и YZ/Z), то G/Z – элементарная абелева группа. Но тогда каждая из подгрупп X , Y , а следовательно и Z , тоже является элементарной абелевой группой. Пусть

$$X = \prod_{i=1}^n \langle x_i \rangle, Y = \prod_{i=1}^n \langle y_i \rangle, Z = \prod_{i=1}^n \langle z_i \rangle.$$

Предположим, что $[x_i, y_j] = \prod_{k=1}^n z_k^{t_{jk}}$ и $A_k = (t_{jk})$. Покажем, что матрицы A_k D – независи-

мы. Пусть $\det(\sum_{k=1}^n \beta_k A_k) = 0$ в поле $GF(p)$. Тогда система линейных уравнений

$$\left(\sum_{k=1}^n \beta_k A_k\right)[x] = [0]$$

имеет ненулевое решение $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$. Если положить $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ и $y = \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i}$, то, как нетрудно видеть, будем иметь

$$[x, y] = \left[\prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}, \prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j} \right] = \prod_{i,j,k} z_k^{\beta_i \alpha_j t_{ik}} = \prod_{k=1}^n z_k^{\sum \beta_i \alpha_j t_{ik}} = 1.$$

Поэтому из $C(y) = Z \cdot Y$ получаем $x = 1$, т.е. $\beta_k = 0$ для $k = 1, 2, \dots, n$.

Достаточность утверждения теоремы очевидна.

Сделаем некоторые дополнительные замечания. Выберем образующие x_1, x_2, \dots, x_n подгруппы X произвольным образом. И пусть $y_1 \in Y \setminus 1$, а y_i при $i > 1$ определяются равенствами $[x_1, y_i] = [x_i, y_1]$. Кроме того, положим $z_i = [x_1, x_i]$. Построенную таким образом систему образующих группы G назовем согласованным базисом. В случае согласованного базиса в матрицах A_k выполняются равенства

$$t_{ik} = t_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Предположим, что в группе G существует отличная от $X \times Z$ и $Y \times Z$ абелева подгруппа B порядка p^{2n} . И пусть $B = C(ab)$, где $a \in X$ и $b \in Y$. Положим $x_1 = a$, $y_1 = b$. Если дополнить элементы x_1 и y_1 до согласованного базиса то из $C(x_1 y_1) = Z \cdot \prod_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle$ и $[x_i y_i, x_j y_j] = 1$ получим, что матрицы A_k являются симметрическими матрицами.

Если $n = 1$, то G – неабелева группа порядка p^3 . При $n = 2$ в группе G все собственные централизаторы абелевы, т.е. матрицы A_k симметричны в любом согласованном базисе. Рассмотрим случай $n = 3$. Если $p = 2$, то в группе G снова все собственные централизаторы абелевы. Если же $p > 2$, то могут реализоваться все перечисленные ниже возможности.

В группе G все собственные централизаторы абелевы, т.е. матрицы A_k симметрические при любом выборе согласованного базиса. Примером таких групп являются группы $UT(3, p^3)$.

В группе G более двух абелевых подгрупп порядка p^6 и есть неабелев собственный централизатор, т.е. в зависимости от выбора согласованного базиса матрицы A_k могут быть как симметрическими, так и несимметрическими. Такой является, например, группа указанного в теореме типа, имеющая порядок 3^9 и определяющие отношения

$$\begin{aligned} [x_1, y_1] = z_1, [x_1, y_2] = [x_2, y_1] = z_2, [x_1, y_3] = [x_2, y_2] = [x_3, y_1] = z_3, \\ [x_2, y_3] = z_1 z_3, [x_3, y_2] = z_1 z_2, [x_3, y_3] = z_2 z_3. \end{aligned}$$

В этой группе $C(x_1 y_1)$ неабелев, а $C(x_1 y_2^{-1})$ абелев.

В группе G ровно две абелевых подгруппы порядка p^6 . В этом случае в любом согласованном базисе хотя бы одна из матриц A_k не является симметрической матрицей. Такую группу получим, если в примере из предыдущего абзаца положить $[x_3, y_2] = z_1 z_2 z_3^2$ и $[x_3, y_3] = z_2$.

Литература

1. Нерешенные вопросы теории групп // *Коуровская тетрадь*. – 13-е изд. – Новосибирск, 1995. – 130 с.

ГРУППЫ С ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЬШИМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП

Н.Н. Аминева

Исследуются конечные группы, в которых для любой инвариантной подгруппы H выполняется неравенство $|N(H):H \cdot C(H)| \leq 2$.

Автором совместно с В.А. Антоновым было начато исследование конечных групп, в которых для любой подгруппы H из выделенного множества подгрупп группы G выполняется неравенство $|N(H):H \cdot C(H)| < 2$.

В качестве выделенного множества подгрупп рассматривались: множество всех подгрупп группы G ; множество всех абелевых или всех неабелевых подгрупп группы G [1]; всех примарных или всех непримарных подгрупп группы G [2].

В предлагаемой заметке исследуются конечные группы, в которых указанное неравенство выполняется для любой инвариантной подгруппы группы G .

Теорема. Пусть G – конечная группа, в которой условие $|G:H \cdot C(H)| \leq 2$ выполняется для любой инвариантной подгруппы H . Тогда $|G:F^*(G)| \leq 2$, и если L – слой группы G , то $G/L \cong K \wr S$, $|S:C_S(K)| \leq 2$, подгруппа K абелева, а силовская 2-подгруппа S либо абелева, либо фактор-группа $S/Z(S)$ является четверной или диэдральной группой.

Доказательство. Пусть G – группа из условия теоремы. Отметим, что любая фактор-группа группы G тоже удовлетворяет этому условию. Если слой группы G тривиален, то обобщенная подгруппа Фитинга $F^*(G)$ совпадает с подгруппой Фитинга $F = F(G)$ группы G , и из $C(F) \leq F$ следует, что $|G:F| \leq 2$, т.е. в этом случае группа G разрешима.

Предположим сначала, что группа G нильпотентна. Если A – максимальный абелев нормальный делитель из G , то из $|G:A| \leq 2$ следует, что все силовские p -подгруппы для нечетного p абелевы, а силовская 2-подгруппа либо абелева, либо обладает абелевым нормальным делителем индекса 2. Рассмотрим второй случай.

Пусть $G = A \langle \tau, \tau^2 \in A$. Тогда $C(\tau) = \langle \tau \rangle Z(G)$ и $G' = [A, \tau]$. Если степень нильпотентности c группы G равна 2, то $C(\tau) < G$ и, следовательно, $|G:C(\tau)| \leq 2$. Но тогда $|G:Z(G)| = 4$ и $G/Z(G)$ – четверная группа.

Предположим, что $c > 2$. В этом случае $C(G') < G$, т.е. $C(G') = A$. Так как $G' \langle \tau \rangle < G$, то

$$|G:G' \langle \tau \rangle (A \cap C(\tau))| = |G : G'Z(G) \langle \tau \rangle| \leq 2.$$

Учитывая, что коммутант нильпотентной группы содержится в ее подгруппе Фраттини, получаем $|G:G'Z(G) \langle \tau \rangle| = 2$ и $|A:G'Z(G)| = 2$. Из

$$|G'| = |G:C(\tau)| = \frac{|G|}{|\langle \tau \rangle Z(G)|}$$

следует, что $|G| = |G'| \cdot |\langle \tau \rangle Z(G)|$. Поэтому $|G' \cap \langle \tau \rangle Z(G)| = 2$. Но тогда $\gamma_3(G) = [G', \tau]$ имеет индекс 2 в G' . Аналогично из $|\gamma_3(G) \cap \langle \tau \rangle Z(G)| = 2$ получим $|\gamma_3(G):\gamma_4(G)| = 2$ и т.д. Таким образом,

$$|\gamma_2(G):\gamma_3(G)| = |\gamma_3(G):\gamma_4(G)| = \dots = |\gamma_c(G):\gamma_{c+1}(G)| = 2.$$

В силу основного результата из [1] группа G изоклинна диэдральной группе. Но тогда и фактор-группа $G/Z(G)$ диэдральна.

Предположим теперь, что G – разрешимая не нильпотентная группа. Тогда из $|G:F| = 2$ следует, что $G = K < S$, где K – холлова 2'-подгруппа. Так как $G/K \cong S$, то по уже доказанному либо группа S абелева, либо фактор-группа $S/Z(S)$ является четверной или диэдральной группой. Покажем, что группа K абелева.

В самом деле, так как фактор-группа K/K' абелева, то и $C_K(K')/(K' \cap C_K(K'))$ тоже абелева. Но тогда $C_K(K')$ нильпотентен степени не выше двух. Из $|G:K'C(K')| \leq 2$ следует, что $K = K'C_K(K')$. Отсюда $K' = K''(C_K(K'))'$ и $K''' = K''$. Это означает, что $K'' = 1$, подгруппа K' абелева и группа $K = C(K')$ нильпотентна степени не выше двух.

Пусть a – произвольный элемент из K . Если $H = \langle a \rangle Z(K) < G$, то из $|G:H \cdot C(H)| \leq 2$ следует, что $a \in Z(K)$. Если же H не инвариантна в G , $G = F \langle \nu \rangle$ и $a^\nu = b$, то $\langle ab \rangle Z(K) < G$ и из $ab \in Z(K)$ получаем $H < G$, что противоречит предположению. Таким образом, $a \in Z(K)$ и группа K абелева.

Предположим, наконец, что группа G не разрешима. Так как $C(F^*(G)) \leq F^*(G)$, то $|G:F^*(G)| \leq 2$. Поэтому слой L группы G нетривиален. Из $F^*(G) = F \cdot L$ следует, что фактор-группа G/L разрешима и, следовательно, G удовлетворяет заключению теоремы.

Литература

1. Антонов В.А., Аминова Н.Н. О группах с относительно большими централизаторами // *Изв. вузов. Сер. Математика.* – 2002 (принята в печать).
2. Аминова Н.Н., Антонов В.А. О группах с относительно большими централизаторами // *Труды инст. Мат. и мех. УрО РАН.* – Т. 8. – 2001. – С. 1–8.
3. Hall P. The classification of prime-power groups // *J. Reine angew. Math.* – 1940. – V. 182. – P. 130–141.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СУММЫ МНОГОГРАННИКОВ

М.В. Уханов

Предложен алгоритм точного построения суммы по Минковскому двух многогранников, заданных системами линейных неравенств.

Введение

Определение. Суммой по Минковскому двух множеств P_1 и P_2 из n -мерного евклидова пространства \mathfrak{R}^n называется множество $P \in \mathfrak{R}^n$ такое, что

$$P = P_1 + P_2 \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$$

или по-другому

$$P = P_1 + P_2 \triangleq \bigcup_{x_1 \in P_1} (x_1 + P_2).$$

В том специальном случае, когда каждое из множеств P_1 и P_2 содержит только по одной точке, эта операция совпадает с обыкновенным сложением векторов. Особого внимания заслуживает выполнение операции над пустым множеством \emptyset , а именно: $A + \emptyset = \emptyset$. Операция сложения, очевидно, коммутативна и ассоциативна, то есть

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1; \quad P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3.$$

Из определения суммы по Минковскому легко следует, что сумма $P_1 + P_2$ зависит от относительного положения P_1 и P_2 по отношению к началу координат. Но все получающиеся при изменении этого относительного положения различные суммы совмещаются параллельным переносом. Обозначим через α и β два параллельных переноса и через $\alpha\beta$ – результат их последовательного выполнения. Тогда

$$P_1^\alpha + P_2^\beta = (P_1 + P_2)^{\alpha\beta}.$$

При сложении по Минковскому выпуклых многогранников опорная функция ведет себя просто. Обозначим через $h(A, u)$ величину опорной функции произвольного выпуклого многогранника A в направлении u . Тогда

$$h(P_1 + P_2, u) = h(P_1, u) + h(P_2, u),$$

то есть величины опорных функций в фиксированном направлении складываются.

Задача построения суммы множеств является одной из задач вычислительной геометрии [1]. Когда многогранные множества P_1 и P_2 заданы множествами своих вершин

$$V_1 = \{v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{k_1}\},$$

$$V_2 = \{v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^{k_2}\}.$$

Тогда построение суммы сводится к построению выпуклой оболочки

$$P = P_1 + P_2 = \text{conv}\{v_1^i + v_2^j \mid v_1^i \in V_1, v_2^j \in V_2\},$$

то есть, к нахождению вершин вида $v_1^i + v_2^j$, лежащих на границе выпуклой оболочки. Известные в настоящее время алгоритмы построения выпуклой оболочки из N точек в n -мерном пространстве имеют время решения $O(N^{\lfloor n/2 \rfloor + 1})$ [1, с. 172], что неприемлемо для многих практических задач. Кроме того, зачастую удобнее представлять многогранник не своими вершинами, а гранями. Способ задания множества его гранями, как правило, требует меньшего объема памяти по сравнению с заданием множества вершинами.

Будем рассматривать суммирование многогранников, заданных системами линейных неравенств (гранями)

$$P_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x_1 \leq b_1, A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}\},$$

$$P_2 = \{x_2 \in \mathbb{R}^n \mid A_2 x_2 \leq b_2, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}\}.$$

В настоящей работе, опираясь на идеи статьи А.В. Лотова о задаче построения множеств достижимости [2], разработан алгоритм построения суммы P многогранников P_1 и P_2 в виде системы линейных неравенств

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}.$$

1. Алгоритм построения суммы

Для нахождения суммы запишем систему линейных неравенств и равенств относительно переменных $x \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x - x_1 - x_2 = 0; \\ A_1 x_1 \leq b_1; \\ A_2 x_2 \leq b_2. \end{cases} \quad (1)$$

Заменяем в системе (1) x_1 на разность $x - x_2$ и получаем эквивалентную ей систему относительно переменных x и x_2

$$\begin{cases} A_1 x - A_1 x_2 \leq b_1; \\ A_2 x_2 \leq b_2. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда имеет место утверждение

$$x \in P \Leftrightarrow \exists x_2 : -A_1 x_2 \leq b_1 - A_1 x, A_2 x_2 \leq b_2. \quad (3)$$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть $x \in P$. Тогда по определению суммы по Минковскому $\exists x_1 \exists x_2 : A_1 x_1 \leq b_1, A_2 x_2 \leq b_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$. Следовательно, $x_1 = x - x_2$ и $-A_1 x_2 \leq b_1 - A_1 x$.

\Leftarrow Пусть $\exists x_2 : -A_1 x_2 \leq b_1 - A_1 x, A_2 x_2 \leq b_2$. Обозначим через $x_1 = x - x_2$. Тогда $x = x_1 + x_2, A_1 x_1 \leq b_1, A_2 x_2 \leq b_2$. То есть x принадлежит сумме P .

Введем обозначения

$$C = \begin{pmatrix} -A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_1+m_2) \times n}, d = \begin{pmatrix} b_1 - A_1 x \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

и запишем (2) в матричной форме

$$C x_2 \leq d. \quad (4)$$

Теорема Минковского-Фаркаша [3, с. 139]. Для того чтобы система линейных неравенств $C x_2 \leq d$ имела решения необходимо и достаточно, чтобы для любого такого y , что

$$C^T y = 0, \quad y \geq 0 \quad (5)$$

выполнялось условие

$$(d, y) \geq 0 \quad (6)$$

или по-другому

$$\exists x_2 : C x_2 \leq d \Leftrightarrow \forall y : C^T y = 0, y \geq 0 \Rightarrow (d, y) \geq 0.$$

Заметим, что всякое решение (5) можно представить в виде суммы с неотрицательными коэффициентами конечного числа фундаментальных решений этой системы. Таким образом, условие (6) необходимо проверять только для фундаментальных решений (5). Из утверждения (3) и теоремы Минковского-Фаркаша получаем следствие

$$x \in P \Leftrightarrow \forall y : C^T y = 0, y \geq 0 \Rightarrow (d, y) \geq 0. \quad (7)$$

Найдем с помощью схемы Н.Б. Черниковой [4] все фундаментальные решения системы уравнений с матрицей C^T . Пусть их число k . Обозначим через $V \in \mathbb{R}^{k \times (m_1+m_2)}$ матрицу, строки которой являются фундаментальными решениями. Через $V_1 \in \mathbb{R}^{k \times m_1}$ обозначим ту часть матрицы,

которая соответствует неравенствам матрицы $-A_1$, а через $V_2 \in \mathfrak{R}^{k \times m_2}$ – ту часть, которая соответствует неравенствам матрицы A_2 . Тогда неравенства (6) запишутся в виде

$$V_1(b_1 - A_1x) + V_2b_2 \geq 0.$$

Введем обозначения

$$A = V_1A_1, \quad b = V_1b_1 + V_2b_2. \quad (8)$$

Следовательно, сумма будет описываться ограничениями $Ax \leq b$.

В итоге, построение суммы двух многогранников сводится к нахождению общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений и использованию формул (8).

Замечание 1. Если в строке матрицы V есть положительные элементы как в V_1 так и в V_2 , то строка дает неравенство суммы, иначе – нет.

Вычислительная схема. Н.Б. Черниковой [3] разработан алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$, сводящийся к последовательным однотипным преобразованиям таблицы

$$V^1 = (V_1^1 \quad V_2^1) = (E \quad A^T) \in \mathfrak{R}^{n \times 2m},$$

в которой $E \in \mathfrak{R}^n$ – единичная матрица (левая часть таблицы), $A^T \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ – правая часть таблицы. Эти преобразования, не меняющие числа столбцов в левой и правой частях таблицы, проводятся по следующему правилу.

Пусть уже составлены таблицы V^2, \dots, V^{i-1} . Тогда для составления таблицы V^i выделим в правой части таблицы V^{i-1} произвольный ненулевой столбец (если он имеется), например первый столбец; назовем его основным столбцом таблицы V^{i-1} . Переносим без изменения в очередную таблицу V^i те строки таблицы V^{i-1} , на пересечении которых с основным столбцом стоят нули (если такие строки имеются). Выделяем далее в таблице V^{i-1} любую пару строк, на пересечении которых с основным столбцом находятся ненулевые элементы противоположных знаков (понятно, что таких строк может и не быть). Такую пару называют допустимой парой. Если таблица V^{i-1} содержит более двух строк, и существуют столбцы таблицы V_1^{i-1} , пересекающие по нулевым элементам обе строки допустимой пары, но не существует никакой другой строки таблицы V^{i-1} , пересекающей по нулевым элементам со всеми столбцами такого рода, то при этом условии допустимую пару строк называют уравновешенной. Если таблица V^{i-1} содержит только две строки, и они составляют допустимую пару, то последняя считается уравновешенной. Строкой равновесия уравновешенной допустимой пары строк таблицы V^{i-1} называют такую их линейную комбинацию с положительными коэффициентами, которая пересекается по нулевому элементу с основным столбцом. Строки равновесия всех уравновешенных пар строк таблицы V^{i-1} вносятся в таблицу V^i . На этом составление таблицы заканчивается.

Через конечное число шагов рассматриваемый процесс оканчивается, так как в правой части очередной таблицы либо не окажется ненулевых столбцов (и, значит, применение к этой таблице правила преобразования не изменит ее), либо столбец, который принят за основной столбец, не содержит нулей и не определяет уравновешенных допустимых пар строк (следующая таблица – пуста). В первом случае минимальную систему образующих элементов конуса неотрицательных решений системы линейных уравнений составляют строки левой части последней из таблиц, а во втором – конус не содержит ненулевых элементов.

Замечание 2. Очевидно, число преобразований зависит не только от матрицы данной системы уравнений, но и от выбора основных столбцов. Для сокращения процесса отыскания ненулевых решений следует по возможности принимать за основной такой столбец правой части очередной таблицы, который определял бы новую таблицу с возможно меньшим числом строк. Если, в частности, в правой части очередной (в том числе и исходной) таблицы имеется столбец, все элементы которого отрицательны, то, очевидно, сразу же можно сказать, что данная система не имеет ненулевых неотрицательных решений.

Временная сложность алгоритма построения суммы. В разработанном алгоритме суммирования основной и самой трудоемкой по времени вычисления операцией является нахождение

общей формулы неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений методом Н.Б. Черниковой для специальной задачи. Метод Н.Б. Черниковой хоть и ускоряет работу метода исключений Фурье-Моцкина [2, с. 239] для нахождения неотрицательных решений системы линейных уравнений, но все равно не является полиномиальным алгоритмом в общем случае.

В 1982 году Нельсон установил [2, с. 242], что метод исключений Фурье-Моцкина для систем, каждое ограничение которых содержит не более двух переменных (то есть коэффициенты при остальных переменных – нули), имеет порядок времени работы

$$O(m \cdot n^{\lceil 2 \log n \rceil + 3} \cdot \log n),$$

где m – число неравенств и n – число переменных.

2. Пример

Пусть суммируемые множества $P_1 \in \mathcal{R}^3$ – куб, $P_2 \in \mathcal{R}^3$ – пирамида

$$P_1 = \begin{cases} x_1 & \leq 1; \\ x_2 & \leq 1; \\ x_3 & \leq 1; \\ -x_1 & \leq 0; \\ -x_2 & \leq 0; \\ -x_3 & \leq 0; \end{cases} \text{ и } P_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1; \\ -x_1 & \leq 0; \\ -x_2 & \leq 0; \\ -x_3 & \leq 0. \end{cases}$$

В соответствии с изложенной вычислительной схемой составим таблицу

$$V^1 = (V_1^1 \quad V_2^1) = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

и, считая первый столбец ее правой части основным, преобразуем ее в новую таблицу

$$V^2 = (V_1^2 \quad V_2^2) = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Считая второй столбец таблицы основным, преобразуем ее в следующую таблицу

$$V^3 = (V_1^3 \quad V_2^3) = \left(\begin{array}{cccccccccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

По ней составляем таблицу

$$V = (V_1 \quad V_2) = V^4 = (V_1^4 \quad V_2^4) = \left(\begin{array}{cccccccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Строки левой части таблицы составляют минимальную систему образующих элементов конуса неотрицательных решений рассматриваемой системы уравнений. Используя формулы (8), получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^T = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1).$$

Удаляя лишние неравенства, получаем описание суммы P куба и пирамиды

$$\left\{ \begin{array}{lll} -x_1 & & \leq 0; \\ & -x_2 & \leq 0; \\ & & -x_3 \leq 0; \\ x_1 & & \leq 2; \\ & x_2 & \leq 2; \\ & & x_3 \leq 2; \\ x_1 + x_2 & & \leq 3; \\ x_1 & & +x_3 \leq 3; \\ & x_2 & +x_3 \leq 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 & & \leq 4. \end{array} \right.$$

Заключение

Разработан алгоритм точного построения суммы многогранников. Алгоритм не использует вершины многогранника и может применяться в задачах вычислительной геометрии, когда наложены ограничения по объему используемой памяти для задания множеств.

Работа поддержана грантами РФФИ – УРАЛ № 01–01–96419 и МО № ТОО / 13.2 / 2647.

Литература

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
2. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для задач быстродействия // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 67–79.
3. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
4. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. – М.: Мир, 1991. – Т. 1. – 360 с.
5. Черникова Н.Б. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1964. – Т. 4, № 4. – С. 733–738.

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФИРМЫ

В.И. Ширяев, В.В. Смолин

Рассматривается динамическая модель производственно-сбытовой фирмы. Для описанной модели формулируется и решается задача оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы по неполным и неточным измерениям в условиях неопределенности методами калмановской фильтрации. Показана целесообразность декомпозиции модели на ряд подсистем меньшей размерности и дальнейшего решения задачи оценивания в каждой из них.

Введение

Для производственно-сбытовой деятельности фирмы характерно наличие неполных и неточных данных. Например, невозможно заранее точно предсказать, сколько рабочих завтра выйдет на работу, сколько станков будет в рабочем состоянии и каким в будущем будет спрос на продукцию. Тем не менее, необходимо принимать решения по управлению фирмой с учетом изменяющейся ситуации на рынке и внутри самой фирмы.

Решению задачи оптимального управления и непосредственно принятию решения предшествует этап определения ее текущего состояния. В модели производственно-сбытовой системы состояние фирмы и динамика протекающих в ней процессов характеризуются векторами параметров и состояния. Переменные, входящие в вектор состояния, отражают состояние элементов системы в данный момент времени (например, $x_2(k)$ – фактический запас товара в сбытовой части), а параметры фирмы являются постоянными (p_1 – число недель, в течение которых средний темп продажи товара может быть обеспечен за счет запаса в сбытовой части), определяющими ее функционирование.

Для решения задачи оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы в работе рассматривается математическая модель фирмы, описанная в [1], в основе которой лежит подход Дж. Форрестера для моделирования производственно-сбытовой деятельности фирм. В модели воспроизводится структура взаимодействия подразделений фирмы, ее информационные и материальные потоки; а также учитываются параметры подразделений фирмы. Другой подход к построению динамических моделей фирмы можно найти, например, в [2].

Динамика состояния фирмы не является предопределенной. Поэтому часто при построении математической модели неопределенные величины, с которыми приходится иметь дело на практике, представляются через детерминированные (известные) и случайные составляющие. Наблюдение фирмы осуществляется в условиях ошибок, неполной информации. В такой ситуации возможно представление экономико-математической модели фирмы в терминах пространства состояний и, при переходе к линейной модели, применение фильтра Калмана [3], обеспечивающего несмещенную оценку состояния с минимальной дисперсией ошибки этой оценки. Кроме того, возможны иные подходы к решению задачи оценивания состояния фирмы, не предполагающие наличие в модели случайных составляющих [4, 5].

Решение задачи оценивания

Экономико-математическая модель фирмы имеет вид

$$x_{k+1} = A(p)x_k + \Phi(x_k, p, u_k) + Bu_k + \Gamma\xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $A(p)$ – матрица, зависящая от вектора p параметров модели; $\Phi(x_k, p, u_k)$ – нелинейная вектор-функция; B и Γ – постоянные матрицы; x_k, u_k, ξ_k – соответственно векторы состояния, управления и возмущений.

Вектор возмущения ξ_k характеризует неточное знание уравнений фирмы. Относительно вектора ξ_k могут делаться различные предположения в зависимости от используемого подхода к оцениванию. Например, при использовании фильтра Калмана делается предположение об его

случайном характере. Подробное описание процесса построения математической модели фирмы можно найти в [6]. Вектор параметров фирмы p предполагается постоянным, но неизвестным.

Считается, что информационной системе (ИС) доступны для измерения только часть переменных и, возможно, параметров фирмы. Например, такие переменные состояния как $x_1(k)$ – количество заказов, не выполненных сбытовой фирмой, $x_2(k)$ – запас продукции на складе сбытовой фирмы. Следует отметить, что для фирм, у которых вектор параметров p не является постоянным и, если его нестабильность оказывает существенное влияние на функционирование, знание величин всех координат вектора p может оправдать затраты на создание ИС фирмы, осуществляющей как измерение, так и оценивание значения параметров. Измерения могут производиться с ошибками. Так, например, запас продукции $x_2(k)$ измеряется с ошибкой η_k , и на выходе имеем величину

$$y_2(k) = x_2(k) + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Измерению доступна лишь часть переменных (координат вектора состояния фирмы x_k). Далее будем полагать, что параметры не измеряемы.

В общем случае уравнения фирмы и измерительной системы можно представить в следующем виде

$$x_{k+1} = f(x_k, p, u_k) + \Gamma \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $f(x_k, p, u_k)$ и $g(x_{k+1})$ – нелинейные вектор-функции, y_k – вектор измерения, w_k, η_k – гауссовские последовательности с нулевым средним и заданными ковариационными матрицами Q_k и R_k соответственно. Выбор значений параметров шумов обосновывается в [1].

Состояние фирмы x_k наблюдается измерительной системой. Измерения y_k , выполняемые с ошибкой η_k , поступают далее в блок оценивания, где на основе априорной информации об экономико-математической модели, известной с ошибкой ξ_k , уточняются априорно неопределенные параметры и выполняется оценивание текущего состояния x_k фирмы с использованием, например, фильтра Калмана. В качестве процесса измерения может выступать, например, получение необходимой информации из плана счетов фирмы, комплексных систем управления фирмой [2] и т.п. На основе апостериорной информации о состоянии фирмы может приниматься решение, выраженное в управляющем воздействии u_{k+1} на фирму.

