ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016
Т. 8, № 3

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

BULLETIN

OF THE SOUTH URAL STATE UNIVERSITY

SERIES

"MATHEMATICS. MECHANICS. PHYSICS"

2016
Vol. 8, no. 3

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Физика

Персоналии

CONTENTS

Mathematics

Physics

Personalia

Математика

УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph160301

INVERSE PROBLEM FOR SOBOLEV TYPE EQUATION OF THE SECOND ORDER

A.A. Zamyshlyaeva, A.S. Muravyev
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru

The paper deals with the inverse problem for the Sobolev type equation of the second order in Banach spaces. The introduction contains a problem statement and the historiography of Sobolev type equations. The second part includes preliminary information based on the results of the theory of higher-order Sobolev type equations. In the third part the initial problem is reduced to the inverse regular and singular problems. A theorem of unique solvability of regular problem is formulated and proved. Using the results of the third part, the solution for the singular problem is obtained in the fourth part. The sum of regular and singular solutions is a solution to the original problem, thus a theorem on the unique solvability of the inverse problem for Sobolev type equation of the second order is stated and proved.

Keywords: Sobolev type equation of the second order; inverse problem; a unique solvability theorem.

Introduction

Let U, F, Y be Banach spaces, operator $\chi:[0,T]\to L(Y;F)$, functions $M:[0,T]\to F$, $\Psi:[0,T]\to Y$, operator $C\in L(U;F)$. Consider the following problem

$$A\ddot{v}(t)=B_1\dot{v}(t)+B_0v(t)+\chi(t)q(t)+M(t),\ t\in[0,T], \tag{1}$$

$$v(0)=v_0,\dot{v}(0)=v_1, \tag{2}$$

$$Cv(t)=\Psi(t) \tag{3}$$

The inverse is a problem of finding a pair of functions $v\in C^2([0,T];U)$ and $q\in C^2([0,T];Y)$ from relations (1)–(3). Note that (1) is a special case of equation

$$Av^{(n)}(t)=B_{n-1}v^{(n-1)}(t)+...+B_0v(t)+f(t), \tag{4}$$

which is called the higher order Sobolev type equation. Such operator-differential equations were firstly studied in [1, 2], and in more detail in [3]. Inverse Problems for Sobolev type equations, and other nonclassical equations of mathematical physics were studied earlier in [4–6], and the inverse problem for the first-order equation was considered in [7].

Equations nonsolvable with respect to the highest derivative were firstly studied in 1885 in the works of Poincaré. Often they were associated with studies of specific equations of hydrodynamics. Considerable interest in equations of this kind appeared in connection with the results C.W. Oseen, J. Leray, F.K.G. Odqvist and J. Schauder, E. Hopf and studies of S.L. Sobolev on the problem of small oscillations of a rotating fluid. This series of works initiated further research of equations nonsolvable with respect to the highest derivative. Thus, it was the basis for a new direction, which was originally developed by the disciples of S.L. Sobolev. After the first studies of S.L. Sobolev, I.G. Petrovsky spoke of need to investigate general differential equations and general differential systems that are not solvable with respect to highest derivative in time (such systems are called not of the Kovalevskaya type systems). In literature such equations and their specific interpretations are often called Sobolev type equations, saluting the founder.

The first attempt to study the phase space for the higher order equations was made in [8, 9]. In these works according to the ideology of M.V. Keldysh equation (4) was reduced to the equivalent first-order Sobolev-type equation, which has been studied by methods described in [10]. However, it should be noted that the inverse reduction lead to a very complex algorithm of construction of the phase space. Moreover, it was not shown that all the initial values were lying in the same phase space.

Inverse problems often arise in different fields of science, particularly in the description of the internal characteristics of the medium in which the physical or chemical processes take place; when the results of observations of these processes are available for the measurement. The great interest to inverse problems appeared at the junction of the 19th and 20th centuries, particularly in geophysics. There was a pressing question: is it possible by the picture of movement of seismic wave fronts from the various earthquakes on the Earth's surface, to find the velocity of propagation of seismic waves in the Earth? There was formulated an inverse kinematic problem, firstly considered by the German geophysicists E. Wiechert and G. Herglotz. At the same time there arose another inverse problem in the potential theory. The studies of inverse problems in the potential theory in various productions were held by in V.N. Strakhov, A.N. Tikhonov, M.M. Lavrent'ev, V.K. Ivanov, A.I. Prilepko as well as their disciples. The inverse problems for dynamic reconstruction of the parameters of control systems and associated ill-posed problems were investigated in scientific schools of V.K. Ivanov, N.N. Krasovsky and others. In addition, there were studied inverse problems of electromagnetic intelligence, quantum scattering theory, and many others. Nowadays there appear new formulations of inverse problems and new results concerning their solvability.

Preliminary information

We use results of the theory of higher-order Sobolev type equations. Proofs of these results can be found in [2].

Definition 1. *The sets*

$$\rho^A(\vec{B}) = \left\{\mu \in C : (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in L(F,U)\right\}$$

and $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$ *are called an A-resolvent set of and an A-spectrum of pencil* $\vec{B}$.

Definition 2. *The operator-valued function of a complex variable* $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ *with domain* $\rho^A(\vec{B})$ *is called an A-resolvent of pencil* $\vec{B}$.

Definition 3. *The pencil* $\vec{B}$ *is called polynomially bounded with respect to the operator A (polynomially A-bounded), if*

$$\exists a \in R_+ \forall \mu \in C(|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \notin L(F;U)).$$

For further considerations we require fulfillment of additional conditions

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv 0, k = 0,1, \tag{A}$$

where the contour $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$.

Lemma 1. *Let the pencil* $\vec{B}$ *be polynomially A-bounded and condition (A) be fulfilled. Then the operators* $P \in L(U)$ *and* $Q \in L(F)$, *defined by formulas*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu,$$

are projectors.

Theorem 1. *Let the pencil* $\vec{B}$ *be polynomially A-bounded and condition (A) be fulfilled. Then the actions of operators split:*

(i) $A^k \in L(U^k; F^k)$, $k = 0,1$;

(ii) $B_l^k \in L(U^k; F^k)$, $k = 0,1$, $l = 0,1$;

(iii) there exists an operator $(A^1)^{-1} \in L(F^1; U^1)$,

(iv) there exists an operator $(B_0^0)^{-1} \in L(F^0; U^0)$.

Definition 4. *Define a family of operators* $\left\{K_q^1, K_q^2\right\}$ *in the following way:*

$$K_1^1 = H_0, \qquad K_1^2 = -H_1, \qquad K_{q+1}^1 = K_q^2 H_0, \qquad K_{q+1}^2 = K_q^1 - K_q^2 H_1,$$

where operators $H_0 = \left(B_0^0\right)^{-1} A^0$, $H_1 = \left(B_0^0\right)^{-1} B_1^0$.

Definition 5. *The point* ∞ *is called*

(i) *a removable singular point of the A- resolvent of pencil* $\vec{B}$, *if* $K_1^1 \equiv O,\ K_1^2 \equiv O$;

(ii) *a pole of order* $p \in N$ *of the A- resolvent of pencil* $\vec{B}$, *if* $K_p^1 \neq O,\ K_1^2 \neq O$, *but* $K_{p+1}^1 \equiv O,\ K_{p+1}^2 \equiv O$.

(iii) *an essential singularity of the A- resolvent of pencil* $\vec{B}$, *if* $K_k^2 \neq O,\ k \in N$.

Reduction of initial inverse problem

Let the pencil $\vec{B} = (B_0, B_1)$ be polynomially A-bounded, $U^0 \in \ker C$. Denote $v(t) = Pv(t) + (I-P)v(t)$. Then $Pv(t) = u(t),\ (I-Q)v(t) = w(t)$. Then by Lemma 1 and Theorem 1, problem (1)–(3) is equivalent to the problem of finding functions $u \in C^2([0,T];U^1)$, $w \in C^2([0,T];U^0)$, $q \in C^2([0,T];Y)$ from

$$\ddot{u}(t) = S_1\dot{u}(t) + S_0u(t) + A_1^{-1}Q\chi(t)q(t) + A_1^{-1}QM(t),\ t \in [0,T], \tag{5}$$

$$u(0) = v_0^1, \dot{u}(0) = v_1^1. \tag{6}$$

$$Cu(t) = Cv(t) = \Psi(t),\ t \in [0,T], \tag{7}$$

$$H_0\ddot{w}(t) = H_1\dot{w}(t) + w(t) + (B_0^0)^{-1}(I-Q)\chi(t)q(t) + (B_0^0)^{-1}(I-Q)M(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$w(0) = v_0^0, \dot{w}(0) = v_1^0, \tag{9}$$

Smooth solutions of regular problem

Inverse problem (5)–(7) is called regular. The direct problem (8), (9) with given function q is called singular. For convenience, we rewrite regular problem as follows:

$$\ddot{u}(t) = S_1\dot{u}(t) + S_0u(t) + \Phi(t)q(t) + F(t),\ \ t \in [0,T], \tag{10}$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \tag{11}$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \tag{12}$$

In order to obtain a solution of (8), (9), we need to require the smoothness of class $C^{p+2}([0,T];Y)$ of solution q of the regular inverse problem. Further we find a sufficient condition for the existence of a smooth solution $q \in C^{p+2}([0,T];Y)$.

Lemma 2. *Let* $n \in N,\ S \in C^n([0,T];L(X)),\ g \in C^n([0,T];X)$. *Then*

$$\left(\int_\gamma S(t-s)g(s)ds\right)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} S^{(i)}(t)g^{(n-1-i)}(0) + \int_0^t S(t-s)g^{(n)}(s)ds. \tag{13}$$

Proof. Let us prove formula (13) for $n=1$:

$$\left(\int_0^t S(t-s)g(s)ds\right)' = S(0)g(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}S(t-s)g(s)ds = S(0)g(t) + \int_0^t \left[\frac{d}{ds}S(t-s)\right]g(s)ds =$$

$$= S(t)g(0) + \int_0^t S(t-s)g'(s)ds.$$

Assume that for $n=m$ equality (13) holds and prove that it is satisfied with $n=m+1$

$$\left(\int_0^t S(t-s)g(s)ds\right)^{(m+1)} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=0}^{m-1} S^{(i)}(t)g^{(m-1-i)}(0) + \int_0^t S(t-s)g^{(m)}(s)ds\right] = \sum_{i=1}^{m} S^{(i)}(t)g^{(m-1-i)}(0) +$$

$$+\int_0^t \left[\frac{d}{ds}S(t-s)\right]g^{(m)}(s)ds = \sum_{i=0}^{m} S^{(i)}(t)g^{(m-i)}(0) + \int_0^t S(t-s)g^{(m+1)}(s)ds.$$

The lemma is proved.

