



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2016
Т. 8, № 2

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (отв. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, профессор Физики и Оптики **Зельдович Б.Я.** (КРЕОЛ, Университет Центральной Флориды, г. Орlando, США)
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.** (ЮУрГУ)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Корея),
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.** (ЮУрГУ)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2016
Vol. 8, no. 2

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

M.M. Brzhezinskaya, Berlin, Germany
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
B.Ya. Zeldovich, CREOL, University of Central Florida, Orlando, United States of America
V.V. Karachik, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
Kishik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
N.D. Kundikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D.A. Mirzaev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, USA
S.B. Sapozhnikov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
A.O. Chernyavskii, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БОВКУН В.А. Обобщенные решения стохастических задач в форме Ито в пространствах Гельфанда–Шилова	5
БОЗИЕВ О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями	14
ЗИКИРОВ О.С. Об одной задаче типа Дирихле для уравнения составного типа	19
ИРГАШЕВ Б.Ю. Краевая задача для вырождающегося уравнения третьего порядка	27
КАДЧЕНКО С.И., ТОРШИНА О.А. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных рядов	36
СИМОНЕНКО В.А., СКОРКИН Н.А., УГЛОВ А.С. Конечно-разностная схема полурасщепления матричных коэффициентов и ее применение для описания распространения цунами ...	44
ТУРСУНОВ Д.А., ЭРКЕБАЕВ У.З. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе	52
УХОБОТОВ В.И., ИЗМЕСТЬЕВ И.В. Об одной задаче преследования при наличии сопротивления среды.....	62

Физика

АЛВАССИТИ Н., БИБИКОВА Э.А. Геометрический спиновый эффект Холла для пучков Гаусса	67
ГАЛАКТИОНОВА А.В., ЕМАЛЕТДИНОВ А.К. Расчет концентрации вакансий при термомеханическом нагружении.....	71

Персоналии

Абрам Давидович Кацман – ученый, педагог, человек. К столетию со дня рождения.....	77
--	----

CONTENTS

Mathematics

BOVKUN V.A. Generalized Solutions for Stochastic Problems in the Ito Form in Gelfand–Shilov Spaces	5
BOZIEV O.L. An Approximate Solution of Loaded Hyperbolic Equation with Homogenous Boundary Conditions.....	14
ZIKIROV O.S. On a Dirichlet Problem for Composite Type Equation	19
IRGASHEV B.Yu. Boundary Value Problem for a Third-Order Degenerate Equation	27
KADCHENKO S.I., TORSHINA O.A. Calculation of Eigenvalues of Elliptic Differential Operators Using the Theory of Regularized Series	36
SIMONENKO V.A., SKORKIN N.A., UGLOV A.S. A Semi-Splitting Finite Difference Scheme of Matrix Coefficients and its Application to Describe the Tsunami Propagation.....	44
TURSUNOV D.A., ERKEBAEV U.Z. Asymptotics of the Solution to the Bisingular Perturbed Dirichlet Problem in the Ring with Quadratic Growth on the Boundary	52
UKHOBOTOV V.I., IZMESTYEV I.V. On a Pursuit Problem under Resistance of a Medium	62

Physics

AL-WASSITI N., BIBIKOVA E.A. Geometric Spin Hall Effect for Gaussian Beam.....	67
GALAKTIONOVA A.V., EMALETDINOV A.K. Calculation of Vacancy Concentration under Thermo-Mechanical Loading.....	71

Personalia

Abram Davidovitch Katsman. To the 100 th Anniversary	77
---	----

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ФОРМЕ ИТО В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬФАНДА–ШИЛОВА

В.А. Бовкун

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: 123456m@inbox.ru

Работа посвящена исследованию стохастической задачи Коши в форме Ито для систем дифференциальных уравнений с оператором $A(i\partial/\partial x)$, являющимся генератором R -полугруппы в гильбертовом пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$. Для классов систем, корректных по Петровскому, условно-корректных и некорректных, определяемых поведением дифференциального оператора $A(i\partial/\partial x)$, построено обобщенное по пространственной переменной решение задачи в соответствующих пространствах Гельфанда–Шилова.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши; винеровский процесс; обобщенное преобразование Фурье; обобщенное решение; пространства Гельфанда–Шилова.

Введение

Одним из современных направлений исследований в математике является изучение задач с учетом воздействия случайных факторов. Учет случайностей приводит к созданию математических моделей в форме стохастических задач. Среди них важное место занимают модели с дифференциальными уравнениями, содержащими неоднородности типа белого шума в бесконечномерных пространствах.

Отправной точкой в данной тематике стало изучение задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения первого порядка в гильбертовых пространствах H, \mathbb{H} :

$$v'(t) = Av(t) + B\mathbb{W}(t), \quad t \in [0; \tau], \tau \leq \infty, v(0) = \zeta, \quad (1)$$

где оператор A порождает полугруппу класса C_0 в H , $\mathbb{W}(t)$ – \mathbb{H} -значный стохастический процесс типа белого шума. Следуя теории стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах, от дифференциальной задачи (1) с нерегулярным белым шумом, применяя конструкцию интеграла Ито в бесконечномерном случае, осуществляют переход к интегральной задаче:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t Av(s)ds + BW(t), \quad t \in [0; \tau], \tau \leq \infty, \quad (2)$$

с непрерывной «первообразной» по t от белого шума – винеровским процессом $W(t)$, который определяется аксиоматически. Результаты многочисленных авторов по исследованию интегральной задачи (2) упорядочены и приведены в монографии [1]. В теории стохастических задач уравнение (2) принято кратко записывать в форме дифференциалов:

$$dv(t) = Av(t)dt + BdW(t), \quad t \in [0; \tau], \tau \leq \infty, v(0) = \zeta. \quad (3)$$

Как показано в [1], даже в случае оператора A – генератора полугруппы класса C_0 для интегральной задачи (3) удается построить только слабое решение:

$$\langle v(t), y \rangle = \langle \zeta, y \rangle + \int_0^t \langle v(s), A^* y \rangle ds + \langle BW(t), y \rangle, \quad t \in [0; \tau], y \in D(A^*). \quad (4)$$

Однако в современных приложениях возникают стохастические задачи, в которых оператор A не порождает семейство, обладающее свойствами, характерными для полугруппы класса C_0 . Первые шаги в исследовании таких задач были сделаны И.В. Мельниковой, А.И. Филинковым, М.А. Альшанским и У.А. Алексеевой [2–7]. В работе [2] рассматривается слабое проинтегрированное решение задачи Коши с оператором A – генератором интегрированной полугруппы операторов. Кроме того, в данной работе рассматривается построение обобщенных по переменной t решений задачи Коши. В более поздней работе [6] развивается идея построения

обобщенных по переменной t решений исходной дифференциальной задачи в пространствах ультрараспределений, когда оператор A является генератором конволюционной полугруппы, а также вводится принципиально новый подход к построению решения задачи Коши (1) – определение обобщенного по случайной переменной решения.

Настоящая работа посвящена исследованию стохастической задачи Коши для систем дифференциальных уравнений Гельфанда–Шилова порядка m в форме Ито, то есть в интегральной форме с интегралом Ито (2):

$$X(t, x) - \xi(x) = \int_0^t A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) X(s, x) ds + \int_0^t B dW(s, x), \quad t \in [0; T], x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где оператор $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – линейный дифференциальный оператор-матрица конечного порядка p в пространстве $L_2^m(\mathbb{R}) := L_2(\mathbb{R}) \times \dots \times L_2(\mathbb{R})$, $\xi \in L_2^m$, $W(t, x)$ – Q -винеровский процесс $W(t, x) = W(t, x, \omega)$, $\omega \in \Omega$.

Результаты исследования задачи Коши для детерминированных систем с оператором $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ показывают, что в общем случае оператор $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ в пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$ порождает некорректную задачу [8]. Решение задачи для различных классов систем определяется в обобщенном смысле в пространствах обобщенных функций Гельфанда–Шилова. В соответствии с результатами исследования для детерминированных задач в рассматриваемом случае стохастической задачи (5) определению подлежит обобщенный по переменной x случайный процесс $\{X(t), t \in [0; T]\}$, $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$, $X_i(t) = X_i(t, x, \omega)$, $x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$, принадлежащий пространству обобщенных функций Ψ' , определяемому классом системы.

Постановка задачи

Основным объектом исследования в данной работе является стохастическая задача Коши в форме Ито для систем дифференциальных уравнений Гельфанда–Шилова порядка m :

$$X(t, x) - \xi(x) = \int_0^t A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) X(s, x) ds + \int_0^t B dW(s, x), \quad t \in [0; T], x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

которую, как правило, будем записывать кратко в форме дифференциалов следующим образом

$$dX(t, x) = A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) X(t, x) dt + B dW(t, x), \quad X(0, x) = \xi(x), \quad t \in [0; T], x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

В задачах (6) и (7) оператор $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – линейный дифференциальный оператор-матрица конечного порядка p в пространстве L_2^m , $\xi \in L_2^m$, $W(t, x)$ – Q -винеровский процесс, который определяется аксиоматически [1, 3].

Определению подлежит обобщенный по переменной x случайный процесс

$$\{X(t), t \in [0; T]\}, \quad X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t)), \quad X_i(t) = X_i(t, x, \omega), \quad x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega,$$

принадлежащий пространству обобщенных функций Ψ' , определяемому классом системы.

Построение обобщенного решения $\{X(t), t \in [0; T]\}$ объясняется тем, что задача (7) является некорректной. Некорректность в данном случае возникает вследствие свойств оператора $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и свойств нерегулярности стохастической неоднородности $W(t, x)$. Оператор $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ в пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$ порождает некорректную однородную (детерминированную) задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad t \in [0; T], x \in \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (8)$$

решение которой с помощью техники обобщенного преобразования Фурье [8] определяется семейством операторов $\{U(t), t \in [0; T]\}$:

$$u(x, t) = (U(t)f)(x) = (G(\cdot, t) * f(\cdot))(x), \quad (9)$$

где равенство понимается в обобщенном смысле, то есть на основных функциях ψ . Функция $G(x, t) = (\mathcal{F}^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\})(x)$ — является функцией Грина задачи (8), матричная экспонента $e^{tA(\sigma)}$ определяется как формальный ряд по степеням матрицы $A(\sigma)$ — образа Фурье матрицы $A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Из вида решения (9) однородной задачи (8) следует, что свойства операторов решения $\{U(t), t \in [0; T]\}$ определяются поведением оператора–матрицы $e^{tA(s)}$ на промежутке $t \in [0; T]$. В свою очередь, свойства этого оператора определяются функцией $\Lambda(s) = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(s)$, $s = \sigma + it$, где $\lambda_j(s)$ — собственные значения матрицы $A(s)$; это следует из оценок [8]:

$$e^{tA(s)} \leq \|e^{tA(s)}\|_m \leq C(1+|s|)^{p(m-1)} e^{t\Lambda(s)}, \quad t \in [0; T].$$

На основании поведения функции $\Lambda(\cdot)$ выделяются следующие классы систем [8]:

• *Системы, корректные по Петровскому*: $\Lambda(\sigma) \leq C_1$, $C_1 > 0$. Отсюда для матричного оператора следует оценка

$$\|e^{tA(\sigma)}\|_m \leq C_2(1+|\sigma|)^h, \quad t \in [0; T], \sigma \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $C_2 = Ce^{TC_1}$, $h \leq p(m-1)$ — наименьшее из натуральных чисел l , для которых справедливо неравенство $\|e^{tA(\sigma)}\|_m \leq C_2(1+|\sigma|)^l$.

• *Условно–корректные системы*: $\Lambda(\sigma) \leq C|\sigma|^h + C_1$, $h \in (0; 1)$, $C_1 > 0$. Тогда для оператора $e^{tA(\sigma)}$ справедливо соотношение

$$\|e^{tA(\sigma)}\|_m \leq C_2 e^{a_1|\sigma|^h}, \quad t \in [0; T], \sigma \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

где $a_1 = CT$.

• *Некорректные системы*: $\Lambda(\sigma) \leq C|\sigma|^{p_0} + C_1$, $C_1 > 0$. В этом случае справедлива оценка

$$\|e^{tA(\sigma)}\|_m \leq C_2 e^{b_1|\sigma|^{p_0}}, \quad t \in [0; T], \sigma \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

где $b_1 = CT$.

Из классификации следует, что даже в случае систем, корректных по Петровскому, оператор $e^{tA(\sigma)}$, $t \in [0; T]$ имеет в общем случае степенной рост по σ , что приводит к некорректности однородной детерминированной задачи в пространстве L_2^m и, как следствие, рассматриваемой неоднородной стохастической задачи.

В теории абстрактных стохастических уравнений с оператором A – генератором полугруппы $\{U(t), t \geq 0\}$ класса C_0 , решение задачи Коши представимо в виде суммы решения однородной задачи и стохастической свертки операторов решения однородной задачи $\{U(t), t \geq 0\}$ с неоднородностью [1], то есть в виде

$$X(t) = U(t)\xi + \int_0^t U(t-s)BdW(s), \quad t \in [0; T], T < \tau. \quad (13)$$

Если оператор A не порождает полугруппу класса C_0 в пространстве L_2^m , а является генератором некоторой регуляризованной полугруппы, то операторы решения однородной задачи $\{U(t), t \geq 0\}$ неограничены в L_2^m , но, как будет показано далее, могут быть определены в пространстве обобщенных функций Ψ' , которое зависит от поведения оператора A .

Как доказано в [7], в рассматриваемой задаче (7) оператор $A = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в общем случае порождает R -полугруппу в пространстве L_2^m :

$$S(t)f = \left(\mathcal{F}^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\tilde{K}(\sigma)\}\right) * f, \quad f \in L_2^m, t \in [0; T],$$

где функция $\tilde{K}(\cdot)$, определяющая R -полугруппу, выбирается бесконечно дифференцируемой и убывающей, с учетом роста матричной экспоненты $e^{tA(\sigma)}$. При этом оператор R определяется следующим образом

$$(Rf)(x) := \left(\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{K}(\sigma)\tilde{f}(\sigma)\}\right)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{K}(\sigma)\} * f\right)(x), \quad f \in L_2^m. \quad (14)$$

В этом случае операторы $\{U(t), t \in [0; T]\}$ определяются в пространстве обобщенных функций Ψ' , соответствующем классу системы, через R -полугруппу $\{S(t), t \in [0; T]\}$ следующим образом:

$$\langle \psi, U(t)\xi \rangle = \langle \psi, R^{-1}S(t)\xi \rangle = \langle (R^{-1})^* \psi, S(t)\xi \rangle, \quad \psi \in \Psi,$$

где пространство Ψ основных функций определяется регуляризующим оператором R . Тогда и обобщенное решение задачи (7) будем искать в форме:

$$\langle \psi, X(t) \rangle := \langle (R^{-1})^* \psi, S(t)\xi \rangle + \langle (R^{-1})^* \psi, \int_0^t S(t-s)BdW(s) \rangle, \quad \psi \in \Psi, \quad (15)$$

обобщающей равенство (13). Далее покажем, что процесс $\{X(t), t \in [0; T]\}$, определяемый формулой (15), дает решение следующей обобщенной задачи

$$\langle \psi, X(t) \rangle - \langle \psi, \xi \rangle = \int_0^t \langle A^* \psi, X(s) \rangle ds + \langle \psi, \int_0^t BdW(s) \rangle, \quad t \in [0; T], \psi \in \Psi. \quad (16)$$

Докажем теорему о свертывателе в паре пространств и на основании этой теоремы определим основные пространства Ψ для каждого класса систем (10)–(12).

Основные результаты

Теорема 1. Пусть оператор $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ задает систему, корректную по Петровскому, условно-корректную или некорректную. Тогда обобщенное решение задачи Коши (16) существует и представимо в виде

$$\langle \psi, X(t) \rangle := \langle (R^{-1})^* \psi, S(t)\xi \rangle + \langle (R^{-1})^* \psi, \int_0^t S(t-s)BdW(s) \rangle, \quad \psi \in \Psi,$$

где R -полугруппа операторов $S(t)$ и пространство Ψ определяются классом системы.

Доказательство. В качестве пространства Ψ выберем пространство основных функций ψ , удовлетворяющих условиям: $(R^{-1})^* \psi \in \Psi$, $A^*(R^{-1})^* \psi \in \Psi$. Сначала покажем, что первое слагаемое правой части (15) дает решение однородной задачи (16). В силу выбора основного пространства Ψ и ограниченности операторов $\{S(t), t \in [0; T]\}$ справедливо следующее равенство:

$$\int_0^t \langle A^* \psi, R^{-1}S(s)\xi \rangle ds = \langle (R^{-1})^* A^* \psi, \int_0^t S(s)\xi ds \rangle.$$

В силу свойств R -полугрупп операторы $(R^{-1})^*$ и A^* коммутируют на пространстве Ψ , тогда

$$\begin{aligned} \langle (R^{-1})^* A^* \psi, \int_0^t S(s)\xi ds \rangle &= \langle (R^{-1})^* \psi, A \int_0^t S(s)\xi ds \rangle = \\ &= \langle (R^{-1})^* \psi, (S(s)\xi - R\xi) \rangle = \langle (R^{-1})^* \psi, S(s)\xi \rangle - \langle \psi, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Далее покажем, что второе слагаемое правой части (15) дает решение неоднородной задачи (16) при $\xi = 0$. В силу свойств операторов R -полугруппы имеем

$$\int_0^t \langle (R^{-1})^* A^* \psi, \int_0^s S(s-r) B dW(r) \rangle ds = \langle (R^{-1})^* A^* \psi, \int_0^t \int_0^s S(s-r) B dW(r) ds \rangle.$$

Учитывая ограниченность операторов $\{S(t), t \in [0; T]\}$, используя стохастический вариант теоремы Фубини [1], изменим порядок интегрирования в полученном интеграле

$$\begin{aligned} \langle (R^{-1})^* A^* \psi, \int_0^t \int_0^s S(s-r) B dW(r) ds \rangle &= \langle A^* (R^{-1})^* \psi, \int_0^t \int_r^t S(s-r) B ds dW(r) \rangle = \\ &= \langle (R^{-1})^* \psi, \int_0^t A \int_0^{t-r} S(h) B dh dW(r) \rangle = \langle (R^{-1})^* \psi, \int_0^t (S(t-r)B - RB) dW(r) \rangle = \\ &= \langle (R^{-1})^* \psi, \int_0^t S(t-r) B dW(r) \rangle + \langle \psi, \int_0^t B dW(r) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, обобщенный Ψ' -значный процесс $\{X(t), t \in [0; T]\}$, определенный соотношением (15), дает решение задачи (16) для соответствующего класса системы. □

Из доказательства данной теоремы следует, что основное пространство Ψ полностью определяется свойствами регуляризующего оператора R или, в силу конструкции (14), свойствами функции \tilde{K} ; точнее, свойствами оператора R^{-1} или функции \tilde{K}^{-1} , которая, в свою очередь, определяется ростом оператора $e^{tA(\sigma)}$. Для того, чтобы определить пространства Ψ для каждого класса систем, докажем следующий результат.

Теорема 2 Пусть Φ, Ψ – пространства основных функций с непрерывным сдвигом, а $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ – двойственные к ним пространства. Тогда, если функционал $g(\sigma)$ типа функции является мультипликатором из $\tilde{\Phi}'$ в $\tilde{\Psi}'$, то функционал $G = \mathcal{F}^{-1}\{g\}$ – свертыватель из Φ' в Ψ' , и для любого $f \in \Phi'$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}\{G * f\} = \mathcal{F}\{G\} \cdot \mathcal{F}\{f\}.$$

Доказательство. Для начала поясним, что G – свертыватель из Φ' в Ψ' , если для любого $f \in \Phi'$ справедливо включение $G * f \in \Psi'$.

Далее, пусть $\psi \in \Psi$. Рассмотрим функцию $\mathcal{F}\{\psi(x-h)\}$:

$$\mathcal{F}\{\psi(x-h)\} = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x,\sigma)} \psi(x-h) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i(y,\sigma)} e^{i(h,\sigma)} \psi(y) dy = e^{i(h,\sigma)} \mathcal{F}\{\psi(x)\}.$$

Из полученных равенств следует, что $e^{i(h,\sigma)}$ является мультипликатором в пространстве $\tilde{\Psi}$, поскольку оператор сдвига ограничен в Ψ .

Теперь для того, чтобы $G = \mathcal{F}^{-1}\{g\}$ определял свертыватель из Φ' в Ψ' в силу определения свертки двух обобщенных функций

$$\langle \psi, G * f \rangle = \langle G * \psi, f \rangle = \langle \langle \psi(x + \xi), G(\xi) \rangle, f(x) \rangle$$

необходимо доказать, что $G * \psi := \langle \psi(x + \xi), G(\xi) \rangle \in \Phi$ для любого $\psi \in \Psi$.

Действительно, используя определения свертки и преобразования Фурье обобщенных функций, получаем

$$\langle \psi(x + \xi), G(\xi) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle e^{-i(x,\sigma)} \tilde{\psi}(\sigma), g(\sigma) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x,\sigma)} \tilde{\psi}(\sigma) \overline{g(\sigma)} d(\sigma) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{g}\tilde{\psi}\}.$$

и поскольку $\bar{g}\tilde{\psi} \in \tilde{\Phi}'$, то результат $\mathcal{F}^{-1}\{\bar{g}\tilde{\psi}\} \in \Phi'$.

Далее, в силу непрерывности преобразования Фурье, если $\psi_n \rightarrow 0$ в Ψ , то $\mathcal{F}\{\psi_n\} \rightarrow 0$ в $\tilde{\Psi}$, а так как оператор умножения на \bar{g} непрерывен в $\tilde{\Psi}$, то $\bar{g}\tilde{\psi}_n \rightarrow 0$ в $\tilde{\Phi}$, откуда, в силу непрерывности обратного преобразования Фурье, получаем, что $\mathcal{F}^{-1}\{\bar{g}\tilde{\psi}_n\} = G * \psi_n \rightarrow 0$ в Φ .

Таким образом, функционал G – свертыватель из пространства Ψ в пространство Φ и имеет место формула

$$\mathcal{F}\{G * \psi\} = \bar{g}\tilde{\psi}.$$

Следовательно, для любого $f \in \Phi'$ определена свертка $G * f$.

Теперь найдем выражение для $\mathcal{F}\{G * f\}$. Имеем

$$\langle \tilde{\psi}, \mathcal{F}\{G * f\} \rangle = (2\pi)^n \langle \psi, G * f \rangle = (2\pi)^n \langle G * \psi, f \rangle = \langle \mathcal{F}\{G * \psi\}, \mathcal{F}\{f\} \rangle = \langle \bar{g}\tilde{\psi}, \mathcal{F}\{f\} \rangle = \langle \tilde{\psi}, g\mathcal{F}\{f\} \rangle,$$

откуда следует, что

$$\mathcal{F}\{G * f\} = \mathcal{F}\{G\} \cdot \mathcal{F}\{f\}. \quad \square$$

Далее, для каждого класса систем с помощью доказанной теоремы определим пространство Ψ . На основании теоремы можно утверждать, что пространство Ψ определяется свойствами матричной экспоненты однородной детерминированной задачи: пространство Ψ должно содержать такие основные функции ψ , что оператор $e^{tA(\sigma)}$ является мультипликатором из $\tilde{\Psi}$ в пространство $\tilde{\Phi} = L_2^m$.

Начнем с определения пространства Ψ для систем, корректных по Петровскому. Поскольку матричная экспонента $e^{tA(\sigma)}$ в этом случае удовлетворяет оценке (10), в качестве $\tilde{K}(\sigma)$, определяющей оператор R , можно взять функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{K}(\sigma) = O\left(\frac{1}{(1+|\sigma|)^{h_1}}\right) \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty, \text{ где } h_1 > h + 1/2.$$

Покажем, что для систем данного класса операторы $\{U(t), t \in [0; T]\}$ могут быть определены в обобщенном смысле над пространством $\Psi = \mathcal{S}$.

Действительно, так как $\xi \in L_2^m$, то согласно определению мультипликатора в паре пространств

$$\langle \tilde{\psi}, e^{tA(\sigma)} \xi \rangle = \langle (e^{tA(\sigma)})^* \tilde{\psi}, \xi \rangle$$

и оценке (10), оператор $e^{tA(\sigma)}$ определяет мультипликатор из пространства $\tilde{\Psi} = \mathcal{S}$ в пространство $\tilde{\Phi} = L_2^m$ и, следовательно, из $\tilde{\Phi}' = L_2^m$ в $\tilde{\Psi}' = \mathcal{S}'$. Соответствующая этому случаю функция Грина $G(x, t) = (\mathcal{F}^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\})(x)$ определяет свертыватель из $\Phi' = L_2^m$ в $\Psi' = \mathcal{S}'$. Таким образом, для систем, корректных по Петровскому, $\Psi = \mathcal{S}$ и решение $X(t)$ стохастической задачи (16) является \mathcal{S}' -значным процессом при п.в. ω .

Теперь рассмотрим условно-корректные системы. В данном случае матричная экспонента удовлетворяет оценке (11). Следовательно, в качестве $\tilde{K}(\sigma)$, определяющей оператор R , можно взять функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{K}(\sigma) = O\left(e^{-a_2|\sigma|^h}\right) \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty, \text{ где } a_2 > a_1.$$

В силу связи убывания функции $\tilde{K}(\sigma)$ и функций пространства $\tilde{\Psi}$ возьмем пространство $\tilde{\Psi} = \mathcal{S}_{\alpha, \mathcal{A}}$, бесконечно дифференцируемых на \mathbb{R} функций $\psi(\cdot)$, которые при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|\sigma^k \psi^{(q)}(\sigma)| \leq C_{q, \varepsilon} (\mathcal{A} + \varepsilon)^k k^{k\alpha}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad q, k \in \mathbb{N}_0,$$

где $\alpha = 1/h$ с соответствующим h из неравенства (11), $\mathcal{A} = \left(\frac{\alpha}{ea_2}\right)^\alpha$ и $C_{q, \varepsilon} = C_{q, \varepsilon}(\psi)$ – константа [9].

Действительно, в силу оценки (11) получим, что оператор $e^{tA(\sigma)}$ определяет мультипликатор из пространства $\tilde{\Psi} = \mathcal{S}_{\alpha, \mathcal{A}}$ в пространство $\tilde{\Phi} = L_2^m$ и, следовательно, из $\tilde{\Phi}' = L_2^m$ в $\tilde{\Psi}' = (\mathcal{S}_{\alpha, \mathcal{A}})'$. Тогда по теоремам двойственности для пространств обобщенных функций получим, что функция Грина $G(x, t)$ определяет свертыватель из $\Phi' = L_2^m$ в $\Psi' = (\mathcal{S}^{\alpha, \mathcal{A}})'$. Таким образом, для условно-корректных систем $\Psi = \mathcal{S}^{\alpha, \mathcal{A}}$ и решение $X(t)$ стохастической задачи (16) является $(\mathcal{S}^{\alpha, \mathcal{A}})'$ -значным процессом при п.в. ω .

Наконец, рассмотрим некорректные системы. В силу оценки (12) в качестве $\tilde{K}(\sigma)$ можно взять функцию, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{K}(\sigma) = O\left(e^{-b_2|\sigma|^{p_0}}\right) \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty, \text{ где } b_2 > b_1.$$

Покажем, что в качестве пространства $\tilde{\Psi}$ можно взять пространство $\tilde{\Psi} = W_{M,\beta}$ бесконечно дифференцируемых на \mathbb{R} функций $\psi(\cdot)$, которые при любом $\delta > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|\psi^{(q)}(\sigma)| \leq C_{q,\delta} e^{-M((\beta-\delta)\sigma)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}_0,$$

где $M(\sigma) = \frac{|\sigma|^{p_0}}{p_0}$, $\beta = (p_0 b_2)^{1/p_0}$, $C_{q,\delta} = C_{q,\delta}(\psi)$ [9].

Действительно, в силу оценки (12) получим, что оператор $e^{tA(\sigma)}$ определяет мультипликатор из пространства $\tilde{\Psi} = W_{M,\beta}$ в пространство $\tilde{\Phi} = L_2^m$ и, следовательно, из $\tilde{\Phi}' = L_2^m$ в $\tilde{\Psi}' = (W_{M,\beta})'$. Двойственным по Фурье к пространству $W_{M,\beta}$ является пространство $W^{\Omega,1/\beta}$, где функция $\Omega(x)$ — двойственная по Юнгу к $M(\sigma)$. Тогда соответствующая данному классу функция Грина $G(x,t)$ определяет свертыватель из $\Phi' = L_2^m$ в $\Psi' = (W^{\Omega,1/\beta})'$, где

$$\Omega(x) = \frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, для некорректных систем $\Psi = W^{\Omega,1/\beta}$ и решение $X(t)$ стохастической задачи (16) является $(W^{\Omega,1/\beta})'$ -значным процессом при п.в. ω .

Подводя итог проведенным исследованиям о выборе пространства $\tilde{\Psi}$ для каждого класса систем, сформулируем полученные результаты.

Теорема 3. Пусть оператор $A(i \frac{\partial}{\partial x})$ определяет систему из классов (10)–(12). Тогда случайный процесс, определяемый равенством (15), является решением задачи Коши (16) для систем:

- корректных по Петровскому в пространстве \mathcal{S}' ;
- условно-корректных в пространстве $(\mathcal{S}^{\alpha,\mathcal{A}})'$, $\alpha = 1/h$, $\mathcal{A} = \left(\frac{\alpha}{ea_2}\right)^\alpha$;
- некорректных в пространстве $(W^{\Omega,1/\beta})'$, где $\Omega(x) = \frac{|x|^q}{q}$, $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q} = 1$, $\beta = (p_0 b_2)^{1/p_0}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00090 и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

Литература

1. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge University Press, 1992. – 482 p.
2. Мельникова, И.В. Слабые и обобщенные решения абстрактных стохастических уравнений / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Доклады академии наук. – 2000. – Т. 375, № 4. – С. 443–447.
3. Melnikova, I.V. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – Т. 111, № 2. – С. 3430–3475.
4. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – Т. 116, № 5. – С. 3620–3656.

5. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. Communications in Applied Analysis. – 2009. – Т. 13, № 2. – С. 195–212.

6. Альшанский, М.А. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач / М.А. Альшанский, И.В. Мельникова // Математический сборник. – 2011. – № 11. – С. 3–30.

7. Melnikova, I.V. Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems / I.V. Melnikova, U.A. Alekseeva // Chaotic modeling and simulations. – 2014. – № 1. – С. 49–56.

8. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 276 с.

9. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 309 с.

Поступила в редакцию 14 декабря 2014 г.

DOI: 10.14529/mmph160201

GENERALIZED SOLUTIONS FOR STOCHASTIC PROBLEMS IN THE ITO FORM IN GELFAND-SHILOV SPACES

V.A. Bovkun

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

E-mail: 123456m@inbox.ru

The paper is devoted to one of the modern trends of research in mathematics, which is the study of problems with regard to the impact of random factors. One of the integral parts among such problems is taken by the models with differential equations containing heterogeneity of white noise in the infinite-dimensional spaces.

The main subject of research in the article is a stochastic Cauchy problem for systems of differential equations of the Gelfand–Shilov of order m in the form of Ito:

$$X(t, x) - \xi(x) = \int_0^t A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) X(s, x) ds + \int_0^t B dW(s, x), \quad t \in [0; T], x \in \mathbb{R},$$

where the operator $A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ – a linear differential operator-matrix of finite order, which is a generator of R -semigroup in the space $L_2^m(\mathbb{R})$, $\xi \in L_2^m$, $W(t, x)$ – Q - a Wiener process.

