



# ВЕСТНИК

**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2016  
Т. 8, № 1**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

**СЕРИЯ**

**«МАТЕМАТИКА.  
МЕХАНИКА.  
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

**Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (отв. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

**Редакционный совет**

д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (г. Берлин, Германия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.** (ЮУрГУ)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, ИННА-Университет, г. Инчон, Корея),  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.** (ЮУрГУ)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY  
SERIES

2016

Vol. 8, no. 1

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

**S.A. Zagrebina**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**E.V. Golubev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.P. Beskachko**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.I. Zalyapin**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**Yu.M. Kovalev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

**M.M. Brzhezinskaya**, Berlin, Germany

**V.I. Zhukovsky**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**V.V. Karachik**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**A.V. Keller**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**Jaewan Kim**, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea

**Kishik Kim**, INHA-University, Incheon, Korea

**N.D. Kundikova**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**D.A. Mirzaev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**S.I. Pinchuk**, Indiana University, Bloomington, United States of America

**E.S. Puzyrev**, Vanderbilt University, Nashville, USA

**S.B. Sapozhnikov**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**I. Verpoest**, Catholic University, Leuven, Belgium

**A.O. Chernyavskii**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.A. Strauss**, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

МАКАРОВСКИХ Т.А. О числе ОЕ-цепей для заданной системы переходов.....	5
НИКОЛАЕВ В.Г. Об отсутствии разрешимости задачи Шварца для некоторых типов матриц .....	13
СТАРКОВА О.С. Слабое и обобщенное по случайной переменной решения стохастической задачи Коши с аддитивным шумом .....	19
ТУРМЕТОВ Б.Х. Нормированные системы и их применение к построению решений дифференциальных уравнений дробного порядка .....	28

### Механика

ДОРОГОВ Ю.И. Моделирование потери устойчивости тяжёлого стержня на жёстком основании .....	34
УЛИТИН Г.М., ЦАРЕНКО С.Н. Метод усреднения в задачах о продольном ударе стержней переменного сечения .....	43

### Физика

РЕЧКАЛОВ В.Г. Моделирование конвекции в капле жидкости при ее испарении методом конечных элементов .....	49
--	----

### Краткие сообщения

ГУЛЯЩИХ И.А. Однородная задача Дирихле–Рикье для неоднородного бигармонического уравнения в шаре .....	57
МИРЗАЕВ Д.А., МИРЗОЕВ А.А., ЧИРКОВ П.В. Отпуск мартенсита в ходе быстрого нагрева.....	61

### Персоналии

АДУКОВ В.М., ДИЛЬМАН В.Л., ЗАЛЯПИН В.И., МЕНИХЕС Л.Д., ХАРИТОНОВА Е.В. Валерий Валентинович Карачик. К шестидесятилетию со дня рождения.....	66
ЗАГРЕБИНА С.А., ЗАЛЯПИН В.И., КИПНИС М.М., КОРЖАКОВА С.В., СВИРИДЮК Г.А. Анатолий Семёнович Макаров. К семидесятилетию со дня рождения.....	72

---

## CONTENTS

### Mathematics

MAKAROVSKIKH T.A. On the Number of OE-trails for a Fixed Transition System.....	5
NIKOLAEV V.G. About the Unsolvability of Schwarz's Task for Some Types of Matrices .....	13
STARKOVA O.S. Weak and Generalized with Random Variable Solutions of Stochastic Cauchy Problem with Additive White Noise.....	19
TURMETOV B.Kh. Normed Systems and their Application to the Solutions of Differential Equations of Fractional Order.....	28

### Mechanics

DOROGOY Yu.I. The Modeling of Loss in Stability of a Heavy Rod Placed on a Rigid Basis .....	34
ULITIN G.M., TSARENKO S.N. Method of Averaging for the Tasks on Longitudinal Impact of Variable Section Rods .....	43

### Physics

RECHKALOV V.G. Modeling of Convection in the Liquid Drop by its Evaporation Using Finite Element Method.....	49
--	----

### Short communications

GULYASHIKH I.A. Homogeneous Dirichlet–Riquier Problem for Inhomogeneous Biharmonic Equation in a Ball .....	57
MIRZAEV D.A., MIRZOEV A.A., CHIRKOV P.V. Martensite Tempering during Fast Heating ....	61

### Personalia

ADUKOV V.M., DILMAN V.L., ZALYAPIN V.I., MENIKHES L.D., KHARITONOVA E.V. Valery Valentinovich Karachik. To the 60 <sup>th</sup> Anniversary .....	66
ZAGREBINA S.A., ZALYAPIN V.I., KIPNIS M.M., KORZHAKOVA S.V., SVIRIDYUK G.A. Anatoliy Semenovich Makarov. To the 70 <sup>th</sup> Anniversary .....	72

## О ЧИСЛЕ ОЕ-ЦЕПЕЙ ДЛЯ ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Т.А. Макаровских<sup>1</sup>

Ранее установлено существование *ОЕ*-цепи в плоском эйлеровом графе и предложен алгоритм построения такой цепи. В статье исследуется вопрос о числе *ОЕ*-цепей с системой переходов, индуцируемой отдельной *ОЕ*-цепью и установлено, что верхняя оценка этого числа не превышает удвоенной суммы количества вершин, смежных внешней грани, и суммы степеней разделяющих вершин. Построенная оценка достижима, если система переходов является системой переходов *A*-цепи. Исследован вопрос существования *ОЕ*-цепей, удовлетворяющих произвольной системе переходов.

*Ключевые слова:* плоский граф; эйлеров цикл; система переходов; *A*-цепь; упорядоченное охватывание.

### Введение

В настоящее время активно развивается раздел теории графов, посвященный построению различных цепей с ограничениями. Данный интерес обусловлен тем, что граф является математической моделью объектов из различных прикладных областей.

Например, при технологической подготовке процесса раскроя в качестве математической модели раскройного плана рассматривается топологический плоский граф  $G$ , который с точностью до гомеоморфизма отображает раскройный план. Задача заключается в построении в графе  $G$  маршрута, представляющего собой покрытие упорядоченным множеством цепей, удовлетворяющих следующим ограничениям на траекторию движения режущего инструмента:

(P1) отрезанная часть листа не должна требовать дополнительных разрезов (данная задача рассмотрена в [1, 2]);

(P2) при огненной резке (*flame cutting*) должны отсутствовать пересечения резов [3].

В работе [4] для плоских эйлеровых графов введено понятие *ОЕ*-цепи и предложен алгоритм ее построения. Понятие *ОЕ*-цепи решает задачу с ограничением (P1). Если граф является полуэйлеровым и хотя бы одна из вершин нечетной степени смежна внешней грани, то применение алгоритма из работы [4] с небольшими модификациями решает задачу и в этом случае. В работе [1] решена задача с ограничением (P1) для плоских связных графов  $G$  общего вида. Задача решается построением *ОЕ*-маршрута, представляющего минимальное по мощности упорядоченное реберно-непересекающееся покрытие графа *ОЕ*-цепями. Таким образом, любая *ОЕ*-цепь в построенном *ОЕ*-маршруте покрывает некоторый полуэйлеров подграф графа  $G$ .

В связи с изложенным выше представляет интерес оценка количества *ОЕ*-цепей в эйлеровом графе. Любая *ОЕ*-цепь индуцирует систему переходов [5], для которой существует множество *ОЕ*-цепей  $M$ . В результате встает задача оценки мощности множества  $M$ .

### 1. Основные определения

Общепринято формализовать локальные ограничения на маршрут в терминах системы переходов. Приведем определения системы переходов из монографии [5].

**Определение 1.** *Графом разрешенных переходов (или короче, графом переходов)  $T_G(v)$  вершины  $v \in V(G)$  будем называть граф, вершинами которого являются ребра, инцидентные вершине  $v$ , т.е.  $V(T_G(v)) = E_G(v)$ , а множеством ребер – разрешенные переходы между ребрами.*

<sup>1</sup> Макаровских Татьяна Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Экономико-математические методы и статистика», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: kward@mail.ru, paniukovata@susu.ac.ru

**Определение 2.** Системой разрешенных переходов (или короче, системой переходов)  $T_G$  будем называть множество  $\{T_G(v) \mid v \in V(G)\}$ , где  $T_G(v)$  – граф переходов в вершине  $v$ .

В соответствии с работой [6] будем использовать следующее определение.

**Определение 3.** Эйлеров цикл в плоском графе  $G$  называется **самонепересекающимся**, если он гомеоморфен циклическому графу  $\tilde{G}$ , который может быть получен из графа  $G$  с помощью применения  $|E(G)|$  операций расщепления вершин.

**Определение 4.** Систему переходов цепи, соответствующую самонепересекающейся цепи, будем называть **системой непересекающихся переходов**.

Далее рассмотрим задачу пересчета цепей в графе  $G$ , совместимых с системой переходов  $X_T(G)$  некоторой цепи  $T$ , удовлетворяющей условию упорядоченного охватывания [4].

**Определение 5.** Пусть  $S$  – плоскость, на которой представлен плоский граф  $G = (V, E)$ . Пусть  $f_0$  – внешняя грань графа  $G$ . Для любого подмножества  $H \subset S$  через  $\text{Int}(H)$  определим подмножество  $S$ , являющееся объединением всех компонент связности множества  $S \setminus H$ , не содержащих внешней грани  $f_0$ . При этих условиях цикл  $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k$  в плоском эйлеровом графе  $G$  называется **циклом с упорядоченным охватыванием** (или для краткости **ОЕ-циклом**), если для  $C_l = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_l$ ,  $l \leq |E|$  выполнено условие  $\text{Int}(C_l) \cap E = \emptyset$ .

Построенный в графе ОЕ-цикл  $T(G)$  однозначно определяет систему переходов  $X_T(G)$  графа  $G$ . Например, для графа, приведенного на рис. 1, цикл

$$C_1 = v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2 e_5 v_3 e_4 v_1$$

соответствует системе переходов  $X_{C_1}(G)$ , представленной жирными линиями на рис. 1.

Для дальнейших рассуждений потребуются понятие **ранг** ребра  $e$  в плоском графе  $G(V, E)$  [1], в работе [1] эта величина определялась как уровень вложенности.

**Определение 6.** Рангом ребра  $e$ , обозначаемым как  $\text{rank}(e)$ , плоского графа  $G(V, E)$  является величина, определенная следующим образом:

- все ребра, ограничивающие внешнюю грань  $f_0$  графа  $G(V, E)$ , образуют множество ребер  $E_1 = \{e \in E : e \subset f_0\}$  ранга 1:  $(\forall e \in E_1)(\text{rank}(e) = 1)$ .

- Ребра ранга 1 для графа

$$G_k \left( V, E \setminus \left( \bigcup_{l=1}^{k-1} E_l \right) \right)$$

образуют множество  $E_k$  ребер ранга  $k$  исходного графа  $G$ , т.е.  $(\forall e \in E_k)(\text{rank}(e) = k)$ .

Таким образом, ранги всех ребер графа возможно определить рекурсивно за полиномиальное время [7]. С помощью введенных определений покажем, что при соответствующем выборе начальной вершины и начального ребра ОЕ-цикла возможно построить и другие ОЕ-циклы, удовлетворяющие той же системе переходов.

## 2. О числе ОЕ-циклов

Рассмотрим плоский эйлеров граф  $G$  и построенный в нем, например, с использованием алгоритма из [7] ОЕ-цикл  $T$ . Если  $X_T(G)$  – система переходов, соответствующая циклу  $T$ , тогда справедливо следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $G(V, E)$  – плоский эйлеров граф без точек сочленения и  $T$  представляет ОЕ-цепь в графе  $G$ , которой соответствует система переходов  $X_T(G)$ . Тогда число ОЕ-цепей  $N$  для системы переходов  $X_T(G)$  удовлетворяет неравенству  $1 \leq N \leq 2 \cdot |V(f_0)|$ ,  $V(f_0) = \{v \mid v \in f_0\}$ , причем как верхняя, так и нижняя оценки достижимы.

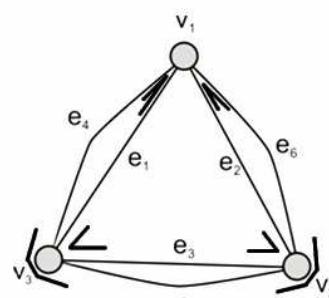


Рис. 1. Пример графа с системой непересекающихся переходов

**Доказательство.** Существование ОЕ-цепи  $T$  доказано в работе [4], откуда следует нижняя оценка. Зафиксируем систему переходов  $X_T(G)$  ОЕ-цепи  $T$ . Для данной системы переходов все вершины множества  $V(f_0)$  можно разбить на два класса:  $V_1 = \{v \mid E(T_G(v)) \in \{e_1, e_2\}, e_1, e_2 \in f_0\}$  и  $V_2 = \{v \mid E(T_G(v)) \in \{e_1, e_2\}, e_1, e_2 \notin f_0\}$ . Система переходов для  $v \in V_1$  допускает не более двух ОЕ-цепей, стартующих с ребер, ограничивающих внешнюю грань. Если предположить, что цепь стартует с ребра, которое не принадлежит внешней грани, то она и закончится ребром, которое не принадлежит внешней грани, что не удовлетворяет требованию ОЕ-цепи. Для вершин из множества  $V_2$ , наоборот, построение ОЕ-цепи возможно только при условии старта по ребру, не принадлежащему внешней грани. В противном случае при возврате в выбранную вершину  $v$  будет охвачено по крайней мере одно ребро, не смежное внешней грани. Таким образом, заданная система переходов допускает не более  $2 \cdot |V(f_0)|$  ОЕ-цепей. Покажем, что эта оценка достижима. Рассмотрим граф, приведенный на рис.1. В этом графе ОЕ-цепь  $C_{1,1} = v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2 e_5 v_3 e_4 v_1$  индуцирует систему переходов  $X_{C_{1,1}}(G) = \{T_G(v_1), T_G(v_2), T_G(v_3)\}$ , где

$$\begin{aligned} V(T_G(v_1)) &= \{e_1, e_2, e_4, e_6\}; E(T_G(v_1)) = \{\{e_1, e_4\}, \{e_2, e_6\}\}; \\ V(T_G(v_2)) &= \{e_2, e_3, e_5, e_6\}; E(T_G(v_2)) = \{\{e_2, e_3\}, \{e_5, e_6\}\}; \\ V(T_G(v_3)) &= \{e_1, e_3, e_4, e_5\}; E(T_G(v_3)) = \{\{e_1, e_3\}, \{e_4, e_5\}\}. \end{aligned}$$

Для вершины  $v_1$  существует еще одна ОЕ-цепь  $C_{1,2} = v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_1 v_1 e_4 v_3 e_5 v_2 e_6 v_1$ . При этом для вершины  $v_2 \in f_0$  ОЕ-цепи  $C_{2,1} = v_2 e_6 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_1 v_1 e_4 v_3 e_5 v_2$  и  $C_{2,2} = v_2 e_5 v_3 e_4 v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2$  удовлетворяют системе переходов  $X_{C_{1,1}}(G)$ , а для вершины  $v_3$  данной системе удовлетворяют ОЕ-цепи  $C_{3,1} = v_3 e_4 v_1 e_1 v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2 e_5 v_3$  и  $C_{3,2} = v_3 e_5 v_2 e_6 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_1 v_1 e_4 v_3$ . Таким образом в графе из трех вершин имеется шесть  $X_T(G)$ -совместимых ОЕ-цепей.

Рассмотрим теперь тот же граф с другой системой переходов  $X_C(G)$  (рис. 2). Основным отличием данной системы переходов от системы переходов, заданной на рис.1, является наличие пересечений переходов в вершинах  $v_2$  и  $v_3$ .

В данном случае граф имеет единственную ОЕ-цепь

$$C = v_2 e_3 v_3 e_4 v_1 e_1 v_3 e_5 v_2 e_2 v_1 e_6 v_2$$

для заданной  $X_C(G)$ . В случае выбора как вершины  $v_1$ , так и вершины  $v_3$  получим, что цикл  $v_1 e_1 v_3 e_5 v_2 e_2 v_1$  охватывает еще непройденное ребро  $e_3$ . Заметим, что стартовым ребром в данном случае может быть только ребро  $e_3$ . Следовательно, достижима и нижняя оценка.

С практической точки зрения особый интерес представляют графы, для которых верхняя оценка достижима. Из доказательства предложения 1 видно, что не всякий ОЕ-цикл индуцирует систему переходов, для которой будет достигаться верхняя оценка. Отметим также, что для нахождения подходящей системы переходов, для которой достигается верхняя оценка, недостаточно знать только начальную вершину и начальное ребро.

### 2.1. Число ОЕ-циклов для системы переходов, соответствующей А-цепи

Рассмотрим эйлерову цепь  $T = v_0, k_1, v_1, \dots, k_n, v_n, v_n = v_0$  в графе  $G = (V, E)$ . Предположим, что в каждой вершине  $v \in V$  задан циклический порядок  $O^\pm(v)$ , определяющий систему переходов  $A_G(v) \subset O^\pm(v)$  в этой вершине.

**Определение 7.** Систему переходов  $A_G(v)$  называют полной, если  $\forall v \in V(G) A_G(v) = O^\pm(v)$ .

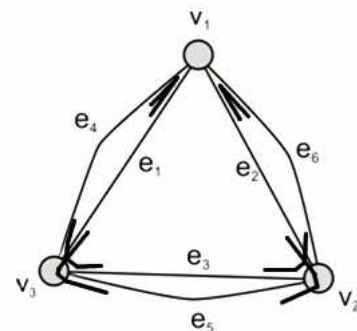


Рис. 2. Пример графа с системой переходов, имеющей пересечения

**Определение 8 [5].** Эйлерову цепь  $T$  будем называть  $A$ -цепью, если она является  $A_G$ -совместимой цепью. Таким образом, последовательные ребра в цепи  $T$  (инцидентные вершине  $v$ ) являются соседями в циклическом порядке  $O^\pm(v)$ .

Очевидно, что пример, приведенный на рис. 1, удовлетворяет данному случаю. Для системы переходов, соответствующей  $A$ -цепи, справедливо следующее утверждение об  $OE$ -циклах.

**Теорема 1.** Пусть плоский граф  $G = (V, E)$  без разделяющих вершин имеет  $A$ -цепь  $T$ , которой соответствует система переходов  $X_T(G)$ . Если  $V(f_0)$  – множество вершин, смежных внешней грани, то число  $OE$ -циклов для  $X_T(G)$  равно  $2 \cdot |V(f_0)|$ .

**Доказательство.** Доказательство факта, что  $A$ -цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине  $v_0 \in f_0$ , является  $OE$ -циклом приведено в [8].

Подсчитаем число  $OE$ -циклов для фиксированной системы переходов. В [6] доказано, что любой  $OE$ -цикл начинается в вершине  $v \in f_0$  и завершается ребром  $e \in f_0$ . В соответствии с условием теоремы, любая вершина  $v_j \in f_0, j = 1, \dots, |V(f_0)|$  не является разделяющей, поэтому имеет ровно два инцидентных ей ребра, смежных внешней грани  $f_0$ . Так как система переходов соответствует  $A$ -цепи, если по одному из этих ребер достигается вершина  $v_j$ , то по другому цепь выходит из этой вершины. Если оба этих ребра используются только для достижения вершины, то не выполнено условие упорядоченного охватывания (в этом случае одно из этих входящих в вершину ребер оказывается пройдено раньше, чем были пройдены некоторые внутренние ребра). Если оба ребра используются только для покидания вершины, то в системе переходов  $X_T(G)$  возникнут пересечения. Однако такая система переходов не соответствует системе переходов  $A$ -цепи.

Так как  $A$ -цепь является замкнутой последовательностью ребер и вершин, то ее начало может быть помещено в любую вершину, например, в  $v_j \in f_0$ . Если  $v_j$  является последней вершиной  $OE$ -цепи, то необходимо, чтобы в последовательности  $e_{j-1}v_j e_j$  ребро  $e_{j-1} \in f_0$ . Действительно, в противном случае последнее ребро  $e_{j-1}$   $OE$ -цепи окажется охваченным циклом из ребер, смежных внешней грани. Если за начало цепи принять некоторую вершину  $v \in V(f_0)$ , то в соответствии с предопределенным циклическим порядком  $O^\pm(G)$  можно выбрать одно из двух инцидентных ребер для покидания текущей вершины. Следовательно, из произвольной вершины  $v \in V(f_0)$  можно построить два  $OE$ -цикла. Так как существует  $|V(f_0)|$  вершин, смежных внешней грани, число  $OE$ -циклов, соответствующих системе переходов для  $A$ -цепи, равно  $2 \cdot |V(f_0)|$ .

Если в графе  $G(V, E)$  имеется несколько разделяющих вершин, то для системы  $X_T(G)$ , соответствующей  $A$ -цепи в данном графе, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть плоский граф  $G = (V, E)$  имеет  $K$  разделяющих вершин  $v_1, \dots, v_K \in f_0$  и пусть в этом графе существует  $A$ -цепь  $T$ . Пусть  $X_T(G)$  – система переходов, соответствующая  $T$ , а  $V(f_0)$  – множество вершин, смежных внешней грани. Существует

$$2 \cdot |V(f_0)| + \sum_{i=1}^K (\deg(v_i) - 2)$$

$OE$ -циклов для  $X_T(G)$ .

**Доказательство.** В соответствии с теоремой 1 граф  $G$  без разделяющих вершин имеет ровно  $2 \cdot |V(f_0)|$   $OE$ -циклов для системы переходов, соответствующей некоторой  $A$ -цепи. Пусть  $v_i \in V(f_0)$  – разделяющая вершина степени  $\deg(v_i) = 2M_i$ . В циклическом порядке ребер, соответствующем данной вершине, имеется ровно  $M_i$  ребер, по которым цепь достигает данную вершину и столько же ребер, по которым она покидает эту вершину. Одна пара ребер уже подсчитана в  $|V(f_0)|$ , но не учитывается еще  $M_i - 1$  возможность начала  $OE$ -цикла. Суммируя по всем разделяющим вершинам, получим выражение, указанное в формулировке теоремы.

Заметим, что если  $X_T(G)$  не соответствует  $A$ -цепи, то верхняя оценка не достигается даже если цепь  $T$  является самонепересекающейся. Подтверждением данного факта является пример,



приведенный на рис. 3. В приведенном графе не существует *A*-цепи, однако можно определить систему непересекающихся переходов  $X_T(G)$ . Для этого графа при заданной системе переходов  $X_T(G)$ , приведенной на рис. 3, существует только пять *OE*-цепей, начинающиеся в разных вершинах на внешней грани:

- $C_1 = v_0 e_7 v_1 e_1 v_0 e_2 v_1 e_4 v_2 e_5 v_1 e_6 v_2 e_3 v_0 e_9 v_2 e_8 v_0$ ;
- $C_2 = v_0 e_8 v_2 e_9 v_0 e_3 v_2 e_6 v_1 e_5 v_2 e_4 v_1 e_2 v_0 e_1 v_1 e_7 v_0$ ;
- $C_3 = v_1 e_1 v_0 e_2 v_1 e_4 v_2 e_5 v_1 e_6 v_2 e_3 v_0 e_9 v_2 e_8 v_0 e_7 v_1$ ;
- $C_4 = v_2 e_3 v_0 e_9 v_2 e_8 v_0 e_7 v_1 e_1 v_0 e_2 v_1 e_4 v_2 e_5 v_1 e_6 v_2$ ;
- $C_5 = v_2 e_9 v_0 e_3 v_2 e_6 v_1 e_5 v_2 e_4 v_1 e_2 v_0 e_1 v_1 e_7 v_0 e_8 v_2$ .

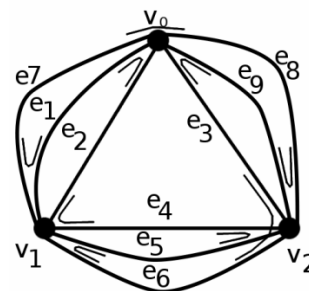


Рис. 3. Пример графа с системой непересекающихся переходов, не допускающей *A*-цепь

При построении цепи из вершины  $v_1$  возможно построение цепи, начинающейся либо с ребра  $e_1$  (в этом случае будет построена цепь  $C_3$ , последним ребром которой будет  $e_7$ ), либо с ребра  $e_5$  (в этом случае последним в цепи будет ребро  $e_6$ , однако построенная цепь  $C_6 = v_1 e_5 v_2 e_4 v_1 e_2 v_0 e_1 v_1 e_7 v_0 e_8 v_2 e_9 v_0 e_3 v_2 e_6 v_1$  не будет являться *OE*-цепью, т.к. ребра  $e_9$  и  $e_3$  к моменту их включения в цепь окажутся охваченными).

В общем случае система переходов  $X_T(G)$ , соответствующая любой *OE*-цепи, может иметь пересечения (пример цепи, соответствующей системе переходов с пересечениями, приведен на рис. 2). Таким образом, в данном случае число *OE*-цепей лежит в интервале от 1 до  $2 \cdot |V(f_0)|$ .

### 3. Необходимое условие существования *OE*-цепи для заданной системы переходов

Рассмотрим частный случай, когда граф  $G(V, E)$  является 4-регулярным плоским графом. Тогда в  $G$  существует эйлерова цепь  $T$  с соответствующей ей системой переходов  $X_T(G)$ . Выше было доказано, что если  $X_T(G)$  не имеет пересечений, тогда число *OE*-цепей для этой системы переходов равно  $2 \cdot |V(f_0)|$ .

Предположим, что система переходов  $X_T(G)$  имеет хотя бы один пересекающийся переход. В общем случае существование *OE*-цепи определяется как наличием пересечений в системе переходов, так и их расположением. Например, в графе на рис. 4 приведена система переходов с единственным пересечением, для которой не существует *OE*-цепи.

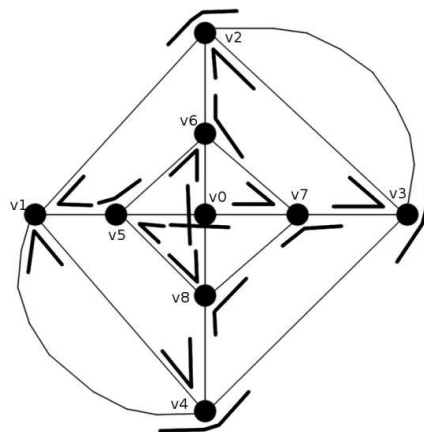


Рис. 4. Пример системы переходов с единственным пересечением, которая не соответствует ни одной *OE*-цепи

Тем не менее, если изменить всего два перехода, то получим систему переходов, которой соответствует некоторая *OE*-цепь. Например, заменив всего два перехода (в вершинах  $v_1$  и  $v_2$ ), получим *OE*-цепь  $v_2 v_6 v_7 v_0 v_5 v_8 v_0 v_6 v_3 v_1 v_4 v_8 v_7 v_3 v_2 v_3 v_4 v_1 v_2$  (рис. 5). Граф на рис.6 имеет систему переходов с тремя пересечениями, которой соответствует также одна *OE*-цепь. Более того, несложно найти примеры графов, имеющих до  $|V(f_0)|$  *OE*-цепей для систем переходов с пересечениями.

Прежде чем привести утверждения для 4-регулярных графов, докажем следующее.

**Предложение 2.** Если система переходов  $X_T(G)$  для некоторой эйлеровой цепи  $T$  2-вершинно-связного 4-регулярного плоского графа  $G$  без разделяющих вершин имеет только пересекающиеся переходы, то  $X_T(G)$  не соответствует ни одной *OE*-цепи в графе  $G$ .

**Доказательство.** Построим модифицированный граф  $G^*$ , полученный из графа  $G$  расщеплением вершин, имеющих непересекающиеся переходы. Таким образом, если для некоторой вершины  $v$  графа  $G^*$  ее степень  $\deg(v) > 2$ , то в этой вершине существует пересекающийся переход

как в графе  $G^*$ , так и в графе  $G$ . С точностью до гомеоморфизма будем считать, что все вершины графа  $G^*$  имеют степень больше 2, следовательно, во всех вершинах графа  $G^*$  имеются пересекающиеся переходы. Предположим, что заданная в условии утверждения система переходов  $X_T(G)$  соответствует некоторой  $OE$ -цепи  $T$ . Рассмотрим 2-вершинно-связный граф  $G^*$  (как было сказано выше, имеющий только вершины с пересекающимися переходами) и цепь, начинающуюся с ребра  $e_0$  (на рис. 7 представлены фрагменты такого графа).

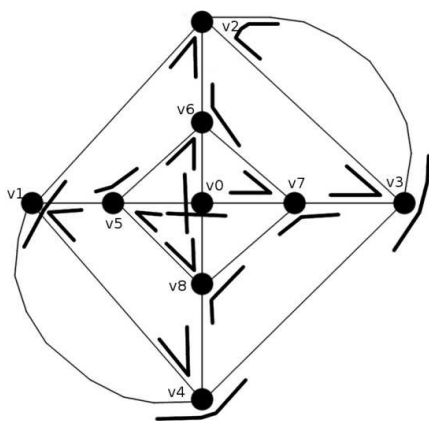


Рис. 5. Пример системы переходов, соответствующей одной  $OE$ -цепи

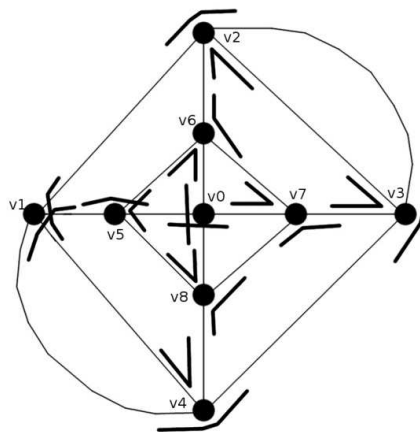


Рис. 6. Еще один пример системы переходов, которой соответствует единственная  $OE$ -цепь

Все ребра, представленные на рис. 7, являются абстрактными и могут представлять различные множества ребер. В соответствии с заданной системой переходов, после  $e_0$  цепь проходит по «ребру»  $e_2$ . Так как вершина  $x_0$  не является разделяющей, то цепь, начинающаяся с «ребра»  $e_2$ , должна будет пройти по «ребру»  $e_3$ , пересечься с «ребром», смежным  $e_0$ , и вернуться в вершину  $x_0$ . Непосредственно из построения следует, что  $e_4$  в данном случае окажется охваченным циклом, следовательно, построенная цепь не является  $OE$ -цепью. Легко видеть, что подобное охватывание возникает и для цепей, начинающихся и с других «ребер».