Theorem 2. *Suppose that the pencil* $\vec{S} = (S_0, S_1)$ *is polynomially bounded,* $C \in L(X;Y)$, $p \in N_0$, $\Phi \in C^{p+2}([0,T]; L(Y,X))$, $F \in C^{p+2}([0,T]; X)$, $k = 0,1,...,p$, $\Psi \in C^{p+2}([0,T]; Y)$, *for all* $t \in [0,T]$ *the operator* $C\Phi(t)$ *is invertible,* $(C\Phi)^{-1} \in C^{p+2}([0,T]; L(Y))$ *and condition* $Cu_0 = \Psi(0)$ *is fulfilled. Then there exists a unique solution* $u \in C^{p+2}([0,T]; X)$, $q \in C^{p+2}([0,T]; Y)$ *of the inverse problem (10)–(12).*

Proof. Before proceeding to the proof of the theorem denote $S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\mu^2 I - \mu S_1 - S_0)^{-1}\mu^2 e^{\mu t} d\mu$. According to theorem 6.2.3 [11], the searched function q is a solution of equation

$$q(t) = q_0(t) + R(t)\int_0^t CS(t-s)g(s)ds,$$

where $q_0(t) = R(t)\left(\Psi'(t) - CS(t)u_0 - C\int_0^t S(t-s)F'(s)ds - CF(t)\right)$, $\qquad R(t) = \left(-C\Phi(t)\right)^{-1}$.

Prove using the results of Lemma 2 that function $q \in C^{p+2}([0,T], Y)$.

$$q'(t) = q_0'(t) + R'(t)\int_0^t CS(t-s)g(s)ds + R(t)CS(0)g(t) + R(t)\int_0^t CS'(t-s)g(s)ds,$$

$$q''(t) = q_0''(t) + R''(t)\int_0^t CS(t-s)g(s)ds + R'(t)CS(0)g(t) + R'(t)CS(0)g(t) +$$

$$+R(t)CS(0)g'(t) + R(t)CS'(0)g(t) + R(t)\int_0^t CS''(t-s)g(s)ds + R'(t)\int_0^t CS'(t-s)g(s)ds,$$

$$q'''(t) = q_0'''(t) + R'''(t)\int_0^t CS(t-s)g(s)ds + R''(t)CS(0)g(t) +$$

$$+R''(t)\int_0^t CS'(t-s)g(s)ds + 2R''(t)CS(0)g(t) + 2R'(t)CS(0)g'(t) + R'(t)CS(0)g'(t) +$$

$$+R(t)CS(0)g''(t) + R'(t)CS'(0)g(t) + R(t)CS'(0)g'(t) + R'(t)\int_0^t CS''(t-s)g(s)ds +$$

$$+R'(t)CS'(0)g(t) + R'(t)\int_0^t CS''(t-s)g(s)ds = q_0'''(t) + R(t)C\left(S(t)g''(0) + S'(t)g'(0) + S''(t)g(0)\right) +$$

$$+R(t)C\int_0^t S(t-s)g'''(s)ds + 3R'(t)C\left(S(t)g'(0) + S'(t)g(0) + \int_0^t S(t-s)g''(s)ds\right) +$$

$$+3R'(t)C\left(S(t)g(0) + \int_0^t S(t-s)g'(s)ds\right) + R'''(t)C\int_0^t S(t-s)g(s)ds.$$

$$q^{(n)}(t) = q_0^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} C_n^i CR^{(i)}(t)S^{(n-1-k)}(t)g^{(n-1-i)}(0) + \sum_{i=0}^{n} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)g^{(n-i)}(s)ds .$$

Derivatives

$$q_0^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i R^{(i)}(t)\left(\Psi^{(n+1)}(t) - CS^{(n)}(t)u_0 + C\sum_{k=0}^{i-1} S^{(k)}(t)F^{(i-1-k)}(0) + C\int_0^t S(t-s)F^{(i)}(s)ds - CF^{(n)}(t)\right)$$

exist because of the conditions of this theorem for $n = 0,1,...,p+1$.

Denote $r_0 = q_0(0)$ and for $n = 0,1,..., p+1$ consistently define values

$$r_n = q_0^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} C_n^i CR^{(i)}(0)S^{(n-1-k)}(t)S^{(n-1-i)}(0)\sum_{l=0}^{n-1-i}\Phi^{(l)}(0)r_l .$$

Consider the system of integral equations

$$\tilde{q}_0(t) = q_0(t) + R(t)\int_0^t CS(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_0(s)ds,$$

$$\tilde{q}^{(n)}(t) = q_0^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} C_n^i CR^{(i)}(t)S^{(n-1-k)}(t)\sum_{l=0}^{n-1-i}\Phi^{(l)}(0)r_l + \tag{14}$$

$$+\sum_{i=0}^{n} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i \Phi^{(l)}(0) q_{n-i-l}(s)ds, \text{ при } n = 1,..., p+1 .$$

System (14) can be reduced to the Volterra equation of the second kind

$$g(t) = g_0(t) + \int_0^t K(t,s)g(s)ds$$

in the space $(C([0,T];Y))^{p+2}$ with matrix-operator function $K(t,s)$, defined in a triangle $\Delta = \left\{(t,s)\in R^2 : 0 \le t \le T, 0 \le s \le t\right\}$. By the continuity of all elements of system (14), it has a unique solution. This solution is the limit of a sequence of approximations

$$\tilde{q}_{0,i}(t) = q_0(t) + R(t)\int_0^t CS(t-s)\Phi(s)\tilde{q}_{0,i-1}(s)ds,$$

$$\tilde{q}_{n,i}(t) = q_0^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} C_n^i CR^{(i)}(t)S^{(n-1-k)}(t)\sum_{l=0}^{n-1-i}\Phi^{(l)}(0)r_l + \tag{15}$$

$$+\sum_{i=0}^{n} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i \Phi^{(l)}(s) q_{n-i-l,i-1}(s)ds, \text{ for } n = 1,..., p+1 .$$

which uniformly on $[0,T]$ converges to $\tilde{q}_n$, $n = 1,..., p+1$ while $i \to \infty$. For an initial approximation we take $\tilde{q}_{n,0} \equiv 0$, then $\tilde{q}_{n+1,0} = \tilde{q}'_{n,0}$, $n = 0,..., p$. In view of (15)

$$\tilde{q}_{n,i}(0) = r_n, n = 0,..., p+1, i \in N. \tag{16}$$

Suppose that for all $j = 1,...,i$ the equality $\tilde{q}_{n+1,j}(t) = \tilde{q}'_{n,j}(t)$, $n = 0,..., p$ is true. In this case, by Lemma 2 and (16),

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s) q_{n-i-l,i}(s)ds\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i+1)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s) q_{n-i-l,i}(s)ds +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S(t)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s) q_{n-i-l,i}(0) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l+1)}(s) q_{n-i-l,i}(s)ds +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s) q_{n-i-l+1,i}(s)ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S(t)C_{n-i}^l \Phi^{(l+1)}(s) q_{n-i-l,i}(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-i+1} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s)q_{n-i-l+1,i}(s)ds+$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=1}^{n-i+1} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s)q_{n-i-l+1,i}(s)ds+$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s)q_{n-i-l+1,i}(s)ds=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S(t)C_{n-i}^l \Phi^{(l+1)}(s)q_{n-i-l,i}(0)+$$
$$+\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-i+1} C_{n+1}^i CR^{(i)}(t)\int_0^t S(t-s)C_{n-i}^l \Phi^{(l)}(s)q_{n-i-l+1,i}(s)ds. \tag{17}$$

Differentiate the second term:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S^{(n-1-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i+1)}(t)S^{(n-1-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S^{(n-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i+1)}(t)S^{(n-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l+$$
$$+\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i+1)}(t)S^{(n-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S^{(n-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S(t)\Phi^{(l)}(0)r_l+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-1} CR(t)S(t)\Phi^{(l)}(0)r_l=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_{n+1}^i CR^{(i)}(t)S^{(n-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l+\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S(t)\Phi^{(l)}(0)r_l+$$
$$+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=0}^{n-1} CR(t)S(t)\Phi^{(l)}(0)r_l-\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_n^{i-1} CR^{(i)}(t)S(t)\Phi^{(l)}(0)r_l=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{n-1-i} C_{n+1}^i CR^{(i)}(t)S^{(n-k)}(t)\Phi^{(l)}(0)r_l-\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} C_n^i CR^{(i)}(t)S(t)\Phi^{(l)}(0)r_l. \tag{18}$$

Differentiating (15), from (17) and (18) we obtain the equality $\tilde{q}_{n+1,i+1}(t)=\tilde{q}'_{n,i+1}(t)$. Thus, the sequence $\tilde{q}_{0,i}$ converges to the function $\tilde{q}_0$ uniformly on $[0,T]$ when $i\to\infty$, and moreover $\tilde{q}'_{0,i}=\tilde{q}_{1,i}$. Similarly prove equality $\tilde{q}_{n+1}(t)=\tilde{q}'_n(t)$, $n=1,...,p$, consequently $\tilde{q}_0(t)\equiv q\in C^{p+2}([0,T];Y)$ and hence $q^{(n)}=\tilde{q}_n$, $n=1,...,p+1$. So the function u is $p+2$ times differentiable. This proves the theorem.

The solvability of the initial problem

Denote $\chi_0(t)=(I-Q)\chi(t),\ M_0(t)=(I-Q)M(t)$.

Lemma 3. *Let the pencil $\vec{B}$ be polynomially A-bounded, condition (A) be fulfilled and ∞ be a pole of order $p\in N$ of the A-resolvent of pencil $\vec{B}$. Let $\chi_0\in C^{p+2}([0,T];F^0),\ M_0\in C^{p+2}([0,T];F^0)$ and initial conditions $w_k^0\in U^0$ satisfy $w_k^0=-\sum_{q=0}^{p}K_q^2(B_0^0)^{-1}\frac{d^{q+k}}{dt^{q+k}}\big(\chi_0(t)q(t)+M_0(t)\big)\Big|_{t=0}, k=0,1$. Then there exists a unique solution $w\in C^2([0,T];U^0)$ of problem (8), (9), which can be represented as*

$$w(t)=-\sum_{q=0}^{p}K_q^2(B_0^0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}\big(\chi_0(t)q(t)+M_0(t)\big).$$

Proof. Denote $\chi_0(t)q(t)+M_0(t)=f^0(t)$, in this case $w_k^0=-\sum\limits_{q=0}^{p}K_q^2(B_0^0)^{-1}\frac{d^{q+k}}{dt^{q+k}}f^0(0), k=0,1.$ Therefore all the conditions of Lemma 2.7.2 [2] hold. Thus there exists a unique solution $w(t)=-\sum\limits_{q=0}^{p}K_q^2(B_0^0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}\left(f^0(t)\right)$ of (8), (9).

Theorem 3. *Let the pencil* $\vec{B}=(B_0,B_1)$ *be polynomially A-bounded, condition (A) be fulfilled and* ∞ *be a pole of order* $p\in N$ *of the A-resolvent of pencil* $\vec{B}$. *Let the operator* $C\in L(X;Y)$, $\ker C$ *be not empty,* $\chi_0\in C^{p+2}([0,T];F^0)$, $M_0\in C^{p+2}([0,T];F^0)$, $\Psi\in C^{p+2}([0,T];Y)$, *for all* $t\in[0,T]$ *operator* $C\chi(t)$ *be invertible,* $(C\chi)^{-1}\in C^{p+2}([0,T];L(Y))$ *and condition* $Cv_0=\Psi(0)$ *hold. Then there exists a unique solution* (v,q) *of inverse problem (1)–(3), such that* $v=u+w$, *where* $u\in C^{p+2}([0,T];U^1)$ *and* $q\in C^{p+2}([0,T];Y)$ *are defined in Theorem 2,* $w\in C^2([0,T];U^0)$ *is defined in Lemma 3.*

Proof. When reducing the original problem to the inverse regular and singular problems it has been shown that $v=u+w$. Thus all the conditions of Lemma 3 and Theorem 2 are fulfilled, therefore the functions $u\in C^{p+2}([0,T];U^1)$, $q\in C^{p+2}([0,T];Y)$ are a solution of the regular inverse problem and the function $w\in C^2([0,T];U^0)$ is a solution of the singular problem. Thus there exists a unique solution of problem (1)–(3).