Formulation of the problem in the space $L_2^m(\mathbb{R})$ is motivated by the fact that in modern applications that lead to models in the form of abstract stochastic problems, the process W takes values in a Hilbert space and in the space $L_2^m(\mathbb{R})$ in particular.

Results of the study of the Cauchy problem for deterministic systems with $A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ operator show that, in general, the operator in the space $L_2^m(\mathbb{R})$ generates ill-posed problem [8]. Solution of the problem for various classes of systems is determined in the generalized sense in the corresponding Gelfand–Shilov spaces using generalized Fourier transform technique.

Taking into account the results of the study of deterministic problems, the solution in the considering case of stochastic problem will be a generalized random process on the variable x . More precisely, in this paper a generalized according to spatial variable solution for stochastic problem in Gelfand–Shilov spaces corresponding to the classes of systems of Petrovskii well-posedness, conditional well-posedness and ill-posedness defined by a differential operator behavior $A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ is built.

Keywords: stochastic Cauchy problem; Wiener process; generalized Fourier transform; generalized solution; Gelfand–Shilov spaces.

References

1. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge University Press, 1992, 482 p. DOI: 10.1017/cbo9780511666223
2. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Weak and generalized solutions of abstract stochastic equations. *Doklady Mathematics*, 2000, Vol. 62, no. 3, pp. 373–377.
3. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, Vol. 111, no. 2, pp. 3430–3475. DOI: 10.1023/a:1016006127598
4. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 116, no. 5, pp. 3620–3656. DOI: 10.1023/a:1024159908410
5. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups. *J. Communications in Applied Analysis*, 2009, Vol. 13, no. 2, pp. 195–212.
6. Alshansky M.A., Melnikova I.V. Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems. *Mat. Sbornik*, 2011, Vol. 202, no. 11, pp. 3–30. DOI: 10.1070/sm2011v202n11abeh004199
7. Melnikova I.V., Alekseeva U.A. Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems. *Chaotic modeling and simulations*, 2014, no. 1, pp. 49–56.
8. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized function. Volume 3: Theory of differential equations*. Academic Press Inc., 1967, 222 p.
9. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized Functions, Volume 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*. Academic Press Inc., 1968, 261 p.

Received December 14, 2014

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О.Л. Бозиев

Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация
E-mail: bozиеv@yandex.ru

Получена формула приближенного решения начально-краевой задачи для нагруженного гиперболического уравнения, для нахождения которого используется априорная оценка решения поставленной задачи.

Ключевые слова: нагруженные уравнения в частных производных; априорные оценки; приближенные решения.

Введение

Большой класс физических, биологических, экологических и других процессов описывается дифференциальными уравнениями в частных производных со степенной нелинейностью (см., например, [1]). Для их интегрирования, как правило, применяются различные способы линеаризации, часто искажающие суть моделируемого процесса. В методе редукции к нагруженным уравнениям [2] в нелинейном члене исходного уравнения производится замена искомой функции ее следом, что приводит к «ослаблению» нелинейности без ее полного устранения. Найденное затем точное или приближенное решение начально-краевой задачи для нагруженного уравнения можно принять за приближенное решение исходной нелинейной задачи. Подобная процедура применяется, в частности, в [3, 4], где получены формулы общих членов последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, к которым редуцируются исходные нелинейные уравнения. В настоящей работе предлагается несколько отличный от этого способ нахождения приближенного решения нагруженного уравнения с помощью априорной оценки решения поставленной задачи.

Постановка задачи

В области $Q = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное [2] уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0, \quad a, b > 0, \quad (1)$$

где натуральное $p > 3$, $\Omega = [0, l]$.

Уравнение (1) является модификацией нелинейного уравнения,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b |u|^p u_t = 0,$$

возникающего в релятивистской квантовой механике [1], а также моделирующего некоторые нестационарные гидродинамические процессы. Нагруженные уравнения вида (1) исследуются в задачах управления, а также могут быть моделями некоторых нелинейных физических процессов. Константы a и b являются параметрами моделируемого процесса.

Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Q , а также условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

в которых $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in L_p(\Omega)$.

Априорные оценки

Установим некоторые априорные оценки, которые впоследствии будут использованы для нахождения приближенного решения задачи (1)–(3).

Умножая (1) скалярно на u_t и применяя стандартные для подобных случаев несложные преобразования, легко получить неравенства, выполняющиеся для всех значений $t \in [0, T]$:

$$\int_{\Omega} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \leq C_1, \quad \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq C_1, \quad \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{C_1}{a^2}, \tag{4}$$

где $\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_{\Omega} |v|^p dx$ выражает норму функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, а C_1 зависит лишь от t .

Теорема. Пусть решение задачи (1)–(3) $u \in L_{p-2}(\Omega)$ при любом $t \in [0, T]$. Тогда функция $\|u\|_{p,\Omega}^p$ ограничена константой, не зависящей от x и t .

Доказательство. Умножим уравнение (1) скалярно на функцию u^{p-1}

$$(u_{tt}, u^{p-1}) - a^2 (u_{xx}, u^{p-1}) + b \int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = 0. \tag{5}$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$(u_{tt}, u^{p-1}) = \frac{1}{p} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u^p dx - (p-1) \int_{\Omega} u_t^2 u^{p-2} dx;$$

$$-(u_{xx}, u^{p-1}) = (p-1) \int_{\Omega} u_x^2 u^{p-2} dx; \quad \int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p dx.$$

Возвращаясь к (5) и умножая его на $\operatorname{sgn}^p u$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{p} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2p} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 = (p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx,$$

после интегрирования которого по t получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 = p(p-1) \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt +$$

$$+ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, 0)|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u(x, 0)|^p dx \right)^2. \tag{6}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в правой части. Применяя неравенство Гёльдера, в котором $s = q/(q-1)$, получаем при $q = 1$ в силу первого из (4)

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} dx dt \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_t^2 - a^2 u_x^2| dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \left| \int_{\Omega} |u|^{p-2} dx \right| \cdot \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^2 + a^2 u_x^2| dx dt \leq \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \cdot t C_1.$$

К первому сомножителю применим последовательно неравенство Фридрихса [5] и третье из (6), в результате получаем

$$\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \leq C_2 \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \|u_x\|_{2,\Omega}^{p-2} \leq C_2 \left(\frac{C_1}{a^2} \right)^{p-2}.$$

В итоге оказывается, что

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt \leq t C_1 C_2 \left(\frac{C_1}{a^2} \right)^{p-2} = \frac{C_1^{p-1} C_2}{a^{2(p-2)}} t.$$

Таким образом, от уравнения (6) можно перейти к неравенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 \leq p(p-1) \frac{C_1^{p-1} C_2}{a^{2(p-2)}} t + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |\varphi_1|^p dx \right)^2,$$

после очередного интегрирования приводящего к соотношению

$$\|u\|_{2,\Omega}^p \leq \frac{b}{2} \int_0^t (\|u\|_{2,\Omega}^p)^2 dt + K, \quad (7)$$

в котором при всех $t \in [0, T]$ в силу (2)

$$K \geq p(p-1) \frac{C_1^{p-1} C_2}{2a^{2(p-2)}} t^2 + \frac{b}{2} t \left(\int_{\Omega} |\varphi_1|^p dx \right)^2 + \int_{\Omega} |\varphi_1|^p dx.$$

Применяя к (7) нелинейный аналог неравенства Гронуолла [6, с. 22], видим, что

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leq C_3 = \frac{2K}{2 + bKT}. \quad (8)$$

Таким образом, теорема доказана.

Приближенное решение

Для нахождения приближенного решения задачи (1)–(3) проинтегрируем (1) по x в границах от 0 до x :

$$u_x(x, t) = \frac{1}{a^2} \int_0^x (u_{tt} + bu_t \|u\|_{p,\Omega}^p) dx + A(t).$$

Применяя к интегралу теорему о среднем значении, запишем последнее равенство в виде

$$u_x(x, t) = \frac{x}{la^2} \int_0^l (u_{tt} + bu_t \|u\|_{p,\Omega}^p) dx + A(t).$$

После повторного интегрирования по x получаем выражение

$$u(x, t) = \frac{x^2}{la^2} (\delta''(t) + b\delta'(t) \|u\|_{p,\Omega}^p) + xA(t) + B(t),$$

в котором положено

$$\int_0^l u dx = \int_{\Omega} u dx = \delta(t). \quad (9)$$

Удовлетворение условий (3) приводит к соотношению

$$u(x, t) = \frac{x(x-l)}{2la^2} (\delta''(t) + b\delta'(t) \|u\|_{p,\Omega}^p). \quad (10)$$

Применяя к нему (9), переходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\delta'' + b \|u\|_{p,\Omega}^p \delta' + \frac{12a^2}{l^2} \delta = 0. \quad (11)$$

Потребуем выполнения равенства в (8) и аппроксимируем (11) линейным уравнением

$$\delta'' + bC_3 \delta' + \frac{12a^2}{l^2} \delta = 0.$$

Необходимые для его интегрирования начальные условия получаются из (2):

$$\delta(0) = \int_{\Omega} u(x, 0) dx = \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx, \quad \delta'(0) = \int_{\Omega} u_t(x, 0) dx = \int_{\Omega} \varphi_2(x) dx.$$

Тогда, при $k_{1,2} = (-lbC_3 \pm \sqrt{(lbC_3)^2 - 48a^2}) / 2l$, $C_3 \geq 4\sqrt{3}a/lb$, находим

$$\delta(t) = \frac{1}{k_1 - k_2} \left(\left(\int_{\Omega} \varphi_2(x) dx - k_2 \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx \right) e^{k_1 t} + \left(k_1 \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx - \int_{\Omega} \varphi_2(x) dx \right) e^{k_2 t} \right).$$

В силу (10) и (11) приходим к формуле приближенного решения исходной задачи:

$$u(x, t) \approx \frac{2x}{l^2(k_1 - k_2)} \left(\left(\int_{\Omega} \varphi_2(x) dx - k_2 \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx \right) e^{k_1 t} + \left(k_1 \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx - \int_{\Omega} \varphi_2(x) dx \right) e^{k_2 t} \right). \quad (12)$$

Заключение

В работе предложен способ нахождения приближенного решения задачи (1)–(3), состоящий, во-первых, в переходе от исходного нагруженного уравнения (1) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (11), а во-вторых, в линеаризации (11) с помощью априорной оценки решения исходной задачи (8). В результате получена формула (12), которая будет, как ожидается, с достаточной точностью аппроксимировать искомое решение, что необходимо подтвердить оценкой его погрешности. Предполагается, что данный способ будет эффективным для нахождения приближенных решений уравнений в частных производных со степенной нелинейностью, аппроксимируемых ассоциированными с ними нагруженными уравнениями.

Литература

1. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М., Едиториал УРСС, 2010. – 586 с.
2. Нахушев, А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. – М.: Наука, 2012. – 232 с.
3. Бозиев, О.Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям / О.Л. Бозиев // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2014. – № 4(60). – С. 7–13.
4. Бозиев, О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью / О.Л. Бозиев // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». – 2015. – № 1. – с. 127–136.
5. Гаевский, Г. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Г. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 236 с.
6. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 151 с.

Поступила в редакцию 26 апреля 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160202

**AN APPROXIMATE SOLUTION OF LOADED HYPERBOLIC EQUATION
WITH HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS**

O.L. Boziev

*Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of KBSC
of the Russian Academy of Sciences, Nal'chik, Russian Federation
E-mail: boziev@yandex.ru*

The article proposes a method for solving hyperbolic equation with a spatial variable integral of the natural powers of the unknown function modulus, whereby it is loaded. The author considers an initial boundary value problem with homogeneous boundary conditions. Scalar products of the equation by various functionals and subsequent conversions make it possible to obtain a priori estimates of solutions of the problem in various spaces. By successive integration over the spatial variable the reduction to an ordinary differential equation associated with the initial one is produced. Its approximate solution is sought using a priori estimates that are obtained. Found function leads to the formula that expresses the approximate solution to the original problem through the right parts of the initial conditions.

Keywords: loaded partial differential equation; a priori estimate; approximate solutions.

References

1. Lions J.L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach*. [Some methods of nonlinear boundary value problems solving]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2010, 586 p. (in Russ.).

2. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie*. [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012, 232 p. (in Russ.).
3. Boziev O.L. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2014, no. 4, p. 7–13. (in Russ.).
4. Boziev O.L. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Prikladnaya matematika"*, 2015, no. 1, p. 127–136. (in Russ.).
5. Gaevskii G., Grioger K., Zaharias K. *Nelineynye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya*. [Nonlinear operator equations and operator differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1978, 236 p. (in Russ.).
6. Filatov A.N., Sharova L.V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy*. [Integral inequality and theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 151 p. (in Russ.).

Received April 26, 2015

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

О.С. Зикиров

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

E-mail: zikirov@yandex.com

Исследуется краевая задача для класса уравнений третьего порядка составного типа с эллиптическим оператором в главной части. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения для рассматриваемых задач. Доказательство основано на энергетических неравенствах и на теории интегральных уравнений Фредгольмовского типа.

Ключевые слова: краевые задачи; уравнения составного типа; оператор Лапласа; функция Грина; уравнения третьего порядка; интегралы энергии; задача Дирихле; интегральные уравнения.

1. Постановка задачи. В данной работе рассматривается задача типа Дирихле для линейного уравнения третьего порядка составного типа

$$Mu \equiv \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) + Lu = g(x, y), \quad (1)$$

где α, β – заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L – линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u.$$

Пусть Ω обозначает односвязную область плоскости (x, y) , ограниченную гладким жордановым контуром σ , который обладает такими свойствами: всякая прямая, параллельная характеристике $\beta x - \alpha y = 0$, пересекает его в двух точках, прямые $\beta x - \alpha y = c_1$ и $\beta x - \alpha y = c_2$ ($c_1 < c_2$) имеют с ним единственные общие точки (точки касания) M и N соответственно. Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 следующим образом: $\sigma_1 = \{(x, y) \in \sigma : \alpha x_n + \beta y_n > 0\}$, $\sigma_2 = \sigma \setminus \sigma_1$, где $x_n = \cos(n, x)$, $y_n = \cos(n, y)$ и n – внешняя нормаль к границе. Для уравнения (1) изучается следующая краевая задача типа Дирихле:

Задача $D_{\alpha\beta}$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению (1) и краевым условиям

$$u|_{\sigma} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma_2} = \varphi_2(x, y), \quad (2)$$

где $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ – заданные функции.

Можно показать, что в задаче $D_{\alpha\beta}$ случай $\alpha\beta < 0$ при помощи замены независимой переменной $t = 1 - \tau$ приводится к случаю $\alpha\beta > 0$. Поэтому для определенности положим $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения.

Пусть $C^{k,l}(\Omega)$ – класс функций $u(x, y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x, y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = 0, 1, \dots, k$, $n = 0, 1, \dots, l$; где $C^{k,0}(\Omega) = C^{0,k}(\Omega) = C^k(\Omega)$. Под классом $C^{(k,\lambda)}(\Omega)$ понимаются определенные в области Ω функции, у которых все частные производные до порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda, 0 < \lambda < 1$.

Через $C_{1/2}^{(0,h)}[a, b]$ обозначим множество функций $\varphi(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$ и таких, что $[(t-a)(b-t)]^{1/2} \varphi(t) \in C^{(0,h)}[a, b], 0 < h < 1$. Если на этом множестве функций ввести норму

$$\|\varphi(t)\|_{h,1/2} = \left\| \sqrt{(t-a)(b-t)} \varphi(t) \right\|_{C^h},$$

где $\|\cdot\|_{C^h}$ – норма в пространстве $C^{(0,h)}[a,b]$, то полученное нормированное пространство будет банаховым [1].

Определение 1. Под классическим решением задачи $D_{\alpha\beta}$ будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) в обычном смысле.

Задачу $D_{\alpha\beta}$ будем исследовать в пространстве $C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ и в этом случае будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) для любых $(x,y) \in \Omega$ удовлетворяют условиям

$$a(x,y), b(x,y), c(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}); d(x,y), e(x,y) \in C^0(\bar{\Omega}); f(x,y) \in C^0(\Omega);$$

кроме того выполняются неравенства

$$\frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial x^2} \leq c_1, \quad \frac{\partial^2 b(x,y)}{\partial x \partial y} \leq c_2, \quad \frac{\partial^2 c(x,y)}{\partial y^2} \leq c_3, \quad \frac{\partial d(x,y)}{\partial x} \leq c_4, \quad \frac{\partial e(x,y)}{\partial y} \leq c_5.$$

Условие 2. Для любых $(x,y) \in \Omega$ и $(\xi,\eta) \in \Omega$, верны неравенства

$$1) \quad a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2 \geq c_6(\xi^2 + \eta^2);$$

$$2) \quad a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - d_x - e_y + 2f \leq -c_7 < 0.$$

Условие 3. Заданные функции $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_1(x,y) \in C_{1/2}^{(1,\lambda)}(\bar{\sigma}), \quad \varphi_2(x,y) \in C_{1/2}^{(0,\lambda)}(\sigma_2) \quad \text{и} \quad g(x,y) \in C^{(1,\lambda)}(\bar{\Omega})$$

Здесь и всюду ниже через $c_j, (j=1,\dots,15)$ будем обозначать положительные постоянные, конкретные значения которых для наших исследований принципиального значения не имеют.

2. Единственность решения задачи $D_{\alpha\beta}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда классическое решение задачи $D_{\alpha\beta}$ единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют две функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, удовлетворяющие условиям задачи (1)–(2). Покажем, что $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Доказательство этого факта проведем на основании энергетических тождеств. Умножим уравнения (1) на $u(x,y)$ и проинтегрируем по частям в области Ω , имеем

$$\iint_{\Omega} u \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) dx dy + \iint_{\Omega} u L u dx dy = 0. \quad (3)$$

Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом

$$\begin{aligned} u \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) &= \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u u_{xx} + u u_{yy}) - \\ &- \frac{1}{2} \left[\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_x^2 - u_y^2) + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) (2u_x u_y) \right]; \\ u \left(a(x,y) u_{xx} + 2b(x,y) u_{xy} + c(x,y) u_{yy} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[a u u_x + b u u_y - \frac{1}{2} (a_x + b_y) u^2 \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[b u u_x + c u u_y - \frac{1}{2} (b_x + c_y) u^2 \right] &- (a u_x^2 + 2b u_x u_y + c u_y^2) + \frac{1}{2} (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy}) u^2; \\ u \left(d(x,y) u_x + e(x,y) u_y + f(x,y) u \right) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (d u)^2 + \frac{\partial}{\partial y} (e u)^2 \right] - \frac{1}{2} (d_x + e_y - 2f) u^2. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина к интегралу (3) и учитывая однородные граничные условия, получим

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma} \left[(\alpha x_n - \beta y_n) u_x^2 + 2(\alpha y_n + \beta x_n) u_x u_y + (\beta y_n - \alpha x_n) u_y^2 \right] ds +$$

$$+\iint_{\Omega} [a(x,y)u_x^2 + 2b(x,y)u_xu_y + c(x,y)u_y^2] dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - d_x - e_y + 2f)u^2 dx dy = 0 \quad (4)$$

Так как $u(x,y) = 0$ на границе области Ω , то $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ на σ , поэтому на границе σ области Ω выполняются равенства $u_x = u_n x_n$, $u_y = u_n y_n$. В силу равенств $x_n = y_s$, $y_n = -x_s$, учитывая однородные граничные условия из выражение (4) имеем

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma_1} u_n^2 (x_n^2 + y_n^2) (\alpha x_n + \beta y_n) ds + \iint_{\Omega} (a(x,y)u_x^2 + 2b(x,y)u_xu_y + c(x,y)u_y^2) dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - d_x - e_y + 2f)u^2 dx dy = 0.$$

Отсюда в силу условий теоремы 1 заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Теорема доказана.

3. Сведение задачи $D_{\alpha\beta}$ к интегральному уравнению. Пусть Ω – единичный круг с центром в начале координат. Рассмотрим модельное неоднородное уравнение

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) = F(x,y), \quad (5)$$

с однородными граничными условиями (2). Обозначим через $\omega(s)$ неизвестные значения нормальной производной от искомой функции $u(x,y)$ на σ_1 . Положим

$$\alpha u_x + \beta u_y = v(x,y), \quad (6)$$

тогда для функции $v(x,y)$ получим следующую задачу Дирихле:

$$v_{xx} + v_{yy} = F(x,y), \quad v(x,y)|_{\sigma} = \mu(s), \quad (7)$$

где $\mu(s) = \omega(s)(\alpha x_n + \beta y_n)$, если $s \in \sigma_1$, а $\mu(s) = 0$ если $s \in \sigma_2$.

Задача Дирихле (7) имеет единственное решение и оно представимо формулой

$$v(x,y) = \int_{\sigma} G_n(x,y;s) \mu(s) ds + \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta) F(\xi,\eta) d\xi d\eta, \quad (8)$$

здесь $G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \ln |(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2| + q(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Теперь в области Ω решаем задачу

$$\alpha u_x + \beta u_y = v(x,y), \quad u(x,y)|_{\sigma_2} = 0.$$

Ее решение можно записать в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{\beta} \int_{\Phi(\beta x - \alpha y)}^y v\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t\right) dt, \quad (9)$$

где

$$\sigma_2 : \Phi = \Phi(\beta x - \alpha y) = \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\alpha\beta - 2\alpha(\beta x - \alpha y) + \beta \sqrt{\alpha^2 - 4(\beta x - \alpha y)^2 + 4(\beta x - \alpha y)} \right].$$

Подставляя выражение (8) в (9) и меняя порядок интегрирования, получим

$$u(x,y) = \int_{\sigma} k(x,y;s) \mu(s) ds + \iint_{\Omega} K(x,y;\xi,\eta) F(\xi,\eta) d\xi d\eta, \quad (10)$$

здесь

$$k(x,y;s) = \frac{1}{\beta} \int_{\Phi(\beta x - \alpha y)}^y G_n\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t; s\right) dt, \quad (11)$$

$$K_0(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\beta} \int_{\Phi(\beta x - \alpha y)}^y G\left(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t; \xi, \eta\right) dt \quad (12)$$

Относительно функции (10) справедливо утверждение.

Математика

Лемма 1. Если $F(x, y) \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$ и $\mu(s) \in C_{1/2}^{(0,h)}(\sigma)$, то функция (10) и ее производные непрерывны в области Ω , удовлетворяют в классическом смысле уравнению (5) и условию $u(x, y) = 0$ для любой $(x, y) \in \sigma_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $k(x, y; s)$. Для вычисления интеграла (11) используем формулу.

$$\frac{\partial G(x, y; s)}{\partial n} = \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \eta'(s) - \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \xi'(s) + \frac{\partial q(x, y; s)}{\partial n}.$$

Непосредственно вычисляя значение последнего интеграла найдем

$$k(x, y; s) = \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} [\alpha \eta'(s) - \beta \xi'(s)] \ln |(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2| + k_0(x, y; s),$$

где

$$\begin{aligned} k_0(x, y; s) = & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [\beta \eta'(s) - \alpha \xi'(s)] \operatorname{arctg} \frac{2[\frac{\alpha}{\beta}(x - \xi) + (y - \eta)]}{(x - \xi) - \frac{\alpha}{\beta}(y - \eta)} - \\ & - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \eta'(s) - \beta \xi'(s)] \ln |x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}\Phi - \xi)^2 + (\Phi - \eta)^2| - \\ & - \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \eta'(s) - \beta \xi'(s)] \operatorname{arctg} \frac{2(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2})\Phi + 2(\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}y + \frac{\alpha}{\beta}\xi - \eta)}{(x - \xi) - \frac{\alpha}{\beta}(y - \eta)} + \\ & + \frac{1}{\beta} \int_{\Phi(\beta x - \alpha y)}^y \frac{\partial q}{\partial n}(x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}t, t, \xi, \eta) dt. \end{aligned}$$

Функция $k_0(x, y; s)$ при $x = \xi$, $y = \eta$ непрерывна и ограничена, а $\frac{\partial k_0(x, y; s)}{\partial x}$, $\frac{\partial k_0(x, y; s)}{\partial y}$ — непрерывна и ограничена при всех $x \neq \xi$, $y \neq \eta$, а при $x \rightarrow \xi$ и $y \rightarrow \eta$. Имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial k_0(x, y; s)}{\partial x} \right| \leq \frac{c_8}{r}, \quad \left| \frac{\partial k_0(x, y; s)}{\partial y} \right| \leq \frac{c_9}{r},$$

здесь $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Используя равенство

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln |(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2| + q(x, y; \xi, \eta),$$

аналогично интегрируются функции $K_0(x, y; \xi, \eta)$:

$$K_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{\beta^2}{2} \frac{\frac{\alpha}{\beta}(x - \xi) + (y - \eta)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \ln |(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2| + k_1(x, y; \xi, \eta),$$

где

$$\begin{aligned} k_1(x, y; \xi, \eta) = & \frac{\beta^2}{2} \frac{\frac{\alpha}{\beta}(x - \xi) + (y - \eta)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \operatorname{arctg} \frac{2[\frac{\alpha}{\beta}(x - \xi) + (y - \eta)]}{(x - \xi) - \frac{\alpha}{\beta}(y - \eta)} - \\ & - \frac{\beta^2}{2} \frac{\frac{\alpha}{\beta}(x - \xi) + (y - \eta)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \ln |x - \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{\alpha}{\beta}\Phi - \xi)^2 + (\Phi - \eta)^2| - \end{aligned}$$

$$-\frac{\beta^2(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}{2(\alpha^2+\beta^2)} \operatorname{arctg} \frac{2[(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})\Phi+\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}y-\eta]}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)} +$$

$$+y-\Phi(\beta x-\alpha y)+\frac{1}{\beta} \int_{\Phi(\beta x-\alpha y)}^y q(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta)dt,$$

и для функции $K_0(x, y; \xi, \eta)$ справедлива оценка

$$|K_0(x, y; \xi, \eta)| \leq c_{10} \left| \frac{\alpha}{\beta}(x-\xi) + (y-\eta) \right| \ln |(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2| + c_{11}.$$

Отсюда следует, что функции $K_0(x, y; \xi, \eta)$ непрерывны и ограничены при $x = \xi, y = \eta$, а их производные $K_{0x}(x, y; \xi, \eta), K_{0y}(x, y; \xi, \eta)$ непрерывны при всех $x \neq \xi, y \neq \eta$, а при $x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta$ имеют логарифмическую особенность. Это следует из равенства (12).

Поэтому из теории гармонических потенциалов и условий леммы 1 следует, что функции $u(x, y) \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$. Если продифференцировать (10) по x и по y то получим, что $u(x, y)$ удовлетворяют уравнению (5). Лемма доказана.

Будем искать решение изучаемой задачи $D_{\alpha\beta}$ в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} [\alpha\eta'(s) - \beta\xi'(s)] \ln |(x - \xi(s))^2 + (y - \eta(s))^2| + k_0(x, y; s) \right\} \mu(s) ds +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\alpha}{\beta}(x - \xi) + (y - \eta) \right] \ln |(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2| + k_1(x, y; \xi, \eta) \right\} F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (13)$$

предполагая, что функции $\mu(s)$ и $F(x, y)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Согласно лемме 1, функция (13) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме условий $u(x, y)|_{\sigma_1} = 0$.

В формулу (13) посредством функции $\mu(s)$ входит неизвестная пока функция $\omega(s)$; для ее определения необходимо перейти к пределу, устремив точки (x, y) к точке, лежащей на дуге σ_1 . Тогда для неизвестной функции $\omega(s)$ получим интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью в ядре

$$\frac{\alpha^2}{2\pi(\alpha^2 + \beta^2)} \int_{\sigma_1} \left\{ [\alpha\eta'(s) - \beta\xi'(s)] \ln |s_0 - s| + k_0(s_0, s) \right\} \omega_*(s) ds = \psi(s_0), \quad (14)$$

здесь $\omega_*(s) = [\alpha\eta'(s) - \beta\xi'(s)]\omega(s)$;

$$\psi(s_0) = \iint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\alpha}{\beta}(\xi(s_0) - \xi) + (\eta(s_0) - \eta) \right] \ln |(\xi(s_0) - \xi)^2 + (\eta(s_0) - \eta)^2| + k_1(\xi(s_0), \eta(s_0); \xi, \eta) \right\} F(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Таким образом, решение задачи $D_{\alpha\beta}$ для уравнения (5) с однородными граничными условиями эквивалентно решению интегрального уравнения в классе $C_{1/2}^{(0,\lambda)}(\sigma_1)$.

4. Разрешимость интегрального уравнения (14). В этом пункте рассмотрим вопрос о существовании решения интегрального уравнения (14). Перепишем интегральное уравнение (14), разбив ядро уравнения на регулярную и сингулярную части, в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \ln |s_0 - s| \omega_*(s) ds = \psi_1(s_0), \quad (15)$$

где l – длина дуги σ_1 ; $\psi_1(s_0) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} \psi(s_0) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\pi\alpha^2} \int_{\sigma_1} k_0(s_0, s) \omega_*(s) ds$. В силу свойств функ-

ции Грина и равенств (11), (12) легко убедиться, что функция $k_0(s_0, s)$ и ее первые производные являются непрерывными, а $\psi_1(s_0)$ – непрерывно дифференцируемая и $\psi'_1(s_0)$ удовлетворяет условию Гельдера. Для уравнения (15) справедлива следующая

Лемма 2. Если $\psi_1(s_0) \in C_{1/2}^{(1, \lambda)}[0, l]$, то единственное решение $\omega_*(s)$ интегрального уравнения (15) существует в классе $C_{1/2}^{(0, \lambda)}[0, l]$.

Доказательство. Дифференцируя (15), получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\omega_*(s) ds}{s - s_0} = \psi'_1(s_0), \quad (16)$$

общее решение которого имеет вид [2]

$$\omega_*(s_0) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{s_0(l-s_0)}} \int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0} \psi'_1(s) ds \pm \frac{C}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}, \quad (17)$$

здесь C – произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (16) имеет решение с точностью до произвольной постоянной и для выделения единственного решения надо знать значение интеграла от функции $\omega_*(s)$ на отрезке $[0, l]$. Произвольную постоянную C определим таким образом, чтобы функция (17) удовлетворяла условию $\int_0^l \omega_*(s) ds = 0$. Для этого проинтегрируем (17) на

отрезке $[0, l]$, получим

$$\int_0^l \omega_*(s_0) ds_0 = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^l \frac{ds_0}{\sqrt{s_0(l-s_0)}} \int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0} \psi'_1(s) ds \pm C \int_0^l \frac{ds_0}{\sqrt{s_0(l-s_0)}}.$$

Так как $\int_0^l [s_0(l-s_0)]^{-1/2} ds_0 = \pi$, то, изменив порядок интегрирования в интеграле, получим

$$\pi C = \frac{1}{\pi^2} \int_0^l \sqrt{s(l-s)} \omega_*(s) ds \int_0^l \frac{ds}{(s_0-s)\sqrt{s(l-s)}}.$$

Учитывая, что внутренний интеграл в правой части последнего равенства равен нулю, имеем $C = 0$. Таким образом, согласно условию леммы 2 получаем интегральное вида

$$\omega_{**}(s_0) + \int_0^l \frac{M(s, s_0)}{\sqrt{s(l-s)}} \omega_{**}(s) ds = g_2(s_0), \quad (18)$$

где $\omega_{**}(s) = \sqrt{s(l-s)} \omega_*(s)$;

$$M(s, s_0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^l \frac{\sqrt{\xi(l-\xi)}}{\xi-s_0} \frac{\partial R(\xi, s)}{\partial s} d\xi; \quad g_2(s_0) = -\frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi\alpha^2} \int_0^l \frac{\sqrt{s(l-s)}}{s-s_0} \psi'(s) ds.$$

Как показано в [2, 3], к интегральному уравнению (18) с ядром $\frac{M(s, s_0)}{\sqrt{s(l-s)}}$ применимы альтернативы Фредгольма о разрешимости. После определения функции $\omega_*(s_0)$ решение уравнения (5) удовлетворяющие однородным граничным условиям (2) имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} P(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (19)$$

где

$$P(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \int_{\Phi(\beta x - \alpha y)}^y \left[G_1\left(x - \frac{\alpha}{\beta} y + \frac{\alpha}{\beta} t, t; \xi, \eta\right) - S\left(x - \frac{\alpha}{\beta} y + \frac{\alpha}{\beta} t, t; \xi, \eta\right) \right] dt,$$

а $S(x, y; \xi, \eta)$ – вполне определенное ядро, зависящее от функции Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ и ее производных под интегралами; оно является непрерывной функцией вместе с производными любого порядка при $(x, y) \in \Omega$.