Рассмотрим эйлерову цепь  $T$ , соответствующую системе переходов  $X_T(G)$  4-регулярного плоского графа  $G(V, E)$ . Построим редуцированный граф  $G'(V', E)$ , в котором вершины, не имеющие пересечений переходов в  $X_T(G)$ , расщеплены на две вершины. В соответствии с предложением 2, если в графе  $G'$  найдется блок, не являющийся циклом, то в графе  $G$  для заданной системы переходов не существует  $OE$ -цепи.

С другой стороны, граф  $G'$  имеет  $OE$ -цепь только в том случае, когда каждый блок в  $G'$  имеет  $OE$ -цепь. Доказательство данного факта очевидно, т.к. все блоки редуцированного графа обходятся последовательно один за другим. Таким образом, если предположить, что существует блок, не имеющий  $OE$ -цепи, тогда этот блок, объединенный с остальными, никаким образом не будет иметь такой цепи.

Изложенное дает доказательство теоремы 3.

**Теорема 3 (Необходимое условие).** *Если в редуцированном графе  $G'$  существует  $OE$ -цепь, соответствующая заданной системе переходов, то в исходном графе  $G$  существует хотя бы одна  $OE$ -цепь, начинающаяся в вершинах, соответствующих разделяющим вершинам графа  $G'$ .*

К сожалению, данное условие не является достаточным даже для 4-регулярного графа с заданной системой переходов. Например, редуцированный граф  $G'$  для графа  $G$ , представленного на рис.4, является парой петель, инцидентных висячей вершине  $v_0$ . В редуцированном графе  $G'$

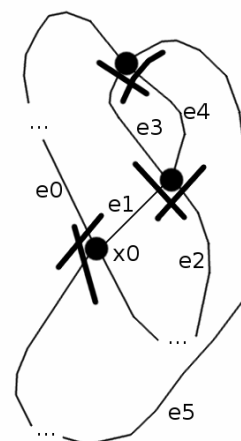


Рис. 7. Некоторые фрагменты графа, имеющего только пересекающиеся переходы

существует *OE*-цепь, тем не менее, выше было показано, что для данной системы переходов не существует *OE*-цепи в графе  $G$ . Вообще, вершина  $v_0$  в рассмотренном примере несмежна внешней грани, потому из данной вершины невозможно начать построение *OE*-цепи. Но если начать построение цепи из любой вершины смежной внешней грани, построить *OE*-цепь для заданной системы  $X_T(G)$  также не удастся. Несмотря на это, в редуцированном графе  $G'$  имеется *OE*-цепь.

### Заключение

Таким образом, в плоском графе  $G$  для непересекающейся системы переходов  $X_T(G)$  существует не более  $2 \cdot |V(f_0)|$  (где  $|V(f_0)|$  – число вершин, смежных внешней грани графа) *OE*-цепей. Если система переходов  $X_T(G)$  имеет пересечения, то число ее *OE*-цепей лежит в промежутке от 1 до  $2 \cdot |V(f_0)|$  только тогда, когда в редуцированном графе  $G'$  существует *OE*-цепь. Данные результаты могут быть использованы при технологической подготовке процесса вырезания деталей, когда раскройный план представлен в виде плоского графа, траектория движения режущего инструмента является *OE*-цепью и требуется определить все возможные точки старта процесса вырезания при фиксированной последовательности вырезания деталей.

Автор благодарит Герберта Фляйшнера, профессора Технического университета г. Вены, за постановку задачи и плодотворное обсуждение.

### Литература

1. Панюкова, Т.А. Оптимальные эйлеровы покрытия с упорядоченным охватыванием для плоских графов / Т.А. Панюкова // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 2. – С. 64–74.
2. Makarovskikh, T.A. The Algorithm for Constructing of Cutter Optimal Path / T.A. Makarovskikh // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 2. – P. 52–61.
3. Фроловский, В.Д. Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ / В.Д. Фроловский // Информационные технологии в проектировании и производстве. – 2005. – Вып. 4. – С. 63–66.
4. Panioukova, T.A. The Algorithm for Tracing of Flat Euler Cycles with Ordered Enclosing / T.A. Panioukova, A.V. Panyukov // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. – 2000. – № 4(9). – P. 18–22.
5. Fleischner, H. Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol. 1 / H. Fleischner // Ann. Discrete Mathematics. – 1990. – Vol. 45. – 450 с.
6. Белый, С.Б. О самонепересекающихся и непересекающихся цепях / С.Б. Белый // Математические заметки. – 1983. – № 34. – Вып. 4. – С. 625–628.
7. Панюкова, Т.А. Обходы с упорядоченным охватыванием в плоских графах / Т.А. Панюкова // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. – 2006. – Т. 13, № 2. – С. 31–43.
8. Панюкова, Т.А. Построение эйлеровых циклов с упорядоченным охватыванием как математическая модель решения задачи раскроя / Т.А. Панюкова // Современные информационные технологии и ИТ-образование: сборник избранных трудов VIII Международной научно-практической конференции. Под ред. проф. В.А. Сухомлина. М.: ИНТУИТ.РУ, 2013. – С. 706–713.

*Поступила в редакцию 29 июня 2015 г.*

## ON THE NUMBER OF OE-TRAILS FOR A FIXED TRANSITION SYSTEM

**T.A. Makarovskikh<sup>1</sup>**

The existence of OE-trail for a plane Eulerian graph had been established earlier and algorithm of its constructing was suggested. This paper is devoted to a question of enumeration of OE-trails for a system of transitions induced by a particular OE-trail. The upper bound of this estimation does not exceed the double sum of vertices adjacent the outer face and sum of cutvertices degrees. This bound is reachable if a transition system satisfies any A-trail. The number of OE-trails for an arbitrary chosen transition system is also examined.

*Keywords: planar graph; Eulerian cycle; transition system; A-trail; ordered enclosing.*

### References

1. Panyukova T.A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy*. 2011, Vol. 18, no. 2, pp. 64–74. (in Russ.).
2. Makarovskikh T.A. The Algorithm for Constructing of Cutter Optimal Path. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 52–61.
3. Frolovskiy V.D. *Informatsionnye tekhnologii v proektirovanii i proizvodstve*, 2005, Issue 4, pp. 63–66. (in Russ.).
4. Panioukova T.A., Panyukov A.V. The Algorithm for Tracing of Flat Euler Cycles with Ordered Enclosing. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra UrO RAN*, 2000, no. 4(9), pp. 18–22.
5. Fleischner H. *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol. 1*. Ann. Discrete Mathematics. North Holland, Amsterdam, 1990, Vol. 45, 450 p.
6. Belyy S.B. *Matematicheskie zametki*, 1983, no. 34, Issue 4, pp. 625–628. (in Russ.).
7. Panyukova T.A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 2*, 2006, Vol. 13, no. 2, pp. 31–43. (in Russ.).
8. Panyukova T.A. Postroenie eylerovykh tsiklov s uporyadochennym okhvatyvaniem kak matematicheskaya model' resheniya zadachi raskroya [Construction of Euler cycles ordered grapple as a mathematical model of solving the cutting problem]. *Sovremennyye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie: sbornik izbrannykh trudov VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Pod red. prof. V.A. Sukhomlina* [Modern information technology and IT education: Proceedings of the VIII International Scientific and Practical Conference. prof. VA Sukhomlin (Ed.)]. Moscow, INTUIT.RU Publ., 2013, pp. 706–713. (in Russ.).

*Received 29 June 2015*

---

<sup>1</sup> Makarovskikh Tatiana Anatolievna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associated Professor, Mathematical Methods in Economics and Statistics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.  
E-mail: kwark@mail.ru, paniukovata@susu.ac.ru

# ОБ ОТСУТСТВИИ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ШВАРЦА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ МАТРИЦ<sup>1</sup>

**В.Г. Николаев<sup>2</sup>**

Рассмотрена задача Шварца для 2-вектор-функций, аналитических по Дуглису в круге. Доказано, что для некоторых типов матриц и граничных аналитических функций она не имеет решений. Построен пример.

Ключевые слова: голоморфная функция; аналитическая продолжимость; матрица; собственный вектор; область; контур Ляпунова.

## 1. Основные определения

**Определение 1.** [1] Пусть  $n \times n$ -матрица  $J$  не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису (или  $J$ -аналитической с матрицей  $J$ ) называется комплексная  $n$ -вектор-функция  $\omega(z) \in C^1(D)$ , для которой в плоской области  $D$  выполнено уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (1)$$

**Определение 2.** Будем говорить, что функция  $\omega(z)$  соответствует матрице  $J$ , если выполнено равенство (1).

Рассмотрим для системы (1) следующую граничную задачу Шварца [1].

Пусть односвязная конечная область  $D$  на плоскости ограничена контуром  $\Gamma$ . Требуется найти  $J$ -аналитическую с матрицей  $J$  в области  $D$  функцию  $\omega(z) \in C(\bar{D})$ , для которой выполнено краевое условие

$$\operatorname{Re} \omega(z)|_{\Gamma} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad (2)$$

где вещественная вектор-функция  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in C(\Gamma)$  задана.

При рассмотрении задачи Шварца будет использовано следующее

**Определение 3.** Гладкая кривая  $\Gamma$  на плоскости называется линией Ляпунова, если существуют такие два вещественных числа  $a > 0$  и  $b$ ,  $0 < b \leq 1$ , что для любых двух точек  $z_1, z_2 \in \Gamma$  выполняется условие Ляпунова

$$|\theta| < a \cdot |z_1 - z_2|^b,$$

где  $\theta$  – угол между касательными или нормальными к  $\Gamma$  в точках  $z_1, z_2$ . Примерами линий Ляпунова могут служить окружность и эллипс.

Необходимо отметить, что имеет место следующий классический результат. Пусть  $\Gamma$  — линия Ляпунова. Обозначим  $H^\sigma(\Gamma)$ ,  $H^\sigma(\bar{D})$ ,  $0 < \sigma < 1$  класс функций, непрерывных по Гельдеру на  $\Gamma$  или в  $\bar{D}$ . Как показано в [2], в случае размерности  $n = 1$  для любой граничной функции  $\varphi \in H^\sigma(\Gamma)$  решение задачи Шварца существует в классе функций  $\omega(z) \in H^\sigma(\bar{D})$ . Данное решение единственно с точностью до постоянной.

В статье доказано (теорема 1), что при  $n = 2$  этот результат не всегда справедлив. Именно, существуют примеры неразрешимости задачи Шварца для единичного круга в тех же классах функций.

Прежде чем сформулировать основной результат, выполним редукцию задачи Шварца к некоторому функциональному уравнению.

## 2. Преобразование задачи Шварца для $n = 2$

Пусть  $2 \times 2$ -матрица  $J$  имеет собственное число  $\lambda = i$  кратности два, а ее собственный вектор  $\bar{y}$  не кратен вещественному. Обозначим вектор  $\bar{x} = (1, 0)$ , тогда вектор

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (проект 1.857.2014/К).

<sup>2</sup> Николаев Владимир Геннадьевич – ведущий математик, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация.

E-mail: vg14@inbox.ru

$\bar{y} = (J - iE) \cdot \bar{x} \neq 0$ , так как такая матрица  $J$  не может быть треугольной. Из последнего равенства:  $J\bar{x} = i\bar{x} + \bar{y}$ . Кроме того,

$$J\bar{y} = J(J - iE) \cdot \bar{x} = (J - iE + iE) \cdot (J - iE) \cdot \bar{x} = (J - iE) \cdot (J - iE) \cdot \bar{x} + iE(J - iE) \cdot \bar{x} = i\bar{y},$$

поскольку  $(J - iE)^2 = 0$  согласно теореме Кэли–Гамильтона. Следовательно, столбцы матрицы

$$Q = (\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2i \\ 0 & b_1 + b_2i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $a_1, b_1, a_2, b_2$  – вещественные числа, будут жордановым базисом для матрицы  $J$ . По определению это означает, что

$$J_1 = Q^{-1}JQ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Пусть 2-вектор-функция  $\omega(z) \in C(\bar{D})$  является аналитической по Дуглису в области  $D \subset R^2$ , то есть для нее выполнено равенство (1). Так как в силу (4)  $J = QJ_1Q^{-1}$ , то с учетом (1) имеем:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - QJ_1Q^{-1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

откуда, умножая обе части на  $Q^{-1}$ , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(Q^{-1}\omega) - J_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(Q^{-1}\omega) = 0. \quad (5)$$

Обозначим

$$\omega^0(z) = Q^{-1} \cdot \omega(z) = \begin{pmatrix} f(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из (6) вытекает, что функции  $f, \psi \in C(\bar{D})$ . Распишем (5) с учетом (4) и (6) подробнее:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} f(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f(z) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Первая строка (7) означает, что  $f(z)$  – голоморфная функция. Согласно второй строке функция  $\psi(x, y)$  удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}. \quad (8)$$

Обозначая  $f(z) = p + iq$  и  $\psi(x, y) = u + iv$ , выразим функцию  $\omega(x, y)$  из (6) с учетом (3):

$$\omega(z) = Q \cdot \omega^0(z) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2i \\ 0 & b_1 + b_2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x, y) + a_1 \cdot u(x, y) - a_2 \cdot v(x, y) + i \cdot h_1(x, y) \\ b_1 \cdot u(x, y) - b_2 \cdot v(x, y) + i \cdot h_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где обозначено  $(h_1, h_2) = \text{Im} \omega(z)$ .

Пусть функция  $\omega(z) \in C(\bar{D})$  – решение задачи Шварца (2). С учетом (9) это означает, что имеет место следующая система линейных алгебраических уравнений относительно функций-переменных  $u(t)$  и  $v(t)$ ,  $t \in \Gamma$ :

$$\begin{cases} a_1 \cdot u(t) - a_2 \cdot v(t) = -p(t) + \varphi_1(t), \\ b_1 \cdot u(t) - b_2 \cdot v(t) = \varphi_2(t). \end{cases} \quad (10)$$

Определитель системы (10) имеет вид  $\Delta = -a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$ , так как по условию собственный вектор  $\bar{y} = (a_1 + a_2i, b_1 + b_2i)$  матрицы  $J$  не кратен вещественному. Следовательно, система (10) имеет единственное решение относительно функций-переменных  $u, v$ . С учетом очевидного равенства

$$p(x, y) = \text{Re} f(z) = \frac{1}{2} \cdot [f(z) + \bar{f}(z)]$$

это решение можно записать в виде

$$\psi = u + iv = (k + mi) \cdot p + g_1 + g_2 i = \frac{1}{2} \cdot (k + mi) \cdot [f + \bar{f}] + g_1 + g_2 i. \quad (11)$$

Здесь  $k, m$  – вещественные числа;  $g_1, g_2$  – вещественные линейные функции переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ . Несложно показать, что

$$\begin{cases} g_1(t) = \alpha_1 \cdot \varphi_1(t) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(t), \\ g_2(t) = \beta_1 \cdot \varphi_1(t) + \beta_2 \cdot \varphi_2(t), \end{cases} \quad t \in \Gamma, \quad (12)$$

$$k = \frac{b_2}{\Delta}, \quad m = \frac{b_1}{\Delta}, \quad \Delta = -a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad \alpha_1 = -\frac{b_2}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\Delta}, \quad \beta_1 = -\frac{b_1}{\Delta}, \quad \beta_2 = \frac{a_1}{\Delta}. \quad (13)$$

Далее рассмотрим уравнение (8). Непосредственной подстановкой проверяется, что его общее решение имеет вид

$$\psi(x, y) = \frac{i}{2} z \cdot \frac{df}{dz} + F_1(z), \quad \bar{z} = x - iy, \quad (14)$$

где  $F_1(z)$  – произвольная голоморфная в области  $D$  функция.

Объединяя (11) и (14), имеем следующее равенство, которое выполняется на контуре  $\Gamma$  (в смысле предельных значений изнутри области  $D$ ):

$$\frac{i}{2} z \cdot \frac{df}{dz} + F_1(z) |_{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot (k + mi) \cdot [f(z) + \bar{f}(z)] + g_1 + g_2 i,$$

то есть

$$\bar{z} \cdot \frac{df}{dz} + \ell \cdot \bar{f}(z) + F(z) |_{\Gamma} = -2i(g_1 + g_2 i), \quad \ell = ki - m, \quad (15)$$

где обозначено  $F(z) = \ell \cdot f(z) - 2iF_1(z)$ .

В (15)  $\ell \neq 0$ , так как в противном случае в силу (3) и (13) собственный вектор  $\bar{y}$  будет кратным вещественному. В итоге доказана

**Лемма 1.** Пусть  $2 \times 2$ -матрица  $J$  имеет собственное число  $\lambda = i$  кратности два и собственный вектор, не кратный вещественному. Пусть  $\omega(z)$  — определенное в области  $D \subset \mathbb{R}^2$  решение задачи Шварца (2). Тогда по  $\omega(z)$  можно построить голоморфные в  $D$  функции  $f(z) \in C(\bar{D})$  и  $F(z)$ , для которых справедлива формула (15).

Сформулируем еще одно утверждение, которое доказано в [3] и будет использовано в дальнейшем.

**Лемма 2.** Пусть  $A, B$  — вещественные  $2 \times 2$ -матрицы. Для того, чтобы для данной матрицы  $J = A + Bi$  существовала соответствующая ей непостоянная линейная вектор-функция  $\omega(x, y)$ , удовлетворяющая однородному условию  $\operatorname{Re} \omega \equiv 0$ , необходимо и достаточно выполнение условия  $\det B = 0$ .

Из лемм 1 и 2, в свою очередь, вытекает

**Лемма 3.** Пусть для  $2 \times 2$ -матрицы  $J = A + Bi$ , где  $A, B$  – вещественные матрицы, выполнены условия леммы 1. Тогда если  $\det B = 0$ , то  $|\ell| = 1$  в (15).

**Доказательство.** Из (3) и (13) следует, что число  $\ell$  в (15) зависит только от матрицы  $J$ , и не зависит от конкретной функции  $\omega(z)$ , по которой построены голоморфные функции  $f, F$ . Поэтому для определения  $\ell$  можно рассмотреть любую функцию, соответствующую матрице  $J$ .

Согласно лемме 2 существует непостоянная линейная вектор-функция  $\omega(z)$ , соответствующая  $J$  со свойством  $\operatorname{Re} \omega(z) \equiv 0$ . В этом случае формула (15) выполнена тождественно, а ее правая часть равна нулю:

$$\bar{z} \cdot \frac{df}{dz} + \ell \cdot \bar{f}(z) + F(z) \equiv 0, \quad \ell \neq 0. \quad (16)$$

Применяя к обеим частям (16) оператор

$$\frac{\partial}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial}{\partial x},$$

убеждаемся, что функции  $f, F$  будут линейными, то есть  $f(z) = \xi_0 + \xi_1 z$ ,  $F(z) = \zeta_0 + \zeta_1 z$ . После подстановки этих выражений в (16) имеем:

$$\bar{z} \cdot \xi_1 + \ell \cdot (\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_1 \bar{z}) + \zeta_0 + \zeta_1 z \equiv 0. \quad (17)$$

Из (17) вытекает, что  $\xi_1 \neq 0$ . Действительно, в противном случае  $\zeta_1 = 0$ , откуда в силу (6), (14) и (15) будет следовать, что вектор-функция  $\omega(z)$  постоянна, что противоречит ее определению. Поэтому согласно (17)  $\xi_1 + \ell \cdot \bar{\xi}_1 = 0$ , то есть  $|\ell| = 1$ .

### 3. Теорема об отсутствии разрешимости задачи Шварца

Применим леммы 1–3 для построения примеров отсутствия разрешимости задачи Шварца. При этом будет использован *обобщенный принцип аналитического продолжения Шварца* [4], который состоит в следующем.

Пусть функция  $f(z)$  голоморфна в плоской области  $D$ , граница которой содержит аналитическую кривую  $\Gamma$ , причем  $f(z)$  является аналитической на  $\Gamma$  (в смысле предельных значений изнутри  $D$ ). Тогда существует аналитическое продолжение  $f(z)$  через  $\Gamma$ .

Обозначим  $K$  единичный круг,  $\Gamma$  — его границу (единичную окружность). Имеет место

**Теорема 1.** Пусть неособая  $2 \times 2$ -матрица  $J = A + Bi$ , где  $A, B$  — вещественные матрицы, имеет кратное собственное число  $\lambda = i$ , а ее собственный вектор не кратен вещественному. Пусть  $\det B = 0$ . Тогда существует аналитическая на  $\Gamma$  вектор-функция  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , для которой задача Шварца (2) в классе функций  $\omega(z) \in C(\bar{K})$ , то есть и в классе  $\omega \in H^\sigma(\bar{K})$ ,  $0 < \sigma < 1$ , не имеет решений.

**Доказательство.** Идея доказательства основана на использовании леммы 1, а также формулы (15) и состоит в следующем. Нужно показать, что при определенном подборе комплексного числа  $r = r_1 + r_2 i \neq 0$  равенство

$$\bar{z} \cdot \frac{df}{dz} + \ell \cdot \bar{f}(z) + F(z) + r \cdot \bar{z} |_{\Gamma} = 0, \quad \ell \neq 0, \quad r \neq 0 \quad (18)$$

невозможно ни для каких функций  $f(z) \in C(\bar{K})$  и  $F(z)$ , голоморфных в  $K$ . Тогда для граничной функции  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , найденной по данной матрице  $J$  с учетом (12) из условия

$$2i(g_1 + g_2 i) |_{\Gamma} = r \cdot \bar{z}, \quad (19)$$

задача Шварца будет неразрешима, так как существование решения будет противоречить лемме 1.

Доказываем от «противного»: пусть для всех  $r \neq 0$  существуют функции  $f(z) \in C(\bar{K})$  и  $F(z)$ , для которых выполнено (18). Покажем, что из (18) вытекает продолжимость  $f(z)$  и  $F(z)$  в некоторую окрестность единичного круга  $K$ . Действительно, разложим функции  $f(z), \bar{f}(z)$  и  $F(z)$  в ряды Тейлора в круге  $K$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k z^k, \quad \bar{f}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{\xi}_k \bar{z}^{-k}, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_k z^k, \quad z \in K. \quad (20)$$

По  $\bar{f}(z)$  образуем функцию

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{\xi}_k \frac{1}{z^k},$$

которая будет голоморфна вне замыкания круга  $K$ . Так как  $f(z) \in C(\bar{K})$  по предположению, то

$$f_1(z) |_{\Gamma^+} = \bar{f}(z) |_{\Gamma^-}, \quad (21)$$

то есть функции  $f_1(z), \bar{f}(z)$  совпадают на  $\Gamma$  в смысле предельных значений снаружи и изнутри круга  $K$  соответственно. Кроме того, на единичной окружности  $\Gamma$  совпадают значения функций  $1/z$  и  $\bar{z}$ . Поэтому с учетом (18) и (21) имеем:



$$\frac{1}{z} \cdot \frac{df}{dz} \Big|_{\Gamma^-} + \ell \cdot f_1(z) \Big|_{\Gamma^+} + F(z) \Big|_{\Gamma^-} + r \cdot \frac{1}{z} \Big|_{\Gamma^-} = 0. \tag{22}$$

Голоморфная вне круга  $K$  функция  $f_1(z)$  с учетом (20) непрерывна на  $\Gamma^+$ , так как по условию  $f(z) \in C(\overline{K})$ . При этом согласно (22)  $f_1(z)$  совпадает на  $\Gamma$  с функцией, голоморфной внутри круга  $K$ . Следовательно,  $f_1(z)$  аналитически продолжима в некоторое внутреннее кольцо  $K - \subset K$  через окружность  $\Gamma$  (см. [4]).

Таким образом, в силу (20) функция  $f(z)$  и ее производная  $\frac{df}{dz}$  продолжимы в некоторое внешнее кольцо  $K^+$  круга  $K$ . Отсюда следует, что функция  $F(z)$  будет согласно (22) аналитической на аналитическом контуре  $\Gamma$  (единичной окружности). Поэтому в силу приведенного выше *обобщенного принципа аналитического продолжения Шварца* функцию  $F(z)$  так же можно продолжить в  $K^+$ .

Сказанное выше означает, что голоморфные функции  $f(z)$  и  $F(z)$  разлагаются в ряды Тейлора с центром в точке  $z=0$ , *сходящиеся в некоторой полной окрестности* круга  $K$ . Отсюда вытекает, что в (22) оказывается правомерной подстановка  $z = e^{it}$  :

$$e^{-it} \cdot \frac{df}{dz}(e^{it}) + \ell \cdot \bar{f}(e^{it}) + F(e^{it}) + r \cdot e^{-it} \equiv 0, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{23}$$

В (23) функция  $f_1(z)$  заменена на  $\bar{f}(z)$ , так как они совпадают на  $\Gamma$  согласно (21). С учетом (20) формулу (23) можно переписать в виде

$$e^{-it} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k \xi_k e^{i(k-1)t} + \ell \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{\xi}_k e^{-ikt} + \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_k e^{ikt} + r \cdot e^{-it} \equiv 0, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{24}$$

Так как система комплексных функций  $e^{ikt}$ ,  $k$  – целое число, ортогональна в  $L^2[0, 2\pi)$ , а ряды в (24) сходятся равномерно (а значит и в  $L^2[0, 2\pi)$ ), то из единственности разложения в ряд Фурье легко следует, что  $\xi_k = 0$  при всех  $k > 1$ , то есть функция  $f(z) = \xi_0 + \xi_1 z$ . Перепишем (24), учитывая это:

$$e^{-it} \cdot \xi_1 + \ell \cdot (\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_1 e^{-it}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta_k e^{ikt} + r \cdot e^{-it} = 0, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{25}$$

Здесь  $\xi_1 \neq 0$ , так как  $r = r_1 + r_2 i \neq 0$  согласно (18). Из (25) следует, что

$$\xi_1 + \ell \cdot \bar{\xi}_1 + r_1 + r_2 i = 0, \quad \xi_1 \neq 0, \quad \ell = ki - m, \tag{26}$$

то есть равна нулю сумма коэффициентов перед  $e^{-it}$ .

Обозначим  $\xi_1 = q + is$ , где  $q, s$  – вещественные числа. Рассмотрим (26) как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных  $q, s$  :

$$\begin{cases} (1-m)q + ks = -r_1, \\ kq + (1+m)s = -r_2. \end{cases} \tag{27}$$

Определитель системы (27) имеет вид  $\Delta_1 = 1 - m^2 - k^2 = 1 - |\ell|$ . По условию  $\det B = 0$ , откуда согласно лемме 3  $|\ell| = 1$ , то есть  $\Delta_1 = 0$ . Поэтому можно так подобрать число  $r = r_1 + r_2 i \neq 0$ , что система (27) будет несовместной. При таком  $r$  не имеет решений (26), то есть функции  $f(z) = \xi_0 + \xi_1 z$ , для которой выполнено равенство (18), *не существует*. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. *Тем самым теорема 1 доказана.*

В качестве иллюстрации к теореме 1 приведем

**Пример 1.** Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Матрица  $J$  имеет собственное число  $\lambda = i$  кратности два, а также собственный вектор  $\bar{y} = (J - iE) \cdot (1, 0) = (-i, 1)$ , не кратный вещественному. При этом  $\det B = 0$ . Следовательно, для  $J$  выполнены условия теоремы 1.

По формулам (3) и (13) находим:  $\Delta = -1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $k = 0$ ,  $m = -1$ . Таким образом, система (27) несовместна при  $r = i$ . Далее находим функцию  $g_1 + g_2 i$  из (19) и находим функции  $(\varphi_1, \varphi_2)$  из (12):

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \left(-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t\right), \quad t \in [0, 2\pi). \quad (29)$$

Остается заметить, что в силу теоремы 1 задача Шварца (2) для матрицы  $J$  (28) в единичном круге  $K$  с граничной функцией (29) в классе функций  $\omega(z) \in C(\bar{K})$  не имеет решений.

### Литература

1. Солдатов, А.П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису / А.П. Солдатов // Совр. математика и ее приложения. – 2010. – Т. 67(68). – С. 99–102.
2. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 342 с.
3. Николаев, В.Г. Об одном преобразовании задачи Шварца / В.Г. Николаев // Вестник Самарского государственного университета. – 2012. – Т. 6(97). – С. 27–34.
4. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Высшая школа, 1999. – 432 с.

*Поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2016, vol. 8, no. 1, pp. 13–18*

---

DOI: 10.14529/mmph160102

## ABOUT THE UNSOLVABILITY OF SCHWARZ'S TASK FOR SOME TYPES OF MATRICES

**V.G. Nikolaev<sup>1</sup>**

The task of Schwarz is considered for 2-vector functions, being analytic in a circle by Douglis. It is proved that for some types of matrices and boundary analytic functions the task has no solutions. The example is given.

*Keywords: holomorphic function; analytic continuability; matrix; eigenvector; region; Lyapunov contour.*

### References

1. Soldatov A.P. The Schwarz problem for Douglis analytic functions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, 173(2), pp. 221–224. DOI: 10.1007/s10958-011-0244-7
2. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 342 p. (in Russ.).
3. Nikolaev V.G. Ob odnom preobrazovanii zadachi Shvartsa (About a transformation of Schwarz problem). *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2012, no. 6(97), pp. 27–34.
4. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 432 p.

*Received November 20, 2015*

---

<sup>1</sup> Nikolaev Vladimir Gennadyevich is Leading Mathematician, Federal State-Funded Educational Institution of Higher Vocational Education "Yaroslav-the-Wise Novgorod State University", Novgorod, Russia.  
E-mail: vg14@inbox.ru

# СЛАБОЕ И ОБОБЩЕННОЕ ПО СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С АДДИТИВНЫМ ШУМОМ<sup>1</sup>

О.С. Старкова<sup>2</sup>

Работа посвящена решению абстрактной стохастической задачи Коши для уравнения  $X'(t) = AX(t) + BW(t)$  с оператором  $A$ , являющимся генератором полугруппы класса  $C_0$  в гильбертовом пространстве  $H$ , с белым шумом  $W$  в другом гильбертовом пространстве  $N$  и линейным оператором  $B: N \rightarrow H$ . Рассмотрены два подхода к решению поставленной задачи: подход Ито, когда решается интегральная задача с интегралом Ито по винеровскому процессу, и подход, основанный на анализе белого шума в исходной дифференциальной задаче в пространствах функций, обобщенных по случайной переменной. Изучена связь между полученными решениями.