References

1. Zamyshlyaeva A.A. The phase space of a high order Sobolev type equation. *IIGU Ser. Matematika*, 2011, Vol. 4, Issue 4, pp. 45–57. (in Russ.).

2. Zamyshlyaeva A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140201

3. Zamyshlyaeva A.A. Lineynye *uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* [Sobolev type linear equations of the higher order]. Publishing Center of SUSU, 2012, 107 p. (in Russ.).

4. Abasheeva N.L. Determination of a Right-hand Side Term in an Operator-differential Equation of Mixed Type. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2002, vol. 10, Issue 6, pp. 547–560. DOI: 10.1515/jiip.2002.10.6.547

5. Al Horani M., Favini A. An Identification Problem for First-order Degenerate Differential Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2006, vol. 130, no. 1, pp. 41–60. DOI: 10.1007/s10957-006-9083-y

6. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problem. Utrecht: VSP, 1999, 171 p.

7. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. Lineynaya evolyutsionnaya obratnaya zadacha dlya uravneniy sobolevskogo tipa [Linear Inverse Evolution Problems for Sobolev Type]. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki: sb. nauch. tr.* [Non-classical equations of mathematical physics: collection of scientific papers], 2010, pp. 293–310. (in Russ.).

8. Sviridyuk G.A., Vakarina O.V. Cauchy Problem for a Class of Higher-Order Linear Equations Of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 10, p. 1418.

9. Pyatkov S.G. On some inverse problems for elliptic equations and systems. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2011, Vol. 5, Issue 3, pp. 417–430. DOI: 10.1134/S199047891103015X

10. Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. Integrated semigroups andC-semigroups. Well-posedness and regularization of differential-operator problems Russian Mathematical Surveys, 1994, vol. 49, no. 6, pp. 115. (in Russ.). DOI: 10.1070/RM1994v049n06ABEH002449

11. Prilepko, A.I., Orlovsky, D.G., Vasin, I.A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York: Marcel Dekker, 2000, 709 p.

Received June 6, 2016

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 3, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph160301

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А. Замышляева, А.С. Муравьев
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru

Исследована обратная задача для уравнения соболевского типа второго порядка в банаховом пространстве. Введение содержит постановку задачи и историографию уравнений соболевского типа. Вторая часть включает в себя предварительные сведения, основанные на результатах теории уравнений соболевского типа высокого порядка. В третьей части исходная задача редуцирована к обратной регулярной и сингулярной задачам, сформулирована и доказана теорема об однозначной разрешимости регулярной задачи. Пользуясь результатами, полученными в третьей части, в четвертой части получено решение для сингулярной задачи. Сумма решений регулярной и сингулярной является решением исходной задачи, таким образом, в работе сформулирована и доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа; уравнение второго порядка; обратная задача; теорема об однозначной разрешимости.

Литература

1. Замышляева, А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Известия Иркутского Государственного Университета. Серия: Математика. – 2011. – Т. 4. – Вып. 4. – С. 45–57.
2. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник ЮурГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
3. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А Замышляева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2012. – 107 с.
4. Abasheeva, N.L. Determination of a Right-hand Side Term in an Operator-differential Equation of Mixed Type / N.L. Abasheeva // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2002. – V. 10, Вып. 6. – P. 547–560.
5. Al Horani, M. An Identification Problem for First-order Degenerate Differential Equations / M. Al Horani, A. Favini // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2006. – V. 130, № 1. – P. 41–60.
6. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problem / A.I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999. – 171 c.
7. Федоров, В.Е. Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, А.В. Уразаева // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. тр. – Новосибирск, 2010. – С. 293–310.
8. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейных уравнений типа Соболева высокого порядка / Г.А. Свиридюк, О.В. Вакарина // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 10. – С. 1410–1418.
9. Пятков, С.Г. О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем / С.Г. Пятков // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13, № 4 (44). – С. 83–96.
10. Мельникова, И.В. Интегрированные полугруппы и С-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, № 6(300). – С. 111–150.
11. Prilepko, A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 709 p.

Поступила в редакцию 6 июня 2016 г.

УДК 517.958 DOI: 10.14529/mmph160302

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

А.О. Кондюков
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: k.a.o_leksey999@mail.ru

Описано фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для системы уравнений в частных производных, моделирующей движение несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка в магнитном поле Земли. В рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, которое является квазистационарной полутраекторией.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая жидкость; уравнения соболевского типа; фазовое пространство.

Введение

Система уравнений

$$\begin{aligned}
&(1-\kappa\nabla^2)\,\mathrm{v}_t=\nu\nabla^2\,\mathrm{v}-(\mathrm{v}\cdot\nabla)\,\mathrm{v}+\sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1}A_{m,s}\nabla^2\,\mathrm{w}_{m,s}-\frac{1}{\rho}\nabla\,\mathrm{p}-2\Omega\times v+\frac{1}{\rho\mu}(\nabla\times\mathrm{b})\times\mathrm{b},\\
&\nabla\cdot\mathrm{v}=0,\ \nabla\cdot\mathrm{b}=0,\ \mathrm{b}_t=\delta\nabla^2\,\mathrm{b}+\nabla\times(\mathrm{v}\times\mathrm{b}),\\
&\frac{\partial\,\mathrm{w}_{m,0}}{\partial t}=\mathrm{v}+\alpha_m\,\mathrm{w}_{m,0},\ \alpha_m\in R_-,\ m=\overline{1,M},\\
&\frac{\partial\,\mathrm{w}_{m,s}}{\partial t}=s\,\mathrm{w}_{m,s-1}+\alpha_m\,\mathrm{w}_{m,s},\ s=\overline{1,n_m-1}
\end{aligned}\qquad(1)$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка $K(K=n_1+\ldots+n_M)$ [1] в магнитном поле Земли. Вектор функции $\mathrm{v}=(\mathrm{v}_1(x,t),\mathrm{v}_2(x,t),\ldots,\mathrm{v}_n(x,t))$ и $\mathrm{b}=(\mathrm{b}_1(x,t),\mathrm{b}_2(x,t),\ldots,\mathrm{b}_n(x,t))$ характеризуют скорость и магнитную индукцию соответственно, $\mathrm{p}=\mathrm{p}(x,t)$ – давление, κ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, $A_{m,s}$ – параметры, которые определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Прежде всего, надо заметить, что данная система обобщает систему, приведенную в [2, 3] при $K=0$ и $\kappa=0$.

Предполагая, что $\mu=1$ и $\rho=1$, рассмотрим разрешимость задачи Коши–Дирихле

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}(x,0)=\mathrm{v}_0(x),\mathrm{b}(x,0)=\mathrm{b}_0(x),\mathrm{w}_{m,s}(x,0)=\mathrm{w}^0_{m,s}(x),\forall x\in D;\\
&\mathrm{v}(x,t)=0,\mathrm{b}(x,t)=0,\mathrm{w}_{m,s}(x,t)=0,\forall(x,t)\in\partial D\times R_+,m=\overline{1,M},s=\overline{1,n_m-1}
\end{aligned}\qquad(2)$$

для системы (1). Здесь $D\subset R^n, n=2,3,4$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Также надо заметить, что задача (1), (2) входит в круг исследований сред Кельвина–Фойгта, начатых в работах [1, 4], в которых обобщалась система уравнений Навье–Стокса [5, 6] и получены теоремы существования и единственности соответствующих начально-краевых задач.

Случай $K=0$ и $\kappa=0$ задачи (1), (2) ранее изучался в [7]. Вырожденная модель магнитогидродинамики при $K=0$ и $\kappa\neq0$ исследовалась в [8]. В данной работе обобщаются результаты, полученные в [9].

Нас будет интересовать разрешимость задачи (1), (2). Рассмотрим эту задачу в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [10, 11]. Исходя из этого, в первой части статьи изложим абстрактную задачу Коши для полулинейного автономного уравнения соболевского типа (все результаты почерпнуты из монографии [12], поэтому будут приведены без доказательств). Во второй части задачу (1), (2) рассмотрим как конкретную интерпретацию абстрактной задачи.

В третьей части будет установлено существование квазистационарных полутраекторий указанной задачи и описано ее фазовое пространство. В заключении намечены возможные пути дальнейших исследований. Условимся обозначать конец доказательства значком ■.

1. Абстрактная задача

Пусть U и F – банаховы пространства, оператор $L \in L(U,F)$, т.е. линеен и непрерывен, причем $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \mathrm{dom}\ M \to F$ линеен, замкнут и плотно определен в U, т.е. $M \in Cl(U;F)$. Обозначим через U_M линеал $\mathrm{dom}\, M$, снабженный нормой графика $\|\cdot\| = \|\cdot\|_U + \|\cdot\|_F$, т.е. $U_M = \{u \in \mathrm{dom}\, M : \|u\| = \|Mu\|_F + \|u\|_U\}$. Пусть оператор $F \in C^{\infty}(U_M;F)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного автономного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \tag{4}$$

Назовем *локальным решением* (далее просто *решением*) задачи (3), (4) вектор-функцию $u \in C^{\infty}((0,T);U_M)$, которая удовлетворяет уравнению (4) и такая, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален (терминологию и результаты см. п. 1.2. [12]). Из [13] известно, что если выполняется это условие, то решение задачи (3), (4) может быть неединственным. Поэтому в дальнейшем мы будем искать только такие решения задачи (3), (4), которые являются *квазистационарными полутраекториями*. Из [12, с. 32] также известно, что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in U_M$. Поэтому введем еще два определения.

Определение 1. Пусть пространство U расщепляется в прямую сумму $U = U_0 \oplus U_1$ так, что $\ker L \subset U_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in U_0$, а $w(t) \in U_1$ при всех $t \in (0,T)$, уравнения (4) назовем квазистационарной полутраекторией, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Определение 2. Множество $B \subset U_M$ назовем фазовым пространством уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in B$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $u(t) \in B$.

Исходя из условия сильной (L,p)-секториальности оператора M, пространства U и F будут расщепляться в прямые суммы $U = U^0 \oplus U^1$, $F = F^0 \oplus F^1$. Здесь U^0 и F^0 – ядра, а U^1 и F^1 – образы аналитических разрешающих полугрупп U^t и F^t линейного однородного уравнения $L\dot{u} = Mu$.

Указанные полугруппы имеют следующий вид:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} L_{\mu}^{L}(M) e^{\mu t} d\mu,$$

где $\Gamma \subset \rho^L(M)$ – контур такой, что $\arg \mu \to \pm\theta$ при $|\mu| \to +\infty$, причем $\rho^L(M)$ – L-резольвентное множество оператора M, $R_{\mu}^{L}(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ ($L_{\mu}^{L}(M) = L(\mu L - M)^{-1}$) – *правая (левая) L-резольвента* оператора M.