Матрица G в (4) фактически определяет, какая информация о фирме из всех переменных состояния x_k и, возможно, параметров p , определяющих ее работу, доступна для наблюдения. Ее объем будет сильно отличаться в случаях, если в получении информации о состоянии фирмы заинтересовано, к примеру, ее руководство и, с другой стороны, какой-то внешний наблюдатель, желающий получить более полную, чем общедоступная, информацию о состоянии данной фирмы. Очевидно, что наблюдатель, оценивающий состояние изнутри фирмы и для самой фирмы располагает более полной информацией о ее текущем состоянии. В модели это выражается в увеличении размерности вектора y_k в (4) по сравнению с наблюдением извне и, как следствие, в улучшении качества оценивания.

Уравнение фильтра Калмана [3] имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k + K_{k+1}[y_{k+1} - G_k x_k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где K_k – оптимальный коэффициент фильтра, x_k – оценка вектора состояния фирмы x_k на шаге k фильтра.

Коэффициент K_k определяется как

$$K_k = [A_{k-1}P_{k-1}A'_{k-1} + \Gamma Q_{k-1} \Gamma'] G'_k [G_k(A_{k-1}P_{k-1}A'_{k-1} + \Gamma Q_{k-1} \Gamma') G'_k + R_k]^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$P_k = [I - K_k G_k] [A_{k-1}P_{k-1}A'_{k-1} + \Gamma Q_{k-1} \Gamma'], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где ' – знак транспонирования.

Матрица A_k вычисляется следующим образом

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

Каждый элемент этой матрицы представляет собой значение частной производной i -го элемента соответствующей вектор-функции по j -му элементу вектора состояния, вычисленное при $x = x_k$.

Для того чтобы помимо переменных состояния вычислялись оценки неизвестных параметров, вектор состояния необходимо дополнить элементами вектора параметров. Полученный (расширенный) вектор имеет вид

$$X_k = [x_k, p]'. \quad (9)$$

Соответственно модель (3) дополнится следующими уравнениями: $p'_{k+1} = p'_k + \xi'_k$, $i = 1, 2, \dots, m$, где ξ'_k – дрейф значения i -го параметра. А фильтр (5)–(8) запишется уже относительно расширенного вектора (9). Ошибка ξ'_k определяется степенью стабильности данного параметра и в случае неизменных параметров ее можно опустить.

Оценивание вектора состояния модели (3) фирмы происходит следующим образом. Задается начальная оценка вектора состояния фирмы x_0 и матрица P_0 . Затем вычисляется оптимальный коэффициент фильтра K_1 и на основе измерения y_1 рассчитывается оценка вектора состояния x_1 . Ошибки оценивания на данном шаге алгоритма определяются соответствующими диагональными элементами матрицы P_1 . Далее итерации алгоритма повторяются, пока ошибки оценивания не станут достаточно малыми.

Недостатком алгоритма фильтра Калмана для оценивания состояния фирмы является то, что фильтр должен быть построен на основании априорных данных о статистиках рассматриваемого процесса, что в данном случае соответствует наличию априорной информации о статистических характеристиках векторов состояния ξ_k и измерения η_k , а также ее начального состояния. Гарантированный подход [4] избавлен от данного недостатка.

При оценивании состояния фирмы большое значение имеет максимально возможное использование априорной информации об ее начальном состоянии. Как правило, на практике фактическое значение ковариационной матрицы ошибки оценивания начального состояния P_0 точно не известно. Поэтому, чтобы обеспечить монотонность ошибок оценивания в переходном режиме работы фильтра Калмана, выбирают начальную ковариацию в виде диагональной матрицы с очень большими, практически неопределенными элементами. В [7] предложена иная методика выбора минимального значения матрицы P_0 в условиях, когда его фактическое значение не определено и задается областью, которой оно принадлежит.

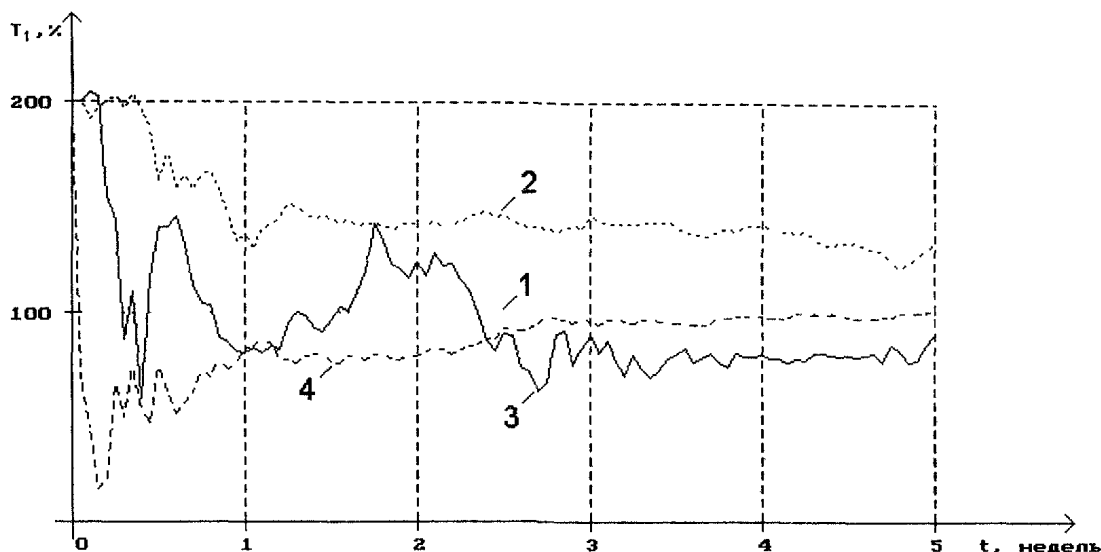
Как показывают эксперименты, для нелинейной системы (3) процедура линеаризации (8), не всегда обеспечивает хорошее приближение исходной модели. Другими словами, значения векторов состояния исходной и линеаризованной систем со временем отличаются все больше. Это зависит не только от вида уравнений (3), но и определяется размерностью системы (в данном случае 99). Отсюда не очень эффективная работа фильтра Калмана при оценивании неизвестных параметров (см. рисунок, кривая 2). Поэтому имеет смысл осуществлять декомпозицию данной системы на относительно независимые подсистемы меньшей размерности и решать задачу оценивания уже в каждой из них. Кроме того, подразделения фирмы относительно независимы и не имеет смысла ставить решение задачи оценивания в одном подразделении в зависимость от решения аналогичной задачи в остальных. В отдельные подсистемы могут быть выделены как подразделения фирмы, так и потоки (информации, заказов, материальные и т.д.). Тогда уравнения каждой i -й подсистемы и соответствующей измерительной подсистемы запишутся в виде

$$x'_{k+1} = f_i(x'_k, z'_k, p', u'_k) + \Gamma'_i \xi'_k, \quad y'_{k+1} = g_i(x'_{k+1}) + \eta'_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

где z'_k – вектор (известный) переменных от других подразделений.

В результате ошибки линеаризации существенно уменьшаются, что приводит к получению более точных оценок параметров фирмы (кривая 3). Кроме того, данный подход существенно облегчает возможные изменение и дополнение модели, а также уменьшает требования к вычислительным ресурсам. В случае если необходимо оценивать параметры только части подсистем, можно не тратить время и ресурсы на оценивание параметров всей системы. Но, очевидно, что

наилучшие результаты в оценивании определенного параметра достигаются, если его значение доступно для измерения ИС фирмы (кривая 4).



Оценка параметра T_1 – число недель, в течение которых продажа товара может осуществляться за счет запаса в сбытовом подразделении (1 – реальное значение параметра; 2 – случай оценивания состояния и параметров всей системы; 3 – оценивание методом декомпозиции; 4 – оценка измеряемого параметра)

Заключение

Таким образом, фильтр Калмана вполне может быть использован для оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы, на основе построенной динамической модели. В случае системы большой размерности и плохо приближаемой линейной системой имеет смысл осуществлять декомпозицию системы на ряд подсистем меньшей размерности. Это позволяет существенно улучшить точность оценивания и, кроме того, уменьшить требовательность метода оценивания к вычислительным ресурсам. В качестве недостатка предложенного подхода следует отметить необходимость предположения случайного характера ошибок ξ_k и η_k . Здесь в качестве альтернативы может рассматриваться гарантированный подход [4] к оцениванию состояния и параметров фирмы. Этот подход состоит в том, что в процессе идентификации и оценивания состояния системы получаются и в дальнейшем используются гарантированные множественные оценки ее параметров и вектора состояния.

Результаты данной работы могут быть использованы для построения автоматизированной системы адаптивного управления фирмой, предпринимателями для анализа и выбора принимаемых решений и составлять основу экспертных систем поддержки принятия решений в бизнесе. Вообще говоря, решение задачи, сформулированной в [6], невозможно без решения рассмотренной задачи, что подчеркивает важность разработки эффективных методов оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы.

Литература

1. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
2. Одинцов А.В., Норенков Ю.И., Горин О.Д. Динамическое моделирование предприятия // *Информационные технологии*. – 1997. – № 2. – С. 20–24.
3. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под. ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 404 с.
4. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // *Проблемы управления и информатики*. – 1999. – № 5. – С. 34–41.
5. Ширяев В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // *Изв. РАН. Техн. киберн.* – 1994. – № 3. – С. 229–237.
6. Ширяев В.И. Головин И.Я. Оптимальное управление производственно-сбытовой системой // *Информационные технологии*. – 2001. – № 2. – С. 37–43.
7. Згуровский М.З., Подладчиков В.Н. Анализ и прогнозирование экономических процессов на основе теории калмановской фильтрации // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. – 1995. – Т. 2. – С. 31–42.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАЧЕСТВА ПЬЕЗОКВАРЦА С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЗВУКА

Ю.В. Петров, А.А. Шульгинов, Е.В. Голубев, В.Ф. Божко

Предложен способ оценки качества кристаллов искусственного кварца по величине затухания ультразвука и анализу спектра коротких ультразвуковых импульсов.

Основной частью любого пьезоэлектрического устройства является пьезоэлемент. В качестве последнего широко используются пластинки, изготовленные из искусственно выращенных кристаллов кварца. Одним из наиболее важных параметров кварцевого пьезоэлемента является добротность. Измерение добротности на российских кварцевывращивающих предприятиях производится в основном способом измерения инфракрасного спектра поглощения кварцевой пластинкой. Этот способ основан на установлении зависимости между величиной коэффициента поглощения инфракрасного излучения с добротностью. Для проведения испытаний из партии кристаллов, выращенных в автоклаве за один технологический процесс, выбирается один. Из него вырезается пьезопластинка У-среза толщиной десять миллиметров. Измерение коэффициента поглощения производят в направлении от затравки до края пластинки (Z-область роста кристалла, из которой далее изготавливаются пьезоэлементы). Затем по эмпирической формуле производят расчет добротности пьезопластины для частоты 5 МГц. Полученное значение добротности считается одной и той же для всей партии кристаллов.

Данный способ обладает рядом недостатков, основными из которых являются необходимость распиловки кристаллов на пластины, наличие дорогостоящих спектрофотометров, необходимость расчета добротности по формуле связи с коэффициентом поглощения и ограничение этого расчета по частоте. Кроме того, такая методика не предусматривает определения добротности всех входящих в партию выращенных кристаллов. Следует заметить, что понятие добротности обычно применяют к колебательным системам. Такой системой можно считать пьезоэлемент, но не кристалл кварца. Поскольку его размеры достаточно велики, то он больше подходит под понятие сплошной упругой среды, свойства которой характеризовать добротностью не принято.

Нами предлагается способ оценки качества кристаллов кварца, основанный на измерении коэффициента затухания и анализа амплитудного спектра ультразвукового импульса наносекундной длительности, прошедшего Z-область роста кристалла. Способ реализуется следующим образом. Кристалл помещается в ванну с контактной жидкостью (вода или масло) и на его плоскопараллельные стороны с помощью кондуктора закрепляются два широкополосных пьезопреобразователя. Конструкция кондуктора при сканировании преобразователями Z-области обеспечивает достаточно плотное прилегание их к местам ввода и приема ультразвука в кристалл. Один из пьезопреобразователей, нагружается на генератор зондирующих импульсов наносекундной длительности и возбуждает ультразвуковые колебания. Эти колебания через контактную жидкость проходят контролируемую зону кристалла и регистрируются вторым пьезопреобразователем. С него сигнал подается на широкополосный усилитель, далее на экран широкополосного осциллографа, где наблюдается серия отраженных ультразвуковых импульсов. Коэффициент затухания вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{d} 20 \lg \frac{A_0}{A},$$

где A_0 , A – амплитуды упругих колебаний в точках ввода и приема, d – расстояние, проходимое ультразвуком в кристалле между излучающим и приемным преобразователями.

Определение коэффициентов затухания значительно упрощается, если воспользоваться блоком цифровой обработки сигналов (БЦО), который имеется в любом серийном дефектоскопе. При подаче сигнала с приемного тракта на БЦО, на его экране высвечивается непосредственное значение коэффициента затухания в децибелах. Для получения и анализа амплитудного и фазового спектров регистрируемых ультразвуковых импульсов, они с экрана осциллографа записываются на видеокамеру, вводятся в компьютер и обрабатываются с помощью специально разработанной программы.

При наличии у компьютера специальной платы сбора данных (приобретение такой платы в настоящий момент не представляет большой трудности), сигнал с усилителя подается непосредственно в компьютер и процесс обработки прошедших через кристалл ультразвуковых импульсов сводится к наблюдению и регистрации коэффициента затухания, амплитудного и фазового спектров.

По предложенной методике были исследованы три кварцевых кристалла и три кварцевые пластинки У-среза. Все образцы отличались друг от друга добротностями, значения которых определялись по заводской методике. Поверхности ввода ультразвука у кристаллов и пластинок разбивались на участки размером 10×10 мм (по размеру пьезопреобразователя) и прозвучивались по Z-области роста менее десяти раз. Затем определялись средние значения коэффициента затухания по всей контролируемой зоне. Следует заметить, что для пьезопластин в случае необходимости, значение коэффициента затухания нетрудно пересчитать на добротность.

Анализ полученных данных показал, что образцы, которые отличались друг от друга по значениям добротности, в такой же зависимости отличаются и по значениям коэффициентов затухания. На рис. 1 и 2 приведены формы акустических импульсов прошедших контролируемую зону кристалла и их спектров. Видно, что амплитуда и форма спектров для образцов с разными значениями коэффициентов затухания (добротности) существенно отличаются друг от друга.

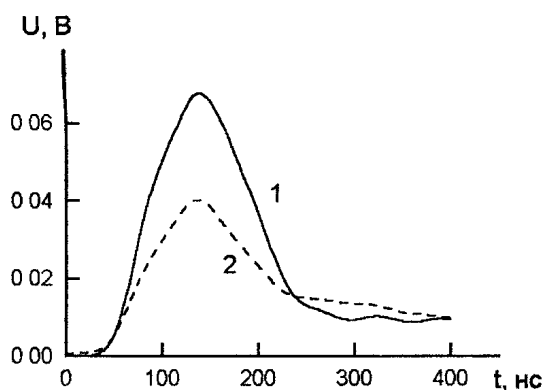


Рис. 1. Форма ультразвукового импульса, прошедшего через Z-область роста кристалла:
 1 – $\theta = 2,4 \cdot 10^6$, $\langle \delta \rangle = 2,24$ дБ;
 2 – $\theta = 1,49 \cdot 10^6$, $\langle \delta \rangle = 3,28$ дБ

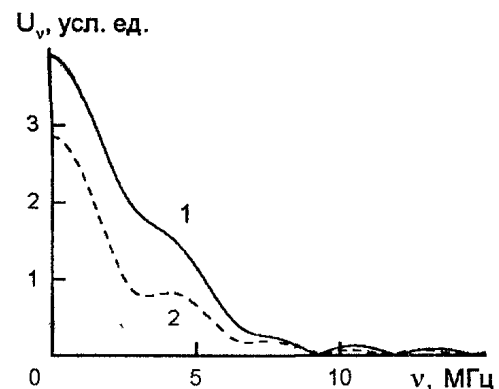


Рис. 2. Амплитудный спектр ультразвукового импульса, прошедшего через Z-область роста кристалла: 1 – $\theta = 2,4 \cdot 10^6$, $\langle \delta \rangle = 2,24$ дБ;
 2 – $\theta = 1,49 \cdot 10^6$, $\langle \delta \rangle = 3,28$ дБ

Таким образом, исходя из результатов проведенной работы, предлагаемый способ оценки качества искусственных кристаллов кварца с помощью коротких ультразвуковых импульсов, может быть рекомендован для их 100 % неразрушающего контроля в условиях производства.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В УПРУГОМ КЛИНЕ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В ОБЪЕМНЫЕ

С.Ю. Гуревич, Х.Б. Толипов, К.Б. Хабиров

Рассмотрена задача дифракции рэлеевских волн на кромке клина. Показано, что при этом возникают объемные и поверхностные волны. Теоретические кривые угловых зависимостей амплитуд объемных волн совпадают с известными экспериментальными фактами.

Введение

Вопросы трансформации рэлеевских волн на клине неизменно привлекают внимание исследователей. Это объясняется тем, что рассматриваемая задача имеет широкий спектр практических приложений: от решения проблем борьбы с ложными сигналами в ультразвуковых преобразователях, в линиях задержки, до определения пространственных координат дефекта типа «трещина», выходящих на поверхность изделия.

Механизм преобразования поверхностных волн в объемные качественно может быть описан достаточно просто. Волна, распространяясь по одной грани клина, вызовет неоднородное возмущение другой поверхности на длине ℓ , величина и форма которого зависит от угла клина и глубины рэлеевской волны (рис. 1). Это возмущение будет являться источником вторичных волн, которое можно представить на границе плоскости в виде набора спектра пространственных гармоник Фурье. Гармоники с $k = k_r$ создадут поле рэлеевских волн, а с $k < k_r$ – поле объемных волн (здесь k_r и k_t соответственно волновые числа рэлеевской и сдвиговой волн).

В связи с этим, представляет интерес теоретическое исследование рассеянного поля, отраженного от второй границы клина.

Обсудим некоторые подходы к решению поставленной задачи.

Генерация вторичной волны происходит от поверхности, имеющую особую точку A (ребро клина), которая может рассеивать упругие волны в ограниченном диапазоне углов θ . Однако, учитывая, что возмущения создаваемые сдвиговой и продольной составляющими падающей рэлеевской волны на поверхности первой грани взаимно компенсируются,

ребро клина, являющееся общей границей поверхностей клина, не испытывает возмущения и, следовательно, не оказывает существенной роли на формирование поля.

Объемная волна формируется в том случае, когда проекция волнового вектора падающей волны на границу второй грани клина меньше вектора пространственной волны. В противном случае вторичная волна является неоднородной (неуходящей), энергия которой сосредоточена только в приповерхностном слое.

Вследствие появления на второй грани поверхностных волн разных направлений, возникают их многократные отражения от угла клина.

Решение

Итак, предположим, что по первой грани клина распространяется рэлеевская волна, представляющая собой совокупность двух волн – продольной и сдвиговой с потенциалами:

$$\varphi = 1 \exp i [(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_t^2} \eta], \quad (1)$$

$$\psi = p \exp i [(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_t^2} \eta], \quad (2)$$

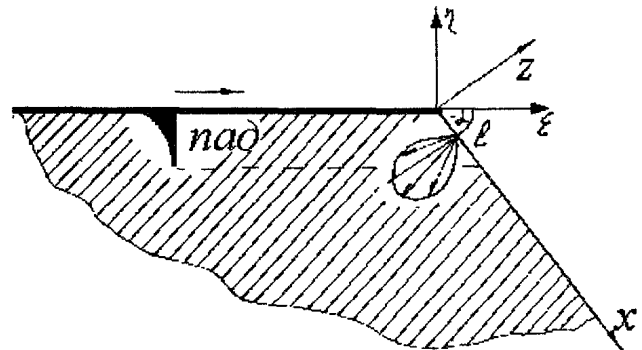


Рис. 1. Система координат

где $p = -\sqrt{\frac{q_r}{s_r}} i$, $q_r = \sqrt{k_l^2 - k_r^2}$, $s_r = \sqrt{k_l^2 - k_r^2}$, $k_h = \frac{\omega}{C_h}$.

Здесь C_l (C_t) – скорости распространения продольных (поперечных) волн, ω – круговая частота, а амплитуда продольного потенциала принята за единицу. (Зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем).

На поверхности второй грани клина компоненты тензора напряжений, обуславливаемые как падающей, так порождаемыми ею волнами, должны быть равны нулю. Если σ_{xz}^0 и σ_{zz}^0 – напряжения, вызываемые смещениями падающей рэлеевской волны, то граничные условия при $z = 0$ приобретают вид:

$$\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 = 0, \quad \sigma_{xz} + \sigma_{xz}^0 = 0 \quad (3)$$

Определим напряжения на противоположной грани клина, создаваемые смещениями падающей рэлеевской волны.

Как известно [1], компоненты тензора напряжений в терминах волновых потенциалов выражаются в виде:

$$\sigma_{\varepsilon\eta} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \mu \left(-2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} - k_l^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon \partial \eta} \right). \quad (5)$$

Подставляя в соотношение (3) функции (1) и (2), приходим к следующему выражению для смещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon\eta} &= \mu \{ P(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) + Q(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) \} \exp(ik_r \varepsilon), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \mu \{ R(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) + S(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) \} \exp(ik_r \varepsilon), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} P(k_r) &= 2k_r \sqrt{k_l^2 - k_r^2}, \quad Q(k_r) = (2k_r^2 - k_l^2), \\ R(k_r) &= (2k_r^2 - k_l^2), \quad S(k_r) = 2k_r \sqrt{k_l^2 - k_r^2}. \end{aligned}$$

Отметим также, что на противоположной грани клина эти компоненты в зависимости от угла клина изменяются как по величине, так и по направлению.

Следовательно, для случая однократного отражения поверхностной волны, выражение (3) с учетом (1) и (2) на второй грани клина ($z = 0$) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [P(a) \exp(iax) - Q(b) \exp(ibx)] \cos(\alpha), \\ \sigma_2 &= [R(a) \exp(iax) - S(b) \exp(ibx)] \cos(\alpha); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \sin \alpha + k_r \cos \alpha, \\ b &= \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \cos \alpha + k_r \sin \alpha. \end{aligned}$$

В дальнейшем нас будут интересовать только зависящие от времени части упругих полей, создаваемые на поверхности другой грани клина падающей рэлеевской волной; они определяются системой уравнений, которые имеют вид:

$$\varphi + k_l^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi + k_l^2 \psi = 0. \quad (8)$$

Полная задача в ограниченной упругой среде включает в себя также полученные граничные условия, которые запишем в виде:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= -\sigma_1, \\ -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} - k_l^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon \partial \eta} &= -\sigma_2, \quad \text{при } z = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где правая часть уравнений определяется выражениями (7).

Перейдем к построению рассеянного поля.

Потенциалы φ и ψ представим в виде разложений Фурье по волновым векторам k .

$$\varphi = \int_0^{\infty} \varphi(k) \exp(ikx) dk; \quad \psi = \int_0^{\infty} \psi(k) \exp(ikx) dk.$$

Тогда система уравнений (2) и (7) упрощаются и приобретают соответственно вид:

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} + (k_l^2 - k^2) \varphi^* = 0; \quad \frac{d^2 \psi^*}{dz^2} + (k_t^2 - k^2) \psi^* = 0; \tag{10}$$

$$2ik \frac{d\varphi^*}{dz} - k^2 \varphi^* - \frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} = - \left(\frac{P(a)}{k-a} - p \frac{Q(b)}{k-b} \right) \cos \alpha. \tag{11}$$

Решение уравнений (8), удовлетворяющее условию излучения, представим в виде:

$$\varphi^* = D \exp \sqrt{k^2 - k_l^2}, \quad \psi^* = E \exp \sqrt{k^2 - k_t^2}.$$

Учитывая (9), получим:

$$D = \frac{A(\alpha)S(k_r) - B(\alpha)Q(k_r)}{\text{Det}(k)}, \quad E = \frac{B(\alpha)P(k_r) - A(\alpha)R(k_r)}{\text{Det}(k)}, \tag{12}$$

где $\text{Det}(k) = 4k^2 \sqrt{(k^2 - k_l^2)(k^2 - k_t^2)} - (2k^2 - k_l^2)^2$,

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{P(a)}{k-a} - p \frac{Q(b)}{k-b}; & B(\alpha) &= \frac{R(a)}{k-a} - p \frac{S(b)}{k-b}; \\ C(\alpha) &= \frac{P(c)}{k-c} - p \frac{Q(d)}{k-d}; & D(\alpha) &= \frac{R(c)}{k-c} - p \frac{S(d)}{k-d}. \end{aligned}$$

С учетом обратного преобразования Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[A(\alpha)S(k_r) - B(\alpha)Q(k_r)] \cos(\alpha) + [A(\alpha)S(k_r) - B(\alpha)Q(k_r)] \sin(\alpha)}{\text{Det}(k)}; \\ \psi &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[B(\alpha)S(k_r) - A(\alpha)Q(k_r)] \cos(\alpha) + [B(\alpha)S(k_r) - A(\alpha)Q(k_r)] \sin(\alpha)}{\text{Det}(k)}. \end{aligned} \tag{13}$$

С целью интегрирования этих выражений перейдем к симметричным пределам и аналитически продолжим подынтегральное выражение в плоскость комплексного переменного k . В этой плоскости подынтегральная функция имеет точки ветвления $k = \pm k_l$ и $k = \pm k_t$, и полюса, определяемые равенством: $\text{Det}(k) = 0$. Из точек ветвления проведем разрезы по линиям $\text{Re}(q, s) = 0$.

Для того, чтобы сместить особые точки с вещественной оси ($-\infty < k < \infty$), введем предположение о наличии малого затухания в среде, т.е. предположим, что k_l и k_t комплексные. Интегралы по действительной оси ($-\infty < k < \infty$), заменим интегралом по пути Γ , проходящему по действительной оси, дугам окружности бесконечного радиуса в верхней полуплоскости, опирающейся на действительную ось и по берегам разрезов, проходящих через точки ветвления (рис. 2).

Выбор такого контура интегрирования обусловлен тем, что подынтегральная функция удовлетворяет лемме Жордана. Тогда интеграл по пути Γ равен сумме вычетов, взятых по полюсам, оказавшиеся внутри контура. Таким образом, можно записать:

$$\int_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) + \int_L F(k) + \int_{L_1} F(k) + \int_{L_2} F(k) + \int_{\gamma_1} F(k) + \int_{\gamma_2} F(k). \tag{14}$$

Отсюда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) = \int_{\Gamma} F(k) - \int_L F(k) - \int_{L_1} F(k) - \int_{L_2} F(k) - \int_{\gamma_1} F(k) - \int_{\gamma_2} F(k). \tag{15}$$

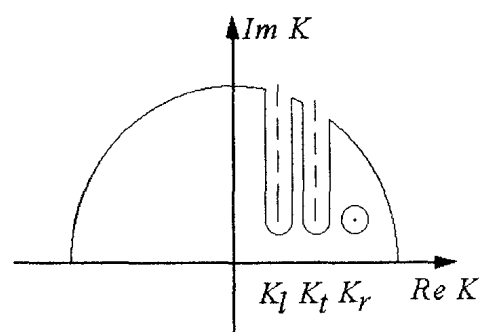


Рис. 2. Комплексная плоскость

Если контуры γ_l и γ_r проведены через точки перевала и направление обхода по контуру интегрирования совпадает с направлением наибоыстрейшего спуска, то основной вклад определяется последними слагаемыми в формуле (15).