Видно, что функция (19) при любой $F(x, y) \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$, удовлетворяет уравнению (5) и однородным граничным условиям (2). Теперь подберем $F(x, y)$ так, чтобы функция (19) удовлетворяла уравнению (1). Так как функция $F(x, y) \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$, то производные $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ и $\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u), \frac{\partial}{\partial y}(\Delta u)$ существуют и являются непрерывными функциями в области Ω , а

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y).$$

Подставляя (19) в уравнение (1), получим интегральное уравнение

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} K(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + g(x, y), \quad (20)$$

здесь $K(x, y; \xi, \eta) = LP(x, y; \xi, \eta)$. Нетрудно показать, что функция $P(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет неравенствам

$$|P(x, y; \xi, \eta)| \leq c_{12} \ln |r|; \quad |P_{xx}(x, y; \xi, \eta)| \leq \frac{c_{13}}{|r|}.$$

Следовательно, ядро $K(x, y; \xi, \eta)$ не интегрируется с квадратом, но легко видеть [4], что итерированное ядро

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = \iint_{\Omega} K(x, y; s, t) K(s, t; \xi, \eta) ds dt$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (20) рассмотрим интегральное уравнение с итерированным ядром

$$F(x, y) = \iint_{\Omega} K_2(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta + g_1(x, y), \quad (21)$$

где $g_1(x, y) = g(x, y) + \iint_{\Omega} K(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta$. Так как $|K(x, y; \xi, \eta)| \leq \frac{c_{14}}{|r|}$, то легко заметить

[3], что $|K_2(x, y; \xi, \eta)| \leq c_{15} \ln r + c_{16}$. Следовательно, для уравнения (21) справедливы теоремы Фредгольма. Заметим (см. например [4]), что интегральное уравнение (21) и задача $D_{\alpha\beta}$ имеют единственное решение при условии

$$\iint_{\Omega} K_2^2(x, y; \xi, \eta) dx dy d\xi d\eta < 1.$$

Решая уравнения (21), находим $F(x, y) \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$ и тем самым - $u(x, y)$. Проведенные рассуждения доказывают существования классического решения задачи $D_{\alpha\beta}$. Легко проверить, что функция $u(x, y)$ из (19) при любой $g(x, y) \in C^{(1,h)}(\bar{\Omega})$ принадлежит классу $C^{(1,h)}(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$. Таким образом, резюмируя изложенное выше, приходим к следующей теореме:

Теорема 2. Пусть наряду с условиями теоремы 1 выполнено и условие 3. Тогда решение задачи $D_{\alpha\beta}$ существует. Это решение представимо в виде (9), где функции $\omega(s)$ и $F(x, y)$ уже известны.

Итак, существование решения задачи $D_{\alpha\beta}$ установлено. Заметим, что задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка изучались также в [5].

Литература

1. Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1966. – 204 с.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука. 1977. – 640 с.
3. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: «Фан», 1979. – 120 с.
5. Карачик, В.В. Задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 31–43.

Поступила в редакцию 27 февраля 2016 г.

DOI: 10.14529/mmph160203

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR COMPOSITE TYPE EQUATION

O.S. Zikirov

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: zikirov@yandex.com

The aim of this paper is to prove the existence and uniqueness of smooth solutions to the Dirichlet type problem for one class of third-order equations that do not belong to any of the classic types. One of the main classes of non-classical equations is third-order composite type equations, the operator of which is a composition of first-order hyperbolic operator and an elliptic operator in the main part. A number of boundary value problems for the model composite type equations with the Laplace operator were investigated by T.D. Dzhuraev. Many studies have proved the existence of solutions to boundary value problems upon fulfillment of conditions of the convexity of area boundary. The method of proof used in this paper is similar to the method used in the research paper of the author mentioned above. For the research of composite type linear equations a combination of the method of potentials (Green's function) and integral identities is applied. The research method is based on reducing the studied problem with the help of the Green's function to an integral equation, the proof of its solvability and thus - the proof of the solvability of original problem.

Upon fulfillment of certain conditions on given functions, a third-order equation reduces to a second-order equation of elliptic type with an unknown right-hand side and the boundary function. With the help of Green's functions for elliptic equations, the studied problem is reduced to a second-order equivalent integral equation, the solvability follows from Fredholm alternative and the theorem of uniqueness of the solution of the original problem.

Keywords: Boundary value problem; composite type equations; Laplace operator; Green's function; third-order equations; energy integrals; Dirichlet problem; integral equations.

References

1. Bitsadze A.V. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka* [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 204 p. (in Russ.).
2. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary value]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).
3. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).
4. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary value problems for the equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent, Fan Publ., 1979, 120 p. (in Russ.).
5. Karachik V.V. Cauchy and Goursat Problems for Differential Equation of Third Order. Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics", 2015, Vol. 7, no. 2, pp. 31–43. (in Russ.).

Received February 27, 2016

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б.Ю. Иргашев

Наманганский инженерно-педагогический институт, г. Наманган, Узбекистан

E-mail: bahrom_irgashev@inbox.ru

В последнее время всё больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнения математической физики. Связано это как с теоретическим интересом, так и практическим, например вырождающиеся уравнения третьего порядка встречаются в теории трансзвуковых течений.

Получены достаточные условия единственности и существования решения одной краевой задачи в прямоугольной области для вырождающегося уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Решение получено в виде бесконечного ряда по собственным функциям.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения; интегралы энергии; метод Фурье; функция Грина; функция Бесселя; неравенство Бесселя; разложение в ряд по собственным функциям.

Введение

Фундаментальные результаты для вырождающихся уравнений второго рода эллиптического типа были получены академиком М.В. Келдышем [1].

При изучении так называемого стационарного вязкого трансзвукового линейного уравнения (или ВТ-уравнение)

$$u_{xxx}(x, y) + u_{yy} + \frac{a}{y}u_y = f(x, y).$$

Для случая $a = 0$, в работе [2], методом построения функции Грина в прямоугольной области, решена краевая задача. Также в работах [3, 4] в явном виде построены функции Грина некоторых внешних краевых задач в случаях: $a = 0$ и $a = 1$. Случай произвольного a исследован в [5]. Для вырождающегося модельного уравнения высокого нечетного порядка, краевая задача в прямоугольной области рассмотрена в работе [6].

Статья содержит две части. Первая часть содержит постановку задачи и доказательство единственности решения. Во второй части строится решение в виде бесконечного ряда по собственным функциям и доказывается её равномерная сходимости и возможность почленного дифференцирования по переменным x до третьего и по переменной y до второго порядков.

Постановка и единственность решения задачи

Для уравнения

$$L[u] = u_{xxx} + a_1(x)u_x + a_0(x)u - y^m u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $0 \leq m < 1, a_1(x) \in C^1[0, 1], a_0(x) \in C[0, 1]$, рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ решение уравнения (1) из класса $C_{x,y}^{3,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \\ u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где

$$\varphi_i(y) \in C^4(0, 1], \quad \varphi_i(1) = \varphi_i'(1) = 0, \\ \varphi_i^{(j)}(y) = O\left(y^{\frac{7}{2}-m-j}\right) \text{ при } y \rightarrow +0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = \overline{0, 4}.$$

Теорема единственности. Если $\frac{1}{2}a_{1x}(x) - a_0(x) \leq 0$, то однородная краевая задача для уравнения (1) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – нетривиальное решение однородной задачи A . Рассмотрим тождество

$$uL[u] = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2)$$

Так как

$$uu_{xxx} = \left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 \right)_x, \quad u(a_1u_x + a_0u) = \left(\frac{1}{2}a_1u^2 \right)_x + \left(a_0 - \frac{1}{2}a_{1x} \right)u^2,$$

$$y^m uu_{yy} = \left(y^m uu_y - \frac{my^{m-1}u^2}{2} \right)_y - \frac{m(1-m)y^{m-2}u^2}{2} - y^m u_y^2$$

то, подставляя их в тождество (2), а затем, проинтегрировав по области Ω , получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(0, y) dy + \int_0^1 \int_0^1 u^2(x, y) \left(a_0(x) - \frac{1}{2}a_{1x}(x) \right) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{m(1-m)}{2} y^{m-2} u^2 + y^m u_y^2 \right) dx dy = 0,$$

отсюда получаем, что

$$u(x, y) \equiv 0.$$

Здесь учли, что из $u(x, y) \in C_{x,y}^{2,1}(\bar{\Omega})$ и $u(x, 0) = 0$ следует $u(x, y) = O(y)$, при $y \rightarrow +0$. Теорема доказана.

Построение решения поставленной задачи.

Будем искать решение методом разделения переменных:

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

тогда из уравнения (1) следует, что

$$\frac{X''' + a_1(x)X' + a_0(x)X}{X} = \frac{y^m Y''}{Y} = -\lambda, \quad \lambda > 0.$$

Учитывая граничные условия относительно переменной y , получим следующую краевую задачу на нахождения собственной функции и собственного значения:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda y^{-m} Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнению (3) удовлетворяют следующие функции [7]:

$$Y_1(y) = \sqrt{y} J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right), \quad Y_2(y) = \sqrt{y} J_{-\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right),$$

где $J_\alpha(\beta)$ – функция Бесселя первого рода. Так как при $0 \leq m < 1$ число $\frac{1}{2-m}$ не является целым, то функции $Y_1(y), Y_2(y)$ линейно независимы [8]. Поэтому общее решение уравнения (3) имеет вид

$$Y(y) = \sqrt{y} \left[C_1 J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) + C_2 J_{-\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) \right],$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Из представления функции Бесселя 1-го рода следует, что в окрестности $y = 0$ справедливы равенства

$$Y_1(y) = y^2 J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) = O(y), \quad Y_2(y) = y^2 J_{-\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) = O(1).$$

Поэтому для удовлетворения краевого условия $Y(0) = 0$ мы должны положить $C_2 = 0$, отсюда из условия $Y(1) = 0$, получим

$$Y(1) = J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} \right) = 0. \quad (4)$$

В силу $\frac{1}{2-m} > 0$ уравнение (4) имеет бесконечно много вещественных корней, причем все они простые [8]. Обозначим их через μ_n , где $n = 0, 1, 2, \dots$, причем $0 < \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$. Известно [9], что

$$\mu_n \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2-m} + \pi n, \quad n \in N.$$

Тогда $\mu_n = \frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-m}$, отсюда $\lambda_n = \left(\frac{2-m}{2} \mu_n \right)^2 = O(n^2)$, собственные функции имеют вид

$$Y_n(y) = \sqrt{y} J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right), \quad n \in N.$$

Если в качестве собственных функций взять

$$Y_k(y) = \frac{1}{\left\| \sqrt{y} J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) \right\|_{L_2}} \sqrt{y} J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right),$$

то система $\{Y_k\}_{k=0}^{k=+\infty}$ будет ортонормированной. Поэтому в дальнейшем так и будем считать. Собственные функции удовлетворяют также следующему интегральному уравнению:

$$Y_k(y) = \lambda_k \int_0^1 G(y, \xi) \xi^{-m} Y_k(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \xi(1-y), & 0 \leq \xi \leq y, \\ y(1-\xi), & y \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_k \int_0^1 G(y, \xi) \xi^{-m} Y_k(\xi) d\xi &= - \int_0^1 G(y, \xi) Y_k''(\xi) d\xi = -(1-y) \int_0^y \xi Y_k''(\xi) d\xi - y \int_0^y (1-\xi) Y_k''(\xi) d\xi = \\ &= (1-y) \left(-\xi Y_k'(\xi) \Big|_0^y + \int_0^y Y_k'(\xi) d\xi \right) - y \left((1-\xi) Y_k'(\xi) \Big|_y^1 - \int_y^1 Y_k'(\xi) d\xi \right) = \\ &= (1-y) (-y Y_k'(y) + Y_k(y)) - y (- (1-y) Y_k'(y) - Y_k(y)) = -y(1-y) Y_k'(y) + (1-y) Y_k(y) + \\ &\quad + y(1-y) Y_k'(y) + y Y_k(y) = Y_k(y) - y Y_k(y) + y Y_k(y) = Y_k(y). \end{aligned}$$

Чтобы показать разложимость граничных функций $\varphi_i(y), i = 1, 2, 3$ при некоторых условиях, по системе собственных функций $\{Y_k\}_{k=0}^{k=+\infty}$, воспользуемся теоремой Гильберта–Шмидта. Для этого предварительно превратим полученное интегральное уравнение в уравнение с симметричным

ядром. Это делается обычным способом, т.е. умножением обеих сторон уравнения (5) на $y^{-\frac{m}{2}}$. Тогда имеем

$$y^{-\frac{m}{2}} Y_k(y) = \lambda_k \int_0^1 y^{-\frac{m}{2}} G(y, \xi) \xi^{-\frac{m}{2}} Y_k(\xi) \xi^{-\frac{m}{2}} d\xi.$$

Введем обозначения

$$f_k(y) = y^{-\frac{m}{2}} Y_k(y), \quad F(y, \xi) = y^{-\frac{m}{2}} G(y, \xi) \xi^{-\frac{m}{2}} = \begin{cases} \xi^{1-\frac{m}{2}} \left(y^{-\frac{m}{2}} - y^{1-\frac{m}{2}} \right), & 0 \leq \xi \leq y, \\ y^{1-\frac{m}{2}} \left(\xi^{-\frac{m}{2}} - \xi^{1-\frac{m}{2}} \right), & y \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда получим интегральное уравнение с непрерывным, по обоим переменным, и симметричным ядром

$$f_k(y) = \lambda_k \int_0^1 F(y, \xi) f_k(\xi) d\xi.$$

Тогда функция $y^{-\frac{m}{2}} \varphi_i(y)$, где $\varphi_i(y), i=1,2,3$ граничные функции, выражается через ядро $F(y, \xi)$ следующим образом:

$$y^{-\frac{m}{2}} \varphi_i(y) = \int_0^1 F(y, \xi) \left(-\xi^{\frac{m}{2}} \varphi_i''(\xi) \right) d\xi,$$

в самом деле,

$$\begin{aligned} & -\int_0^1 F(y, \xi) \xi^{\frac{m}{2}} \varphi_i''(\xi) d\xi = \left(y^{1-\frac{m}{2}} - y^{-\frac{m}{2}} \right) \int_0^y \xi d\varphi_i'(\xi) - y^{1-\frac{m}{2}} \int_y^1 (1-\xi) d\varphi_i'(\xi) = \\ & = \left(y^{1-\frac{m}{2}} - y^{-\frac{m}{2}} \right) \left(y\varphi_i'(y) - \int_0^y \varphi_i'(\xi) d\xi \right) - y^{1-\frac{m}{2}} \left(-(1-y)\varphi_i'(y) + \int_y^1 \varphi_i'(\xi) d\xi \right) = \\ & = y^{2-\frac{m}{2}} \varphi_i'(y) - y^{1-\frac{m}{2}} \varphi_i'(y) - y^{1-\frac{m}{2}} \varphi_i(y) + y^{-\frac{m}{2}} \varphi_i(y) + y^{1-\frac{m}{2}} \varphi_i'(y) - y^{2-\frac{m}{2}} \varphi_i'(y) + y^{1-\frac{m}{2}} \varphi_i(y) = y^{-\frac{m}{2}} \varphi_i(y). \end{aligned}$$

Так как функции $y^{-\frac{m}{2}} \varphi_i(y)$, $\xi^{\frac{m}{2}} \varphi_i''(\xi)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$, то по теореме Гильберта-

Шмидта функция $y^{-\frac{m}{2}} \varphi_i(y)$ разлагается в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям

$y^{-\frac{m}{2}} Y_k(y)$ ядра $F(y, \xi)$, т.е.

$$y^{-\frac{m}{2}} \varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^{-\frac{m}{2}} Y_k(y),$$

где

$$c_k = \int_0^1 y^{-m} \varphi(y) Y_k(y) dy.$$

Разделив на $y^{-\frac{m}{2}}$, окончательно получим

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Y_k(y).$$

Относительно переменной x получим краевую задачу

$$\begin{cases} X_k''' + \nu_k^3 X_k = -(a_1(x) X_k' + a_0(x) X_k), \\ X_k(0) = \varphi_{1k}, X_k(1) = \varphi_{2k}, X_k'(1) = \varphi_{3k}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\varphi_{ik} = \int_0^1 \varphi_i(y) Y_k(y) y^{-m} dy, \quad i=1,2,3, \quad \nu_k^3 = \lambda_k, \quad \nu_k = O\left(k^{\frac{2}{3}}\right).$$

Обнулим краевые условия в задаче (6), для этого введем новую функцию $Z(x)$ по формуле:

$$Z(x) = X(x) - x(x-1)\varphi_{3k} - x(2-x)\varphi_{2k} - (x-1)^2 \varphi_{1k},$$

тогда получим краевую задачу в виде

$$\begin{cases} Z_k''' + \nu_k^3 Z_k = f(x) - (a_1(x) Z_k' + a_0(x) Z_k), \\ Z_k(0) = Z_k(1) = Z_k'(1) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) = & -(\nu_k^3 + a_0(x)) \left(x(x-1)\varphi_{3k} + x(2-x)\varphi_{2k} + (x-1)^2 \varphi_{1k} \right) - \\ & - a_1(x) \left((2x-1)\varphi_{3k} + (2-2x)\varphi_{2k} + (2x-2)\varphi_{1k} \right). \end{aligned}$$

Сведем задачу (7) к интегральному уравнению, которую в дальнейшем решим методом последовательных приближений. Функция Грина $G_k(x, \xi)$ задачи (7) имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} G_k(x, \xi) = & \frac{1}{\Delta} \left\{ 2e^{-\nu_k \left(\frac{3}{2} + x - \xi \right)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k + \frac{\pi}{6} \right) - 2e^{-\frac{\nu_k}{2}(2x+\xi)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k \xi + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \\ & - 2e^{-\nu_k \left(\frac{3}{2} - \xi - \frac{x}{2} \right)} \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k (1-x) + \frac{\pi}{6} \right] + 2e^{-\frac{\nu_k}{2}(\xi-x)} \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k (\xi-x) + \frac{\pi}{6} \right] + \\ & \left. + 4e^{-\frac{\nu_k}{2}(3+\xi-x)} \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k (1-\xi) \right] \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k x \right\}, \quad 0 \leq x \leq \xi, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_k(x, \xi) = & \frac{1}{\Delta} \left\{ -2e^{-\frac{\nu_k}{2}(2x+\xi)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k \xi + \frac{\pi}{6} \right) - 2e^{-\nu_k \left(\frac{3}{2} - \xi - \frac{x}{2} \right)} \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k (1-x) + \frac{\pi}{6} \right] + \right. \\ & \left. + e^{-\nu_k(x-\xi)} + 4e^{-\frac{\nu_k}{2}(3+\xi-x)} \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k (1-x) + \frac{\pi}{6} \right] \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k \xi + \frac{\pi}{6} \right) \right\}, \quad \xi \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Delta = 3\nu_k^2 \left(1 - 2e^{-\frac{3}{2}\nu_k} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \nu_k + \frac{\pi}{6} \right) \right). \quad (10)$$

Из представлений (8),(9) и (10) имеем

$$\left| G_k(x, \xi) \right| \leq \frac{M_0}{\nu_k^2}, \quad M_0 > 0 \text{ – некоторое число,}$$

а для производных справедливы соотношения

$$\left| \frac{\partial^s G_k(x, \xi)}{\partial t^s} \right| \leq M_s \nu_k^{s-2}, \quad s=1,2,3,4, \quad M_s > 0 \text{ – некоторые числа, } t=x, \text{ либо } t=\xi$$

Задача (6) эквивалентна интегральному уравнению вида:

$$Z_k(x) = \int_0^1 f(\xi) G_k(x, \xi) d\xi - \int_0^1 (a_1(\xi) Z_k'(\xi) + a_0(\xi) Z_k(\xi)) G_k(x, \xi) d\xi =$$

$$= F(x) + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (a_1(\xi) G_k(x, \xi)) - a_0(\xi) G_k(x, \xi) \right) Z_k(\xi) d\xi,$$

где

$$F(x) = \int_0^1 f(\xi) G_k(x, \xi) d\xi.$$

Будем решать полученное уравнение методом последовательных приближений

$$Z_k^0(x) = F(x), \quad Z_k^{n+1} = F(x) + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (a_1(\xi) G_k(x, \xi)) - a_0(\xi) G_k(x, \xi) \right) Z_k^n(\xi) d\xi,$$

Если учесть ограниченность функций $a_0(x), a_1(x), a_1'(x)$, оценки для функции Грина, то начиная с некоторого номера k , будем иметь

$$|Z_k^{n+1}| \leq K_1 |F(x)| \left(1 + \left| \frac{\partial G_k(x, \xi)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial G_k(x, \xi)}{\partial \xi} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial G_k(x, \xi)}{\partial \xi} \right|^n \right),$$

отсюда

$$|Z_k(x)| \leq K_1 |F(x)| \frac{1}{1 - \left| \frac{\partial G_k(x, \xi)}{\partial \xi} \right|} \leq M_0 |F(x)| \leq N_0 (|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + |\varphi_{3k}|),$$

где K_1, M_0, N_0 – некоторая положительная постоянная.

Аналогично можно показать выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned} |Z_k'(x)| &\leq M_1 \nu_k |F(x)|, \quad |Z_k''(x)| \leq M_2 \nu_k^2 |F(x)|, \\ |Z_k'''(x)| &\leq M_3 \nu_k^3 |F(x)| = M_3 \lambda_k |F(x)| \leq N_3 \lambda_k (|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + |\varphi_{3k}|), \end{aligned}$$

где M_1, M_2, M_3, N_3 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от номера k .

Формальным решением поставленной задачи будет ряд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) X_k(x). \tag{11}$$

Чтобы этот ряд был классическим решением поставленной задачи А, нужно показать возможность почленного дифференцирования ряда (11) по переменной x до третьего и по переменной y до второго порядков (именно эти порядки входят в уравнение). Из вышеуказанного имеем

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |Y_k(y)| (|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + |\varphi_{3k}|),$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Покажем сходимость рядов участвующих в правой части этого неравенства. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Y_k(y)| |\varphi_{ik}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|Y_k(y)|}{\lambda_k} \lambda_k |\varphi_{ik}| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|Y_k(y)|}{\lambda_k} \right)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k |\varphi_{ik}|)^2}, \quad i=1,2,3. \tag{12}$$

Покажем теперь сходимость каждого ряда в неравенстве (12). Имеем

$$\varphi_{ik} = \int_0^1 y^{-m} \varphi_i(y) Y_k(y) dy = -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_i(y) Y_k''(y) dy, \quad k \in N, \quad i=1,2,3,$$

отсюда

$$\lambda_k \varphi_{ik} = \int_0^1 (-\varphi_i''(y) y^m) y^{-m} Y_k(y) dy, \quad k \in N, \quad i=1,2,3,$$

применим здесь неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\varphi_{ik} \lambda_k)^2 \leq \|\varphi_i''(y) y^m\|^2 = \int_0^1 (\varphi_i''(y))^2 y^m dy, \quad i=1,2,3, \quad (13)$$

интеграл в неравенстве (13) существует и, значит, ряд сходится.

Теперь вернемся к задаче (3), которая эквивалентна интегральному уравнению

$$Y_k(y) = \lambda_k \int_0^1 G(y, \xi) \xi^{-m} Y_k(\xi) d\xi,$$

отсюда

$$\frac{Y_k(y)}{\lambda_k} = \int_0^1 G(y, \xi) \xi^{-m} Y_k(\xi) d\xi,$$

по неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k} \right)^2 \leq \int_0^1 G^2(y, \xi) \xi^{-m} d\xi.$$

оценим последний интеграл:

$$\int_0^1 G^2(y, \xi) \xi^{-m} d\xi = \int_0^y \xi^{2-m} (1-y)^2 d\xi + \int_y^1 y^2 (1-\xi)^2 \xi^{-m} d\xi \leq \frac{1}{3-m} + 2 \left(\frac{1}{1-m} + \frac{2}{2-m} + \frac{1}{3-m} \right) = N.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k} \right)^2$ сходится и равномерно ограничен. Покажем теперь равномерную сходимость ряда (11)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+p} Y_k(y) X_k(x) \right| &\leq M \sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{Y_k(y)}{\lambda_k} \right| \lambda_k (|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + |\varphi_{3k}|) \leq \\ &\leq M \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{|Y_k(y)|}{\lambda_k} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} (\lambda_k |\varphi_{1k}|)^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} (\lambda_k |\varphi_{2k}|)^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} (\lambda_k |\varphi_{3k}|)^2} \right) \leq \\ &\leq MN \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} (\lambda_k |\varphi_{1k}|)^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} (\lambda_k |\varphi_{2k}|)^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} (\lambda_k |\varphi_{3k}|)^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (13) имеем, что для любого $p > 0$ суммы, стоящие в правой части, стремятся к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Принимая во внимание, что правая часть не зависит от переменных (x, y) , мы можем утверждать, что ряд (11) сходится равномерно в квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

Аналогично доказывается возможность почленного дифференцирования бесконечного ряда (11) по переменным x до третьего и по y до второго порядка (т.к. в исходное уравнение входят частные производные этих порядков).

Литература

1. Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.
2. Апаков, Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / Ю.П. Апаков // Украинский матем. журнал. – 2012. – Т. 64, № 1. – С. 3–13.
3. Диесперов, В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения / В.Н. Диесперов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1972. – Т. 12, № 5. – С. 1265–1269.
4. Диесперов В.Н. Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения / В.Н. Диесперов, Л.А. Ломакин // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 5. – С. 1244–1260.
5. Засорин, Ю.В. Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений / Ю.В. Засорин // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 287, № 6. – С. 1347–1351.

6. Апаков, Ю.П. Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка / Ю.П. Апаков, Б.Ю. Иргашев // Укр.мат.журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1318–1331.
7. Градштейн, Н.С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений / Н.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
9. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Поступила в редакцию 22 декабря 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160204

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DEGENERATE EQUATION

B. Yu. Irgashev

Namangan Engineering Pedagogical Institute, Namangan, Uzbekistan

E-mail: bahrom_irgashev@inbox.ru

The article deals with a boundary value problem in a rectangular area for a third-order degenerate equation with minor terms.

The study of such equations is caused by both a theoretical and applied interest (known as VT (viscous transonic) – the equation can be found in gas dynamics).

Imposing some restrictions on the coefficients of lower derivatives and using the method of energy integrals, the unique solvability of the problem is demonstrated. The solution of the problem is sought by separation of variables (Fourier method), thus two one-dimensional boundary value problems for ordinary differential equations are obtained.

According to the variable y we have the problem on eigenvalues and eigenfunctions for a second-order degenerate equation. The eigenvalues and eigenfunctions are found. Eigenfunctions are the first-order Bessel functions. In order to obtain some necessary estimates the spectral problem reduces to an integral equation by constructing the Green's function. Hereafter, Bessel inequality is used. The possibility of expansion of boundary functions in the system of eigenfunctions is also shown.

In order to obtain the necessary a priori estimates for the solution of one-dimensional boundary value problem with respect to the variable x and its derivatives, the problem reduces to a second-order Fredholm integral equation, with the help of Green's function. The estimates of Green's function and its derivatives are obtained. Fredholm equation is solved by the method of successive approximations, and the necessary estimates for this solution and its derivatives are obtained.

The formal solution of the boundary value problem is obtained in the form of an infinite series in eigenfunctions. In order to prove the uniform convergence of the last series composed of the partial derivatives, first using the Cauchy–Bunyakovsky inequality, the series consisting of two variables is decomposed into two one-dimensional series, and then all of the obtained estimates mentioned above and estimates for the Fourier coefficients are used.

Keywords: degenerate equations; energy integrals; Fourier method; Green's function; Bessel function; Bessel's inequality; eigenfunction expansion.

References

1. Keldysh M.V. *Dokl. AN SSSR*, 1951, Vol. 77, no. 2, pp. 181–183. (in Russ.).
2. Apakov Yu. P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2012, Vol. 64, no. 1, pp. 3–13. (in Russ.). DOI: 10.1007/s11253-012-0625-1
3. Diesperov V.N. On Green's function of the linearized viscous transonic equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, Vol. 12, no. 5, pp. 225–241. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90013-4

4. Diesperov V.N., Lomakin L.A. A boundary value problem for a linearized axisymmetric viscous transonic equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, Vol. 14, Issue 5, pp. 148–163. DOI: 10.1016/0041-5553(74)90202-X

5. Zazorin Yu.V. *Doklady AN SSSR*, 1984, Vol. 287, no. 6, pp. 1347–1351. (in Russ).

6. Apakov Yu.P., Irgashev B.Yu. Boundary-Value Problem for a Degenerate High-Odd-Order Equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2015, Vol. 66, Issue 10, pp. 1475–1490. DOI: 10.1007/s11253-015-1039-7

7. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Table of integrals, sums, series and compositions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962, 1100 p. (in Russ.).

8. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 296 pp. (in Russ.). [Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions. Vol. 2*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1953. (in Eng.)]

9. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 512 pp. (in Russ.).

Received December 22, 2015

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЯДОВ

С.И. Кадченко, О.А. Торшина

Магнитогорский государственный технический университет, г. Магнитогорск,
Российская Федерация
E-mail: kadchenko@masu.ru

Изучение спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов является одной из важных задач спектральной теории. Для решения этой задачи нужно определить асимптотику спектра. Но при изучении асимптотики улучшение остаточного члена зачастую оказывается невозможным, более того, невозможно даже выделение из него второго члена асимптотики. Как следствие возникает необходимость перейти к исследованию более глубокой структуры спектра. Стандартным средством исследования стало получение формул регуляризованных следов. В работе с помощью теории регуляризованных рядов осуществляется вычисление четырех поправок теории возмущений с последующим выходом на собственные числа эллиптических дифференциальных операторов с потенциалом на проективной плоскости. Проективная плоскость при этом отождествляется со сферой за счет сопоставления противоположных точек и выкалывания полюсов.

Ключевые слова: дифференциальные операторы; спектральная теория; регуляризованные следы; теория возмущений; собственные числа.

Рассмотрим на проективной плоскости F дифференциальный оператор

$$T = -\Delta = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

действующий в гильбертовом пространстве H . Собственные числа оператора Лапласа–Бельтрами образуют систему ортонормированных сферических функций. Обозначим $\lambda_n = n(n+1)$ ($n = \overline{0, \infty}$) – собственные числа, $\nu_n = 2n+1$ – кратность собственного числа λ_n оператора T ; $\nu_{n,i}$ ($i = \overline{0, 2n}$) – собственные функции, $l_n = \{\lambda \mid \lambda = \lambda_n + n + 1 + ip, -\infty < p < +\infty\}$ – прямые на комплексной плоскости, $\mu_{n,i}$ – собственные числа оператора $T + P$

$$|\mu_{n,i} - n(n+1)| \leq \text{const}.$$

Определим собственные числа дифференциального оператора с помощью теории регуляризованных рядов. Рассмотрим четыре поправки теории возмущений.