В силу результатов работы [12, с. 33] приведем задачу (3), (4) к эквивалентной системе:

$$R\dot{u}^0 = u^0 + G(u), u^0(0) = u_0^0, \ \dot{u}^1 = Su^1 + H(u), u^1(0) = u_0^1. \tag{5}$$

Здесь $u^k \in U^k$, $k = 0,1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1} L_0$, $S = L_1^{-1} M_1$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $H = L_1^{-1} Q F$; ($Q \in L(F) (\equiv L(F,F))$ – проектор, который расщепляет пространство F требуемым образом). Систему (5) назовем *нормальной формой* задачи (3), (4).

В дальнейшем будем изучать такие квазистационарные полутраектории уравнения (4), для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого будем предполагать, что оператор R является бирасщепляющим [12, с. 34] (его ядро $\ker R$ и образ $\mathrm{im}\, R$ дополняемы в пространстве U). Положим $U^{00} = \ker R$, обозначив через $U^{01} = U^0 - U^{00}$ некоторое дополнение к подпространству U^{00}. Тогда первое уравнение системы (5) примет вид

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u), \tag{6}$$

где $u = u^{00} + u^{01} + u^{1}$.

В работе [12, с. 34] доказана теорема, дающая необходимые условия существования решения уравнения (4).

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, оператор R бирасщепляющий и существует квазистационарная полутраектория уравнения (4). Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u),\ u^{01} = \text{const}. \tag{7}$$

Перейдем теперь к рассмотрению достаточных условий. Из [12, с. 35] известно, что если оператор M сильно (L, p)-секториален, то оператор S секториален. Это означает, что оператор M порождает на U^1 аналитическую полугруппу. Обозначим ее через $\{U_1^t : t \ge 0\}$, так как оператор U_1^t является сужением оператора U^t на U^1. Из расщепления $U = U^0 \oplus U^1$ вытекает, что существует проектор $P \in L(U)$. Этот проектор соответствует данному расщеплению. Но $P \in L(U_M)$ и, следовательно, U_M расщепляется в прямую сумму $U = U_M^0 \oplus U_M^1$ так, что вложение $U_M^k \subset U^k, k = 0,1$, плотно и непрерывно.

В работе [12, с. 35] также доказана теорема , которая дает достаточные условия существования решения уравнения (4).

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, оператор R бирасщепляющий, а оператор F принадлежит $C^\infty(U_M; F)$. Пусть, кроме того,*

A_1) *в некоторой окрестности $O_{u_0} \subset U_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1)); \tag{8}$$

A_2) *проектор P_R принадлежит $L(U_M^0)$ и оператор $I + P_R G'_{u_0^0} : U_M^{00} \to U_M^{00}$ – топлинейный изоморфизм $(U_M^{00} = U_M \cap U^{00})$;*

A_3) *для аналитических полугрупп $\{U_1^t : t \ge 0\}$ выполнено* соотношение

$$\int_0^\tau \left\| U_1^t \right\|_{L(U^1; U_M^1)} dt < \infty, \tau \in R_+. \tag{9}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4) являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения (4).

Замечание 1. Соотношение $u^{01} = \text{const}$ из (7) поясняет смысл термина «квазистационарные полутраектории», т.е. это такие полутраектории, которые «стационарны по некоторым переменным». Понятие квазистационарной полутраектории в динамическом случае совпадает с понятием квазистационарной траектории [13].

Замечание 2. Из условия A_1) теоремы 2 следует, что окрестность O_{u_0} является частью фазового пространства уравнения (4).

Замечание 3. Для обычных аналитических полугрупп, которые имеют оценку $\left\| U_1^t \right\|_{L(U^1; U_M^1)} < \text{const}/t$, условие (9) не выполняется. Так как в дальнейшем мы собираемся использовать теорему 2 именно в таком случае, сделаем некоторые необходимые пояснения. Обозначим через $U_\alpha^1 = [U^1; U_M^1]_\alpha, \alpha \in [0,1]$, некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. Условие $F \in C^\infty(U_M; F)$ в теореме 2 дополним условием $H \in C^\infty(U_M^1; U_\alpha^1)$, а условие (9) заменим на

$$\int_0^\tau \left\| U_1^t \right\|_{L(U^1; U_\alpha^1)} dt < \infty, \tau \in R_+. \tag{10}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится (обсуждение круга этих вопросов см. в [12, с.38]).

Теперь пусть U_k и F_k – банаховы пространства, операторы A_k линейны и непрерывны (т.е. принадлежат $L(U_k, F_k)$), а операторы $B_k : \mathrm{dom}\, B_k \to F$ линейны и замкнуты с областями определений $\mathrm{dom}\, B_k$ плотными в U_k, $k = 1,2$. Построим пространства $U = U_1 \times U_2$, $F = F_1 \times F_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор L принадлежит $L \in L(U, F)$, а оператор $M : \mathrm{dom}\ M \to F$ линеен, замкнут и плотно определен, $\mathrm{dom}\, M = \mathrm{dom}\, B_1 \times \mathrm{dom}\, B_2$.

В [12, с. 38] приведена

Теорема 3. *Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны $k = 1,2$. Тогда оператор M сильно (L, p)-секториален, $p = \max(p_1, p_2)$.*

2. Конкретная интерпретация

Редуцируем задачу (1), (2) к задаче (3), (4). Во многих задачах гидродинамики использование градиента давления предпочтительнее рассмотрения давления, поэтому перейдем от системы (1) к системе

$$\begin{aligned}
&(1 - \kappa\nabla^2) v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{m=1}^{M} \sum_{s=0}^{n_m - 1} A_{m,s} \nabla^2 w_{m,s} - \overline{p} - 2\Omega \times v + (\nabla \times b) \times b, \\
&\nabla(\nabla \cdot v) = 0,\ \nabla(\nabla \cdot b) = 0,\ b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla \times (v \times b), \\
&\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0},\ \alpha_m \in R_-, m = \overline{1, M}, \\
&\frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s},\ s = \overline{1, n_m - 1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подробное обоснование такого перехода см., например, в [12]. Теперь нас будет интересовать разрешимость задачи (11), (2). Следуя работе [12], введем пространства $H_\sigma^2, H_\pi^2, H_\sigma$ и H_π. H_σ^2 – подпространство соленоидальных функций в пространстве $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))^n$. H_σ- подпространство соленоидальных функций в пространстве $(L_2(D))^n$. H_π^2 и H_π - ортогональные в смысле $(L_2(D))^n$ дополнения H_σ^2 и H_σ соответственно. Ортопроектор на H_σ будем обозначать через Σ. Причем, этим же символом будет обозначаться его сужение на пространство $(W_2^2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))^n$. Положим $\Pi = \mathrm{I} - \Sigma$. Формулой $A = \nabla^2 E_n$ (E_n – единичная матрица порядка n) зададим линейный непрерывный оператор $A : H_\sigma^2 \oplus H_\pi^2 \to H_\sigma \oplus H_\pi$ с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset R$, который сгущается лишь на $-\infty$. Формулой $B_v : v \to \nabla(\nabla \cdot v)$ $(B_b : b \to \nabla(\nabla \cdot b))$ зададим линейный непрерывный сюрьективный оператор $B_v(B_b) : H_\sigma^2 \oplus H_\pi^2 \to H_\pi$ с ядром $\ker B_v = B_b = H_\sigma^2$. Положим $U_{10} = H_\sigma^2 \times H_\pi^2 \times H_p$, $F_{10} = H_\sigma \times H_\pi \times H_p$, где $H_\pi = H_p$; $U_{1i} = H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1 = H_\sigma^2 \times H_\pi^2$, и $F_{1i} = L_2 = H_\sigma \times H_\pi$, $i = \overline{1, K}$. Тогда пространства $U_1 = \oplus_{l=0}^K U_{1l}$, $F_1 = \oplus_{l=0}^K F_{1l}$. Оператор $A_1 : U_1 \to F_1$ определим формулой $A_1 = \mathrm{diag}[\widehat{A}_1, E_K]$, где

$$\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} \breve{A}_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix},\ \breve{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(\mathrm{I} - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(\mathrm{I} - \lambda A)\Pi \\ \Pi(\mathrm{I} - \lambda A)\Sigma & \Pi A(\mathrm{I} - \lambda A)\Pi \end{pmatrix}.$$

Положим оператор $B_1 : U_1 \to F_1$ равным оператору M_1 (см. [12, с. 49]).

Замечание 4. Пространства U_1 и F_1 определяются в точности так же, как пространства U и F п. 2.2. [9]. Оператор A_1 определяется точно так же, как оператор L в п. 2.2. [12].

Замечание 5. Сужение оператора ΣA на H^2_σ обозначим через A_σ. В силу теоремы Солонникова–Воровича–Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 4. (i) Операторы $A_1, B_1 \in L(U_1, F_1)$, и, если $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 – бирасщепляющий $\ker A_1 = \{0\}\times\{0\}\times H_p \times \underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K}$, $\operatorname{im} A_1 = H_\sigma \times H_\pi \times \{0\} \times F_{11} \times F_{12} \times \ldots \times F_{1K}$.

(ii) Если $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор B_1 $(A_1, 1)$-ограничен, причем порядок несущественной особой точки в бесконечности равен единице.

Доказательство. Утверждение теоремы есть прямое следствие результатов [12, с. 73].■

Далее положим $U_2 = F_2 = L_2(D)$ и равенством $B_2 = \delta\nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \to F_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Положим $A_2 \equiv \mathrm{I}$.

Теорема 5. *Оператор B_2 сильно A_2-секториален.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из секториальности оператора B_2 [2, гл.1] ■

Положим $U = U_1 \times U_2$, $F = F_1 \times F_2$. Вектор u пространства U имеет вид $u = \operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K, u_b)$, где $\operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K) \in U_1$, а $u_b \in U_2$, $b_\sigma \in H^2_\sigma$, $b_\pi \in H^2_\pi$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (\mathrm{I} - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \overline{p}$. Элемент $f \in F$, где $f = \operatorname{col}(f_\sigma, f_\pi, \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1})$, $f_\sigma = \Sigma f$, $f_\pi = \Pi f$. Операторы L и M определены формулами $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in L(U, F)$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to F$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = U_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 6. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A)$, тогда оператор M сильно $(L, 1)$-секториален.*

Доказательство. Из теоремы 4 и п. 3.2. [12, с. 74] вытекает, что оператор B_1 сильно A_1-секториален. В силу этого и теорем 3 и 5 справедливо утверждение теоремы 6. ■

Построим нелинейный оператор F. В нашем случае его можно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, b) = \operatorname{col}(-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b),$ $-\Pi(((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1}), F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, b) = \nabla \times ((u_\sigma + u_\pi) \times b)$. В данном случае $U_M = U_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 7. *Оператор F принадлежит $C^\infty(U_M; F)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 7 вытекает из того, что при любых $u \in U_M$ оператор F'_u принадлежит $L(U_M; F)$, вторая производная Фреше F''_u оператора F – непрерывный билинейный оператор из $U_M \times U_M$ в F, а $F'''_u \equiv O$ (аналогично [12, с. 74]) ■

Итак, редукция задачи (1), (2) к задаче (3), (4) завершена.

3. Фазовое пространство и квазистационарные полутраектории

Далее будем отождествлять задачи (1), (2) и (3), (4). Перейдем теперь к проверке условий теорем 1, 2.