Для нахождения решения задачи, удовлетворяющего условию погашаемости на бесконечности, применим преобразование Фурье по координате x к системе уравнений (8) и краевому условию (11). В результате для фурье-трансформанты получаем двумерную обобщенную неоднородную краевую задачу для однородных уравнений Гельмгольца, с краевыми условиями, выраженными в виде системы алгебраических уравнений, связывающих трансформанты Фурье компонент потенциалов со значениями угла клина на границе поверхности, из которых определяются неизвестные коэффициенты D, E .

Необходимые нам асимптотики строятся с помощью соответствующего обхода полюсов и точек ветвления в комплексной k -плоскости. При этом учет вклада полюсов дает поле излучения, сформированного из волн Рэлея, а точек ветвления – поле излучения, формируемые из объемных волн. Используя метод перевала, который детально разработан в математической физике, для поля смещений объемных волн получим:

$$U_l = \sqrt{\frac{2\pi}{k_l \rho}} \frac{\cos^2 \omega}{k_l^3 D_l} \left[\left(p \frac{2b^2 - k_l^2}{k_l \sin \omega - b} - \frac{2a\sqrt{k_l^2 - a^2}}{k_l \sin \omega - a} \right) 2k_r \sqrt{k_r^2 - k_l^2} + \left(p \frac{2b\sqrt{k_l^2} - b^2}{k_l \sin \omega - b} + \frac{2a^2 - k_l^2}{k_l \sin \omega - a} \right) (2k_r^2 - k_l^2) \right] \exp(ik_l \rho - i\frac{\pi}{4}); \quad (16)$$

$$U_r = \sqrt{\frac{2\pi}{k_l \rho}} \frac{\cos^2 \omega}{k_l^3 D_r} \left[\left(p \frac{2b^2 - k_l^2}{k_l \sin \omega - b} - \frac{2a\sqrt{k_l^2 - a^2}}{k_l \sin \omega - a} \right) 2k_r \sqrt{k_r^2 - k_l^2} + \left(p \frac{2b\sqrt{k_l^2} - b^2}{k_l \sin \omega - b} + \frac{2a^2 - k_l^2}{k_l \sin \omega - a} \right) (2k_r^2 - k_l^2) \right] \exp(ik_l \rho - i\frac{\pi}{4}). \quad (17)$$

где

$$D_l = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sqrt{\sin^2 \omega - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \omega - 1)^2; \\ D_r = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sqrt{\sin^2 \omega - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \omega - \varepsilon^2)^2; \quad \varepsilon = \frac{C_l}{C_r}.$$

Здесь ω – азимутальный угол, отсчитываемый от оси z .

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего обратимся к рис. 3, где приведены нормированные по отношению к сдвиговой волне амплитуды смещений объемных волн. Изменение амплитуды пространственных волн носит экстремальный характер, где максимум амплитуды достигается при углах клина 120° . Если рассматривать процесс рассеяния как переход энергии падающей рэлеевской волны к поверхностным и пространственным волнам, то, согласно закону сохранения энергии, с уменьшением энергии дифрагированных поверхностных волн должен возрастать вклад объемных волн.

Этот факт согласуется с опытными данными. Как известно из экспериментальных данных [1], при этих углах наблюдается минимум коэффициента преломления.

В дополнение к выполненному количественному анализу амплитуд объемных волн целесообразно привести угловые зависимости амплитуд этих волн, которые могут пред-

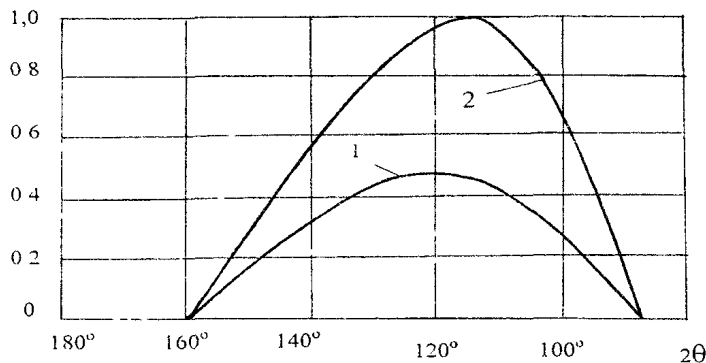


Рис. 3. Зависимость амплитуд продольной (1) и поперечных (2) волн от угла клина

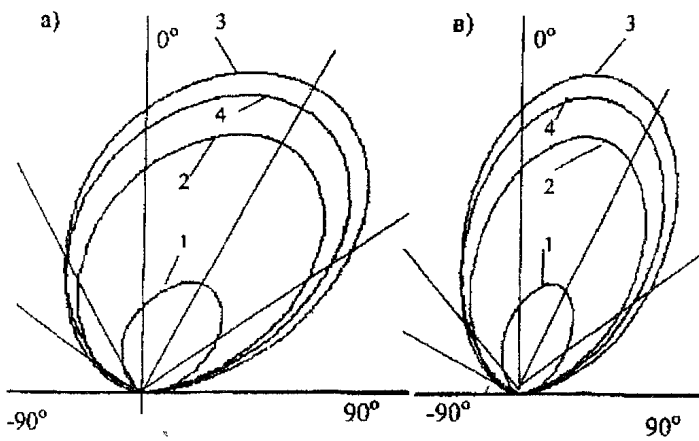


Рис. 4. Угловое распределение амплитуд продольной (а) и поперечных (в) волн

ставить интерес для практики Сравнительный анализ этих кривых (рис. 4) показывает, что диаграммы направленности характеризуются высоким уровнем в зоне углов ω , близким к 30° . Также при уменьшении угла клина происходит как изменение амплитуды волны, так небольшое смещение максимума диаграммы направленности.

Вывод на основе этого краткого анализа можно сформулировать следующим образом. Для подавления ложных сигналов необходимо стремиться к значению углов клина близкому к 90° , а для эффективного преобразования – к 120° .

Литература

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981.

ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ В УПРУГОМ КЛИНЕ

Х.Б. Толипов

Методом интегральных преобразований исследовано преломление волн Рэлея на ребре клина. Показано, при больших углах клина основной вклад в рассеянное акустическое поле вносят касательные составляющие возмущающих сил. С уменьшением угла клина вклад этих сил падает, но зато увеличивается влияние нормальной составляющей, монотонно достигая максимума. Полученная зависимость коэффициента преломления хорошо согласуется с известными экспериментальными данными.

Введение

Дифракция поверхностных (рэлеевских) волн на клине имеет широкий спектр практических приложений: от использования в качестве преобразователей поверхностных волн в объемные до решения проблем борьбы с ложными сигналами в линиях задержки.

Следует заметить, что, кроме дефектоскопии, решение данной задачи имеет важное значение и для других областей науки и техники: сейсмологии (распространение сейсмических волн по резким изломам); акустоэлектроники (использование ребра клина в качестве отражателей поверхностных волн, взаимных преобразователей поверхностных волн в объемные, линий задержки, фильтров); в механике разрушения и физике поверхностных явлений (выявление дефектов типа «трещина»).

1. Постановка задачи

Пусть по первой грани клина распространяется рэлеевская волна, представляющая собой совокупность двух волн – продольной и сдвиговой – с потенциалами:

$$\Phi = 1 \exp [i(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_l^2} \eta]; \quad (1)$$

$$\psi = p \exp [i(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_t^2} \eta]; \quad (2)$$

$$p = -\sqrt{\frac{k_l^2 - k_r^2}{k_t^2 - k_r^2}} i; \quad k_h = \frac{\omega}{c_h}.$$

Здесь c_l , c_t , c_r – скорости распространения, соответственно, продольных, поперечных и рэлеевских волн, ω – круговая частота, а амплитуда продольного потенциала принята за единицу. (Зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ в дальнейших выкладках опускается).

Зависящие от времени части упругих полей, создаваемые на поверхности другой грани клина падающей рэлеевской волной, определяются системой уравнений, которые имеют вид:

$$\Delta \Phi + k_l^2 \Phi = 0, \quad \Delta \psi + k_t^2 \psi = 0. \quad (3)$$

На поверхности второй грани клина компоненты тензора напряжений, обуславливаемые как падающей, так и порождаемой ею волнами, должны быть равны нулю. Если σ_{xz}^0 и σ_{zx}^0 – напряжения, вызываемые смещениями падающей рэлеевской волны, то граничные условия при $z = 0$ приобретают вид:

$$\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 = 0, \quad \sigma_{xz} + \sigma_{xz}^0 = 0. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (3) совместно с граничными условиями (4) полностью определяет постановку задачи дифракции волны на клине о поле скоростей смещений и поле напряжений.

2. Построение решения

Представим искомое решение в виде преобразования Фурье по координатам x и z , учитывая, что смещения в рэлеевской волне и, следовательно, потенциалы по оси z сдвинуты относительно оси x на 90° :

$$A_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} A_j(k, x) e^{ikx} dx, \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^*(k, x) e^{-ikx} dk, \quad \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2^*(k, x) e^{-ikx} dk,$$

$$C_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} C_j(k, z) e^{i(kz+0.5\pi)} dz, \quad (6)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_1^*(k, z) e^{-ikz} dk, \quad \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_2^*(k, z) e^{-ikz} dk, \quad j = 1, 2.$$

Неизвестные функции A_j^* , C_j^* определяются путем подстановки соотношений (5), (6) в (4) и (3) с последующим решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выражения для компонент тензора напряжений на первой грани клина представим в виде [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon\eta} &= \{P(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta) + Q(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta)\} \exp(ik_r \varepsilon), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \{R(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta) + S(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta)\} \exp(ik_r \varepsilon), \\ \operatorname{Im} \sqrt{k_i^2 - k_r^2} &> 0, \operatorname{Im} \sqrt{k_i^2 - k_r^2} > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} P(k_r) &= 2\mu k_r \sqrt{k_i^2 - k_r^2}, & Q(k_r) &= \mu(2k_r^2 - k_i^2), \\ R(k_r) &= -\lambda k_i^2 - 2\mu(k_r^2 - k_i^2), & S(k_r) &= 2\mu k_r \sqrt{k_i^2 - k_r^2}, \end{aligned}$$

λ , μ – постоянные Ламе.

Заметим, что на второй грани клина эти напряжения, в зависимости от угла клина и глубины релеевской волны, будут изменяться как по величине, так и по направлению. Отсутствие напряжений на поверхности ($\eta = 0$) означает, что ребро клина, являющееся общей границей поверхностей клина, не испытывает возмущения, и следовательно, не оказывает существенной роли на формирование поля.

Проекции продольной и сдвиговой составляющих волнового вектора падающей волны на оси координат x и z

$$k_{1x}(\theta) = k_r \cos \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \sin \theta, \quad k_{1z}(\theta) = k_r \sin \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \cos \theta, \quad (8)$$

$$k_{2x}(\theta) = k_r \cos \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \sin \theta, \quad k_{2z}(\theta) = k_r \sin \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \cos \theta$$

вследствие неоднородности релеевской волны выражаются в комплексном виде.

В этом случае граничные условия на поверхности второй грани клина для поля потенциалов при разложении возмущающих сил на касательные и нормальные составляющие, запишутся в виде:

$$P(k) + Q(k) + [P(k_{1x}) + pQ(k_{2x})] \cos \theta = 0; \quad R(k) + S(k) + [R(k_{1x}) + pS(k_{2x})] \cos \theta = 0. \quad (9)$$

$$P(k) + Q(k) + [P(k_{1z}) + pQ(k_{2z})] \sin \theta = 0; \quad R(k) + S(k) + [R(k_{1z}) + pS(k_{2z})] \sin \theta = 0. \quad (10)$$

С учетом принятых обозначений, опустив несложные выкладки, запишем окончательные выражения для A_1^* и C_1^*

$$A_1^* = T_1 \exp(iqz); \quad C_1^* = T_2 \exp(iqz);$$

$$T_1 = \frac{T_3 + T_4}{T_0}; \quad T_2 = \frac{T_5 + T_6}{T_0}; \quad q^2 = k^2 - k_i^2; \quad s^2 = k^2 - k_r^2;$$

$$\begin{aligned} T_3 &= [B_1(\theta) \cdot S(k_r) - B_2(\theta) \cdot Q(k_r)] \cos \theta, \quad T_4 = [B_3(\theta) \cdot S(k_r) - B_4(\theta) \cdot Q(k_r)] \sin \theta, \\ T_5 &= [B_2(\theta) \cdot P(k_r) - B_1(\theta) \cdot R(k_r)] \cos \theta, \quad T_6 = [B_4(\theta) \cdot P(k_r) - B_3(\theta) \cdot R(k_r)] \sin \theta, \quad T_0 = 4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2; \\ B_1 &= \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{Q(k_{2x})}{k - k_{2x}}; \quad B_2 = \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}}; \quad B_3 = \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}}; \quad B_4 = \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычислим интеграл Фурье в соотношении (5), замкнув контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной k .

Аналитическое продолжение на верхнюю полуплоскость – многозначная функция, имеющая точки разветвления

$$k_{1,2} = \pm ik_l, k_{3,4} = \pm ik_l,$$

и простые полюса

$$k_{5,6} = \pm ik_r$$

Ветви радикалов в (7) фиксируем условием $\arg q = \arg s = \pi/2$ при $k > 0$.

Будем рассматривать на верхнем листе многолистной римановой поверхности ту ветвь многозначной функции A_1^* , которая является аналитическим продолжением этой функции. Каждый из листов римановой поверхности представляет собой плоскость с разрезами, проведенными так, как это показано в предыдущей статье на рис. 2.

Вклад полюсов $k_{5,6}$ определяет волну Релея. Определяя вычеты в этих полюсах для коэффициента преломления потенциала Φ , имеем:

$$V_1 = \frac{T_1}{\left. \frac{d}{dk} T_0(k) \right|_{k=k_r}}$$

Вычисляя интеграл (6) по вышеизложенной методике, для коэффициента преломления, в случае действия нормальных возмущений, получим:

$$V_2 = \frac{T_2}{\left. \frac{d}{dk} T_0(k) \right|_{k=k_r}}$$

Заметим, что общий коэффициент преломления выражается в комплексном виде, т.к. прохождение волны происходит с изменением фазы относительно падающей:

$$|V_p| e^{i\varphi} = V_1 + V_2.$$

На рисунке приведены результаты численного расчета модулей коэффициентов преломления релеевской волны (опытные данные из работы [2]).

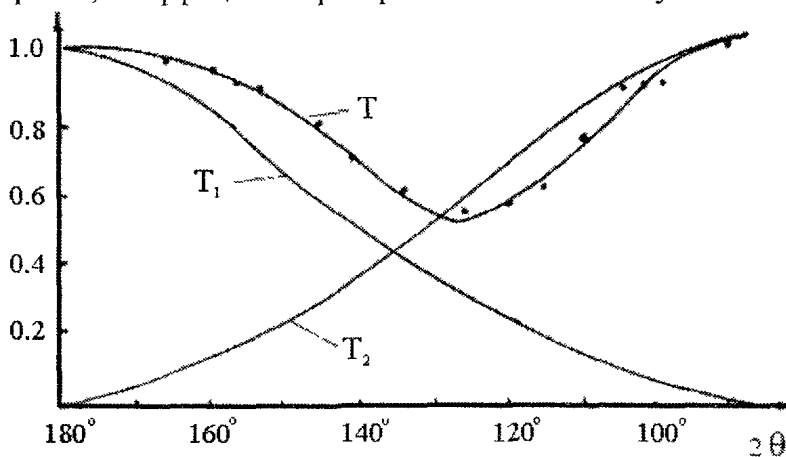
Как показывает анализ, при больших углах клина основной вклад в рассеянное акустическое поле вносят касательные составляющие возмущающих сил. С уменьшением вклад этих сил падает, но зато увеличивается влияние нормальной составляющей, монотонно достигая максимума.

Отметим также, что экспериментальные данные сдвинуты вправо относительно расчетных кривых. Этот факт можно объяснить следующим образом. Согласно предложенной теории следует, что коэффициент преобразования поверхностных волн начинает уменьшаться сразу же с изменением угла клина. Однако, известно, что если проекция волнового вектора падающей волны на свободную поверхность больше вектора объемной волны, то возбуждаемые продольная и поперечная волны являются неоднородными, вся энергия которых сосредоточена вблизи поверхности [3]. Следовательно, при больших углах клина вся энергия падающей волны переходит в энергию преломленной неоднородной волны, которая затем перерождается в релеевскую. Таким образом, коэффициент преобразования начинает уменьшаться с возникновением объемной волны, уносящей энергию вглубь среды [4]. Такое явление возникает тогда, когда проекция волнового вектора падающей волны на другую грань клина меньше волнового вектора сдвиговой волны.

Это условие можно определить из соотношения:

$$\beta = \arccos k_l/k_r.$$

В нашем случае для выбранного материала с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0,34$ эта задержка составляет $\beta = 15^\circ$.



Угловая зависимость модулей коэффициента преломления (V) релеевской волны

При решении задачи дифракции на клине с малым углом раствора необходимо учитывать при приближении к ребру клина изменение скорости падающей волны [5].

Полученные результаты позволяют аналогичным образом изучать дифракцию на некоторых более сложных рассеивателях, составной частью которых является плоская грань.

Литература

1. Kane J., Spence J. Rayleigh wave transmission in elastic wedge // *Geophysics*. – 1963. – V. 28, № 5, pt. 1. – P. 715–723.
2. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 165 с.
3. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – С. 63.
4. Толипов Х.Б., Гуревич С.Ю. Особенности дифракции релеевских волн на клине // *Тезисы докладов XX Уральской конф.* – Екатеринбург, 2001. – С. 68.
5. Толипов Х.Б. Динамическая задача теории упругости для угловых областей с однородными граничными условиями // *ПММ*. – 1993. – Т. 55. – Вып. 5. – С. 120–126.

РАЗРАБОТКА ИСТОЧНИКА ФЛИККЕР-ШУМА ДЛЯ ЦЕЛЕЙ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

А.А. Шульгинов

Зарегистрирован фликкер-шум проводимости порошкового резистора. Спектральный анализ показал, что фликкер-шум проявляется на фоне белого шума на частотах ниже 10^{-3} Гц. Даны рекомендации для создания нового источника фликкер-шума для целей неразрушающего контроля.

Введение

Фликкер-шум это чрезвычайно распространённое явление. Он обнаружен в электронных лампах как флуктуация эмиссионной способности катода; в полупроводниках, угольных, плёночных резисторах, гранулированных средах, электролитах как флуктуация электрического сопротивления; в живой ткани как флуктуация разности потенциалов на мембране клетки. Целый ряд геофизических, астрофизических, биологических, социальных процессов имеют спектр флуктуаций $1/f$, известный под названием фликкер-шум. Причины возникновения фликкер-шума зависят от природы объекта. Однако, общее свойство всех объектов заключается в том, что фликкер-шум выступает как спутник необратимых процессов и несёт информацию о них. На эту тему за последние годы было опубликовано несколько обзорных статей [1–4]. Главная цель исследований фликкер-шума состояла в том, чтобы найти способы его подавления. Эта задача была успешно решена для полупроводниковых приборов. Однако, фликкер-шум может являться источником информации об объекте и о процессах происходящих в нём. Флуктуации, имеющие спектр $1/f$, обнаружены также в ферромагнетике как флуктуации магнитного поля (магнитный шум). Ферромагнетик вблизи температуры магнитного фазового перехода находится в неустойчивом состоянии. В нём непрерывно возникают и разрушаются доменные структуры, что порождает магнитный шум. Существует два типа фликкер-шума. Первый связан с внутренними причинами. Например, «звучание» отдельных зёрен металла. Это, так называемый, локальный фликкер-шум. Второй связан либо с внешними воздействиями, либо с глобальными процессами внутри объекта, например, рост дефектов или перестройка доменов ферромагнетика. Это нелокальный фликкер-шум. Именно нелокальный фликкер-шум может представлять интерес как источник информации для целей неразрушающего контроля источника этого шума, например, ферромагнитного образца.

Эксперимент

Для этих целей был создан детектор слабых полей, который подключён к измерительному комплексу на основе компьютера IBM. Создан пакет программ для обработки сигнала. Детектор представляет собой очень чувствительное нелинейное сопротивление на основе порошка графита в смеси с эпоксидной смолой. Он был помещён в металлический термостат для уменьшения влияния электромагнитных и тепловых полей. Цель исследования состояла в том, чтобы определить спектр флуктуаций детектора и другие параметры фликкер-шума без воздействия на него. По результатам исследований дать рекомендации для создания нового детектора слабых флуктуаций магнитного поля ферромагнетиков.

Измерения проводились круглосуточно с 31 июля по 17 августа 2000 г. В течение 1 с производилось 500 отсчётов сопротивления. Усреднённое значение и дисперсия записывались в файл. Эксперимент несколько раз прерывался в связи с необходимостью замены аккумулятора, питавшего цепь усилителя и моста Уитстона. Одно из плеч моста составляло флуктуирующее сопротивление. Разбалансировка моста усиливалась с помощью операционного усилителя с коэффициентом усиления 80. Аккумуляторы, усилитель и мост были также экранированы и помещены внутрь металлического термостата. Это было необходимо, чтобы изолировать их от внешних воздействий. В течение ~14 часов от начала эксперимента происходили резкие флуктуации сопротивления. По-видимому, это связано было с процессом релаксации. Эта часть записи не обрабатывалась. Период от установления относительно стабильных флуктуаций до разрядки аккумуля-

ляторов составлял около 3 суток. Самая длительная непрерывная запись с установившимися флуктуациями составила около 80 часов (от 20.00 31 июля 2000 г. до 4.00 4 августа GMT).

Спектральный анализ шума

Результаты измерения сопротивления детектора за 80 часов эксперимента представлены на рис. 1. По оси ординат отложена флуктуация сопротивления относительно среднего значения в условных единицах. Спектр сигнала получен методом быстрого Фурье-преобразования (рис. 2).

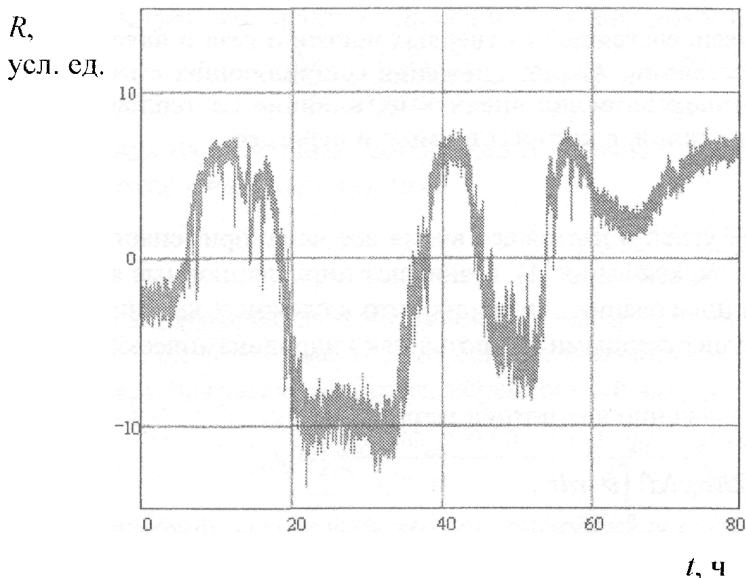


Рис. 1. Изменение сопротивления детектора во времени

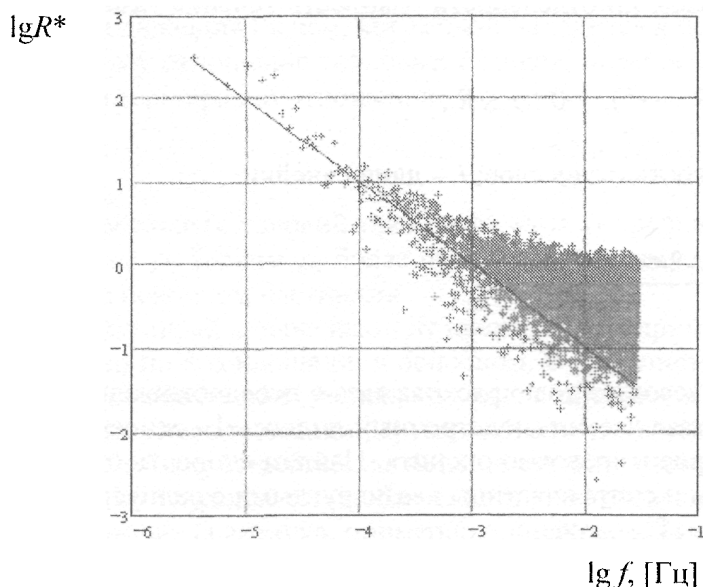


Рис. 2. Спектр флуктуаций сопротивления.
Сплошная линия – ожидаемый спектр фликкер-шума ($1/f$)

Спектральный анализ сигнала показал, что детектор даёт фликкер-шум, имеющий спектр $1/f$, в диапазоне частот от 10^6 до 10^{-3} Гц. На более высоких частотах фликкер-шум не обнаруживается на фоне белого шума. Время одного измерения с помощью детектора фликкер-шума не должно быть меньше нескольких периодов колебаний сопротивления на наивысшей частоте. Это означает, что время одного измерения с помощью такого детектора составит не менее 10^3 – 10^4 с. Необходимо создать новый источник, у которого уровень фликкер-шума был бы на несколько порядков выше. Таким источником мог бы стать угольный резистор или островковая плёнка металла. Флуктуации сопротивления проводника возрастают в тысячи раз в сильном магнитном поле (~ 20 кГс). Такие магнитные поля имеются внутри магнитных доменов ферромагнетиков. Поэтому сильные флуктуации проводимости могут давать сами ферромагнетики.

Автор выражает глубокую благодарность Подивилкову О.М. за помощь в подготовке к эксперименту, а также Пархомову А.Г., Петрову Ю.В. и Прокопьеву К.В. за полезные замечания к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №01-02-96469) и Минобразования РФ (грант № Е00-3.4-346).

Литература

1. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследованиях $1/f$ -шума // *УФН.* – 1983. – Т. 141, вып. 1. – С. 151–176.
2. Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твёрдых телах // *УФН.* – 1985. – Т. 145, вып. 2. – С. 285–328.
3. Хаотические системы. (Тематический выпуск) // *ТИИЭР.* – 1987. – Т. 75, вып. 8. – 176 с.
4. Жигальский Г.П. Шум вида $1/f$ и нелинейные эффекты в тонких металлических плёнках // *УФН.* – 1997. – Т. 167, вып. 6. – С. 623–648.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВ ПСЕВДООЖИЖЕННОГО СЛОЯ

Г.Ф. Кузнецов

Рассмотрены свойства смеси, состоящей из твердых частиц и газа и находящейся в псевдоожигенном состоянии. Анализ движения составляющих смеси компонентов и тепловых потоков позволил оценить их влияние на теплообмен и выявить наиболее опасные точки, в которых возможен перегрев.

Для сжигания и газификации дробленых углей в настоящее время все чаще применяется псевдоожигенный слой, в котором, как показали исследования [1], возникают циркуляционные ячейки и их отдельные точки могут быть подвержены шлакованию. Очевидно, что в сложных явлениях взаимодействия потока газа и твердых частиц, существенными являются как гидродинамические, так и тепловые процессы.

Для их анализа запишем следующее выражение для потока тепла

$$Q = 2\pi c \rho \Delta T \int_0^R v \cdot r dr,$$

где c – удельная теплоемкость вещества; ρ – его плотность; ΔT – температурный напор; v – осевая скорость течения; R – радиус ячейки.

Псевдоожигенный слой представляет смесь твердых частиц и газа, которые существенно отличаются по физическим свойствам и, соответственно с этим, полный поток тепла складывается из потоков, переносимых частицами и газом по отдельности. Скорость течения газа в ячейке v_1 определяется формулой Пуазейля,

$$v_1 = \frac{\Delta P}{4\eta \ell} (R^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq R,$$

где ΔP – перепад давления на длине; η – вязкость газа в слое; ℓ – длина ячейки.

Тогда можно определить поток тепла

$$Q = \frac{\kappa_1 2\pi c_1 \rho \Delta T \Delta P R^4}{16\eta \ell}, \quad (1)$$

$$\kappa = m_1 / m_2.$$

Входящий в формулу (1) κ показывает весовую долю расхода газа в псевдоожигенном слое к весовой доле движущихся в направлении газа частиц (подстрочный индекс «1» относится к газу, «2» – к частицам). Последнюю можно ориентировочно оценить. Найдем скорость отдельных частиц, пользуясь динамическим уравнением и считая частицы квазикруглыми с радиусом r_0 .