Первая поправка теории возмущений [1]

$$\sum_{i=1}^{2n} (Pv_{ni}, v_{ni}) = \frac{2m+1}{4\pi} \iint_F p(\theta, \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta = 0.$$

Вторая поправка теории возмущений $\alpha_n(p)$ к сумме $\sum_{i=0}^{2n} \mu_{n,i}$ представляется формулой [3]:

$$\alpha_n(p) = -\frac{1}{2\pi i} Sp \left\{ \left[\int_{l_n} - \int_{l_{n-1}} \right] \lambda \left[(T - \lambda E)^{-1} P^2 \right] (T - \lambda E)^{-1} d\lambda \right\} = \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,n}}{|\lambda_k - \lambda_n|},$$

$$\alpha_{n,k} = \sum_{i=0}^{2k} \sum_{j=0}^{2n} (Pv_{ki}, v'_{nj}) (Pv_{nj}, v'_{ki}).$$

Вычислим вторую поправку теории возмущений. Для этого введем так называемое Λ преобразование $f(\alpha)$ функции $p(\theta, \varphi)$ [2]. Обозначим $T(\alpha)$ – пересечение конуса со сферой, $\phi(\theta, \theta', \alpha)$ – якобиан перехода $\theta, \varphi, \theta', \varphi'$ к координатам $\theta, \varphi, \theta', \alpha$.

$$\phi(\theta, \theta', \alpha) = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))}}$$

При этом знак «плюс» берется, если $\varphi' < \varphi$, знак «минус», если $\varphi' > \varphi$. Тогда [4]

$$f(\alpha) = \iint_F p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \iint_{T(\alpha)} p(\theta', \varphi') \sin \theta' \frac{\phi(\theta, \theta', \alpha) d\theta'}{\sin \alpha}.$$

$$\alpha_{k,n} = \frac{(2k+1)(2n+1)}{4\pi^2} \int_0^\pi f(\alpha) \sum_{i=1}^2 L_i(P_{2k}(\cos \alpha)) \sum_{i=1}^2 L_i(P_{2n}(\cos \alpha)) \sin \alpha d\alpha.$$

Очевидно, что функция $f(\alpha)$ нечетная, то есть $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Докажем, что $f(0) = f(\pi) = 0$. Для этого введем функцию [6]

$$\zeta(\alpha) = \begin{cases} (\sin \alpha)^{-2}, & 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ -(\sin \alpha)^{-2}, & \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

Если $f(0) = f(\pi) \neq 0$, то $\int_0^\pi f(\alpha) \zeta(\alpha) \sin \alpha d\alpha = \infty$. С другой стороны [5]

$$\left| \int_0^\pi f(\alpha) \zeta(\alpha) \sin \alpha d\alpha \right| \leq \left| \iiint_F \iiint_F \frac{p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \sin \theta \sin \theta' d\theta d\theta' d\varphi d\varphi'}{\sin \alpha} \right| \leq$$

$$\leq \text{const} \iiint_F \iiint_F \frac{d\theta d\theta' d\varphi d\varphi'}{\sin \alpha} \leq \text{const} \iiint_F \iiint_F \frac{\phi(\theta, \theta', \alpha) d\theta d\theta' d\varphi d\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \text{const} \iiint_F \iiint_F \frac{d\theta d\theta' d\varphi d\alpha}{\sqrt{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))}} < \infty.$$

В результате, $f(0) = f(\pi) = 0$. Докажем, что функция $f(\alpha)$ почти всюду дважды дифференцируема и $f''(\alpha) \in L_1[0, \pi]$. Запишем равенство [8]

$$\int_0^\pi f(\alpha) \zeta(\alpha) d\alpha = \pm \iiint_F \iiint_F p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \zeta(\alpha) \sin \theta \sin \theta' \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))}} d\theta d\varphi d\theta' d\alpha.$$

Далее имеем [7]

$$\int_0^\pi f(\alpha) \zeta'(\alpha) d\alpha = \pm \iiint_F \iiint_F p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \zeta'(\alpha) \sin \theta \sin \theta' \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))}} d\theta d\varphi d\theta' d\alpha =$$

$$= \pm \iiint_F \iiint_F \frac{\partial}{\partial \varphi'} \{ p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \} \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha} \zeta(\alpha) \sin \theta \sin \theta' \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{\sqrt{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))}} d\theta d\varphi d\theta' d\alpha = \\ & = \iiint_F p(\theta, \varphi) p'_{\varphi'}(\theta', \varphi') \zeta(\alpha) \sin \theta \sin \theta' \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))}} d\theta d\varphi d\theta' d\alpha \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \iiint_F p(\theta, \varphi) p'(\theta', \varphi') \frac{\sin \alpha \zeta(\alpha)}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))^{3/2}} \frac{1}{(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))^{1/2}} \sin \theta \sin \theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \iiint_F p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \frac{\sin \alpha \zeta(\alpha)}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))^{1/2}} \frac{1}{(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))^{3/2}} \sin \theta \sin \theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha \end{aligned}$$

Произведем замены: в первом интеграле $\theta - \theta' = \alpha \operatorname{ch} \phi$, $\theta + \theta' = \alpha \operatorname{ch} \phi'$, а во втором $\theta - \theta' = \alpha \operatorname{ch} \phi$, $\theta + \theta' = \alpha \operatorname{sh} \phi \operatorname{ch} \phi'$, в третьем интеграле $\theta - \theta' = \alpha \operatorname{ch} \phi$, $\theta + \theta' = \alpha \operatorname{sh} \phi \operatorname{ch} \phi'$. В результате по формуле Фубини получим $f'(\alpha) \in L_1[0, \pi]$, где производная взята в смысле С. Л. Соболева [9].

Далее

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi f(\alpha) \zeta''(\alpha) d\alpha = \iiint_F p(\theta, \varphi) p'_{\varphi'}(\theta', \varphi') \times \\ & \times \frac{\sin \alpha}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))} \zeta'(\alpha) \zeta(\alpha) \sin \theta \sin \theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha + \\ & \pm \frac{1}{2} \iiint_F p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \frac{\sin \alpha \zeta'(\alpha) \zeta(\alpha)}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))^{3/2}} \frac{1}{(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))^{1/2}} \sin \theta \sin \theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \iiint_F p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') \frac{\sin \alpha \zeta'(\alpha) \zeta(\alpha)}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))^{1/2}} \frac{1}{(\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))^{3/2}} \sin \theta \sin \theta' d\theta d\varphi d\theta' d\alpha. \end{aligned}$$

По аналогии в формуле для $f''(\alpha)$ получим

$$\frac{\cos \alpha}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))^{1/2} (\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))^{3/2}}, \frac{\sin^2 \alpha}{(-\cos \alpha + \cos(\theta - \theta'))^{1/2} (\cos \alpha - \cos(\theta + \theta'))^{5/2}}.$$

Сделаем замены $\theta + \theta' = \alpha \operatorname{ch} \phi$, $\theta - \theta' = \alpha^4 \operatorname{sh} \phi \operatorname{ch} \phi'$, $-\theta + \theta' = 2\alpha \operatorname{ch} \phi$, $\theta - \theta' = \alpha^3 \operatorname{sh}^3 \phi \operatorname{ch} \phi'$. Воспользовавшись теоремой Фубини, получим, что $f''(\alpha) \in L_1[0, \pi]$ и существует почти всюду [11].

Вычислим [10]

$$\begin{aligned} L_1(P_{2n}(\cos \alpha)) + L_2(P_{2n}(\cos \alpha)) &= \sum_{m=0}^{2n} \left(\left| \sin \frac{\pi m}{2} \right| + \left| \cos \frac{\pi m}{2} \right| \right) \times \\ & \times \prod_{k=0, k \neq m}^{2n} \frac{-\frac{d^2}{d\varphi^2} - k^2}{m^2 - k^2} P_{2n}(\cos \alpha) = \sum_{m=1}^{2n} \prod_{k=0, k \neq m}^{2n} \frac{-\frac{d^2}{d\varphi^2} - k^2}{m^2 - k^2} P_k(\cos \alpha) = \\ & = \sum_{m=1}^{2n} \prod_{k=0, k \neq m}^{2n} \frac{-\frac{d^2}{d\varphi^2} - k^2}{m^2 - k^2} 2 \sum_{s=0}^{2n} \frac{(n-s)!}{\delta_s(n+s)!} P_{2n}^{(s)}(\cos \theta') P_{2n}^{(s)}(\cos \theta) \cos s(\varphi - \varphi') = \end{aligned}$$

$$= 2 \sum_{s=0}^{2n} \frac{(n-s)!}{\delta_s (n+s)!} P_{2n}^{(s)}(\cos \theta') P_{2n}^{(s)}(\cos \theta) \cos s(\varphi - \varphi') \sum_{m=1}^{2n} \prod_{k=0, k \neq m}^{2n} \frac{s^2 - k^2}{m^2 - k^2} = P_{2n}(\cos \alpha).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n} &= \frac{(2k+1)(2n+1)}{4\pi^2} \int_0^\pi f(\alpha) \sum_{i=1}^2 L_i(P_{2k}(\cos \alpha)) \sum_{i=1}^2 L_i(P_{2n}(\cos \alpha)) \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{(2k+1)(2n+1)}{4\pi^2} \int_0^\pi f(\alpha) P_{2k}(\cos \alpha) P_{2n}(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

В результате вторая поправка теории возмущений

$$\begin{aligned} \alpha_n(p) &= -\frac{(2n+1)}{4\pi^2} \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{2k+1}{|\lambda_k - \lambda_n|} \int_0^\pi f(\alpha) P_{2k}(\cos \alpha) P_{2n}(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = \\ &= -\frac{(2n+1)}{4\pi^2} \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{2k+1}{|\lambda_k - \lambda_n|} \left\{ \int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \right\} f(\alpha) P_{2k}(\cos \alpha) P_{2n}(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha + \\ &\quad + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) P_{2k}(\cos \alpha) P_{2n}(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha \Big\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись [5]

$$\begin{aligned} P_{2k}(\cos \alpha) &= \frac{\cos\{(2k+1/2)\alpha - \pi/4\}}{(\sin \alpha)^{1/2}} \left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{2k^{1/2}} + \frac{O(1)}{2k^{3/2}} \right] + \\ &+ \frac{\sin\{(2k+3/2)\alpha - \pi/4\}}{(\sin \alpha)^{3/2}} \frac{O(1)}{2k^{3/2}} + \frac{O(1)}{(\sin \alpha)^{5/2} 2k^{5/2}}. \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} \alpha_n(p) &= -\frac{2m+1}{4\pi^2} \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{2k+1}{|\lambda_k - \lambda_n|} \left\{ \int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \right\} f(\alpha) \sin \alpha P_{2k}(\cos \alpha) P_{2n}(\cos \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \sin(\alpha) \left\langle \frac{\cos\{(2k+1)\alpha - \pi/4\}}{(\sin \alpha)^{1/2}} \left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2/k)^{1/2}} + \frac{O(1)}{(2/k)^{3/2}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin\{(2k+3/2)\alpha - \pi/4\}}{(\sin \alpha)^{3/2}} \frac{O(1)}{(2k)^{3/2}} + \frac{O(1)}{(\sin \alpha)^{5/2} (2k)^{5/2}} \right\rangle \left\langle \frac{\cos\{(2k+1/2)\alpha - \pi/4\}}{(\sin \alpha)^{1/2}} \left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2/k)^{1/2}} + \frac{O(1)}{(2/k)^{3/2}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin\{(2k+3/2)\alpha - \pi/4\}}{(\sin \alpha)^{3/2}} \frac{O(1)}{(2k)^{3/2}} + \frac{O(1)}{(\sin \alpha)^{5/2} (2k)^{5/2}} \right\rangle d\alpha \Big\}, \end{aligned}$$

где ε – положительное число

$$f(\alpha) = \iint_F p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \left[\iint_F p(\theta', \varphi') \sin \theta' \frac{\phi(\theta, \theta', \alpha) d\theta'}{\sin \alpha} \right].$$

С учетом асимптотических формул [4] получим

$$\begin{aligned} \alpha_n(p) &= O(\varepsilon^2 \ln n) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^2}\right) + \\ &+ O\left(\frac{\varepsilon}{n^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^2}\right) - \frac{1}{4\pi^2 n} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^2}\right) + \\ &+ O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\ln \varepsilon \ln n}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^3 \varepsilon}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{n^3 \varepsilon^3}\right). \end{aligned}$$

Выбирая в качестве $\varepsilon = \frac{1}{n^{3/4}}$, найдем

$$\alpha_n(p) = \frac{1}{4\pi^2 n} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) d\alpha + O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Учитывая, что $\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) d\alpha = 0$, получим

$$\alpha_n(p) = O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Вычислим третью поправку теории возмущений

$$\begin{aligned} \beta_n(p) &= \frac{1}{6\pi i} \operatorname{Sp} \left[\int_{l'_n} - \int_{l'_{n-1}} \right] \left[P(T - \lambda E)^{-1} \right]^3 d\lambda = \frac{1}{6\pi i} \operatorname{Sp} \left[\int_{l'_n} - \int_{l'_{n-1}} \right] \sum \frac{(2n+1)(2k+1)(2l+1)}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_k - \lambda)(\lambda_l - \lambda)} d\lambda \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{4\pi} \right)^3 \iiint_{F} \iiint_{F} \iiint_{F} p(\theta, \varphi) p(\theta', \varphi') p(\theta'', \varphi'') P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \beta) P_n(\cos \gamma) \times \\ &\quad \times \sin \theta \sin \theta' \sin \theta'' d\varphi d\varphi' d\varphi'' d\theta' d\theta'', \quad \cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \\ &\quad \cos \beta = \cos \theta' \cos \theta'' + \sin \theta' \sin \theta'' \cos(\varphi' - \varphi''), \quad \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta'' + \sin \theta \sin \theta'' \cos(\varphi - \varphi''). \end{aligned}$$

Если в шестикратном интеграле сделать замену $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, то

$$P_n(\cos(\pi - \alpha)) = P_n(-\cos \alpha) = (-1)^n P_n(\cos \alpha), \quad P_l(\cos(\pi - \gamma)) = P_l(-\cos \gamma) = (-1)^l P_l(\cos \gamma).$$

В результате

$$\beta_n(p) = 0.$$

Для оценки четвертой поправки докажем теорему.

Теорема 1. Для оператора Лапласа–Бельтрами с дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом на $l_n = \{\lambda \mid \lambda = \lambda_n + n + 1 + ip, \quad -\infty < p < \infty\}$ справедливо равенство

$$\|(T - \lambda E)^{-1}\|_2^2 \leq \frac{O(1)}{|e| + n},$$

где $\lambda \in l_n$ и $e = \operatorname{Im}(\lambda)$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{(\lambda_k - \lambda_n - n - 1)^2 + e^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{(\lambda_k - \lambda_n - n - 1)^2 + e^2} + \frac{v_k}{(n+1)^2 + e^2} + \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{(\lambda_k - \lambda_n - n - 1)^2 + e^2} = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых в отдельности

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{(\lambda_k - \lambda_n - n - 1)^2 + e^2} = \\ &= \operatorname{const} \int_0^{n-1} \frac{(2k+1)dk}{(k(k+1) - n(n+1) - n - 1)^2 + e^2} = \\ &= \operatorname{const} \int_0^{n-1} \frac{(2k+1)dk}{((n+1)^2 - k(k+1))^2 + e^2} = \end{aligned}$$

$$= \text{const} \int_0^{n(n-1)} \frac{dm}{((n+1)^2 - m)^2 + e^2} \leq \frac{O(1)}{|e| + n}.$$

Оценим

$$A_2 = \frac{v_k}{(n+1)^2 + e^2} = \frac{2n+1}{(n+1)^2 + e^2} \leq \frac{O(1)n}{(n+|e|)^2} = \frac{O(1)}{|e| + n}.$$

Здесь была использована эквивалентность норм $|a| + |b|$ и $\sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

Далее

$$A_3 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{(\lambda_k - \lambda_n - n - 1)^2 + e^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2k+1}{[(n+1)^2 - k(k+1)]^2 + e^2}.$$

Оценивая A_3 аналогично A_1 , получим

$$A_3 \leq \frac{O(1)}{|e| + n}.$$

Теорема доказана.

Учитывая результаты теоремы 1, рассмотрим четвертую поправку теории возмущений.

$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \text{Sp} \left[\int_{l_n} \int_{l_{n-1}} \right] (P(T - \lambda E)^{-1})^4 d\lambda \right| \leq$$

$$\leq O(1) \int_{-\infty}^{\infty} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_2^2 \|(T - \lambda E)^{-1}\|^2 d\lambda \leq O(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(|\xi| + n)^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 2. Пусть p – потенциал, удовлетворяющий условию Липшица, тогда для собственных чисел оператора $T + P$ верна оценка

$$\sum_{i=0}^{2n} \mu_{n,i} - n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4\pi^2 n} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\alpha) \text{ctg} \alpha (\pi - \alpha) d\alpha = O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Интерес к подобному рода задачам все время возрастает в связи с широкой областью их применения [12–14].

Литература

1. Дубровский, В.В. Проблема решения задач на собственные значения для дифференциальных операторов со сложным вхождением спектрального параметра / В.В. Дубровский, О.А. Торшина // Новые математические методы. Электромагнитные волны и электронные системы. – 2002. – Т. 7, по. 9. – С. 4–10.
2. Дубровский, В.В. Формула первого регуляризованного следа для дифференциального оператора Лапласа–Бельтрами / В.В. Дубровский, О.А. Торшина // Дифференциальные уравнения и их приложения. – 2002. – № 1. – С. 9–19.
3. Торшина, О.А. Алгоритм вычисления регуляризованного следа оператора Лапласа – Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник МаГУ. Математика. – 2003. – Вып. 4. – С. 183–215.
4. Торшина, О.А. Следы дискретных операторов с частными производными / О.А. Торшина // Альманах современной науки и образования. Научно-теоретический тематический журнал. – 2012. – № 4(59). – С. 220–222.
5. Торшина, О.А. Формула первого регуляризованного следа Лапласа–Бохнера с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Воронежская зимняя математическая школа. – 2004. – С. 104–105.
6. Торшина, О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с негладким потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник Самарского государственного технического университета. Математика. – 2006. – С. 32–40.

7. Торшина, О.А. Формула регуляризованного следа дифференциального оператора со сложным вхождением спектрального параметра / О.А. Торшина // Общие проблемы управления и их приложения. – 2003. – С. 467–468.
8. Торшина, О.А. Численный метод вычисления поправок теории возмущений / О.А. Торшина // Альманах современной науки и образования. – 2013. – № 12. – С. 168–170.
9. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of poiseuille flow in a circular pipe / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 64, № 2. – С. 165–168.
10. A new method for the evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of viscous fluid flow between two rotating cylinders / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 64, № 3. – С. 425–429.
11. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the Orr–Sommerfeld eigenvalue problem / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 63, № 3. – С. 355–358.
12. Computation of the first eigenvalues of a discrete operator / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 4.
13. Computation of the first eigenvalues of the hydrodynamic stability problem for a viscous fluid flow between two rotating cylinders / V.A. Sadovnichii, V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko // Differential Equations. – 2000. – Т. 36. – Вып. 6. – С. 819–824.
14. Evaluation of eigenvalues of the problem of hydrodynamic stability of viscous liquid flow between two rotating cylinders at small Reynolds numbers / V.A. Sadovnichii, V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko // Doklady Mathematics. – 1998. – Т. 58, № 3. – С. 483–486.

Поступила в редакцию 10 декабря 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160205

CALCULATION OF EIGENVALUES OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS USING THE THEORY OF REGULARIZED SERIES

S.I. Kadchenko, O.A. Torshina

Magnitogorsk State Technical University of G.I. Nosova, Magnitogorsk, Russian Federation

E-mail: kadchenko@masu.ru

The study of the spectral properties of perturbed differential operators is one of the significant problems of the spectral theory. In order to solve this problem it is necessary to determine the asymptotic behavior of the spectrum. But when investigating the asymptotic behavior, the improvement of remainder term is often impossible. Moreover, even the separation of the second term of the asymptotics from the remainder term is impossible. As a consequence it is necessary to come over to the study of deeper spectrum structure. A standard research tool is the derivation of formulas for regularized traces. The author makes a calculation of four amendments of the perturbation theory with the help of the theory of regularized series, followed by the access to the eigenvalues of elliptic differential operators with potential on a projective plane. In this case the projective plane is identified with the sphere by comparing opposite points and poles puncturing.

Keywords: differential operators; spectral theory; regularized traces; perturbation theory; eigenvalues.

References

1. Dubrovskiy V.V., Torshina O.A. Problema resheniya zadach na sobstvennyye znacheniya dlya differentsial'nykh operatorov so slozhnym vkhozhdeniem spektral'nogo parametra [Problem solving eigenvalue problems for differential operators with a complex spectral parameter]. *Novye matematicheskie*

методы. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [New mathematical methods. An electromagnetic waves and electronic systems], 2002, no. 9, Vol. 7, pp. 4–10. (in Russ.).

2. Dubrovskiy V.V., Torshina O.A. Formula pervogo regularizovannogo sleda dlya differentsial'nogo operatora Laplasya–Bel'trami (The formula for the first regularized trace of the differential Laplace–Beltrami). *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya* [Differential equations and their applications], 2002, no. 1, pp. 9–19. (in Russ.).

3. Torshina O.A. Algoritm vychisleniya regularizovannogo sleda operatora Laplasya–Bel'trami s potentsialom na proektivnoy ploskosti [The algorithm for calculation of the regularized trace for the Laplace–Beltrami operator with potential on the projective plane]. *Vestnik MaGU. Matematika*, 2003, Vol. 4, pp. 183–215. (in Russ.).

4. Torshina O.A. Sledy diskretnykh operatorov s chastnymi proizvodnymi [The traces of discrete operators with partial derivatives]. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya* [Almanac of modern science and education], 2012, no. 4(59), pp. 220–222. (in Russ.).

5. Torshina O.A. Formula pervogo regularizovannogo sleda Laplasya–Bokhnery s potentsialom na proektivnoy ploskosti (The formula for the first regularized trace of the Laplace–Bochner with potential on the projective plane). *Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola* [Voronezh Winter Mathematical School], 2004, pp. 104–105. (in Russ.).

6. Torshina O.A. Formula pervogo regularizovannogo sleda operatora Laplasya–Bel'trami s negladkim potentsialom na proektivnoy ploskosti [The formula for the first regularized trace for the Laplace–Beltrami operator with potential on the non-smooth projective plane]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematika* [Vestnik of Samara State Technical University. Mathematics], 2006, pp. 32–40. (in Russ.).

7. Torshina O.A. Formula regularizovannogo sleda differentsial'nogo operatora so slozhnym vkhozhdeniem spektral'nogo parametra [The formula of the regularized trace of a differential operator with complex spectral parameter]. *Obshchie problemy upravleniya i ikh prilozheniya* [General management problems and their applications], 2003, pp. 467–468. (in Russ.).

8. Torshina O.A. Chislennyy metod vychisleniya popravok teorii vozmushcheniy [A numerical method for calculating corrections of perturbation theory]. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya* [Almanac of modern science and education], 2013, no. 12, pp. 168–170. (in Russ.).

9. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of poiseuille flow in a circular pipe. *Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 64, no. 2, pp. 165–168.

10. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A new method for the evaluation of the first eigenvalues in the spectral problem of hydrodynamic stability of viscous fluid flow between two rotating cylinders. *Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 64, no. 3, pp. 425–429.

11. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A new method for approximate evaluation of the first eigenvalues in the Orr–Sommerfeld eigenvalue problem. *Doklady Mathematics*, 2001, Vol. 63, no. 3, pp. 355–358.

12. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. Computation of the first eigenvalues of a discrete operator. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 1998, Vol. 3, no. 2, p. 4. (in Russ.).

13. Sadovnichii V.A., Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Computation of the first eigenvalues of the hydrodynamic stability problem for a viscous fluid flow between two rotating cylinders. *Differential Equations*, 2000, Vol. 36, Issue 6, pp 819–824. DOI: 10.1007/bf02754405

14. Sadovnichii V.A., Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Evaluation of eigenvalues of the problem of hydrodynamic stability of viscous liquid flow between two rotating cylinders at small Reynolds numbers. *Doklady Mathematics*, 1998, Vol. 58, no. 3, pp. 483–486.

Received December 10, 2015

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОЛУРАСЩЕПЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЦУНАМИ

В.А. Симоненко, Н.А. Скоркин, А.С. Углов

ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск, Российская Федерация

E-mail: a.s.uglov@vniitf.ru

Представлены конечно-разностная схема полурасщепления матричных коэффициентов одномерных уравнений газовой динамики и результаты расчетов по одномерному вычислительному коду, составленному на основе этой схемы, для решения задачи о распространении мегацунами в океане и выхода волны на береговую зону океана. Показана пригодность предлагаемого в данной работе вычислительного кода для решения задачи о накате морской волны на сушу. Дальнейшее развитие работы видится в разработке двухмерной программы расчета распространения поверхностной волны.

Ключевые слова: конечно-разностная схема полурасщепления; теория мелкой воды; цунами; морское побережье; космическое тело.

Введение

Процесс столкновения астрономического объекта с поверхностью океана и последствий этого явления можно разделить на три этапа: 1 – расчет начальной фазы удара и формирование поверхностной волны в океане, 2 – решение задачи о движении поверхностной волны в океане и выходе ее на шельф и 3 – распространение воды по суше. Различие пространственных и временных интервалов этого сложного явления вызывает значительные трудности при проведении сквозного расчета всех этапов такого процесса с помощью единой физической модели и одного вычислительного кода. Процедура решения 1-го и 2-го этапов задачи о распространении мегацунами приведена в работе [6]. В ней отсутствует описание конечно-разностной схемы, используемой при решении задачи о распространении мегацунами, но отмечено ее преимущество по сравнению с другими численными схемами: обладание минимальным сглаживающим эффектом. Для решения 2-го и 3-го этапов задачи предложенная в данной работе конечно-разностная схема в своей основе содержит метод неполного расщепления матричных коэффициентов – модификация метода расщепления матричных коэффициентов. Авторам не известны работы, в которых бы решалась поставленная выше задача о распространении мегацунами. Так, в работе [7] приводится основательный обзор численных методов решения задачи лишь для непродолжительного по времени процесса распространения волны по мелководью и ее наката на берег. Следует отметить, что в последнее время для решения задачи о накате волны широко используются уравнения Навье–Стокса и SPH-метод их решения [8], требующий, однако, использования мощных суперкомпьютеров.

Постановка задачи

Рассмотрим две формы представления одномерного движения идеального газа в эйлеровых координатах. Пусть первой формой является представление в виде

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -\frac{1}{\rho} p_x, \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ E_t + uE_x = -\frac{p}{\rho} u_x, \quad p = (\gamma - 1)\rho E, \end{cases} \quad (1)$$

здесь u – компонент вектора скорости, ρ – объемная плотность, p – давление, E – внутренняя энергия в единице массы газа, показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

Представим систему (1) в другом виде. Для этого введем соотношения, известные из курса термодинамики, для скорости звука c и внутренней энергии E , а именно:

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad E = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} c^2.$$

Выражая из данных формул значения давления и энергии через скорость звука и подставляя в систему уравнений (1), получим уравнения в виде [9, с. 325–326, (33.2)–(33.4)].

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \frac{2}{\gamma-1} cc_x = 0, \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ c_t + uc_x + \frac{\gamma-1}{2} cu_x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Третье уравнение для внутренней энергии системы (1) с помощью второго уравнения системы (1) представимо в виде полных дифференциалов в следующем виде

$$dE + pdV = 0, \quad (a1)$$

в котором $V = 1/\rho$ – удельный объем. Рассмотрим 1-е уравнение системы (1) одномерного движения из нашей статьи

$$u_t + uu_x = -\frac{\partial p}{\rho \partial x}, \quad (a2)$$

или в эквивалентной форме

$$u_t + uu_x = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial \ln p}{\partial x} = -\frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \ln p}{\partial x}, \quad (a3)$$

так как $c^2 = \gamma p/\rho$. Обратимся к уравнению (a1), используя в нем соотношение $V = 1/\rho$. В результате будем иметь

$$dE = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (a4)$$

Из уравнения состояния $p = (\gamma-1)\rho E$ следует $E = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$. Отсюда дифференцированием последнего соотношения получаем

$$dE = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2}. \quad (a5)$$

Подставляем соотношение (a5) в выражение (a4):

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (a6)$$

После несложных преобразований сокращения на общий множитель $1/\rho^2$ и приведения подобных слагаемых, сокращения на общий множитель $\frac{1}{\gamma-1}$ получим $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$. Отсюда следует решение в виде

$$\ln p = \gamma(\ln \rho + \ln C_0), \quad (a7)$$

в котором C_0 – произвольная постоянная величина. Из соотношения (a7) легко получить выражение для давления

$$p = C_1 \rho^\gamma, \quad (a8)$$

где $C_1 = C_0^\gamma$ – константа.

Из выражения $c^2 = \gamma p/\rho = \gamma C_1 \rho^{\gamma-1}$ определяем плотность

$$\left(\frac{1}{\gamma C_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{c^{\gamma-1}} = \rho. \quad (a9)$$

Логарифмируем выражение (a9), введя для удобства новую постоянную $\left(\frac{1}{\gamma C_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = C_2$, будем иметь

$$\ln C_2 + \frac{2}{\gamma-1} \ln c = \ln \rho. \quad (\text{a10})$$

Из равенства (a7) с учетом (a10) следует

$$\ln p = \gamma \left(\ln C_2 + \frac{2}{\gamma-1} \ln c + \ln C_0 \right), \quad (\text{a11})$$

отсюда немедленно следует соотношение для частных производных (т. к. $\ln C_2, \ln C_0$ – постоянные величины)

$$\frac{\partial \ln p}{\partial x} = \frac{2}{\gamma-1} \gamma \frac{\partial \ln c}{\partial x} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{c_x}{c}. \quad (\text{a12})$$

Таким образом, уравнение (a3) с учетом соотношения (a12) примет надлежащий вид

$$u_t + uu_x + \frac{2cc_x}{(\gamma-1)} = 0.$$

Конец доказательства.

Отметим важное обстоятельство. В системе уравнений (2) уравнение состояния $p = (\gamma-1)\rho E$ включено в уравнения системы, в отличие от системы (1), в которой уравнение состояния рассматривается отдельно. Систему (2) можно переписать в матричном виде, введя обозначения

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \rho \\ c \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & 0 & \frac{2}{\gamma-1}c \\ \rho & u & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}c & 0 & u \end{bmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (2) можно записать в виде

$$U_t + AU_x = 0. \quad (3)$$

Для численного решения уравнений вида (3) существует много различных методов. В работе [1] приведен перечень этих методов, в том числе метод полного расщепления матричных коэффициентов. Схема полного расщепления матричных коэффициентов предполагает представление системы уравнений движения идеального газа в эйлеровых координатах в виде (2). Однако это не всегда возможно, например, в случае табличного уравнения состояния или двучленного уравнения состояния Ми–Грюнайзена. Метод неполного расщепления матричных коэффициентов применим как для уравнений в форме (1), так и к уравнениям в форме (2).

Важное замечание. Дальнейшее изложение не использует систему уравнений в форме (2).