Лемма 1. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R бирасщепляющий, причем $P_R \in L(U^0_M)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 и результатов пункта 3.2. из [12] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ разрешающих операторов уравнения (4). В нашем случае естественно представить ее в виде $U^t = V^t \times W^t$, где $V^t(W^t)$ – сужение оператора U^t на $U_1(U_2)$. Исходя из того, что оператор B_2 секториален, $W^t = \exp(tB_2)$, откуда следует, что ядро этой полугруппы $W^\circ = \{0\}$, а образ $W^1 = U_2$. Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in R_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и результатов пункта 3.2. из [12] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in R\}$. Ее ядро $V^0 = U_1^{00} \oplus U_1^{01}$, где $U_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times H_p \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} (= \ker A_1$ в силу теоремы 4), а $U_1^{01} = \Sigma A_\kappa^{-1} A_{\kappa\pi}^{-1} \left[H_\pi^2 \right] \times H_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K+1}$. Здесь $A_\kappa = I - \kappa A$, $A_{\kappa\pi}$ – сужение оператора ΠA_κ^{-1} на H_π. Хорошо известно, что при условии $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, оператор $A_{\kappa\pi} : H_\pi \to H_\pi^2$ является топлинейным изоморфизмом [17]. Через U_1^1 обозначим образ V^1. Тогда из того что, оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$-секториален вытекает то, что пространство U_1 разлагается в прямую сумму подпространств $U_1 = U_1^{00} \oplus U_1^{01} \oplus U_1^1$. Построим оператор R (см. (5), (6)). В нашем случае $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in L(U_1^{00} \oplus U_1^{01})$. Здесь $A_{10} (B_{10})$ – сужение оператора $A_1 (B_1)$ на $U_1^{00} \oplus U_1^{01}$ (В силу соответствующих результатов из [12, с. 75] и теоремы 6, легко показать, что оператор B_{10}^{-1} существует). По построению $\ker R = U_1^{00}$, а в работе [14] показано, что $\operatorname{im} R = U_1^{01}$. Следовательно, оператор R бирасщепляющий. Через P_R обозначим проектор пространства $U_1^{00} \oplus U_1^{01}$ на U_1^{00} вдоль U_1^{01}. В силу конструкции пространства U_M проектор P_R принадлежит $L(U_M^0)$, где $U_M^0 = U_M \cap (U_1^{00} \oplus U_1^{01}) (\equiv U_1^{00} \oplus U_1^{01})$. Итак, утверждение леммы 1 доказано. ■

Лемма 2. *В условиях леммы 1 любое решение задачи (1), (2) лежит во множестве*

$$M = \{u \in U_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0, u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{m=1}^{M} \sum_{q=0}^{n_m - 1} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma)\}.$$

Доказательство. Формулами (2.2.9), (2.2.10) из [12] определим проекторы P_k, Q_k, $k = 0,1$. Из соответсвующих результатов [12] и в силу того, что ядро $W^0 = \{0\}$, следует, что $I - P = (P_0 + P_1) \otimes O$, $Q = (I - Q_0 - Q_1) \otimes I$, $P : U \to U^1$, $Q : F \to F^1$. Применим проектор $I - P$ к уравнению (4), тогда получим уравнения

$$\Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \\ + \sum_{m=1}^{M} \sum_{q=0}^{n_m - 1} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - u_p - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b) = 0, \tag{12}$$

$$B u_\pi = 0, \quad B b_\pi = 0.$$

В силу свойств оператора B и теоремы 1 получим необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$, $b_\pi \equiv 0$. Это значит, что все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $B = \{u \in U_M : u_\pi = 0, b_\pi = 0\}$.

В силу того, что $\Pi u_p = u_p$, из первого уравнения (12) получаем соотношение (7), т.е. в нашем случае

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{m=1}^{M} \sum_{q=0}^{n_m - 1} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma). \tag{13}$$

Из тождества $P_0 \equiv P_R$ следует, что второе и третье уравнение в (12) есть соотношение (8) применительно к нашему случаю. В силу этого, справедливо утверждение леммы 2. ■

Замечание 6. Из соотношения (13) вытекает условие A_2) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in U_M^{00} (\equiv U_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому аналогично [12, с. 77] получаем, что множество M – простое банахово многообразие C^∞-диффеоморфное подпространству $U_1^1 \times U_2$, является кандидатом на роль фазового пространства задачи (1), (2) ((11), (2)).

Лемма 3. В условиях леммы 1 выполняется соотношение (9).

Доказательство. Проверим условия (9), (10). Построим пространство $U_\alpha = U_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Очевидно, данное пространство будет интерполяционным пространством для пары $[U, U_M]_\alpha$, где $\alpha = 1/2$. Как отмечалось ранее, полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ продолжима до группы $\{V_1^t : t \in R\}$ на U_1^1, причем V_1^t – сужение оператора V^t на U_1^1. Так как $U_M^1 = U_M \bigcap U_1^1$ по построению, оператор B_1 непрерывен (в силу теоремы 4) и полугруппа $\{U^t : t \in R_+\}$ равномерно ограничена, получим неравенство

$$\int_0^\tau \left\| V_1^t \right\|_{L(U_1^1;U_M^1)} dt \le \mathrm{const} \left\| B_1 \right\|_{L(U_1,F_1)} \int_0^\tau \left\| V_1^t \right\|_{L(U_1^1)} dt < \infty, \quad \tau \in R_+. \tag{14}$$

Согласно неравенству Соболева [12, с. 77], полугруппа $\{W^t : t \in \overline{R}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \left\| W^t \right\|_{L(\mathrm{dom} B_2; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))} dt < \infty. \tag{15}$$

Пусть $U_\alpha^1 = U_\alpha \bigcap U^1$, где $U^1 = U_1^1 \times U_2$. Тогда из неравенств (14) и (15) следует, что справедливо утверждение леммы 3. ■

Теперь найдем оператор H, учитывая условие (10). Его естественно представить в виде $H = H_1 \otimes H_2$, причем $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} – сужение оператора A_1 на U_1^1.). Для оператора H справедливо утверждение, аналогичное теореме 7 для оператора F, т.е. $H \in C^\infty(U_M^1; U_\alpha^1)$, где $U_\alpha^1 = U_\alpha \bigcap U^1$.

Итак, выполнены все условия теоремы 2, откуда вытекает справедливость следующей теоремы

Теорема 8. *Пусть $\kappa^{-1} \notin \sigma(A) \bigcup \sigma(A_\sigma)$. Тогда при любом u_0, таком, что $u_0 \in M$, и некотором $T \in R_+$ существует единственное решение $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$ задачи (1), (2), являющееся квазистационарной полутраекторией, причем $u(t) \in M$ при всех $t \in (0,T)$.*

Заключение. Следующим этапом исследования станет проведение вычислительного эксперимента для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта в магнитном поле Земли. Кроме того было бы интересно перенести идеи и методы теории полулинейных уравнений соболевского типа на «стохастическую» ситуацию [15], а также на обратные и другие задачи [16, 17].

Автор выражает глубокую благодарность професору Т.Г. Сукачевой за постановку задачи и полезные советы, а также профессору Г.А. Свиридюку за интерес к данным исследованиям и поддержку.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 1.857.2014/К).

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126–164.

2. Хенри, Д. Геомерическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

3. Hide, R. On planetary atmospheres and interiors / R. Hide. – Mathematical Problems in the Geophysical Sciences I, W.H. Reid ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

4. Осколков, А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему Навье–Стокса / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1971. – Т. 21. – С. 79–103.

5. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961. – 204 с.

6. Темам, Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

7. Chen, F. On the differential system governing fluids in magnetic field with data in L^p/ F. Chen, P. Wang, C. Qu // Internat. J. Math. Math. Sci. – 1998. – V. 21, № 2. – P. 299–306.

8. Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Дифф. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 495–501.

9. Кондюков, А.О. Об одной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // XVI Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике, летняя сессия, Челябинск, 21–27 июня 2015, с. 75.

10. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения– 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.

11. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

12. Матвеева, О.П. Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.

13. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.

14. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 1. – С. 62–70.

15. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively *p*-Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Hidawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. – Vol. 2015. – p. 8.

16. Favini, A. Perturbation methods for inverse problems related to degenerate differential equations / A. Favini // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 2. – P. 32–44.

17. Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient–Operator Conditions in General L_p Sobolev Spaces and Applications / M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas , S. Maingot , A. Medeghri // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. –2015 – Vol. 8, no. 3. – P. 56–77.

Поступила в редакцию 18 мая 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 3, pp. 13–21

DOI: 10.14529/mmph160302

GENERALIZED MODEL OF INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID IN THE EARTH'S MAGNETIC FIELD

A.O. Kondyukov
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: k.a.o_leksey999@mail.ru

The initial boundary value problem for a system of partial differential equations modeling the dynamics of Kelvin-Voigt incompressible viscoelastic fluid of higher order in the Earth's magnetic field is studied. Problems of this type arise in the study of the process of rotation of a certain volume of fluid in the Earth's magnetic field. Research of the models of Kelvin–Voigt media has its source in the scientific works by A.P. Oskolkov, who summarizes the system of Navier–Stokes equations and theorems of unique existence of solutions to the corresponding initial boundary value problems. Subsequently, these models are studied by G.A. Sviridyuk and his followers. This model is studied for the first time and summarizes corresponding results for the model of magnetohydrodynamics of the nonzero order. The article deals with local unique solvability of chosen problem in the framework of the theory of autonomous semilinear Sobolev type equations. The main method is the method of phase space. The basic tool is the notion of p-sectorial operator and resolving singular semigroup of operators generated by it. In other words, the semigroup approach is used in the research. Besides the introduction, conclusion and reference list, the article includes three parts. In the first part of the article, the abstract Cauchy problem for semilinear autonomous equation of Sobolev type is presented. Here the concepts of Cauchy problem for Sobolev type equations, the phase space, quasi-stationary semitrajectory are introduced, and the theorems providing necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-stationary semitrajectories are presented. In the second part, the Cauchy–Dirichlet problem is considered as a specific interpretation of the abstract problem. In the third part, the existence of a unique solution to the problem, which is a quasi-stationary semitrajectory is proved, and the description of its phase space is obtained. In conclusion, the possible ways of further research are outlined.

Keywords: incompressible viscoelastic fluid; Sobolev type equations; phase space.

References

1. Oskolkov A.P. *Trudy matem. instituta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126–164. (in Russ.).

2. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981, 348 p. (in Eng.). DOI: 10.1007/BFb0089647

3. Hide R. On Planetary Atmospheres and Interiors, in *Mathematical Problems in the Geophisical Sciences*. 1, W.H. Raid, Ed., Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

4. Oskolkov A.P. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI*, 1971, Vol. 21, pp. 79–103. (in Russ.).

5. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. N.Y., London, Paris, Gordon and Breach, 1969, 234 p.

6. Temam R. *Uravnenie Nav'e–Stoksa. Teoriya i chislennyy analiz* [Navier-Stokes Equation. Theory and Numerical Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1981, 408 p. (in Russ.). [Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, Amsterdam–New York–Oxford, North-Holland, 1977, 500 p. (in Eng.).]

7. Chen F., Wang P., Qu C. On the differential system governing fluids in magnetic field with data in L^p. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1998, Vol. 21, no. 2, p. 299–306. DOI: 10.1155/S0161171298000416

8. Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. Phase space of a model of magnetohydrodynamics. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 4, pp. 502–509. DOI: 10.1134/S0012266115040072

9. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. Ob odnoy modeli magnitogidrodinamiki nenulevogo poryadka [About a magnetohydrodynamics model of non zero order]. *XVI Vserossiyskiy Simpozium po prikladnoy i promyshlennoy matematike, letnyaya sessiya, Chelyabinsk, 21–27 iyunya 2015* [XVI All-Russian Symposium on Applied and Industrial Mathematics, summer session, Chelyabinsk, 21–27 June 2015], p. 75.

10. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. *Differ. Uravn.,* 1990, Vol. 26, no. 2, pp. 250–258. (in Russ.).

11. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1990, Vol. 31, no. 5, pp. 109–119.(in Russ.).

12. Matveeva O.P., Sukacheva T.G. *Matematicheskie modeli vyazkouprugikh neszhimaemykh zhidkostey nenulevogo poryadka* [Mathematical models of viscoelastic incompressible fluid of nonzero order], Chelyabinsk: Publ. Center of the South Ural State University, 2014, 101 p. (in Russ.).

13. Sviridyuk G.A. *Izv. RAN. Ser. matem*, 1993, Vol. 57, no. 3, pp. 192–207. (in Russ.).

14. Sviridyuk G.A. On a model of the dynamics of a weakly compressible viscoelastic fluid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, Vol. 38, no. 1, pp. 59–68. (in Russ.).

15. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively. p-Sectorial Operators in Space of “Noises”, *Abstract and Applied Analysis*, 2015, p. 8, Article ID 697410. DOI:10.1155/2015/697410

16. Favini A. Perturbation methods for inverse problems related to degenerate differential equations. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 32–44.

17. Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient–Operator Conditions in General L^p Sobolev Spaces and Applications. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 3, pp. 56–77. DOI: 10.14529/mmp150304

Received May 18, 2016

УДК 517.958 DOI: 10.14529/mmph160303

ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: oltan.72@mail.ru

Рассматривается задача Коши–Дирихле для однородной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка. Данная задача исследуется с использованием теории полулинейных уравнений соболевского типа. Задача Коши–Дирихле для соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к абстрактной задаче Коши для указанного уравнения. Доказана теорема существования и единственности решения указанной задачи, являющегося квазистационарной траекторией и получено описание ее фазового пространства.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа; фазовое пространство; несжимаемая вязкоупругая жидкость.

Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v, \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in R_-, \quad l=\overline{1,K} \end{cases} \tag{1}$$

описывает модель динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $K>0$ [1].

Физический смысл функции $v=(v_1,\ldots,v_n), v_i = v_i(x,t), \quad x\in\Omega$ – скорость течения, функция $p=p(x,t)$ соответствует давлению. Здесь $\Omega\subset R^n$, $n=2,3,4$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Параметры $\nu\in R_+$ и $æ\in R$ отвечают за вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $\beta_l\in R_+$ характеризуют время ретардации (запаздывания) давления, функция $f=f(f_1,...,f_n)$, $f_i=f_i(x,t)$ определяет внешнее воздействие на жидкость.

Для системы (1) рассматривается задача Коши–Дирихле $(f\equiv 0)$

$$\begin{cases} v(x,0)=v_0(x),\ p(x,0)=p_0(x),\ w_l(x,0)=w_{l0}(x)\ \ \forall x\in\Omega, \\ v(x,t)=0,\ w_l(x,t)=0, l=\overline{1,K}, \forall (x,t)\in\partial\Omega\times R. \end{cases} \tag{2}$$

Разрешимость задачи (1), (2) рассматривается в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [2, 3]. В первой части статьи изложена формальная схема задачи Коши для полулинейных уравнений указанного типа, а во второй части задача (1), (2) приводится как конкретная интерпретация формальной схемы. Отметим, что задача Тейлора для соответствующих моделей изучалась в работах [4, 5].

1. Формальная схема

Пусть операторы $\mathrm{L}\in L(U;F)$ и $\mathrm{M}\in C^\infty(U;F)$. Здесь U и F – банаховы пространства. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0)=u_0 \tag{3}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$\mathrm{L}\dot{u} = \mathrm{M}(u). \quad (4)$$

Линейный оператор $\mathrm{L}: U \to F$ называется *бирасщепляющим*, если его образ $\operatorname{im}\mathrm{L}$ и ядро $\ker \mathrm{L}$ дополняемы соответственно в пространствах U и F. Пусть оператор L – бирасщепляющий, обозначим через $\mathrm{M}'_{u_0} \in L(U;F)$ производную Фреше оператора M в точке $u_0 \in U$ и рассмотрим цепочки M'_{u_0} – присоединенных векторов оператора L, которые выбираются из некоторого дополнения $\operatorname{coim}\mathrm{L} = U - \ker\mathrm{L}$ к ядру $\ker\mathrm{L}$. Введем условие (A1). Независимо от выбора $\operatorname{coim}\mathrm{L}$ любая цепочка M'_{u_0} – присоединенных векторов содержит точно p элементов для любого вектора $\varphi \in \ker\mathrm{L}\setminus\{0\}$.

Через $\tilde{\mathrm{L}}$ обозначим сужение оператора L на $\operatorname{coim}\mathrm{L}$. По теореме Банаха о замкнутом графике оператор $\tilde{\mathrm{L}}: \operatorname{coim}\mathrm{L} \to \operatorname{im}\mathrm{L}$ является топлинейным изоморфизмом. Пусть $U_0^0 = \ker\mathrm{L}$ и построим множества $U_q^0 = \tilde{\mathrm{A}}^q[U_0^0]$, $q = \overline{1,p}$, где $\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}\mathrm{M}'_{u_0}$. Множества $U_q^0 \subset \operatorname{coim}\mathrm{L}$ являются линейными пространствами, то образ $F_p^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_p^0]$ есть тоже линейное пространство, при этом $F_p^0 \cap \operatorname{im}\mathrm{L} = \{0\}$ (при выполнении (A1)). Введем еще одно условие (A2). $F_p^0 \oplus \operatorname{im}\mathrm{L} = F$.

Обозначим через $\mathrm{Q_p}: F \to F_p^0$ проектор вдоль $\operatorname{im}\mathrm{L}$ и строим оператор $\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q_p})\mathrm{M}'_{u_0}$. Заметим, что $\mathrm{A}[U_q^0] = U_{q+1}^0$, $q = \overline{0, p-1}$, $\mathrm{A}[U_p^0] = \{0\}$. Отсюда

$$\mathrm{A}^{\mathrm{q}}[U_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ U_{q+r}^0, & q + r \le p. \end{cases} \quad (5)$$

Построим оператор D, котрый является сужением оператора $\mathrm{Q_p M'_{u_0} A^p}: U \to F_p^0$ на U_0^0. По построению $\mathrm{D}[U_0^0] = F_p^0$ и $\mathrm{D} \in L(U_0^0; F_p^0)$. Кроме того, $\ker\mathrm{D} = \{0\}$, иначе вектор $\varphi \in \ker\mathrm{D}\setminus\{0\} \subset \ker\mathrm{L}\setminus\{0\}$ имеет бесконечную цепочку $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, 0, \ldots\}$ M'_{u_0}– присоединенных векторов. Согласно уже цитированной теореме Банаха оператор $\mathrm{D}: U_0^0 \to F_p^0$ является топлинейным изоморфизмом.

Через $\mathrm{P}_0: U \to U_0^0$ обозначим проектор вдоль $\operatorname{coim}\mathrm{L}$ и построим операторы $\mathrm{P_q} = \mathrm{A^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q}}$, $q = \overline{1,p}$. Операторы $\mathrm{P_q}: U \to U_q^0$ – проекторы. Действительно, $\operatorname{im}\mathrm{P_q} = U_q^0$, $\mathrm{P_q} \in L(U)$ и $\mathrm{P_q^2} = \mathrm{A^q(D^{-1}(Q_p M'_{u_0} A^p))D^{-1}Q_p M'_{u_0} A^{p-q}} = \mathrm{P_q}$ согласно определению оператора D. Из (6) и определения проектора P_0

$$\mathrm{P_q P_r} = \mathrm{P_r P_q} = \mathrm{O}, \qquad q, r = \overline{0,p}, \qquad q \ne r.$$

Пусть $U^0 = \oplus_{q=0}^p U_q^0$, $\mathrm{P} = \sum\limits_{\mathrm{q}=0}^{\mathrm{p}} \mathrm{P_q}$. Оператор $\mathrm{P} \in L(U)$ – проектор, $\operatorname{im}\mathrm{P} = U^0$. Пусть $U^1 = \ker\mathrm{P}$, тогда $U = U^0 \oplus U^1$.

Рассмотрим линеалы $F_q^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_q^0]$, $q = \overline{0, p-1}$, и построим оператор $\mathrm{B} = \mathrm{M}'_{u_0}\tilde{\mathrm{L}}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q_p})$.

Так как $\mathrm{B}[F_q^0] = F_{q+1}^0$, $q = \overline{0, p-1}$, $\mathrm{B}[F_p^0] = \{0\}$, то

$$\mathrm{B}^{\mathrm{q}}[F_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ F_{q+r}^0, & q + r \le p. \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) аналогично следует, что операторы $\mathrm{Q_q} = \mathrm{B^q M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q}}$, $q = \overline{0, p-1}$ тоже являются проекторами на F_q^0, причем $\mathrm{Q_q Q_r} = \mathrm{Q_r Q_q} = \mathrm{O}$, $\quad r, q = \overline{0, p}$, $\quad q \neq r$.

Положим, $F^0 = \oplus_{q=0}^{p} F_q^0$, $\mathrm{Q} = \sum\limits_{\mathrm{q=0}}^{\mathrm{p}} \mathrm{Q_q}$. Оператор $\mathrm{Q} \in \mathrm{L}(F)$ – проектор, значит $F = F^0 \oplus F^1$, где $F^0 = \operatorname{im} \mathrm{Q}$, $\quad F^1 = \ker \mathrm{Q}$.

Отметим, что по построению

$$\mathrm{LA^q D^{-1} Q_p} = \mathrm{B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p}, \quad q = \overline{1, p}. \tag{7}$$

Кроме того,

$$\mathrm{BL} = \mathrm{M'_{u_0}} (\mathrm{I} - \mathrm{P_0}). \tag{8}$$

Из (7), (8) получаем при $q = \overline{1, p}$

$$\begin{aligned} \mathrm{LP_q} &= \mathrm{LP_q (I - P_0)} = \mathrm{LA^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q} (I - P_0)} = \\ &= \mathrm{B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q} M'_{u_0} (I - P_0)} = \mathrm{Q_{q-1} L}. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (4) перепишем в виде

$$\mathrm{L}\dot{u} = \mathrm{M'_{u_0}}\, u + \mathrm{F}(u), \tag{10}$$

где оператор $\mathrm{F} = \mathrm{M} - \mathrm{M'_{u_0}} \in C^\infty(U; F)$ по построению. На уравнение (10) подействовав последовательно проекторами $\mathrm{Q_q}$, $\quad q = \overline{0, p}$, и $\mathrm{I} - \mathrm{Q}$, получаем согласно (9) эквивалентную систему

$$\begin{cases} \mathrm{L}\dot{u}_1^0 = \mathrm{M'_{u_0}}\, u_0^0 + \mathrm{F_0}(u), \\ \quad \dots \\ \mathrm{L}\dot{u}_p^0 = \mathrm{M'_{u_0}}\, u_{p-1}^0 + \mathrm{F_{p-1}}(u), \\ \\ 0 = \mathrm{M'_{u_0}}\, u_p^0 + \mathrm{F_p}(u), \\ \\ \mathrm{L}\dot{u}^1 = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})\,\mathrm{M}(u), \end{cases} \tag{11}$$

где $u_q^0 \in U_q^0$, $\mathrm{F_q}(u) = \mathrm{Q_q F}(u) + \mathrm{Q_q M'_{u_0}}\, u^1$, $q = \overline{0, p}$, $u^1 \in U^1$. Значит, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть операторы* $\mathrm{L} \in L(U; F)$, $\mathrm{M} \in C^\infty(U; F)$, *при этом* L *– бирасщепляющий оператор, и пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда уравнение* (4) *будет эквивалентно системе* (11).