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_2 \frac{dv_2}{dt} = -\frac{4}{3} \pi r_0^3 g (\rho_2 - \rho_1) + 6\pi \eta r_0 (v_1 - v_2).$$

В этом уравнении первое слагаемое в правой части равенства – сила веса с учетом выталкивающей архимедовой силы, второе – сила сопротивления трения.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v_2 = (v_1 - \tau g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}) (1 - e^{-t/\tau}),$$

$$\text{где } \tau = \frac{2 \pi \rho_2 r_0^2}{9 \eta}; \quad v_1 = \frac{\Delta P}{4\pi \ell} (R^2 - r^2).$$

Это решение удовлетворяет начальному условию: в момент $t = 0$, скорость частицы также равна нулю. Потом происходит подъем слоя и слой находится в псевдоожигенном состоянии. Оно возникает при $t \rightarrow \infty$ и тем быстрее, чем меньше время релаксации τ . Последняя величина естественным образом зависит от плотности частиц ρ_2 , их радиуса r_0 и вязкости газа η .

Следовательно, в развигом псевдооживленном слое

$$v_2 = v_1 - \tau g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}.$$

Увеличение частиц потоком возможно лишь при условии

$$\tau g - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} < v_1,$$

откуда следует, что градиент давления должен удовлетворять неравенству

$$\frac{\Delta P}{\ell} > \frac{\pi \rho_2 r_0^2 g}{18(R^2 - r^2)} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cong \frac{\pi \rho_2 r_0^2 g}{18(R^2 - r^2)}, \text{ так как } \rho_2 \gg \rho_1.$$

Исходя из очевидных соображений, можно оценить радиус, на котором частицы размера r_0 не двигаются в направлении газа

$$R - r = \frac{\pi \rho_2 r_0^2 g \ell}{18 \Delta P (R + r)}.$$

Частиц, которые двигаются в обратном по отношению к скорости газа направлении, немного. Весовая их доля существенно меньше половины всех частиц слоя.

Определим тепловой поток, переносимый частицами.

$$Q_2 = \left(\frac{\kappa_2 2\pi c_2 \rho_2 \Delta T R^4}{\eta} \right) \cdot \left[\frac{1}{16} \frac{\Delta P}{\ell} - \frac{g}{9} \frac{r_0^2}{R^2} (\rho_2 - \rho_1) \right]; \quad \kappa_2 = \frac{m_2}{m_1},$$

где m_2 – весовой расход всех частиц, движущихся в направлении газового потока.

Полный поток тепла определяется суммой потоков, переносимых частицами и газом.

Очевидно, вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь, так как оно пропорционально силе тяжести, уменьшенной в r_0^2 / R^2 раза, а первое слагаемое пропорционально перепаду давления на псевдооживленном слое. Как известно [2], сила тяжести слоя уравновешивается перепадом давления на нем, когда слой находится в псевдооживленном состоянии.

Поэтому отношение тепловых потоков, переносимых в псевдооживленном слое частицами и газом, примерно равно отношению

$$\frac{Q_2}{Q_1} \cong \frac{\kappa_2 c_2 \rho_2}{\kappa_1 c_1 \rho_1}.$$

Для реальных условий предтопка κ_2 и κ_1 сравнимы, как c_1 и c_2 ($c_1 \sim 1000$ Дж/кг·К, $c_2 \sim 600$ Дж/кг·К), но ρ_2 больше ρ_1 более чем на три порядка, поэтому тепловой поток в слое будет переноситься в основном частицами.

Проделанный анализ находит практическое применение. Тепловыделение в слое происходит равномерно по его площади, в основном, в прирешеточной зоне. Там же наиболее вероятно возникновение очагов шлакования, которые возникают в тех точках слоя, где теплоотвод ухудшен.

Анализ гидродинамики [1] показывает, что в отдельных точках циркуляционных ячеек скорости могут быть существенно меньше средних (примерно на 30 %). В результате в этих точках существенно ухудшен теплообмен, хотя тепловыделение, которое зависит в основном от равномерности подвода воздуха, примерно одинаковое. Таким образом, учитывая проделанный анализ, отметим, что наиболее опасные точки слоя с позиций возникновения перегрева и начала шлакования находятся в нижней части псевдооживленного слоя на периферии циркуляционных ячеек, что соответствует проведенным экспериментальным исследованиям.

В качестве вывода отметим, что для существенного повышения надежности работы сжигающих устройств, необходимо изменить гидродинамику таким образом, чтобы слой был одинаково подвижен во всех областях и особенно там, где выделяется наиболее количество тепла. Использование закрученного движения газового потока и частиц твердого топлива существенно повышает надежность работы сжигающих устройств.

Литература

1. Торопов Е.В., Кузнецов Г.Ф., Елюхина И.В. Исследование и идентификация неустойчивых тепломассообменных процессов в кипящем слое // *Труды Минского Международного форума ММФ*. – 1996. – С. 105–111.
2. Псевдооживление. Под ред. И.Ф. Девидсона, Д. Харрисона. – М.: Химия, 1974.

ИСПАРИЕНИЕ ЛЕТУЧЕГО КОМПОНЕНТА ИЗ СУПЕРИОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

В.М. Березин

В рамках теории Вагнера, решена задача об испарении летучего компонента из суперионной фазы переменного состава в неизотермических условиях. Предложена схема экспериментальной ячейки для проверки полученной формулы на суперионных фазах типа халькогенидов серебра, для которых теория Вагнера хорошо выполняется.

Граница раздела: полупроводниковое соединение переменного состава – вакуум реализуется при синтезе соединений, выращивании кристаллов и пленок, в различных технологических процессах производства электронных приборов.

Процессы переноса и массообмена на этой границе, во многом определяют стабильность свойств и фазового состава полупроводника. Удобными модельными системами для исследования этих процессов представляются суперионные полупроводниковые фазы переменного состава. Наличие высокой ионной проводимости и широких областей гомогенности у таких фаз позволяет исследовать процесс испарения летучего компонента без изменения фазового состава источника. Причем экспериментальные исследования можно проводить на одном и том же образце с использованием электрохимических методов контроля соотношения компонентов, отличающихся высокой точностью и чувствительностью [1–4]. Примером таких фаз являются галогениды и халогениды меди, серебра: $A_{1+\delta}B^{VII}$, $A_{2+\delta}B^{VI}$.

В данной работе использована модель испарения предложенная в [5], но учтена неизотермичность объема и поверхности образца в процессе испарения.

Кроме того, предлагается методика экспериментальной проверки полученного уравнения для потока летучего компонента.

Рассмотрим, для определенности, соединение вида $A_{2+\delta}B^{VI}$, где B – халькоген, летучий компонент. Соединение такого вида являются полупроводниками n -типа, причем как показывают исследования на халькогенидах серебра, сверхстехиометричные атомы серебра образуют мелкую донорную примесь и уже при комнатной температуре полностью ионизованы [6].

Диссоциативное испарение в вакуум части неметалла с поверхности образца приводит к увеличению соотношения металл/неметалл на поверхности относительно объема. Возникает разность химических потенциалов атомов металла, которая определяет поток однозарядных ионов и электронов с поверхности в объем образца.

Стационарному состоянию соответствует равенство потоков летучего компонента J_{Bn} и ионов металла J_i :

$$2nJ_i = J_{Bn}, \quad (1)$$

где n – число атомов в молекуле испаряющегося неметалла.

В силу условия локальной электронейтральности образца, наряду с потоками ионов возникнет поток электронов J_e , равный потоку ионов J_i .

Электронно-ионные потоки в супериониках хорошо описываются (это подтверждают данные экспериментов) в рамках теории Вагнера [7, 8]. Для потока частиц k -го сорта в направлении OZ в неизотермических условиях эта теория дает [8]:

$$J_k = -\frac{\sigma_k}{q^2} \left[\frac{d}{dz} (\mu_k + q\varphi) + \left(S_k + \frac{Q_k}{T} \right) \frac{dT}{dz} \right], \quad (2)$$

где q – заряд частицы, которой мы положим равным заряду электрона, σ_k – парциальная проводимость ($k = i, e$); μ, φ – химический и электрический потенциалы; S, Q – энтропия и теплота переноса.

Из условия электронейтральности и равенства электронного и ионного потоков находим:

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \sum_{k=i,e} \frac{t_k}{e} \frac{d\mu_k}{dz} - \sum_{k=i,e} \frac{t_k}{e} \left(S_k + \frac{Q_k}{T} \right) \frac{dT}{dz}, \quad (3)$$

где $t_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_i + \sigma_e}$ – числа переноса.

Подставляя (3) в (2) для потока ионов получим:

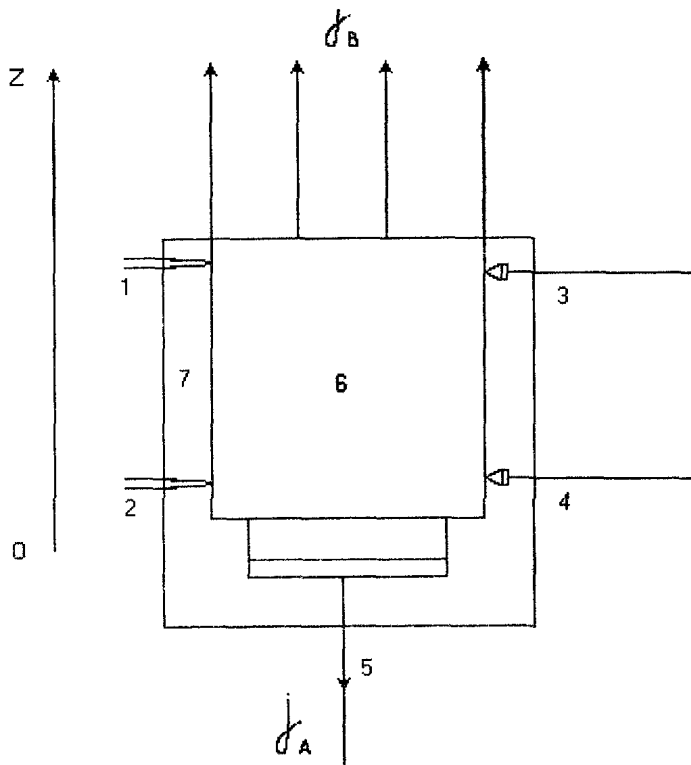
$$J_i = \frac{\sigma_i}{e^2} \left[-\frac{d\mu_i}{dz} + \frac{\sigma_i}{(\sigma_i + \sigma_e)} \frac{d\mu_i}{dz} + \frac{d\mu_e}{(\sigma_i + \sigma_e)} \frac{d\mu_e}{dz} - \frac{\sigma_i}{(\sigma_i + \sigma_e)} \left(S_i + \frac{Q_i}{T} \right) \frac{dT}{dz} - \frac{\sigma_e}{(\sigma_i + \sigma_e)} \left(S_e + \frac{Q_e}{T} \right) \frac{dT}{dz} - \left(S_i + \frac{Q_i}{T} \right) \frac{dT}{dz} \right], \quad (4)$$

Суперионные фазы характеризуются структурной разупорядоченностью в подрешетки подвижного иона: число кристаллографических позиций в элементарной ячейке, в которых могут размещаться ионы N' много больше числа ионов $N \pm \delta$ [9]. При этом химический потенциал ионов: $\mu = \mu_0 + RT \ln(N + \delta)/N'$ практически не зависит от δ , а значит и от z . Таким образом, можно положить $d\mu_i/dz = 0$, тогда уравнение (4) с учетом (1) дает для потока испаряющегося компонента:

$$J_{Bn} = \frac{\sigma_i \sigma_e}{2n(\sigma_i + \sigma_e) e^2} \left[\frac{d\mu_e}{dz} + \left(S_i - S_e + \frac{Q_i}{T} - \frac{Q_e}{T} \right) \frac{dT}{dz} \right], \quad (5)$$

Следует заметить, что σ_e вообще говоря зависит от координаты z ($\sigma_e \sim \delta$). Однако, как показывают измерения [2], относительное изменение состава в результате испарения невелики, поэтому изменением σ_e с z можно либо пренебречь, либо брать усредненные значения по образцу. Что касается ионной проводимости σ_i , то она в пределах погрешности измерений не зависит от δ для халькогенидов серебра и очень слабо изменяется с δ в халькогенидах меди [6, 10].

Таким образом, обеспечивая постоянство градиентов химического потенциала электронов и температуры вдоль направления испарения, можно обеспечить постоянство потока испаряющегося компонента.



Контроль величины потока имеет важное значение в технологиях вакуумного напыления, молекулярно-лучевой эпитаксии и т.п.

Следует заметить, что формула (5) допускает экспериментальную проверку феноменологических расчетов. На рисунке изображена схема измерительной ячейки, с помощью которой можно это сделать. Для этого надо измерить разность ЭДС гальванических ячеек между зондами 1, 3 и 2, 4 расположенными на расстоянии Δz и оценить градиент μ_e :

$$\frac{d\mu_e}{dz} \cong \frac{e\Delta E}{\Delta z}. \quad (6)$$

Градиент температуры оценивается по показаниям термопар 1 и 2 в бессточном режиме.

Величины теплот переноса и энтропий рассчитываются по данным измерений коэффициентов электронной и ионной термоЭДС [11]:

Схема измерительной ячейки для проверки формулы (5): 1, 2 – термопары; 3, 4 – ионные зонды с проводимостью по ионам металла, например Ag/AgI, Cu/Bg и т.д.; 5 – ионный электрод для отвода ионов металла; 6 – образец; 7 – герметичная ячейка

$$\alpha_i = \frac{1}{e} \left(S_i + S^0 + \frac{Q_i}{T} \right), \quad (7)$$

$$\alpha_e = \frac{1}{e} \left(S_e + \frac{Q_e}{T} \right), \quad (8)$$

где S^0 – величина стандартной удельной энтропии подвижного элемента.

ТермоЭДС измеряется соответственно зондами 1, 2 и 3, 4, α_i и α_e вычисляются по закону Зеебека.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал / Проект Г 2001 179.

Литература

1. Wagner C. Investigation of Silver Sulfide // *J. Chem. Phys.* – 1953. – V. 21. – № 10. – P. 1819–1827.
2. Rickert H. *Electrochemistry of Solids. An Introduction.* – Berlin: Springer, 1982. – 240 p.
3. Горбачев В.В. Полупроводниковые соединения $A_2^I B^{VI}$. – М.: Металлургия, 1980. – 132 с.
4. Березин В.М., Карих П.И. Испарение селена с поверхности стимулированное полиморфным превращением // *Неорганические материалы.* – 1993. – Т. 29. – № 5. – С. 715–716.
5. Березин В.М. Испарение халькогена из суперионных фаз типа $\alpha\text{-Ag}_{2+\delta}\text{S}$ // *Изв. АН СССР. Неорганические материалы.* – 1991. – Т. 27, № 2. – С. 231–233.
6. Miyatani S. Electronic and Ionic Conduction in $(\text{Ag}_x\text{Cu}_{1-x})_2\text{Se}$ // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1973. – V. 34, № 2. – P. 423–432.
7. Jokota J. On the Theory of Mixed Conduction with special Reference to the Conduction in Silver Sulfide Group Semiconductor // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1961. – V.16, № 11. – P. 2213–2224.
8. Wagner C. The thermoelectric Power with Compounds Involving Ionic and Electronic Conduction // *Prog. Solid State Chem.* – 1972. – V. 7. – P. 1–37.
9. Чеботин В.Н., Перфильев М.В. *Электрохимия твердых электролитов.* – М.: Химия, 1978. – 312 с.
10. Чеботин В.Н., Конев В.Н., Березин В.М. Химическая диффузия в нестехиометрических твердых растворах $(\text{Cu}_{1-x}\text{Ag}_{x+\delta})_2\text{X}$ ($X = \text{S}, \text{Se}, \text{Te}$) // *Изв. АН. СССР. Неорганические метериалы.* – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 1462–1466.
11. Shahi K. Transport studies on Superionic Conductors // *Phys. Stat. Sol. (a).* – 1977. – V.41, № 1. – P. 11–41.

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ КОНСТРУКЦИОННОЙ ПРОЧНОСТИ ТКАНЕВЫХ КОМПОЗИТОВ

С.Б. Сапожников

Generalized variant of nonlocal kinetic approach to the evaluation of fibrous composites structural strength was offered. Size of area for averaging («smearing») the stresses in the region of concentrator is determined as the inefficient length of thread, which depends on the level of mechanical-chemical interaction of matrix and surface of filament. Inefficient length is defined, as a rule, experimentally and greatly depends on climatic parameters of ambience. Element of layered structure with the any form concentrator substitutes as a group of finite elements with sizes, equal of inefficient length of thread. Under model loading up to its fracture there is analysis of stress-strain-state kinetics, accumulation of dispersed microdamaging into each finite element, fiber rotation at the large strains. Proposed nonlocal approach is prepared in the program for PC, using finite element method with variable elastic parameters of material on each step of loading. Comparison of experimental and calculated fracture stresses of the plates made of different composites (carbon-, glass-, organic fibers and hybrids) with complex stacking sequences and sharp (crack-like) notches was conducted. There is satisfactory correspondence.

В обзорных работах двадцатилетней давности [1, 2] по расчетной оценке конструкционной прочности композитов отмечено, что требуют решения две основные проблемы: назначение размера структурного параметра и выбор метода учета прогрессирующего накопления рассеянных микроповреждений материала в процессе нагружения вплоть до разрушения. В работах последнего (август 2001 г.) VIII Всероссийского Съезда по теоретической и прикладной механике [3] с широким международным участием много внимания было уделено *нелокальным подходам* к оценке прочности конструкционных материалов с надрезами, развивающим идеи, заложенные более двадцати лет назад, но обобщающих решений предложено не было. В данной работе сделана попытка восполнить указанный пробел для одного класса композитов – армированных волокнами пластиков.

1. Объект исследования

Рассмотрен элемент тонкостенной конструкции – многослойная пластина из композитного материала со сквозным вырезом при пропорциональном нагружении вплоть до разрушения.

2. Постановка задачи

Определить предельное значение параметра нагружения в момент разрушения, которое является нарушением устойчивости деформирования конструкции.

3. Метод решения

Экспериментальное исследование конструкционной прочности композитов (пластины с вырезами при растяжении) и расчетный метод конечных элементов (МКЭ), реализующий способ переменных параметров упругости в инкрементальной постановке с учетом изменения *секущих* модулей в каждом конечном элементе (КЭ) [4].

Основные допущения:

- в слоях материала происходит накопление рассеянных по объему микроповреждений, которые не залечиваются;
- повреждения происходят вдоль волокон, поперек и на сдвиг в соответствии с нормальным законом рассеяния локальных характеристик прочности с известным средним и коэффициентом вариации, причем накопление повреждений ведет к снижению локальной жесткости материала;
- слои скреплены идеально и деформируются совместно;
- расчет кинетики деформирования элемента конструкции с вырезом производится с помощью МКЭ и метода последовательных приближений по изменению микроповреждений в слоях, функция перемещений в КЭ – линейная, обеспечивающая *автоматическое* осреднение напряжений по его объему;

- разрушение конструкции понимается как неограниченное возрастание перемещений точек приложения нагрузки – потеря устойчивости деформирования;
- размер конечного элемента равен неэффективной длине нити в слоях, который определяется расчетом или экспериментально на образцах-полосках и зависит от соотношения прочностных характеристик матрицы и волокна с учетом структуры композита: объемной доли, степени искривления волокон и нитей (для тканевых композитов).

Отмеченное курсивом допущение является конкретным предметом обсуждения данной статьи на примере армированных полимеров (стекло-, угле- и органопластиков), так как от размера конечного элемента зависит величина напряжений и деформаций в нем, обеспечивая более позднее (в смысле нагрузки) или более раннее его разрушение. Более того, при наличии острых надразов (трещин) уменьшение до нуля размера конечного элемента ведет к бесконечному возрастанию напряжений в нем по причине сингулярности задачи. В связи с этим предлагаемый подход относится к классу нелокальных, то есть «размазывающих», усредняющих переменное напряженно-деформированное состояние на определенной заранее площадке. Таким образом, оценка прочности проводится на основе теории микрооднородных напряженных состояний [4].

Основная проблема этой теории – обоснование размера площадки осреднения, которая была сравнительно корректно решена лишь для волокнистого однонаправленного композита с использованием понятия о представительном объеме материала, а для слоистого или армированного тканью, объемно армированного – нет. Представляется, что использование понятия о неэффективной длине нити может оказаться полезным.

В классической работе Келли и Тайсона [5] показано, что длина участка передачи нагрузки l_c от свободного (или разорванного) конца волокна определяется его диаметром d и соотношением предела прочности волокна на растяжение σ_{fb} и предела текучести связующего на сдвиг τ_{mT} :

$$l_c = 0,5d \cdot \sigma_{fb} / \tau_{mT}. \quad (1)$$

Здесь наиболее критичным (в смысле экспериментального определения) является τ_{mT} , поскольку, во-первых, в промежутке между волокнами матрица имеет вид тонкой пленки и ее свойства существенно отличаются от свойств матрицы в макрообъеме и, во-вторых, промышленно выпускаемые полимерные матрицы, как правило, не обладают заметной пластичностью при кратковременном нагружении.

В работах Аутвотера (цит. по [6]) отмечается, что в формуле (1) необходимо использовать вместо τ_{mT} напряжения трения μp , определяемые коэффициентом трения μ и давлением p на поверхности волокно-матрица, так как отслоение на поверхности раздела всегда будет иметь место. Так как давление p определяется химической усадкой, изменением температуры и влажности (а в общем – дилатационными факторами) и зависит от объемной доли волокон согласно обратно пропорциональной зависимости, то и неэффективная длина l_c будет также снижаться с увеличением объемной доли волокон.

К аналогичному выводу, но с позиции предположения о высокоэластических свойствах матрицы пришли авторы работы [6], где отмечается, что

$$l_c \sim d \cdot (G_m / G_{m\alpha}) (E_f / E_m) (t/d)^{1/2}, \quad (2)$$

где G_m – модуль сдвига матрицы; индекс α соответствует состоянию высокоэластичности; E_f и E_m – модули упругости волокна и матрицы; t – толщина матрицы на поверхности волокна, которая определяется для однонаправленного композита величиной объемной доли волокон V по зависимости типа $(t/d)^{1/2} \sim (1-V)$. В [6] для модельного стеклопластика на основе полиэфирной смолы ПН-1 экспериментально доказано, что $l_c/d \sim (t/d)^{1/2}$.

Рассмотрим стеклотекстолит – пластик, армированный стеклотканью гладкого плетения, в котором имеется две системы ортогональных нитей, переплетенных между собой по схеме «полотно», «саржа», «сатин» и др. В таком материале нить представляет собой однонаправленный или слегка крученный микропластик с высокой объемной долей волокон и тонкими прослойками матрицы, в то время как между нитями имеется довольно значительное пространство, заполненное лишь матрицей.

На примере стеклотекстолита СТЭТ можно привести конкретные цифры, типичные для промышленно выпускаемых материалов: переплетение полотняное, толщина монослоя ткани $2h = 90-100$ мкм, ширина нити $b = 350-400$ мкм, шаг нитей $S = 600-620$ мкм, матрица – эпоксидно-фенольная смола горячего отверждения. Другими словами, при виде сверху незаполненные промежутки – межнитевое пространство – может иметь ширину $a = 200-220$ мкм (рис. 1).

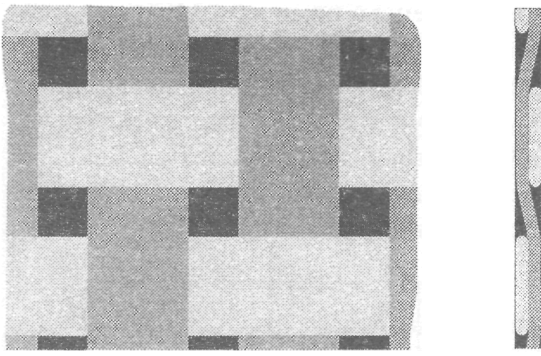


Рис. 1. Структура стеклотекстолита

В этом случае формула (1) преобразуется к виду

$$l_c^* = 0,5b \cdot \sigma_c / \tau_{mt}. \quad (3)$$

Ширина нити b почти в 40 раз превышает диаметр волокна d в стеклопластике, а предел прочности нити меньше предела прочности волокна лишь в 1,5–2 раза, поэтому длина l_c^* превышает l_c не менее чем в 20 раз.

Для микропластика на основе стеклянных волокон при комнатной температуре $\sigma_c \approx 1010$ –1170 МПа (получено пересчетом из предела прочности стеклотекстолита 370–390 МПа в микропластик, площадь сечения которого в три раза меньше), а $\tau_{mt} = 65$ –80 МПа (получено из испытаний стеклотекстолита на растяжение под углом 45° к нитям основы). В этом случае площадка текучести на диаграмме напряжение–деформация соответствует напряжению текучести на границе связующее – нить [4]. Расчет по формуле (3) дает $l_c^* = 2,5$ –3,3 мм.

Эксперименты, проведенные на стеклотекстолите СТЭФ, дали в среднем $l_c^* = 2,6$ мм (см. рис. 3а). В экспериментах разрушенный образец опускали в тушь, после чего тушь с поверхности стирали мокрым тампоном. Частицы туши оставались в узких щелях между нитями и матрицей в зоне разрушения и давали возможность по затемнению фиксировать зону выдергивания нитей при наблюдении в проходящем свете.

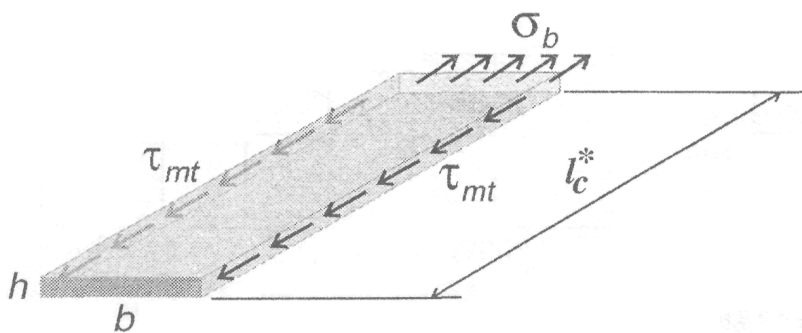
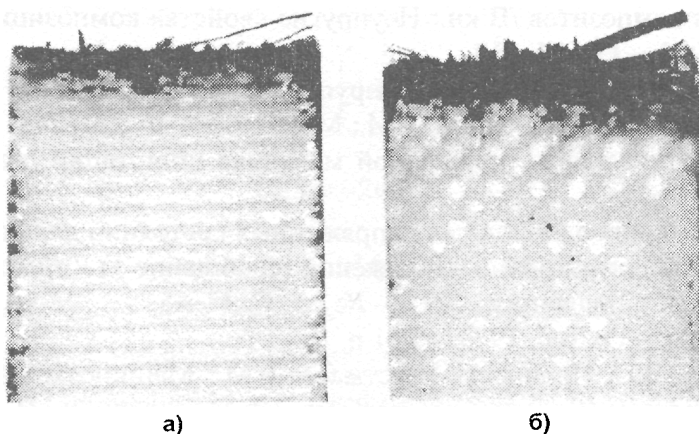


Рис. 2. Схема передачи нагрузок

При повышенной до 100°C температуре прочность микропластика снижается до 700–750 МПа (на 30%), а матрицы на сдвиг – до 32–40 МПа (на 48%), то есть длина l_c^* должна возрасти до 3,6–4,3 мм. Эксперименты показали, что в среднем $l_c^* = 3,8$ мм (рис. 3б).

Увеличение неэффективной длины в 1,5 раза должно привести к увеличению конструкционной прочности приблизительно в $\sqrt{1,5}$, то есть на 22% [7]. Однако предел прочности σ_c стеклотекстолита снизился при нагреве на 100°C на 25%. Другими словами, надрезанные образцы при комнатной и повышенной температурах должны мало отличаться по величине разрушающих нагрузок.