*Ключевые слова:* стохастическая задача Коши; белый шум; винеровский процесс; слабое решение; распределение, обобщенное решение.

## Введение

При построении различных математических моделей, учитывающих случайные возмущения, возникает задача Коши для дифференциально-операторных уравнений с белым шумом в качестве неоднородности. Среди них базовой является задача Коши для уравнения первого порядка с оператором  $A$ , действующим в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  и являющимся генератором полугруппы класса  $C_0$ :

$$X'(t) = AX(t) + BW(t), \quad t \in [0, \tau], \tau \leq \infty, \quad X(0) = \zeta, \quad (1)$$

где  $W(t)$  – белый шум со значениями в другом сепарабельном гильбертовом пространстве  $N$ ,  $B$  – линейный оператор из  $N$  в  $H$ .

При указанных условиях задача (1) является некорректной из-за нерегулярного поведения белого шума, обусловленного независимостью случайных величин  $W(t_1)$ ,  $W(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$  и бесконечной вариацией. Чтобы преодолеть проблемы, связанные с нерегулярностью процесса белого шума, будем рассматривать два подхода к решению стохастической задачи (1).

Первый состоит в использовании исчисления Ито, главная идея которого в том, чтобы вместо решения уравнения собственно с шумом, работают с его «первообразной» – винеровским процессом  $\{W(t), t \geq 0\}$ . Этот математический аппарат позволяет изучать задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения вида

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad X(0) = \zeta, \quad (2)$$

которое является краткой записью интегрального уравнения  $X(t) - \zeta = \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW(s)$  (см., например, [1–5]).

Второй подход в конечномерных пространствах появился в последних декадах двадцатого столетия и известен как анализ белого шума. В работе [6] Т. Хида определил пространства белого шума таким образом, что стало возможным рассматривать функционалы от броуновского движения как функционалы белого шума. Поскольку белый шум можно считать производной броуновского движения, траектории которого непрерывны, но нигде не дифференцируемы в обычном смысле, естественно считать траектории белого шума элементами пространства Шварца  $S'$ . Поэтому при построении вероятностного пространства белого шума берут  $\Omega = S'$  и вводят гауссовскую нормализованную меру  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебре  $B(S')$  борелевских подмножеств  $S'$ . Анализ белого шума дает математический аппарат, в рамках которого все случайные

<sup>1</sup> Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-00090, и поддержке Правительства РФ, акт 211, договор № 02.А03.21.0006.

<sup>2</sup> Старкова Ольга Сергеевна – аспирант, кафедра математического анализа и теории функций, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация.

E-mail: olga-n4@yandex.ru.

переменные рассматриваются как функционалы траекторий белого шума, то есть функции, определенные на  $S'$  (в конечномерном случае см., например, [7–10]).

Чрезвычайно важным является тот факт, что в рамках этой теории процесс белого шума определен и оказывается бесконечно дифференцируемой функцией переменной  $t$  со значениями в пространстве обобщенных случайных величин. Это дает возможность перейти от рассмотрения проинтегрированных уравнений Ито к изучению собственно дифференциальных уравнений.

Первая попытка расширения анализа белого шума на гильбертово-значный случай была предпринята в работе [11], где были введены пространства основных и обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. В работах [12, 14] рассматривается несколько другой подход: используются пространства скалярно-значных основных случайных величин, чтобы определить обобщенные случайные величины со значениями в гильбертовом пространстве как линейные непрерывные операторы на этих пространствах. Полученные таким образом пространства обобщенных  $H$ -значных случайных величин имеют ту же структуру, что и пространства, построенные в [11], но новый подход позволяет определить в гильбертово-значном случае  $S$ -преобразование, произведение Уика и доказать связь между интегралом Ито и интегралом Хицуды–Скорехода от операторно-значных случайных величин, которую мы и будем использовать при сравнении слабого и обобщенного решения.

В настоящей работе приводится исследование слабого решения задачи (2) и обобщенного по  $\omega$  решения исходной задачи (1); доказывается совпадение решений на пересечении условий существования каждого из них.

### 1. Подход Ито. Слабое решение стохастической задачи Коши

Пусть  $(\Omega, F, P)$  – вероятностное пространство с нормальной фильтрацией  $\{F_t, t \geq 0\}$  и  $H$ ,  $H$  – сепарабельные гильбертовы пространства,  $Q$  – линейный симметричный, неотрицательный оператор следа с системой собственных векторов  $\{e_j\}$ , образующих базис в пространстве  $H$ , такой что  $Qe_j = \sigma_j^2 e_j$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$ .

**Определение 1.**  $H$ -значный стохастический процесс  $W_Q = \{W_Q(t), t \geq 0\}$  называется  $Q$ -винеровским, если

(W1)  $W_Q(0) = 0$  п.в.;

(W2)  $W_Q$  имеет независимые приращения;

(W3) закон распределения приращений  $W_Q(t) - W_Q(s)$  является нормальным с матожиданием ноль и ковариационным оператором  $(t - s)Q$ ;

(W4)  $W_Q$  имеет непрерывные траектории п.в.

$Q$ -винеровский процесс, определенный таким образом, является обобщением броуновского движения. Как известно,  $H$ -значный процесс броуновского движения  $\{\beta(t), t \geq 0\}$ , где  $\beta(t) = \beta(t, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , (определяемый через выполнение условий (W1) – (W4) в случае  $H = \mathbb{R}$  и  $Q = I$ ) имеет, в отличие от белого шума, непрерывные траектории и конечную вариацию.

Конечномерное броуновское движение – это конечная сумма вида  $\sum_{j=1}^n \beta_j(t) e_j$ , где  $e_j$  – базис в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\beta_j$  – независимые броуновские движения. При переходе к бесконечномерному случаю вместо расходящегося в  $H$  ряда приходится рассматривать регуляризованную сумму :

$$W_Q(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j(t) e_j, t \geq 0, \quad W_Q(t) \in L^2(\Omega; H), \quad (3)$$

которая и является ( $H$ -значным)  $Q$ -винеровским процессом. Формальный ряд

$$W(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t) e_j \quad (4)$$

называют *цилиндрическим винеровским процессом*. Этот ряд расходится в  $L^2(\Omega, H)$ , но для всех  $h \in H$  ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i(t)e_i, h)$  является сходящимся в  $L^2(\Omega, H)$ . В [1] показано, что ряд (4) сходится в  $L^2(\Omega, H_1)$  для некоторого пространства  $H_1 \subset H$ , такого, что оператор вложения  $H$  в  $H_1$  является оператором Гильберта–Шмидта. В частности,  $W$  будет  $Q_1$ -винеровским процессом в пространстве  $H_1 = Q_1^{1/2}H$  с нормой  $\|h\|_{H_1} = \|Q_1^{1/2}h\|_H$ , где  $Q_1$  – произвольный оператор следа.

Будем рассматривать слабое решение абстрактной стохастической задачи Коши (2):

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad X(0) = \zeta,$$

где  $\zeta$  –  $F_0$ -измеримая  $H$ -значная случайная величина, оператор  $A$  порождает полугруппу класса  $C_0$  ограниченных операторов решения однородной задачи;  $B: H \rightarrow H$  – линейный ограниченный оператор,  $\{W(t), t \geq 0\}$  –  $H$ -значный  $Q$ -винеровский или цилиндрический винеровский процесс.

$H$ -значный случайный предсказуемый процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  называется *слабым решением* задачи Коши (2), если  $\int_0^t \|X(s)\|_H ds < \infty$  п.н. ( $P_{a.s.}$ ) и

$$\langle X(t), y \rangle = \langle \zeta, y \rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*y \rangle ds + \langle BW(t), y \rangle, \quad P_{a.s.} \quad y \in \text{dom} A^*. \quad (5)$$

По аналогии с классическим случаем решение задачи (5) ищется в форме

$$X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)BdW(s), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где  $S = \{S(t), t \geq 0\}$  является полугруппой операторов решения соответствующей однородной задачи.

Имеет место следующая теорема [1, 3–5].

**Теорема 1** Пусть  $A$  – генератор полугруппы  $S = \{S(t), t \geq 0\}$  класса  $C_0$ ,  $B: H \rightarrow H$ ,  $\{W(t), t \geq 0\}$  –  $H$ -значный  $Q$ -винеровский или цилиндрический винеровский процесс и  $\Psi(s) = S(t-s)B, t \geq s \geq 0$ , удовлетворяет условию существования интеграла Ито:

$$\int_0^t \|\Psi(s)\|_{HS}^2 ds < \infty, \quad \|\Psi(s)\|_{HS}^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi(s) Q^{1/2} e_j \right\|^2 = \text{Tr} \Psi(s) Q \Psi^*(s), \quad \text{где } Q = I \text{ в случае}$$

цилиндрического винеровского процесса. Тогда для любой  $F_0$ -измеримой  $H$ -значной случайной величины  $\zeta$  случайный процесс (6) является единственным слабым решением задачи (2).

## 2. Обобщенные по $\omega$ решения стохастической задачи Коши

Обобщенные по  $\omega$  решения строятся в пространствах обобщенных случайных величин  $(S)_{-\rho}(H)$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , являющихся расширением пространства  $(L^2)(H) := L^2(S', \mu; H)$ .

В первую очередь, для определения  $(S)_{-\rho}(H)$ , введем *пространство белого шума* – вероятностное пространство  $(S', B(S'), \mu)$ , где  $B(S')$  – борелевская  $\sigma$ -алгебра подмножеств пространства Шварца распределений медленного роста и  $\mu$  – нормализованная гауссовская вероятностная мера на  $B(S')$  (мера Минлоса–Сазонова), определенная таким образом (см. [5, 14]), что элементы  $S'$  можно рассматривать как траектории белого шума.

Далее, обозначим через  $(L^2)$  пространство  $L^2(S', \mu; \mathbb{R})$  всех  $\mathbb{R}$ -значных интегрируемых с квадратом по мере  $\mu$  функций (случайных величин), определенных на  $S'$ . Обозначим через  $\|\cdot\|_0$  норму этого пространства. Для любых  $\theta, \eta \in S$  выполняются следующие равенства

$$(\langle \cdot, \theta \rangle, \langle \cdot, \eta \rangle)_{(L^2)} = E(\langle \cdot, \theta \rangle \langle \cdot, \eta \rangle) = (\theta, \eta)_0, \quad \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_0^2 = E(\langle \cdot, \theta \rangle)^2 = |\theta|_0^2.$$

Отсюда следует, что отображение  $\theta \mapsto \langle \cdot, \theta \rangle$  можно по непрерывности продолжить с  $S$  на  $L^2(\mathbb{R})$ , и, значит,  $\mathbb{R}$ -значная случайная величина  $\beta(t) := \langle \cdot, 1_{[0,t]} \rangle$  определена как элемент

пространства  $(L^2)$ . Это случайная величина имеет непрерывную версию, которая обладает всеми свойствами броуновского движения [12].

По аналогии с тройкой Гельфанда  $S \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S^*$  для пространства  $(L^2)$  строится цепочка пространств  $(S) \subset \dots \subset (S_\rho) \subset \dots \subset (L^2) \subset \dots \subset (S_{-\rho}) \subset \dots \subset (S)^*$ , где элементы пространств  $(S_\rho)$  и  $(S_{-\rho})$  определяются в соответствии с поведением (убыванием или возрастанием, соответственно) коэффициентов Фурье в разложении по стохастическим полиномам Эрмита

$$h_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \xi_i, \omega \rangle), \omega \in S', \alpha \in T,$$

где  $T \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$  – множество всех возможных конечных мультииндексов,

$h_i(x) = (-1)^i e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^i}{dx^i} e^{-\frac{x^2}{2}}$  – полиномы Эрмита,  $\xi_i(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} ((i-1)!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} h_{i-1}(\sqrt{2}x)$  – функции Эрмита. Функции Эрмита являются собственными функциями дифференциального оператора

$\hat{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$ :  $\hat{D}\xi_i = (2i)\xi_i, i \in \mathbb{N}$  и образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\mathbb{R})$ .

В работе [10] Кондратьев и Стрейт расширили пространство Хиды обобщенных случайных величин  $(S)^*$ , столкнувшись с необходимостью охватить некоторые функционалы белого шума, необходимые в приложениях. Они ввели в рассмотрение пространство  $(S)_{-\rho}$  как правый элемент тройки Гельфанда с тем же пространством  $(L^2)$  в центре и более узким пространством основных функций  $(S)_\rho$ , где  $0 \leq \rho \leq 1$  – некоторый фиксированный параметр. Таким образом, пространства основных и обобщенных случайных величин Хиды стали частным случаем пространств Кондратьева и Стрейта, соответствующими случаю параметра  $\rho = 0$ :

$$(S)_\rho \subset (S)_0 = (S) \subset (L^2) \subset (S)^* = (S)_{-0} \subset (S)_{-\rho}.$$

Пространство  $(S)_\rho$  основных функций определяется равенством  $(S)_\rho = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (S_p)_\rho$ , где

$$(S_p)_\rho = \left\{ \phi = \sum_{\alpha \in T} \phi_\alpha h_\alpha \in (L^2); \sum_{\alpha \in T} (\alpha!)^{1+\rho} |\phi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty \right\}$$

с нормой  $|\cdot|_{p,\rho}$ , порожденной скалярным произведением

$$(\phi, \psi)_{p,\rho} = \sum_{\alpha \in T} (\alpha!)^{1+\rho} \phi_\alpha \bar{\psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{2p\alpha}, \quad (2\mathbb{N})^{p\alpha} := \prod_{i \in \mathbb{N}} (2i)^{p\alpha_i}$$

и оснащается топологией проективного предела. Пространство  $(S_{-\rho})_{-\rho}$  – пространство, сопряженное к  $(S_p)_\rho$ .

И, наконец, введем пространство  $H$ -значных обобщенных функций  $(S)_{-\rho}(H)$  над  $(S)_\rho$ . Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$ ,  $(L^2)(H)$  – пространство  $H$ -значных, определенных на  $S'$  функций, интегрируемых с квадратом по Бохнеру по мере  $\mu$ . Пусть  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  – ортонормированный базис в  $H$ , тогда семейство  $\{h_\alpha e_j\}_{\alpha \in T, j \in \mathbb{N}}$  образует ортогональный базис в  $(L^2)(H)$ .

Пространство  $(S)_{-\rho}(H)$  определяется как пространство линейных непрерывных операторов  $\Phi: (S)_\rho \rightarrow H$  с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства  $(S)_\rho$ . Действие  $\Phi \in (S)_{-\rho}(H)$  на  $\phi \in (S)_\rho$  будем обозначать  $\Phi[\phi]$ .

Теперь в пространствах  $(S)_{-\rho}(\mathbb{H})$  представим  $Q$ -винеровский (3) и цилиндрический винеровский (4) процессы через разложение по стохастическим полиномам Эрмита. Для этого покажем конструкцию независимых броуновских движений  $\beta_j(t)$  в формулах (3) и (4).

Из разложения единичной функции по функциям Эрмита

$$1_{[0,t]} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\tau) d\tau \xi_i \tag{7}$$

следует, что для любого  $t \in \mathbb{R}$  случайная величина  $\beta(t) = \langle 1_{(s;t]}, \cdot \rangle$  может быть разложена в пространстве  $(L^2(\mathbb{R}))$  в ряд по стохастическим полиномам:

$$\langle 1_{(s;t]}, \cdot \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \xi_n, \cdot \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau \langle \xi_n, \cdot \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \xi_n(\tau) d\tau h_{\varepsilon_n}; \tag{8}$$

где  $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1_n, 0, \dots)$ . Используя форму коэффициентов этого разложения, можно построить счетное семейство одинаково и независимо распределенных броуновских движений в  $(L^2)$ :

$$\beta_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s) ds h_{\varepsilon_{n(i,j)}}, \text{ где } n(\cdot, \cdot) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ — биекция такая, что } n(i, j) \geq ij \text{ при } i, j \in \mathbb{N} \text{ [5].}$$

В пространствах  $(S)_{-\rho}(\mathbb{H})$  цилиндрический винеровский процесс имеет следующее разложение:

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}(t) h_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}(t) := \int_0^t \xi_{i(n)}(s) ds e_{j(n)} \in \mathbb{H}, \tag{9}$$

где  $i(n), j(n) \in \mathbb{N}$  таковы, что  $n(i(n), j(n)) = n$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

$Q$ -винеровский процесс представим следующим равенством

$$W_Q(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma_j \beta_j(t) e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}^Q(t) h_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}^Q(t) := \sigma_j \int_0^t \xi_{i(n)}(s) ds e_{j(n)} \in \mathbb{H}, t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

В [14] доказано, что  $W_Q(t) \in (L^2)(\mathbb{H})$ ,  $W(t) \in (S_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (S)_{-\rho}(\mathbb{H})$  для любого  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Определим  $\mathbb{H}$ -значный  $Q$ -белый шум равенством

$$W_Q(t) := \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t) h_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}^Q(t) h_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}^Q(t) = \sigma_j \xi_{i(n)}(t) e_{j(n)} \in \mathbb{H},$$

полученным формальным дифференцированием равенства (10), и сингулярный белый шум — равенством

$$W(t) := \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \xi_i(t) h_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}(t) h_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t) e_{j(n)} \in \mathbb{H},$$

полученным формальным дифференцированием равенства (9).  $Q$ -белый шум и цилиндрический белый шум принадлежат  $(S_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (S)_{-\rho}(\mathbb{H}), \rho \in [0; 1]$  (см. [14]).

### 2.1. $S$ -преобразование. Произведение Уика. Интеграл Хицуды–Скорехода

Прежде чем перейти к обобщенному по  $\omega$  решению и сравнению его со слабым решением, введем необходимые определения  $S$ -преобразования, произведения Уика и интеграла Хицуды–Скорехода.

Пусть  $\varepsilon_{\theta}(\cdot) := e^{\langle \cdot, \theta \rangle - \frac{1}{2}|\theta|^2}$ . При  $\theta \in S$  эта случайная величина определена на всем пространстве  $S'$  и принадлежит  $(S)_{\rho}$ , для  $0 \leq \rho < 1$ . При этом справедлива оценка

$$|\varepsilon_{\theta}|_{\rho, \rho} \leq 2^{\rho/2} \exp[(1 - \rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}} |\theta|_p^{1-\rho}].$$

**Определение 2.** Пусть  $\Phi \in (S)_{-\rho}(\mathbb{H}), 0 \leq \rho < 1$ .  $S$ -преобразованием  $\Phi$  называется  $\mathbb{H}$ -значная функция, определяемая равенством

$$(S\Phi)(\theta) := \Phi[\varepsilon_{\theta}], \quad \theta \in S.$$

Заметим, что если  $\Phi \in (L^2)(H)$ , то

$$(S\Phi)(\theta) = \int_{S'} \Phi(\omega) \varepsilon_\theta(\omega) d\mu(\omega) = E(\Phi \varepsilon_\theta), \quad (11)$$

при этом равенство (11) верно и при  $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ .

Пусть  $H$  – еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Поскольку  $L_{HS}(H; H)$  – пространство операторов Гильберта–Шмидта, действующих из  $H$  в  $H$  – является сепарабельным гильбертовым пространством, можно ввести в рассмотрение пространство  $(S)_{-\rho}(L_{HS}(H; H))$  обобщенных случайных величин со значениями в  $L_{HS}(H; H)$  над  $(S)_\rho$ . Пусть  $\Psi \in (S)_{-\rho}(L_{HS}(H; H))$ ,  $\Phi \in (S)_{-\rho}(H)$ . Рассмотрим их  $S$ -преобразования. Для любого  $\theta \in S$  имеем  $S\Psi(\theta) \in L_{HS}(H; H)$ ,  $S\Phi(\theta) \in H$ , поэтому  $F(\theta) := S\Psi(\theta)S\Phi(\theta) \in H$ .

**Определение 3.** Пусть  $\Psi \in (S)_{-\rho}(L_{HS}(H; H))$ ,  $\Phi \in (S)_{-\rho}(H)$  ( $0 \leq \rho < 1$ ). Обобщенная случайная величина  $\Theta \in (S)_{-\rho}(H)$  называется произведением Уика функций  $\Psi$  и  $\Phi$  и обозначается  $\Psi \diamond \Phi$ , если  $S\Theta = S\Psi S\Phi$ .

Функция  $\Phi(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow (S)_{-\rho}(H)$  называется интегрируемой на  $[0; T]$ , если существует такое  $p \in \mathbb{N}$ , что  $\Phi(t) \in (S_{-p})_{-\rho}(H)$  для всех  $t \in [0; T]$  и  $\Phi$  интегрируема по Бохнеру на  $[0; T]$  как функция со значениями в гильбертовом пространстве  $(S_{-p})_{-\rho}(H)$ .

**Определение 4.** Будем называть  $(S)_{-\rho}(L_{HS}(H; H))$ -значный случайный процесс  $\Psi(t)$  интегрируемым по Хицуде–Скориходу на промежутке  $[0; T]$ , если процесс  $\Psi(t) \diamond W(t)$  интегрируем на  $[0; T]$  как  $(S)_{-\rho}(H)$ -значная функция. В таком случае будем называть интеграл

$$\int_0^T \Psi(t) \diamond W(t) dt$$

интегралом Хицуды–Скорихода от  $\Psi(t)$ .

## 2.2. Стохастическая задача Коши в пространствах обобщенных случайных величин и сравнение решений

Для того, чтобы рассмотреть стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах как уравнения в пространствах обобщенных случайных величин, сначала для пары произвольных сепарабельных гильбертовых пространств  $H_1$  и  $H_2$  распространим действие линейных операторов из  $H_1$  в  $H_2$  на действие в соответствующих пространствах обобщенных случайных величин  $(S)_{-\rho}(H_1)$  в  $(S)_{-\rho}(H_2)$ .

Пусть сначала  $A \in L(H_1, H_2)$ . Определим его действие как оператора из  $(S)_{-\rho}(H_1)$  в  $(S)_{-\rho}(H_2)$  равенством

$$A\Phi := \sum_{\alpha \in T} A\Phi_\alpha h_\alpha, \text{ для } \Phi = \sum_{\alpha \in T} \Phi_\alpha h_\alpha \in (S)_{-\rho}(H_1). \quad (12)$$

Если  $A$  неограничен, определим  $(dom A)$  как множество всех  $\sum_{\alpha \in T} \Phi_\alpha h_\alpha \in (S)_{-\rho}(H_1)$ , таких, что  $\Phi_\alpha \in dom A$  для всех  $\alpha \in T$  и условие  $\sum_{\alpha \in T} (\alpha!)^{1-\rho} \|A\Phi_\alpha\|_{H_2}^2 (2\mathbb{N})^{-2\rho\alpha} < \infty$  выполнено для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ . Тогда равенство (12) определяет на  $(dom A)$  линейный оператор, действующий из  $(S)_{-\rho}(H_1)$  в  $(S)_{-\rho}(H_2)$ . Нетрудно проверить замкнутость этого оператора для  $A$ , замкнутого оператора из  $H_1$  в  $H_2$ .

Пусть  $H$  и  $H$  – сепарабельные гильбертовы пространства,  $A$  – замкнутый линейный оператор, действующий в  $H$ ,  $B \in L(H, H)$ . Задача Коши для уравнения первого порядка в пространствах обобщенных случайных величин в общем случае имеет следующий вид:

$$X'(t) = AX(t) + B \diamond W(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \zeta. \quad (13)$$



В силу того, что  $B$  – детерминированный оператор, получим  $B \diamond W(t) = BW(t)$ , отсюда следует, что задача Коши (13) во введенных пространствах обобщенных случайных величин принимает вид:

$$X'(t) = AX(t) + BW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \zeta, \quad (14)$$

где  $W(t)$  –  $N$ -значный  $Q$  белый или сингулярный белый шум. Далее приведен результат [14] о существовании и единственности решения этой задачи в пространстве  $(S)_{-\rho}(H)$ , то есть о существовании и единственности  $(S)_{-\rho}(H)$ -значной дифференцируемой функции  $X(t)$ , удовлетворяющей (14).

**Теорема 2** Пусть  $A$  является генератором полугруппы  $\{S(t), t \geq 0\}$  класса  $C_0$  в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $B \in L(H, H)$ ,  $W$  — определенный выше  $Q$ -белый или цилиндрический белый шум. Тогда

$$X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B \diamond W(s)ds \quad (15)$$

– единственное решение задачи Коши (14) в пространстве  $(S)_{-\rho}(H)$  для любого  $\zeta \in (dom A)$ .

Из вида слабого и обобщенного по  $\omega$  решений следует предположение об их совпадении на пересечении условий существования. Пусть оператор  $A$  порождает полугруппу  $\{S(t), t \geq 0\}$  класса  $C_0$ , начальное условие  $\zeta$  лежит в области определения оператора  $A$ , оператор  $B$  удовлетворяет условию существования интеграла Ито

$$E \left[ \int_0^T \|\Phi(t)\|_{L_{HS}(H_Q; H)}^2 dt \right] < \infty \quad (16)$$

и произвольное вероятностное пространство  $(\Omega, F, P) = (S', B(S)', \mu)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $A$  – генератор полугруппы класса  $C_0$ ,  $\zeta \in (dom A)$  и  $W$  –  $Q$ -винеровский процесс. Тогда обобщенное по  $\omega$  решение (15) и слабое решение (6) совпадают.

*Доказательство.* В силу детерминированности оператора  $S(t-s)B$  и из разложения  $Q$ -белого шума по стохастическим полиномам Эрмита интеграл в решении (15) определяется следующим образом:

$$\int_0^t S(t-s)B \diamond W(s)ds = \int_0^t S(t-s)BW(s)ds = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t S(t-s)B(s)e_j \xi_i(s) ds h_{\varepsilon_n(i,j)}. \quad (17)$$

В рассматриваемом нами случае для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл в равенстве (17) совпадает с интегралом Ито:

$$\int_0^t S(t-s)B dW(s) = \int_0^t S(t-s)BW(s)ds. \quad (18)$$

В первую очередь покажем, что сумма (17) принадлежит пространству  $(L^2)(H) = L^2(S', \mu; H)$ . Этот результат следует из равенств:

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j^2 \left\| \int_0^t S(t-s)B e_j \xi_i(s) ds \right\|_H^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \int_0^t \xi_i(s) (\sigma_j S(t-s)B e_j, g_k)_H ds \right)^2 =$$

[ из разложения единичной функции  $1_{[0;t]}$  по функциям Эрмита (7) следует ]

$$= \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \left\| 1_{[0;t]} (\sigma_j S(t-\cdot)B e_j, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} \right\|_H^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \int_0^t | (S(t-\cdot)B Q^{\frac{1}{2}}, g_k)_H |^2 ds =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{N}} (S(t-\cdot)B Q^{\frac{1}{2}} e_j, g_k)_H^2 ds = \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| S(t-s)B Q^{\frac{1}{2}} e_j \right\|_H^2 ds = \int_0^t \|S(t-s)B\|_{HS}^2 ds.$$

Здесь  $\{g_k\}$  – ортонормированный базис в  $H$ . Доказательство равенства интегралов (18) в пространстве  $(L^2)(H)$  проведем для элементарных функций с последующим переходом к пределу. Покажем (18) на элементарных функциях  $\Psi_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{n_k}$ , приближающих  $S(t-s)B$ :

$$\int_0^t \Psi_n(s) W(s) ds = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi_n(s) e_j \xi_i(s) ds h_{\varepsilon_n(i,j)} = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi_n \xi_i(s) ds e_j h_{\varepsilon_n(i,j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{n_k} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_j \int_{t_{k-1}}^{t_k} \xi_i(s) ds e_j h_{\varepsilon_n(i,j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{n_k} [W(t_k) - W(t_{k-1})] = \int_0^t \Psi_n(t) dW(t).$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим (18). Отсюда следует, что обобщенное по  $\omega$  и слабое решения совпадают при условии их существования.

Аналогично в случае, когда  $W(t)$  – цилиндрический винеровский процесс, доказываем, что интеграл  $\int_0^t S(t-s) B W(s) ds := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s) B e_j \xi_i(s) ds h_{\varepsilon_n(i,j)}$  определяет элемент пространства  $(L^2)(H)$ , который совпадает с интегралом Ито  $\int_0^t S(t-s) B dW(s)$ . Отсюда следует:

**Теорема 4.** Пусть  $A$  – генератор полугруппы класса  $C_0$ ,  $\zeta \in (\text{dom} A)$ , и  $W$  – цилиндрический винеровский процесс. Тогда обобщенное по  $\omega$  решение и слабое решение совпадают.

### Литература

1. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da. Prato, J. Zabczyk. – Cambridge Univ. Press, 1992 – 454 p.
2. Gawarecki, L. Stochastic differential equations in infinite dimensions / L. Gawarecki, V. Mandrekar. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. DOI:10.1007/978-3-642-16194-0
3. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // J. of Math. Sciences. – 2002. – Vol. 111. – Issue 2. – С. 3430–3465.
4. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // Commun. Appl. Anal. – 2009. – Vol. 13, № 2. – С. 195–212.
5. Альшанский, М.А. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач / М.А. Альшанский, И.В. Мельникова // Матем. сб. – 2011. – Vol. 202, № 11. – С. 3–30. DOI: 10.4213/sm7686
6. Hida, T. Analysis of Brownian functionals / T. Hida. – Ottawa: Carleton Univ., 1975. – 61 с.
7. Stochastic partial differential equations. A modeling, white noise functional approach. 2nd ed. / H. Holden, B. Oksendal, J. Ubøe, T. Zhang. – New York, NY: Springer, 2010. – 305 p. DOI: 10.1007/978-0-387-89488-1
8. Kuo, H.-H. White Noise Distribution Theory / H.H. Kuo. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, – 378 p.
9. Huang, Z. Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis / Z. Huang, J. Yan. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; Beijing: Science Press, 2000. – 296 p.
10. Kondratiev, Yu.G. Spaces of white noise distribution: Constructions, Descriptions, Applications. I / Yu.G. Kondratiev, L. Streit // Reports on Math. Phys. – 1993. – Vol. 33. – Issue 3. – С. 341–366.
11. Filinkov, A. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions / A. Filinkov, J. Sorensen // Stochastics and Stochastics Reports. – 2002 – Vol. 72, № 3–4. – С. 129–173.
12. Альшанский, М.А. Интегралы Ито и Хицуды–Скорохода в бесконечномерном случае / М.А. Альшанский // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – Т. 11. – С. 185–199.
13. Melnikova, I.V. Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise / I.V. Melnikova // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49, № 4. – С. 475–486.
14. Мельникова, И.В. Анализ белого шума в приложениях к стохастическим уравнениям в гильбертовых пространствах / И.В. Мельникова, М.А. Альшанский // Современная математика. Фундаментальные направления. Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. – РУДН, М., 2014. – Т. 53. – С. 30–63.
15. Stroock, D.W. Multidimensional diffusion processes. Reprint of the 2nd corrected printing (1997) / D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan. – Berlin: Springer, 2006. – 338 с.