Результаты

Опишем метод неполного расщепления матричных коэффициентов. Прежде всего, отметим, что производная U_x аппроксимируется следующим образом [1]

$$U_x^+ \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \text{ если } u_i + c_i > 0 \text{ и } U_x^+ \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ в остальных случаях}; \quad (4)$$

$$U_x^- \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \text{ если } u_i - c_i > 0 \text{ и } U_x^- \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ в остальных случаях}. \quad (5)$$

Далее запишем систему (1) в матричном виде $U_t + AU_x = B$, где

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \rho \\ E \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} p_x \\ -\rho u_x \\ -\frac{p}{\rho} u_x \end{bmatrix}.$$

Перепишем матрицу A в другом виде. Для этого представим элементы u матрицы A в виде

$$u = \frac{1}{2}(u+c) + \frac{1}{2}(u-c),$$

тогда

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u+c) + \frac{1}{2}(u-c) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(u+c) + \frac{1}{2}(u-c) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(u+c) + \frac{1}{2}(u-c) \end{bmatrix}.$$

Конечно-разностные уравнения в этом случае записываются в виде

$$U_t + A_+ U_x^+ + A_- U_x^- = B, \quad (6)$$

где $A = T\Lambda^+ T^{-1} + T\Lambda^- T^{-1} = A_+ + A_-$.

Здесь T^{-1} – матрица, строки которой левые собственные векторы матрицы A , матрица T – обратная матрица к матрице T^{-1} . Λ^+ и Λ^- – диагональные матрицы положительных и отрицательных собственных чисел матрицы A соответственно. Производные U_x^+ и U_x^- аппроксимируются конечными разностями аналогично конечным разностям (4) и (5).

Формулы частичного расщепления (6) для расчета сильных разрывов были модифицированы путем замены вектора B на вектор

$$B = \left[-\frac{1}{\rho} \tilde{p}_x, -\rho u_x, -\frac{\tilde{p}}{\rho} u_x \right]^T,$$

в котором давление \tilde{p} вычисляется по формуле

$$\tilde{p} = \begin{cases} \bar{p} & \text{– на волне сжатия,} \\ p & \text{– на волне разрежения,} \end{cases}$$

где \bar{p} – давление, вычисляемое по форме, предложенной В.Ф. Куропатенко в работе [2].

Для уравнения состояния $p = (\gamma - 1)\rho E$, рассматриваемого в данной работе, в узле с номером $i + 0,5$, согласно работе [2], выражение для давления принимает вид

$$\bar{p}_{i+0,5}^{n+1} = p_{i+0,5}^n + b(\Delta u)^2 + \sqrt{\left(b(\Delta u)^2\right)^2 + \left(a_{i+0,5}^n\right)^2},$$

где $b = \frac{\gamma+1}{4} \rho_{i+0,5}^n$, $a = (\rho c)^2$, $\Delta u = u_{i+1} - u_i$, $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$, n – номер временного слоя.

Распространение поверхностной волны в мелкой воде

Для описания расходящейся кругами по воде волны и ее наката на побережье с учетом профиля дна и шельфа мирового океана был разработан вычислительный код ТМВ, в котором реализована теория мелкой воды.

Уравнения теории мелкой воды, описывающие распространение одномерной круговой поверхностной волны, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial R} &= g \frac{\partial \eta}{\partial R}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial R} + \xi \left(\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{u}{R} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где R – расстояние вдоль невозмущенной поверхности океана от места входа тела в воду, t – время, g – ускорение свободного падения, $u = u(R, t)$ – скорость частиц на поверхности воды, $\eta = \eta(R, t)$ – конфигурация волны, $h(R)$ – глубина мирового океана, $\xi = h(R) + \eta(R, t)$.

Уравнения (7) суть уравнения гиперболического типа. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что распространение поверхностной волны осуществляется на очень большие расстояния 1000 км. Время движения волны до побережья океана – это десятки тысяч секунд [6]. Численное решение уравнений потребует осуществления большого числа циклов по времени. Поэтому конечно-разностные схемы, аппроксимирующие уравнения (7), должны иметь минимальный эффект численной диссипации [6].

Для решения данной задачи были протестированы схемы МакКормака, Лакса–Вендроффа и Неймана. Все они оказались неудовлетворительными по причине наличия сильного сглаживания схемной вязкостью [6]. Наилучшей оказалась λ -схема Моретти [1], она формирует монотонные профили, и в ней практически нет схемной вязкости. Применение λ -схема Моретти к уравнениям (7) давало физически неправдоподобные решения [6]. По этой причине была осуществлена модификация λ -схема сохранившая положительные свойства схемы Моретти. Эта модификация представляет собой описанную выше схему неполного расщепления матричных коэффициентов. Для уравнения (7) была написана одномерная вычислительная программа ТМВ. Для ее верификации было проведено сравнение результатов расчетов одной и той же задачи о распространении волны по программе ТМВ и аналогичной программе SWAN, представленной в работе [3]. В работе [3] представлено численное решение задачи о движении одиночной волны в океане глубиной 4,55 км. На удалении в 460,0 км от берега, то есть левым краевым условием счетной области являлось условие для скорости частиц на поверхности воды в виде

$$u = \begin{cases} 0,04666 \cdot \sin^2(0,004713 \cdot t) \text{ м/с,} & \text{если } t < 660 \text{ с;} \\ 0 \text{ м/с,} & \text{если } t > 660 \text{ с.} \end{cases} \quad (8)$$

Данное условие описывает формирование уединенной волны высотой 1 м и шириной 140 км, которая движется со скоростью 210 м/с. В качестве правого граничного условия счетной области задавалось равенство нулю скорости частиц воды, то есть правый берег – отвесная скала.

Рассмотрен был и случай, когда левое граничное условие имело вид

$$0,04666 \cdot \sin^2(0,004713 \cdot t) \text{ м/с,} \quad (9)$$

что означало формирование последовательности волн, распространяющихся со скоростью 210 м/с с амплитудой от -1 м до 1 м и шириной 280 км. В работе [3] расчеты были проведены при помощи двух программ: SWAN и ZUNI (SOLA). Геометрия счетной области имела вид, представленный на рис. 1 (левая часть). Глубина океана – $Y = 4,55$ км. На расстоянии $X = 283,50$ км от источника волны начинается скальный уступ с уклоном 1:15. На расстоянии 344,25 км начинается шельф постоянной глубины 500 м [3]. На рис. 1 (правая часть), который взят из статьи [3], приведена рассчитанная с помощью вычислительных кодов SWAN и ZUNI поверхность воды, соответствующая двум моментам времени. При этом в качестве источника волн на левой границе принято условие (9). Та же задача была рассчитана и с помощью кода ТМВ. Результаты расчетов вполне согласуются с данными из работы [6]. В этом можно убедиться, сравнив рис. 1 (правая часть), на котором представлены результаты работы программ SWAN и ZUNI, и 2, на котором представлен расчет по программе ТМВ.

Обратимся к результатам расчетов, приведенным в статье [3]. Согласно им волна (граничное условие (8)), взаимодействуя с подводным уступом с уклоном 1:15, увеличила свою высоту с 0,96 м до 1,50 м. Дальнейшее ее движение над шельфом до момента встречи со скальной стеной отмечено постоянством высоты волны (см. на рис. 1 пунктирную огибающую линию в верхнем правом углу).

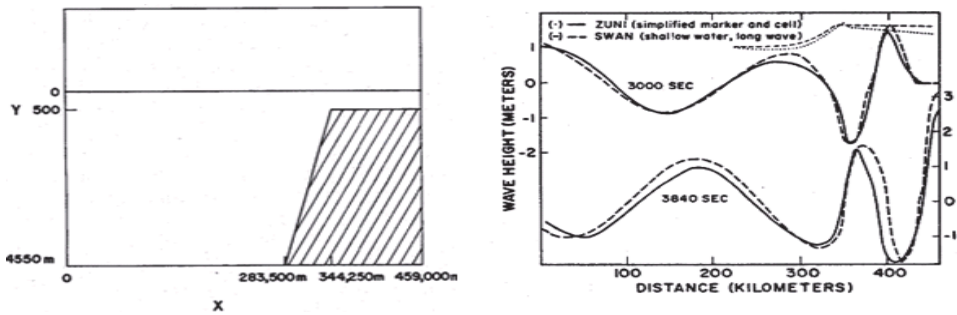


Рис. 1. Вид счетной области (слева) и вычисленные профили волн, соответствующие моментам времени 3 000 и 3 840 с, согласно работе [3] (справа)

Та же задача (граничное условие (8)) была рассчитана с помощью вычислительного кода ТМВ для теории мелкой воды [6]. Так же получено увеличение высоты волны с 1 м до 1,5 м и дальнейшее движение волны без изменения ее высоты [6]. На рис. 3 показано увеличение высоты волны в случае шельфа переменной глубины: глубина шельфа при $X = 459,0$ км равнялась нулю [6].

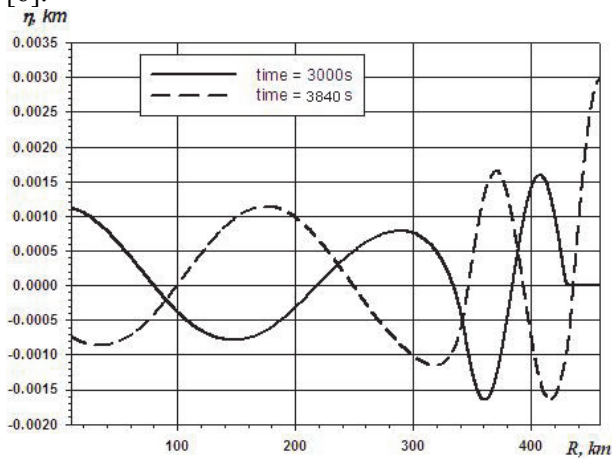


Рис. 2. Волны на воде в моменты времени 3 000 и 3 840 с

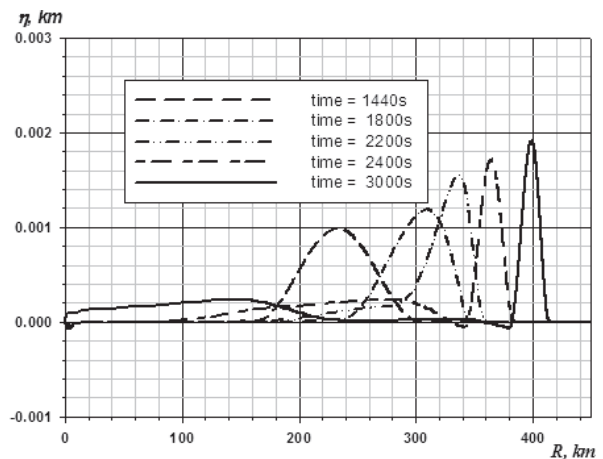


Рис. 3. Профили волн на различные моменты времени для шельфа с уклоном

Итак, показано, что результаты расчетов аналогичных задач по вычислительной программе ТМВ и уже проверенной программе SWAN хорошо согласуются друг с другом.

Накат волны на сушу. Задача считается по уравнениям (11) до прихода волны к береговой линии R_0 . Как в работе [4], для области $R > R_0$, т. е. на суше, вводится «глубина» $\bar{h}(R) < 0$, представляющая собой возвышение суши над невозмущенной поверхностью океана, взятое с отрицательным знаком. Для области $R > R_0$ высота невозмущенной поверхности «воды» (до прихода волны к береговой линии) равна возвышению суши над невозмущенной поверхностью океана, взятому с положительным знаком $\eta(R) = -\bar{h}(R) > 0$. На линии, разделяющей воду от суши, принято $\eta(R) = \bar{h}(R) = 0$. Поэтому в промежутке $0 < R < R_0$ функция $H(R, t = 0) \neq 0$, а для $R > R_0$ функция $H(R, t = 0) = 0$. В результате получается задача о распространении сильного разрыва по воде и

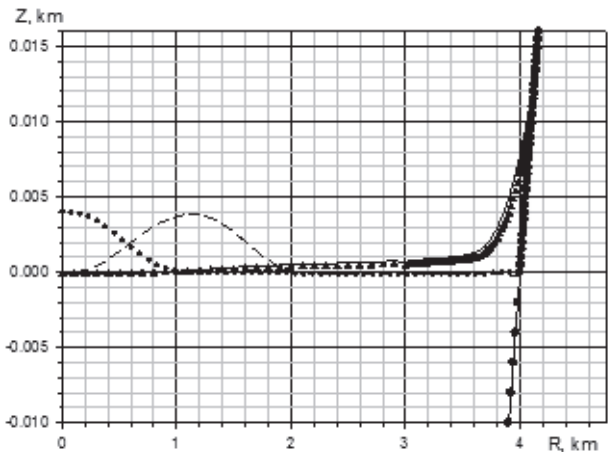


Рис. 4. Эволюция волны в направлении берега

по суше, которая решается по однородной модифицированной конечно-разностной схеме неполного расщепления матричных коэффициентов. (Описание схемы приведено выше).

Метод расчета наката волны на берег протестирован сравнением результатов численных расчетов с аналитическими решениями (см. рисунок 4), которые взяты из работы [4] со ссылкой на работу [5]. На рисунке представлен профиль волны $Z(R,t)$ на разные моменты времени. На этом рисунке, по данным работы [4], приведено сравнение численного расчета наката волны (цунами) на берег, который имеет наклон 32° , с аналитическим решением [5]. Пунктирная линия – начальное положение волны, штриховая линия – положение волны на последующий момент времени, сплошная линия – момент максимального наката волны на берег, который обозначен линией с маркерами в виде кружков. Аналитическое решение представлено линией с маркерами в виде треугольников. Из анализа рисунка видно, что сравниваемые величины хорошо согласованы.

Выводы

Были рассмотрены метод и конечно-разностная схема полурасщепления матричных коэффициентов уравнений газовой динамики. Решена прикладная задача о движении поверхностной волны в океане и было осуществлено сравнение полученных результатов с результатами решения аналогичной задачи из работы К. Мейдера [3]. Проведена верификация вычислительной программы, в основе которой лежит рассматриваемая схема, путем сравнения результатов расчетов по предлагаемой схеме полурасщепления матричных коэффициентов с аналитическим решением задачи о накате волны на сушу. Было отмечено, что предложенная процедура вычислений работает правильно. Схема полурасщепления матричных коэффициентов является вполне пригодной для численных расчетов, где имеют место уравнения теории мелкой воды. Указание на применение конечно-разностной схемы неполного расщепления матричных коэффициентов приведено в работе [6]. Показана пригодность предлагаемого в данной работе метода и для решения задачи о накате морской волны на сушу. Дальнейшее развитие данной работы видится в разработке двухмерной программы расчета распространения поверхностной волны.

Литература

1. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2 / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
2. Куропатенко, В.Ф. Методы расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 45–59.
3. Mader, Charles L. Numerical Simulation of Tsunami / L. Charles Mader // Journal of Physical Oceanography. – 1974. – V. 4. – P. 74–82.
4. Marchuk, A.G.A. Method for Numerical Modeling of Tsunami Run-up on the Coast of Arbitrary Profile / A.G.A. Marchuk, A.A. Anisimov // ITS 2001 Processing, Session 7, Number 7-27, P. 933-940.
5. Мазова, Р.Х. Линейная теория набегания волн цунами на берег / Р.Х. Мазова, Е.Н. Пелиновский // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1982. – Т. 18, Ш 2. – С. 166–171. (Препринт. ИПФ АН СССР № 25, Горький, 1981, 15 е.)
6. Симоненко, В.А. Математическое моделирование мегацунами / В.А. Симоненко, Н.А. Скоркин, В.П. Елсуков, А.С. Углов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2008. – № 22, вып. 11. – С. 62–69.
7. Бейзель, С.А. О некоторых численных алгоритмах расчета наката волны цунами в рамках модели мелкой воды / С.А. Бейзель, Н. Ю. Шокина, Г.С. Хакимзянов и др. // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 40–62.
8. Ketabdari, M.J. Simulation of waves group propagation and breaking in coastal zone using a Navier–Stokes solver with an improved VOF free surface treatment / M.J. Ketabdaria, M.R.H. Nobarib, M. Moradi Larmaei // Appl. Ocean Res. – 2008. – Vol. 30, № 2. – P. 130–143
9. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Часть II / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М.: Физико-математическая литература, 1963. – 728 с.

Поступила в редакцию 16 декабря 2014 г.

A SEMI-SPLITTING FINITE DIFFERENCE SCHEME OF MATRIX COEFFICIENTS AND ITS APPLICATION TO DESCRIBE THE TSUNAMI PROPAGATION

V.A. Simonenko, N.A. Skorkin, A.S. Uglov

Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics,
Snezhinsk, Russian Federation

E-mail: a.s.uglov@vniitf.ru

The well-known finite-difference scheme of Moretti of splitting the matrix coefficients of the system of gas dynamics equations involves writing equations in a special form – pressure and internal energy are excluded from the equation using the equations of state for an ideal gas. In this paper the author proposes a modification of Moretti scheme as a finite-difference scheme of semi-splitting of matrix coefficients which do not intend to constitute a system of equations in a special form. The semi-splitting scheme allows solving equations of hyperbolic equations of state of any type, for example, even those in tabular form. For one-dimensional equations of propagation of circular wave on the water surface, that are the equations of hyperbolic type, the results of the calculations of the problem of the propagation of a surface wave in the ocean and the output of wave on the shore of the ocean area are given according to one-dimensional computational code of the shallow water theory. Verification of semi-splitting finite-difference scheme is performed by comparing the calculation results for the problem of the propagation of a single surface wave in the ocean and the problem of propagation of a wave train on the ocean surface with the results of calculations of the same problems cited in the work by C. Mader. To calculate the wave setup on the shore the approach is used in the computational code of the shallow water theory, which is described in the work by An. G. Marchuk, A.A. Anisimov. By comparing the calculation results with analytical solutions, the suitability of the computational code proposed in this work for the problem solution of the sea wave setup on land is demonstrated. Further development work is seen in the development of a two-dimensional program for calculating the surface wave propagation.

Keywords: semi-splitting finite-difference scheme; shallow water theory; tsunami; seashore; astronomical body.

References

1. Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostey. Tom 2* [Computational Techniques for Fluid Dynamics. Vol. 2], Moscow, Mir Publ., 1991, 552 p. [Fletcher C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 2, Springer Verlag Ed., 1988.]
2. Kuropatenko V.F. Methods of shock wave calculations. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*, 2001, Vol. 2, no. 2, pp. 45–59.
3. Mader Charles L. Numerical Simulation of Tsunami. *Journal of Physical Oceanography*, 1974, Vol. 4, pp. 74–82.
4. Marchuk Andrey G.A., Anisimov A.A. Method for Numerical Modeling of Tsunami Run-up on the Coast of Arbitrary Profile. *ITS 2001 Processing*, Session 7, no. 7–27, pp. 933–940.
5. Mazova R.Kh., Pelinovskiy E.N. Lineynaya teoriya nabeganiya voln tsunami na bereg [Linear Theory of Wave Run Up on a Beach]. *Izv. AN SSSR. Fizika atmosfery i okeana*, 1982, Vol. 18, Sh 2, pp. 166–171. (in Russ.).
6. Simonenko V.A., Skorkin N.A., Elsukov V.P., Uglov A.S. Matematicheskoe modelirovanie megatsunami [Mathematical Modeling of Magatsunamis]. *Vestnik YuUrGU, ser. "Matematika, fizika, khimiya"*, 2008, no. 22, issue 11, pp. 62–69. (in Russ.).
7. Beizel S.A., Shokina N.Y., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On some numerical algorithms for computation of tsunami runup in the framework of shallow water model. *Computational technologies*, 2014, Vol. 19, no. 1, pp. 40–62. (in Russ.).
8. Ketabdari M.J., Nobari M.R.H., Larmaei Moradi M. Simulation of waves group propagation and breaking in coastal zone using a Navier–Stokes solver with an improved VOF free surface treatment. *Applied Ocean Research*, 2008, Vol. 30, Issue 2, pp. 130–143. DOI: 10.1016/j.apor.2008.08.005
9. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika Chast' II*. [Theoretical Hydromechanics Theoretical Hydromechanics. Part II]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963, 728 p. (in Russ.).

Received December 16, 2014

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КОЛЬЦЕ С КВАДРАТИЧНЫМ РОСТОМ НА ГРАНИЦЕ

Д.А. Турсунов¹, У.З. Эркебаев²

¹ Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

² Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизия

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. В работе доказана возможность применения обобщенного метода пограничных функций к построению полного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного, линейного, неоднородного, эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце с квадратичным ростом на границе. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюизо. Построенное разложение обосновано принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения; бисингулярное возмущение, уравнение эллиптического типа; задача Дирихле для кольца; малый параметр; обобщенный метод пограничных функций; пограничные функции; модифицированные функции Бесселя.

Введение. По многочисленности и разнообразию приложений задача Дирихле для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимает исключительное место в математике. К ней непосредственно сводятся: основная задача в гидродинамике – задача обтекания; задачи кручения и изгиба в теории упругости; в физике – определение температуры внутри пластинки при известных ее значениях на контуре, потенциал установившегося движения несжимаемой жидкости, электромагнитные и магнитные потенциалы, отыскание температуры теплового поля или потенциала электростатического поля в некоторой области при заданной температуре или потенциале на границе области и др. Явное решение этих задач построить в общем случае не удастся, поэтому исследователи используют разные асимптотические методы. Случаи, когда в сингулярно возмущенных уравнениях соответствующее предельное уравнение имеет негладкое решение, по терминологии А.М. Ильина, называют бисингулярными. Ранее для построения асимптотики бисингулярно возмущенных задач в основном применялся метод сращивания (согласования) [1–5] либо другие методы, но не метод пограничных функций. Нами предлагается модификация метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных уравнений [6–9]. В данной работе исследуется задача Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце с квадратичным ростом на границе.

Постановка задачи. Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - a)^2 q(\rho, \varphi) u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D \quad (1)$$

$$u(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad u(\beta, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа, $f(a, \varphi, 0) \neq 0$,

$$D = \{(\rho, \varphi) \mid a < \rho < b, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\rho, \varphi), \quad q(\rho, \varphi), \quad f_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D}),$$

$(\rho, \varphi) \in (\bar{D}), \quad q(\rho, \varphi) > 0; \quad q(\rho, \varphi), \quad f(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – заданные функции, $u(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – искомая функция.

Решение задачи Дирихле (1)–(2) существует и единственно при $0 < \varepsilon = \text{const}$ [10]. Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (1)–(2), когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим, что задача (1)–(2) по терминологии А.М. Ильина является бисингулярно возмущенной [1, 2]. Действительно, первая сингулярность очевидна, предельное уравнение не является дифференциальным уравнением

$$-(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi) u(\rho, \varphi, 0) = f_0(\rho, \varphi),$$

и решение этого уравнения

$$u(\rho, \varphi, 0) = -f_0(\rho, \varphi) / (\rho - a)^2 q(\rho, \varphi)$$

не может удовлетворять граничным условиям (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1)–(2), которое ищем в виде

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим простую рекуррентную систему уравнений

$$-(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi) u_0(\rho, \varphi) = f_0(\rho, \varphi), \quad -(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi) u_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho, \varphi), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Отсюда следует

$$u_0(\rho, \varphi) = -\frac{f_0(\rho, \varphi)}{q(\rho, \varphi)(\rho - a)^2}, \quad u_k(\rho, \varphi) = -\frac{f_k(\rho, \varphi) - \Delta u_{k-1}(\rho, \varphi)}{q(\rho, \varphi)(\rho - a)^2}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Так как $f_0(a, \varphi) \neq 0$, поэтому $u_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D} \setminus \{(a, \varphi)\})$, т.е. все эти функции $u_k(\rho, \varphi)$ имеют нарастающие особенности

$$u_k(\rho, \varphi) = O\left(1/(\rho - a)^{2+4k}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho \rightarrow a.$$

А внешнее решение представимо в виде

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{(\rho - a)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{(\rho - a)^4} \right)^k F_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $F_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k = 0, 1, \dots$.

Следовательно, задача (1)–(2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности, когда $\rho \rightarrow a$. Кроме этого, ряд (4) теряет асимптотический характер при $|\rho - a| \leq \varepsilon^{1/4}$. Следует отметить, что квадратичный рост на границе существенно отличается от линейного роста [9], и эта особенность влияет на структуру асимптотического разложения решения, также выбор вспомогательного асимптотического ряда.

Основной результат. Справедлива

Теорема. Для решения задачи (1)–(2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon}^k z_k\left(\frac{b - \rho}{\sqrt{\varepsilon}}, \varphi\right) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \sqrt[4]{\varepsilon}^k w_k\left(\frac{\rho - a}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, \varphi\right),$$

где функции $v_k(\rho, \varphi) \in C^{\infty}(\bar{D})$, $w_k(\tau, \varphi) \in C^{\infty}(D_1)$, $z_k(\eta, \varphi) \in C^{\infty}(D_2)$, $\tau = (\rho - a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta = (b - \rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $D_1 = \{(\tau, \varphi) | 0 < \tau < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$, $D_2 = \{(\eta, \varphi) | 0 < \eta < +\infty, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$, причем $w_{4m-2}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^2)$, $w_{4m-1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau)$, $w_{4m}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^4)$, $w_{4m+1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^3)$ при $\tau \rightarrow +\infty$, $m = 0, 1, \dots$, $z_k(\eta, \varphi) = O(1/e^{\eta})$ при $\eta \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы состоит из двух частей: построение формального асимптотического разложения решения (ФАРР) и обоснование этого ФАРР.

Построение ФАРР

ФАРР задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + W(\tau, \varphi, \mu) + Q(\eta, \varphi, \lambda), \quad (5)$$

где $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$, $W(\tau, \varphi, \mu) = \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$, $Q(\eta, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k z_k(\eta, \varphi)$, $\tau = (\rho - a)/\mu$, $\varepsilon = \mu^4$, $\eta = (b - \rho)/\lambda$, $\varepsilon = \lambda^2$.

Классическое погранслоное решение $Q(\eta, \varphi, \lambda)$ устраняет невязку на внешней границе кольца $\rho = b$, и экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а погранслоное решение $W(\tau, \varphi, \mu)$ устраняет невязку на внутренней границе кольца $\rho = a$, и степенным характером убывает вне пограничного слоя.

Учитывая граничное условие (2), имеем

$$W(0, \varphi, \mu) = -V(a, \varphi, \mu^4), \tag{6}$$

$$Q(0, \varphi, \lambda) = \psi(\varphi, \lambda^2), \tag{7}$$

где $\psi(\varphi, \varepsilon) = -V(b, \varphi, \varepsilon) - W((b-a)/\mu, \varphi, \mu)$, $\psi(\varphi, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(\varphi)$.

Подставляя соотношение (5) в равенство (1), получим

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - a)^2 q(\rho, \varphi) V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D, \tag{8}$$

$$\mu^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{(a + \tau\mu)} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\mu^2}{(a + \tau\mu)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \tau^2 q(a + \tau\mu, \varphi) W \right) = h(a + \tau\mu, \varphi, \mu^4), \quad (\tau, \varphi) \in D_1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{(b - \eta\lambda)} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\lambda^2}{(b - \eta\lambda)^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} - (c - \eta\lambda)^2 q(b - \eta\lambda, \varphi) Q = 0, \quad (\eta, \varphi) \in D_2, \tag{10}$$

где $W = W(\tau, \varphi, \mu)$, $Q = Q(\eta, \varphi, \lambda)$, $c = b - a$.

По идее метода ввели вспомогательный асимптотический ряд $h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi)$, который конкретизируем ниже.

Регулярное внешнее решение $V(\rho, \varphi, \varepsilon)$

Учитывая $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$, из соотношения (8) для функции $v_k(\rho, \varphi)$ получим

$$v_0(\rho, \varphi) = - \frac{f_0(\rho, \varphi) - h_0(\rho, \varphi)}{(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi)}, \quad v_k(\rho, \varphi) = - \frac{f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi) - h_k(\rho, \varphi)}{(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi)$, $k = 0, 1, \dots$, $v_{-1}(\rho, \varphi) \equiv 0$, тогда $v_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, когда

$$h_0(\rho, \varphi) = \frac{g_{0,0}(\varphi)}{q_0(\varphi)} q(\rho, \varphi) + \left(\frac{g_{0,1}(\varphi)}{q_0(\varphi)} - \frac{g_{0,0}(\varphi) q_1(\varphi)}{q_0^2(\varphi)} \right) (\rho - a) q(\rho, \varphi),$$

$$h_k(\rho, \varphi) = g_{k,0}(\varphi) + g_{k,1}(\varphi)(\rho - a) + (\rho - a)^2 \sum_{j=0}^{+\infty} h_{k,j}(\varphi)(\rho - a)^j, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $g_{k,0}(\varphi) = g_k(a, \varphi)$, $g_{k,1}(\varphi) = \frac{\partial g_k(a, \varphi)}{\partial \rho}$, $q_0(\varphi) = q_0(a, \varphi)$, $q_1(\varphi) = \frac{\partial q(a, \varphi)}{\partial \rho}$, $h_{k,j}(\varphi)$ – пока неизвестные функции.

Неизвестные функции $h_{k,j}(\varphi)$ выбираем так, чтобы $h_{k,j}(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$ и выполнялись соотношения

$$w_j(\tau, \varphi) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad j = -2, -1, 0, 1, \dots$$

При таком выборе функции $h(\rho, \varphi, \varepsilon)$, получим

$$v_0(\rho, \varphi) = - \frac{g_0(\rho, \varphi) - \left(\frac{g_{0,0}(\varphi)}{q_0(\varphi)} + \left(\frac{g_{0,1}(\varphi)}{q_0(\varphi)} - \frac{g_{0,0}(\varphi) q_1(\varphi)}{q_0^2(\varphi)} \right) (\rho - a) \right) q(\rho, \varphi)}{(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi)},$$

$$v_k(\rho, \varphi) = - \frac{g_k(\rho, \varphi) - g_{k,0}(\varphi) - g_{k,1}(\varphi)(\rho - a)}{(\rho - a)^2 q(\rho, \varphi)} + \frac{1}{q(\rho, \varphi)} \sum_{j=0}^{+\infty} h_{k,j}(\varphi)(\rho - a)^j.$$

Таким образом, мы почти построили регулярное внешнее решение $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$ в области \bar{D} , $v_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$.