Для проверки полученных оценок были проведены экспериментальные и расчетные исследования напряжений разрушения пластин из различных композитов с симметричными боковыми трещиноподобными

Рис. 3. а) 20°C ; б) 100°C . Ширина образцов 10 мм

надрезами при действии растягивающих нагрузок. Расчеты проведены с помощью МКЭ по методике [4], в которую закладывали механические характеристики монослоев и величину неэффективной длины нити l_c^* для расчета размера конечного элемента. На рис. 4–7 приведены данные для стекло-, угле-, органопластиков и гибридов различных структур. Значки – эксперимент, линии – расчет. В качестве вывода можно отметить их вполне удовлетворительное соответствие.

Таким образом, можно заключить, что неэффективная длина нити может являться структурным параметром, определяющим конструкционную прочность композита.

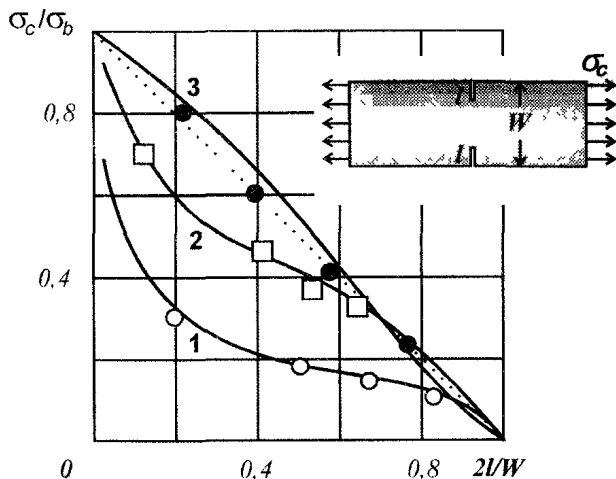


Рис. 4. $W = 40$ мм, органоэпоксидный клей 10Т:

1 – $[(0/90)_2/0]_s$; 2 – $[(90/0)_2/90]_s$; 3 – $[(\pm 45)_7]_T$, $l_c^* = 0,9$ мм

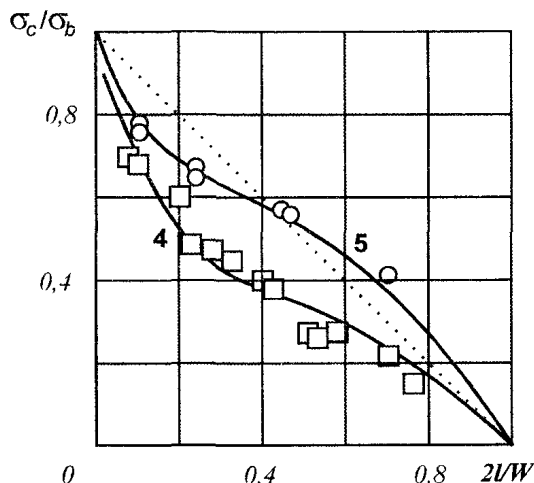


Рис. 5. $W = 20$ мм, стеклотекстолит СФ2-50Г:

4 – $[0]_4$; 5 – $[(\pm 45)_{4s}]_s$, $l_c^* = 2,8$ мм

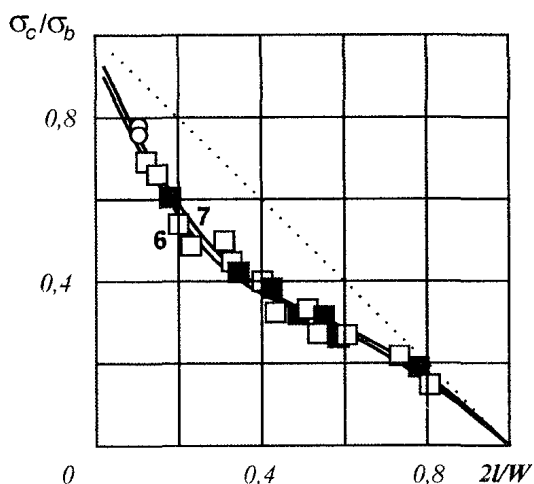


Рис. 6. $W = 20$ мм, стеклотекстолит СТЭТ:

6 – $[0]_{10}$, 20°C , $l_c^* = 2,8$ мм; 7 – $[0]_{10}$, 100°C , $l_c^* = 3,8$ мм

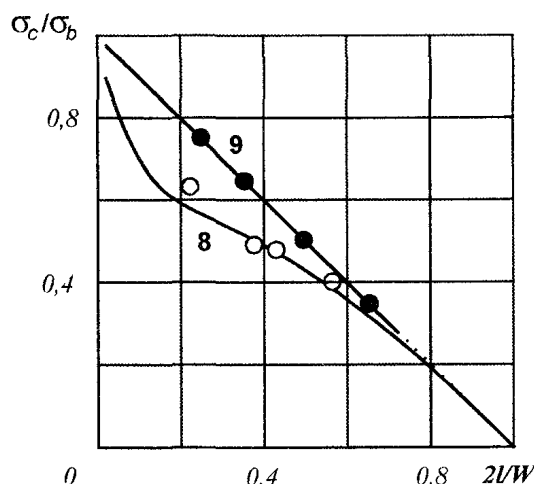


Рис. 7. $W = 20$ мм, гибриды КМУ-4Э и органоэпоксидный клей 12Т:

8 – $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]_s$; 9 – $[90^\circ/90^\circ/90^\circ/\pm 45^\circ]_s$, $l_c^* = 0,9$ мм

Литература

1. Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов /В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – С. 104–139.
2. Смит К. Ограничения в применении подходов механики разрушения к композитам / В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – С. 221–248.
3. VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (аннотации докладов). – Пермь, 22–29 августа 2001. – 580 с.
4. Сапожников С.Б. Разработка теории микроднородных напряженных состояний для оценки прочности армированных пластиков с концентраторами напряжений (сообщение 1) // *Динамика, прочность и износостойчивость машин*. – Челябинск: 1995. – № 1. – С. 35–45.
5. Kelly A. *Strong Solids*. Clarendon Press. – Oxford, 1973. – 261 p.
6. Немец Я., Серенсен С.В., Стреляев В.С. Прочность пластмасс. – М.: Машиностроение, 1970. – 335 с.
7. Сапожников С.Б. Расчет на прочность элементов конструкций из неупругого поликристаллического материала с трещинами // *Прочность машин и аппаратов при переменных нагрузках: Тематический сборник научных трудов*. – Челябинск: ЧГТУ, 1991. – С. 75–81.

ПЛАНИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОДНОВРЕМЕННОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ

И.В. Елюхина

В работе методами математического моделирования проведено планирование оптимального вискозиметрического эксперимента, позволяющего судить о корректности данных прямых измерений.

Введение. Экспериментальные данные, получаемые разными авторами с помощью основного метода исследования вязкостных свойств агрессивных и высокотемпературных сред, а именно: метода крутильных колебаний Швидковского Е.Г. [1], являются достаточно противоречивыми (см., например, данные по вязкости жидкого железа (рис. 1), полученные в подавляющем большинстве именно данным методом при декларируемой авторами погрешности менее 5 %).

В связи с этим разработана методика проверки корректности данных прямых измерений и их последующей обработки представляется весьма своевременной.

В одном из таких методов заключение о получении надежной оценки вязкости жидкости выводится из сравнения известного из независимых источников значений плотности и оцененного при одновременном определении вязкости и плотности среды из вискозиметрического уравнения. Идея метода появилась уже достаточно давно [3, 4], но до сих пор, насколько это известно, не реализована на практике.

Основы теории и проблематика вопроса одновременного восстановления вязкости и плотности. Вискозиметрическое уравнение [1], связывающее свойства ньютоновской среды с наблюдаемыми в эксперименте параметрами колебаний, можно представить в виде

$$F = F = \left[p \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) - 2p_0 \right] K + i \cdot \left[q \cdot \left(1 - \frac{p_0^2 + q_0^2}{p^2 + q^2} \right) \right] K - (L_1 + L_2) = 0, \quad (1)$$

$$L_1 = -2\nu M \beta \frac{J_2(\beta)}{J_1(\beta)}, \quad L_2 = a \cdot \frac{M k^2}{H \nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{th(\theta_n H)}{\mu_n^2 \theta_n^3}, \quad (2)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $p = \delta / \tau$ – коэффициент затухания колебаний; $q = 2\pi / \tau$ – циклическая частота; $p_0 = \delta_0 / \tau_0$; $q_0 = 2\pi / \tau_0$; δ и τ – логарифмический декремент и период колебаний заполненного жидкостью цилиндра соответственно; τ_0 и δ_0 – период и логарифмический декремент собственных установившихся затухающих колебаний пустой системы; K – момент инерции всей подвешенной системы без жидкости относительно оси цилиндра; M – масса среды; ν – кинематическая вязкость; $\beta = R\sqrt{k/\nu}$; $k = p + i \cdot q$; R – внутренний радиус цилиндра; H – полувысота цилиндра;

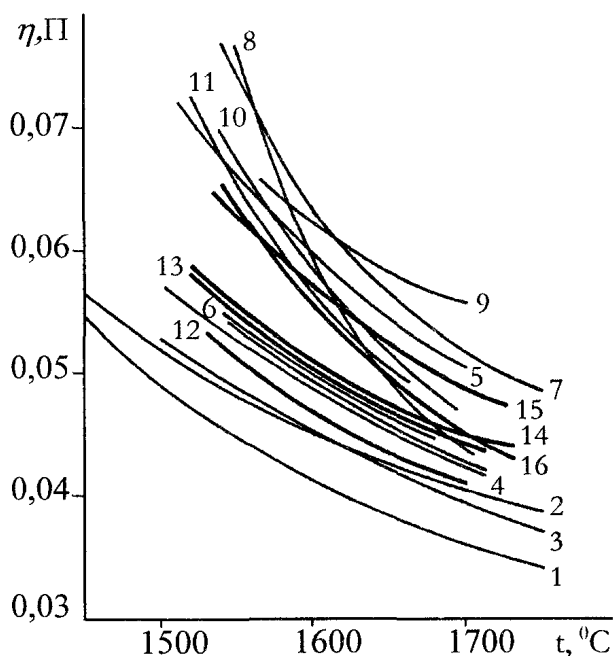


Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры для жидкого железа
1, 2 ... 16 – см. номера литературных источников в [2]

$\theta_n^2 = \mu_n^2 - k/v$; μ_n – характеристические числа, определяемые из уравнения $J_1(\mu_n R) = 0$; J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка; L_1, L_2 – функции трения, отражающие роль сил трения на боковой поверхности цилиндра и его торцах соответственно; $a = 4$ – при учете контакта жидкости с крышкой; $a = 2$ – в случае свободной поверхности.

Неизвестные параметры – вязкость ν и плотность ρ жидкости – определим методами *параметрической идентификации* [5] из условия минимума функции качества вида

$$f(\nu, \rho) = \sqrt{c_1 \cdot \text{Re}^2(F) + c_2 \cdot \text{Im}^2(F)}, \quad (3)$$

где c_1, c_2 – весовые коэффициенты; Re, Im – действительная и мнимая части от функции F .

Детальное обсуждение возможности одновременной оценки вязкости и плотности ньютоновской жидкости из измеряемых в эксперименте параметров крутильных колебаний цилиндра проведено в *работе Ньюводта Дж., Сенгерса Дж. и Кестина Дж.* [4]. Но полученные результаты являются лишь хорошим *начальным приближением* в силу многих *факторов*, в частности:

1) исследования проведены в приближении двух частных случаев большого и малого цилиндров и в этом смысле *не являются универсальными*;

2) принятая для исследования *точность измерения* периода и декремента *не всегда может быть реализована* практически;

3) при определении ошибок измерения плотности и вязкости были приняты во внимание *только ошибки прямых измерений периода и декремента* затухания подвесной системы;

4) обычно в вискозиметрической практике реализуются значения радиуса цилиндра $R \sim 0,5 - 1,5$ см с целью повышения качества эксперимента, например, для обеспечения изотермичности при исследовании металлических расплавов. В [4] *данный диапазон значений радиуса является нерабочим* при точности измерений $\overline{\Delta\tau} \sim 10^{-5}$ и $\overline{\Delta\delta} \sim 10^{-6}$, где знак $\overline{\quad}$ означает, что значения даны в относительных единицах.

Таким образом, достаточно *актуальным* является вопрос *разработки методов одновременного измерения вязкости и плотности* ньютоновских жидкостей в эксперименте по Швидковскому Е.Г., которые были бы свободны от указанных выше недостатков.

Анализ условий, обеспечивающих надежную оценку характеристик среды. Причинами, затрудняющими решение задачи, являются недостаточная точность измеряемых в эксперименте величин, большая чувствительность к их изменению некоторых оцениваемых параметров и, как следствие, овражистый характер функции качества (3).

Проведенные расчеты показали *криволинейный тип оврага*, ось которого слегка искривлена и составляет небольшой угол с направлением градиента плотности. Исходя из качественного и количественного анализа поведения функции $f(\nu, \rho)$ (3) на плоскости (ν, ρ) установлено, что локальное направление дна оврага, т.е. кривой, где $f'_\rho(\nu(\rho), \rho) = 0$, в пределах точности численных методов можно считать совпадающим с мгновенным значением производной

$\rho'_\nu = \overline{\frac{\partial \rho}{\partial \nu}} = \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu^*}{\rho^*}$ в точке (ν^*, ρ^*) , где индекс * соответствует значению величины в некоторой исследуемой точке).

Существование оврага связано с видом вискозиметрического уравнения (1), где плотность входит только в *торцевые слагаемые* L_2 в функции трения и не содержится в L_1 (2), отражающем роль сил трения на боковых поверхностях вискозиметра. В случае только одного торцевого слагаемого ρ'_ν увеличивается приблизительно в два раза, и несколько увеличивается чувствительность оцениваемых характеристик ρ'_x и ρ'_ν к измеряемым величинам x . Здесь $\rho'_x = \overline{\frac{\partial \rho}{\partial x}} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{x^*}{\nu^*}$; $x = \tau, \tau_0, \delta, M, R$ или K и

$$\rho'_x = \nu'_x \rho'_\nu. \quad (4)$$

Проанализируем изменение чувствительности ρ'_ν в зависимости от изменения параметров установки и колебаний. Очевидно, что значение ρ'_ν зависит в значительной степени от отношения H/R , а при варьировании параметрами τ_0 и K наблюдается слабый поворот дна оврага.

Для наглядности изобразим графически (рис. 2) поворот оси оврага в зависимости от различных отношений вклада от торцевых и боковых поверхностей в суммарный момент сил трения.

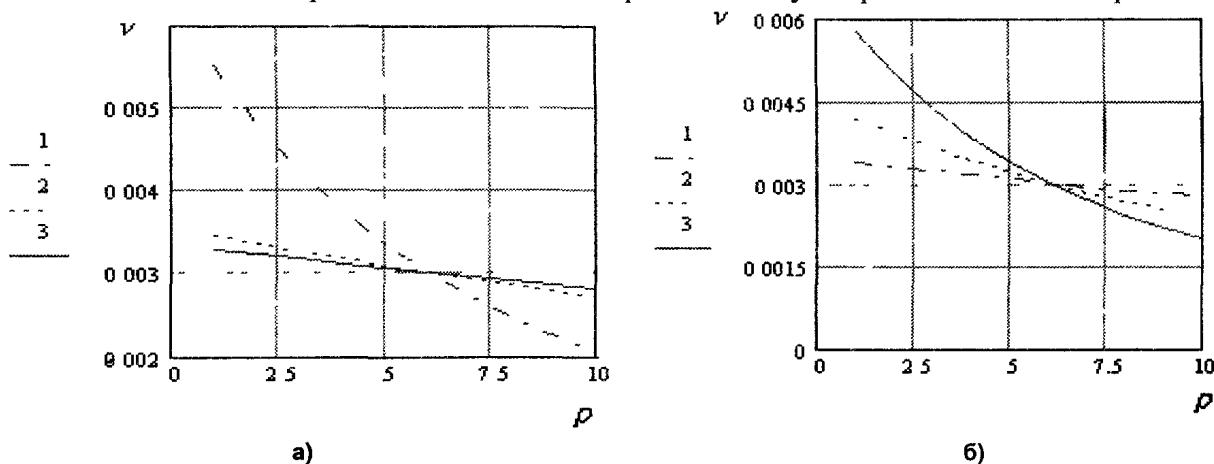


Рис. 2. Зависимость положения оси оврага от параметров установки:
 а) от массы: $R = 1$; 1 – $M = 50$; 2 – $M = 100$; 3 – $M = 160$; б) от радиуса: $M = 40$; 1 – $R = 0,7$; 2 – $R = 1$; 3 – $R = 1,3$; $\rho = 6$; $\nu = 0,003$; $\tau_0 = 5$; $K = 120$ (значения параметров здесь и ниже приведены в СГС)

Пределы изменения параметров $M, R, K, \tau_0, \delta_0, \rho, \nu$ в настоящей работе были приняты следующими:

- 1) M выбирается из условия: $2H \sim (1...10) \cdot R$;
- 2) $R \sim 0.5...1.5$ см;
- 3) $K \sim 20...200$ г·см²;
- 4) $\tau_0 \sim 1...10$ с;
- 5) $\delta_0 \sim 0.001...0.004$;
- 6) $\rho \sim 1...20$ г/см³;
- 7) $\nu \sim 0.001...0.05$ ст.

Ошибки оцениваемых параметров свяжем с ошибками измеряемых в эксперименте величин с помощью соотношения, имеющего, например, для вязкости, вид

$$del \nu = \frac{\partial \nu}{\partial \tau} \cdot \overline{\Delta \tau} + \frac{\partial \nu}{\partial \tau_0} \cdot \overline{\Delta \tau_0} + \frac{\partial \nu}{\partial \delta} \cdot \overline{\Delta \delta} + \frac{\partial \nu}{\partial K} \cdot \overline{\Delta K} + \frac{\partial \nu}{\partial M} \cdot \overline{\Delta M} + \frac{\partial \nu}{\partial R} \cdot \overline{\Delta R}, \quad (5)$$

где $\overline{\Delta x}$ – относительная точность измерения какого-либо параметра. Для расчетов принимаем точность измеряемых коэффициентов, обычно реализуемую в экспериментах: $\overline{\Delta \tau} = 0.0001$, $\overline{\Delta \tau_0} = 0.0001$, $\overline{\Delta \delta} = 0.001$, $\overline{\Delta K} = 0.01$, $\overline{\Delta M} = 0.001$, $\overline{\Delta R} = 0.01$.

При существенном изменении значения производной $\nu'_x \cdot \overline{\Delta x}$ (например, на 1 %) происходит заметный сдвиг оврага и, следовательно, минимума функции качества, соответствующего оцениваемым вязкости и плотности. На рис. 3 проиллюстрировано данное смещение на примере ошибки в измерении K . Здесь овраг 1 соответствует $K = 150$ (истинному значению), 2 – $K = 152$, 3 – $K = 154$; $\rho = 6$, $\nu = 0.003$, $M = 50$, $R = 1$, $\tau_0 = 5$.

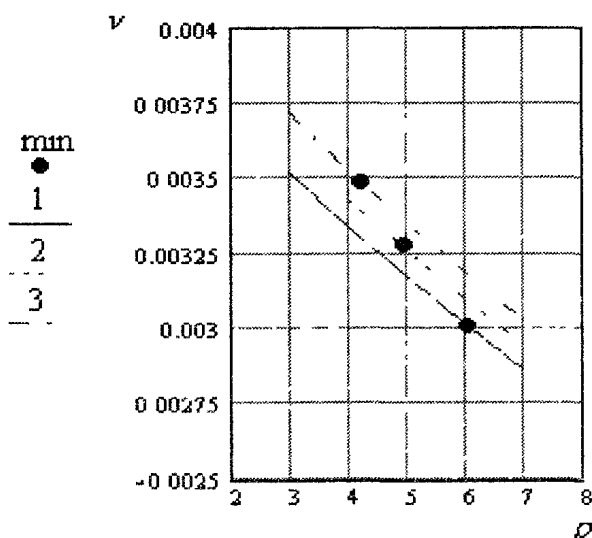


Рис. 3. Смещение оврага в результате ошибки измеряемых параметров

Изучение пределов изменения чувствительности вязкости и плотности для практически реализуемой выборки параметров показало, что чувствительность плотности к вязкости ρ'_ν изменялась в среднем в пределах от 1 до 100, и в связи с этим изменялись значения ρ'_x (4).

Результаты расчетов ν'_x для двух торцевых поверхностей приведены в таблице. Значения чувствительности по периоду колебаний τ в пределах 1 % совпадают со значениями чувствительности по τ_0 , и поэтому этот параметр отдельно не рассматривается.

Чувствительность вязкости к измеряемым в эксперименте параметрам

$\overline{\frac{\partial v}{\partial \rho}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial \delta}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial K}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial M}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial R}}$	$\overline{\frac{\partial v}{\partial \tau_0}}$
Интервал изменения	менее 1	2-2.5	1.5-2.5	2-3.5	до 1000

Обратим внимание на те *параметры*, которые имеют самую *низкую точность измерений*. Это, прежде всего, момент инерции K и радиус тигля R , точность измерения которых не превышает 1 %. Из таблицы видно, что максимальная ошибка в определении вязкости, вносимая данными параметрами может достигать 4-6 %. Отклонение остальных параметров (исключая пока из рассмотрения τ и τ_0) не оказывает существенного влияния на точность оценивания вязкости и плотности.

Из анализа функций качества, построенных только по *действительной* или только по *мнимой частям* вискозиметрического уравнения (1), т.е.

$$f_1(v, \rho, \tau, \delta) = |\operatorname{Re}(F)| \text{ и } f_2(v, \rho, \tau, \delta) = \operatorname{Im}(F), \quad (6)$$

установлено, что чувствительности вязкости к измеряемым в эксперименте параметрам, рассчитанные через функции (6) различны на несущественную величину, кроме чувствительности к периодам τ и τ_0 , которая может быть в сотни раз выше для мнимой части по сравнению с действительной. При определении из вискозиметрической функции (1) только вязкости среды требуется одно уравнение (из двух (6)), наиболее подходящее для этой цели в конкретной задаче, а при оценке двух параметров его необходимо дополнить вторым соотношением (например, в [4] проводится совместное решение для f_1 и f_2 (6)).

Разработка методов одновременного определения вязкости и плотности ньютоновской среды. Рассмотрим *методы*, которые можно предложить, исходя из результатов проведенного анализа, для *решения задачи одновременного определения вязкости и плотности*.

1 Пусть мы решаем задачу, *аналогичную* рассмотренной в работе [4], т.е., учитывая отклонение от истинных значений только периода и декремента затухания колебаний, определяем области одновременной оценки вязкости и плотности при ошибке менее 1 %.

Учтем тот факт, что нахождение свойств среды из действительной части вискозиметрического уравнения представляет собой определение по «декременту затухания», а из мнимой части – «по периоду колебаний» (иначе говоря, v'_τ принимает высокие значения только при расчете через f_2 (6)). Если выбрать две экспериментальные точки, соответствующие различным наборам параметров $M, R, K, \tau_0, \delta_0, \rho, v$ и провести расчет *только по действительным частям* уравнений, то можно получить соответствующие решения с ошибкой менее 0,1 % и по вязкости, и по плотности. Достаточно простым для практической реализации представляется выбор точек с различными значениями масс или периодов τ_0 . Лучший поворот оси оврага, исходя из анализа чувствительности, обеспечивается вариацией массы, поэтому остановимся именно на этом варианте.

Рассмотрим планирование данного вискозиметрического эксперимента в терминах теории чувствительности. На множестве всех допустимых выборок измерений определим точки, минимальное число которых (а именно, 2) обеспечивает однозначное, устойчивое и надежное решение рассматриваемой задачи. Воспользуемся условием (см., например, [6])

$$\left| \frac{\frac{\partial \delta^1}{\partial \rho} \frac{\partial \delta^1}{\partial v}}{\frac{\partial \delta^2}{\partial \rho} \frac{\partial \delta^2}{\partial v}} \right| \rightarrow \max, \quad (7)$$

т.е. $\left| \frac{\partial \delta^1}{\partial v} \frac{\partial \delta^2}{\partial v} \left(\frac{\partial \delta^1}{\partial \rho} - \frac{\partial \delta^2}{\partial \rho} \right) \right| \rightarrow \max$, где ^{1,2} – номера измерений.

Таким образом, оси оврага должны расходиться на *максимально возможную величину*, что также подтверждается и качественным анализом. Так, если массы принимают *минимально воз-*

возможные значения (т.е. когда сильнее влияние торцевых поверхностей), тогда оси оврага находятся близко друг к другу, дно оврага становится шире, и большая поверхность $f(v, \rho)$ имеет значения, близкие по порядку к минимальному. Подобная ситуация возникает и в случаях:

1) использования при расчетах действительной и мнимой частей функции качества для одной экспериментальной точки;

2) непрерывного изменения массы, т.е. построения функций вида $\tau = \tau(M)$, $\delta = \delta(M)$. Здесь, к тому же, существует большая возможность накопления ошибок измерения массы, периодов τ , τ_0 и декремента.

При использовании значений масс, различных на максимально возможную величину, средняя чувствительность ρ'_v будет больше, и ошибка в определении ρ будет сильнее превосходить ошибку в определении v . Но в связи с тем, что оценивание ρ при максимально различных массах осуществляется со значительно большей точностью, ошибка в значении плотности здесь будет ниже ошибки при расчете по близким значениям масс.

2. Теперь учтем зависимость ошибок оцениваемых параметров от ошибок всех измеряемых в эксперименте величин, т.е. воспользуемся формулой (4). Напомним, что в большей степени ошибки в одновременном измерении ρ и v связаны с ошибками в опытных значениях параметров установки: момента инерции K и радиуса тигля R , а $v'_{\tau_0} \cong v'_{\tau}$. В связи с этим кривые, определяющие 1%-ную границу в [4], описывают границу в среднем до 5 % при измерении v и до $5 \cdot \rho'_v$ (т.е. до нескольких сотен) % при оценке ρ .

Учтем, что в экспериментальных значениях характеристик колебаний заключены некие эффективные значения радиуса и момента K . Достаточно очевидным в данном направлении представляется метод, основанный на определении 4-х параметров (v, ρ, R, K) из нескольких действительных частей вискозиметрических уравнений, построенных для различных экспериментальных точек ($\tau, \tau_0, \delta, \delta_0, M$) с одинаковым набором (R, K).

Выбор точек осуществим как в терминах матрицы Якоби, так и путем численного анализа поведения функций чувствительности для различных выборок измеряемых параметров. Математическое моделирование вискозиметрического эксперимента для ньютоновской жидкости показало, что использование комплекса параметров с максимально возможно различными массами и периодами τ_0 (т.е. четыре точки с M_{\min}, M_{\max} при $\tau_{0\min}$ и M_{\min}, M_{\max} при $\tau_{0\max}$) позволяет решить данную задачу оптимально в виду поворота оврага в различных плоскостях пространства (v, ρ, R, K).

Теперь обратимся к численной реализации указанных выше алгоритмов. Функция качества $Z(v, \rho, R, K) = \sum_j [Re(F_j)]$ (индекс j соответствует номеру экспериментальной точки) имеет четырехмерный овраг в пространстве (v, ρ, R, K), и поэтому особое внимание следует обратить на разработку методов минимизации, приемлемых для данной овражной функции. Оптимальное значение функции $Z(v, \rho, R, K)$ при решении настоящих задач определялось путем комбинированного поиска на основе метода конфигураций Хука–Дживса, предусматривающего локальное изучение поверхности отклика с помощью пробных шагов и ускоренное движение вдоль оси оврага, а также метода случайного поиска и метода исключения областей, в частности, сеточного метода поиска.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе на основе детального анализа в терминах теории чувствительности и оптимального планирования эксперимента разработаны методы одновременного определения вязкости и плотности из вискозиметрического уравнения Швидковского Е.Г., позволяющие при имеющейся точности измерений сделать несущественными ошибки в измерениях:

1) периода (приводящие к ошибкам в значениях вязкости в несколько десятков и в значениях плотности в несколько сотен процентов);

2) момента инерции подвесной системы без жидкости и радиуса тигля (приводящие к ошибкам при определении плотности в отдельных областях до нескольких сотен процентов).