*Поступила в редакцию 13 декабря 2014 г.*

**WEAK AND GENERALIZED WITH RANDOM VARIABLE SOLUTIONS  
OF STOCHASTIC CAUCHY PROBLEM WITH ADDITIVE WHITE NOISE**O.S. Starkova<sup>1</sup>

The article describes the solutions of an abstract stochastic Cauchy problem for the  $X'(t) = AX(t) + BW(t)$  equation with the  $A$  operator, which is the generator of a semigroup of  $C_0$  class in a Hilbert space  $H$  with the white noise  $W$  in a different Hilbert space  $H$  and a linear operator  $B: H \rightarrow H$ . Two approaches to solve the problem are considered: the Ito integral approach, when the integral problem is solved with Ito integral following Wiener process; the approach based on the analysis of the white noise in the original differential problem in the function spaces generalized with random variable. The relation between the solutions is defined.

*Keywords:* stochastic Cauchy problem; white noise; Wiener process; weak solution; distribution; generalized solution.

**References**

1. Prato G.Da., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p. DOI: 10.1017/CBO9780511666223
2. Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic differential equations in infinite dimensions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. DOI:10.1007/978-3-642-16194-0
3. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, Vol. 111, Issue 2, pp. 3430–3465. DOI: 10.1023/A:1016006127598
4. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract stochastic problems with generators of regularized semigroups. *Commun. Appl. Anal.*, 2009, Vol. 13, no. 2, pp. 195–212.
5. Alshanskiy M.A., Mel'nikova I.V. Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems. *Sbornik: Mathematics*, 2011, Vol. 202, no. 11, pp. 1565–1592. DOI: 10.1070/SM2011v202n11ABEH004199
6. Hida T. *Analysis of Brownian functionals*. Carleton Mathematical Lectures 13. Ottawa, Carleton Univ., 1975, 61 p.
7. Holden H., Oksendal B., Ubøe J., Zhang T. *Stochastic partial differential equations. A modeling, white noise functional approach*. 2nd ed. New York, NY: Springer, 2010, 305 p. DOI: 10.1007/978-0-387-89488-1
8. Kuo H.-H. *White Noise Distribution Theory*. Probability and Stochastics Series. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, 378 p.
9. Huang Z., Yan J. *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; Beijing: Science Press, 2000, 296 p.
10. Kondratiev Yu.G., Streit L. Spaces of white noise distribution: Constructions, Descriptions, Applications. I. *Reports on Math. Phys.* 1993, Vol. 33, Issue 3, pp. 341–366. DOI:10.1016/0034-4877(93)90003-W
11. Filinkov A., Sorensen J. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions. *Stochastics and Stochastics Reports*, 2002, Vol. 72, no. 3–4, pp. 129–173. DOI: 10.1080/10451120290019177
12. Alshanskiy M.A. The Ito integral and the Hitsuda–Skorohod integral in the infinite dimensional case. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2014, Vol. 11, pp. 185–199. (in Russ.).
13. Melnikova I.V. Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise. *Differential Equations*, 2013, Vol. 49, Issue 4, pp. 475–486. DOI: 10.1134/S0012266113040083
14. Mel'nikova I.V., Alshanskiy M.A. *Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium, CMFD, PFUR, Moscow*, 2014, Vol. 53, pp. 30–63. (in Russ.).
15. Stroock D.W., Varadhan S.R.S. *Multidimensional diffusion processes*. Reprint of the 2nd corrected printing (1997). Berlin, Springer, 2006, 338 p.

*Received December 13, 2014*

<sup>1</sup> Starkova Olga Sergeevna is Post-Graduate Student, Department of Mathematical Analysis and the Theory of Functions, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation. E-mail: olga-n4@yandex.ru

# НОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

**Б.Х. Турметов<sup>1</sup>**

Приводится методика построения нормированных систем, связанных с операторами дифференцирования дробного порядка. Используя свойства нормированных систем, строятся точные решения обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.

*Ключевые слова:* нормированные системы; дробная производная; обобщенно-однородный оператор; фундаментальное решение; неоднородное уравнение.

**Введение.** В настоящей работе мы рассмотрим операторный метод построения решений дифференциальных уравнений дробного порядка. Данный метод основан на построении нормированных систем относительно операторов дробного дифференцирования. Метод нормированных систем был введен в работе [1] для построения точных решений уравнения Гельмгольца и полигармонического уравнения. В дальнейшем метод нормированных систем использовался для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [2], для построения полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического уравнения [3–5], а также при построении решений дифференциальных уравнений, связанных с операторами Данкла [6, 7].

Пусть  $L_1$  и  $L_2$  – линейные операторы, действующие из функционального пространства  $X$  в  $X: L_k X \subset X, k=1,2$ , и пусть функции из  $X$  определены в области  $\Omega \subset R^n$ . Обозначим  $N_0 = N \cup \{0\}$ . Приведем определение нормированных систем [1].

**Определение 1.** Последовательность функций  $\{f_k(x): k \in N_0, f_k(x) \in X\}$  называется  $f$ -нормированной относительно  $(L_1, L_2)$  в области  $\Omega$ , имеющей основание  $f_0(x)$ , если везде в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), k \in N.$$

Систему функций  $f$ -нормированную относительно  $(L_1, I)$ ,  $I$ -единичный оператор будем называть  $f$ -нормированной относительно оператора  $L_1$ , т.е.

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = f_{k-1}(x), k \in N.$$

Если  $f(x) = 0$ , то систему функций  $\{f_k(x): k \in N_0, f_k(x) \in X\}$  назовем просто нормированной.

Основные свойства системы функций  $f$ -нормированной относительно  $(L_1, L_2)$  в области  $\Omega$  изложены в работе [8]. Приведем некоторые из них

**Свойство 1.** Пусть система функций  $\{f_k(x): k \in N_0\}$  является  $f$ -нормированной относительно  $(L_1, L_2)$  в  $\Omega$  с основанием  $f_0(x)$ . Тогда функциональный ряд

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), x \in \Omega \quad (1)$$

является формальным решением уравнения

$$(L_1 - L_2)u(x) = f(x), x \in \Omega. \quad (2)$$

**Свойство 2.** Если операторы  $L_1$  и  $L_2$  коммутируют, а система функций  $\{f_k(x): k \in N_0\}$  является  $f$ -нормированной относительно оператора  $L_1$  в  $\Omega$ , то формальное решение уравнения (2) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x), x \in \Omega. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Турметов Батирхан Худайбергенович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, Международный Казахско-Турецкий Университет имени Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан. E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz

**Свойство 3.** Пусть операторы  $L_1$  и  $L_2$  коммутируют, а система функций  $\{f_k(x) : k \in N_0\}$  является  $f$ -нормированной относительно оператора  $L_1$  в  $\Omega$ . Тогда система функций

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} L_2^{n-k} f_n(x), x \in \Omega, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4)$$

является  $f$ -нормированной относительно оператора  $L_1 - L_2$  в  $\Omega$ .

### Построение нормированных систем для некоторых классов операторов

В этом пункте мы приведем методику построения нормированных систем для некоторых классов операторов.

**Определение 2.** Оператор  $D_\beta$  называется обобщенно-однородным порядка  $\beta$  относительно переменной  $t$ , если

$$D_\beta t^\mu = C_{\beta,\mu} t^{\mu-\beta}, t > 0 \quad (5)$$

где  $\beta, \mu \in R, 0 < \beta \leq \mu$ ,  $C_{\beta,\mu}$  – постоянные.

Умножим равенство (5) с двух сторон на одночлен  $t^{-\mu+\beta}$ . Тогда  $C_{\beta,\mu} = t^{-\mu+\beta} D_\beta t^\mu$ . Пусть  $s \in R$  и к одночлену  $t^{\beta k+s}$  можно применить оператор  $D_\beta$ . Рассмотрим коэффициенты

$$C(\beta, s, i) = \prod_{k=1}^i \left( t^{-\beta k-s+\beta} D_\beta t^{\beta k+s} \right), i \geq 1, C(\beta, s, 0) = 1.$$

Для коэффициентов  $C(\beta, s, i)$  имеет место равенство

$$\frac{1}{C(\beta, s, i)} = \frac{\left( t^{-\beta k-s} D_\beta t^{\beta k+\beta+s} \right)}{C(\beta, s, i+1)}. \quad (6)$$

**Замечание 1.** При определении коэффициентов  $C(\beta, s, i)$  для удобства мы приняли  $C(\beta, s, 0) = 1$ . В конкретных случаях операторов  $C(\beta, s, 0)$  можно выбрать произвольным образом.

Рассмотрим систему функций

$$f_i(t) = \frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta, s, i)}. \quad (7)$$

**Лемма 1.** Пусть  $D_\beta$  является обобщенно-однородным оператором порядка  $\beta$  относительно переменной  $t$  и для некоторых  $s \in \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, s_j \in R, j = 1, 2, \dots, m$  выполняется равенство  $D_\beta t^s = 0$ . Тогда система функций (7) является 0-нормированной относительно оператора  $D_\beta$ .

**Доказательство.** По определению оператора  $D_\beta$  имеем  $D_\beta t^\mu = \left( t^{-\mu+\beta} D_\beta t^\mu \right) t^{\mu-\beta}$ . Тогда  $D_\beta f_0(t) = 0$  и для всех  $s \in \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, s_j \in R$  и  $i \geq 1$  выполняется равенство

$$D_\beta f_i(t) = \frac{D_\beta t^{\beta i+s}}{C(\beta, s, i)} = \frac{\left( t^{-\beta i+\beta-s} D_\beta t^{\beta i+s} \right)}{C(\beta, s, i)} t^{\beta i+s-\beta}.$$

Далее в силу равенства (6) имеем  $\frac{\left( t^{-\beta i+\beta-s} D_\beta t^{\beta i+s} \right)}{C(\beta, s, i)} = \frac{1}{C(\beta, s, i-1)}, i \geq 1$ . Следовательно,

$$D_\beta f_i(t) = \frac{t^{\beta(i-1)+s}}{C(\beta, s, i-1)} = f_{i-1}(t). \text{ Лемма доказана.}$$

Рассмотрим функцию

$$y_{s,p}(t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta, s, i)}, p \in N_0. \quad (8)$$

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $p = 0$ , ряд (8) сходится и к нему можно почленно применять оператор  $D_\beta$ . Если существует значение параметра  $s$ , при которых выполняется равенство

$$\left( t^{-\beta i - s + \beta} D_\beta t^{\beta i + s} \right) \Big|_{i=0} = 0,$$

то функции  $y_{s,0}(t)$  при всех таких значениях параметра  $s$  удовлетворяют уравнению

$$D_\beta y(t) = \lambda y(t). \quad (9)$$

**Теорема 2.** Пусть ряд (8) сходится и к нему можно почленно применять оператор  $D_\beta$ . Если существует значение параметра  $s$ , при которых выполняется равенство

$$\left( t^{-\beta i - s + \beta} D_\beta t^{\beta i + s} \right) \Big|_{i=0} = 0,$$

то функции  $y_{s,p}(t)$  при всех таких значениях параметра  $s$ , и для всех  $p = 0, 1, \dots, n-1$  удовлетворяют уравнению

$$(D_\beta - \lambda)^n y(t) = 0.$$

Доказательство этих теорем следует из утверждения леммы 1 и свойств нормированных систем.

**Пример.** Для любого  $\alpha > 0$  следующее выражение

$$J^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau$$

называется оператором интегрирования порядка  $\alpha$  в смысле Римана-Лиувилля [9].

Пусть  $m-1 < \alpha \leq \gamma \leq m, m = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим дифференциальный оператор дробного порядка следующего вида

$$D^{\alpha,\gamma} u(t) = J^{\gamma-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\gamma} u(t).$$

Отметим, что для некоторых частных значений параметра  $\gamma$  мы получаем известные операторы дробного дифференцирования. Так в случае  $\gamma = \alpha$  имеем  $D^{\alpha,\alpha} u(t) = {}_{RL}D^\alpha$  – оператор дифференцирования порядка  $\alpha$  в смысле Римана-Лиувилля, в случае  $\gamma = m$  получаем, что  $D^{\alpha,m} u(t) = {}_C D^\alpha$  – оператор Капуто, а в случае  $\gamma = \beta(m-\alpha) + \beta, 0 \leq \beta \leq 1$  имеем  $D^{\alpha,\beta} u(t) = J^{\beta(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} J^{(1-\beta)(m-\alpha)} u(t)$  – оператор Хилфера [8].

Непосредственным вычислением можно показать, что оператор  $D^{\alpha,\gamma}$  удовлетворяет следующим равенствам

$$D^{\alpha,\gamma} t^s = 0, s = \gamma-1, \gamma-2, \dots, \gamma-m, \text{ и } D^{\alpha,\gamma} t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)} t^{\mu-\alpha}, \mu > m-1.$$

Следовательно,  $D^{\alpha,\gamma}$  является обобщенно-однородным оператором порядка  $\alpha$ .

Из утверждений теорем 1 и 2 вытекают следующие.

**Следствие 1.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq \gamma \leq m, m = 1, 2, \dots, s = \gamma-1, \gamma-2, \dots, \gamma-m$ . Тогда функции

$$y_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{\alpha i + s}}{\Gamma(\alpha k + s + 1)} \quad (10)$$

являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения дробного порядка

$$D^{\alpha,\gamma} y(t) - \lambda y(t) = 0, t > 0. \quad (11)$$

**Следствие 2.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq \gamma \leq m, m = 1, 2, \dots, s = \gamma-1, \gamma-2, \dots, \gamma-m$ . Тогда для всех значений  $s = \gamma-1, \gamma-2, \dots, \gamma-m$  и  $p = 0, 1, \dots, n-1$  функции

$$y_{s,p}(t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^{\alpha i + s}}{\Gamma(\alpha k + s + 1)} \quad (12)$$

являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения дробного порядка

$$\left(D^{\alpha,\gamma} - \lambda\right)^n y(t) = 0, t > 0.$$

Функцию  $y_s(t)$  из (10) можно представить в виде

$$y_k(t) = t^{\gamma-k} E_{\alpha,\gamma-k+1}(\lambda t^\alpha), k = 1, 2, \dots, m,$$

где  $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}$  – функция типа Миттаг–Леффлера [9]. Так как  $E_{\alpha,\beta}(z)$  является целой функцией, то отсюда легко получить сходимость рядов из представлений (10) и (12).

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (11) в случае  $\gamma = \beta(m - \alpha) + \beta, 0 \leq \beta \leq 1$ , т.е. для уравнения с оператором Хилфера, были построены в работе [10].

### 3. Построение нормированных систем для неоднородного уравнения

Теперь приведем пример  $f$ -нормированной системы относительно оператора  $D^{\alpha,\gamma}$  и построим решение неоднородного уравнения

$$\left(D^{\alpha,\gamma} - \lambda\right)^n y(t) = f(t), t > 0 \quad (13)$$

Пусть  $E_{\alpha,\alpha}^p(\lambda, t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + \alpha)}, p = 0, 1, \dots$

Рассмотрим следующую функцию

$$y_p(f)(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^p(-\lambda(t - \tau)^\alpha) f(\tau) d\tau. \quad (14)$$

**Теорема 3.** Пусть  $m - 1 < \alpha \leq \gamma \leq m, m = 1, 2, \dots$ . Тогда функции  $y_p(f)(t), p = 0, 1, \dots$  образуют  $f$ -нормированную систему относительно оператора  $D^{\alpha,\gamma} - \lambda$ , то есть справедливы равенства

$$\left(D^{\alpha,\gamma} - \lambda\right) y_0(f)(t) = f(t), \left(D^{\alpha,\gamma} - \lambda\right) y_p(f)(t) = f_{p-1}(t), p \geq 1 \quad (15)$$

**Доказательство.** В случае  $p = 0$  имеем  $E_{\alpha,\alpha}^0(-\lambda(t - \tau)^\alpha) = E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t - \tau)^\alpha)$ . Тогда равенство (15) для случая  $p = 0$  доказывается, как и в случае оператора Римана - Лиувилля [8].

Пусть  $p \geq 1$ . Применяя к функции  $y_p(f)(t)$  оператор  $J^{m-\gamma}$ , имеем

$$\begin{aligned} J^{m-\alpha} y_p(f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\gamma-1} \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^p(\lambda(\tau-\xi)^\alpha) f(\xi) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t f(\xi) \int_\xi^t (t-\tau)^{m-\gamma-1} (\tau-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^p(\lambda(\tau-\xi)^\alpha) d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Используя представление функции  $E_{\alpha,\alpha}^p$ , для внутреннего интеграла получим

$$\int_\xi^t (t-\tau)^{m-\gamma-1} (\tau-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}^p(\lambda(\tau-\xi)^\alpha) d\tau = \Gamma(m-\gamma) \sum_{i=p}^{\infty} \binom{i}{p} \frac{\lambda^{i-p} (t-\xi)^{\alpha i + \alpha + m - \gamma - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha + m - \gamma)}$$

Тогда

$$J^{m-\gamma} y_p(f)(t) = \int_0^t (t-\xi)^{m-\gamma-1} E_{\alpha,\alpha}^p(\lambda(t-\xi)^\alpha) f(\xi) d\xi.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} J^{m-\gamma} f_p(t) &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \int_0^t f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \binom{i}{p} \frac{\lambda^{i-p} (t-\xi)^{\alpha i + \alpha + m - \gamma - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha + m - \gamma)} d\xi = \\ &= \int_0^t f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha i + \alpha - \gamma}}{\Gamma(\alpha i + \alpha + 1 - \gamma)} d\xi. \end{aligned}$$

И наконец, применяя к последнему выражению оператор  $J^{\gamma-\alpha}$  после элементарных выкладок, получим

$$J^{\gamma-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\gamma} y_p(f)(t) = \int_0^t \sum_{j=p-1}^{\infty} \lambda^{j-(p-1)} \binom{j+1}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha j + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} f(\xi) d\xi.$$

Значит,

$$D^{\alpha, \gamma} y_p(f)(t) = \int_0^t \sum_{i=p-1}^{\infty} \lambda^{i-(p-1)} \binom{i+1}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha i + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} f(\xi) d\xi$$

Тогда

$$\begin{aligned} D^{\alpha, \gamma} y_p(f)(t) - y_{p-1}(f)(t) &= \int_0^t \sum_{i=p-1}^{\infty} \binom{i+1}{p} \frac{\lambda^{i-(p-1)} (t-\xi)^{\alpha i + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} f(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^t \sum_{i=p-1}^{\infty} \binom{i}{p-1} \frac{\lambda^{i-(p-1)} (t-\xi)^{\alpha i + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} f(\xi) d\xi = \lambda \int_0^t \sum_{i=p}^{\infty} \binom{i}{p} \frac{\lambda^{i-p} (t-\xi)^{\alpha i + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} f(\xi) d\xi = \lambda f_p(t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D^{\alpha, \gamma} y_p(f)(t) - y_{p-1}(f)(t) = \lambda y_p(f)(t),$$

то есть при всех значениях  $p=1, 2, \dots$  выполняются равенства

$$(D^{\alpha, \gamma} - \lambda) y_p(f)(t) = y_{p-1}(f)(t).$$

Теорема доказана.

## Литература

1. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 2003. – Vol. 287, № 2. – С. 577–592.
2. Карачик, В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Vol. 52, № 2. – С. 237–252.
3. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 86–98.
4. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.
5. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, № 244. – P. 1–9.
6. Liu, L. Normalized system for wave and Dunkl operators / L. Liu, G.B. Ren. // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 14, № 2. – P. 675–683.
7. Yuan, H.F. Dunkl–Poisson Equation and Related Equations in Superspace / H.F. Yuan, V.V. Karachik // Mathematical Modelling and Analysis. – 2015. – Vol. 20. – Issue 6. – P. 768–781
8. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.
9. Kilbas, A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
10. Hilfer, R. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // R. Hilfer, Y. Luchko, Z. Tomovski // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 299–318.

*Поступила в редакцию 6 декабря 2015 г.*



**NORMED SYSTEMS AND THEIR APPLICATION TO THE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER****B.Kh. Turmetov<sup>1</sup>**

This article describes a method of constructing the normed systems related to the differentiation of fractional order. Using the properties of normed systems the rigor solutions of ordinary differential equations of fractional order are given.

*Keywords: normed system; fractional derivative; generalized-homogeneous operator; fundamental solution; inhomogeneous equation.*

**References**

1. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 2003, Vol. 287, no. 2, pp. 577–592. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00583-3
2. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, Vol. 52, Issue 2, pp 219–234. DOI: 10.1134/S0965542512020108
3. Karachik V.V., Antropova N.A. On polynomial solutions to the Dirichlet problem for a biharmonic equation in a ball. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, Vol. 15, no. 2, pp. 86–98. (in Russ.).
4. Karachik V.V. Solution of the Dirichlet Problem with Polynomial Data for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 8, Article ID 204, pp. 1033–1042. DOI: 10.1134/S0012266115080078
5. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.
6. Liu L., Ren G.B. Normalized system for wave and Dunkl operators. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2007, Vol. 14, no. 2, pp. 675–683.
7. Yuan H.F., Karachik V.V. Dunkl–Poisson Equation and Related Equations in Superspace. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2015, Vol. 20, Issue 6, pp. 768–781. DOI:10.3846/13926292.2015.1112856
8. Karachik V.V. *Metod normirovannykh sistem funktsiy* [Method of normed system of functions]. Chelyabinsk: Izdatelskiy sentr YurGU Publ., 2014, 452 p. (in Russ.).
9. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006, 523 p.
10. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2009, Vol. 12, no. 3, pp. 299–318.

*Received December 6, 2015*

<sup>1</sup> Turmetov Batirkhan Khudaybergenovich is Dr. Sc.(Physics and Mathematics), Professor, Mathematics Department, H.A.Yassawe International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan.  
E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТЯЖЁЛОГО СТЕРЖНЯ НА ЖЁСТКОМ ОСНОВАНИИ

Ю.И. Дорогов<sup>1</sup>

Исследуется устойчивость упругого весомого стержня, лежащего на абсолютно жёстком основании. Найдена критическая сила, при которой горизонтальный стержень, лежащий на жёстком основании, теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия и отрывается от жёсткого основания полностью или только частью своей длины. Предварительно рассмотрен невесомый стержень с грузом посередине. Задача решается в линеаризованной постановке. Для определения прогибов применяется изопериметрическое условие, выражающее неизменность длины стержня при изгибе.

*Ключевые слова:* моделирование потери устойчивости; устойчивость горизонтального стержня.

### Введение

Традиционно при исследовании процессов потери устойчивости прямолинейного упругого стержня принимается, что стержень вертикальный и невесомый [1–3]. Предполагается, что собственный вес стержня не оказывает существенного влияния на критическую силу.

Устойчивость вертикального стержня с учётом его веса исследована в [2]. Потеря устойчивости стержня при наличии препятствий выпучиванию рассматривалась в [4–6]. В работах [7, 8] исследовалась устойчивость стержня, когда его материал или материал опор подвергался разрушениям.

В данной работе находится критическая сила, при которой весомый горизонтальный стержень, лежащий на жёстком основании, теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия и отрывается от жёсткого основания полностью или только частью своей длины. В начале рассматривается невесомый стержень с грузом массы  $m$  посередине. Затем рассматривается длинный весомый стержень, длина которого  $L$  превосходит длину той части, которая отрывается от жёсткой поверхности при изгибе от потери устойчивости. Стержень подвергается продольному сжатию силой  $P$ . Длина стержня достаточно большая, настолько, что при потере устойчивости большая часть стержня остаётся горизонтальной и прямолинейной, лежащей на жёстком основании. Часть стержня конечной длины  $\Lambda$  изгибается, отрываясь при этом от опоры. Подобная ситуация наблюдается при сжатии стальных горизонтальных листов, имеющих большую длину. В заключение рассматривается стержень, изгибающийся вследствие потери устойчивости по всей длине.

### 1. Невесомый стержень с грузом посередине

Рассмотрим упругий стержень с грузом посередине (рис. 1). Концы стержня заделаны и сближаются при сжатии и последующем изгибе стержня, возникающем вследствие потери устойчивости. Модуль Юнга материала стержня обозначим через  $E$ , а момент инерции его поперечного сечения через  $J$ . Представляются возможными две конфигурации изогнутой оси стержня, изображённые на рис. 1 и 2. В первом случае стержень изогнут по всей длине, груз при этом поднимается над горизонтальной плоскостью. Во втором случае стержень изгибается так, что груз остаётся неподвижным.

Поместим начало координат в одном конце стержня. Ось  $Ox$  горизонтальна и направлена в сторону другого конца стержня. Ось  $Oy$  вертикальна и направлена вверх.

Уравнение равновесия моментов после двукратного дифференцирования сводится к однородному линейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка с постоянными коэффициентами

<sup>1</sup> Дорогов Юрий Иванович – кандидат технических наук, доцент, кафедра высшей математики, филиал ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Волгоградская область, г. Волжский, Российская Федерация.

E-mail: ydorogov@yandex.ru

$$y'''' + \alpha^2 y'' = 0.$$

Здесь  $\alpha = \sqrt{P/EJ}$ . При этом граничные условия, в соответствии с условиями закрепления на концах стержня, запишутся

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Здесь  $l$  – длина проекции стержня на ось  $Ox$  или расстояние между концами стержня.

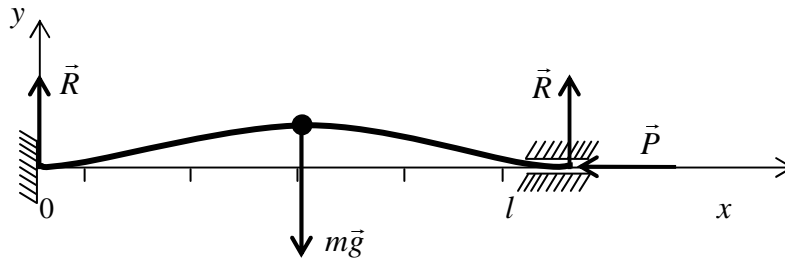


Рис. 1. Схема нагружения упругого невесомого стержня с грузом посередине.  
При потере устойчивости стержень изгибается, приподнимая груз.

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения четвёртого порядка имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x. \quad (1)$$

Граничным условиям удовлетворяет нетривиальное решение

$$y(x) = C(1 - \cos \alpha x) \quad (2)$$

при значении сжимающей силы  $P_e = 4\pi^2 EJ/l^2$ .

Эта сила равна силе Эйлера для стержня с заделанными концами, и её значение не зависит от массы груза. Выясним, может ли она вынудить стержень к поднятию груза или способна только удержать стержень в изогнутом состоянии, и её работы недостаточно для поднятия груза. Для этого рассмотрим изогнутую ось стержня. Из полученного однопараметрического семейства кривых выберем ту кривую, длина которой равна длине стержня  $L$ . Для определения искомой кривой используем уравнение относительно неизвестного параметра  $C$ .

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3)$$

На начальном этапе процесса изгиба  $y'(x) \ll 1$ . Разложим подынтегральное выражение в ряд Маклорена с двумя первыми членами и подставим производную функции (2). Учитывая, что  $\alpha l \approx 2\pi$ , выразим из полученного уравнения коэффициент  $C$  через длину проекции изогнутой части  $l$ .

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (4)$$

Упругая энергия, накопленная в сжато-изогнутом стержне, равна

$$W = \frac{P^2 L}{2ES} + P(L-l).$$

При изгибе стержня груз приподнимается на высоту  $y(l/2) = C$ . При этом сила тяжести груза  $mg$  совершает отрицательную работу  $-mgC$  или, что тоже самое, груз приобретает дополнительную потенциальную гравитационную энергию  $mgC$ . Здесь  $g$  – ускорение свободного падения.

Сближение концов стержня  $\Delta$  складывается из деформации сжатия стержня  $\varepsilon L$  и сближения крайних сечений стержня  $L-l$ , возникающего в результате его изгиба. То есть перемещение одного конца стержня по отношению к другому равно

$$\Delta = \varepsilon L + L - l.$$

Здесь  $\varepsilon = P/ES$  — относительная деформация сжатия стержня,  $S$  — площадь поперечного сечения стержня.

## Механика

Работа сжимающей силы  $P$  на этом перемещении, с учётом изменения силы  $P$  на этапе чистого сжатия, равна

$$A = \int_0^{\Delta} P dx = W .$$

Таким образом, работа силы  $P$  равна упругой энергии стержня, и её недостаточно для преодоления силы тяжести груза и сообщения ему необходимой потенциальной энергии  $mgC$ . Другими словами, сила  $P$ , способная удержать стержень в изогнутом положении, не может принудить стержень изменить прямолинейное положение на изогнутое. Необходимая дополнительная энергия должна накопиться в стержне ещё на этапе сжатия, чтобы преобразоваться при изгибе в потенциальную гравитационную энергию  $mgC$ . Механизм накопления дополнительной энергии может быть описан при помощи кинематического нагружения следующим образом.

Стержень продолжает сжиматься без изгиба, после того как нагрузка превысит значение  $P_e$ , достаточное для удержания стержня в изогнутом состоянии. При некотором значении нагрузки  $P_1$  в стержне будет накоплена энергия сжатия, достаточная для изгиба и преодоления работы сил тяжести. После этого стержень изгибается. При этом концы стержня остаются неподвижными и нагрузка уменьшается до величины  $P_e$ , достаточной для удержания стержня в сжато-изогнутом состоянии.