Погранслоное решение $W(\tau, \varphi, \mu)$

Пусть $q(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(\varphi)(\rho - a)^j$, $q_j(\varphi) = \frac{\partial^j q(a, \varphi)}{j! \partial \rho^j}$, тогда соотношение (9) примет вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu^k \left(\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial \tau^2} - \tau^2 q_0 w_{k-2} \right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k \left(\frac{\partial w_{k-3}}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial \varphi^2} \right) + g_{0,0} + \mu \tau g_{0,1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (g_{k,0} + \mu \tau g_{k,1}) \mu^{4k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k \sum_{j=1}^k \tau^{j+2} q_j w_{k-2-j} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^{4k} \sum_{j=0}^{+\infty} h_{k,j} (\mu \tau)^{j+2} + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{g_{0,0}}{q_0} q_j + \left(\frac{g_{0,1}}{q_0} - \frac{g_{0,0} q_1}{q_0^2} \right) q_{j-1} \right) (\tau \mu)^j,$$

где $g_{k,0} = g_{k,0}(\varphi)$, $g_{k,1} = g_{k,1}(\varphi)$, $q_j = q_j(\varphi)$, $w_k = w_k(\tau, \varphi)$, $h_{k,j} = h_{k,j}(\varphi)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ и учитывая граничное условие (6), получим рекуррентную систему задач

$$Lw_{-2} \equiv \frac{\partial^2 w_{-2}}{\partial \tau^2} - \tau^2 q_0 w_{-2} = g_{0,0}, (\tau, \varphi) \in D_1, w_{-2}(0, \varphi) = 0; \tag{11}$$

$$Lw_{-1} = \tau^3 q_1 w_{-2} + g_{0,1} \tau - \frac{\partial w_{-2}}{\partial \tau}, (\tau, \varphi) \in D_1, w_{-1}(0, \varphi) = 0; \tag{12}$$

$$Lw_{4k} = p_{4k}(\tau, \varphi) + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-j,4j} \tau^{4j+2}, w_{4k}(0, \varphi) = -v_k(a, \varphi), (\tau, \varphi) \in D_1, k = 0, 1, 2, \dots; \tag{13}$$

$$Lw_{4k+1} = p_{4k+1}(\tau, \varphi) + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-j,4j+1} \tau^{4j+3}, w_{4k+1}(0, \varphi) = 0, (\tau, \varphi) \in D_1, k = 0, 1, 2, \dots; \tag{14}$$

$$Lw_{4k+2+s} = p_{4k+2+s}(\tau, \varphi) + \tau^s g_{1+k,s} + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-j,4j+2+s} \tau^{4j+4+s}, w_{4k+2+s}(0, \varphi) = 0, (\tau, \varphi) \in D_1, s = 0, 1; k = 0, 1, 2, \dots; \tag{15}$$

где $p_s(\tau, \varphi) = \sum_{j=1}^{s+2} \tau^{j+2} q_j w_{s-j} + \left(\frac{g_{0,0}}{q_0} q_{s+2} + \left(\frac{g_{0,1}}{q_0} - \frac{g_{0,0} q_1}{q_0^2} \right) q_{s+1} \right) \tau^{s+2} - \frac{\partial w_{s-1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{s-2}}{\partial \varphi^2}$.

Докажем следующую вспомогательную лемму

Лемма 1. Пусть $F(\tau)\Phi(\varphi) \in C^\infty(\bar{D}_1)$, $q_0(\varphi) > 0$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^2 q_0(\varphi) z(\tau, \varphi) = F(\tau)\Phi(\varphi), (\tau, \varphi) \in D_1, z(0, \varphi) = z^0(\varphi) \tag{16}$$

имеет единственное решение $z(\tau, \varphi) \in C^\infty(\bar{D}_1)$.

Доказательство. Пусть $t = \sqrt[4]{q_0(\varphi)} \tau$, тогда задача (16) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t, \varphi)}{\partial t^2} - t^2 z(t, \varphi) = \frac{F(t)\Phi(\varphi)}{\sqrt{q_0(\varphi)}}, z(0, \varphi) = z^0(\varphi), (t, \varphi) \in D_1. \tag{17}$$

Решение задачи (17) ищем в виде $z(t, \varphi) = z_1(t) \frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt{q_0(\varphi)}}$, тогда относительно $z_1(t)$ получим задачу

$$z_1''(t) - t^2 z_1(t) = F(t), z_1(0) = z_1^0, t \in (0, +\infty).$$

Как нам известно, однородное уравнение

$$z''(t) - t^2 z(t) = 0$$

имеет два независимых решения $z_1(t) = \sqrt{t}I_{1/4}(t^2/2)$, $z_2(t) = \sqrt{t}K_{1/4}(t^2/2)$, $I_{1/4}(s)$, $K_{1/4}(s)$ – модифицированные функции Бесселя [11]. Отметим, что $z_1(t) \sim \sqrt{\pi^{-1}} e^{t^2/2} / \sqrt{t}$, $z_2(t) \sim \sqrt{\pi} e^{-t^2/2} / \sqrt{t}$ при $t \rightarrow +\infty$; $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = O(1)$ при $t \rightarrow 0$; $W(z_1, z_2) = z_1 z_2' - z_2 z_1' = -1$.

Следовательно, решение задачи (17) имеет вид

$$z(t, \varphi) = \frac{z^0(\varphi)}{z_2(0)} z_2(t) - \frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt{q_0(\varphi)}} \left(z_2(t) \int_0^t F(s) z_1(s) ds + z_1(t) \int_t^{+\infty} F(s) z_2(s) ds \right), t = \sqrt[4]{q_0(\varphi)} \tau.$$

Лемма 1 доказана.

Следствие. Если $F(\tau) = O(\tau^k)$, то $z(\tau, \varphi) = O(\tau^{k-2})$ при $\tau \rightarrow +\infty$, $k = \text{const}$.

Действительно, если учитывать асимптотические поведения модифицированных функций Бесселя, то получим

$$z(\tau) = O\left(\tau^{-\frac{1}{2}} e^{\tau^2/2}\right) \int_{\tau}^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-s^2/2} s^k ds = O\left(\tau^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + k}\right) = O(\tau^{k-2}), \tau \rightarrow +\infty.$$

Существование и единственность решений краевых задач (11)–(15) следует из леммы 1. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $0 < q_0(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$, функции $p_j(\tau, \varphi) \in C^\infty(\bar{D}_1)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$p_j(\tau, \varphi) = \frac{p_{j,j}(\varphi)}{\tau^j} + \frac{p_{j,j+4}(\varphi)}{\tau^{j+4}} + \dots + \frac{p_{j,j+4k}(\varphi)}{\tau^{j+4k}} + \dots, j = 0, 1, 2, 3, \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

Тогда в области \bar{D}_1 существуют решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_j(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^2 q_0(\varphi) \tilde{w}_j(\tau, \varphi) = p_j(\tau, \varphi), j = 0, 1, 2, 3, \tag{18}$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$\tilde{w}_j(\tau, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)}{\tau^{j+2+4k}}, j = 0, 1, 2, 3, \tau \rightarrow +\infty. \tag{19}$$

При этом ряды (19) можно многократно почленно дифференцировать, и они являются ФАРР уравнений (18).

Доказательство. Нетрудно заметить, что дифференцируемость рядов (19) вытекает непосредственно из уравнений (18). ФАРР ищем в виде (19), где $\tilde{w}_{j,k}(\varphi)$ – пока неизвестные функции. Подставляя эти ряды (19) в уравнение (18) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим рекуррентные системы уравнений для $\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} -\tilde{w}_{j,j+2}(\varphi) q_0(\varphi) &= p_{j,j}(\varphi), \\ (j+2)(j+3) \tilde{w}_{j,j+2}(\varphi) - \tilde{w}_{j,j+6}(\varphi) q_0(\varphi) &= p_{j,j+4}(\varphi), \dots, \\ (j+2+4k)(j+3+4k) \tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi) - \tilde{w}_{j,j+6+4k}(\varphi) q_0(\varphi) &= p_{j,j+4+4k}(\varphi) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Отсюда однозначно определяются $\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\tilde{w}_{j,j+2}(\varphi) = -p_{j,j}(\varphi)/q_0(\varphi), \quad \tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi) = -(p_{j,j+4k}(\varphi) - (j-2+4k)(j-1+4k) \tilde{w}_{j,j-2+4k}(\varphi))/q_0(\varphi), k = 1, 2, \dots$$

Теперь оценим остаточные члены рядов (19)

$$r_j(\tau, \varphi) = \tilde{w}_j(\tau, \varphi) - \sum_{k=0}^N \frac{\tilde{w}_{j,j+2+4k}(\varphi)}{\tau^{j+2+4k}}, j = 0, 1, 2, 3, \tau \rightarrow +\infty.$$

Для остаточных членов получим следующие уравнения

$$\frac{\partial^2 r_j(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^2 q_0(\varphi) r_j(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{j+4(N+1)}), j = 0, 1, 2, 3, \tau \rightarrow +\infty.$$

Учитывая следствие из леммы 1, мы получаем оценку для остаточных членов:

$$r_j(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{j+2+4(N+1)}), j = 0, 1, 2, 3, \tau \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, (19) действительно являются асимптотическими разложениями решений уравнений (18). Лемма 2 доказана.

Докажем еще одну вспомогательную лемму, с помощью которой докажем соотношения $w_{4k-2}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^2)$, $w_{4k-1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau)$, $w_{4k}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^4)$, $w_{4k+1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^3)$, $\tau \rightarrow +\infty$, $k = 0, 1, \dots$

Лемма 3. Пусть $h_{k,j} = -\sum_{s=1}^{4k+2} q_{s+j} w_{4k-s,s}$, $q_k = q_k(\varphi)$, $w_{ij} = w_{ij}(\varphi)$, $g_k = g_k(a, \varphi)$. Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$, справедливы равенства

$$w_{4k+s}(\tau, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{4k+s,4j-s}}{\tau^{4j-s}}, \quad s = 0, 1, 2, 3. \quad (20)$$

Доказательство. Применяя лемму 2, для уравнений (11)–(15) в случае $k = 0$, имеем

$$w_{-2}(\tau, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{-2,4k+2}}{\tau^{4k+2}}, \quad w_{-1}(\tau, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{-1,4k+1}}{\tau^{4k+1}}, \quad w_s(\tau, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{s,4k-s}}{\tau^{4k-s}}, \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

Теперь в остальных уравнениях (13), (14) и (15), при $k > 0$, мы должны выбрать неизвестные функции $h_{k,j}(\varphi)$, так чтобы максимальная степень разложения правых частей равенств (13)–(15) по τ не превышала второй степени, когда $\tau \rightarrow +\infty$. Подробно рассмотрим один конкретный случай выбора функции $h_{k,j}(\varphi)$, остальные выбираются аналогичным образом. Рассмотрим правую часть равенства (13) в случае $k = 1$:

$$\begin{aligned} p_4(\tau, \varphi) &= \sum_{j=1}^6 \tau^{j+2} q_j w_{4-j} + \left(\frac{g_{0,0}}{q_0} q_6 + \left(\frac{g_{0,1}}{q_0} - \frac{g_{0,0} q_1}{q_0^2} \right) q_5 \right) \tau^6 - \frac{\partial w_3}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \varphi^2} + h_{1,0} \tau^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}} + \tau^2 \sum_{j=1}^6 q_j w_{4-j,j} + h_{1,0} \tau^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $h_{1,0} = -\sum_{s=1}^6 q_s w_{4-s,s}$, получаем $p_4(\tau, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}}$. Применяя лемму 2, получаем разложение $w_4(\tau, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{4,4k}}{\tau^{4k}}$. Докажем теперь справедливость (20) при $s = 0$.

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение (20) при $h_{k,j}(\varphi) = -\sum_{s=1}^{4k+2} q_{s+j}(\varphi) w_{4k-s,s}(\varphi)$.

Тогда из равенства

$$Lw_{4(k+1)} = p_{4(k+1)}(\tau, \varphi) + \sum_{j=0}^k h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} \quad (21)$$

следует справедливость соотношения

$$w_{4(k+1)}(\tau, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{4(k+1),4j}}{\tau^{4j}}.$$

Действительно, рассмотрим правую часть (21):

$$\begin{aligned} p_{4(k+1)}(\tau, \varphi) + \sum_{j=0}^k h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} &= \sum_{j=1}^{4(k+1)+2} \tau^{j+2} q_j w_{4(k+1)-j} + \left(\frac{g_{0,0}}{q_0} q_{4k+6} + \left(\frac{g_{0,1}}{q_0} - \frac{g_{0,0} q_1}{q_0^2} \right) q_{4k+5} \right) \tau^{4k+6} - \\ &- \frac{\partial w_{4k+3}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{4k+2}}{\partial \varphi^2} + \sum_{j=0}^k h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}} + \sum_{s=1}^{4k+2} q_{s+j}(\varphi) w_{4k-s,s}(\varphi) + \sum_{j=0}^k h_{k+1-j,4j} \tau^{4j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+2}}{\tau^{4k+2}}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2 для (21), получим $w_{4(k+1)}(\tau, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{4(k+1),4j}}{\tau^{4j}}$, $\tau \rightarrow +\infty$. Лемма 3 доказана.

Таким образом, нами определены все члены асимптотического ряда $W(\tau, \varphi, \mu)$. Заметим, что все пограничные функции $w_{k-2}(\tau, \varphi)$, $k = 0, 1, \dots$ вне пограничного слоя убывают степенным ростом

$$w_{4k-2}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^2), w_{4k-1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau), w_{4k}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^4), w_{4k+1}(\tau, \varphi) = O(1/\tau^3), k = 0, 1, \dots, \tau \rightarrow +\infty,$$

т.е. $\forall k: \lim_{\tau \rightarrow +\infty} w_k(\tau, \varphi) = 0, k = -2, -1, 0, 1, \dots$

При $\tau = (b-a)/\mu$ и $\mu \rightarrow 0$, справедливо разложение

$$W((b-a)/\mu, \varphi, \mu) = \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k w_k((b-a)/\mu, \varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \tilde{w}_k(\varphi).$$

Действительно, когда $\tau \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi) &= \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{-2,4k+2}(\varphi)}{\tau^{4k+2}} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{-1,4k+1}(\varphi)}{\tau^{4k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{0,4k+4}(\varphi)}{\tau^{4k+4}} + \dots \\ &+ \mu^{4m} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{4m,4k+4}(\varphi)}{\tau^{4k+4}} + \mu^{4m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{4m+1,4k+3}(\varphi)}{\tau^{4k+3}} + \mu^{4m+2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{4m+2,4k+2}(\varphi)}{\tau^{4k+2}} + \dots \end{aligned}$$

При $\tau = (b-a)/\mu$ и $\mu^4 = \varepsilon$, получим

$$\sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k w_k\left(\frac{b-a}{\mu}, \varphi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\frac{w_{-2,4k+2}(\varphi)}{(b-a)^{4k+2}} + \frac{w_{-1,4k+1}(\varphi)}{(b-a)^{4k+1}} + \varepsilon \frac{w_{0,4k+3}(\varphi)}{(b-a)^{4k+4}} + \dots \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \tilde{w}_k(\varphi).$$

Классическое погранслоное решение $Q(\eta, \varphi, \lambda)$

Пусть $q(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{q}_j(\varphi)(b-\rho)^j$, $\tilde{q}_j(\varphi) = (-1)^j \frac{\partial^j q(b, \varphi)}{j! \partial \rho^j}$, $\lambda/(b-\lambda\eta) \sim \lambda$ при $\lambda \rightarrow 0$, тогда из

уравнения (10) и условия (7) для функции $z_k(\eta, \varphi)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{\partial^2 z_k(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - \lambda \frac{\partial z_k(\eta, \varphi)}{\partial \eta} + \lambda^2 \frac{\partial^2 z_k(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) - (c-\eta\lambda)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{q}_j(\varphi)(\eta\lambda)^j \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z_k(\eta, \varphi) = 0,$$

$(\eta, \varphi) \in D_2,$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k(0, \varphi) \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\varphi) \lambda^{2k}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} z_k(\eta, \varphi) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим рекуррентную систему задач

$$lz_0 \equiv \frac{\partial^2 z_0(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - c^2 \tilde{q}_0(\varphi) z_0(\eta, \varphi) = 0, \quad z_0(0, \varphi) = \psi_0(\varphi), \tag{22}$$

$$lz_1 = c\eta(c\tilde{q}_1(\varphi) - 2\tilde{q}_0(\varphi)) z_0(\eta, \varphi) + \frac{\partial z_0(\eta, \varphi)}{\partial \eta}, \quad z_1(0, \varphi) = 0, \tag{23}$$

$$lz_k = \sum_{j=1}^k (c^2 \tilde{q}_j(\varphi) - 2c\tilde{q}_{j-1}(\varphi) + \tilde{q}_{j-2}(\varphi)) \eta^j z_{k-j}(\eta, \varphi) - \eta^k \tilde{q}_{k-2}(\varphi) z_0(\eta, \varphi) + \frac{\partial z_{k-1}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z_{k-2}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2},$$

$$z_k(0, \varphi) = \begin{cases} \psi_m(\varphi) & \text{при } k = 2m \\ 0 & \text{при } k = 2m+1, m \in N \end{cases} \quad k=2,3,\dots \tag{24}$$

Дополнительно потребуем выполнения условий

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} z_k(\eta, \varphi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Как нам известно [1, 2], решения задач (22)–(24) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\eta \rightarrow +\infty$,

$$z_0(\eta, \varphi) = \psi_0(\varphi) e^{-\eta c \sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}}, \quad z_1(\eta, \varphi) = (\eta^2 c_{1,2}(\varphi) + \eta c_{1,1}(\varphi)) e^{-\eta c \sqrt{\tilde{q}_0(\varphi)}},$$

$$z_{2k}(\eta, \varphi) = e^{-\eta c \sqrt{q_0(\varphi)}} (\psi_k(\varphi) + \sum_{j=1}^{4k} \eta^j c_{2k,j}(\varphi)), \quad z_{2k+1}(\eta, \varphi) = e^{-\eta c \sqrt{q_0(\varphi)}} \sum_{j=1}^{4k+2} \eta^j c_{2k+1,j}(\varphi),$$

т.е. $z_k(\eta, \varphi) = O(1/e^\eta)$, $c_{k,j}(\varphi)$ – гладкие функции.

Следовательно,

$$Q(\eta, \varphi, \lambda) = e^{-\eta c \sqrt{q_0(\varphi)}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{2k} (\psi_k(\varphi) + P_{2k}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{2k+1} P_{2k+1} \right), \quad \eta \rightarrow +\infty,$$

где $P_{2k} = \sum_{j=1}^{4k} \eta^j c_{2k,j}(\varphi)$, $P_{2k+1} = \sum_{j=1}^{4k+2} \eta^j c_{2k+1,j}(\varphi)$.

Обоснование ФАРР

Пусть $R(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) - u_m(\rho, \varphi, \varepsilon)$, где $u_m(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{2m+1} \lambda^k z_k(\eta, \varphi)$

$+ \sum_{k=-2}^{4m+1} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$, $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ – остаточный член. Тогда для $R(\rho, \varphi, \varepsilon)$ получим задачу

$$\varepsilon \Delta R(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - a)^2 q(\rho, \varphi) R(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad R(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad R(b, \varphi, \varepsilon) = 0.$$

Применяя принцип максимума, получаем оценку $R(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^m)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, в области \bar{D} . Теорема доказана.

Заключение. Построено равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного линейного, неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце с квадратичным ростом на границе. Для этого случая доказали применимость обобщенного метода пограничных функций. Полученный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзо. Главный член асимптотического разложения решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям. Формальное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле обосновано принципом максимума.

Литература

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.
2. Ильин, А.М. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon \Delta u - a(x, y) u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике / А.М. Ильин, Е.Ф. Леликова // Мат. сборник. – 1975. – Т. 96 (138), № 4. – С. 568–583.
3. Ильин, А.М. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром / А.М. Ильин, Е.Ф. Леликова // Алгебра и анализ. – 2010. – Т. 22. – Вып. 6. – С. 109–126.
4. Леликова, Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром при части старших производных / Е.Ф. Леликова // Тр. ИММ УрОРАН. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 170–178.
5. Леликова, Е.Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками / Е.Ф. Леликова // Математический сборник. – 2010. – Т. 201, № 10. – С. 93–108.
6. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения / Д.А. Турсунов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 6(26). – С. 37–44.
7. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение имеет особые точки / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – № 3(35). – С. 26–34.
8. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 42–52.

9. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – Вып 4. – С. 517–525.

10. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

11. Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2016 г.

DOI: 10.14529/mmph160207

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO THE BISINGULAR PERTURBED DIRICHLET PROBLEM IN THE RING WITH QUADRATIC GROWTH ON THE BOUNDARY

D.A. Tursunov¹, U.Z. Erkebaev²

¹ Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russian Federation

² Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

E-mail: d_osh@rambler.ru

The Dirichlet problem for elliptic equations with a small parameter in the highest derivatives takes a unique place in mathematics. In general case it is impossible to build explicit solution to these problems, which is why the researchers apply different asymptotic methods. The aim of the research is to develop the asymptotic method of boundary functions for constructing complete asymptotic expansions of the solutions to such problems. The proposed generalized method of boundary functions differs from the matching method in the fact that the growing features of the outer expansion are actually removed from it and with the help of the auxiliary asymptotic series are fully included in the internal expansions, and differs from the classical method of boundary functions in the fact that the boundary functions decay in power-mode nature and not exponentially. Using the proposed method, a complete asymptotic expansion of the solution to the Dirichlet problem for bisingular perturbed linear inhomogeneous second-order elliptic equations with two independent variables in the ring with quadratic growth on the boundary is built. A built asymptotic series corresponds to the Puiseux series. The basic term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional degree of the small parameter, which is typical for bisingular perturbed equations, or equations with turning points. The built expansion is justified by the maximum principle.

Keywords: Asymptotic expansion of a solution; bisingular perturbation; elliptic equation; Dirichlet problem in the ring; small parameter; generalized method of boundary functions; boundary functions; modified Bessel functions.

References

1. Il'in, A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Concordance of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 334 p. (in Russ.).

2. Il'in A.M., Lelikova E.F. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, Vol. 25, no. 4, pp. 533–548. DOI: 10.1070/SM1975v025n04ABEH002461

3. Il'in A.M., Lelikova E.F. On asymptotic approximations of solutions of an equation with a small parameter. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2011, Vol. 22, no. 6, pp. 927–939. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01177-X

4. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter at some of the highest derivatives. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 2013, Vol. 281, suppl. 1, pp. 95–104. (in Russ.). DOI: 10.1134/S008154381305009X

5. Lelikova E.F. The asymptotics of the solution of an equation with a small parameter in a domain with angular points. *Sbornik: Mathematics*, 2010, Vol. 201, no. 10, pp. 1495–1510. DOI:10.1070/SM2010v201n10ABEH004119

6. Tursunov D.A. Asymptotic expansion of the solution of the bisingularly perturbed elliptic equation. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 6(26), pp. 37–44. (in Russ.).

7. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of a perturbed elliptic equation when the limit equation has singular points. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2015, no. 3(35), pp. 26–34. (in Russ.). DOI: 10.17223/19988621/35/4

8. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2016, no. 1(39), pp. 42–52. (in Russ.).

9. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, Vol. 25, Issue 4, pp. 517–525. (in Russ.).

10. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 464 p. [Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001, 518 p. (in Eng.). DOI: 10.1007/978-3-642-61798-0_1]

11. Fedoryuk M.V. *Asimptoticheskie metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 352 p. (in Russ.).

Received February 24, 2016

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

В.И. Ухоботов, И.В. Изместьев

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

E-mail: ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

Рассматривается задача преследования двух движущихся материальных объектов – перехватчика (преследователя) и цели (убегающего). Объекты движутся в одной плоскости под действием управляемых сил, направленных всегда перпендикулярно их скоростям. Законы изменения величин управляемых сил перехватчика и цели определяются контроллерами первого порядка. Кроме того, на объекты действуют силы сопротивления среды, пропорциональные квадратам скоростей. В рассматриваемой задаче построено управление, гарантирующее встречу.

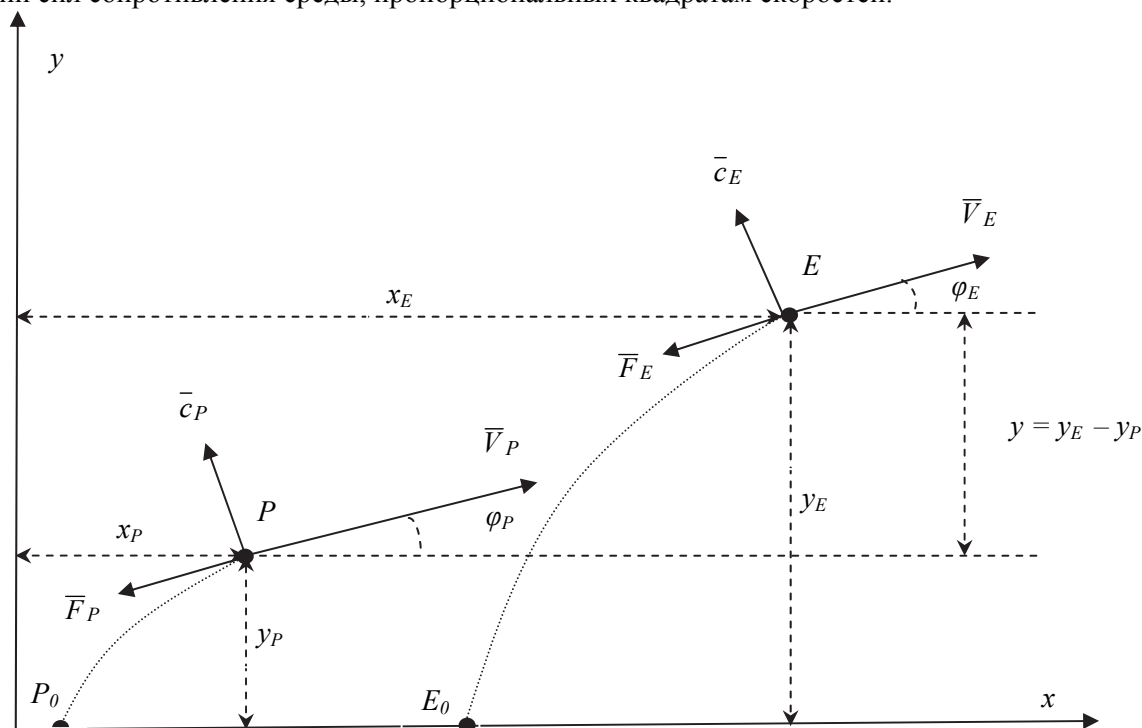
Ключевые слова: задача преследования; управление.

Введение

В работах [1–8] рассматривались различные варианты игровой задачи преследования двух движущихся объектов – перехватчика (преследователя) и цели (убегающего) при следующих предположениях: объекты движутся в некоторой плоскости; оба объекта имеют постоянные по величине скорости и ограниченные значения боковых ускорений; динамика каждого объекта описывается функцией преобразования первого порядка; траектории обоих объектов могут быть линеаризованы при данном геометрическом описании столкновения; доступна полная информация о положении объектов в каждый момент времени.

Одно из решений этой задачи, полученное в [1] и [4], основывалось на ее формализации в виде линейной дифференциальной игры преследования-уклонения с управлениями, принадлежащими компактам. Изначально игра формулировалась в четырехмерном пространстве со следующими координатами: относительное расстояние, относительная скорость и боковые ускорения игроков. Затем с помощью замены переменных игра редуцировалась в скалярную форму и решалась с использованием аппарата теории дифференциальных игр.

В данной статье рассматривается усложненный вариант такой задачи преследования при наличии сил сопротивления среды, пропорциональных квадратам скоростей.



Задача преследования

Постановка задачи

Считаем, что оба материальных объекта (P – преследователь, E – цель) движутся в одной плоскости (см. рис.). Выберем ось O_x так, чтобы она проходила через начальное положение P_0 и E_0 объектов P и E . На каждый объект $A = P, E$ действует управляющая сила \bar{c}_A , перпендикулярная скорости \bar{V}_A объекта, и сила сопротивления среды \bar{F}_A , которая по величине пропорциональна квадрату скорости объекта и направлена в сторону, противоположную его скорости.

Целью преследователя является осуществление захвата цели. Это означает, что расстояние до цели не должно превосходить заданного числа $\varepsilon \geq 0$.

Запишем уравнения движения. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= V_A \cos \varphi_A, \quad \dot{y}_A = V_A \sin \varphi_A, \\ m_A \ddot{x}_A &= m_A (\dot{V}_A \cos \varphi_A - \dot{\varphi}_A V_A \sin \varphi_A) = -c_A \sin \varphi_A - k_A V_A^2 \cos \varphi_A, \end{aligned} \quad (1)$$

$$m_A \ddot{y}_A = m_A (\dot{V}_A \sin \varphi_A + \dot{\varphi}_A V_A \cos \varphi_A) = c_A \cos \varphi_A - k_A V_A^2 \sin \varphi_A. \quad (2)$$

Здесь $k_A \geq 0$ – коэффициент сопротивления среды, m_A – масса материального объекта. Считаем, что законы изменения величин управляемых сил описываются контроллерами первого порядка

$$\dot{c}_P = \delta_P u - c_P q_P, \quad \delta_P > 0, \quad q_P > 0, \quad |u| \leq 1, \quad \dot{c}_E = \delta_E v - c_E q_E, \quad \delta_E > 0, \quad q_E > 0, \quad |v| \leq 1. \quad (3)$$

Умножим уравнение (1) на $\cos \varphi_A$, а уравнение (2) – на $\sin \varphi_A$ и сложим. Получим

$$m_A \dot{V}_A = -k_A V_A^2. \quad (4)$$

Умножим уравнение (1) на $-\sin \varphi_A$, а уравнение (2) – на $\cos \varphi_A$ и сложим. Будем иметь

$$\dot{\varphi}_A m_A V_A = c_A. \quad (5)$$

Решая уравнение (4), находим

$$V_A(t) = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}, \quad \hat{k}_A = \frac{k_A}{m_A}.$$

Отсюда, учитывая (5), получим

$$\dot{x}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1} \cos \varphi_A, \quad \dot{y}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1} \sin \varphi_A, \quad \dot{\varphi}_A = \hat{c}_A \frac{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}{V_A(0)}; \quad \hat{c}_A = \frac{c_A}{m_A}.$$

Если материальные объекты достаточно массивны, то значения \hat{c}_A являются достаточно малыми. Поэтому можно считать, что в процессе движения объектов направления их скоростей мало отклоняются от оси O_x . Тогда $\cos \varphi_A \approx 1$ и $\sin \varphi_A \approx \varphi_A$. Отсюда и из предыдущих уравнений получим, что

$$\dot{x}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}, \quad \dot{y}_A = \frac{V_A(0)}{V_A(0)\hat{k}_A t + 1} \varphi_A, \quad \dot{\varphi}_A = \hat{c}_A \frac{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}{V_A(0)}. \quad (6)$$

Из первого уравнения в (6) находим, что

$$x_A(t) = x_A(0) + \frac{1}{\hat{k}_A} \ln(V_A(0)\hat{k}_A t + 1) \quad \text{при } \hat{k}_A > 0 \quad \text{и} \quad x_A(t) = x_A(0) + V_A(0)t \quad \text{при } \hat{k}_A = 0. \quad (7)$$

В начальный момент времени $x_E(0) > x_P(0)$ (см. рис.). Из формулы (7) можем найти условия, при выполнении которых существует момент времени $T > 0$, при котором будет выполнено условие $x_E(T) = x_P(T)$.

Если $\hat{k}_A > 0$ при $A = P, E$, то требуемый момент времени $T > 0$ должен являться решением уравнения

$$\frac{(V_P(0)\hat{k}_P T + 1)^\alpha}{V_E(0)\hat{k}_E T + 1} = e^{(x_E(0) - x_P(0))\hat{k}_E}; \quad \alpha = \frac{\hat{k}_E}{\hat{k}_P}. \quad (8)$$

Если $\alpha > 1$, то выражение, стоящее в левой части уравнения (8), при $T \rightarrow +\infty$ стремится к $+\infty$. Поэтому уравнение (8) имеет в этом случае положительный корень. Если $\hat{k}_P = \hat{k}_E = k > 0$, то уравнение (8) имеет положительный корень тогда и только тогда, когда

$$V_P(0) > V_E(0)e^{(x_E(0)-x_P(0))k}$$

и он равен

$$T = \frac{1}{k} \frac{e^{(x_E(0)-x_P(0))k} - 1}{V_P(0) - V_E(0)e^{(x_E(0)-x_P(0))k}}.$$

В случае $0 < \alpha < 1$ уравнение (8) не всегда имеет положительный корень.

Если $\hat{k}_P = 0$ и $\hat{k}_E > 0$, то уравнение для определения момента времени $T > 0$ принимает вид

$$\hat{k}_E V_P(0)T - \ln(V_E(0)\hat{k}_E T + 1) = (x_E(0) - x_P(0))\hat{k}_E.$$

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, стремится к $+\infty$ при $T \rightarrow +\infty$. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет положительный корень.