Повторим еще раз, что в общем случае определение неизвестных параметров должно проводиться по действительным частям вискозиметрических уравнений, построенных для четырех точек $(K, R, \tau_{0\min}, \delta_0, M_{\min} \rightarrow \tau_1, \delta_1)$, $(K, R, \tau_{0\max}, \delta_0, M_{\min} \rightarrow \tau_2, \delta_2)$, $(K, R, \tau_{0\min}, \delta_0, M_{\max} \rightarrow \tau_3, \delta_3)$ и $(K, R, \tau_{0\max}, \delta_0, M_{\max} \rightarrow \tau_4, \delta_4)$, совместно с определением характеристик вискозиметра R и K .

Разработанная теория позволяет провести *проверку внутренней согласованности вискозиметрических данных* и дает возможность судить *о корректности выполненных экспериментов* как в отношении непротиворечивости исходных данных, так и об адекватности применения вискозиметрической теории к реализуемым в эксперименте условиям. Данные методы позволяют надежно, эффективно и устойчиво *оценивать неизвестные свойства* ньютоновских сред одновременно *в самостоятельном эксперименте* без проведения дополнительных исследований по измерению плотности жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424) и программы поддержки научного творчества молодежи в вузах Челябинской области.

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
2. Островский О.И., Григорян В.А. О структурных превращениях в металлических расплавах // *Известия вузов. Черная металлургия*. – 1985. – № 5. – С. 1–12.
3. Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Уткин Е.А., Щека А.И. Моделирование экспериментов по измерению вязкости методом Швидковского // *Расплавы*. – 1990. – № 2. – С. 57–64.
4. Nieuwoudt J.C., Sengers J.V., Kestin J. On the theory of oscillating-cup viscometers / *Physica*. – 1988. – 149A. – P. 107–122.
5. Yelyukhina I.V., Toropov E.V. Estimation of heat and mass transfer coefficient by parametric identification methods // *Mater. of Internat. seminar «Modelling, advanced process technology, expert and control system of heat and mass transfer phenomena»*. – Ekaterinburg, 1996.
6. Елюхин В.А., Холпанов Л.П. Статистическое оценивание параметров в задачах идентификации // *Теорет. основы хим. технологии*. – 1990. – Т. 24, № 6. – С.784–793.

К ВОПРОСУ НАБЛЮДАЕМОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ЖИДКИХ СРЕД В ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО ШВИДКОВСКОМУ Е.Г.

И.В. Елюхина

Изучены возможности наблюдения и измерения слабо упругих свойств жидких сред методом крутильных колебаний.

Введение. В режиме затухающих колебаний можно реализовать как малые скорости деформаций, так и предельно малые полные деформации. Это позволяет сделать *наблюдаемыми* отдельные *неньютоновские эффекты* у жидкостей, обычно считающихся ньютоновскими. Данные условия, реализуемые в крутильно-колебательном вискозиметре Швидковского Е.Г. (рис. 1) [1], и неосуществимые в других реометрических методиках, дают возможность предположить обнаружение *новых классов* сред со слабо выраженными неньютоновскими свойствами.

Подобные эксперименты обладают метрологической точностью, т.е. позволяют не только продемонстрировать сам факт вязкоупругости жидкости, но и количественно определить ее возможный модуль сдвига. А это в свою очередь дает возможность решить *фундаментальную задачу о реологической принадлежности* рассматриваемого класса жидкостей и делает правомочной постановку проблемы о *микроскопических причинах неньютоновского поведения сред*.

Вязко-упругие жидкости можно отличить от ньютоновских в экспериментах, позволяющих осуществить предельно малые скорости деформации, а также способных отразить временную сторону процессов изменения напряжений и деформаций [2–4]. Состояние простой жидкости с затухающей памятью, совершающей крутильные колебания в вискозиметре (рис. 1), можно охарактеризовать как линейно-вязкоупругое, т.е. отбросить члены выше первого порядка тензора деформации Коши [2], а течение описать единственной материальной функцией – *комплексной вязкостью* $\eta^* = \nu^* \rho$, включающей динамическую вязкость η_r и динамическую жесткость G [2–4]:

$$\eta^* = \eta_r + i\eta_i, \quad (1)$$

где $\eta_r = G/\omega$; $\omega = 2\pi/\tau$; ω – частота и τ – период колебаний заполненного жидкостью цилиндра; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность среды; $i = \sqrt{-1}$.

Впервые понятие комплексной вязкости в отношении применения его к заполненному исследуемой жидкостью цилиндру, совершающему *вынужденные* колебания, было проанализировано Клейманом Р.Н. [4]. Работа [4] носит скорее теоретический характер и ввиду неучета многих факторов затрудняет использование полученных результатов на практике и не способствует распространению методологии исследования на другие режимы колебаний.

Практически представляет интерес случай *слабо выраженных упругих свойств* и изучение возможностей их наблюдения и корректного оценивания. В связи с этим достаточно *своевременным* является проведение *математического моделирования реометрического эксперимента* по изучению слабо упругих свойств жидких сред методом крутильных колебаний.

Основные положения теории метода и оценка чувствительности вязкоупругих свойств жидкости к ошибкам в измерении параметров установки и колебаний. *Реометрическое уравнение*, связывающее наблюдаемые в эксперименте параметры: период τ и декремент затуха-

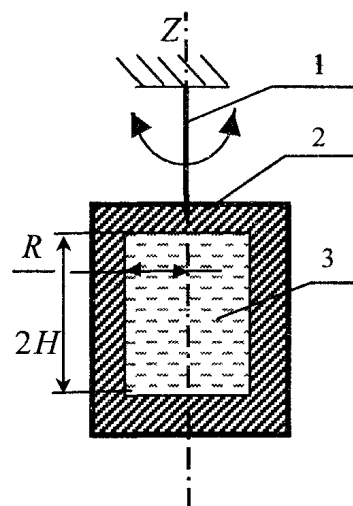


Рис. 1. Схема вискозиметра: 1 – упругая нить; 2 – цилиндр, совершающий собственные затухающие крутильные колебания с периодом τ_0 вокруг своей оси симметрии Z' , и имеющий относительно данной оси момент инерции K ; 3 – исследуемая жидкость массой M с плотностью ρ , вязкостью ν и жесткостью G

ния δ колебаний, с реометрическими характеристиками среды: кинематической вязкостью ν и жесткостью G , для вязко-упругой жидкости имеет вид аналогичный зависимости для ньютоновской среды (см. (1), (2) в работе [5], представленной в настоящем сборнике), где вместо *вязкости* ν используется комплексное выражение для ν^* (1), для данной реометрической системы равное

$$\nu^* = \nu - \frac{G\tau}{\rho(\delta i + 2\pi)} i. \quad (2)$$

Неизвестные реологические параметры: ньютоновскую кинематическую вязкость ν и жесткость G , определим методами параметрической идентификации из условия минимума *функции качества*

$$f(\nu, G) = \sqrt{c_{Re} \cdot \text{Re}^2(F) + c_{Im} \cdot \text{Im}^2(F)}, \quad (3)$$

где F – вискозиметрическая функция, входящая в реометрическое уравнение (см. (1), (2) в [5]); c_{Re}, c_{Im} – весовые коэффициенты.

При организации режима крутильных колебаний путем варьирования частотой так, что обеспечивается равенство *толщины пограничного слоя* δ' и *длины упругой волны* λ :

$$\lambda = \sqrt{G/\rho} \cdot \tau/2\pi = \delta' = \sqrt{\nu \cdot \tau/2\pi}, \quad (4)$$

линии уровня функции (3) при $c_{Re} = c_{Im}$ на плоскости (ν, G) – окружности. В этой точке $\overline{G'_\nu} = \overline{\nu'_G}$, где $\overline{G'_\nu}, \overline{\nu'_G}$ – соответствующие производные в относительных единицах. При усилении, например, упругих свойств линии уровня вытягиваются вдоль оси вязкости, и в пределе образуются овраги, локальная ось которого перпендикулярна оси жесткости (рис. 2).

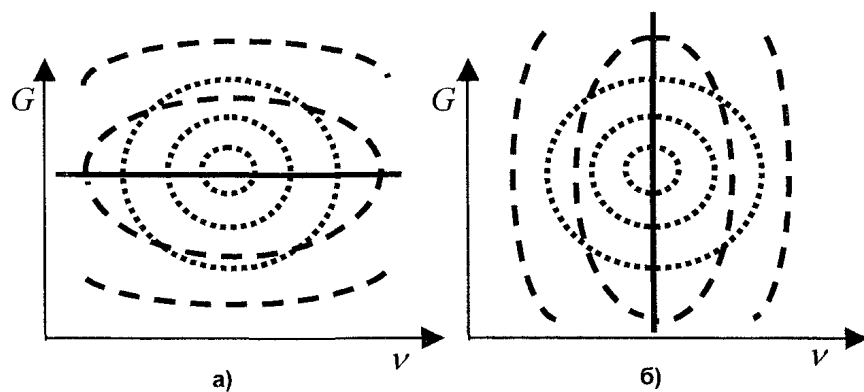


Рис. 2. Линии уровня и оси оврагов функции (3):
 - линии уровня при $\delta' = \lambda$;
 - - - - - линии уровня при $\delta' \neq \lambda$: а) $\delta' < \lambda$; б) $\delta' > \lambda$;
 — — — — — оси оврагов при $\delta' \neq \lambda$: а) $\delta' \ll \lambda$; б) $\delta' \gg \lambda$

Характерной особенностью здесь является тот факт, что при $\delta' \neq \lambda$ оси оврагов перпендикулярны соответствующим осям (ν, G) при равенстве весовых коэффициентов в (3), в то время как угол наклона локальных осей оврагов функций $\text{Re}(F)$ и $\text{Im}(F)$ различен и составляет $\pi/2$ только при $\delta' \gg \lambda$ (оси $\text{Re}(F)$ и $\text{Im}(F) \perp$ оси ν) или $\delta' \ll \lambda$ (оси \parallel оси ν). При этом

для различных значений δ'/λ отношение $|\text{Re}(F)/\text{Im}(F)|$ различно, всегда меньше единицы и падает с усилением упругих свойств (т.е. при росте λ/δ').

Установлено, что точке $\delta' = \lambda$ соответствует максимум кривой $\delta = \delta(\tau_0)$ (рис. 3), когда остальные параметры установки и свойства среды фиксированы. Ошибку в определении точки $\tau = \tau_{\delta'=\lambda} = \tau_{\delta_{\max}}$ (или τ_0) можно проанализировать в рамках чувствительности $\overline{\partial\tau_0/\partial\delta}$, приняв в качестве начального приближения результаты Швидковского Е.Г. [1] (рис. 4): $\overline{\partial\tau_0/\partial\delta} \cong$

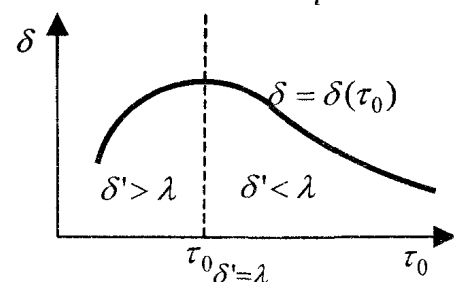


Рис. 3. Зависимость δ от τ_0

$$\cong \overline{(\partial\tau/\partial\xi)/(\partial\xi/\partial\delta)}, \text{ где } \xi = R/\delta', \text{ где } R - \text{ радиус тигля.}$$

Как было указано выше, рассмотрим случай *слабо упругих свойств* и остановимся на области при $\delta' \geq \lambda$, например, для слабовязких жидкостей. т.е. для которых $\xi > 4.2$ (рис. 4) [1]. Примем точность всех измеряемых параметров не хуже 10^{-4} , а интервал изменения периода колебаний пустого тигля $\tau_0 = 0.1 \dots 100$ с.

Анализ чувствительности проведем в терминах функций чувствительности вида

$$\psi_{ij} = \overline{\frac{\partial x_i}{\partial y_j}}, \tag{5}$$

где x_i – оцениваемые параметры: ν, G ; y_j – измеряемые величины: $\rho, M, R, K, \tau, \tau_0, \delta$ (т.е. $i=1,2, j=1,2\dots 7$), знак $\overline{\quad}$ соответствует безразмерным производным в некоторой исследуемой точке (x_i^*, y_j^*) : $\psi_{ij} = \overline{\frac{\partial x_i}{\partial y_j}} \cdot \frac{y_j^*}{x_i^*}$.

Для анализа слабо упругих свойств акцентируем внимание на характере поведения функций $\psi_{2j} = \overline{\frac{\partial G}{\partial y_j}}$ на множестве $\lambda \in [0, \delta']$. Представим данные функции как

$$\psi_{2j} = \psi_{2j}|_{\delta'=\lambda} \cdot \kappa_j, \tag{6}$$

где $\psi_{2j}|_{\delta'=\lambda}$ – чувствительность, определенная в точке с $\delta' = \lambda$; κ_j – коэффициент, отражающий ослабление наблюдаемости упругих свойств сред при росте δ'/λ и зависящий, в частности, от отношения $G_{\delta'=\lambda}/G^*$; G^* – искомое значение.

Выделим наиболее важные особенности, затрудняющие оценку упругих свойств.

1. При уменьшении G на порядок от точки $\delta' = \lambda$ ($G = G_{\delta'=\lambda}/k_G, k_G = 10$) чувствительность по всем параметрам изменялась в среднем в 7–9 раз и всякий раз приблизительно на порядок при его дальнейшем уменьшении ($k_G = 10^2, 10^3\dots$) ввиду соответствующего роста $\overline{G'_{\nu}}$ (рис. 5). В пределе при $G \rightarrow 0$ производная $\overline{G'_{\nu}} \rightarrow \infty$, и ошибка в определении G также стремится к бесконечности.

2. Все функции чувствительности $\psi_{ij}|_{\delta'=\lambda}$ принимали значения порядка единицы (в среднем равные 2...5) за исключением чувствительности по периоду τ ($\overline{\frac{\partial x_i}{\partial \tau}} \cong \overline{\frac{\partial x_i}{\partial \tau_0}}$). Чувствительность $\overline{\frac{\partial x_i}{\partial \tau}}$, рассчитанная через функцию качества (3) с учетом и действительной, и мнимой части при комплексе $MR^2/(2K)$ порядка 10^{-1} составляла несколько сотен, а при уменьшении порядка $MR^2/(2K)$ на порядок увеличивалась приблизительно также на порядок.

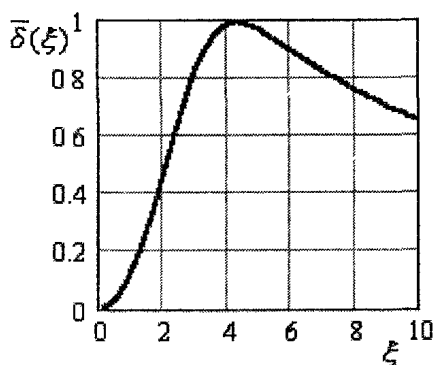


Рис. 4. Зависимость δ от ξ . Значения декремента приведены в условных единицах $\overline{\delta}(\xi)$ [1]

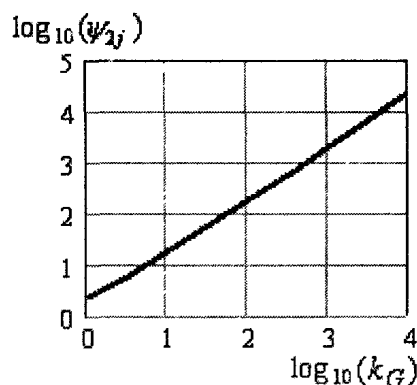


Рис. 5. Зависимость функций чувствительности от порядка жесткости при $c_{Re} = 1$ и $c_{Im} = 0$

Вспомним, что для ньютоновских жидкостей следует обращать особое внимание на точки, где ξ близко к 4.2 [1] (рис. 4), т.к. здесь наблюдается слабая зависимость декремента от вязкости, и, например, $\overline{\nu'_{\delta}}$ оказывается порядка 10^1 при $MR^2/(2K)$ порядка 10^{-1} и растет при уменьшении $MR^2/(2K)$. При наличии упругости, например, в точке $\delta' = \lambda$, данной ситуации не наблюдается.

Планирование оптимального реометрического эксперимента по наблюдению и оцениванию слабо упругих свойств жидких сред. На основе проведенного анализа принят следующий алгоритм оптимального реометрического эксперимента по исследованию слабоупругих

свойств жидких сред. Прежде всего, необходимо проанализировать вид функции $f(\nu, G)$ на плоскости (ν, G) при $\tau_0 = \tau_{0\max} = 100$ с. Если линии уровня вытянуты вдоль оси вязкости, т.е. полученная точка находится в «упругой» области ($G > G_{\delta'=\lambda}$), то:

1. Уменьшая τ_0 , определяется точка $\delta' = \lambda$, соответствующая максимуму функции $\delta = \delta(\tau_0)$.

Еще раз подчеркнем, что в расчетах необходимо учитывать ошибку в значении $\tau_{\delta'=\lambda}$, оцененную с использованием теории чувствительности для каждого отдельного случая и, в частности, различных комплексов параметров δ'/λ , δ'/R , $MR^2/(2K)$ и т.д. Приводимые ниже в алгоритме количественные характеристики получены для наихудших с позиций чувствительности случаев.

2. С ошибкой менее 1 % определяются коэффициенты ν и G из системы двух уравнений:

2.1) при $c_{Re} = c_{Im} = 1$ и $\delta' = \lambda$ (при $MR^2/K > 10^{-3}$) или

2.2) при $c_{Re} = 1$, $c_{Im} = 0$ с использованием двух точек $\delta' = 1.01\lambda$ и $\lambda = 1.01\delta'$.

Если охватываемый интервал τ_0 не позволяет найти режим, где $\delta' = \lambda$, т.е. исследуемая точка лежит в «вязкой» области ($G < G_{\delta'=\lambda}$), то:

1. Определяется нижняя граница $G_{\min} = G_{\delta'=\lambda} / k_G$.

Установлено, что при $G^* > G_{\min}$ можно получить оценку жесткости G с ошибкой менее 1 % при $k_G = 10^2$ (например, для свойств воды: $\rho = 1$, $\nu = 0.01$, $G_{\min} \sim 10^{-5}$ в системе СГС). Стоит отметить, что при истинном значении G^* , на много порядков отличающимся от $G_{\delta'=\lambda}$, и, следовательно, сильно чувствительного к ошибкам в измеряемым параметрам, возможно получение неверной оценки жесткости порядка $G_{\delta'=\lambda}/10^3$, хотя с другой стороны область при $k_G = 10^3$ еще удовлетворяет условию ошибки в G менее 1 %.

2. Пусть, например, значение вязкости известно из других независимых экспериментов или оценено из области, где упругие эффекты ненаблюдаемы. Тогда путем минимизации функции качества (3) при $c_{Re} = 1$ и $c_{Im} = 0$ находится оценка G^* .

2.1) Если $G^* > G_{\min}$ (т.е. $G_{\delta'=\lambda} > G^* > G_{\min}$), то считаем это значение жесткости истинным с ошибкой менее 1 %.

2.2) Если $G^* < G_{\min}$, то делаем вывод, что в пределах указанной точности получить надежной оценки жесткости не удалось.

Проводя детальный анализ чувствительности жесткости к неточностям в измерениях всех параметров установки и колебаний, можно найти более точную границу для каждой конкретной задачи, которая может составлять в ряде случаев $G_{\min} = G_{\delta'=\lambda} / 10^4$ с ошибкой менее 10 %.

3. Иногда на практике трудно реализовать точность измерения момента подвесной системы без жидкости K и внутреннего радиуса цилиндра R порядка 10^{-4} (например, при использовании керамического тигля ошибка $\overline{\Delta R} \sim 1\%$). Тогда необходимо уточнить имеющиеся значения K и R путем минимизации функции качества на множестве четырех параметров (ν, G, K, R) (случай 3.1) или трех (случай 3.2) при уже известной вязкости. Установлено, что для получения оптимального распределения измерений необходимо использовать:

3.1) Две точки при жесткости G порядка $G_{\delta'=\lambda}$: $\delta' = 1.01\lambda$ и $\lambda = 1.01\delta'$ (в общем случае $\delta' = k_\lambda \lambda$ и $\lambda = k_\delta \delta'$), при весовых коэффициентах в функции качества (3) равных между собой: $c_{Re} = c_{Im} = 1$.

3.2) Три точки при $c_{Re} = 1$, $c_{Im} = 0$, соответствующие параметрам эксперимента 1: $(\tau_{0\max}, M_{\max})$, 2: $(\tau_{0\max}, M_{\min})$, 3: $(k_\tau \cdot \tau_{0\max}, M)$, где массы и коэффициенты $k_\tau < 1$ и $k_\lambda \cong k_\delta$, выбираются при оптимальном планировании эксперимента в конкретном исследуемом случае в терминах матрицы Якоби.

Рассмотрим подробнее более интересный случай 3.2. Минимизируемая функция

$$Z(G, K, R) = \sum_{n=1}^3 f_n(G, K, R), \quad (7)$$

где $n=1...3$ – номера экспериментальных точек, $f(G, K, R)$ – действительная часть вискозиметрической функции (см. (1), (2) в [5]), имеет трехмерный овраг в пространстве (GKR) . Варьирование периодом приводит к углублению минимума оврага в плоскости (KR) , а массы – в плоскостях, связанных с G . Уменьшение периода от $\tau_{0\max}$ до $\tau_0 = k_\tau \cdot \tau_{0\max}$ увеличивает ошибку в определении жесткости, но позволяет улучшить оценки K и R . Оптимальная выборка измерений следует из анализа *матрицы чувствительности* функций чувствительности \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \tau}{\partial G} \right|_1 & \left. \frac{\partial \tau}{\partial K} \right|_1 & \left. \frac{\partial \tau}{\partial R} \right|_1 \\ \left. \frac{\partial \tau}{\partial G} \right|_2 & \left. \frac{\partial \tau}{\partial K} \right|_2 & \left. \frac{\partial \tau}{\partial R} \right|_2 \\ \left. \frac{\partial \tau}{\partial G} \right|_3 & \left. \frac{\partial \tau}{\partial K} \right|_3 & \left. \frac{\partial \tau}{\partial R} \right|_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где нижние индексы соответствуют $n=1...3$. Так, например, в начальном приближении допустимо определять массу из условия $0.1 \cdot 2H_{\max} / R = 2H_{\min} / R \sim 1$, а коэффициент пропорциональности k_τ принять $k_\tau \sim 0.1$.

Заключение. В настоящей работе проведено *математическое моделирование оптимального реометрического эксперимента* по обнаружению и корректной параметрической идентификации слабо выраженных *упругих свойств жидкостей* методом крутильных колебаний.

Результаты работы могут быть использованы во всех отраслях, где применяются жидкости со слабо неньютоновскими свойствами: в химической, металлургической, биологической, пищевой промышленности, в энергетике и медицине:

- 1) при проведении исследований в *теории наследственных сред* и разработке микроскопических моделей жидкостей, интерпретирующих их реологическое поведение;
- 2) при проектировании *технологических процессов* с участием текучих компонентов, разработке средств транспортировки жидкостей и контроля их состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424) и программы поддержки научного творчества молодежи в вузах Челябинской области.

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
2. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
3. Mason W.P. // *Trans. ASME*. – 1947. – № 69. – P. 359.
4. Kleiman R.N. Analysis of the oscillating-cup viscometer for the measurement of viscoelastic properties // *Phys. Rev.* – 1987. – V. 35, № 1. – P. 261–275.
5. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды – См. в наст. сборнике.

О НЕРЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ВИСКОЗИМЕТРЕ ШВИДКОВСКОГО Е.Г.

И.В. Елюхина

Исследован переходный режим крутильных колебаний в вискозиметре Швидковского Е.Г. и выявлены условия, при которых справедливо положение о регулярности режима.

В основе теории крутильно-колебательного метода измерения вязкости жидкости [1] лежит положение о *регулярном режиме* колебаний, т.е. предполагается, что начальное распределение скоростей не оказывает влияния на движение среды. Рассмотрим развитие данного режима и изучим случаи, не позволяющие корректно решить вискозиметрическую задачу при пренебрежении переходными процессами.

Для этого воспользуемся зависимостью для амплитуды колебаний, полученной Дж.Кестином и Ф.Ньюэллом [2] при решении нестационарной задачи крутильных колебаний цилиндра операторным методом:

$$\alpha(\bar{t}) = -\alpha_0 \sum_k \frac{(1 + \Delta_0^2) \exp(S_k \bar{t})}{S_k \left[2S_k + 2\Delta_0 + dL(s)/ds|_{S_k} \right]}, \quad (1)$$

где S_k – корни уравнения

$$(S_k + \Delta_0)^2 + 1 + L(S_k) = 0, \quad L(S_k) = S_k K' K^{-1} \left[\frac{4J_2(\sqrt{S_k} \xi_0 i)}{\sqrt{S_k} \xi_0 i J_1(\sqrt{S_k} \xi_0 i)} + 4S_k \eta_0^{-1} \sum_n \frac{th(s_\mu \eta_0)}{\mu_n^2 s_\mu^3} \right], \quad (2)$$

$L(S_k)$ – функция трения, определенная в (2) для вискозиметра со свободной поверхностью; α – угловое смещение цилиндра; α_0 – начальное смещение; $K' = MR^2/2$; $\Delta_0 = \delta_0/(2\pi)$; $\bar{t} = q_0 t$; $\xi_0 = R/d$; $\eta_0 = H/d$; $d = \sqrt{v/q_0}$; $s_\mu^2 = S_k + \mu_n^2/\xi_0^2$; μ_n – корни уравнения $J_1(\mu_n) = 0$; t – время, остальные обозначения – см. в работе [3], представленной в настоящем сборнике.

Установлено, что уравнение (2) имеет два комплексно сопряженных корня:

$$S_k = s_{1,2} = \frac{q}{q_0} (-\Delta \pm i), \quad (3)$$

отвечающие *регулярному режиму*, и бесконечное множество отрицательных действительных корней, которые можно определить графическим способом.

Сравним параметры переходного и основного процессов для *длинного цилиндра*, т.е. учтем только первое слагаемое в правой части выражения для функции трения (2). Длительность затухания возмущений, вызванных переходными процессами по сравнению с регулярными колебаниями охарактеризуем, например, соотношением

$$U = U1 - U2, \quad (4)$$

где $U1 = |S_1|$, S_1 – минимальный по модулю корень для соответствующего значения ξ_0 , характеризующий затухание самого медленного из переходных возмущений, $U2 = |\operatorname{Re}(s_{1,2})| = q\Delta/q_0$ – модуль действительной части от корней $s_{1,2}$,

Для длинного цилиндра корень S_1 можно считать приближенно равным

$$S_1 = \frac{\mu_1^2}{\xi_0^2}. \quad (5)$$

Выразим декремент затухания колебаний Δ заполненного жидкостью вискозиметра согласно приближенной зависимости Швидковского Е.Г. [1]:

$$\Delta(\xi) = \text{Re} \left[\frac{2K'}{K} \left(\frac{\sqrt{i}}{\xi} \frac{J_0(\xi\sqrt{i})}{J_1(\xi\sqrt{i})} - \frac{2}{\xi^2} \right) \right], \tag{6}$$

где Re , Im – действительная и мнимая части от комплексного выражения; $\xi = R/\delta'$; $\delta' = \sqrt{\nu/q}$, т.е. $\xi = \xi_0 \sqrt{q/q_0}$, где $\sqrt{q/q_0}$ можно представить согласно [1] как

$$\sqrt{q/q_0} = \frac{1}{\sqrt{1+w(\xi)}}, w(\xi) = -\text{Im} \left[\frac{4K'}{K} \left(\frac{\sqrt{i}}{\xi} \frac{J_0(\xi\sqrt{i})}{J_1(\xi\sqrt{i})} - \frac{2}{\xi^2} \right) \right]. \tag{7}$$

Из рис. 1 видно, что при $\xi > \xi_{\text{lim}}$ колебательное движение, описывающее так называемый установившийся режим, затухает быстрее, чем апериодическое движение, характеризующее переходный процесс, в то время как при $K'K^{-1} > 0.3$ реализуются условия эксперимента ($\xi < 25$), достаточно часто встречающиеся на практике (рис. 2).