Замечание 1. В условиях леммы 1 оператор $\mathrm{M'_{u_0}}$ (L, p)-ограничен в точке u_0 [6].

Теперь займемся поисками решения для задачи (3), (4).

Определение 1. *Решением* задачи (3), (4) будем называть вектор–функцию $u \in C^\infty((-t_0; t_0); U)$, $\quad t_0 = t_0(u_0) > 0$, удовлетворяющую уравнению (4) и условию (3).

Введем еще два определения.

Определение 2. Банахово C^k-многообразие B называется *фазовым пространством* для уравнения (4), если $\forall u_0 \in B$ существует единственное решение $u = u(t)$ для задачи (3), (4) на интервале $(-t_0, t_0)$ [2].

Определение 3. Решение $u = u(t)$ задачи (3), (4), для которого выполняется $\mathrm{L}\dot{u}^0 \equiv 0 \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$, где $u^0 = \mathrm{P}u$, назовем *квазистационарной траекторией* для уравнения (4).

Для того, чтобы выделить подмножество квазистационарных траекторий из множества всевозможных решений задачи (3), (4) введем в рассмотрение еще одно условие.

Рассмотрим множество $U = \{u \in U : u_q^0 = \text{const}, q = \overline{1, p}\}$. Очевидно, U – полное аффинное многообразие, которое моделируется подпространством $U_0^0 \oplus U^1$. Пусть точка $u_0 \in U$, через O_{u_0} обозначим некоторую окрестность $O_{u_0} \subset U$ точки u_0.

(A3). $\mathrm{F_q}(u) \equiv 0 \quad \forall u \in O_{u_0}, \quad q = \overline{1, p}.$

Теорема 1. *Пусть*

(i) справедливы условия леммы 1;

(ii) точка $u_0 \in B$, где $B = \{u \in U : \ \mathrm{Q_0 M}(u) = 0\}$;

(iii) выполняется условие (A3).

Тогда существует единственное решение для задачи (3), (4), которое является квазистационарной траекторией, при этом $u(t) \in B, \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$.

Доказательство. Предположим, что решение задачи (3), (4) уже найдено. Тогда из (11) по условию (A3), следует, что $\mathrm{L}\dot{u}^0 \equiv 0$, значит, решение будет являться квазистационарной траекторией. Установим существование единственного решения.

Согласно лемме 1 и условию (A3) система (11) редуцируется к следующему виду в окрестности O_{u_0}

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{M}'_{\mathrm{u}_0} u_0^0 + \mathrm{F}_0(u), \\ \mathrm{L}\dot{u}^1 = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})\mathrm{M}(u). \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что по построению оператор $\mathrm{M}'_{\mathrm{u}_0} : U_0^0 \to F_0^0$ явлется невырожденным, и $\mathrm{F}'_{0\mathrm{u}}|_{u=u_0} \equiv \mathrm{O}$, где через $\mathrm{F}'_{0\mathrm{u}}$ здесь обозначена производная Фреше для оператора F_0 в точке u. Тогда в силу теоремы о неявной функции будет существовать окрестность $O_{u_0}^1 \subset (\mathrm{I} - \mathrm{P})[O_{u_0}]$ и вектор-функция

$$\delta \in C^\infty(O_{u_0}^1; O_{u_0}^0),$$

где $O_{u_0}^0 = \mathrm{P}[O_{u_0}]$, такие, что $u(t) = u_0^0(t) + \sum_{q=1}^{p} u_q^0 + u^1$, причем $u(t) \in B, \quad \forall t \in R$. Здесь $u_0^0(t) = \delta(u^1), \quad \forall u^1 \in O_{u_0}^1$, а $u_q^0 = P_q u_0 = \text{const}$ при $q = \overline{1, p}.$

Из (9) следует, что $\mathrm{QL} = \mathrm{LP}$. Поэтому оператор $\mathrm{L} : U^1 \to F^1$. Обозначим через L_1 сужение оператора L на U^1. Оператор $\mathrm{L}_1 \in L(U^1; F^1)$ будет инъективен по построению. Установим сюрьективность этого оператора. Пусть $f^1 \in F^1$. Поэтому существует $\tilde{u} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1} f^1 \in \operatorname{coim} \mathrm{L}$. Пусть $\mathrm{P}\tilde{u} \neq 0$, т.е. $\mathrm{P}\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{P_q}\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \tilde{u}_q^0 \neq 0$. Тогда $\mathrm{L}\tilde{u} = \mathrm{LP}\tilde{u} + \mathrm{L}(\mathrm{I} - \mathrm{P})\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{L}\tilde{u}_q^0 + \mathrm{L}_1(\mathrm{I} - \mathrm{P})\tilde{u} = f^1 \notin F^1$. Противоречие. Значит оператор $\mathrm{L}_1 : U^1 \to F^1$ будет непрерывно биективен. Через L^{-1} обозначим сужение оператора $\tilde{\mathrm{L}}^{-1}$ на F^1.

Из всего вышесказанного вытекает, что система (12) на $O_{u_0}^1$ может быть редуцирована к виду

$$\dot{u}^1 = \mathrm{L}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q})\mathrm{M}(\delta(u^1; t) + (\mathrm{P} - \mathrm{P}_0)u^0 + u^1) \equiv \Phi(u^1), \tag{13}$$

где $\Phi \in C^\infty(O^1_{u_0};U^1)$. Однозначная локальная разрешимость является классическим результатом для задачи Коши $u^1(0) = (\mathrm{I} - \mathrm{P})u_0$ уравнения (13). Квазистационарная траектория будет иметь вид $u(t) = \delta(u^1(t)) + u^1(t)$, где $u^1 \in C^\infty((-t_0, t_0); O^1_{u_0})$ – решение задачи Коши уравнения (13).

2. Интерпретация формальной схемы

Модифицируем систему (1)

$$\begin{cases} (1 - æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l \nabla^2 w_l - \overline{p}, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot v), \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbf{R}_-, \quad l = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{14}$$

Замена $\overline{p} = \nabla p$ объясняется тем, что в большинстве задач гидродинамики рассматривать градиент предпочтительнее, чем давление.

Перейдем от задачи (14), (2) к задаче (4), (3). Положим

$$U = \oplus_{l=0}^{K} U_l, \qquad F = \oplus_{l=0}^{K} F_l, \tag{15}$$

где $U_0 = H^2_\sigma \times H^2_\pi \times H_p$, $F_0 = H_\sigma \times H_\pi \times H_p$, $U_i = H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1 = H^2_\sigma \times H^2_\pi$, $F_i = L^2 = H_\sigma \times H_\pi$, $i = \overline{1, K}$. H^2_σ – подпространство соленоидальных векторов пространства $H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1$, $H^2 = (W^2_2(\Omega))^n$, $\overset{\circ}{H}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n, H^2_\pi$ – ортогональное (в смысле $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$) дополнение к H^2_σ, H_σ и H_π – замыкания подпространств H^2_σ и H^2_π в норме L^2 соответственно; $H_p = H_\pi$.

Через $\Sigma : L^2(\Omega) \to H_\sigma$ обозначим ортопроектор вдоль H_π. Тогда $\Sigma \in L(H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1)$, при этом $\operatorname{im}\Sigma = H^2_\sigma, \ker\Sigma = H^2_\pi$. Элемент пространства U – вектор, $\vec{u}(x,t)$ будет иметь вид $\vec{u}(x,t) = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K)$, где $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (\mathrm{I} - \Sigma)v$, $u_p = \overline{p}$, и $\vec{u}(0) = (u_{\sigma_0}, u_{\pi_0}, u_{p_0}, w_{1_0}, \ldots, w_{K_0})$, где $u_{\sigma_0} = \Sigma v_0$, $u_{\pi_0} = (\mathrm{I} - \Sigma)v_0$, $u_{p_0} = \overline{p}_0$, $w_{l_0} = w_l(x,0)$, $l = \overline{1, K}$, $\vec{u}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times R$.

Операторы $\mathrm{L}, \mathrm{M} : U \to F$ определим формулами

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{L}} & 0 \\ 0 & \mathrm{E}_K \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\hat{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \Sigma \mathrm{A}_æ \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi \mathrm{A}_æ \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Pi = \mathrm{I} - \Sigma$, $\mathrm{A}_æ = 1 - æ\nabla^2$;

$$\mathrm{M}(\vec{u}) = \mathrm{M}_1 \vec{u} + \mathrm{M}_2(\vec{u}), \tag{17}$$

где $\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & \mathrm{M}_{12} \\ \mathrm{M}_{21} & \mathrm{M}_{22} \end{pmatrix}$, $M_{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma\Delta & \nu\Sigma\Delta & 0 \\ \nu\Pi\Delta & \nu\Pi\Delta & -\mathrm{I} \\ \Sigma\mathrm{C} & \Pi\mathrm{C} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}_{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma\Delta & \ldots & \beta_K\Sigma\Delta \\ \beta_1\Pi\Delta & \ldots & \beta_K\Pi\Delta \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, M_{21} содержит K строк вида $(\mathrm{I}, \mathrm{I}, 0)$, $\mathrm{M}_{22} = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_K]$, $\mathrm{M}_2 = (\Sigma\mathrm{B}(u_\sigma + u_\pi), \Pi\mathrm{B}(u_\sigma + u_\pi), 0, \ldots, 0)^T$. Здесь $\mathrm{B}(u_\sigma + u_\pi) = -((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi)$, $\mathrm{C}(u_\sigma + u_\pi) = \nabla(\nabla \cdot (u_\sigma + u_\pi))$.

Лемма 2. *Пусть пространства* U, F *определены формулами* (15), *при этом* $n = 2, 3, 4$, *а операторы* $\mathrm{L}, \mathrm{M} : U \to F$ *определены формулами* (16), (17). *Тогда:* (i) *оператор* $\mathrm{L} \in L(U; F)$, *причем если* $æ^{-1} \notin \sigma(-\nabla^2)$, *то* $\ker \mathrm{L} = \{0\}\times\{0\}\times H_p \times \underbrace{\{0\}\ldots\{0\}}_{K}$,

$\operatorname{im} \mathrm{L} = H_\sigma \times H_\pi \times \{0\} \times F_1 \times \ldots \times F_K$; (ii) *оператор* $\mathrm{M} \in C^\infty(U;F)$.