Если $\hat{k}_P = 0$ и $\hat{k}_E = 0$, то при $V_P(0) > V_E(0)$ корень

$$T = \frac{x_E(0) - x_P(0)}{V_P(0) - V_E(0)}.$$

Далее будем считать, что уравнение (8) имеет положительный корень T . Тогда в этот момент времени T будет осуществлен захват цели, если выполнено неравенство

$$|y_P(T) - y_E(T)| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Сведение задачи к односторонней дифференциальной игре

В работах [9, 10] показано, что задача управления с одномерной целью и заданным моментом окончания с помощью линейной замены переменных может быть сведена к односторонней задаче, для которой в работе [11] построено управление, гарантирующее встречу.

Сделаем замену переменных

$$w = y_E + \frac{\varphi_E}{\hat{k}_E} \ln \frac{1 + V_E(0)\hat{k}_E T}{1 + V_E(0)\hat{k}_E t} - y_P - \frac{\varphi_P}{\hat{k}_P} \ln \frac{1 + V_P(0)\hat{k}_P T}{1 + V_P(0)\hat{k}_P t}.$$

Тогда $w(T) = y_E(T) - y_P(T)$ и, как следует из второго и третьего уравнения (6),

$$\dot{w} = -\psi_P(t)\hat{c}_P + \psi_E(t)\hat{c}_E; \quad (10)$$

$$\psi_A(t) = \frac{V_A(0)\hat{k}_A t + 1}{V_A(0)\hat{k}_A} \ln \frac{1 + V_A(0)\hat{k}_A T}{1 + V_A(0)\hat{k}_A t} \geq 0, \quad A = P, E.$$

Введем новую переменную

$$z = w - \hat{c}_P \int_t^T e^{q_P(t-r)} \psi_P(r) dr + \hat{c}_E \int_t^T e^{q_E(t-r)} \psi_E(r) dr.$$

Тогда $z(T) = y_E(T) - y_P(T)$ и, согласно (3) и (10),

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad u \in [-1, 1], \quad v \in [-1, 1]; \quad a(t) = \frac{\delta_P}{m_P} \int_t^T e^{q_P(t-r)} \psi_P(r) dr, \quad b(t) = \frac{\delta_E}{m_E} \int_t^T e^{q_E(t-r)} \psi_E(r) dr.$$

В работе [11] показано, что, если выполнено неравенство

$$\max \left(|z(0)| + \int_0^T (b(r) - a(r)) dr; \max_{0 \leq t \leq T} \int_t^T (b(r) - a(r)) dr \right) \leq \varepsilon, \quad (12)$$

то в дифференциальной игре (11) управление $u(t, z) = \text{sign } z$ обеспечивает в момент времени T выполнение неравенства $|z(T)| \leq \varepsilon$ при любом допустимом управлении $|v| \leq 1$. Если же неравенство (12) не выполнено, то управление $v(t, z) = \text{sign } z$ гарантирует выполнение неравенства $|z(T)| > \varepsilon$ при любом допустимом управлении $|u| \leq 1$.

Таким образом, если выполнено неравенство (12), то управление преследователя $u(t, z) = \text{sign } z$ обеспечивает в момент времени T выполнение неравенства (9) при любом допустимом управлении $|v| \leq 1$ цели. Поэтому будет осуществлен захват цели в момент времени T .

Литература

1. Shinar, J. Solution techniques for realistic pursuit-evasion games / J. Shinar // *Advances in Control and Dynamic Systems*. – 1981. – Vol. 17. – P. 63–124.
2. Shinar, J. Singular surface in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms / J. Shinar, M. Medinah, M. Biton // *J. Optimiz. Theory and Appl.* – 1984. – Vol. 43, no. 3. – P. 431–456
3. Shinar, J. Pursuit of a faster evader – a linear game with elliptical vectograms / J. Shinar, M. Zarkh // *Proc. 7th Intern. Symp. on Dynamic Games*. – Yokosuka: Japan, 1996. – P. 855–868.
4. Shima, T. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls / T. Shima, J. Shinar // *J. Guidance, Control and Dynamics*. – 2002. – no. 25. – P. 425–432.
5. Turetsky, V. Continuous feedback control strategy with maximal capture zone in a class of pursuit games / V. Turetsky, V.Y. Glizer // *International Game Theory Review*. – 2005. – Vol. 7, no. 1. – P. 1–24.
6. Shima, T. Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics / T. Shima // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2005. – Vol. 126, no. 3. – P. 503–528.
7. Kumkov, S.S. On level sets with “narrow throats” in linear differential games / S.S. Kumkov, V.S. Patsko, J. Shinar // *Intern. Game Theory Rev.* – 2005. – Vol. 7, no 3. – P. 285–311.
8. Model problem in a line with two pursuers and one evader / S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, Le S. Menec, V.S. Patsko // *Dyn. Games Appl.* – 2012. – Vol. 2, no. 2. – P. 228–257.
9. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
10. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца / В.И. Ухоботов, И.В. Изместьев // *Динамика систем и процессы управления (SDCP’2014): Труды международной научной конференции (Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.)*. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. – С. 325–332.
11. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью / В.И. Ухоботов // *Тр. ИММ УрО РАН*. – 2010. – Т. 16. – № 5. – С. 196–204.

Поступила в редакцию 21 декабря 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160208

ON A PURSUIT PROBLEM UNDER RESISTANCE OF A MEDIUM

V.I. Ukhobotov, I.V. Izmestyev

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

This paper considers a game pursuit problem, in which the interceptor (pursuer) and target (evader) move in the same plane under the influence of controlled forces directed always perpendicularly to their velocities. The laws of value variation of controlled forces of interceptor and target are determined by first-order controllers. Besides that, each object is influenced by the force of resistance of a medium which is proportional to the squared velocity of the object and is directed to the side which is opposite to its velocity.

It is assumed that during the motion of objects, directions of their velocities are little different from an axis passing through their initial positions. It allows linearizing equations of motion of the pursuer and target. As a result of linearization it turns out that the projections of the position of objects on the axis change by a known law. When there is a coincidence of these projections, the time point prescribes the moment of the end of prosecution process. It is expected that the capture has occurred, if at this time point the module of difference of vector projections of object position on a perpendicular axis does not exceed a predetermined number. Eventually, a linear differential game of pursuit-evasion with fixed end time is obtained. Full information on the state of objects at each time point is available for players.

With the help of a linear change of variables, the game comes down to a homogeneous one-dimensional differential game, in which the possible values of control belong to the segments which depend on the time.

As a result of the research the set of initial conditions is found, under which the capture of target is possible when in any of its allowable motion, and the control of pursuer that will ensure the capture is built.

Keywords: pursuit problem; control.

References

1. Shinar J. Solution techniques for realistic pursuit-evasion games. *Advances in Control and Dynamic Systems*, 1981, Vol. 17, pp. 63–124. DOI: 10.1016/b978-0-12-012717-7.50009-7
2. Shinar J., Medinah M., Biton M. Singular surface in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms. *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1984, Vol. 43, no. 3, pp. 431–456. DOI: 10.1007/BF00934465
3. Shinar J., Zarkh M. Pursuit of a faster evader – a linear game with elliptical vectograms. *Proc. 7th Intern. Symp. on Dynamic Games*, Yokosuka, Japan, 1996, pp. 855–868.
4. Shima T., Shinar J. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 2002, Vol. 25, no. 3, pp. 425–432. DOI: 10.2514/2.4927
5. Turetsky V., Glizer V.Y. Continuous feedback control strategy with maximal capture zone in a class of pursuit games. *International Game Theory Review*, 2005, Vol. 7, no. 1, pp. 1–24. DOI: 10.1142/S0219198905000375
6. Shima T. Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, Vol. 126, no 3, pp. 503–528. DOI: 10.1007/s10957-005-5495-3
7. Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J. On level sets with “narrow throats” in linear differential games. *Intern. Game Theory Rev*, 2005, Vol. 7, no. 3, pp. 285–311. DOI: 10.1142/S0219198905000533
8. Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. Model problem in a line with two pursuers and one evader. *Dyn. Games Appl*, 2012, Vol. 2, no. 2, pp. 228–257. DOI: 10.1007/s13235-012-0041-z
9. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (in Russ.).
10. Ukhobotov V.I., Izmestyev, I.V. Odnopnyye differencial'nye igry s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa [One-type differential games with a terminal set in the form a ring]. *Dinamika sistem i processy upravleniya* [System dynamics and control processes]. *Proceeding of International Conference SDCP'2014* (Ekaterinburg, Russia, Sept. 15–20, 2014), Ekaterinburg, IMM UrO RAN Publ., 2015, pp. 325–332. (in Russ.).
11. Ukhobotov V.I. Odnopnyye differencial'nye igry s vypukloj cel'ju [One type differential games with convex goal]. *Trudy Instituta Matematiki I Mehaniki Uro RAN*, 2010, Vol. 16, no. 5, pp. 196–204.

Received December 21, 2015

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПИНОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА ДЛЯ ПУЧКОВ ГАУССА

Н. Алвассити¹, Э. А. Бибикова^{1,2}

¹ Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

² Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: bibikova@usu.ru

Исследован геометрический спиновый эффект Холла для ассиметрично сходящегося полного пучка Гаусса в новых экспериментальных условиях. Компьютерные методы обработки изображения позволили получить значимые сдвиги «центра тяжести» интенсивности z -компоненты в перетяжке светового пучка $3,0 \pm 0,5$ мкм.

Ключевые слова: спиновый эффект Холла, поперечный сдвиг перетяжки

Введение

Спиновый и орбитальный моменты фотона принято связывать с поляризацией и траекторией распространения света соответственно. Известно, что в неоднородной или анизотропной среде эти моменты взаимозависимы. Это взаимодействие принято называть спин-орбитальным взаимодействием или оптическим спиновым эффектом Холла для света.

Подобный эффект наблюдается и в свободном пространстве, то есть вне зависимости от взаимодействия света с веществом. Этот эффект известен как геометрический спиновый эффект Холла. Впервые он был теоретически предсказан в работе [1], в которой показано, что при смене знака циркулярности циркулярно поляризованного ассиметрично сходящегося пучка Гаусса в плоскости перетяжки происходит сдвиг его «центра тяжести» в направлении, поперечном оси распространения света. Величина смещения мала и составляет значение порядка радиуса перетяжки пучка. Было показано, что наблюдение этого эффекта возможно в следующей схеме. Плоская циркулярно поляризованная волна распространяется в направлении OZ и падает на линзу. Если перекрыть половину сходящегося монохроматического циркулярно поляризованного пучка непрозрачной заслонкой ($y < 0$), то у него появляется нескомпенсированная E_z -компонента, распределение интенсивности которой при смене знака циркулярной поляризации претерпевает поперечное смещение в направление OX .

Первые наглядные результаты экспериментального обнаружения сдвига перетяжки пучка были представлены в работе [2]. Для формирования сходящегося пучка использовался короткофокусный объектив. С помощью специального экрана пучок перекрывался наполовину. Для визуализации светового пучка в область перетяжки помещалась рассеивающая среда (синтетический опал). В направлении, перпендикулярном оси светового пучка, наблюдалось рассеяние света, вызванное только z -компонентой светового поля. Оптическая система давала изображение фокальной перетяжки, которое записывалось на фотопластинку. Таким образом были получены фотографии пучка, сформированного вследствие рассеяния z -компоненты, для случая лево- и правоциркулярно поляризованного света, визуальное сравнение которых позволило судить о величине сдвига z -компоненты.

Для той же схемы распространения света была предложена обобщенная теория [3], которая применима к пучку с произвольным распределением интенсивности в поперечном сечении. Рассчитана величина сдвига «центра тяжести» в общем случае. Также показано, что одинаковый по значению сдвиг «центра тяжести» сходящегося пучка имеет место во всех сечениях, а не только в плоскости перетяжки. Экспериментально наблюдение сдвига возможно только в фокальной плоскости, поскольку величина сдвига порядка величины перетяжки. Точность теоретических расчётов в работах [1, 3] ограничена параксиальным приближением.

В плоскости, наклонной к направлению распространения света в свободном пространстве было обнаружено расщепление коллимированного пучка Гаусса на две компоненты (с левой и

правой циркулярной поляризацией), что было теоретически и экспериментально продемонстрировано в работах [4, 5]. Экспериментальные исследования геометрического спинового эффекта Холла также были выполнены в работе [6]. В работе [7] рассчитано распределение интенсивности z -компоненты в фокальной плоскости для циркулярно поляризованного пучка Гаусса.

В настоящей работе предлагается экспериментальное исследование сдвига перетяжки полного, а не усеченного, пучка Гаусса при смене знака циркулярности циркулярно поляризованного света в новых экспериментальных условиях, которые позволяют избежать дифракционных явлений на краю экрана [2], а также позволяют перейти от визуального наблюдения сдвига к получению точных результатов с помощью цифровой обработки изображений.

Экспериментальные результаты

Схема экспериментальной установки для наблюдения эффекта представлена на рис. 1. В качестве источника излучения использовался гелий-неоновый лазер, генерирующий на основной поперечной моде с длиной волны 632,8 нм. Для оценки пространственных параметров светового пучка с помощью ПЗС-камеры были сделаны фотографии его поперечного сечения (рис. 2). Как видно из рисунка, лазерный пучок несколько отличается от гауссовского: хорошо заметна кольцевая структура пучка. Аппроксимация распределения интенсивности гауссовской зависимостью дает приблизительное значение диаметра пучка $\sim 1,5$ мм по критерию e^{-2} от интенсивности в максимуме. Пучок лазерного излучения фокусировался объективом с числовой апертурой 0,11. Оценка радиуса перетяжки пучка в данных экспериментальных условиях дала величину $r \sim 5,5$ мкм. Ожидаемый сдвиг «центра тяжести» перетяжки, согласно работе [1], составляет также 5,5 мкм.

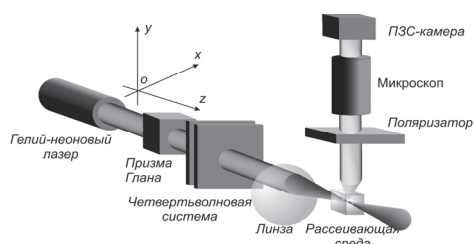
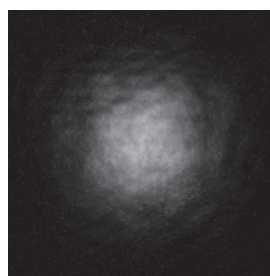
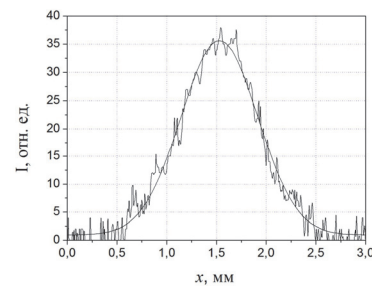


Рис. 1. Схема экспериментальной установки



а)



б)

Рис. 2. Световой пучок на выходе лазера: а) фотография поперечного сечения пучка, б) зависимость интенсивности от координаты x в поперечном сечении пучка

Необходимо было сформировать асимметричный сходящийся световой пучок, для этого свет распространялся через верхнюю (либо нижнюю) половину объектива. Это позволяло избежать паразитных дифракционных явлений, как это было бы при использовании экрана, перекрывающего половину линзы [2]. Для получения циркулярно поляризованного света лазерный луч распространялся через призму Глана и составную четвертьволновую систему [8], состоящую из двух слюдяных пластинок. Поляризационные параметры пластинок были предварительно измерены с большой точностью, что позволило рассчитать и настроить систему для получения лево- и правоциркулярно поляризованного излучения с точностью 0,99 %.

Для визуализации светового пучка в область перетяжки помещалась рассеивающая среда (синтетический опал). В направлении OY , перпендикулярном оси светового пучка, наблюдалось рассеяние света. Поляризатор устанавливался таким образом, чтобы его ось пропускания была параллельна оси распространения света, что позволяло избавиться от рассеяния света, вызванного x -компонентой светового поля и наблюдать рассеяние только z -компоненты. Микроскоп позволял получить увеличенное изображение фокальной перетяжки, которое регистрировалось ПЗС-камерой. На рис. 3 представлены фотографии z -компоненты пучка для лево- и правоциркулярно поляризованного света при условии, что свет распространяется через верхнюю половину линзы. Специальная компьютерная программа рассчитывала центр тяжести и ширину пучка, используя полученные изображения. Согласно этим результатам, радиус перетяжки составил ~ 10 мкм, что превышает значение $\sim 5,5$ мкм для идеального гауссовского пучка с таким же углом схождения. Такое различие можно объяснить, во-первых, более сложной угловой структурой лазерного пучка, а во-вторых, абберационными искажениями. Очевидно, что в условиях экс-

перимента, когда пучок в перетяжке уширен, эффект должен проявляться менее отчетливо, а наблюдаемый сдвиг может быть меньше, чем предсказанная величина. В результате полученных данных было определено направление сдвига перетяжки, оно соответствовало теоретически предсказанному [1], и менялось на противоположное, если пучок распространялся через другую половину линзы. Величина сдвига составила $3,0 \pm 0,5$ мкм. Погрешность была определена за счет многократного повторения эксперимента после переюстировки установки.



Рис. 3. Изображения фокальной перетяжки, полученные в результате рассеяния z-компоненты пучка: а) для право- и б) для лево-циркулярно поляризованного света. Область изображения 100 мкм на 130 мкм. Стрелками изображено направление сдвига

Сдвиг «центра тяжести» происходит лишь в результате геометрического спинового эффекта Холла и не связан с изменениями распространения луча вследствие перестройки четвертьволновой системы для получения циркулярной поляризации различных знаков. Для проверки этого в экспериментальную установку между объективом и составной четвертьволновой системой был помещен дополнительный поляризатор. Таким образом, через объектив распространялся линейно поляризованный свет. Изменения настройки составной пластинки не вызывали какого-либо существенного смещения «центров тяжести» изображений перетяжки пучка. В этом случае сдвиг был порядка погрешности измерений $0,3$ мкм.

Заключение

Исследован геометрический спиновый эффект Холла, а именно влияние спинового углового момента фотона на его орбитальный момент на примере ассиметрично сходящегося полного пучка Гаусса в новых экспериментальных условиях. Экспериментально установлено, что направление сдвига «центра тяжести» интенсивности z-компоненты в перетяжке светового пучка зависит от знака циркулярной поляризации и от направления асимметрии. Компьютерные методы обработки изображения позволили получить значение сдвига $3,0 \pm 0,5$ мкм.

Дальнейшее исследование геометрического спинового эффекта Холла предполагается провести для пучка Бесселя с ненулевым топологическим зарядом. Это представляет интерес, поскольку позволяет учесть влияние той части орбитального момента фотона, которая связана с пространственной структурой поля (т.е. с дислокацией волнового фронта).

Работа выполнена в рамках темы государственного задания № 0389-2014-0030.

Литература

1. Baranova, N.V. Transverse shift of a focal spot due to switching of the sign of circular polarization / N.V. Baranova, A.Yu. Savchenko, B.Ya. Zel'dovich // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – Т. 59. – С. 216–218.
2. Зельдович, Б.Я. Наблюдение поперечного сдвига фокальной перетяжки при смене знака циркулярной поляризации / Б.Я. Зельдович, Н.Д. Кундикова, Л.Ф. Рогачева // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – № 59. – С. 737.
3. Bekshaev, A.Y. Improved theory for the polarization-dependent transverse shift of a paraxial light beam in free space / A.Y. Bekshaev // Ukr. J. Phys. Opt. – 2011. – № 12. – P. 10–18.
4. Transverse Angular Momentum and Geometric Spin Hall Effect of Light / A. Aiello, N. Lindlein, C. Marquardt, G. Leuchs // Physical review letters. – 2009. – № 103. – P. 100401.
5. Korger, J. Observation of the Geometric Spin Hall Effect of Light / J. Korger, A. Aiello, V. Chille // Physical review letters. – 2014. – № 112. – P. 113902.

6. Neugebauer, M. Geometric spin Hall effect of light in tightly focused polarization tailored light beams / M. Neugebauer, P. Banzer, T. Bauer // *Phys. Rev. A.* – 2014. – Vol. 89. – P. 013840.
7. Zhao, Y. Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam / Y. Zhao, J.S. Edgar, G. Jeffries // *Physical review letters.* – 2007. – Vol. 99. – P. 073901.
8. Bibikova, E.A. Properties of an adjustable quarter-wave system under conditions of multiple beam interference / E.A. Bibikova, N.D. Kundikova // *Applied optics.* – 2013. – Vol. 52. – P. 1852–1856.

Поступила в редакцию 8 апреля 2016 г.

DOI: 10.14529/mmph160209

GEOMETRIC SPIN HALL EFFECT FOR GAUSSIAN BEAM

N. Al-wassiti¹, E.A. Bibikova^{1,2}

¹ *South Ural State University, Chelyabinsk, Russia*

² *Institute of Electrophysics of UD RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*

E-mail: bibikovaea@susu.ru

We report the results of experimental observation of the influence of light polarization on its propagation in free space (Geometric spin Hall effect of light) for the whole Gauss beam under new experimental condition. We experimentally confirm the existence of the effect of the focal waist shift under the change of the sign of the circular polarization of light passed through the upper (or lower) half of a lens. Computer methods of image processing have allowed to obtain the shift value $3,0 \pm 0,5 \mu\text{m}$.

Keywords: Geometric spin Hall effect of light; transverse shift of the waist.

References

1. Baranova N.B., Savchenko A.Y., Zel'dovich B.Y. Transverse shift of a focal spot due to switching of the sign of circular polarization. *JETP Lett.*, 1994, Vol. 59, pp. 232–234.
2. Kundikova N.D., Podgornov F.V., Rogacheva L.F., Zel'dovich B.Ya. Manifestation of spin-orbit interaction of photon in a vacuum. *Pure Appl. Opt.*, 1995, Vol. 4, pp. 179–183. DOI: 10.1088/0963-9659/4/3/005
3. Bekshaev A.Y. Improved theory for the polarization-dependent transverse shift of a paraxial light beam in free space. *Ukr. J. Phys. Opt.*, 2011, Vol. 12, pp. 10–18. DOI: 10.3116/16091833/12/1/10/2011
4. Aiello A., Lindlein N., Marquardt C., Leuchs G. Transverse angular momentum and geometric spin hall effect of light. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, Vol. 103, P. 100401. DOI: 10.1103/physrevlett.103.100401
5. Koger J., Aiello A., Chille V., Banzer P., Wittmann C., Lindlein N., Marquardt C., Leuchs G. Observation of the Geometric Spin Hall Effect of Light. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, Vol. 112, pp. 113902. DOI: 10.1103/physrevlett.112.113902
6. Neugebauer M., Banzer P., Bauer T., Orlov S., Lindlein N., Aiello A., Leuchs G. Geometric spin Hall effect of light in tightly focused polarization tailored light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, Vol. 89, pp. 013840. DOI: 10.1103/physrev.89.013840
7. Zhao Y., Edgar J.S., Jeffries G.D.M., McGloin D., Chiu D.T. Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, Vol. 99, p. 073901. DOI: 10.1103/physrevlett.99.073901
8. Bibikova E.A., Kundikova N.D. Properties of an adjustable quarter-wave system under conditions of multiple beam interference. *Applied optics*, 2013, Vol. 52, pp. 1852–1856. DOI: 10.1364/ao.52.001852

Received April 08, 2016

РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ ВАКАНСИЙ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А.В. Галактионова, А.К. Емалетдинов

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа,
Российская Федерация
E-mail: g-arina@yandex.ru

Рассмотрено моделирование кинетики вакансий при термомеханическом нагружении, которое включает циклические напряжения растяжения и воздействие температуры. Кинетика вакансий определяется диффузионным уравнением с учетом диффузионных и термических напряжений. Получена система уравнений для неоднородной концентрации вакансий для одномерной задачи, решаемая численными методами.

Ключевые слова: термическое расширение; химический потенциал; диффузионные напряжения; неоднородная концентрация вакансий; термоактивационный механизм.

Эволюция вакансионной системы и зарождение пор под действием циклической термомеханической нагрузки определяют долговечность нанокристаллических двухфазных сплавов, например, жаропрочных сплавов, представляющих собой композиционные материалы, состоящие из кубических зерен γ' фазы размером до 0,5 мкм и соединенных тонкими прослойками матричной γ фазы толщиной до 0,05 мкм [1–3]. В процессе эксплуатации сплавы испытывают комплексное воздействие нескольких эксплуатационных факторов: высоких нагрузок, вибрации, неравномерного циклического нагрева. Под действием термомеханических нагрузок происходит зарождение избыточных неравновесных вакансий, активация диффузионных процессов, рост пор. Парциальные коэффициенты диффузии компонентов различны, что также приводит к возникновению потоков вакансий в зернах и прослойках. Исследование кинетики вакансий, роста и залечивания пор в никелевых жаропрочных сплавах в технологиях залечивания пористости было проведено в работах [4–6]. Однако кинетика возникновения и развития избыточной концентрации вакансий при различных видах термомеханического нагружения, которые возникают при эксплуатации, до настоящего времени не исследована.

Целью работы является проведение расчета концентрации вакансий в одномерной модели при термомеханическом нагружении, включающем циклические напряжения растяжения, температурные напряжения и нагрев до высоких температур с учетом микроструктуры.

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину, находящуюся под действием постоянных и циклических растягивающих напряжений вдоль и температурного градиента поперек пластины. Для решения задачи об определении межфазных напряжений нужно рассмотреть периодическую ячейку γ'/γ -микроструктуры, состоящую из γ' -кубоида, окруженного γ -оболочкой, которая в свою очередь состоит из трех γ -пластин, трех γ -брусьев и маленького γ -кубоида (рис. 1). В данной статье исследуется задача с учетом изменения коэффициента диффузии при наличии циклических напряжений и градиента температуры.

В процессе нагружения возникает избыточная неоднородная неравновесная концентрация вакансий. В условиях непрерывного изменения температуры развиваются напряжения,

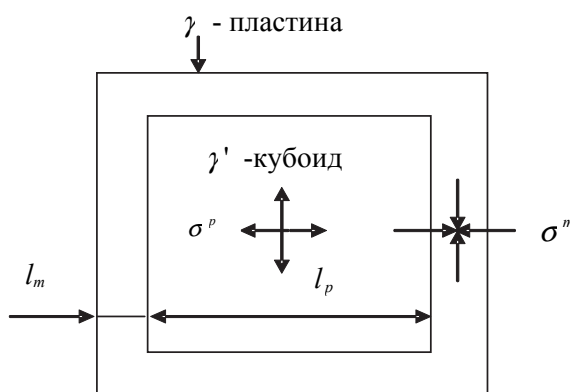


Рис. 1. Схематическая микроструктура жаропрочных никелевых сплавов

возникающие вследствие разницы коэффициентов термического расширения фаз. Кинетика вакансий определяется диффузионным уравнением с источником вакансий по термоактивационному механизму с учетом диффузионных и термических напряжений, а также концентрации напряжений возле включений [7–11]. Межфазные (когерентные) напряжения в γ'/γ -микроструктуре недеформированных жаропрочных никелевых сплавов возникают из-за разности параметров γ - и γ' -решеток.

В работах [12–14] межфазные напряжения рассчитывали в двумерном приближении (плоское деформированное состояние). Согласно принятым допущениям, напряженное состояние периодической ячейки описывается двумя компонентами напряжений σ^m и σ^p (рис. 1).

За счет работы термомеханических нагрузок происходит зарождение избыточных вакансий. Кинетика изменения плотности избыточных вакансий в первом приближении описывается уравнением [7]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla D \nabla c = \frac{c - c_0}{\tau_0}, \quad (1)$$

где c – избыточная плотность вакансий, c_0 – равновесная плотность вакансий, τ_0 – среднее время жизни вакансий до поглощения стоками (дислокациями, границами и др.), D – коэффициент диффузии вакансий. Характерное время жизни вакансии до поглощения в стоке оценивается выражением [7]

$$\tau_0 = l^2 p / D, \quad (2)$$

где l – среднее расстояние между стоками, p – коэффициент прилипания вакансии. В зависимости от плотности стоков время жизни вакансий может изменяться от 10 до 10^3 с.

В упругом поле напряжений σ и температур T в изотропной среде вакансии будут обладать химическим потенциалом, который может быть представлен в виде [7]

$$\mu = kT \ln\left(\frac{c}{c_0}\right) - \frac{1}{3} \Omega \sigma + \frac{k_T}{cD} T, \quad (3)$$

где Ω – мощность вакансии, характеризующая изменение объема кристалла при образовании в нем вакансии, $\Omega = 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$, k_T – термодиффузионное отношение, $\sigma = 0 \div 1,8 \cdot 10^8 \text{ Па}$. Первое слагаемое описывает диффузию вакансий, второе и третье слагаемые характеризуют дрейфовое движение вакансий под действием неоднородных напряжений и температуры соответственно. Равновесная концентрация вакансий определяется соотношением

$$c_0 = \exp\left(\frac{-E + \alpha \Omega}{kT}\right), \quad (4)$$

где E – энергия образования вакансии. Систему уравнений (1)–(4) необходимо дополнить граничными условиями. На неравновесную концентрацию вакансий оказывают влияние концентрационные и диффузионные напряжения, циклическая термомеханическая нагрузка. Величина концентрационных напряжений зависит от размерного несоответствия атомов и модулей сжимаемости компонентов. Диффузионные напряжения возникают вследствие неравных встречных потоков атомов компонентов. В первом приближении в линейной теории упругости суммарные напряжения будут определяться выражением [5–8]

$$\sigma(r) = \sigma_0 + K_0 \Omega c + \sigma_1 - K_0 \alpha_T T(r), \quad (5)$$

где σ_0, σ_1 – значения напряжений центробежных растяжения и вибрационных соответственно, $T = 1193 \div 1293 \text{ K}$, K_0 – модуль всестороннего сжатия, α_T – коэффициент теплового расширения. Первое слагаемое описывает растягивающие центробежные напряжения, второе и третье слагаемые характеризуют концентрационные и вибрационные напряжения, последнее – термоупругие напряжения.

При взаимодействии одиночных избыточных вакансий в поле напряжений и температур возникают неустойчивости, приводящие к образованию кластеров вакансий. Избыточная плотность вакансий c определяется выражением

$$\Delta c = c - c_0 = c_0 \frac{\Delta D}{D} + c_0 \exp\left(\frac{\alpha \Omega}{kT}\right), \quad (6)$$

где $\Delta D = D_m - D_p$; D_m, D_p – коэффициенты диффузии в пластине и кубоиде соответственно. Решение системы уравнений (1)–(6) возможно только численными методами. Для упрощения задачи рассмотрена усредненная по срединной линии γ' -кубоида, одномерная стационарная задача для слоистой системы, состоящей из γ'/γ -микроструктуры с толщиной l_p/l_m соответственно, где $l_p = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м, $l_m = 0,05 \cdot 10^{-6}$ м [7, 8]. Задача рассматривается при условии, что величины зависят только от координаты x . На границах заданы условия непрерывности для концентрации и плотности потока вакансий.

На рис. 2 приведены относительные профили неоднородной концентрации вакансий в γ'/γ -микроструктуре, полученные при численных расчетах стационарной одномерной задачи и показывающие пространственные распределения вакансий вдоль оси x . Рис. 3 и рис. 4 показывают изменение избыточной плотности вакансий при воздействии вибрационных напряжений и температуры, соответственно. Изменения значений Δc на рис. 3 соответствуют переменным воздействиям вибрационных напряжений с течением времени.