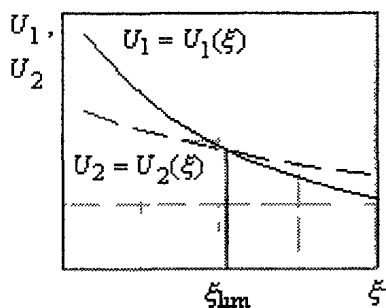


Рис. 1. Зависимость корней от параметра ξ

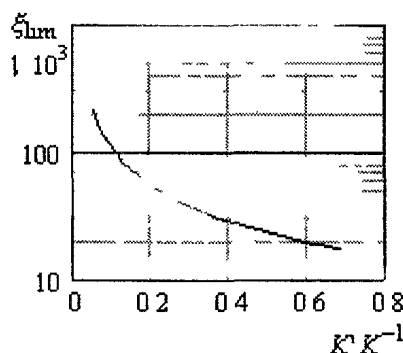


Рис. 2. Зависимость ξ_{lim} от отношения K'/K

Исследуем также поведение отношения величин основного, регулярного, процесса и накладываемых на него негармонических возмущений:

$$\bar{\alpha} = \alpha_{\text{reg}} / \alpha_{\text{nreg}}, \tag{8}$$

где α_{reg} , α_{nreg} – модули $\alpha(t)$ (1), определенные при корнях $s_{1,2}$ (3) и S_1 (5). Очевидно, что при $\xi > \xi_{\text{lim}}$ значение $\bar{\alpha}$ (8) со временем уменьшается. Интересным представляется определение предельного значения ξ^* , такого, что при $\xi < \xi^*$ после n_τ колебаний величина $\bar{\alpha}$ превышает 10^{k_τ} . Результаты, полученные для $n_\tau = 5$, $k_\tau = 4$, проиллюстрированы на рис. 3.

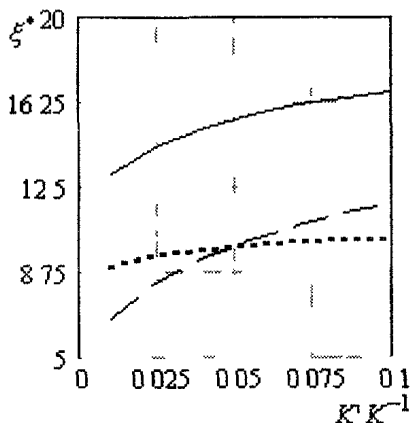


Рис. 3. Зависимость $\xi^* = \xi^*(K'/K)$

- $n_\tau = 0, k_\tau = 3$;
- $n_\tau = 5, k_\tau = 3$;
- $n_\tau = 5, k_\tau = 5$

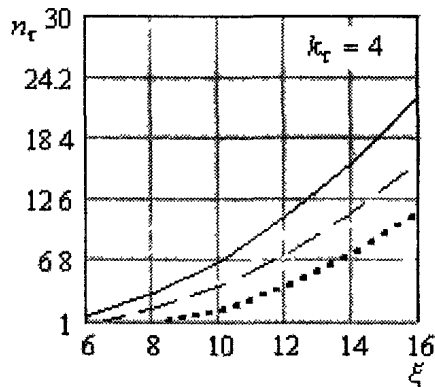


Рис. 4. Зависимость числа колебаний в переходном режиме от ξ :

- $K'K^{-1} = 10^{-3}$;
- $K'K^{-1} = 10^{-2}$;
- $K'K^{-1} = 10^{-1}$

Представляя $S_k \bar{t}$ в зависимости (1) как $2\pi S_k \cdot k \cdot q_0 / q$, где q_0 / q определяется из (7), находим число колебаний n_z , проходимых для установления требуемого режима при различных условиях эксперимента, т.е. при различных ξ (рис. 4).

Таким образом, в настоящем исследовании *теория нерегулярного режима крутильных колебаний* для ньютоновских жидкостей дополнена практическими приложениями, к которым необходимо обращаться в каждом вискозиметрическом эксперименте. Задача решена для начальных условий: $\alpha(0) = \alpha_0$, $d\alpha/dt|_{t=0} = 0$.

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
2. Kestin J., Newell G.F. Theory of oscillating type viscometers: the oscillating cup. Part I. // *J. Appl. Math. Phys., ZAMP*. – 1957. – V. 8. – P. 433–449.
3. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды – см. в наст. сборнике.

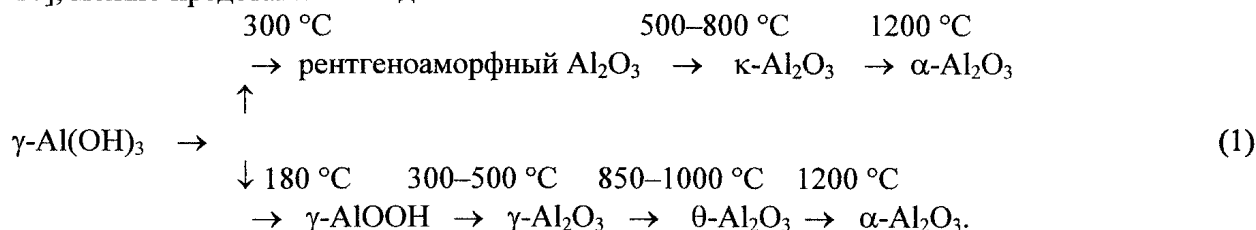
ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ФОРМИРОВАНИЕ МОНОДИСПЕРСНОГО КОРУНДА ПРИ ТЕРМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ γ - $\text{Al}(\text{OH})_3$

А.В. Толчеев, В.И. Лопушан, Д.Г. Клещев, В.В. Викторов

Исследованы превращения гидроксида алюминия γ -модификации (гидраргиллит) в процессе механохимической активации (МХА) в мельницах различного типа и дальнейшей прокалки активированных образцов в интервале $200\div 1300$ °С. Изучено влияние МХА и добавок оксидных соединений железа на температуру образования и дисперсный состав корунда.

Введение

Мелкокристаллический корунд (α - Al_2O_3) с размером кристаллов менее 1 мкм является перспективным полировальным материалом [1]. Одним из способов получения корунда является термообработка на воздухе гидроксида алюминия γ -модификации (гидраргиллит). Последовательность превращений при прокалке гидраргиллита, температуры образования промежуточных и равновесной фаз, дисперсный состав и габитус кристаллов корунда зависят от целого ряда факторов, например, химического и дисперсного состава исходного образца [1, 2], наличия в нем примесей [2–5], дефектности структуры [6–8] и др. Формированию α - Al_2O_3 предшествует образование целого ряда промежуточных соединений, а обобщенную схему превращений, согласно [2, 7–10], можно представить в виде:



Существование двух направлений фазовых (ФП) и химических (ХП) превращений, по мнению авторов [2, 8] обусловлено тем, что наряду с фазой γ - AlOOH (бемит) при термоллизе γ - $\text{Al}(\text{OH})_3$ на воздухе всегда образуется рентгеноаморфный Al_2O_3 , дальнейшие ФП которого реализуются независимо от превращений бемита. Следствием этого является высокая полидисперсность α - Al_2O_3 , что не позволяет использовать его в качестве полировального материала. Известно [11–14], что механохимическая активация гидратированных оксидов способствует формированию тонкодисперсных порошков при прокалке, а примеси оксидов, изоструктурных с α - Al_2O_3 позволяют снизить температуру образования корунда.

Целью данной работы являлось изучение ФП и ХП гидраргиллита в процессе МХА в мельницах различного типа и дальнейшей прокалки на воздухе в интервале $200\div 1300$ °С, а также влияния МХА и добавок оксидных соединений железа(III) на температуру образования и дисперсный состав корунда.

Экспериментальная часть

Для исследований использовали технический гидроксид алюминия (пластинчатые кристаллы неправильной формы размером $1\div 5$ мкм в поперечнике и $10\div 50$ нм в толщину). По данным рентгенофазового и термогравиметрического анализов образец был однофазным γ - $\text{Al}(\text{OH})_3$, а его эмпирический состав $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3,1 \text{H}_2\text{O}$ – близок к стехиометрическому. В качестве добавок использовали соединения железа (II) или (III), в виде солей, гидроксидов и оксидов, в количестве $1\div 10$ % мас. (в пересчете на Fe_2O_3), которые вводили в гидраргиллит перед МХА. Образцы гид-

раргиллита подвергали механохимической активации в лабораторных мельницах с различной энергонапряженностью: планетарной, в течение от двух до десяти минут; вибрационной в течение 15, 30 и 60 мин.; в шаровой – в течение 0,5÷3 ч. Изотермическую прокалку образцов проводили в интервале температур 200÷1300 °С в течение 2 ч.

Фазовый и дисперсный состав образцов контролировали методами рентгенофазового анализа (дифрактометр ДРОН-3: фильтрованное CoK_α -излучение) и трансмиссионной электронной микроскопии (УЭМВ-100К), а их химический состав – методами объемного химического анализа и термогравиметрии (дериватограф Paulik-Erdey; скорость нагрева – 10 °С/мин). Параметры a и c элементарной ячейки соединений со структурой корунда определяли по стандартной методике [15] по рефлексам (226) и (1010). Средний размер кристаллов d рассчитывали по формуле Селякова-Шерера [15], исходя из физического уширения дифракционных максимумов ($\Delta 2\theta$).

Результаты исследования и обсуждение

Согласно данным термогравиметрии, изменения массы исходного образца гидраргиллита протекают в широком температурном интервале 200÷500 °С (рис. 1а). На кривой ДТА фиксируется три эндо- и один экзотермический эффекта при температурах 215, 310, 480 и 850 °С, соот-

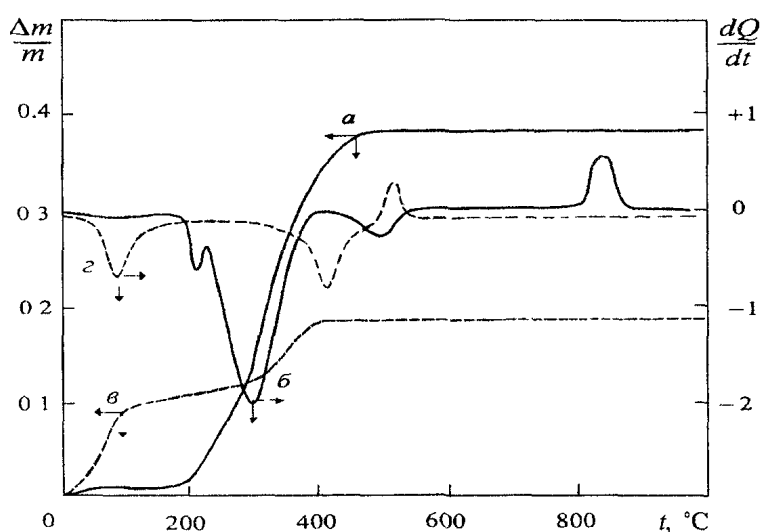


Рис. 1. Термограммы исходного (а, б) и подвергнутого МХА в планетарной мельнице (в, г) образцов гидраргиллита: а), в) – кривые ТГ; б), г) – кривые ДТА

ответственно. Из данных литературы [2, 3] и рентгенофазового анализа (рис. 2) образцов, подвергнутых изотермической прокалке при вышеуказанных температурах, первый эндоэффект обусловлен ХП части (~15 % мас. по данным термогравиметрии) $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$ в фазу $\gamma\text{-AlOOH}$ (бемит); второй (310 °С) – ХП оставшейся части гидраргиллита в рентгеноаморфный Al_2O_3 ; третий (480 °С) – ХП $\gamma\text{-AlOOH}$ в $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$; экзоэффект при 850 °С – кристаллизацией рентгеноаморфного оксида алюминия в мелкокристаллический (~7 нм) $\theta\text{-Al}_2\text{O}_3$. Формирование равновесной фазы корунда при изотермической прокалке на воздухе макроскопически проявляется, начиная с температуры 1100 °С (рис. 2д). По данным электронной микроскопии

однофазный образец $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$, полученный прокалкой $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$ при 1300 °С, полидисперсный и состоит из кристалликов корунда изометрической или овальной формы размером от 0,2 до 0,6 мкм, спекшихся в более крупные агрегаты размером 2–5 мкм.

При МХА исходного гидраргиллита экспериментально наблюдалось изменение его структуры и химического состава, величина которых пропорциональна энергонапряженности механохимического воздействия. Так, на рентгенограммах образца, подвергнутого МХА в шаровой мельнице в течении 3 ч, отмечено перераспределение относительных интенсивностей дифракционных максимумов. Например, отношение интенсивностей рефлексов β с индексами Миллера (002) и (110) ($\beta = I_{002}/I_{110}$, где I_i – интегральные интенсивности соответствующих рефлексов) возрастает от 3 (исходный $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$) до 10. Отмечено также увлажнение образцов гидраргиллита после размола. Изменений формы и размера кристаллов $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$ после МХА в шаровой мельнице не обнаружено.

На рентгенограммах образцов гидраргиллита, подвергнутых МХА в вибрационной мельнице, помимо перераспределения относительных интенсивностей рефлексов, наблюдалось увеличение их полуширины по мере возрастания продолжительности обработки (τ). В частности, при увеличении τ от нуля до 1 ч полуширина $\Delta 2\theta$ рефлекса (002) гидраргиллита возрастает в ~2 раза. По сравнению с МХА в шаровой мельнице отмечено более значительное увлажнение образцов. При обработке $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$ в планетарной мельнице, в которой по сравнению с предыдущими дос-

тигается максимальная величина механохимического воздействия на образец [11], наряду с сильным увлажнением образца, уже после 10 мин. обработки наблюдалось полное разрушение кристаллической структуры гидраргиллита (об этом свидетельствует отсутствие на рентгенограммах рефлексов $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$), а на рентгенограммах обнаруживаются размытые дифракционные максимумы, совокупность которых из сравнения с данными [16] и рис. 2в можно отнести к фазе бемит.

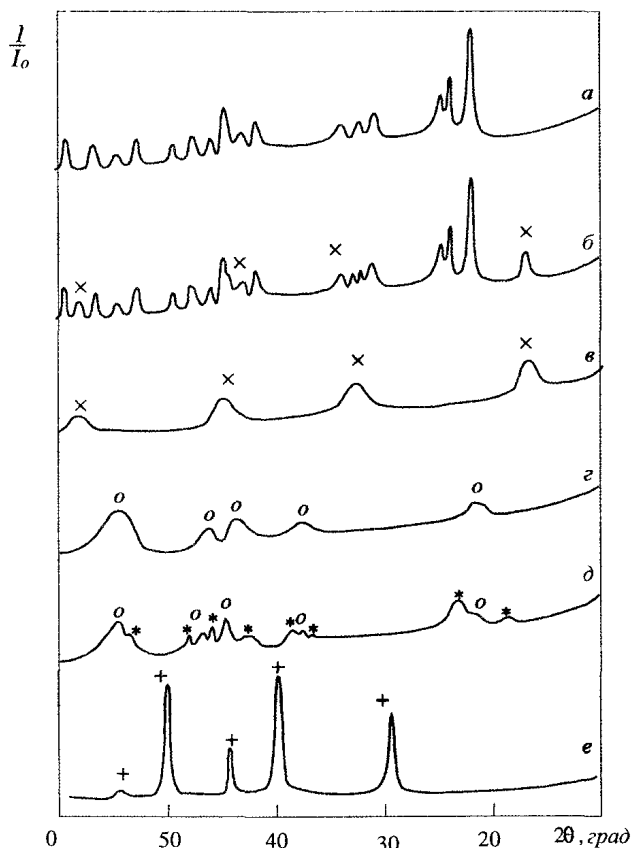


Рис. 2. Фрагменты рентгенограмм исходного гидраргиллита (а) и продуктов его прокалики в изотермических условиях на воздухе ($\tau = 2$ ч) при 240 (б), 300 (в), 550 (г), 1000 (д) и 1300 °С (е).
Условные обозначения: x, o, * и + – рефлексы фаз $\gamma\text{-AlOOH}$, $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$; $\theta\text{-Al}_2\text{O}_3$ и $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$; рефлексы $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$ – не помечены

остальными, достигается наибольшая степень дегидратации $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$, что, по видимому, и приводит к формированию фазы $\gamma\text{-AlOOH}$. Отметим, что на аморфизацию соединений на основе гидратированных оксидов различных металлов и протекания в них ФП и ХП в процессе механохимической активации указывается в многочисленных работах [6, 11–13], в которых подтверждается возможность перехода кристаллизационной воды в адсорбированное состояние. Если не учитывать адсорбированную воду, то эмпирический состав образца гидраргиллита, подвергнутого МХА в планетарной мельнице, имеет вид $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 1,1\text{H}_2\text{O}$, что близко к стехиометрическому составу бемита.

По данным рентгенофазового анализа, формирование корунда при прокалике образцов гидраргиллита, подвергнутых МХА, фиксируется, начиная с температуры ~ 1100 °С, достигая содержания 100 % мас. в образцах, прокаленных при 1200 °С. По данным электронной микроскопии, образцы $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$, полученные прокаликой активированного гидраргиллита при 1200 °С характеризуются высокой степенью монодисперсности и состоят из кристаллов изометрической или овальной формы размером $0,3 \pm 0,5$ мкм, при повышении температуры термообработки до 1300 °С наблюдается спекание отдельных кристаллов корунда с образованием агрегатов.

При термообработке $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$, подвергнутого активации в смеси с соединениями железа (II) или (III), температура образования корунда снижается до ~ 900 °С, однако, помимо набора

На кривой ДТА образца гидраргиллита, подвергнутого активации в планетарной мельнице, фиксируются (см. рис. 1в) два эндо- и один экзотермический эффект при температурах 105, 410 и 520 °С, соответственно. Из сопоставления литературных данных [1, 7, 10] по дегидратации бемита с результатами рентгенофазового анализа образцов, подвергнутых изотермической прокалике при температурах соответствующих термических эффектов, эндоэффект при 105 °С обусловлен удалением физически адсорбированной воды в количестве ~ 11 % мас. (кривая г на рис. 1), второй эндоэффект (410 °С) – химическим превращением мелкокристаллического $\gamma\text{-AlOOH}$ в $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$, сопровождающийся удалением оставшейся части (~ 15 % мас.) конституционной воды, а экзоэффект при 510 °С обусловлен, по-видимому, кристаллизацией $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$. Содержание в образце гидраргиллита, подвергнутого МХА, значительного (~ 11 % мас.) количества физически адсорбированной воды однозначно свидетельствует о том, что в процессе активации происходит частичная (шаровая и вибрационная мельницы) или полное (планетарная мельница) разрушение кристаллической структуры фазы $\gamma\text{-Al}(\text{OH})_3$, в результате которой часть конституционной воды (OH^- группы в гидраргиллите) из связанного переходят в свободное состояние (активированная дегидратация гидраргиллита), что и предопределяет увлажнение образцов в процессе МХА. В планетарной мельнице, по сравнению с

рефлексов, характерного для фазы α - Al_2O_3 (их полуширина $\Delta 2\theta$ составляет 0,3 град.), на рентгенограммах наблюдаются максимумы слабой интенсивности, которые из сопоставления с [16] следует отнести к фазе α - Fe_2O_3 . Относительная интенсивность этих рефлексов изменяется симбатно с увеличением массовой доли оксида железа (III), вводимого в гидраргиллит. О существовании индивидуальной фазы α - Fe_2O_3 в образцах, прокаленных при 900 °С, свидетельствует также и их розовая окраска, характерная для гематита. Повышение температуры прокалики до 1100 °С приводит к формированию однофазных образцов, имеющих структуру типа корунда, цвет которых зависит от массовой доли (С) вводимой добавки соединений железа(III) и изменяется от белого ($C \leq 1$ % мас.) до светло-желтого ($C = 10$ % мас.). С ростом массовой доли Fe_2O_3 в образцах отмечено увеличение параметров a и c элементарной ячейки фазы со структурой типа корунда от значений $a = 0,4760 \pm 0,0002$ и $c = 1,2987 \pm 0,0005$ нм ($C = 0$) до $a = 0,4790 \pm 0,0002$ и $c = 1,3025 \pm 0,0005$ нм ($C = 10$ % мас.). Это позволяет сделать вывод о том, что в данных условиях образуется твердый раствор Fe_2O_3 в структуре α - Al_2O_3 .

Согласно данным электронной микроскопии, размер кристаллов корунда зависит от количества вводимой добавки Fe_2O_3 . В частности, образец корунда, полученный при 1200 °С и содержащий 1 % мас. Fe_2O_3 представляет собой монодисперсную систему, состоящую из кристаллов размером $0,3 \div 0,4$ мкм, имеющих огранку, близкую к гексагональной. Повышение количества Fe_2O_3 в образцах до 5 % масс. приводит к увеличению размеров кристаллов корунда до ~1 мкм (рис. 3, г), а в образцах содержащих Fe_2O_3 более 5 % масс., размеры кристаллов могут достигать ~2 мкм.

Обратимся к анализу возможных причин, приводящих к формированию монодисперсных образцов корунда при термообработке гидраргиллита. Как уже отмечалось, ХП гидраргиллита в температурном интервале 200÷400 °С могут реализоваться по двум независимым направлениям, представленным на схеме (1). Поэтому наряду с γ - AlOOH при дегидратации γ - $\text{Al}(\text{OH})_3$, всегда образуется рентгеноаморфный оксид алюминия. При дальнейшем повышении температуры ФП и ХП бемита и рентгеноаморфного Al_2O_3 реализуются через различные неравновесные формы оксида алюминия, отличающиеся как кристаллической структурой, так и температурными интервалами существования, что и является основной причиной полидисперсности конечного продукта ФП и ХП гидраргиллита – оксида алюминия α -модификации. В этом случае крупные (до 5 мкм) агрегаты, вероятнее всего, образуются из мелкокристаллического α - Al_2O_3 – продукта ФП аморфного оксида алюминия, вследствие активации при термообработке процессов спекания и коалесценции в мелкокристаллической системе, а формирование изометрических по форме кристаллов корунда осуществляется по второму направлению через фазу γ - Al_2O_3 . В процессе МХА происходит полное или частичное превращение гидраргиллита в бемит (в последнем случае следует допустить образование зародышей фазы γ - AlOOH), что способствует протеканию ФП и ХП при прокалке активированного гидраргиллита преимущественно (или полностью) только по одному направлению, через образование фазы γ - Al_2O_3 и ее дальнейшие фазовые превращения. Это, в конечном счете, и обуславливает формирование монодисперсных образцов α - Al_2O_3 .

Влияние добавок оксидных соединений железа на температуру образования и дисперсный состав корунда, по-видимому обусловлено следующим. С одной стороны, мелкие кристаллы α - Fe_2O_3 , образующиеся при сравнительно низких (~ 700 °С) температурах, вследствие изоструктурности, выполняют роль затравочных кристаллов корунда, что способствует снижению температуры формирования α - Al_2O_3 . С другой стороны, при повышении температуры прокалки происходит образование твердого раствора Fe_2O_3 в структуре α - Al_2O_3 , приводящее, согласно диаграмме состояния « Fe_2O_3 - Al_2O_3 » [17] к снижению температуры плавления твердого раствора α - $(\text{Fe}_x \text{Al}_{1-x})_2\text{O}_3$ от 2044 ($x = 0$) до 1700 °С ($x = 0,1$). Вследствие этого, с ростом x симбатно изменяется интенсивность массопереноса в мелкокристаллической системе, что проявляется в увеличении среднего размера кристаллов, и появления у них огранки.

Выводы

1. Показано, что в процессе механохимической активации, в зависимости от энергонапряженности, происходит частичная или полная дегидратация γ - $\text{Al}(\text{OH})_3$, вплоть до фазы γ - AlOOH , что в дальнейшем способствует формированию монодисперсного, мелкокристаллического α - Al_2O_3 при прокалке.

2. Наличие примеси $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, изоструктурного с $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$, снижает на $\sim 100^\circ\text{C}$ температуру образования корунда и влияет на средний размер его кристаллов. Выявлены причины, приводящие к снижению температуры образования кристалликов корунда и появления у них огранки.

Работа была выполнена при поддержке администрации Челябинской области: грант Р2001 Урчел 03-03.

Литература

1. Патент № 2109026 Россия, МКИ 6 С 09 G 1/02, С 21 D 6/00. – 1998.
2. Гаршин А.П., Гропянов В.М., Лагунов Ю.В. Абразивные материалы. – Л.: Машиностроение, 1983. – 231 с.
3. Калинина А.М. // *Химия и технология глинозема. Труды IV Всесоюзного совещания.* – Новосибирск: Сиб. отд. изд. «Наука». – 1971. – С. 360–369.
4. Oberbah T., Gunter C., Werner G. et. al. // *Thermochim. Acta.* – 1996. – V. 271. – P. 155–162.
5. Ханамирова А.А., Адимосян А.Р., Апресян Л.П. // *Журн. прикл. химии.* – 1998. – Т. 71. – Вып. 3. – С. 356–361.
6. Ханамирова А.А., Адимосян А.Р., Апресян Л.П. // Там же. – 1998. – Т. 71. – Вып. 2. – С. 198–204.
7. Ханамирова А.А., Оганесян П.Л., Адимосян А.Р., Апресян Л.П. // Там же. – 1998. – Т. 71. – Вып. 10. – С. 1600–1603.
8. Уэллс А. Структурная неорганическая химия. В 3 т. – Т. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
9. Freim J., Mckittrick J., Katz J., Sickafus K. // *Nanostruct. Mater.* – 1994. – V. 4, № 4. – P. 371–385.
10. Tachi Sato. // *J. Therm. Anal.* – 1987. – V. 32, № 2. – P. 67–70.
11. Ильин А.П., Широков Ю.Г., Прокофьев В.Ю. // *Неорган. материалы.* – 1995. – Т. 31, № 7. – С. 933–936.
12. Карагедов Г.Р., Ляхов Н.З. // *Неорган. материалы.* – 1997. – Т. 33, № 7. – С. 817–821.
13. Mendelovici E., Villalba R., Sagarzazy A. // *Mat. Res. Bull.* – 1982. – V. 17, № 2. – P. 241–243.
14. Cirilli V. // *Gas. Chim. Ital.* – 1950. – V. 80. – P. 347.
15. Китайгородский А.Н. Рентгеноструктурный анализ мелкокристаллических и аморфных тел. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. – 588 с.
16. Powder diffraction file: search manual fink method inorganic // Swarthmore. – 1977.
17. Минералы. Справочник. Диаграммы фазовых равновесий. – Вып. 2. (Отв. ред. Ф.В. Чухров, В.В. Лапин и Н.И. Овсянникова). – М.: Наука, 1974. – 489 с.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЮСТИТА, ДИОКСИДА ТИТАНА И ИЛЬМЕНИТА УГЛЕРОДОМ В РЕЖИМЕ НЕПРЕРЫВНОГО НАГРЕВАНИЯ

*Ю.С. Кузнецов, А.А. Лыкасов, С.В. Штин,
М.В. Судариков, Е.Н. Каменщикова*

Изучены термограммы процессов окисления ильменита, твёрдофазного восстановления углеродом вюстита, диоксида титана, исходного и окисленного ильменита.