Упругая энергия, накапливаемая стержнем на этапе предварительного сжатия, равна работе сжимающей силы  $P_1$ .

$$A = \frac{P_1 \Delta}{2} . \quad (5)$$

Эта энергия сжатия должна компенсировать полную энергию стержня в изогнутом состоянии, равную сумме упругой энергии  $W$  и гравитационной энергии  $U = mgC$  в сжато-изогнутом состоянии. То есть,

$$A = W + U . \quad (6)$$

Величина  $P_1$  в соответствии с законом Гука равна

$$P_1 = \frac{ES\Delta}{L} = \frac{ES(\varepsilon L + L - l)}{L} .$$

Здесь  $\varepsilon = P_e/ES$  — деформация сжатия, оставшаяся после изгиба части стержня. Следовательно,

$$P_1 = P_e + \frac{ES(L - l)}{L} .$$

Тогда работа силы  $P_1$  равна

$$A = \frac{ES\Delta^2}{2L} .$$

Подставляя выражения  $A, W, U$  в уравнение (6) и учитывая значение  $C$ , после преобразования получим

$$L - l = \left( \frac{2mg}{\pi ES} \right)^{2/3} L .$$

Поэтому

$$P_1 = P_e + \sqrt[3]{\frac{4(mg)^2 ES}{\pi^2}} . \quad (7)$$

Сила  $P_1$  достаточна для того, чтобы вынудить стержень изогнуться вместе с грузом. Значение этой силы больше удерживающей силы Эйлера и зависит от массы груза.

Рассмотрим теперь случай, когда конфигурация изогнутой оси стержня при изгибе такая, что груз не отрывается от горизонтальной плоскости и сила тяжести работы не совершает (рис. 2). В этом случае работа сжимающей силы в точности равна потенциальной энергии сжато-изогнутого стержня, а критическая сила равна  $P = 4P_e$ .

Приравняем значение критической силы, найденное по формулам (7), к значению  $4P_e$ . Из полученного равенства найдём наименьшее значение массы, при котором становится возможной такая конфигурация, при которой груз не отрывается от горизонтальной плоскости:

$$m = \frac{12\sqrt{3}\pi^4 ES}{gv^3}.$$

Здесь  $v = L/i$  — гибкость стержня,  $i = \sqrt{J/S}$  — радиус инерции поперечного сечения стержня.

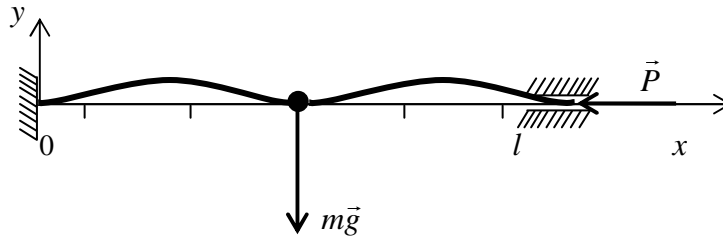


Рис. 2. Схема нагружения упругого невесомого стержня с грузом посередине. При потере устойчивости стержень изгибается так, что груз остаётся лежать на горизонтальной плоскости.

Если масса груза превосходит найденное критическое значение, то при потере устойчивости стержня груз не отрывается от горизонтальной плоскости. Если масса груза меньше критического значения, то стержень изгибается по всей длине, приподнимая при этом груз.

## 2. Тяжёлый горизонтальный стержень

Рассмотрим теперь упругий горизонтальный стержень, вес которого равномерно распределён по всей длине. Учитывая результаты предыдущего параграфа, имеет смысл предположить, что возможен случай изгиба стержня не по всей длине, а лишь по некоторой части его длины. Поместим начало системы координат в левом конце изогнутой части стержня. Ось  $Ox$  направим горизонтально в сторону изогнутой части стержня, а ось  $Oy$  — вертикально вверх (рис. 3).

Рассмотрим равновесие моментов, приложенных к изогнутой части стержня  $\xi \in [0; x]$ . Воздействие оставшейся горизонтальной части стержня на этот изогнутый участок сводится к продольному усилию  $P$ , поперечному усилию  $R$  и изгибающему моменту  $M_0$ , приложенным в сечении  $x=0$  (рис.3). Кроме того, на рассматриваемый участок действует распределённая по длине сила тяжести с интенсивностью  $q = \rho g S$ . Здесь  $\rho$  — плотность материала. К крайнему правому сечению рассматриваемого участка, со стороны правой части стержня приложен момент нормальных напряжений

$$M = EJy''.$$

Уравнение равновесия моментов, приложенных к рассматриваемой изогнутой части стержня  $\xi \in [0; x]$  относительно сечения  $\xi = x$ , принимает вид

$$-M_0 - Rx + Py + M + \int_0^x q(x - \xi)d\xi = 0.$$

Дифференцируем это уравнение дважды по переменной  $x$ . Разделив полученное выражение на изгибную жёсткость и учитывая выражение для  $M$ , получим

$$y''' + \alpha^2 y'' = -\beta. \quad (9)$$

Здесь  $\beta = q/EJ$ .

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (9) имеет вид

$$y(x) = -\frac{\beta}{2\alpha^2} x^2 + C_1 x + C_2 + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x. \quad (10)$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий для выпуклой части стержня.

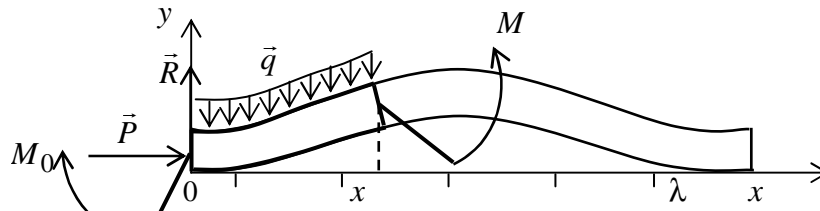


Рис. 3. Схема нагружения тяжёлого упругого стержня.

Обозначим длину проекции выпуклой части стержня  $\lambda$ . Тогда граничные условия запишутся  $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(\lambda) = 0, y'(\lambda) = 0$ .

Физическому смыслу задачи удовлетворяет положительно определённое частное решение, которое становится возможным при  $\alpha\lambda > 2\pi$ . Следовательно, изогнутое состояние стержня возможно лишь в том случае, когда продольная сжимающая сила и длина проекции изогнутой части стержня удовлетворяют неравенству  $P > P_\lambda$ . Здесь  $P_\lambda = 4\pi^2 EJ / \lambda^2$  — значение силы Эйлера для стержня длины  $\lambda$  с заделанными концами.

В этом случае уравнение прогибов запишется

$$y(x) = \frac{\beta\lambda}{2\alpha^3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha\lambda}{2} (1 - \cos \alpha x) + \frac{\beta}{2\alpha^3} (\alpha x(\lambda - x) - \lambda \sin \alpha x).$$

Заметим, что при  $\alpha\lambda \rightarrow 2\pi + 0$  первое слагаемое в правой части последнего выражения неограниченно большое, а второе слагаемое конечное. Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Учитывая, что величина множителя  $0,5\beta\lambda\alpha^{-3} \operatorname{ctg}(0,5\alpha\lambda)$ , стоящего в первом слагаемом, не определена, так как зависит от неопределённых величин  $\alpha$  и  $\lambda$ , то этот множитель также можно считать неопределённым. Обозначим его  $C$ . С учётом вышесказанного, для оси изогнутой части стержня получим то же уравнение (2).

Из полученного однопараметрического семейства кривых выберем ту кривую, длина которой равна длине изогнутой части стержня  $\Lambda$ . Выразим длину изогнутой части стержня через длину её проекции с учётом того, что на начальном этапе процесса изгиба  $y'(x) \ll 1$ . Из полученного уравнения после интегрирования найдём значение коэффициента  $C$ , которое определяется выражением аналогичным выражению (4).

На начальном этапе изгиба  $\alpha\lambda \approx 2\pi$ , то есть значение силы, способной удержать стержень в изогнутом состоянии, равно  $P \approx P_\lambda$ . Работа этой силы, как и в случае невесомого стержня с грузом посередине, равна упругой энергии стержня. Этой работы недостаточно для преодоления силы тяжести и сообщения изгибающейся части стержня необходимой потенциальной энергии. Механизм накопления дополнительной энергии описан в предыдущем параграфе.

Для определения критической силы, при которой становится возможным переход стержня из прямолинейного сжатого состояния в сжато-изогнутое состояние, составим уравнение энергетического баланса.

Стержень сжат по всей длине, а изогнут только по части длины  $\Lambda$ . Для упругой энергии данного стержня получим

$$W = \frac{P^2 L}{2ES} + P(\Lambda - \lambda).$$

Потенциальная гравитационная энергия равна работе распределённых сил тяжести, взятой с обратным знаком, то есть

$$U = \rho g S \int_0^\lambda y(x) dx.$$

Подставляя в последнее выражение функцию прогибов (2) с учётом значения коэффициента  $C$ , определённого выражением (4), находим

$$U = \frac{\rho g S \lambda^{3/2} \sqrt{\Lambda - \lambda}}{\pi}.$$

Сближение концов стержня  $\Delta$  складывается из деформации сжатия стержня  $\varepsilon L$  и сближения крайних сечений изогнутого участка  $\Lambda - \lambda$ , возникающего в результате его изгиба. То есть перемещение одного конца стержня по отношению к другому равно

$$\Delta = \varepsilon L + \Lambda - \lambda. \quad (11)$$

При некотором значении нагрузки  $P_1$  в стержне будет накоплена энергия сжатия, достаточная для изгиба и преодоления работы сил тяжести. После этого часть стержня длины  $\Lambda$  выпучивается. При этом концы стержня остаются неподвижными, и нагрузка ослабевает до величины  $P_\lambda$ , достаточной для удержания стержня в сжато-изогнутом состоянии.

Упругую энергию, накапливаемую стержнем на этапе предварительного сжатия, равную работе сжимающей силы  $P_1$ , найдём по формуле (5), в которой величина  $\Delta$  определяется выражением (11). Эта энергия сжатия должна компенсировать полную энергию стержня в изогнутом состоянии, равную сумме упругой и гравитационной энергий в сжато-изогнутом состоянии.

Величина  $P_1$ , в соответствии с законом Гука, равна

$$P_1 = P_\lambda + \frac{ES(\Lambda - \lambda)}{L}.$$

Тогда работа силы  $P_1$  равна

$$A = \frac{ES\Delta^2}{2L}.$$

Подставляя выражения  $A, W, U$  в уравнение (6), после преобразования получим

$$\Lambda - \lambda = \left( \frac{2\rho g L}{\pi E} \right)^{2/3} \lambda.$$

На начальном этапе изгиба  $\lambda \approx \Lambda$ , поэтому в правой части последней формулы вместо проекции  $\lambda$  можно взять длину изогнутой части  $\Lambda$ . Тогда нагрузка

$$P_1 = P_\lambda + \sqrt[3]{\frac{4(\rho g)^2 E}{\pi^2 L}} S \Lambda. \quad (12)$$

В последней формуле величина длины изогнутой части  $\Lambda$  остаётся неопределённой. Среди всех значений  $P_1$ , получающихся из данной формулы, началу процесса потери устойчивости будет соответствовать минимальное. Обозначим значение длины изогнутой части, при котором достигается минимальное значение силы, через  $\Lambda_*$ . Это значение является корнем уравнения  $dP_1/d\Lambda = 0$ . Дифференцируем выражение (12) по переменной  $\Lambda$  и приравняем его к нулю. После преобразования из полученного уравнения находим

$$\Lambda_* = \sqrt[9]{\frac{128\pi^8 E^2 J^3 L}{S^3 \rho^2 g^2}}.$$

Подставляя найденное  $\Lambda_*$  в формулу (12), получим значение критической силы, при которой происходит потеря устойчивости стержня, лежащего на жёстком основании

$$P_* = 3 \cdot \sqrt[9]{\frac{16\pi^2 E^5 J^3 S^6 \rho^4 g^4}{L^2}}.$$

При  $P < P_*$  стержень остаётся прямолинейным и горизонтальным. Изогнутая форма равновесия стержня появляется при достижении нагрузкой значения  $P_*$ . При этом,  $\Lambda_*$  — это минимально возможное значение длины изогнутой части стержня. По мере увеличения нагрузки длина изогнутой части также увеличивается до тех пор, пока стержень не окажется изогнутым по всей длине.

Если величина  $\Lambda_*$  меньше длины стержня  $L$ , то стержень начинает изгибаться не по всей длине, а только по части длины. Если величина  $\Lambda_*$  больше, чем длина стержня  $L$ , то стержень

## Механика

изгибается сразу по всей длине. Наименьшая длина стержня, при которой возможен частичный изгиб, определяется из равенства  $\Lambda_* = L$ . Эта длина равна

$$L_{\min} = 2\pi \cdot \sqrt[8]{\frac{E^2 J^3}{2\rho^2 g^2 S^3}}.$$

Так, например, для стали  $L_{\min} \approx 231,35 \sqrt[8]{(J/S)^3} = 231,35 i^{3/4}$ . Здесь  $i$  — радиус инерции сечения стержня.

Если длина стержня больше величины  $L_{\min}$ , то при потере устойчивости стержень изгибается только частью. При меньшей длине стержень начинает изгибаться целиком. Повторяя рассуждения для этого случая  $L < L_{\min}$ , получим

$$L - l = \sqrt[3]{\frac{4\rho^2 g^2 L^5}{\pi^2 E^2}}.$$

Тогда критическая нагрузка

$$P_* = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2} + \sqrt[3]{\frac{4(\rho g L)^2 E}{\pi^2}} S.$$

Минимальное значение нагрузки  $P_*$  достигается при длине, равной

$$L = \pi \cdot \sqrt[8]{\frac{432 E^2 J^3}{\rho^2 g^2 S^3}} \geq L_{\min}.$$

То есть функция  $P_*(L)$  достигает минимума в области длин, при которых стержень теряет устойчивость, выпучиваясь только частью длины.

На основании полученных зависимостей  $P_*(L)$  для разных длин, строим график критической силы, при которой происходит отклонение стержня от прямолинейного горизонтального положения. Этот график изображён сплошной линией на рис. 4. Пунктирной линией изображён график зависимости силы Эйлера для стержня с заделанными концами. Как видно из этих графиков, критическая сила превосходит силу Эйлера при всех значениях длины. Чем больше длина стержня, тем сильнее отличие критической силы от силы Эйлера. При пограничном значении длины  $L = L_{\min}$  критическая сила превосходит соответствующую силу Эйлера ровно в три раза.

### Выводы

1. Формула Эйлера даёт существенно заниженное значение критической силы для висящего горизонтального стержня, лежащего на жёсткой опоре. Критическая сила превосходит силу Эйлера при любом значении длины стержня. Отличие критической силы от силы Эйлера тем больше, чем длиннее стержень.

2. Критическая сила зависит не только от геометрии сечения стержня и его длины, но и от массы стержня, или плотности его материала.

3. В зависимости от конфигурации кривых изгиба стержней при потере устойчивости, стержни можно классифицировать по их длине на короткие и длинные. Короткие стержни ( $L < L_{\min}$ ) при потере устойчивости выпучиваются сразу по всей длине. Длинные стержни ( $L > L_{\min}$ ) теряют устойчивость, изгибаясь только частью, длина которой увеличивается с увеличением нагрузки.



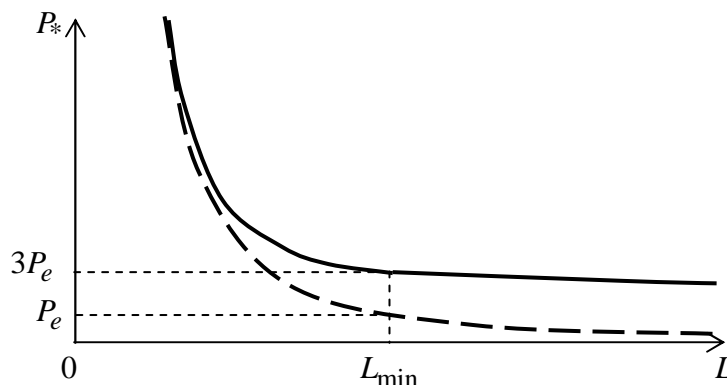


Рис. 4. График зависимости критической силы от длины стержня.

## Литература

1. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
3. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
4. Дорогов, Ю.И. Об устойчивости формы незакрепленного упругого стержня с жёсткими полками на концах / Ю.И. Дорогов // Прикладная математика и механика. – 2013. – Том 77. – Вып. 3. – С. 462–473.
5. Дорогов, Ю.И. Устойчивость стержня с жёсткими окончаниями / Ю.И. Дорогов // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2013. – № 3. – С. 16–21.
6. Дорогов, Ю.И. Устойчивость стержня с искривленными торцами / Ю.И. Дорогов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 255–266.
7. Дорогов, Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой / Ю.И. Дорогов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 84–96.
8. Дорогов, Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками / Ю.И. Дорогов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 4. – С. 575–586.

*Поступила в редакцию 18 июня 2015 г.*

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2016, vol. 8, no. 1, pp. 34–42*

DOI: 10.14529/mmph160105

## THE MODELING OF LOSS IN STABILITY OF A HEAVY ROD PLACED ON A RIGID BASIS

*Yu.I. Dorogov<sup>1</sup>*

Stability of the ponderable elastic column lying on an absolutely rigid basis is investigated. The ends of the column are closed up and do not turn at a core bend. The column contracts by longitudinal force. Previously a weightless column with freight in the middle was considered. Research is conducted at rather small values of deflections of the column. Curvature of a curved axis of the column is accepted equal by the second derivative of function of deflections. The problem is solved in the linearized statement. For definition of deflections of a curved axis of the column the linear differential equation of the fourth order is used. The nontrivial private solution of the differential equation under the boundary con-

<sup>1</sup> Dorogov Yury Ivanovich is Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Branch of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Volzhskiy, Russia.  
E-mail: ydorogov@yandex.ru

ditions corresponding to fixing conditions is only with an accuracy of indefinite coefficient. The isoperimetric condition expressing the column length invariance at a bend is applied to determination of this coefficient. The critical force with which the column loses stability is found. Cases of a full and partial bend of the column are considered. For determination of critical force, besides the condition of the existence of the nontrivial solution of the differential equation of a bend, the law of conservation of mechanical energy is applied. It is established that the critical force and configuration of a curved axis of the column depends not only on length of the column and geometry of cross section, but also on column material density.

*Keywords: modeling of loss of stability; stability of a horizontal rod.*

### References

1. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh sistem [The stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 984 p. (in Russ.).
2. Panovko Ya.G., Gubanov I.I. Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 352 p. (in Russ.).
3. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela [Deformable Solid Body Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 712 p. (in Russ.).
4. Dorogov Yu.I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, Vol. 77, no. 3, pp. 338–345. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.010
5. Dorogov Yu.I. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2013, no. 3, pp. 16–21. (in Russ.).
6. Dorogov Yu.I. Buckling of the Column with the Bent Butts. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Composite Mechanics and Design], 2012, Vol. 18, no. 2, pp. 255–266. (in Russ.).
7. Dorogov Yu.I. Buckling of the Elastic Column with Failing Support. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Composite Mechanics and Design], 2010, Vol. 16, no. 1, pp. 84–96. (in Russ.).
8. Dorogov Yu.I. The Longitudinal Bend of a Column with Failing Attachments. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Composite Mechanics and Design], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 575–586. (in Russ.).

*Received June 18, 2015*

## МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Г.М. Улитин<sup>1</sup>, С.Н. Царенко<sup>2</sup>

Рассмотрен метод усреднения переменных коэффициентов применительно к моделям продольного удара стержней переменного сечения. Решена задача о свободных колебаниях стержня. Приводится сравнение значений собственных частот для моделей упрощенной и точной. Получены зависимости для определения продольных деформаций и напряжений в сечениях стержня. Для сравнения найденных решений с известными результатами построены графики изменения усилия в ударном торце для конических стержней различной конфигурации.

*Ключевые слова:* метод усреднения; продольный удар; свободные колебания; стержень переменного сечения, напряжения; деформации.

Математической моделью для многих задач динамики элементов оборудования и сооружений является стержень с переменным сечением (ударный инструмент в силовых импульсных системах, стойки и сваи различной конфигурации и пр.). Основная трудность при решении таких задач состоит в том, что собственные функции соответствующих граничных задач являются решением уравнений с переменными коэффициентами. Для некоторых частных случаев найдены аналитические решения таких уравнений, например, в работах [1, 2] рассмотрены задачи продольного удара стержней конической и гиперболической формы, в статье [3], при исследовании собственных и вынужденных продольных колебаний в конических стойках трубчатого сечения решение получено в функциях Бесселя. В работе [4] решение уравнения продольных колебаний стержня неоднородной структуры находится в виде ряда, который строится на основе рекуррентной интегральной зависимости. Тем не менее, не существует общего метода для аналитического решения таких уравнений. Поэтому для практических расчетов широкое распространение получили численные методы, в том числе и на основе аппроксимации поверхности стержней различных форм последовательно сопряженными цилиндрическими участками [5]. Однако так как численное решение можно получить исключительно для объекта с заданными параметрами, такой подход практически не применим на стадии проектных разработок. Поэтому становится актуальным вопрос об использовании методов упрощения математической модели и проведения оценок таких методов.

В работе [6] представлены различные методы приведения уравнений колебаний упругих систем к уравнениям с постоянными коэффициентами. Одним из таких методов является метод усреднения переменных коэффициентов. Такой метод был, например, использован в задаче устойчивости буровых колон [7], а также при нахождении собственных значений для краевых спектральных задач четвертого порядка [8].

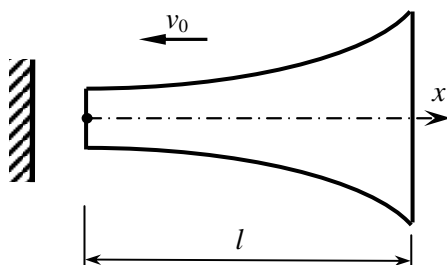


Рис. 1. Схема удара стержня переменного сечения о жесткий ограничитель

Поставим задачу об ударе стержня переменного сечения о жесткий ограничитель (рис. 1), принятая схема аналогична, рассмотренным в работах [1,2]. Для этого решим граничную задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u'(l, t) = 0. \quad (3)$$

С начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = -v_0 e(x), \quad (4)$$

<sup>1</sup> Улитин Геннадий Михайлович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Государственное высшее учебное заведение Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина.

<sup>2</sup> Царенко Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, Государственное высшее учебное заведение Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина.

E-mail: tzarenko@gmail.com

## Механика

где  $u(x, t)$  – продольное перемещение,  $F(x)$  – площадь поперечного сечения стержня, будем считать, монотонно-возрастающей на участке  $[0; l]$ ,  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала,  $e(x)$  – единичная функция.

Уравнение (1) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( F(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \gamma F(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где  $z = \frac{x}{l}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ),  $\gamma = \frac{l^2}{c^2}$ ,  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость волны продольных колебаний стержня.

Для решения уравнения (5) применим метод Фурье. Из соотношения (5) следует уравнение для определения собственных функций  $Z_n(z)$

$$Z_n'' + \frac{F'}{F} Z_n' + \lambda_n^2 Z_n = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda_n$  – собственные значения.

Уравнение (6) является уравнением с переменным коэффициентом. Усредним переменный коэффициент

$$2\alpha = - \int_0^1 \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \ln k,$$

где  $k = \frac{F(0)}{F(1)}$  ( $k \leq 1$ ) – отношение площади поперечного сечения меньшего торца к площади большего.

Тогда уравнение (6) представим уравнением с постоянными коэффициентами

$$Z_n'' - 2\alpha Z_n' + \lambda_n^2 Z_n = 0. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$Z_n = e^{\alpha z} (C_1 \cos \beta_n z + C_2 \sin \beta_n z), \quad (8)$$

где  $\beta_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}$ .

Следует отметить, что при  $k=1$ , уравнение (7) будет соответствовать уравнению для стержня постоянного сечения, а функция (8) будет его точным решением. Из граничного условия (2) находим  $C_1 = 0$ , тогда выражение для собственных функций примет вид

$$Z_n(z) = e^{\alpha z} \sin \beta_n z. \quad (9)$$

Из условия (3) получим уравнение для определения собственных значений

$$\tan \beta_n = -\frac{\beta_n}{\alpha}, \text{ или } \tan \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4} \ln^2 k} = -\frac{2\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4} \ln^2 k}}{\ln k}. \quad (10)$$

Из зависимости (10) видно, что при  $\beta_n \rightarrow 0$   $\alpha \rightarrow 1$ , таким образом, получаем наименьшее значение параметра  $k_{\min} = 1/e^2$ , для которого можно определить собственные значения из уравнения (10).

На графиках рис. 2 показаны зависимости первых двух собственных значений от параметра  $k$ . Пунктирная линия отображает соответствующие зависимости, построенные на основании аналитических решений для стержней конической и гиперболической форм [1,2]. Из полученных зависимостей определяем наибольшее расхождение между значениями первого собственного числа, найденных из аналитического решения и по методу усреднения, в точке  $k_{\min}$  составит 1,3 %, для второго, как и для всех последующих, расхождение не будет превышать 1 %. Таким образом, на основании сравнения собственных значений (собственных частот) следует вывод о том, что предложенная модель, с достаточной точностью, может использоваться для практиче-

ских расчетов стержней переменного сечения, у которых отношение площадей торцов не менее чем  $1/e^2$ .

Уравнение собственных продольных колебаний с учетом первого начального условия (4) будет иметь вид:

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \sin \omega_n t, \quad (11)$$

где  $\omega_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\lambda_n c}{l}$  – частота собственных колебаний,  $A_n$  – произвольные постоянные.

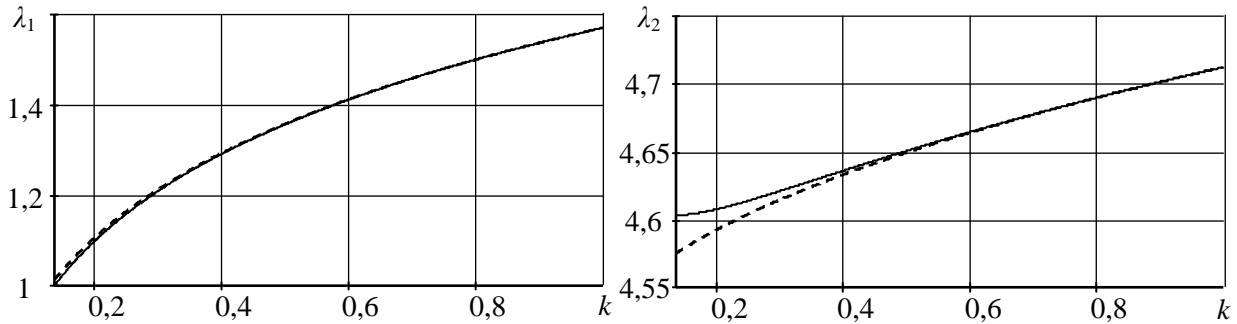


Рис. 2. Зависимость  $\lambda_n$  от величины параметра  $k$

Для нахождения коэффициентов  $A_n$ , при наличии аналитического решения, используется свойство ортогональности собственных функций. В нашем случае они не будут ортогональны. Покажем, что функция  $Y_m(z) = e^{-\alpha z} \sin \beta_m z$  будет ортогональна с функцией  $Z_n(z)$  на промежутке  $[0; 1]$  для всех  $m \neq n$

$$\int_0^1 Z_n Y_m dz = \int_0^1 \sin \beta_n z \sin \beta_m z dz = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\beta_n^2 - \beta_m^2} (\beta_m \tan \beta_n - \beta_n \tan \beta_m), \quad (12)$$

так, как  $\beta_n \neq \beta_m$ , а также учитывая, что  $\alpha \neq 0$ , то подставив в уравнение (12) зависимость (10) получим

$$\int_0^1 Z_n Y_m dz = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\alpha(\beta_n^2 - \beta_m^2)} (\beta_m \beta_n - \beta_n \beta_m) = 0. \quad (13)$$

Из второго начального условия следует уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n Z_n(z) = -v_0 e(z). \quad (14)$$

Умножим обе части равенства (14) на  $Y_m(z)$  и проинтегрируем на участке  $[0; 1]$ , тогда с учетом свойства (13) получим

$$A_n \omega_n \int_0^1 Z_n Y_n dz = -v_0 \int_0^1 Y_n dz,$$

откуда находим произвольные постоянные

$$A_n = -\frac{v_0 \int_0^1 Y_n dz}{\omega_n \int_0^1 Z_n Y_n dz} = -\frac{4v_0 l (\lambda_n^2 - \alpha^2)}{c \sqrt{\lambda_n^3} \left( 2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}) \right)}. \quad (15)$$

Подставив выражение (15) в уравнение (11), получим зависимость для определения продольных перемещений сечений стержня

$$u(z,t) = -\frac{4v_0 l}{c} e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 - \alpha^2) \sin(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} z)}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}))} \sin \omega_n t.$$

Выражение для напряжений будет иметь вид:

$$\sigma(z,t) = -E \frac{4v_0}{c} e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 - \alpha^2) (\alpha \sin(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} z) + \sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} \cos(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} z))}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}))} \sin \omega_n t.$$

Усилие в ударном торце определяется зависимостью

$$P(t) = -EF_0 \frac{4v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(\lambda_n^2 - \alpha^2)^3}}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}))} \sin \omega_n t, \quad (16)$$

где  $F_0 = F(0)$

В работе [5] представлены результаты численных исследований на основе аппроксимации конической поверхности стержней последовательно сопряженными цилиндрическими участками. В качестве базовой модели был принят стержень постоянного сечения диаметром  $d_0 = 0,025$  м и длиной  $l = 1$  м, конические стержни, по отношению к базовому, имели такой же диаметр ударного торца и массу, а углы уклона  $\varphi$ , составляли:  $0,5^\circ$ ;  $1^\circ$ ;  $3^\circ$ ;  $6^\circ$  и  $9^\circ$ . Для сравнения результатов, найденных численным методом и методом усреднения, определим расчетное значение параметра  $k$  для конических стержней по формуле [2]

$$k_\varphi = \sqrt[3]{\left(\frac{d_0}{6l \tan \varphi + d_0}\right)^2},$$

откуда находим:  $k_{0,5} = 0,471$ ;  $k_1 = 0,334$ ;  $k_3 = 0,176$ ;  $k_6 = 0,113$ ;  $k_9 = 0,087$ . По полученным значениям видим, что для стержней с уклоном  $6^\circ$  и  $9^\circ$  рассматриваемый метод не применим, так как соответствующие значения  $k$  меньше предельного  $k_{\min} = 1/e^2 \approx 0,135$ .