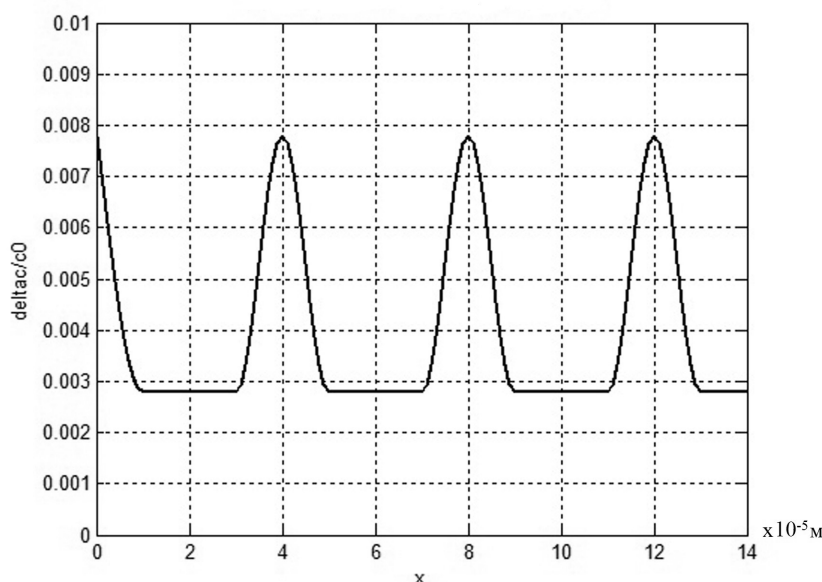


Рис. 2. Профиль зависимости неоднородной стационарной концентрации вакансий от расстояния x в зернах γ' -фазы и γ -прослойке при действии растяжения $\sigma_0 = 1,8 \cdot 10^8$ Па и температуры $T = 1100$ К

При моделировании использованы следующие значения параметров: $\sigma_0 = 180$ МПа, $\alpha_{Tm} = 18,1 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\alpha_{Tp} = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $T = 1100$ К, $D_p = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{с}$, $\sigma_1 = 5 \cdot 10^7$ Па, $\tau_0 = 10$ с.

Таким образом, в наноструктурном сплаве при термомеханической нагрузке возникает значительное пересыщение неравновесных вакансий.

Рассматривая решетку с избыточными вакансиями как пересыщенный раствор, можно рассмотреть различные механизмы их релаксации, например, образование и рост пор. В рамках механизма диффузионно-деформационной неустойчивости при достижении критического значения избыточных вакансий может возникнуть явление восходящей диффузии, когда малые локальные флуктуационные превышения концентрации вакансий начинают расти. Рост обусловлен снижением энергии Гиббса в области повышенной концентрации вакансий, вызванным действием термомеханических напряжений. Для зависимости скорости роста флуктуации \dot{r}_F от времени можно использовать уравнение [7] $\dot{r}_F \cong D \Delta c_v / r c_0$.

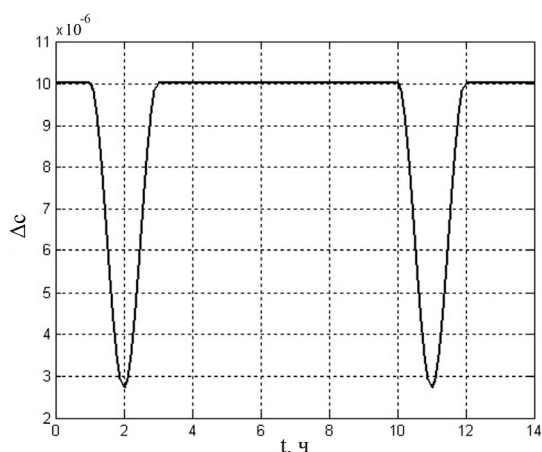


Рис. 3. Изменение избыточной плотности вакансий в зависимости от времени

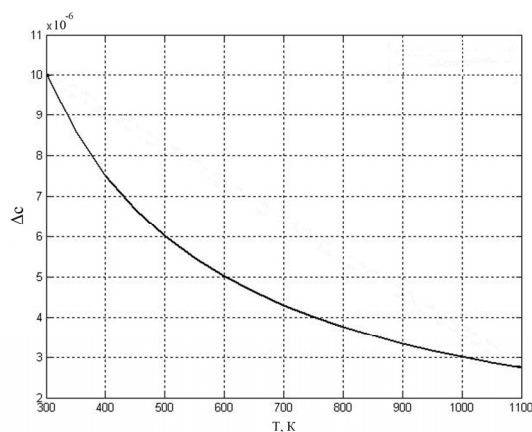


Рис. 4. Изменение избыточной плотности вакансий в зависимости от температуры

Используя параметры для никеля можно оценить время зарождения $t_F \cong 10^{-1}$ с. Благодаря пересыщению вакансий флуктуация может расти в виде поры до размера r_{II} за время t_3 : $r_{II} \cong \sqrt{2D\Delta c_v t_3 / c_0} \cong 0,5 \cdot 10^{-6}$ м.

Исследование жаропрочного никелевого сплава ЖС32-ВИ в монокристаллических охлаждаемых рабочих лопатках ТВО методом растровой электронной микроскопии показало, что при действии растягивающих напряжений при средней температуре 1100К поры размером до 1 мкм образуются в γ' - матрице [4].

Таким образом, полученное соответствие теоретических оценок с экспериментальными данными говорит об адекватности предложенной модели.

Литература

1. Шалин, Р.Е. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов / Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качанов. – М.: Машиностроение, 1977. – 336 с.
2. Каблов, Е.Н. Литые лопатки газотурбинных двигателей. Сплавы, технология, покрытия / Е.Н. Каблов. – М.: МИСиС, 2001. – 632 с.
3. Богуслаев, В.А. Технологическое обеспечение эксплуатационных характеристик деталей ГТД / В.А. Богуслаев, Ф.М. Муравченко, П.Д. Жеманюк. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич», 2003. – т.1, 2.
4. Орлов, М.Р. Технологическое обеспечение ресурса рабочих лопаток первых ступеней турбины авиационных и наземных газотурбинных двигателей: дис. ... д-ра техн. наук / М.Р. Орлов. – М., 2008. – 203 с.
5. Рост и залечивание пор в монокристаллах жаропрочных сплавов на никелевой основе / Б. Бокштейн, А. Епишин, И. Светлов и др. // Функциональные материалы. – 2007. – Т. 1, № 5. – с. 75–79.
6. Светлов, И.Л. Исследование высокотемпературной ползучести и дефектности структуры монокристаллов никелевого жаропрочного сплава после горячего изостатического прессования / И.Л. Светлов, И.В. Исходжанова, Л.Г. Евченко // Деформация и разрушение материалов. – 2011. – № 3. – С. 28–32.
7. Гегузин, Я.Е. Диффузионная зона / Я.Е. Гегузин. – М.: Наука, 1979. – 343 с.
8. Каблов, Е.Н. Механизмы образования пористости в монокристаллических лопатках турбины и кинетика ее устранения при горячем изостатическом прессовании / Е.Н. Каблов, М.Р. Орлов, О.Г. Оспенникова // Авиационные материалы и технологии. – 2012. – № 8. – С. 48–54.

9. Большаков, В.И. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры / В.И. Большаков, В.И. Андрианов, В.В. Данишевский. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
10. Ванин, Г.А. Микромеханика композиционных материалов / Г.А. Ванин. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 304 с.
11. Кулемин, А.В. Ультразвук и диффузия в металлах / А.В. Кулемин. – М.: Металлургия, 1978. – 200 с.
12. Скубачевский, Г.С. Авиационные и газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей / Г.С. Скубачевский. – М.: Машиностроение, 1981. – 550 с.
13. Müller, L. Modelling of thermal misfit stresses in nickel-base superalloy containing high volume fraction of γ' -phase / L. Müller, U. Glatzel, M. Feller-Kniepmeier // Acta metal, mater. – 1992. – Vol. 40, № 6. – P. 1321–1327.
14. Socrate, S. Numerical determination of the elastic driving force for directional coarsening of Ni-superalloys / S. Socrate, D.M. Parks // Acta metal, mater. – 1993. – Vol. 41, № 7. – P. 2185–2209.
15. Расчет термических напряжений и термостойкость анизотропных материалов / А.П. Кривко, А.П. Епишин, И.Л. Светлов, А.И. Самойлов // Проблемы прочности. – 1989. – № 2. – С. 3–9.

Поступила в редакцию 26 июня 2015 г.

DOI: 10.14529/mmph160210

CALCULATION OF VACANCY CONCENTRATION UNDER THERMO-MECHANICAL LOADING

A.V. Galaktionova, A.K. Emaletdinov

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation
E-mail: g-arina@yandex.ru

The evolution of vacancy system and pore emergence under the influence of cyclic thermo-mechanical loading determines the durability of the nanocrystalline two-phase alloys such as superalloys, which are composite materials. The emergence of excess non-equilibrium vacancies, the activation of diffusion processes and the pore growth occur under the influence of thermo-mechanical loading. However, kinetics of the emergence and evolution of the excess vacancy concentration at various kinds of thermo-mechanical loading arising during the operation process have not been investigated yet. In this paper, the vacancy concentration in the one-dimensional model for thermo-mechanical loading including cyclic tensile stresses, thermal stresses and heating to high temperature taking into account microstructure is calculated. The considerable supersaturation of non-equilibrium vacancies arises in nanostructured alloys under the influence of thermo-mechanical loading. The rising of diffusion may occur at a critical value of excess vacancies as part of the diffusion-deformation stability mechanism, when small local fluctuation of excess vacancy concentration begins to grow. The growth occurs due to a Gibbs energy decrease in the increased vacancy concentration caused by the influence of thermo-mechanical stresses.

Keywords: thermal expansion; chemical potential; diffusion stresses; inhomogeneous concentration of vacancies; thermal activation mechanism.

References

1. Shalin P.E., Svetlov I.L., Kachanov, E.B. *Monokristally nikelovykh zharoprochnykh splavov* [Monocrystals of nickel heat-resisting alloys]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 336 p. (in Russ.).
2. Kablov E.N. *Litye lopatki gazoturbinykh dvigateley. Splavy, tekhnologiya, pokrytiya* [Cast blades of gas-turbine engines. Alloys, technology coating]. Moscow, MISiS Publ., 2001, 632 p. (in Russ.).

3. Boguslaev V.A., Muravchenko F.M., Zhemanyuk P.D. *Tekhnologicheskoe obespechenie ekspluatatsionnykh kharakteristik detaley GTD. Ch. 1, 2.* [Technological support for performance of GTE parts. Part 1, 2]. Zaporozh'e, Motor Sich Publ., 2003. (in Russ.).
4. Orlov M.R. *Tekhnologicheskoe obespechenie resursa rabochikh lopatok pervykh stupeney turbiny aviatsionnykh i nazemnykh gazoturbinnnykh dvigateley: dis. ... d-ra tekhn. nauk* [Technological support for the resource rotor blades of the first stages of the turbine aviation and land-based gas turbine engines. Dr. eng. sci. diss.]. Moscow, 2002, 215 p. (in Russ.).
5. Bokshiteyn B., Epishin A., Svetlov I., Esin V., Rodin A., Link T. *Functional Materials*. 2007, Vol. 1, no. 5, pp. 75–79. (in Russ.).
6. Svetlov I.L., Iskhodzhanova I.V., Evchenov L.G. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2011, no. 3, pp. 28–32. (in Russ.).
7. Geguzin Ya.E. *Diffuzionnaya zona* [Diffusion zone]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 343 p. (in Russ.).
8. Kablov E.N., Orlov M.R., Ospennikova O.G. *Aviatsionnye materialy i tekhnologii*, 2012, no. 8, p. 48–54. (in Russ.).
9. Bol'shakov V.I., Andrianov V.I., Danishevskiy V.V. *Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnykh materialov s uchetom vnutrenney struktury* [Asymptotic methods of calculation of composite materials based on the internal structure]. Dnepropetrovsk, Porogi Publ., 2008, 196 p. (in Russ.).
10. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1985, 304 p. (in Russ.).
11. Kulemin A.V. *Ul'trazvuk i diffuziya v metallakh* [Ultrasound and diffusion in metals]. Moscow, Metallurigiya Publ., 1978, 200 p. (in Russ.).
12. Skubachevskiy G.S. *Aviatsionnye i gazoturbinnnye dvigateli. Konstruktsiya i raschet detaley* [Air and gas turbine engines. Structure and calculation of details]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 550 p. (in Russ.).
13. Müller L., Glatzel U., Feller-Kniepmeier M. Modelling of thermal misfit stresses in nickel-base superalloy containing high volume fraction of γ' -phase. *Acta metal, mater*, 1992, Vol. 40, no. 6, pp. 1321–1327. DOI: 10.1016/0956-7151(92)90433-f
14. Socrate S., Parks D.M. Numerical determination of the elastic driving force for directional coarsening of Ni-superalloys. *Acta metal, mater*, 1993, Vol. 41, no. 7, pp. 2185–2209. DOI: 10.1016/0956-7151(93)90389-a
15. Krivko A.P., Epishin A.P., Svetlov I.L., Samoylov A.I. *Problemy prochnosti*, 1989, no. 2, pp. 3–9. (in Russ.).

Received June 26, 2015

Персоналии

АБРАМ ДАВИДОВИЧ КАЦМАН – УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, ЧЕЛОВЕК. К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

22 апреля 2016 года исполнилось 100 лет со дня рождения Абрама Давидовича Кацмана, выдающегося челябинского педагога и математика. Абрам Давидович проработал в ЧММИ-ЧПИ¹ 45 лет – с 1944 по 1989 год – и внес значительный вклад в дело становления математического образования на Южном Урале.

Абрам Давидович родился 22 апреля 1916 года в местечке Юзефполь Одесской области в небогатой многодетной (четверо сыновей и две дочери) еврейской семье. В 1919 году его отец погиб в одном из многочисленных в то время на юге Украины петлюровских погромов и семья осталась на иждивении матери.

В 1924 году Абрам Давидович поступает в семилетнюю школу, которую заканчивает в 1931 году. В том же году умирает мать. Семья переезжает в г. Первомайск Одесской области, где Абрам Давидович поступает на работу в промартель «Молодняк» на должность счетовода, одновременно продолжая учиться в вечерней средней школе. Эта работа давала средства к существованию не только самого Абрама Давидовича, но и всей семьи, обязанности по обеспечению которой легли на плечи пятнадцатилетнего юноши и его старшего брата.

В 1937 году Абрам Давидович поступает на физико-математический факультет Одесского государственного университета – одного из авторитетнейших в то время университетов страны.

Окончание университета совпало с началом Великой Отечественной войны, и в конце июля 1941 года Абрам Давидович был мобилизован в действующую Красную Армию. Воевал на Закавказском, а позднее на Степном фронтах сначала башенным стрелком, позднее – командиром танка 32 танковой бригады 5 Гвардейской танковой армии. Северный Кавказ, Курская дуга – непрерывные бои, порой позиционные, порой наступательные. В одном из таких боев под деревней Козырево-Тамаровка в 1943 году танк младшего лейтенанта Кацмана был подбит, а сам он получил тяжелое ранение в голову. До января 1944 г. Абрам Давидович находился на излечении в госпитале в г. Челябинске и одновременно числился в офицерском полку запаса при Главном управлении бронетанковых войск.

Характер полученных ранений не позволил ему вернуться в строй, да и война подходила к концу – Абрам Давидович был демобилизован из армии и получил назначение на должность преподавателя кафедры высшей математики недавно образованного (1943) Челябинского механико-машиностроительного института.

Кафедра высшей математики в то время была малочисленной – всего 4 сотрудника, возглавляемые бывшим кадровым морским офицером доцентом В.Е. Воскобойниковым. Выпускник Санкт-Петербургского университета, носитель классических традиций российской математической школы, идущих еще от П.Л. Чебышёва, В.Е. Воскобойников дал первые уроки образовательной деятельности молодому танкисту.

Требовательный к себе вчерашний фронтовик увлеченно взялся за работу. Организационные проблемы становления молодого коллектива, напряженная преподавательская деятельность, отсутствие научной математической среды не способствовали самостоятельным научным исследованиям. Тем не менее, А.Д. Кацман уже тогда (сразу по окончании войны) активно занимается научной работой под руководством известного свердловского математика П.Г. Конторовича, получает интересные результаты, связывающие свойства группы без кручения с содержащимися в



А.Д. Кацман

¹ Челябинский механико-машиностроительный институт (1943–1951), Челябинский политехнический институт (1951–1990).

Персоналии

ней подполугруппами. Он изучает инвариантные подполугруппы в группе, образующие элементы подполугрупп, структуру групп, представимых в виде теоретико-множественной суммы чистых линейных подполугрупп. В 50-е годы интенсивно изучались группы без кручения, и результаты Абрама Давидовича явились существенным вкладом в теорию R-групп, частного случая групп без кручения.

В 1955 году Абрам Давидович успешно защищает диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а в 1956 году получает ученое звание доцента. Одновременно А.Д. Кацман возглавляет работу организованного им первого в институте (и в г. Челябинске) научно-исследовательского семинара по общей алгебре, функционировавшего с небольшими перерывами более 30 лет.

А.Д. Кацман занимался научной работой в течение всей жизни, и даже после 1973 года, когда у него начались нелады со здоровьем, не прекращал научных исследований. Одна из последних научных работ А.Д. Кацмана выполнена совместно с его многолетней сотрудницей по энергетическому факультету Ф.Ш. Брин. Работа опубликована в 1986 году и посвящена обсуждению известной в теории групп проблемы П. Г. Конторовича.

Во время послевоенного восстановления страны бурно растет институт (с 1951 года сменивший название на Челябинский политехнический институт). Множатся факультеты и специальности, а вместе с ними растет и расширяется кафедра высшей математики.

В связи с ростом численности сотрудников и расширением сферы их преподавательской деятельности общеинститутская кафедра высшей математики в 1963 году была разделена на кафедру высшей математики № 1 и кафедру высшей математики № 2.

Заведующим кафедрой высшей математики № 1 становится А.Д. Кацман¹. Организационно кафедра находилась в структуре энергетического факультета – одного из самых «математикоёмких» в институте, – на котором всю свою жизнь проработал Абрам Давидович.

Перед новой кафедрой и ее заведующим вплотную встали проблемы совершенствования учебного процесса. А.Д. Кацман хорошо понимал, что только активная научная деятельность сотрудников кафедры, их математический потенциал могут обеспечить качественное преподавание математики студентам. Расхожая в те времена сентенция «*Математики этот преподаватель не знает, зато он прекрасный методист*» отвергалась им с негодованием.

Наряду с привлечением к научной работе уже находящихся в штате преподавателей, эффективным и естественным путем решения поставленной задачи было привлечение молодых выпускников ведущих университетов страны: Московского, Казанского, Новосибирского, Уральского, Ленинградского, Харьковского, Одесского и др.

Эта работа была трудной и продолжительной, но дала превосходные результаты. За сравнительно небольшой срок кафедра пополнилась высококвалифицированными математиками². Они составили в дальнейшем костяк математических кафедр института и многих вузов Челябинска.

А.Д. Кацман прилагал немалые усилия для создания подлинно творческой атмосферы на кафедре. Будучи широко эрудированным математиком, Абрам Давидович всячески стимулировал научную активность сотрудников, особенно её молодого пополнения. Абрам Давидович поддерживал личные контакты со многими видными математиками страны и на протяжении многих лет «пристраивал» сотрудников кафедры к ним на стажировку, в аспирантуру, на консультации. Для многих эти поездки становились началом их научного роста.

Не меньшее значение придавал Абрам Давидович и педагогической деятельности. Именно педагогическая, преподавательская составляющая являлась тем ядром, вокруг которого концентрировались все другие элементы деятельности заведующего, именно на нее была направлена его энергия.

Уже говорилось, что с самого начала своей педагогической деятельности А.Д. Кацман был связан с энергетическим факультетом. Требования к математической подготовке инженера-энергетика всегда были достаточно высоки. В то время они диктовались не только потребностями

¹ Второй кафедрой стал заведовать В.А. Лезин, которого вскоре (1965) сменил на этом посту Л.М. Беляков.

² Бондарев В.Г., Брыскин И.Б., Быков В.М., Гойхман В.Э., Гольденберг М.М., Гольдшейд Н.К., Гольдшейд И.Я., Горбатенко В.Н., Дильман В.Л., Заляпин В.И., Катков М.Л., Кипнис М.М., Матвеева Л.В., Матвеев С.В., Марков Г.В., Менихес Л.Д., Могильницкий В.А., Муртазин Р., Нестеренко Ю.П., Распопова Н.С., Смекалина Л.А., Тарасова Г.К., Тарасова Т.А., Штраус В.А., Шарабурова Л.Г. и др.

ми специальности, но и квалификацией, профессиональной ответственностью специалистов, определявших лицо факультета. Абрам Давидович, глубоко и внимательно изучив специальные дисциплины, их потребности в математической идеологии и математическом аппарате, предложил факультету продуманную и взвешенную программу курса высшей математики и дополняющую эту программу систему специальных курсов, включая курсы для аспирантов. Эти программы покрывали все текущие потребности образовательных программ и предоставляли обучаемому возможность при необходимости легко и эффективно осваивать новые, ранее ему незнакомые разделы. То, что впоследствии стали называть «системой непрерывной математической подготовки специалиста», было им предвосхищено и внедрено в реальный учебный процесс еще в шестидесятые годы.

Эта программа созрела, с одной стороны, в результате тесного сотрудничества как самого А.Д. Кацмана, так и его ближайших сотрудников и единомышленников с ведущими учеными энергетического факультета, а с другой – была обусловлена логикой развития математической составляющей образовательных программ энергетических специальностей. Было продумано все – вплоть до коллективного (т.е. коллективом преподавателей кафедры) приема экзаменов в «полуписьменной» форме – письменный экзамен с последующим собеседованием. Заметим что эта, т.н. «физтеховская», форма контроля качества усвоения материала студентами практиковалась на кафедре математики № 1 ЧПИ еще в шестидесятые годы, когда министерские инструкции строго предписывали: экзамен должен и может принимать только лектор потока, в котором группа прослушала курс¹.

Важной особенностью педагогического таланта А.Д. Кацмана была уже упомянутая выше нацеленность на воспитание личности. Много лет работая на кафедре, обладая обширнейшими познаниями в смежных областях науки и техники, прекрасно владея собственно математическим аппаратом, А.Д. Кацман всегда тщательно готовился к лекциям и волновался перед каждой из них. На недоуменные вопросы молодых коллег, не понимавших, зачем готовиться к лекции, читая её в двадцатый или двадцать пятый раз, он пояснял, что «... они ведь будут слушать эту лекцию в первый раз, они совсем не такие, какими были их предшественники, и лекция эта должна быть прочитана так, чтобы они ощутили – это рассказывают именно им, это знание рождается вот здесь и сейчас...». Прекрасный лектор, умеющий так расставить акценты при изложении самого сложного для восприятия студентов материала, что он представлялся слушателям простым и понятным, он всегда во время лекции находил время и место для обсуждения тех направлений специальной инженерной подготовки, где только что изложенные им абстрактные математические конструкции будут необходимы. Может быть, многие из его слушателей уже забыли ту теорему Ролля или правило Крамера, которые он им втолковывал, но науку жизни, науку ответственности за свои поступки, науку преданности своему делу они не забудут никогда. И своего УЧИТЕЛЯ – тоже. Институтская газета «Политехнические кадры» в статье², посвященной 50-летию Абрама Давидовича, отмечала: – *Не случайно в ответ на вопросы анкеты, разосланной институтом своим выпускникам, «Лекции каких преподавателей оказали наибольшее влияние на Вашу инженерную деятельность», многие инженеры, выпускники энергетического факультета, ответили – лекции А.Д. Кацмана...*

Заметим здесь, что деятельность Абрама Давидовича, его «общественный темперамент» оставили свой след не только в умах и душах «небольшого сообщества его коллег, друзей и единомышленников». Лицо сегодняшнего сообщества челябинских математиков в немалой степени обусловлено научно-педагогической деятельностью А.Д. Кацмана.

Его горячая увлеченность делом, принципиальность, требовательность в сочетании с благожелательностью и постоянной готовностью помочь снискали ему уважение и авторитет среди студентов и коллег.

¹ Таким образом, если на производстве «личное клеймо качества» вручалось только избранным, лучшим из лучших, то в высшей школе СССР практиковалась система «сам сделал, сам оценил». Конечно, ведущие вузы страны (скажем МГУ, МФТИ, МИФИ и многие другие) практиковали именно коллективные экзамены, но в провинции это не приветствовалось.

² В номере 15(391), от 20 апреля 1966 года, статья «О старейшем преподавателе института».

Персоналии

Абрам Давидович был нетерпим к разгильдяйству и необязательности своих подчиненных. И если сотрудник не проявлял должного старания, усердия и дисциплинированности, то он расставался с ним без сожаления.



А.Д. Кацман и А.Т. Полецкий

Абрам Давидович проявлял заботу не только о «пище духовной» своих подчиненных, сотрудников и друзей. Немалая доля его времени была посвящена улучшению их материального положения. Конечно, он был не в силах значительно увеличить их зарплату, но, будучи дружным со многими представителями научной инженерно-технической элиты института, работавшей над заказами крупных промышленных предприятий страны, А.Д. Кацман «внедрял» молодых математиков в качестве соисполнителей упомянутых заказов и тем самым давал им возможность заработать дополнительно 50–60 рублей в месяц, что было весомой добавкой к штатной зарплате, составлявшей в то время 105–125 рублей. Для некоторых эта деятельность из зарабатывания денег превращалась в серьезную научную работу над прикладными задачами¹.

А.Д. Кацман был удивительно контактным и хлебосольным человеком. Круг его общения был необычайно широк – родственники, коллеги по работе на кафедре, сослуживцы-единомышленники, в первую очередь представители про-

фессорско-преподавательского состава энергетического факультета, бывшие ученики, представители творческой интеллигенции Челябинска и многие другие. И каждый был принимаем и приветим в его гостеприимном доме – независимо от рангов и занимаемых постов. В дни всенародных праздников он был неизменным участником институтской колонны демонстрантов – не потому, что являлся адептом властей, а потому, что это была лишняя возможность неформально пообщаться с коллегами и учениками, позвать по окончании демонстрации всех к себе домой и продолжить «разговоры за жизнь» за щедро накрытым столом.

Вспоминает многолетний сотрудник Абрама Давидовича, ныне доцент кафедры уравнений математической физики А.Б. Самаров:

«...Человек необычайно общительный, Абрам Давидович всегда ходил на демонстрации. Уж там общения с дорогими ему сослуживцами было «выше крыши». Чаще всего с утра я заходил за ним и через горсад мы выходили на проспект Ленина. Недалеко от института к нам присоединялся Александр Тимофеевич Полецкий² и все вместе мы подходили к институту к моменту формирования праздничной колонны...»

В 1974 году руководство вуза, воспользовавшись тем, что срок полномочий заведования кафедрой А.Д. Кацмана истек, решило заменить его другим человеком. Это намерение вызвало резко отрицательную реакцию, как сотрудников кафедры, так и самого Абрама Давидовича.

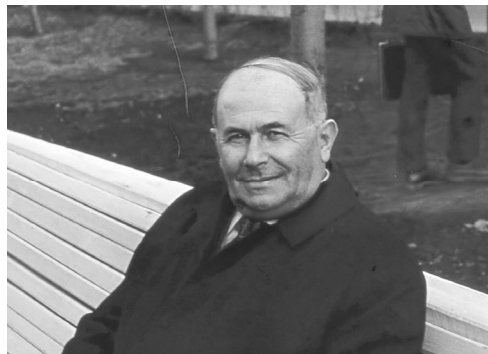
И дело было не в том, что он не хотел расставаться с постом «начальника». Просто кандидатура претендента была вопиюще «не той». Заведующим намеревался стать инженер по специальности, единственным достоинством которого было наличие степени доктора технических наук. Очевидная нелепость затеянного, тем не менее, не осознавалась руководством вуза, которое хотело видеть на этом посту доктора наук, и ректор, профессор В.В. Мельников, настаивал на своем. Ни протесты сотрудников, ни позиция Ученого Совета энергетического факультета, ни выступление на Совете института двух молодых кандидатов физико-математических наук, представлявших точку зрения кафедры, не возымели должного действия. Кафедра, созданию и пестованию которой Абрам Давидович посвятил значительную часть своей жизни, была в одночасье уничтожена.

¹ Здесь уместно отметить, что в ЧПИ в 60-е – 70-е годы XX века наукой именовалась преимущественно хозяйственная деятельность – работа по договорам с промышленными, большей частью оборонными, предприятиями. Научная деятельность в области чистой математики, не приносящая материальных дивидендов, считалась неполноценной.

² А.Т. Полецкий, профессор, много лет заведовавший кафедрой теоретической механики.

То есть структурная единица под названием «Кафедра высшей математики № 1» продолжала существовать, но того коллектива педагогов-математиков, который Абрам Давидович долгие годы собирал по всей стране и который определял лицо кафедры, уже не было. Кафедры как коллектива единомышленников не стало, но остались заветы, принципы и то оптимистически-ответственное отношение к жизни и работе, которые А.Д. Кацман пронес через всю свою жизнь.

Сам Абрам Давидович в первую очередь был математиком и педагогом, его авторитет основывался на глубоких знаниях, эрудиции и богатейшем опыте, а не на административном ресурсе. Несмотря на начавшиеся нелады со здоровьем, он продолжал много и плодотворно работать. Как на кафедре прикладной математики, так и на кафедре высшей математики № 2 авторитет А.Д. Кацмана был непререкаем. В повседневном деловом общении и на методическом семинаре, которым Абрам Давидович руководил в семидесятые годы, преподаватели уже нового поколения приобщались к его педагогическому опыту, получали уроки мастерства. Продолжал публикацию результатов своих научных исследований. Жил и работал в полную силу, и подошел к своему семидесятилетию (1986) как будто таким же, каким он был в начале своего пути. Однако годы и участвовавшие болезни брали свое.



После длительного курса лечения, сопровождавшегося двумя тяжелейшими операциями, в марте 1989 года Абрам Давидович ушел из жизни.

* * *

Кавалер девяти правительственных наград, ученый-алгебраист, прирожденный педагог, он до конца своих дней самой важной, самой главной заботой считал заботу о нравственном здоровье подрастающего поколения. Абрам Давидович не проходил равнодушно мимо хамства и грубости, был нетерпим к нечестности и моральной нечистоплотности. Он был добр – любой, нуждающийся в его помощи, получал ее. Но он не был добреньким – многим памятен и его крутой нрав, и бескомпромиссность в вопросах, которые он считал принципиальными и отстаивал без оглядки на авторитеты и вышестоящие инстанции.

Он был талантлив во всем – талантливый математик, талантливый руководитель, талантливый педагог. Но самый главный его талант – он был талантливым человеком.

Абрам Давидович Кацман был и остался для многих, знавших его, одним из лучших людей, которых они встречали в своей жизни. Из тех, о которых говорится – соль земли. Они живут среди нас и трудятся всю жизнь, истово, со смиренным достоинством, не напоказ миру, но на пользу делу.

Автор признателен коллегам А.Д. Кацмана – В.А. Могильницкому, М.М. Гольденбергу, Е.И. Дергачевой, Л.Д. Менихесу, А.Б. Самарову, способствовавшим написанию этой статьи, а также дочери – Е.А. Кацман и внуку – А.Д. Шнайдерману за предоставленные биографические материалы.

В.И. Заляпин

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям "Ulrich's Periodicals Directory", "Zentralblatt MATH".

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», Е29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, ответственному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Differential and Stochastic Equations Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.yurgu.pf/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор А.Ю. Федерякин

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 27.04.2016. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 8,83 + 0,23 вкл. Тираж 500 экз. Заказ 129/200.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.