При существующих объёмах производства и потребления металлов и их соединений разрабатываемые месторождения рудного сырья быстро истощаются. Кроме этого технологии его переработки часто не только не соответствуют изменяющемуся составу сырья, но и не отвечают приоритетам экологии и наносят значительный ущерб окружающей среде. В связи с этим необходима корректировка технологических параметров металлургических производств. Для процессов переработки сырья это связано с необходимостью использования его разновидностей всё более сложного состава. Титаномагнетиты, как широко распространенные в природе сложные рудные вещества, характеризуются высоким содержанием магнетита и ильменита – основных железосодержащих и титансодержащих минералов. При переработке титано-магнетитов должны быть извлечены не только Fe и Ti, но и по возможности V, Cr, Mn, благородные и рассеянные элементы, а также сопутствующие элементы – Mg, Al, Si и щелочные металлы. Поэтому использованию титаномагнетитов принадлежит большое будущее.

Процессы переработки руд, содержащих железо и титан, достаточно хорошо изучены, а их технологические особенности подробно изложены в монографической литературе [1–7]. Пирометаллургические и электротермические процессы обычно используются при комплексной переработке железо-титановых концентратов, для переработки других титансодержащих концентратов используют хлорные и гидрометаллургические технологии. В частности сырьевую проблему в производстве пигментной двуокиси титана наиболее эффективно можно решить на основе производства искусственного сырья – титановых шлаков, свойства которых можно целенаправленно формировать с учётом требований последующей переработки. Важнейшей особенностью переработки титанового сырья является осуществление её в агрегатах большой мощности и производительности с получением одновременно двух товарных продуктов – высокотитанового шлака и попутно получаемого металла. Для разделения оксидов титана, железа и других примесных элементов, входящих в состав титановых концентратов, в промышленности широко используется восстановительная руднотермическая электроплавка концентратов, в результате которой большая часть оксидов железа и некоторые другие элементы восстанавливаются до металла, а оксиды титана и, частично, примесных элементов переходят в шлак. При этом TiO₂ восстанавливается до низших оксидов с образованием на их основе различных фаз. В результате многочисленных исследований по восстановлению титано-магнетитовых руд, концентратов и моделирующих их материалов установлено, что их наиболее эффективно перерабатывать по двухстадийной технологии, включающей предварительную низкотемпературную металлизацию подготовленной твёрдой шихты и последующую электроплавку полупродукта.

Ильменит – трудновосстановимое и довольно легкоплавкое соединение. Установлено, что при различных условиях монооксид железа ильменита не восстанавливается селективно, а происходит одновременное восстановление монооксида железа FeO до металла и диоксида TiO₂ до низших оксидов. Взаимодействие низших оксидов титана с FeO снижает химическую активность FeO и затрудняет процесс восстановления.

Интерес к процессам переработки титансодержащих руд не уменьшается, о чём свидетельствует значительное количество публикаций в последние годы [8–16]. В них установлено, что в

процессе выплавки титанистых шлаков необходимо максимально развивать процессы восстановления оксидов железа до расплавления шихты. Этому способствуют два обстоятельства: предварительное окисление руды [9] и добавка в шихту соединений щелочных и щелочноземельных металлов [6, 12]. Японские исследователи установили [13], что в продуктах восстановления синтетического ильменита присутствуют две фазы, отличающиеся одна от другой. Одна обогащена диоксидом титана, а другая почти полностью состоит из металлического железа. Состав обогащенной титаном фазы в окисленном ильмените находится в промежутке составов $Fe_2O_3 \cdot TiO_2$ и $Fe_2O_3 \cdot 3TiO_2$. В работе [14] предложен способ получения синтетического рутила из ильменитового концентрата обжигом при 1100–1400 °С с углеродистым восстановителем во вращающейся печи и последующей магнитной сепарацией. Приведённый в примере ильменитовый концентрат имел состав: TiO_2 61,7; FeO 4,1; Fe_2O_3 29,8 %. Полученный синтетический рутил после магнитного обогащения содержал TiO_2 93,13; Ti_2O_3 8,2; Fe 2,13 %.

Понимание окислительно-восстановительных процессов титано-магнетитовых материалов должно базироваться на диаграммах состояния систем $Fe-O$, $Ti-O$ и $Fe-Ti-O$. Рис. 1 представляет проекцию диаграммы системы $Fe-O$ на координатную плоскость «температура–давление кислорода».

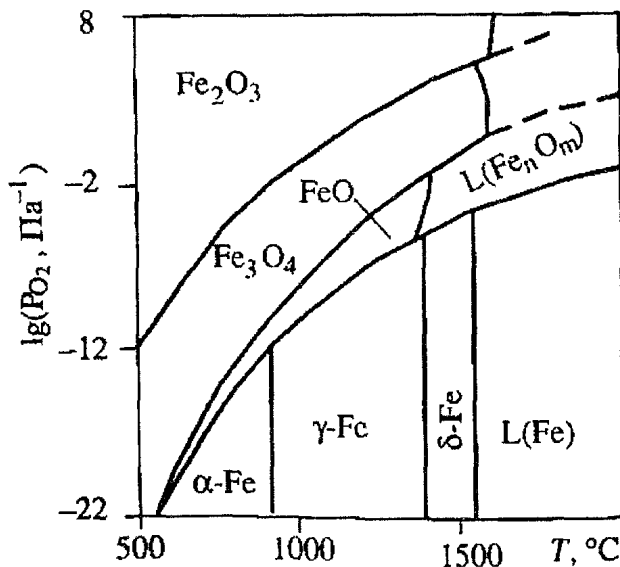


Рис. 1. Проекция диаграммы состояния системы $Fe-O$ на плоскость $P_{O_2}-T$

Титан образует с кислородом большое число оксидов: TiO , Ti_2O_3 , Ti_3O_5 , TiO_2 , гомологический ряд оксидов Ti_nO_{2n-1} (Ti_4O_7 , Ti_5O_9 , Ti_6O_{11} , Ti_7O_{13} , Ti_8O_{15} , Ti_9O_{17} , $Ti_{10}O_{19}$), именуемых фазами Магнелли. На рис. 2 приведён фрагмент проекции диаграммы состояния системы на координатную плоскость «давление кислорода–температура».

Детальное исследование системы $Fe-Ti-O$ выполнено автором работы [17]. На рис. 3 представлена диаграмма фазовых равновесий в системе $Fe-Ti-O$ при температуре 950 °С и линии, определяющие равновесные давления и составы равновесных фаз. С помощью этих диаграмм можно определить характер процессов окисления и восстановления в этой системе.

Например, состав продукта полного окисления ильменита $FeTiO_3$ определяется координатами точки *a*. Если считать, что при восстановлении ильменита сначала восстанавливается только Fe , то

состав промежуточного продукта восстановления будет определяться точкой *b*. Полное восстановление ильменита приведёт к получению металла с концентрациями компонентов 50 мол. %.

В нашей работе синтезированы вюстит $FeO_{1,067}$ и ильменит $FeO \cdot TiO_2$ ($FeTiO_3$). Сняты термодиаграммы процессов окисления ильменита, твёрдофазного восстановления углеродом вюстита, диоксида титана, исходного и окисленного ильменита. Окисление проводилось на воздухе при нагревании со скоростью 10 град/мин. Углерод добавлялся к восстанавливаемому

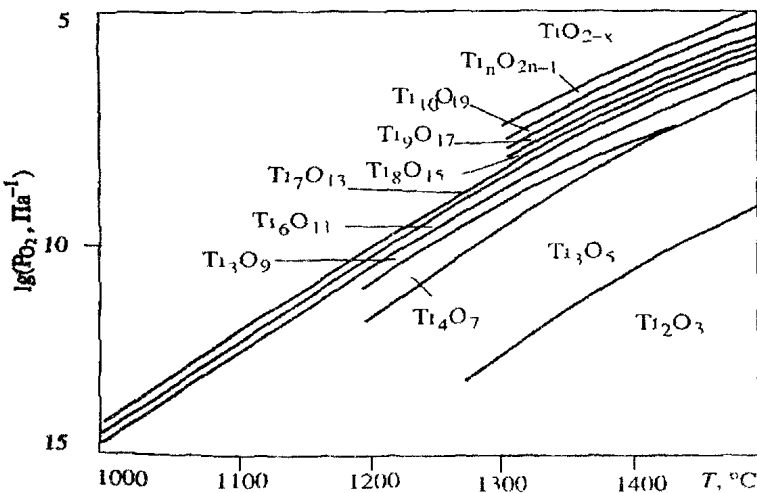


Рис. 2. Фрагмент проекции диаграммы состояния системы $Ti-O$ на координатную плоскость «давление кислорода–температура»

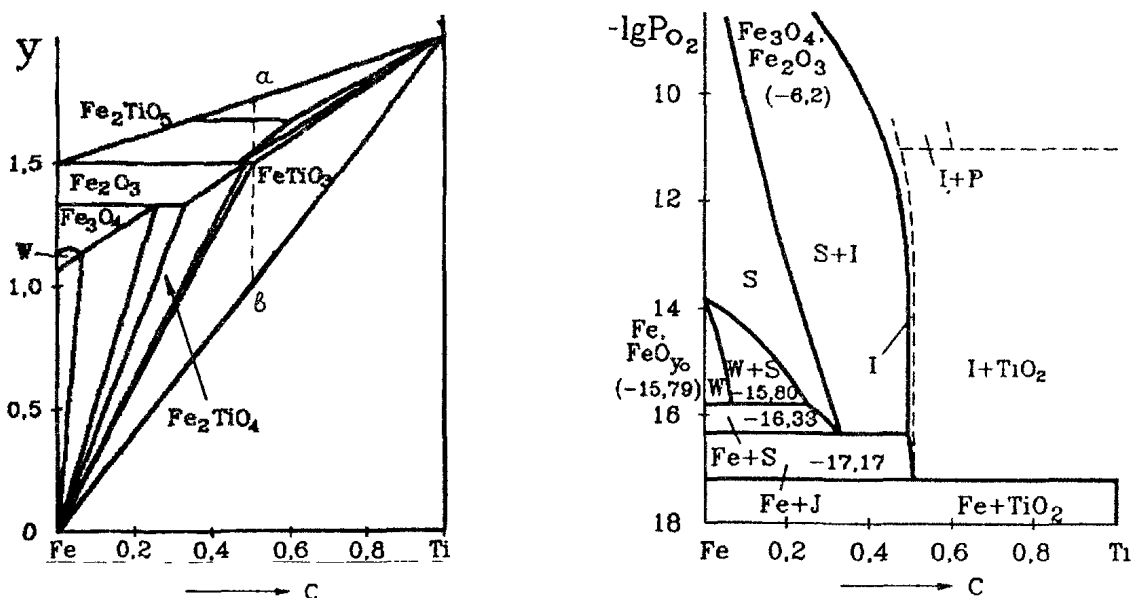


Рис. 3. Изотермические сечения диаграммы состояния системы Fe-Ti-O и равновесные давления кислорода (атм) при 1223 К: W – титанзамещённый вюстит; S – ульвошпинель; I – α-оксид; P – псевдобрукит

мым образцам с избытком по сравнению с количествами, необходимыми для полного восстановления. Избыток определялся по результатам холостого опыта. Термограммы процессов восстановления снимались либо в режиме непрерывного нагревания в атмосфере аргона со скоростью 15 град/мин, либо с изотермическими выдержками при достижении максимальной скорости восстановления.

Обсуждение результатов

Результаты дериватографических исследований окисления синтетического ильменита FeTiO₃ (FeO·TiO₂) позволяют количественно рассчитать степени окисления α_{ок} в зависимости от температуры (времени). Увеличение массы образца определяется только окислением железа Fe²⁺ до Fe³⁺, и на диаграмме фазовых равновесий (рис. 3) этому соответствует перемещение фигуративной точки по вертикали, соответствующей неизменному молярному отношению Fe/Ti = 1, до точки a. Валовый состав полностью окисленного образца ильменита можно определить формулой FeTiO_{3,5} (Fe₂O₃·2TiO₂). С учётом этого результаты расчёта степени окисления представлены на рис. 4. Как видно ильменит с заметной скоростью начинает окисляться при температурах около 400 °С, а при ~1000 °С степень окисления близка к 100 %.

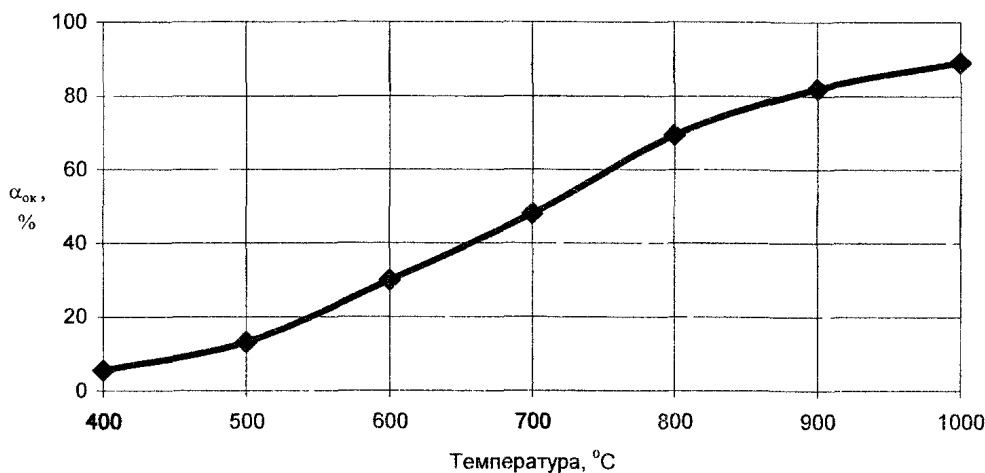
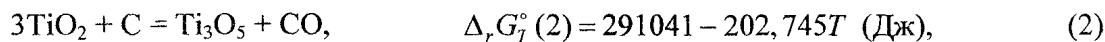
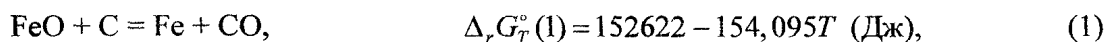


Рис. 4. Степень окисления ильменита на воздухе

Результаты дериватографических исследований восстановления вюстита $\text{FeO}_{1,067}$ и диоксида титана TiO_2 твёрдым углеродом в режиме непрерывного нагревания до $\sim 1500^\circ\text{C}$ представлены на рис. 5. Хотя результаты получены в динамическом (неравновесном) режиме их обсуждение возможно с учётом термодинамического анализа. Термодинамическая оценка твёрдофазных процессов восстановления оксидов твёрдым углеродом базируется на совместном анализе равновесий реакций



термодинамические характеристики которых определены по данным [18]. В простейшем случае системы $\text{Me}-\text{O}-\text{C}$, когда все конденсированные фазы MeO , Me и C – чистые вещества, их активности равны единице, а число степеней свободы по правилу фаз Гиббса

$$f = k + 2 - n = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Таким образом, трёхкомпонентная четырёхфазная система имеет одну степень свободы и уравнение

$$P_{\text{CO}} = \exp(-\Delta_r G_T^\circ / RT),$$

определяющее константы равновесия реакций (1) и (2), полностью описывает состояние равновесия, а температура – единственная независимая переменная. Другими словами, четырёхфазные равновесия (1) и (2) возможны при заданной температуре при строго определённых давлениях CO , которые задаются равновесием реакции газификации (3). Реакции (1) и (2) эндотермические, поэтому для них P_{CO} экспоненциально возрастают с повышением температуры. Результаты расчётов равновесных давлений CO для реакций восстановления вюстита и диоксида титана представлены на рис. 5 вместе с результатами расчёта равновесного давления CO для реакции газификации углерода (3). Такие расчёты позволяют оценить температуру начала углетермического восстановления оксида: для вюстита она составляет $\sim 700^\circ\text{C}$, а для диоксида титана $\sim 1150^\circ\text{C}$. Эти температуры удовлетворительно согласуются с результатами дериватографических исследований.

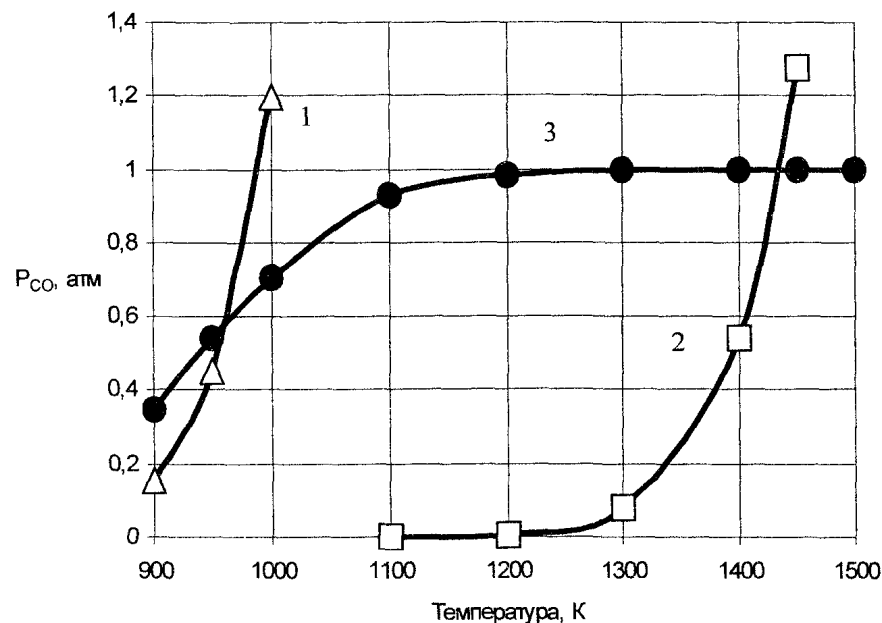


Рис. 5. Термодинамический анализ косвенного восстановления вюстита (1) и диоксида титана (2) с учетом реакции газификации (3)

более низких температурах, чем TiO_2 . Восстановление $\text{FeO}_{1,067}$ заканчивается уже при $\sim 1300^\circ\text{C}$, тогда как при этой температуре степень восстановления TiO_2 составляет лишь 7-8%. При температуре $\sim 1470^\circ\text{C}$ степень восстановления TiO_2 достигает 16,7%, что соответствует восстановлению TiO_2 до Ti_3O_5 .

Восстановление исходного ильменита начинается при температуре $\sim 1150^\circ\text{C}$. Если считать, что на начальных стадиях восстанавливается железо, то можно отметить, сравнивая эту температуру с температурой начала восстановления вюстита ($\sim 700^\circ\text{C}$), что связанный с TiO_2 оксид FeO восстанавливается труднее. Максимальная скорость восстановления наблюдается при $\sim 1400^\circ\text{C}$.

Оксидный ильменит начинает восстанавливаться при более низкой температуре, $\sim 850^\circ\text{C}$, и максимальная скорость восстановления наблюдается $\sim 1300^\circ\text{C}$. Расчёты степени восстановления исходного ильменита представлены на рис. 6. При непрерывном нагреве степень восстановления 55% через 100 минут к моменту достижения 1500°C . При этом наметилась тенденция к замедлению скорости восстановления. Интересны результаты расчёта степени восстановления при изотермических выдержках. За 90 минут выдержки при 1215°C степень восстановления увеличилась с $\sim 28\%$ до $\sim 60\%$, после быстрого увеличения температуры до 1300°C в течение последующей 100-минутной выдержки степень восстановления возросла с $\sim 60\%$ до $\sim 78\%$. В предположении полного восстановления Fe из ильменита степень восстановления должна составить $\sim 33\%$. Как видно из рис. 7, степень восстановления ильменита существенно превысила эту величину и при непрерывном нагревании, и при изотермических выдержках. Это означает, что восстанавливается и титан.

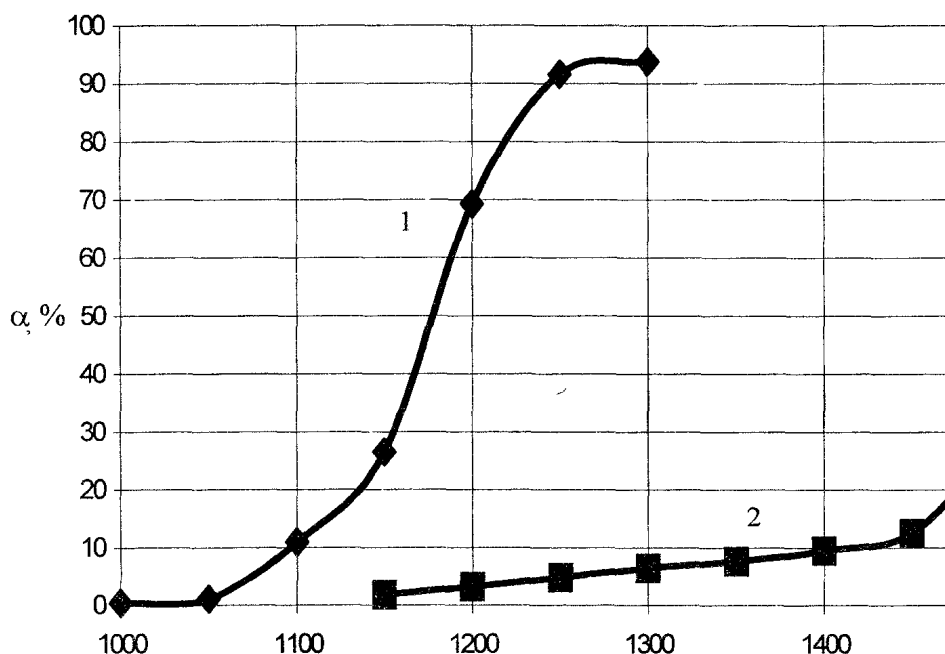


Рис. 6. Степени восстановления $\text{FeO}_{1,067}$ (1) и TiO_2 (2) твёрдым углеродом

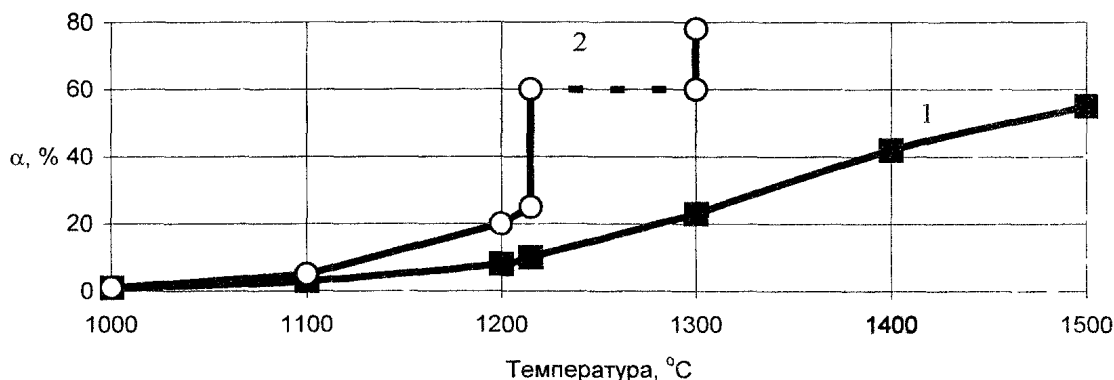


Рис. 7. Степени восстановления твёрдым углеродом ильменита при непрерывном нагреве (1) и с изотермическими выдержками (2)

Выводы

1. По результатам дериваграфических исследований окисление синтетического ильменита FeTiO_3 на воздухе начинается при температуре около 400°C . При $\sim 1000^\circ\text{C}$ степень окисления близка к 100 %.

2. Твердым углеродом вюстит восстанавливается при более низких температурах, чем TiO_2 . Восстановление $FeO_{1,067}$ заканчивается при $\sim 1300^\circ C$, тогда как при этой температуре степень восстановления TiO_2 составляет лишь 7–8%. При температуре $\sim 1470^\circ C$ степень восстановления TiO_2 достигает 16,7 %, что соответствует восстановлению TiO_2 до Ti_3O_5 .

3. Восстановление синтетического ильменита начинается при температуре $\sim 1150^\circ C$, то есть связанный с TiO_2 оксид FeO восстанавливается труднее. Максимальная скорость восстановления наблюдается при $\sim 1400^\circ C$. При непрерывном нагреве степень восстановления достигла 55% через 100 минут к моменту достижения $1500^\circ C$. За 90 минут выдержки при $1215^\circ C$ степень восстановления увеличилась с $\sim 28\%$ до $\sim 60\%$. После быстрого увеличения температуры до $1300^\circ C$ в течение последующей 100-минутной выдержки степень восстановления возросла с $\sim 60\%$ до $\sim 78\%$.

Работа выполнена по гранту Министерства образования РФ.

Литература

1. Гармата В.А., Петрунько А.Н., Галицкий Н.В. и др. Титан. Свойства, сырьевая база, физико-химические основы и способы получения. – М.: Металлургия, 1983. – 559 с.
2. Бардин И.П., Халимов Ф.Б. / В кн.: Титан и его сплавы. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – Вып. 2. – С. 16–32.
3. Резниченко В.А., Соломахова В.П. / В кн.: Металлургия и химия титана. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – Вып. 5. – С. 102–114.
4. Тагиров К.Х., Резниченко В.А., Руднева А.В. и др. Исследование электроплавки титаномагнетитов. – М.: Наука, 1965. – 153 с.
5. Резниченко В.А. Электротермия титановых руд. – М.: Наука, 1969. – 207 с.
6. Резниченко В.А., Устинов В.С., Карязин И.А., Петрунько А.Н. Электрометаллургия и химия титана. – М.: Наука, 1982. – 278 с.
7. Смирнов Л.А., Дерябин Ю.А., Шаврин С.В. Металлургическая переработка ванадийсодержащих титаномагнетитов. – Челябинск: Металлургия. Челяб. отдел., 1990. – 256 с.
8. Резниченко В.А., Садыхов Г.Б., Карязин И.А. Титаномагнетиты – сырьё для новой модели производства // Металлы. – 1997. – № 6. – С. 3–7.
9. Морозов А.А., Резниченко В.А., Синадский А.Ю., Карязин И.А. Металлургические свойства титаномагнетитового концентрата Курильской гряды и шлаков от его электроплавки // Металлы. – 1998. – № 2. – С. 3–5.
10. Зеленова И.М., Резниченко В.А., Синадский А.Ю., Олюлина Т.В. Изучение образования рутила при окислении низкотитанового шлака // Металлы. – 1994. – № 5. – С. 9–13.
11. Ализаде З.И., Халилова Х.Х. Окисление ванадия в процессе восстановленного обжига титаномагнетитовых концентратов природным газом в присутствии карбоната натрия // Журнал прикладной химии. – 1995. – Т. 68. – Вып. 6. – С. 898–903.
12. Садыхов Г.Б., Наумова Л.О., Резниченко В.А., Карязин И.А. Влияние соды на фазовые превращения при восстановлении титаномагнетитового концентрата водородом // Металлы. – 1994. – № 1. – С. 9–16.
13. Sun Kand, Takahashi Reijino, Yagi Jun-ichiro. Kinetics of oxidation and reduction of synthetic ilmenite // ISIJ International. – 1993. – V.33, № 5. – С. 523–528.
14. Reduction of titaniferous ores and apparatus: Пат. 5403379 США, МКИ⁵ С 21 В 13/08/George I. W.; Mineral Sands Ltd. – №60756; Заявл. 12.5.93; НКИ 75/478.
15. Lan Yaoshong, Liu Chunpend. Кинетика каталитического восстановления титаномагнетитового концентрата углеродом. *Jinshu xuebao = Acta met. sia.* – 1996. – V. 32, № 5. – С. 502–503.
16. Ma N., Warner N. A. Smelting reduction of ilmenite by carbon in molten pig iron. *Can. Met. Quart.* – 1999. – V. 38, № 3. – С. 165–173.
17. Лыкасов А.А. Термодинамика вюститных растворов. – Дисс... докт. хим. наук. – Челябинск, 1991. – С. 193–197.
18. Казачков Е.А. Расчёты по теории металлургических процессов: Учебное пособие для вузов. – М.: Металлургия, 1988. – 288 с.

**ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

№ 7 (07) 2001

**Серия
«МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ХИМИЯ»
Выпуск 1**

Издательство Южно-Уральского государственного университета

ИД № 00200 от 28.09 99. Подписано в печать 20.12.2001. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.

Усл. печ. л. 10,67. Уч.-изд. л. 11,16. Тираж 150 экз. Заказ 136/105.

Группа МЭНП Издательства. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.