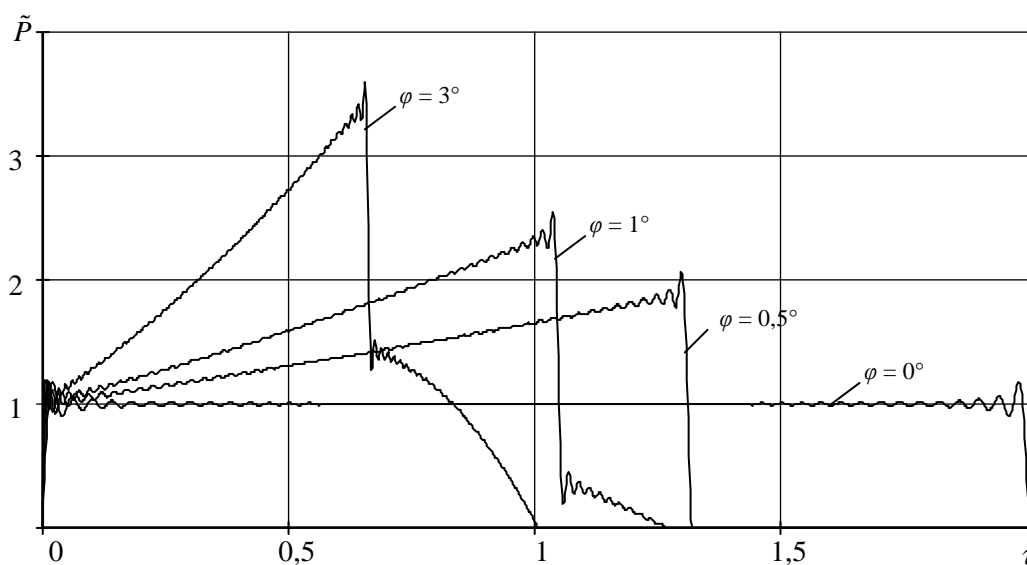


Рис. 3. Зависимость величины усилия в ударном торце  $\tilde{P}$  от безразмерного времени  $\tau$

На рис. 3 представлены графики безразмерной величины усилия в ударном сечении  $\tilde{P} = -\frac{P}{EF_0} \frac{c}{v_0}$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau = \frac{c}{l} t$  для конических стержней с различным углом уклона  $\varphi$ . Графики (рис. 3) практически полностью согласуются по характеру поведения и расчетным значениям с представленными в литературе [5], например, для стержня с  $\varphi = 3^\circ$   $\tilde{P}_{\max} = 3,632$  [5], а максимальное значение, найденное из зависимости (16),  $\tilde{P}_{\max} = 3,595$ , т.е. расхождение составляет порядка 1 %.

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что метод усреднения переменных коэффициентов дает достаточную точность для технических расчетов в моделях продольного удара стержней переменного сечения. При этом он ограничен предельной величиной соотношения площадей поперечных сечений, а также условием монотонности изменения площади в пределах длины стержня или участка. Учитывая, что полученные расчетные формулы не зависят от формы сечения и очертания стержня, то данный метод, с достаточной точностью для инженерных решений, дает обоснование выбора шага (участок длины стержня, в пределах которого отношение площадей сечений составляет менее чем  $1/e^2$ ) для аппроксимации сложных поверхностей участками конической или другой формы, для которой известно аналитическое решение.

### Литература

1. Улітін, Г.М. Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду / Г.М. Улітін, С.М. Царенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – № 93. – С. 56–63.
2. Улитин, Г.М. Моделирование динамических процессов в бойках гиперболической формы в механизмах ударного действия / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 3(75). – С. 37–42.
3. Улитин, Г.М. О продольных колебаниях упругих стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Прикладная механика. – 2015. – № 1. – С. 123–129.
4. Крутий, Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой / Ю.С. Крутий // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 1. – С. 25–33.
5. Манжосов, В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В.К. Манжосов, В.В. Слепухин. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.
6. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.
7. Улитин, Г.М. Оценка метода усреднения в задачах устойчивости буровых колон / Г.М. Улитин // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Гірничо-геологічна». – 2005. – № 85. – С. 69–72.
8. Абзалимов, Р.Р. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями / Р.Р. Абзалимов, Е.В. Саяхова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – № 11. – С. 3–11.

Поступила в редакцию 5 апреля 2015 г.

## METHOD OF AVERAGING FOR THE TASKS ON LONGITUDINAL IMPACT OF VARIABLE SECTION RODS

G.M. Ulitin<sup>1</sup>, S.N. Tsarenko<sup>2</sup>

The method of averaging of variable coefficients is applied to the models of longitudinal impact of variable section rods. The task of free vibrations of a rod is solved. The values of the proper frequencies for the two models: simplified and accurate ones are compared. The dependencies to determine the longitudinal strains and stresses in the rod sections are obtained. To compare the obtained results with the earlier outcomes the graphs of effort change in the impact end of conical rods for different configurations are created.

*Keywords: method of averaging; longitudinal impact; free oscillations; rod with variable cross section, voltage; strain.*

### References

1. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Udar konichnogo strizhnya ob zhorstku pereshkodu [Impact conical rod on hard limiter]. *Opir materialiv i teoriya sporud*, 2014, no. 93, pp. 56–63. (in Ukr.).
2. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Modelirovaniye dinamicheskikh protsessov v boykakh giperbolicheskoy formy v mekhanizmax udarnogo deystviya [Modeling of dynamic processes in the rods hyperbolic shape impact mechanisms]. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*, 2014, no. 3(75), pp. 37–42. (in Ukr.).
3. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Longitudinal Vibrations of Elastic Rods of Variable Cross-Section. *Int. Appl. Mech.* 2015. Vol. 51, no. 1, pp. 123–129. DOI: 10.1007/s10778-015-0676-8
4. Krutiy Yu.S. Prodol'nye kolebaniya neodnorodnogo pryamogo sterzhnya peremennogo secheniya s nepreryvno raspredelennoy massoy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2011, no. 1, pp. 25–33. (in Russ.).
5. Manzhosov V.K., Slepukhin V.V. *Modelirovanie prodol'nogo udara v sterzhnevnykh sistemakh neodnorodnoy struktury* [Simulation of longitudinal impact in rod systems of heterogeneous structure]. Ul'yanovsk: UIGTU Publ, 2011, 208 p. (in Russ.).
6. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii uprugikh kolebaniy* [Fundamentals of applied theory of elastic vibrations]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1967, 316 p. (in Russ.).
7. Ulitin, G.M. Naukovi pratsi Donets'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universitetu. Seriya "Girnichno-geologichna". 2005, no. 85, pp. 69–72. (in Ukr.).
8. Abzalimov R.R., Salyakhova Ye.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika.* 2008, no. 11, pp. 3–11. (in Russ.).

*Received April 5, 2015*

---

<sup>1</sup> Ulitin Gennadiy Mikhaylovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of Higher Mathematics Department, State Higher Education Institution Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine.

<sup>2</sup> Tsarenko Sergey Nikolaevich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Head of Strength of Materials Department, State Higher Education Institution Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine.

E-mail: tzarenko@gmail.com



## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В КАПЛЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ЕЕ ИСПАРЕНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ<sup>1</sup>

*В.Г. Речкалов<sup>2</sup>*

Приводятся результаты моделирования термокапиллярной и гравитационной конвекции в капле жидкости методом конечных элементов. Предлагаются приближенные полуэмпирические формулы для ряда параметров конвекционного вихря. Проведена экспериментальная проверка результатов моделирования.

*Ключевые слова:* моделирование; метод конечных элементов; капля; жидкость; испарение; термокапиллярная конвекция.

### Введение

В работе [1] отмечается, что одним из существенных недостатков метода конечных разностей в задаче о свободном испарении капли жидкости является необходимость сглаживающей аппроксимации температуры вдоль свободной границы капли поскольку выбор аппроксимации содержит элемент субъективности. Вторым существенным недостатком является наличие «плохих» точек на свободной поверхности, расположенных слишком близко к регулярным узлам сетки, что может даже привести в некоторых случаях к расходимости процесса поиска стационарного решения. В частности нам так и не удалось получить решение для капли ацетона, а расчетные значения для скоростей точек потока в капле воды не соответствовали экспериментальным результатам. Все это породило обоснованные сомнения в правильности полученных решений.

В работе [2] автор решает аналогичную задачу также методом конечных разностей. К сожалению, он не приводит значений для скорости течения жидкости внутри капли. К тому же, ошибка допущенная им в одном из уравнений (на которую мы укажем далее), ставит под сомнение результаты его вычислений.

Для разрешения указанных проблем мы решили повторить расчеты принципиально другим методом. В данной работе мы говорим о применении метода МКЭ к решению задачи о квазистационарной термокапиллярной и гравитационной конвекции в капле жидкости при ее естественном испарении. Для упрощения задачи мы предполагаем постоянство плотности теплового потока на всей поверхности капли. Как показали предыдущие расчеты по методу конечных разностей, это допущение не оказывает существенного влияния на процессы, протекающие внутри капли. Средняя величина теплового потока определялась экспериментально по скорости испарения капли. Это позволило исключить из рассмотрения процессы, протекающие в газовой фазе.

### Математическая формулировка задачи

Форма капли определяется из решения уравнения Лапласа для свободной поверхности жидкости. Движение жидкости в капле описывается уравнением Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + k \Delta \bar{V} + \bar{g} \beta_{\rho} \Delta T, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $k$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости;  $\beta_{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  – температурный коэффициент плотности;  $T$  – температура;  $T_0$  – температура основания капли;  $\Delta T = T - T_0$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\rho$  – плотность жидкости.

Для жидкости принимаем условие несжимаемости:  $\text{div } \bar{V} = 0$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант 13-03-00918-а

<sup>2</sup> Речкалов Виктор Григорьевич – кандидат педагогических наук, доцент, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: viktor-rechkalov@mail.ru

Уравнение теплового баланса записываем сразу для стационарного состояния:

$$\frac{\lambda}{\rho C} \Delta T - (\bar{V} \cdot \nabla) T = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $C$  – соответственно теплопроводность и теплоемкость жидкости;

Для исключения давления из уравнения Навье–Стокса возьмем ротор от его левой правой частей:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \operatorname{div} \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \bar{V} = k \Delta \omega - \beta_{\rho} \bar{g} \times \operatorname{grad} T, \quad (3)$$

где  $\omega = \operatorname{rot} \bar{V}$ .

Учитывая, что для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \bar{V} = 0$  получаем общее уравнение для ротора:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \bar{V} = k \Delta \omega - \beta_{\rho} \bar{g} \times \operatorname{grad} T. \quad (4)$$

Переходя к цилиндрической системе координат и учитывая осевую симметрию задачи, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\lambda}{\rho C} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} u - \frac{\partial T}{\partial z} w = 0, \quad (5)$$

$$k \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - \left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \frac{k \omega}{x^2} + \frac{u \omega}{x} + g \beta_{\rho} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$k \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - \left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \frac{k \omega}{x^2} + \frac{u \omega}{x} + g \beta_{\rho} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{2}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \omega = 0, \quad (8)$$

$$\omega = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (9)$$

$$u = \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = -\frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (10)$$

где  $u$  и  $w$  – проекции скорости;  $x$  и  $z$  – цилиндрические координаты;  $\psi$  – функция тока. Уравнение для ротора записано для стационарного (4) и нестационарного (5) случаев.

В работе [2], которую мы упоминали, был потерян член  $\frac{u \omega}{x}$  в уравнении для ротора.

### Граничные условия

На рис. 1 показана область интегрирования с указанием границ.

Функция тока  $\psi$  нас интересует с точностью до произвольной постоянной и, поскольку вдоль границы замкнутой области она сохраняет постоянное значение, удобно принять вдоль всей границы  $\psi = 0$ .

Ротор на оси симметрии (рис. 1, граница 3) равен нулю. Значения ротора на верхней границе (рис. 1, граница 2) на каждом шаге итерации вычисляется по формуле (5).

На свободной поверхности капли (рис. 1, граница 1) ротор вычисляется по формуле [2]:

$$\omega = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} + 2 \frac{V}{R} = \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial T}{\partial s} + 2 \frac{V}{R}, \quad (11)$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости жидкости;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $\alpha$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения;  $s$  – длина дуги контура капли;  $V$  – скорость жидкости на свободной поверхности;  $R$  – радиус кривизны меридиана капли.

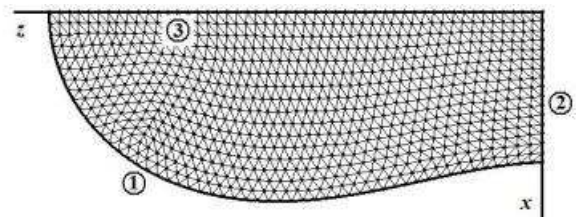


Рис. 1. Область капли с указанием границ (поверхнуто). 1 – свободная поверхность, 2 – верхняя граница, 3 – граница вдоль оси капли

Температура на верхней границе (рис. 1, граница 2) считается заданной и постоянной.

На оси капли (рис. 1, граница 3)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

На поверхности капли (рис. 1, граница 1) считается заданным тепловой поток

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} n_z = -q, \quad (13)$$

где  $q$  – удельная плотность теплового потока на поверхности капли;  $n_x$  и  $n_z$  – направляющие векторы цилиндрической системы координат.

Переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям для конечных элементов осуществлялся по методу Галеркина. Мы использовали линейные треугольные элементы. В ходе предварительных расчетов обнаружилась сильная чувствительность метода к неоднородностям расчетной сетки особенно при вычислении поля скоростей, что заставило нас создать специальную программу для получения расчетной сетки необходимого качества. Программа снабжена средствами автоматического и ручного визуального редактирования. Граница расчетной области выстилается одинаковыми элементами, что особенно важно для функций скорости и температуры.

### Схема алгоритма

Для решения полученной системы нелинейных уравнений мы использовали два алгоритма. Оба алгоритма следуют одной и той же схеме и различаются только на шаге 2, что отражено в последовательности шагов, приведенной ниже.

Шаг 1. Нахождение температурного поля при значениях скоростей  $u$  и  $w$ , найденных на предыдущих итерациях (Уравнение 5). Вычисление ротора на поверхности капли (Уравнение 11).

Шаг 2, алгоритм 1. Нахождение ротора при известных значениях  $u$  и  $w$  и известных граничных значениях (Уравнение 6).

Шаг 2, алгоритм 2. Нахождение производной ротора с последующим вычислением приращений ротора за малый промежуток времени ( $\Delta t$ ) и новых значений ротора (Уравнение 7).

Шаг 3. Нахождение функции тока по найденным значениям ротора (Уравнение 8).

Шаг 4. Нахождение поля скоростей и новых граничных условий для ротора на верхней границе области (Уравнения 10 и 9).

Шаги 1–4 повторяются до тех пор, пока разность значений скорости в контрольной точке после двух последовательных итераций не станет меньше заданной величины. В качестве контрольной точки принималась точка на оси в средней части капли.

Алгоритм 2 следует модифицированному методу установления [2], при котором организуется псевдонестационарный процесс. Время в этом случае является формальным параметром. Данный алгоритм при достаточно однородной сетке и правильно заданном временном промежутке всегда сходится, однако, он недостаточно быстрый. Кроме того, алгоритм 2 в некоторых случаях трудно преодолевает начальный этап вычислений.

Алгоритм 1, являясь частной реализацией релаксационного метода [2], требует введения специального параметра или параметров для управления сходимостью. Пробные расчеты показали, что значения ротора на верхней границе капли претерпевают очень большие изменения, приводящие к беспорядочной смене направлений поиска решения. Для придания последовательности решений регулярного характера мы использовали «мягкое» изменение ротора на верхней границе области:  $\omega_i = \omega_{i-1} + A\omega$ , где  $\omega_i$  – новое значение ротора;  $\omega_{i-1}$  – значение ротора, полученное на предыдущей итерации;  $\omega$  – значение ротора, полученное из уравнения (9); число  $0 < A < 1$ , которое подбирается экспериментально, мы использовали в качестве необходимого параметра.

В данной модификации этот алгоритм достаточно быстро находит решение близкое к стационарному. Однако, подойдя к стационарному решению, в некоторых случаях он все-таки начинает расходиться.

В большинстве случаев мы использовали оба алгоритма: на начальном этапе решения – алгоритм 1 и для уточнения решения – алгоритм 2. Использование обоих алгоритмов в паре повышает безотказность в работе программы и дает существенный выигрыш во времени.

За начальное состояние принималось состояние капли при отсутствии в ней конвективных течений. В тех случаях, когда уже известно некое решение, близкое к стационарному, расчеты удобнее начинать с него. Такая возможность возникает, когда необходимо выполнить серию расчетов при плавном изменении какого-либо одного параметра, например, плотности потока тепла с поверхности капли.

## Результаты моделирования

На основе указанных алгоритмов была написана программа, при помощи которой мы выполнили расчеты для пяти различных жидкостей: ацетона, бензола, толуола, изопропилового спирта (ИПС) и воды. Все расчеты были выполнены для «правильной» висячей капли, у которой высота больше ее диаметра. При этом высота каплей находилась в диапазоне от 3 мм до 5 мм. Полученные результаты позволили нам сделать некоторые выводы.

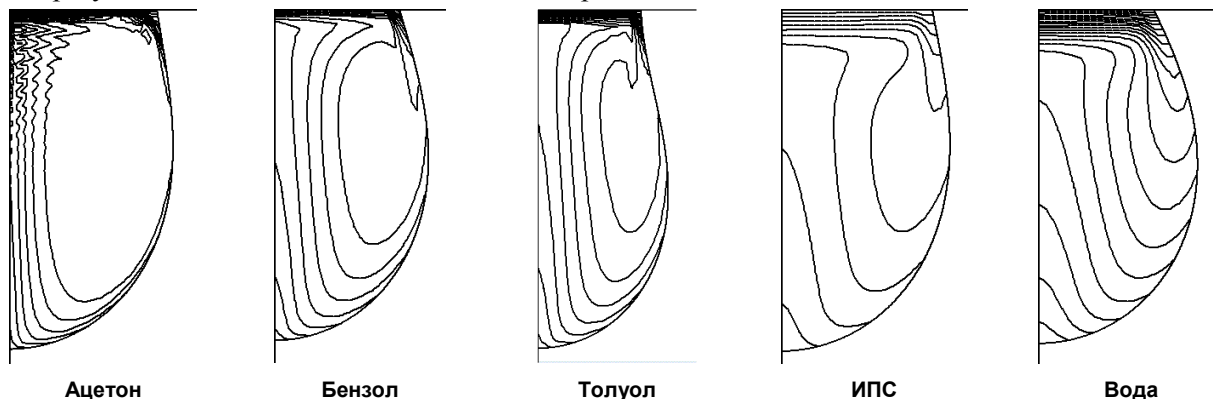


Рис. 2. Изотермы

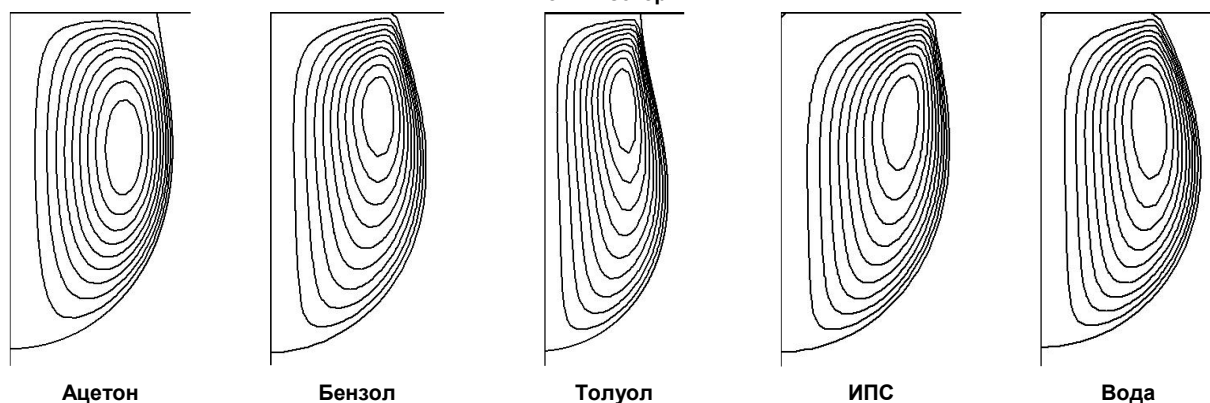


Рис. 3. Функция тока

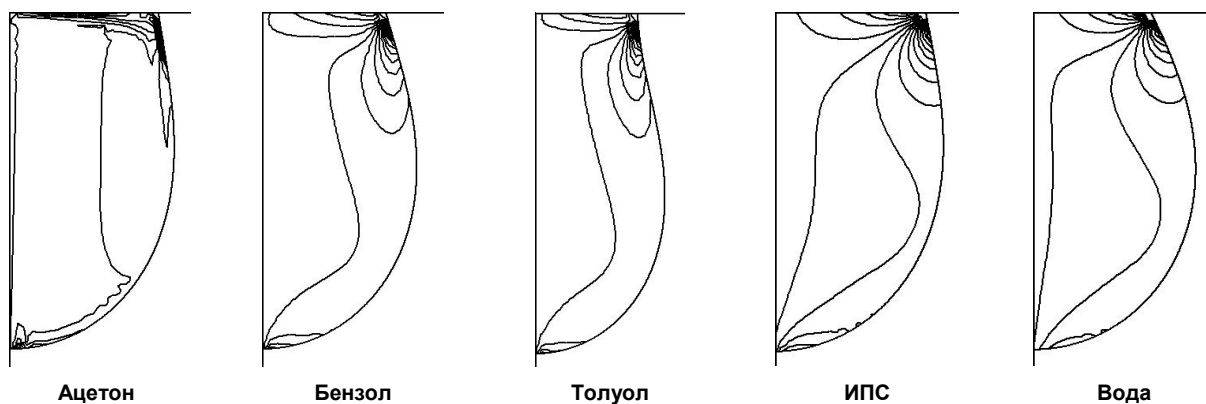


Рис. 4. Ротор скорости

1. Процессы, протекающие в капле жидкости при ее естественном испарении, только приближенно можно считать подобными. На рис. 2–4 можно наблюдать, как постепенно искажаются физические поля в соответствии с изменением скорости течения в капле. Особенно сильное ис-

кажение приобретают поля температуры и ротора в капле ацетона. В то же время поля функции тока, определяющие характер течения, практически идентичны.

2. Средняя скорость вихря на оси капли слабо зависит от размеров капли.

Размеры капли нельзя изменять произвольно, соблюдая при этом геометрическое подобие. Чтобы получить капли разных размеров нам пришлось выполнить расчеты при различных значениях ускорения свободного падения. В табл. 1 приводятся значения для скорости течения при двух значениях ускорения: при естественном ускорении и при ускорении  $g = 5$  м/с. При значении ускорения  $g = 5$  м/с размеры капель увеличиваются примерно в 1,4 раза.

Таблица 1

Средние скорости течения (мм/с) на оси капли при различных значениях ускорения

$g, \text{ м/с}^2$	ИПС	Вода	Бензол	Толуол	Ацетон
9,8	2,80	3,05	13,49	14,14	118,30
5	2,95	3,23	15,40	16,20	122,50

3. Мощность поверхностных сил и сил вязкого трения составляет всего  $10^{-5} \% - 10^{-4} \%$  от мощности теплового потока. Полная же кинетическая энергия вихря еще на два порядка меньше и составляет, например, для капли ИПС  $K = 1,5 \cdot 10^{-8}$  мДж.

### Приближенные формулы

Численные эксперименты, даже при высокой точности расчетов обладают недостатком: они не дают общей картины зависимости между величинами. Приближенная формула, даже достаточно грубая, в этом смысле обладает преимуществом. Кроме того, формула позволяет получить оценочное значение величины намного быстрее. Ниже приводится вывод формулы для средней скорости потока на оси капли, полученный с использованием грубых физических моделей и эмпирического анализа результатов математического моделирования.

#### 1. Кинетическая энергия конвективного вихря внутри капли жидкости

Если принять торообразный вихрь за цилиндрический с высотой цилиндра равной длине осевой линии тора, то можно получить приближенную формулу для кинетической энергии

$$K \approx \frac{\pi^2}{16} \rho R^3 w^2, \text{ где } R - \text{ радиус капли в средней ее части. Расчет по этой формуле для ИПС дает}$$

результат  $K = 1,36 \cdot 10^{-8}$  мДж, что достаточно близко к значению приведенному ранее.

#### 2. Мощность поверхностных сил

$$N_{нов} \approx \sum \tau \Delta s v, \quad (14)$$

где  $\tau$  – напряжения на свободной поверхности капли,  $v$  – скорость,  $\Delta s$  – площадь элемента поверхности.

$$\tau = \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT}{dl} \approx \alpha \frac{\Delta T}{\Delta l}, \quad (15)$$

где  $\Delta l$  – длина образующей элемента поверхности;  $\Delta T$  – приращение температуры вдоль образующей.

Площадь элемента поверхности находится по формуле  $\Delta s = 2 \pi x \Delta l$ .

$$N_{нов} \approx \sum \alpha \frac{\Delta T}{\Delta l} 2 \pi x \Delta l v = 2 \pi \alpha \sum x v \Delta T. \quad (16)$$

Заменим приближенно  $x \approx x_{cp} \approx \frac{R}{2}$ , где  $R$  – радиус капли в ее средней части, и  $v \approx w$ , где  $w$  – средняя скорость течения на оси капли.

$$N_{нов} \approx \pi R \alpha w \sum \Delta T = \pi R \alpha w \Delta T. \quad (17)$$

Для капли ИПС по результатам расчета программы мощность поверхностных сил равна  $N_{нов} = 2,66 \cdot 10^{-6}$  мВт. Приближенная формула дает значение равное  $N_{нов} = 2,35 \cdot 10^{-6}$  мВт.

В выражении справа  $\Delta T$  имеет смысл разности температур между основанием капли и ее вершиной. Считая процессы в каплях жидкости приближенно подобными, на основе анализа размерностей можно записать:  $\Delta T \sim \frac{q}{\rho w C} \left( 1 - \frac{\lambda}{H \rho C w} \right)$ , где  $H$  – высота капли. Следовательно

$$N_{нов} \sim \frac{q \alpha R}{\rho C} \left( 1 - \frac{\lambda}{H \rho C w} \right). \quad (18)$$

3. Мощность сил вязкого трения можно найти по формуле[4]:

$$N_{тр} \approx \mu \sum \left( 2 \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 + 2 \frac{u^2}{x^2} + 2 \left( \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)^2 + \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)^2 \right) \Delta V \sim \mu \frac{w^2}{RH} V, \quad (19)$$

где  $V$  – объем капли.

4. Средняя скорость течения на оси капли

На основе закона сохранения энергии мы можем утверждать, что мощность поверхностных сил равна мощности сил вязкого трения. Приравнивая мощность поверхностных сил и сил вязкого трения, получаем:

$$\frac{q \alpha R}{\rho C} \left( 1 - \frac{\lambda}{H \rho C w} \right) \sim \mu \frac{w^2}{RH} V. \quad (20)$$

Из полученной формулы вытекает приближенное выражение для средней скорости вихря на оси капли:

$$w \approx A \sqrt{\frac{q \alpha R^2 H}{\mu \rho C V} \left( 1 - \frac{\lambda}{H \rho C w} \right)}, \quad (21)$$

где  $A$  – безразмерный коэффициент.

Безразмерный комплекс физических и геометрических параметров в круглых скобках представляет собой обратное значение числа Пекле:  $\frac{\lambda}{H \rho C w} = Pe^{-1}$ . Число Пекле характеризует соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла. Для процессов, в которых конвективный перенос тепла преобладает над теплопроводностью число Пекле принимает большие значения. Для рассмотренных нами задач число Пекле принимает значения, лежащие в диапазоне от 64 для воды и до 4300 для ацетона (табл. 2). Следовательно, выражение в скобках можно считать приближенно равным единице.

Ограничивая рассмотрение только близкими по форме висячими каплями, формулу (21) можно упростить.

$$w \approx B \sqrt{\frac{q \alpha}{\mu \rho C}}, \quad (22)$$

где  $B$  – безразмерный коэффициент.

Полученную формулу можно записать в другой форме  $\frac{w^2}{q} \approx B \frac{\alpha}{\mu \rho C}$ , в которой тепловая нагрузка и комплекс физических параметров жидкости разнесены, что улучшает восприятие.

Проверка показала, что полученные формулы, хорошо согласуются с расчетами программы в широком диапазоне изменений параметров  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  и  $C$  для каждой из жидкостей в отдельности. Вместе с тем значения коэффициентов  $A$  и  $B$  существенно отличаются для разных жидкостей, что является платой за приблизительное подобие. В то же время это наводит на мысль использовать коэффициенты  $A$  и  $B$  в качестве своеобразных критериев подобия для процессов, протекающих в капле.

Табл. 2 показывает, что коэффициенты  $A$  и  $B$  действительно очень мало отличаются. По значениям коэффициентов жидкости можно разбить на три группы подобия: вода, ИПС; бензол, толуол; ацетон. Если посмотреть на рис. 2–3, то можно согласиться с тем что, процессы в каждой из групп максимально похожи. Наибольшие отличия мы наблюдаем в капле ацетона, значения коэффициентов которого сильно отличаются от значений в двух других группах.

Значения коэффициентов $A$ , $B$ и числа $Pe$ при заданных значениях $q$				
Жидкость	$q$ , мВт/мм <sup>2</sup>	$A$	$B$	$Pe$
Вода	0,10	1,781	1,730	75
ИПС	0,18	1,645	1,599	149
Бензол	0,25	2,407	2,353	496
Толуол	0,25	2,497	2,448	581
Ацетон	4,00	3,902	3,812	4207

### Экспериментальная проверка

Экспериментальная проверка проводилась с каплями воды и изопропилового спирта. В жидкость подмешивался мелкий химически инертный порошок. Меридианное сечение капли перпендикулярное оси наблюдения освещалось узким лазерным пучком света. Дифракционные следы рассеянного частицами света фиксировались цифровой видеокамерой.

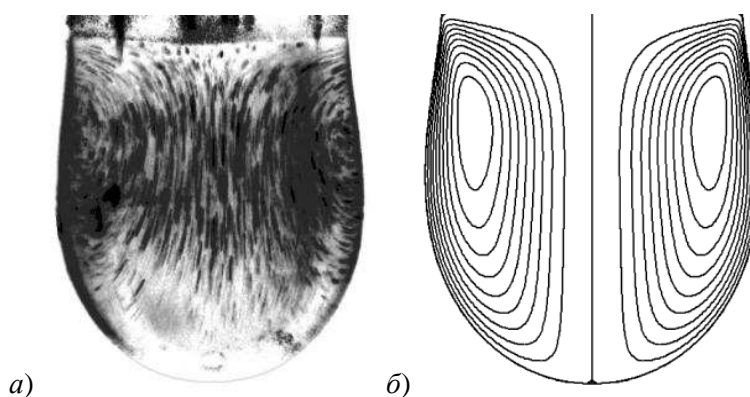


Рис. 2. Конвективный вихрь в капле ИПС.

а) Фотография следов частиц, движущихся в капле жидкости. б) Линии тока, численный эксперимент

Рис. 2 демонстрирует принципиальное сходство экспериментальных и расчетных линий тока в капле изопропилового спирта. При этом надо иметь ввиду, что криволинейная поверхность капли создает оптическое искажение особенно сильное вблизи контура капли. Средняя скорость частиц, измеренная по результатам видеосъемки, составляет в среднем 2,5 мм/с. Расчетное значение средней скорости на оси капли равна 3 мм/с, что вполне согласуется с экспериментом.

Эксперименты с каплями воды дали неожиданный результат: никакого видимого упорядоченного движения обнаружить не удалось. Расчетное значение скорости движения в капле воды очень близко к скорости движения в капле ИПС. Мы ожидали увидеть примерно то же самое, что и на рис. 2, однако на фотографиях, которые мы не приводим, видимых следов упорядоченного движения нет. Приходится предположить, что на поверхности капли воды кроме термокапиллярных сил присутствуют иные силы, препятствующие развитию конвекции. Эти силы могут быть связаны с изменением свойств поверхности, вызванным поглощением ПАВ из окружающего каплю воздуха. Однако наличие ПАВ на поверхности капли должно было бы привести к изменению ее формы, что экспериментально не подтверждается.

### Основные результаты

Получены уравнения термокапиллярной и гравитационной конвекции в капле жидкости при ее естественном испарении для конечных элементов.

Предложено два алгоритма для решения полученной нелинейной системы уравнений, на основе которых была построена компьютерная программа.

Создана программа полу-автоматического построения однородной конечно-элементной сетки.

Проведено моделирование конвекции для пяти различных жидкостей.

Выполнена экспериментальная проверка теоретической модели.

Получены приближенные формулы для кинетической энергии конвекционного вихря внутри капли, мощности поверхностных сил и сил вязкого трения, а также для средней скорости конвективного движения вдоль оси капли.

Предложены безразмерные коэффициенты в качестве критериев подобия процессов, протекающих в капле жидкости при ее естественном испарении в воздушной среде.

Обнаружено не объясненное пока отсутствие конвекционной активности в капле воды.

### Литература

1. Речкалов, В.Г. Особенности моделирования процессов свободного испарения капли жидкости методом конечных разностей / В. Г. Речкалов // Наука ЮУрГУ: материалы 66-й научной конференции, секции естественных наук. – Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С. 267–274.

2. Бараш, Л. Ю. Испарение и динамика лежащей на подложке капли: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Л. Ю. Бараш. – М., 2009. – 74 с.

3. Берковский Б. М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б.М. Берковский, В. К. Полевиков. – Минск.: Университетское, 1988. – 167 с.

4. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.

*Поступила в редакцию 19 октября 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2016, vol. 8, no. 1, pp. 49–56*

---

DOI: 10.14529/mmph160107

## MODELING OF CONVECTION IN THE LIQUID DROP BY ITS EVAPORATION USING FINITE ELEMENT METHOD

*V.G. Rechkalov*<sup>1</sup>

The results of the modeling of thermocapillary and gravitational convection in a drop of liquid by finite element method are given. The approximate semi-empirical formula for a set of parameters of convective vortex are described. The experimental verification of the modeling results is made.

*Keywords: modeling; finite element method; a drop of liquid; evaporation; thermocapillary convection.*

### References

1. Rechkalov V. G. Osobennosti modelirovaniya protsessov svobodnogo ispareniya kapli zhidkosti metodom konechnykh raznostey [Features of modeling of processes of free evaporation of a liquid drop by finite difference method]. *Nauka YuUrGU: materialy 66-y nauchnoy konferentsii, sektsii estestvennykh nauk* [SUSU Science: Proceedings of the 66th Scientific Conference, Section of Natural Sciences]. Izdatel'skiy tsentr YuUrGU Publ., 2014, pp. 267–274. (in Russ.).

2. Barash L.Yu. *Isparenie i dinamika lezhashchey na podlozhke kapli: dis. ... kand. f.-mat. nauk* [Evaporation and dynamics underlying drops on the substrate. Cand. phys. and math. sci. diss.]. Moscow, 2009, 74 p. (in Russ.).

3. Berkovskiy B.M., Polevikov V.K. *Vychislitel'nyy eksperiment v konveksii* [Computer experiment in convection]. Minsk, Universitetskoe Publ., 1988, 167 p. (in Russ.).

4. Berd R., St'yuart V., Laytfut E. *Yavleniya perenosa* [Transport Phenomena]. Moscow, Khimiya Publ., 1974, 688 p. (in Russ.). [Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport Phenomena*. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1960, 780 p. DOI: 10.1002/aic.690070245]

*Received October 19, 2015*

---

<sup>1</sup> Rechkalov Viktor Grigorevich is Cand. Sci. (Pedagogical), Associate Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: viktor-rechkalov@mail.ru



## ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–РИКЬЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

И.А. Гулящих<sup>1</sup>

Найдено условие разрешимости однородной задачи Дирихле–Рикье для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальной правой части.

Ключевые слова: задача Дирихле–Рикье; неоднородное бигармоническое уравнение; условия разрешимости.

Пусть  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  –  $n$ -мерный единичный шар в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  с нормой  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , а  $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  – единичная сфера. В единичном шаре  $S$  рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$a_{00}u + a_{01} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{02} \Delta u \Big|_{\partial S} = 0, \quad t \in \partial S, \quad (2)$$

$$a_{11} \frac{\partial}{\partial \nu} u + a_{12} \Delta u + a_{13} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u \Big|_{\partial S} = 0, \quad t \in \partial S,$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – внешняя нормальная производная, коэффициенты  $a_{0j}$  и  $a_{1j}$  при  $j=1,2,3$  – действительные и постоянные, а  $f(x)$  – некоторый полином. Неоднородная задача (1)–(2) обобщает задачу Дирихле [1–2], но не обобщает задачу Неймана [3–5]. Неоднородная задача (1)–(2) при  $f=0$  была рассмотрена в [6].

Сформулируем основной результат статьи. Пусть  $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Теорема 1.** Решение задачи (1)–(2) существует, если

$$f(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0, \Delta(m) \neq 0 \\ i=1, h_m}} u_m^{(i)}(x) P_m^{(i)}(|x|^2), \quad (3)$$

где  $u_m^{(i)}(x)$  – однородные гармонические полиномы степени  $m$ ,  $h_m$  – число линейно независимых однородных гармонических полиномов степени  $m$ , а  $P_m^{(i)}(t)$  – некоторые полиномы от  $t$  и

$$\Delta(\lambda) = a_{00}(a_{11} + a_{12}n) + 2(2a_{00}a_{12} - a_{02}a_{11}n + a_{01}a_{12}n + a_{00}a_{13}n)\lambda + (2a_{01}a_{12} - 2a_{02}a_{11} + 2a_{00}a_{13} + a_{01}a_{13}n)\lambda^2 + 2a_{01}a_{13}\lambda^3.$$

*Доказательство.* Обозначим через  $V[f](x)$  объемный потенциал в единичном шаре  $S$  с плотностью  $f(x)$  i.e.,

$$V[f](x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где  $E(x, \xi) = (n-2)^{-1} |\xi - x|^{2-n}$  ( $n > 2$ ) – элементарное решение уравнения Лапласа [7] и  $\omega_n$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим  $V_2[f] = V[V[f]]$ . Представим решение задачи (1)–

<sup>1</sup> Гулящих Илья Анатольевич – аспирант, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: giarist@mail.ru

## Краткие сообщения

(2) в форме  $u(x) = V_2[f] + w(x)$ . Известно, что  $\Delta^2 V_2[f] = f$  [7]. Тогда  $0 = \Delta^2 u(x) - f = \Delta^2 w(x)$  и поэтому для функции  $w(x)$  получаем следующую задачу

$$\Delta^2 w(x) = 0, \quad x \in S; \quad (4)$$

$$a_{00}w + a_{01} \frac{\partial}{\partial \nu} w + a_{02} \Delta w \Big|_{\partial S} = \varphi_1(t), \quad t \in \partial S, \quad (5)$$

$$a_{11} \frac{\partial}{\partial \nu} w + a_{12} \Delta w + a_{13} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta w \Big|_{\partial S} = \varphi_2(t), \quad t \in \partial S,$$

где обозначено

$$\varphi_1(t) = -(a_{00} + a_{01}\Lambda + a_{02}\Delta)V_2[f] \Big|_{\partial S}, \quad (6)$$

$$\varphi_2(t) = -(a_{11}\Lambda + a_{12}\Delta + a_{13}\Lambda\Delta)V_2[f] \Big|_{\partial S}.$$

и  $\Lambda u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$ . Из результатов работы [6] следует следующее условие разрешимости задачи (4)–(5), полученное В.В. Карачиком.

**Теорема 2.** Решение задачи (4)–(5) из класса  $u \in C^3(\bar{S})$  в случае, когда при некотором  $m \in \mathbb{N}_0$  имеет место равенство  $\Delta(m) = 0$ , существует тогда и только тогда, когда функции  $\varphi_1 \in C^2(\partial S)$  и  $\varphi_2 \in C^1(\partial S)$  удовлетворяют равенству

$$\int_{\partial S} H_m(t) (q_1(m)\varphi_1(t) + q_2(m)\varphi_2(t)) dt = 0, \quad (7)$$

где  $H_m(x)$  – произвольный однородный гармонический полином степени  $m$ , а вектор  $\begin{pmatrix} q_1(m) \\ q_2(m) \end{pmatrix}$  является решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{00} + a_{01}m & a_{11}m \\ a_{00} + (m+2)a_{01} + (2n+4m)a_{02} & (m+2)a_{11} + (2n+4m)(a_{12} + ma_{13}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(m) \\ q_2(m) \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Для вычисления функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  из (6) воспользуемся теоремой 13 из [8].

**Теорема 3.** Пусть полином  $f(x)$  записан в виде  $f(x) = \sum_{m,s} |x|^{2m} u_s^{(m)}(x)$ , где  $u_s^{(m)}(x)$  – одно-

родные гармонические полиномы степени  $s$ . Тогда для  $x \in \bar{S}$  справедливо равенство

$$V[f](x) = \sum_{m,s} \left( \frac{|x|^{2m+2} u_s^{(m)}(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)} - \frac{u_s^{(m)}(x)}{(2m+2)(2s+n-2)} \right).$$

В соответствии с разложением (3) выберем  $f(x) = f_{s,i}(x) = u_s^{(i)}(x)P_s^{(i)}(|x|^2)$ , где  $u_s^{(i)}(x)P_s^{(i)}(|x|^2)$  – одно из слагаемых в разложении  $f(x)$  в сумму (3). Тогда из теоремы 3 вытекает, что верно равенство

$$V_2[f_{s,i}] = u_s^{(i)}(x)Q_s^{(i)}(|x|^2),$$

где  $Q_s^{(i)}(t)$  – некоторый полином от  $t$ . Вычислим функции  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  из (6) при  $f(x) = f_{s,i}(x)$ . Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\varphi_1(t) = -(a_{00} + a_{01}\Lambda + a_{02}\Delta)V_2[f_{s,i}] \Big|_{\partial S} = c_s u_s(t),$$

$$\varphi_2(t) = -(a_{11}\Lambda + a_{12}\Delta + a_{13}\Lambda\Delta)V_2[f_{s,i}] \Big|_{\partial S} = d_s u_s(t),$$

где постоянные  $c_s$  и  $d_s$  выражаются через коэффициенты  $Q_s^{(i)}(t)$  и коэффициенты задачи (1)–(2). Подставляя эти функции в левую часть условия (7), получим

$$A = (q_1(m)c_s + q_2(m)d_s) \int_{\partial S} H_m(t) u_s(t) dt,$$

где  $m \in \mathbb{N}_0$  удовлетворяет равенству  $\Delta(m) = 0$ . Из условия (3) вытекает, что  $s \neq m$ , а значит в силу ортогональности на  $\partial S$  однородных гармонических полиномов разных степеней  $m$  и  $s$  имеем  $A = 0$ . Таким образом условия теоремы 2 выполнены. Значит решение задачи (4)–(5), а

следовательно и решение задачи (1)–(2) при  $f(x) = f_{s,i}(x)$  существуют. Применяя аналогичные рассуждения для всех слагаемых  $u_s^{(i)}(x)P_s^{(i)}(|x|^2)$  в разложении  $f(x)$  в сумму (3), получаем утверждение теоремы.

### Литература

1. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV, № 2(50). – С. 86–98.
2. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072
3. Karachik, V.V. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov, A. Bekeeva // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 81, № 3. – P. 487–495.
4. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. 16, № 4(56). – С. 61–74.
5. Карачик, В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461. DOI: 10.1134/S037406411411003X
6. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // Electronic Journal of Differential Equations, – 2015. – Vol. 2015, № 244. – pp. 1–9.
7. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – Москва, Наука, 1982. – 336 с.
8. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, no. 9. – С. 1674–1694.

Поступила в редакцию 5 декабря 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2016, vol. 8, no. 1, pp. 57–60*

DOI: 10.14529/mmph160108

## HOMOGENEOUS DIRICHLET-RIQUIER PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

I.A. Gulyashikh<sup>1</sup>

The solvability condition of the homogeneous Dirichlet–Riquier boundary value problem for inhomogeneous biharmonic equation in the unit ball, having polynomial right-hand part is obtained.

*Keywords:* Dirichlet–Riquier boundary value problem; inhomogeneous biharmonic equation; solvability conditions.

### References

1. Karachik V.V., Antropova N.A. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2012, Vol. 15, no. 2(50), pp. 86–98. (in Russ.).
2. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, Vol. 54, no. 7, pp. 1122–1143. DOI: 10.1134/S0965542514070070

<sup>1</sup> Gulyashikh Il'ya Anatol'evich is Post-graduate Student, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: giarist@mail.ru

## Краткие сообщения

---

3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekaeva A. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 81, no. 3, pp. 487–495.

4. Karachik V.V. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2013, Vol. 16, no. 4(56), pp. 61–74. (in Russ.).

5. Karachik V.V. Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation. *Differential Equations*, 2014, Vol. 50, no. 11, pp. 1449–1456. DOI: 10.1134/S0012266114110032

6. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.

7. Bitsadze A.V. *Uraveniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moskva, Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).

8. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 9, pp. 1567–1587. DOI: 10.1134/S0965542511090120

*Received December 5, 2015*

# ОТПУСК МАРТЕНСИТА В ХОДЕ БЫСТРОГО НАГРЕВА<sup>1</sup>

Д.А. Мирзаев<sup>2</sup>, А.А. Мирзоев<sup>3</sup>, П.В. Чирков<sup>4</sup>

В современной термической обработке получили широкое применение методы скоростного нагрева: пропускание электрического тока через деталь, обработка лазерным, электронным пучком или токами высокой частоты и др. Часто такой нагрев производят с целью новой аустенизации закаленной стали, преследуя цель – измельчить зерно аустенита перед окончательной закалкой. Однако в условиях медленного или, напротив, быстрого нагрева происходит специфическое явление структурной наследственности, заключающееся в том, что исходное зерно  $\gamma$ -фазы восстанавливается по величине и по форме [1]. Это явление, детально исследованное акад. В.Д. Садовским и его школой, возникает, по-видимому, в том случае, если исходный мартенсит или бейнит был нагрет выше  $A_{c1}$ , не подвергаясь значительному отпуску в ходе нагрева. Очевидно, что степень отпуска зависит [2] от скорости нагрева  $V_H$ . В данной работе проведено аналитическое исследование влияния  $V_H$  на степень отпуска с использованием разных моделей двухфазного распада мартенсита.

*Ключевые слова:* мартенсит; отпуск стали; двухфазный распад.

## Модель Курдюмова–Лысака

Рассматривается стадия двухфазного распада мартенсита при отпуске. Обозначим через  $P$  долю распавшегося мартенсита  $P = V^*/V_0$ , где  $V_0$  – исходный, а  $V^*$  – превращенный объем. Для изотермических условий распада Курдюмов и Лысак [3, 4] установили закон распада:

$$dP = v \cdot n \cdot (1 - P) d\tau, \quad (1)$$

где  $n$  – число карбидных зародышей в единице объема,  $v$  – средний объем одной превращенной области,  $\tau$  – длительность распада при температуре  $T$ . Множитель  $v \cdot n$  подчиняется соотношению Аррениусова типа:

$$v \cdot n = A_0 e^{-E/RT}. \quad (2)$$

Если распад идет в условиях непрерывного нагрева со скоростью  $V_H$ , то  $d\tau = dT/V_H$ , причем скорость нагрева  $V_H$  будем считать постоянной. Тогда из (1), (2) имеем:

$$dP/(1 - P) = A_0 e^{-E/RT} dT/V_H. \quad (3)$$

Пусть при нагреве от 0 К до требуемой температуры  $T_1$  доля распада составляет  $P_1$ . Тогда выполняется соотношение:

$$\int_0^{P_1} \frac{dP}{(1 - P)} = (A_0/V_H) \int_0^{T_1} A_0 e^{-E/RT} dT. \quad (4)$$

Интеграл в левой части (4) – табличный, соответственно получаем:

$$-\ln(1 - P_1) = (A_0/V_H) \int_0^{T_1} A_0 e^{-E/RT} dT. \quad (5)$$

В правом интеграле вводим новую переменную:

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-03-00138.

<sup>2</sup> Мирзаев Джалал Аминович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физического металловедения и физики твердого тела, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.  
E-mail: mirzaev@physmet.susu.ac.ru

<sup>3</sup> Мирзоев Александр Аминович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.  
E-mail: mirzoev@physics.susu.ac.ru

<sup>4</sup> Чирков Павел Владимирович – аспирант, кафедра общей и теоретической Физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: p.chirkov@physics.susu.ac.ru

$$x = -\frac{E}{RT}; \quad dT = \frac{E}{R \cdot x^2} dx,$$

и приводим его к виду:

$$-\ln(1 - P_1) = \frac{A_0}{V_H} \frac{E}{R} \int_{-\infty}^{-E/RT_1} \frac{1}{x^2} e^x dx. \quad (6)$$

Согласно таблицам интегралов [5]:

$$\int \frac{1}{x^2} e^x dx = -\frac{e^x}{x} + \text{Ei}(x), \quad (7)$$

где  $\text{Ei}(x)$  – интегральная показательная функция. По данным [3, 4] величина  $E$  порядка 130 кДж/моль, поэтому ниже  $A_{c1}$  отношение  $E/RT_1 > 10$ . При таких значениях аргумента можно использовать асимптотический ряд [6]:

$$\text{Ei}(-a) = -\frac{e^{-a}}{a} \left( 1 - \frac{1}{a} + \frac{2!}{a^2} - \frac{3!}{a^3} \dots \right).$$

Тогда с хорошей точностью имеем:

$$\int_{-\infty}^{-E/RT_1} \frac{1}{x^2} e^x dx = \frac{e^{-E/RT_1}}{(E/RT_1)^2} \left( 1 - \frac{1}{(E/RT_1)} + \frac{2!}{(E/RT_1)^2} - \frac{3!}{(E/RT_1)^3} \dots \right).$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда, найдем:

$$-\ln(1 - P_1) \approx \frac{A_0}{V_H} \frac{RT_1^2}{E} e^{-E/RT_1}.$$

Теперь легко определить искомую скорость, нагрев с которой создаст долю распада не превосходящую некоторого критического значения  $P_{кр}$ :

$$V_H = -\frac{A_0}{\ln(1 - P_{кр})} \frac{RT_1^2}{E} e^{-E/RT_1}. \quad (8)$$

При малых критических долях  $\ln(1 - P_{кр}) \approx -P_{кр}$ , тогда соотношение (8) упрощается:

$$V_H = -\frac{A_0}{P_{кр}} \frac{RT_1^2}{E} e^{-E/RT_1}. \quad (9)$$

На рисунке приведен график зависимости  $V_H = f(T_1)$  для  $P_{кр} = 0,01$ , рассчитанный по формуле (9). Если это условие «ослабить», например, принять степень распада равной 0,1 или 0,2, то скорости нагрева, определенные по графику, нужно уменьшить в 10 и 20 раз соответственно. При расчете приняты следующие значения величин (согласно [2]):  $A_0 = 0,7 \cdot 10^{19} \text{ мин}^{-1}$ ,  $E = 33 \text{ ккал/моль}$ ,  $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{град}$ .

### Модель Еднерала–Скакова

Указанные авторы [5] нашли, что кинетический закон отпуска мартенсита ближе к уравнению Аврами, чем Лысака–Курдюмова, т.е. приняли

$$P = P^\infty \left( 1 - e^{-(\tau/\tau_0)^m} \right), \quad (10)$$

где  $P^\infty$  – максимальная доля распада,  $\tau$  – время,  $\tau_0$  – кинетический параметр, определяемый соотношением:

$$\frac{1}{\tau_0} = B \cdot e^{-Q/RT}, \quad (11)$$

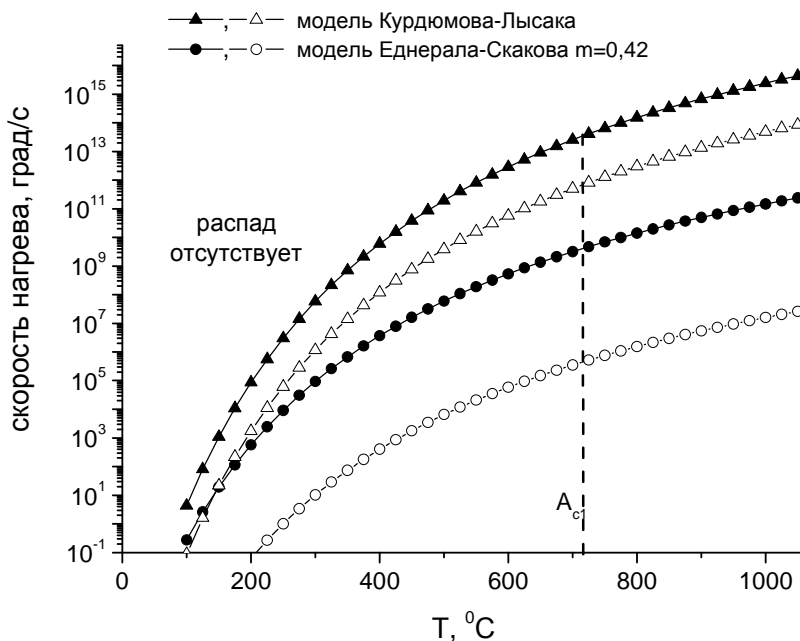
а  $m$  – параметр, который, вероятно, зависит от структурного состояния, наличия сильных карбидообразующих элементов и др.

В изотермических условиях:

$$dP = P^\infty \frac{\tau^{m-1}}{\tau_0^m} \cdot m \cdot e^{-(\tau/\tau_0)^m} d\tau. \quad (12)$$

Если положить, как и ранее, что в условиях нагрева  $d\tau = dT/V_H$ , то несложно получить дифференциальное уравнение:

$$\frac{dP}{P^\infty (1 - P/P^\infty)} = \frac{m \cdot B^m}{V_H^m} e^{-Q \cdot m/RT} T^{m-1} dT. \quad (13)$$



Зависимость скорости нагрева  $V_H$  от температуры согласно теории Курдюмова–Лысака и Еднерала–Скакова, закрашенные символы соответствуют критической степени распада  $P_{кр} = 0,01$ , а пустые  $P_{кр} = 0,1$

Интегрируя, найдем:

$$-\ln(1 - P/P^\infty) = \frac{m \cdot B^m}{V_H^m} \int_0^{T_1} e^{-Qm/RT} T^{m-1} dT. \quad (13a)$$

Введем новую переменную

$$x = -\frac{mQ}{RT}; \quad dT = \frac{mQ}{R \cdot x^2} dx.$$

Преобразуем интеграл (13a) к виду:

$$-\ln(1 - P/P^\infty) = (-1)^{m-1} \frac{mB^m}{V_H^m} \left(\frac{mQ}{R}\right)^m \cdot \int_{-\infty}^{-mQ/RT_1} e^x \frac{1}{x^{m+1}} dx. \quad (14)$$

Для расчета интеграла в (14) используем формулу

$$\int \frac{e^x}{x^k} dx = k \int \frac{e^x}{x^{k+1}} dx + \frac{e^x}{x^k},$$

которую будем последовательно использовать для возникающих интегралов:

$$\int \frac{e^x}{x^{m+1}} dx = \frac{e^x}{x^{m+1}} + (m+1) \frac{e^x}{x^{m+2}} + (m+1)(m+2) \frac{e^x}{x^{m+3}} + \\ + (m+1)(m+2)(m+3) \frac{e^x}{x^{m+4}} + (m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \int \frac{e^x}{x^{m+4}} dx.$$

Поскольку верхний предел в (14)  $mQ/RT_1 \gg 1$ , то полученный ряд дает асимптотическое разложение. Ограничиваясь тремя первыми членами указанного разложения

$$\int_{-\infty}^{-mQ/RT_1} \frac{e^x}{x^{m+1}} dx = (-1)^{m+1} \frac{e^{-mQ/RT_1} - mQ/RT_1}{(mQ/RT_1)^{m+1}} \left[ 1 - \frac{(m+1)}{mQ/RT_1} + \frac{(m+1)(m+2)}{(mQ/RT_1)^2} - \dots \right],$$

и, обозначая функцию, заданную в виде ряда в квадратных скобках, как  $F(mQ/RT_1)$ , получим:

$$-\ln(1 - P_1/P^\infty) = \frac{B^m}{V_H^m} \left( \frac{mQ}{R} \right)^2 \cdot T_1 \cdot \frac{e^{-mQ/RT}}{mQ/RT_1} \cdot F(mQ/RT_1).$$

Используя для расчета значения, взятые из данных работы [5],  $m = 0,42$ ,  $B = 1,47 \cdot 10^{10}$  сек,  $Q = 24$  ккал/моль, видим, что отношение  $mQ/RT_1 = 5071/T_1 > 4$ , поэтому можно приближенно принять  $F(mQ/RT_1) = 1$ . Учитывая, что при малых  $P_1$  можно полагать  $-\ln(1 - P_1/P^\infty) \approx P_1/P^\infty$ , а также учитывая, что по Лысаку  $P^\infty \approx 0,7$ , окончательно получаем выражение для скорости нагрева:

$$V_H = \frac{B}{\left( (P_1/P^\infty) \cdot (Q/RT_1) \right)^{1/m}} \cdot T_1 \cdot e^{-Q/RT_1} \cong \frac{0,63 \cdot 10^{10}}{\left( P_1(24000/RT_1) \right)^{2,33}} e^{-24000/T_1} T_1.$$

Результаты расчета  $V_H$  по модели Еднерала–Скакова также приведены на рисунке. Конечно, между двумя кривыми на рисунке очень большие расхождения. Однако нам представляется, что данные Еднерала–Скакова более надежны, поскольку они получены с использованием метода электросопротивления, что значительно точнее, нежели анализ полуширины мартенситного дублета.

Данные рисунка отчетливо свидетельствуют о следующем: 1) для того, чтобы подавить двухфазный отпуск мартенсита углеродистых сталей при быстром нагреве до и выше критической температуры  $A_1$  (начало образования гамма-фазы) необходимы скорости нагрева от  $10^{12}$  К/с ( $m = 0,42$ ) по теории Еднерала–Скакова до  $5 \cdot 10^{13}$  К/с по теории Лысака–Курдюмова. Такие скорости нагрева вряд ли можно реализовать на современном этапе развития техники; 2) при уменьшении скорости нагрева, по отношению к указанным значениям, степень отпуска возрастает. Тем не менее для того, чтобы произошел полураспад мартенсита нужны скорости выше  $6 \cdot 10^9$  и  $6 \cdot 10^5$  К/с соответственно каждой из рассмотренных моделей. В отношении легированных сталей необходимы дополнительные исследования, так как легирующие элементы могут уменьшить, либо увеличить коэффициент диффузии углерода в мартенсите, который и определяет кинетику распада мартенсита.

### Литература

1. Счастливцев, В.М. Развитие идей академика В.М. Садовского / В.М. Счастливцев, В.И. Зельдович, Д.А. Мирзаев. – Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. – 409 с.
2. Бернштейн, М.Л. Отпуск стали / М.Л. Бернштейн, Л.М. Капуткина, С.Д. Прокошкин. – Москва: МИСиС, 1997. – 336 с.
3. Курдюмов, Г.В. Превращения в железе и стали / Г.В. Курдюмов, Л.М. Утевский, Р.И. Энтин. – Москва: Наука, 1977. – С. 128–135.
4. Лысак, Л.И. Физические основы термической обработки стали / Л.И. Лысак, Б.И. Николин. – Киев: Техніка, 1975. – С. 174, 187–189.
5. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – Москва: Физматгиз, 1963. – С. 107.
6. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1970. – С. 625–632.
7. Еднерал, Н.В. Исследование низкотемпературного распада мартенсита в сталях / Н.В. Еднерал, Ю.А. Скаков // ФММ. – 1968. – Т. 26, № 5. – С. 850–856.

*Поступила в редакцию 6 декабря 2015 г.*



## MARTENSITE TEMPERING DURING FAST HEATING

D.A. Mirzaev<sup>1</sup>, A.A. Mirzoev<sup>2</sup>, P.V. Chirkov<sup>3</sup>

Modern thermal treatment techniques of fast heating such as passing an electric current through the element, processing by laser beam, electron beam or by high frequency current have been widely used. Frequently such heating is used for the austenitization of hard steel to decrease the austenite grain size before final quenching. However, under slow or fast heating specific low temperature phenomenon of structural heredity occurs when the initial grain of  $\gamma$ -phase restores in size and form [1]. The detailed description of this phenomenon was made by V.D. Sadovski. Apparently, this phenomenon occurs if bainite is heated above  $A_{c1}$  temperature without considerable tempering. It is obvious that tempering degree depends on the heating rate  $V_H$ . The paper describes the analytical study of  $V_H$  influence on tempering degree with the usage of different models of two-phase martensite decomposition.

*Keywords: martensite; tempering; two-phase decomposition.*

### References

1. Schastlivtsev V.M., Zel'dovich V.I., Mirzaev D.A. *Razvitie idey akademika V.M. Sadovskogo* [Development of V.M. Sadovski's ideas]. Ekaterinburg, IMP UrO RAN Publ., 2008, 409 p. (in Russ.).
2. Bernshteyn M.L., Kaputkina L.M., Prokoshkin S.D. *Otpusk stali* (Tempering). Moscow, MISiS Publ., 1997, 336 p. (in Russ.).
3. Kurdyumov G.V., Utevskiy L.M., Entin R.I. *Prevrashcheniya v zheleze i stali* (Iron and steel transformations). Moscow, Nauka Publ., 1977, pp. 128–135. (in Russ.).
4. Lysak L.I., Nikolin B.I. *Fizicheskie osnovy termicheskoy obrabotki stali* (Principal physics of steel heat treatment). Kiev, Tekhnika Publ., 1975, p. 174, pp.187–189. (in Russ.).
5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* (Tables of integrals, sums, series and products). Moscow, Fizmatgiz, 1963, pp. 107. (in Russ.).
6. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov)* [Handbook of mathematics (for scientists and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1970, pp. 625–623. (in Russ.).
7. Edneral N.V., Skakov Yu.A. *Issledovanie nizkotemperaturnogo raspada martsenita v stalyakh* (Investigation of lowtemperature martensite dissociation in steels). *The Physics of Metals and Metallography*, 1968, Vol. 26, no. 5, pp. 850–856. (in Russ.).

*Received December 6, 2015*

<sup>1</sup> Mirzaev Dzhahal Aminulovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Physical Metallurgy and Solid State Physics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: mirzayev@physmet.susu.ac.ru

<sup>2</sup> Mirzoev Aleksander Aminulaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: mirzoev@physics.susu.ac.ru

<sup>3</sup> Chirkov Pavel Vladimirovich is Post-graduate Student, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: p.chirkov@physics.susu.ac.ru

# Персоналии

## ВАЛЕРИЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ КАРАЧИК. К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

**В.М. Адуков<sup>1</sup>, В.Л. Дильман<sup>2</sup>, В.И. Заляпин<sup>3</sup>, Л.Д. Менихес<sup>4</sup>, Е.В. Харитонова<sup>5</sup>**

24 августа 2015 года исполнилось шестьдесят лет доктору физико-математических наук, старшему научному сотруднику, профессору кафедры математического и функционального анализа факультета математики, механики и компьютерных наук ЮУрГУ Карачику Валерию Валентиновичу.

*Ключевые слова: персоналии; юбилей; творческая биография.*



Валерий Валентинович Карачик родился 24 августа 1955 года в городе Ташкенте. Отец – Карачик Валентин Николаевич, инженер-электрик, (умер в 1993), мать – Карачик Валентина Степановна, фельдшер, (умерла в 1998 году). Он – старший из трех сыновей Валентина Николаевича и Валентины Степановны. В 1962 году Валерий поступил в среднюю школу № 94 города Ташкента, а в 1972 году окончил ее. В том же году поступил в Ташкентский государственный университет на факультет прикладной математики и механики.

В 1977 году В.В. Карачик с отличием окончил Ташкентский государственный университет им. Ленина, получив специальность «Прикладная математика». В этом же году был принят на работу в Институт Кибернетики Академии наук Узбекистана на должность инженера. Здесь он проработал до 1996 года в должностях старшего инженера (с 1978 г), младшего научного сотрудника (с 1981 г), научного сотрудника (с 1986г), старшего научного сотрудника (с 1990 г), заведующего лабораторией (с 1996 г). В это же время Валерий Валентинович, стал совмещать научную деятельность с преподаванием в различных высших учебных заведениях города Ташкента – в Ташкентском политехническом институте, Ташкентском государственном университете и Ташкентском электротехническом институте связи.

В 1988 году В.В. Карачик защитил кандидатскую диссертацию в Институте математики Академии наук Узбекистана, а в 1991 году ему было присвоено ученое звание старшего научного сотрудника по специальности 01.01.03 – математическая физика.

В 1993 году Валерий Валентинович начал совмещать основную деятельность в Институте Кибернетики АН Узбекистана с работой в Университете мировой экономики и дипломатии, а с 1996 года эта работа стала для него основной. В 1997 году Валерий Валентинович прочел ряд курсов для слушателей Университета мировой экономики и дипломатии на английском языке, а в

<sup>1</sup> Адуков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: vicmikhad@mail.ru

<sup>2</sup> Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: Dilman49@mail.ru

<sup>3</sup> Заляпин Владимир Ильич – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: vzal@susu.ac.ru

<sup>4</sup> Менихес Леонид Давидович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: leonid.menikhes@gmail.com

<sup>5</sup> Харитонова Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва, Российская Федерация.

E-mail: alena@math.susu.ac.ru

2000 году был назначен на должность директора компьютеризированного тестового центра этого университета.

В 1996 году с января по апрель В.В. Карачик был командирован в Индию (г. Дели), где получил возможность ознакомиться с использованием новых информационных технологий в образовании.

В августе 1998 года он участвовал в работе международного конгресса математиков в Берлине, а в 2003 году там же, в семинаре по проекту LIMES при Zentralblatt für Mathematik.

В декабре 2001 года в Институте математики Академии наук Республики Узбекистан Валерий Валентинович защитил докторскую диссертацию на тему «Разработка теории нормированных систем функций и их применения к решению начально-краевых задач для уравнений в частных производных» по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, а в апреле 2002 году ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук Узбекистана.

Продолжая активно работать в науке, Валерий Валентинович не прекращает и педагогическую деятельность. С 1999 год по 2002 год он работает по совместительству преподавателем математики в лицее при Университете мировой экономики и дипломатии.

Выиграв конкурс на участие в программе стажировок для преподавателей высших учебных заведений (JFDP), с августа 2002 по январь 2003 года Карачик В.В. стажировался в Iowa State University (США).

В 2003 году он был переведен на должность профессора кафедры «Информатика и Информационные Технологии» в Университете Мировой Экономики и Дипломатии.

В августе 2004 года Валерий Валентинович Карачик переехал на постоянное место жительства в Россию и был принят на работу в Южно-Уральский государственный университет на должность профессора кафедры математического анализа.

В апреле 2005 он был избран по конкурсу на должность профессора ЮУрГУ, а в 2010 переизбран на эту же должность.

В феврале 2011 Валерий Валентинович был назначен, а затем избран по конкурсу на должность заведующего кафедрой дифференциальных уравнений и динамических систем. В июле 2012 г., в связи с реструктуризацией факультета вернулся на должность профессора кафедры математического анализа, где недолгое время проработал и.о. заведующего этой кафедрой. В настоящее время Валерий Валентинович работает в должности профессора кафедры математического и функционального анализа ЮУрГУ.

В.В. Карачик – активно работающий ученый, научные результаты которого хорошо известны в России и за рубежом. Он – известный специалист в области дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики. Разработанный Валерием Валентиновичем метод нормированных систем функций позволил внести значительный вклад в исследование краевых задач для полигармонического уравнения с производными высокого порядка на границе. На основе этого метода В.В. Карачик разработал новые подходы к построению классов точных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных и краевых задач для них. Хорошо известны результаты, полученные Валерием Валентиновичем в области исследования разложений типа Альманси для различных линейных операторов в частных производных, что позволило получить точные решения широкого класса краевых задач.

Им опубликовано более 187 научных работ, из них 5 учебников и одна монография [26]. Индекс Хирша у Валерия Валентиновича в SCOPUS – 7 (authorId=6602898763), в РИНЦ – 12.

Он – член американского математического общества (American Mathematical Society) с 1997 г – и Европейского математического общества (European Mathematical Society).

Обладая широким кругозором, Валерий Валентинович много сил и энергии отдает организации учебного процесса. Он читает лекции по математическому анализу, вариационному исчислению и оптимальному управлению, теории функций комплексного переменного, дифференциальным уравнениям студентам физического факультета и факультета математики, механики и компьютерных наук. Его лекции отличаются высоким научным содержанием и педагогическим мастерством.

Он разработал и внедрил основной курс математического анализа для студентов физического факультета и факультета ВМИ, снабдив его собственными пятью учебными пособиями общим объемом 74 усл. печ. л.

## Персоналии

В.В. Карачик ведет большую научно-организационную работу. Под его руководством студенты и аспиранты готовят курсовые, дипломные, выпускные квалификационные работы и кандидатские диссертации. Валерий Валентинович – руководитель аспирантуры по специальностям 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», и 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

С 2008 года он является членом советов по защитах кандидатских и докторских диссертаций – Д 212.298.14 по специальности 05.13.18 и Д 212.298.18 по специальностям 05.13.11 и 05.13.17.

Валерий Валентинович – бессменный председатель ГЭК по математике для выпускников физического факультета ЮУрГУ (2007–2012гг.). Неоднократно (2009, 2010, 2014, 2015 и 2016 гг.) приглашался в качестве председателя ГАК для аттестации выпускников математического факультета и факультета информатики ЧГПУ. Участвовал в итоговой аттестации выпускников ЮУрГУ специальности 010101.65 (2007 – 2011) и направления 010100.62 – математика (2012 – 2015) в качестве члена ГАК.

Являясь авторитетным ученым, Карачик В.В. много сил и энергии отдает редакторской работе. Он референт реферативных журналов *Mathematical Reviews* с 1997 г и *zbMATH (Zentralblatt für Mathematik)* с 1992 г., рецензент журналов издательства *ELSEVIER: Applied Mathematical Modelling*, *Advances in Math* и *Acta Mathematica Scientia*, а также журналов *Complex Variables and Elliptic Equations (Taylor & Francis)* и *Mathematische Nachrichten (Wiley)*. Валерий Валентинович – член редакционного Совета «Вестника ЮУрГУ», серии «Математика. Механика. Физика».

Валерий Валентинович – глубоко эрудированный, всегда открытый для общения человек. Он женат, отец двух дочерей (1979 и 1981 годов рождения).

Во всех сферах своей деятельности Валерий Валентинович демонстрирует высокую квалификацию ученого, принципиальность и ответственность педагога, доброжелательность воспитателя.

В.В. Карачик пользуется заслуженным уважением студентов и коллег. Он награжден Почетной грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации (2012).

Коллеги и друзья Валерия Валентиновича сердечно поздравляют его с шестидесятилетием и желают дальнейших успехов в научной и педагогической деятельности!

Ниже приведен список источников [1–8], из которых читатель может почерпнуть дополнительную информацию о юбиляре, и список основных работ Валерия Валентиновича, опубликованных в последние годы [9–30].

### Литература

1. Карачик Валерий Валентинович [Электронный ресурс]: [персон. сайт] – URL: <http://karachik.susu.ru/> – (15.06.2014).
2. Карачик Валерий Валентинович [Электронный ресурс] / Math-Net.Ru – URL: <http://www.mathnet.ru/rus/person28783> – (15.06.2014).
3. Karachik, Valery V. [Электронный ресурс] / zbMATH – URL: <https://zbmath.org/authors/?s=0&c=100&q=karachik>
4. Karachik, Valery V. [Электронный ресурс] / MathSciNet – URL: <http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=248313>
5. Karachik, Valery V. [Электронный ресурс] / ORCID – URL: <http://orcid.org/0000-0002-3077-3595>
6. Karachik, Valery V. [Электронный ресурс] / RESEARCHERID – URL: <http://www.researcherid.com/rid/L-2270-2013>
7. Южно-Уральский государственный университет (золотые страницы). 3-е издание. Екатеринбург: Изд-во РЕАЛ-МЕДИЯ, 2013. – С. 107–109.
8. Менихес, Л.Д. Математика / Л.Д. Менихес // Научные школы ЮУрГУ. История развития. – Челябинск, 2008. – С. 452.
9. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32. № 5. – С. 51–58.
10. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – Т. 126, № 12. – С. 3513–3519.
11. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2008. – Т. 83. – № 3. – С. 370–380. DOI: 10.4213/mzm4525

12. Карачик, В.В. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 384–395.
13. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – № 10(227). – С. 4–17.
14. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.
15. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 86–98.
16. Karachik, V.V. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov, A. Beakaeva // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 81, № 3. – P. 487–495.
17. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.
18. Карачик, В.В. Применение формулы Альманси к построению полиномиальных решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка / В.В. Карачик // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2012. – № 6. – С. 24–35.
19. Карачик, В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 2. – С. 237–252.
20. Карачик, В.В. О некоторых специальных полиномах и функциях / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 205–226.
21. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 250–254.
22. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI, № 4(56). – С. 61–74.
23. Карачик, В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре / В.В. Карачик // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 69–88.
24. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170. DOI: 10.7868/S0044466914070072
25. Карачик, В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238. DOI: 10.4213/mzm10114
26. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.
27. Карачик, В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461. DOI: 10.1134/S037406411411003X
28. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047. DOI: 10.1134/S0374064115080075
29. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, no. 244. – pp. 1–9.
30. Karachik, V.V. Dunkl-Poisson equation and related equations in superspace / H.F. Yuan, V.V. Karachik // Mathematical modelling and analysis. – 2015. – Vol. 20, no. 6. – pp. 768–781. DOI: 10.3846/13926292.2015.1112856

*Поступила в редакцию 15 ноября 2015 г.*

### VALERY VALENTINOVICH KARACHIK. TO THE 60<sup>th</sup> ANNIVERSARY

V.M. Adukov<sup>1</sup>, V.L. Dilman<sup>2</sup>, V.I. Zalyapin<sup>3</sup>, L.D. Menikhes<sup>4</sup>, E. V. Kharitonova<sup>5</sup>

A well-known scientist, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Professor of the Mathematic and Functional Analysis department of South Ural State University, Valery Valentovich Karachik celebrated his 60<sup>th</sup> anniversary on August 24<sup>th</sup>, 2015.

*Keywords: personalia; anniversary; biography.*

#### References

1. <http://karachik.susu.ru/>
2. <http://www.mathnet.ru/rus/person28783>
3. <https://zbmath.org/authors/?s=0&c=100&q=karachik>
4. <http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=248313>
5. <http://orcid.org/0000-0002-3077-3595>
6. <http://www.researcherid.com/rid/L-2270-2013>
7. Yuzhno-Ural'skiy Gosudarstvennyy Universitet (zolotye stranitsy). 3-e izdanie. [South Ural State University (Golden Pages). Third Edition]. Ekaterinburg, Real-Mediya Publ., 2013, pp. 107–109. (in Russ.).
8. Menikhes L.D. Matematika [Mathematics]. *Nauchnye shkoly YuUrGU. Istoriya razvitiya*, Chelyabinsk, 2008. p. 452. (in Russ.).
9. Karachik V.V. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1991, Vol. 32, no. 5, pp. 51–58. (in Russ.).
10. Karachik V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1998, Vol. 126, no. 12, pp. 3513–3519.
11. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes*, 2008, Vol. 83, no. 3, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X
12. Karachik V.V., Antropova N.A. On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation. *Differential Equations*, 2010, Vol. 46, no. 3, pp. 387–399. DOI: 10.1134/S0012266110030080
13. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniia differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh s postoiannymi koeffitsientami I (Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I). *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2011, Issue 4, no. 10(227), pp. 4–17 (in Russ.).
14. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 9, pp. 1567–1587. DOI: 10.1134/S0965542511090120

---

<sup>1</sup> Adukov Victor Michaylovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: vicmikhad@mail.ru

<sup>2</sup> Dil'man Valeriy Lazerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: Dilman49@mail.ru

<sup>3</sup> Zalyapin Vladimir Illich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: vzal@susu.ac.ru

<sup>4</sup> Menikhes Leonid Davidovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: leonid.menikhes@gmail.com

<sup>5</sup> Kharitonova Yelena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia.

E-mail: alena@math.susu.ac.ru

15. Karachik V.V., Antropova N.A. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2012, Vol. 15, no. 2(50), pp. 86–98. (in Russ.).
16. Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekeeva A. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 81, no. 3, pp. 487–495.
17. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirichlet Boundary Value Problem for the 3-harmonic Equation in a Ball. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2012, Vol. 5, no. 4, pp. 527–546. (in Russ.).
18. Karachik V.V. Application of the Almansi formula for constructing polynomial solutions to the Dirichlet problem for a second-order equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2012, Vol. 56, no.6, pp. 20–29. DOI: 10.3103/S1066369X12060035
19. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, Vol. 52, no. 2, pp. 219–234. DOI: 10.1134/S0965542512020108
20. Karachik V.V. O nekotorykh spetsial'nykh polinomakh i funktsiyakh (On Some Special Polynomials and Functions). *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*, 2013, Vol. 10, pp. 205–226. (in Russ.).
21. Karachik V.V., Antropova N.A. Polynomial solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in the ball. *Differential Equations*, 2013, Vol. 49, no. 2, pp. 251–256. DOI: 10.1134/S0012266113020122
22. Karachik V.V. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*, 2013, Vol. 16, no. 4, pp. 61–74. (in Russ.).
23. Karachik V.V. On the mean value property for polyharmonic functions in the ball. *Siberian Advances in Mathematics*, 2014, Vol. 24, no. 3, pp. 169–182. DOI: 10.3103/S1055134414030031
24. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, Vol. 54, no. 7, pp. 1122–1143. DOI: 10.1134/S0965542514070070
25. Karachik V.V. On the arithmetic triangle arising from the solvability conditions for the Neumann problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, no. 2, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232
26. Karachik V.V. Metod normirovannykh sistem funktsij (Method of normalized systems of functions). Chelyabinsk, Izdatel'skiy centr YuUrGU Publ., 2014, 452 p. (in Russ.).
27. Karachik V.V. Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation. *Differential Equations*, 2014, Vol. 50, no. 11, pp. 1449–1456. DOI: 10.1134/S0012266114110032
28. Karachik V.V. Solution of the Dirichlet problem with polynomial data for the polyharmonic equation in a ball. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 8, pp. 1033–1042. DOI: 10.1134/S0012266115080078
29. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.
30. Yuan H.F., Karachik, V.V. Dunkl-Poisson equation and related equations in superspace. *Mathematical modelling and analysis*, 2015, Vol. 20, no. 6, pp. 768–781. DOI: 10.3846/13926292.2015.1112856

*Received November 15, 2015*

## АНАТОЛИЙ СЕМЁНОВИЧ МАКАРОВ. К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

С.А. Загребина<sup>1</sup>, В.И. Заляпин<sup>2</sup>, М.М. Кипнис<sup>3</sup>, С.В. Коржакова<sup>4</sup>,  
Г.А. Свиридюк<sup>5</sup>

18 августа 2015 года исполнилось семьдесят лет кандидату физико-математических наук, профессору, одному из организаторов математического образования в Челябинске, многолетнему (1985-2011) заведующему кафедрой математического анализа Челябинского государственного педагогического университета МАКАРОВУ Анатолию Семёновичу.

*Ключевые слова: персоналии, юбилей, творческая биография.*

Анатолий Семёнович Макаров родился 18 августа 1945 г. в селе Бродокалмак Красноармейского района Челябинской области. Мать – Старикова Зинаида Евстигнеевна работала учительницей в младших классах, отец – Макаров Семен Кириллович – на разных должностях в правлении совхоза.

В 1952 году Толя пошел в первый класс Бродокалмакской средней школы. В это время село Бродокалмак, районный центр, было относительно крупным населенным пунктом, поэтому школа была хорошо укомплектована квалифицированными преподавателями, в основном молодежью, приехавшей в Бродокалмак по распределению. В их числе была и учительница математики Белокурова Галина Сергеевна. Она же была классным руководителем его класса – с пятого по выпускной. Галина Сергеевна привила Толе любовь не только к математике, но и к танцам.

В 1963 году А.С. Макаров окончил Бродокалмакскую среднюю школу с золотой медалью, отучившись одиннадцать лет вместо положенных десяти<sup>6</sup>. В этом году в Челябинском педагогическом институте была открыта новая специальность – *математика и программирование*, и Анатолий Семёнович, отличавшийся незаурядными математическими способностями, решил выбрать именно её для продолжения своего образования.

Поскольку все полагавшиеся ранее медалистам льготы при поступлении в ВУЗ были отменены, то Анатолию Семёновичу пришлось сдавать полный набор вступительных экзаменов.

После успешной сдачи экзаменов он был зачислен в институт. В институте стали известны (из школьной характеристики) все его школьные увлечения и А.С. Макарова тут же привлекли в



<sup>1</sup> Загребина Софья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: zagrebinasa@susu.ru

<sup>2</sup> Заляпин Владимир Ильич – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: vzal@susu.ac.ru

<sup>3</sup> Кипнис Михаил Маркович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики и методики обучения математике, Челябинский государственный педагогический университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: mmkipnis@gmail.com

<sup>4</sup> Коржакова Светлана Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и методики обучения математике, Челябинский государственный педагогический университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

<sup>5</sup> Свиридюк Георгий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: sviridiukga@susu.ru

<sup>6</sup> Как раз к окончанию обучения в 1963 г. школа была переведена на одиннадцатилетнее обучение.



танцевальный коллектив института – ансамбль народного танца, в котором он протанцевал более двух лет.

Но основным интересом студента Макарова оставалась математика. Все годы обучения, начиная со второго курса, он посещал различные научные семинары на кафедре математического анализа. Однажды на четвертом курсе заведующий кафедрой математического анализа И.Я. Барков пригласил для чтения лекций доцента Казанского государственного университета Ю.И. Грибанова. После окончания лекций тот предложил А.С. Макарову задачу о разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения. Решение этой задачи стало первой научной работой молодого математика.

Наряду с занятиями наукой, Анатолия Семёновича всегда тянуло к преподавательской деятельности. Ему нравилось разбираться в тонкостях тех или иных математических утверждений и объяснять эти тонкости окружающим. Будучи студентом четвертого курса, он смог реализовать свои педагогические наклонности, в течение года на общественных началах преподавая математику в вечерней школе при институте.

В 1968 году А.С. Макаров окончил институт с красным дипломом. К сожалению, в том году отменили защиту дипломных работ и Анатолий не смог публично продемонстрировать свои научные достижения, но они не остались незамеченными – он был оставлен на кафедре для поступления в аспирантуру. Однако аспирантуре в пединституте не суждено было сбыться и по договоренности между педагогическим и политехническим институтами А.С. Макаров был принят на должность ассистента кафедры высшей математики № 2 ЧПИ.

Кафедрой в то время руководил энергичный и дальновидный Л.М. Беляков. Он хорошо понимал, что только высококвалифицированные кадры смогут вывести кафедру провинциального оборонного ВУЗа на должный уровень, и прилагал значительные усилия для привлечения на работу молодых перспективных выпускников лучших вузов страны. Он сразу же предложил молодому сотруднику попытаться поступить в аспирантуру в МГУ. Анатолий Семёнович согласился и отправил свою работу в качестве реферата. Работа попала на рецензию к доценту В.А. Садовничему, ныне академику, ректору МГУ. Тот дал положительную рецензию, однако на вступительные экзамены Анатолий Семёнович опоздал, и ему предложили повторить попытку в следующем году.

А.С. Макаров вернулся в ЧПИ и продолжил работу в качестве ассистента. В 1969 году он был направлен на стажировку в Новосибирский университет, где прослушал много полезных математических курсов, а осенью того же года мечта об аспирантуре наконец-то реализовалась и Анатолий Семёнович поступил в аспирантуру к уже знакомому ему Ю.И. Грибанову на кафедру математического анализа Казанского государственного университета. В то время этой кафедрой руководил известный математик, профессор Б.М. Гагаев. Темой научной работы аспиранта А.С. Макарова стали функциональные пространства и нелинейные операторы в них, в частности, операторы Немыцкого, Гаммерштейна, Урысона. Анатолию Семеновичу удалось получить наиболее общий критерий непрерывности оператора Немыцкого и признак полной непрерывности оператора Урысона в функциональных пространствах с произвольной сигма-конечной мерой. Эти результаты заложили основу его будущей диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

После окончания аспирантуры в 1972 году он вернулся на кафедру высшей математики №2 ЧПИ, на которой проработал до 1985 года последовательно в должностях ассистента, старшего преподавателя, доцента. Кафедра приняла А.С. Макарова доброжелательно, опытные преподаватели оказывали всяческую поддержку молодому сотруднику. Благодаря усилиям заведующего кафедрой Л.М. Белякова кафедра пополнялась высококвалифицированными математиками, выпускниками Московского, Новосибирского, Уральского и других ведущих университетов страны. На кафедре сложилась творческая атмосфера. Л.М. Беляков поощрял научное и методическое общение с коллегами, справедливо полагая, что это способствует эффективной работе и научному совершенствованию её сотрудников. В это время А.С. Макаров опубликовал еще несколько научных работ и завершил работу над своей диссертацией, которую успешно защитил в Совете Казанского университета в 1977 году. А в 1981 году ему было присвоено звание ученого доцента.

## Персоналии

---

Работая на кафедре математики в ЧПИ, Анатолий Семёнович в полной мере проявил присущие ему качества: высокую научную квалификацию, талант педагога, добросовестность, принципиальность, уважительное отношение к студентам и коллегам.

В 1985 году А.С. Макаров вернулся в *alma mater* на кафедру математического анализа Челябинского государственного педагогического института, где был избран на должность заведующего кафедрой. В этой должности он оставался вплоть до 2011 года.

Это было непростое время в жизни страны и довольно тяжелое для высшей школы, в частности. Перестройка и последовавший за ней развал государства, деградация высшего образования в 90-е годы, сопровождавшаяся реорганизацией высшей школы, все это ставило перед молодым заведующим серьезные задачи, важнейшими из которых были задачи сохранения и укрепления профессионального кадрового состава кафедры и качественной организации учебного процесса.

Анатолий Семенович с этими задачами справился. Он способствовал открытию математической аспирантуры на кафедре (руководителем которой стал профессор, д.ф.-м.н. М.М. Кипнис) и приложил значительные усилия, чтобы выпускники аспирантуры оставались работать на кафедре. По его инициативе началось творческое сотрудничество кафедры математического анализа ЧГПИ и Челябинского государственного университета, где кафедрой в то время заведовал профессор, д.ф.-м.н. Г.А. Свиридюк. Это сотрудничество позволило активизировать научную деятельность не только сотрудников кафедры, но и самого Анатолия Семеновича. В этот период он опубликовал несколько статей по полугруппам линейных преобразований, порожденных абстрактными дифференциальными уравнениями соболевского типа, принял участие в различных конференциях в нашей стране, организовал на кафедре конференции федерального уровня по различным аспектам математики.

Анатолий Семёнович пришел на кафедру, членов которой хорошо знал. Будучи высокопрофессиональным математиком и педагогом по призванию, он на личном примере демонстрировал, как следует работать. Одно только перечисление курсов, которые в годы своего заведования ему пришлось вести: математический анализ, теория функций комплексного и действительного переменных, численные методы, теория вероятностей, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных и т.д. говорит само за себя. А еще спецкурсы и спецсеминары, дипломные работы, руководство научной работой учащихся и многое другое.

Многие его ученики занимали призовые места на различных научных конференциях в регионе и на федеральном уровне – в Москве. За это Анатолий Семенович неоднократно был награжден Почетными грамотами губернатора, Законодательного Собрания, областного Министерства образования и науки.

В 2008 году указом президента ему было присвоено звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации».

А.С. Макаров – хороший семьянин. Сейчас семейный круг Анатолия Семеновича составляют жена Галина, дочь Ольга и младшие сестры Татьяна и Наталья.

Коллеги и друзья Анатолия Семёновича сердечно поздравляют его с семидесятилетним юбилеем и желают ему здоровья, долголетия и дальнейших успехов и достижений.

*Поступила в редакцию 1 декабря 2015 г.*

**ANATOLIY SEMENOVICH MAKAROV.  
TO THE 70<sup>th</sup> ANNIVERSARY**

**S.A. Zagrebina<sup>1</sup>, V.I. Zalyapin<sup>2</sup>, M.M. Kipnis<sup>3</sup>, S.V. Korzhakova<sup>4</sup>, G.A. Sviridyuk<sup>5</sup>**

On August 18 of the year 2015 we celebrate the 70-th anniversary of Anatoliy Semenovich Makarov, PhD, professor, one of the organizers of mathematical education in Chelyabinsk, who served for many years (1985–2011) as the head of the department of mathematical analysis of the Chelyabinsk State Pedagogical University.

*Keywords: personalia; anniversary; biography.*

*Received December 1, 2015*

---

<sup>1</sup> Zagrebina Sophiya Aleksandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: zagrebinasa@susu.ru

<sup>2</sup> Zalyapin Vladimir Illich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: vzal@susu.ac.ru

<sup>3</sup> Kipnis Mikhail Markovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Mathematics and methodology of teaching mathematics, Chelyabinsk State Pedagogical University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: mmkipnis@gmail.com

<sup>4</sup> Korzhakova Svetlana Vasil'evna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics and methodology of teaching mathematics, Chelyabinsk State Pedagogical University, Chelyabinsk, Russia.

<sup>5</sup> Sviridyuk Georgiy Anatol'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.

E-mail: sviridiukga@susu.ru

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», Е29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, ответственному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sphiya Aleksandrovna, Differential and Stochastic Equations Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.yourgpu.rf/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор А.Ю. Федерякин

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 27.01.2016. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 8,83. Тираж 500 экз. Заказ 8/29.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.