Доказательство. Утверждение (i) леммы 1 является очевидным, а утверждение (ii) легко проверяется непосредственно. Оператор

$$\mathrm{M}'_u = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_3, \tag{18}$$

где $\mathrm{M}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{M}}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathrm{M}}_3 = \begin{pmatrix} \Sigma \mathrm{B}_\sigma & \Sigma \mathrm{B}_\pi \\ \Pi \mathrm{B}_\sigma & \Pi \mathrm{B}_\pi \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}_\sigma(\mathrm{B}_\pi)$ – частная производная Фреше оператора B в точке $u_\sigma + u_\pi$ по $u_\sigma(u_\pi)$. Очевидно, $\forall n \ge 3 \quad \forall u \in U \quad \mathrm{M}_u^{(n)} \equiv 0$.

Таким образом, задача (14), (2) редуцирована к задаче (4), (3).

Приступим к проверке выполнимости условий (A1)–(A3). Обозначим через $\mathrm{A}_{æ\sigma}$ сужение оператора $\Sigma \mathrm{A}_æ \Sigma$ на H_σ^2.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2, *причем* $\ker \mathrm{A}_{æ\sigma} = \{0\}$. *Тогда любой вектор* $\varphi \in \ker \mathrm{L} \setminus \{0\}$ *имеет точно один* M'_u – *присоединенный вектор независимо от точки* $u \in U$.

Доказательство. Пусть вектор $\varphi = (0,0,\varphi_p,0,\ldots,0) \in \ker \mathrm{L}$, $\varphi_p \ne 0$. Найдем вектор $\psi \in U$ такой, что $\mathrm{L}\psi = \mathrm{M}'_u\varphi$. Из (16) и (18) следует система

$$\mathrm{A}_{æ\sigma}\psi_\sigma = 0, \qquad \Pi \mathrm{A}_æ \psi_\pi = -\varphi_p. \tag{19}$$

Из (19) получаем $\psi_\sigma = 0$. Значит, если $\psi_\pi = 0$, то $\varphi_p = 0$. Поэтому $\psi_\pi \ne 0$.

Пусть

$$\tilde{\mathrm{L}}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{L}}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{E}_K \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $\hat{\mathrm{L}}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma \mathrm{A}_æ^{-1} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi \mathrm{A}_æ^{-1} \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как $\tilde{\mathrm{L}}^{-1}\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \Sigma_\Pi & 0 \\ 0 & \mathrm{E}_K \end{pmatrix} \in L(U)$, где $\Sigma_\Pi = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $\mathrm{L}\tilde{\mathrm{L}}^{-1} \in L(F)$, формально имеет такой же вид, то $\psi_\sigma = 0$, $\psi_\pi = -\Pi \mathrm{A}_æ^{-1}\varphi_p$, компонента ψ_p вектора ψ произвольна, а все остальные K компонент вектора ψ будут равны нулю.

Далее

$$\mathrm{M}'_u\psi = (\Sigma(\tilde{\mathrm{B}}_\sigma\psi_\sigma + \tilde{\mathrm{B}}_\pi\psi_\pi), \Pi(\tilde{\mathrm{B}}_\sigma\psi_\sigma + \tilde{\mathrm{B}}_\pi\psi_\pi) - \psi_p, \mathrm{C}\psi_\pi, \ldots)^T,$$

где $\tilde{\mathrm{B}}(u_\sigma + u_\pi) = \nu\nabla^2(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi))$, $\tilde{\mathrm{B}}_\sigma(\tilde{\mathrm{B}}_\pi)$ – частная производная Фреше оператора $\tilde{\mathrm{B}}$ в точке $u_\sigma + u_\pi$ по $u_\sigma(u_\pi)$. Так как $\psi_\pi \ne 0$, то $\mathrm{C}\psi_\pi \ne 0$. Следовательно, $\mathrm{M}'_u\psi \notin \operatorname{im}\mathrm{L}$ независимо от $u \in U$. Условие (A1) выполняется, причем $p = 1$.

Теперь приступим к проверке условия (A2), для этого обозначим через $\mathrm{A}_{æ\pi}$ сужение оператора $\Pi \mathrm{A}_æ^{-1} \Pi$ на H_π. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Согласно лемме* 3 *оператор* $\mathrm{A}_{æ\pi} : H_\pi \to H_\pi^2$ – *топлинейный изоморфизм.*

В силу леммы 2 оператор L из (16) – бирасщепляющий. Положим, $U_0^0 = \ker \mathrm{L}$, $\operatorname{coim} \mathrm{L} = H_\sigma^2 \times H_\pi^2 \times \{0\} \times U_1 \times \ldots U_K$.

Построим линеалы

$$F_0^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_0^0] = \{0\}\times H_p \times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} = \{0\}\times H_\pi \times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} \subset \operatorname{im}\mathrm{L},$$

$$U_1^0 = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}[F_0^0] = \Sigma\mathrm{A}_{æ}^{-1}[H_p]\times\mathrm{A}_{æ\pi}[H_p]\times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} =$$

$$\Sigma\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}[H_\pi^2]\times H_\pi^2\times\{0\}\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} \subset \operatorname{coim}\mathrm{L}$$

согласно лемме 4;

$$F_1^0 = \mathrm{M}'_{u_0}[U_1^0] = \Sigma\tilde{\mathrm{B}}_0\, A_{æ}^{-1}[H_p]\times\Pi\,\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}[H_p]\times\mathrm{C}\mathrm{A}_{æ}^{-1}[H_p]\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K}.$$

Оператор $\tilde{\mathrm{C}}$ – сужение оператора C на H_π^2. Так как существует оператор $\tilde{\mathrm{C}}^{-1}$, то по лемме 4 $F_1^0 = \Sigma\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}[H_p]\times\Pi\,\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}[H_p]\times H_p\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{K} \not\subset \operatorname{im}\mathrm{L}$, где $\tilde{\mathrm{B}}_0$ – производная Фреше оператора $\tilde{\mathrm{B}}$ в точке $u_{\sigma0}+u_{\pi0}$, а оператор $\tilde{\mathrm{L}}^{-1}$ определен в (20).

Построим следующие операторы

$$\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{P}}_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{P}}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\hat{\mathrm{P}}_0 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\Pi\end{pmatrix}$, $\hat{\mathrm{P}}_1 = \begin{pmatrix}0&\mathrm{P}_1^{12}&0\\0&\Pi&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_1^{12} = \Sigma\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi$;

$$\mathrm{Q}_0 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{Q}}_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{Q}_1 = \begin{pmatrix}\hat{\mathrm{Q}}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\hat{\mathrm{Q}}_0 = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \mathrm{Q}_0^{21}&\Pi&\mathrm{Q}_0^{23}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\hat{\mathrm{Q}}_1 = \begin{pmatrix}0&0&\mathrm{Q}_1^{13}\\0&0&\mathrm{Q}_1^{23}\\0&0&\Pi\end{pmatrix}$, $\mathrm{Q}_1^{13} = \Sigma\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}\Pi$, $\mathrm{Q}_1^{23} = \Pi\tilde{\mathrm{B}}_0\mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\tilde{\mathrm{C}}^{-1}\Pi$, $\mathrm{Q}_0^{21} = -\Pi\mathrm{A}_{æ}\mathrm{A}_{æ\sigma}^{-1}\Sigma$, $\mathrm{Q}_0^{23} = -\mathrm{Q}_0^{21}\mathrm{Q}_1^{13} - \mathrm{Q}_1^{23}$. Очевидно, что операторы $\mathrm{P}_k \in L(U)$ и $\mathrm{Q}_k \in L(F)$, $k=0,1$, определенные в (21), (22) – проекторы, при этом $\operatorname{im}\mathrm{P}_k = U_k^0$, $\operatorname{im}\mathrm{Q}_k = F_k^0$, $k=0,1$ и $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0 = 0$, $\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_0 = 0$. Также $\ker\mathrm{Q}_1 = \operatorname{im}\mathrm{L}$ и, значит, $F_1^0 \oplus \operatorname{im}\mathrm{L} = F$, поэтому условие (A2) выполняется.

Для проверки (A3) построим следующее множество $U = \{u\in U : P_1 u = \mathrm{const}\} = \{u \in U : u_\pi = \mathrm{const}\}$. В расссматриваемой ситуации условие (A3) состоит из единственного равенства $\mathrm{Q}_1\mathrm{M}(u) = (\mathrm{Q}_1^{13}\mathrm{C}(u_\sigma+u_\pi),\ \mathrm{Q}_1^{23}\mathrm{C}(u_\sigma+u_\pi),\ \mathrm{C}(u_\sigma+u_\pi), 0,\ldots,0)^T = 0$, которое выполнено тождественно, если $u_\pi = 0$. Если положить $U = \{u\in U : u_\pi = 0\}$, то условие (A3) выполняется.

Перейдем теперь к построению множества B. По теореме 1, $B = \{u\in U : \mathrm{Q}_0\mathrm{M}(u) = 0\}$. Так как при $u_\pi = 0$ $\mathrm{Q}_0\mathrm{M}(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Q}_0^{21}\Sigma + \Pi)\tilde{\mathrm{B}}(u_\sigma) - u_p = 0$, и

$$\mathrm{Q}_0^{21}\Sigma + \Pi = \mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\Sigma + A_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\Pi = \mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\quad , \tag{23}$$

то

$$B = \{u\in U : \mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi\mathrm{A}_{æ}^{-1}\tilde{\mathrm{B}}(u_\sigma) = u_p,$$
$$u_\pi = 0, u_\sigma \in H_\sigma^2, u_i \in H_\sigma^2\times H_\pi^2,\ i = \overline{1,K}\}. \tag{24}$$

Для доказательства (23) отметим, что $\Pi \mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\sigma}\Sigma + \Pi \mathrm{A}_{æ}^{-1}\Pi \mathrm{A}_{æ}\Sigma = \Pi \mathrm{A}_{æ}^{-1}(\Sigma \mathrm{A}_{æ} + \Pi \mathrm{A}_{æ})\Sigma = 0$. Следовательно, $\Pi \mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\sigma}\Sigma = -\mathrm{A}_{æ\pi}\Pi \mathrm{A}_{æ}\Sigma$, $\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi \mathrm{A}_{æ}^{-1}\mathrm{A}_{æ\sigma}\Sigma = -\Pi \mathrm{A}_{æ}\Sigma$, $\mathrm{A}_{æ\pi}^{-1}\Pi \mathrm{A}_{æ}^{-1}\Sigma = -\Pi \mathrm{A}_{æ}\mathrm{A}_{æ\sigma}^{-1}\Sigma =$ $= \mathrm{Q}_0^{21}\Sigma$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы 3,* $u_0 \in B$ (24). *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(u_0)$ *существует единственное решение задачи* (14), (2), *которое является квазистационарной траекторией,* $u = (u_\sigma, 0, \overline{p}, w_1, \ldots, w_k)$ *класса* $C^\infty((-t_0, t_0); B)$ *и такое, что* $u \in B$ *для всех* $t \in (-t_0; t_0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 1.857.2014/К).

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П.Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126–164.

2. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

3. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552–557.

4. Сукачева, Т.Г. Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 771–779.

5. Матвеева, О.П. Квазистационарные траектории задачи Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О.П. Матвеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – Вып. 5. – № 16(192). – С. 39–47.

6. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестник МаГУ. – 2005. – № 8. – С. 5–33.

Поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 22–30

DOI: 10.14529/mmph160303

HOMOGENEOUS MODEL OF INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID OF THE NON-ZERO ORDER

O.P. Matveeva, T.G. Sukacheva
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: oltan.72@mail.ru

The paper deas with the Cauchy–Dirichlet problem for homogeneous dynamics model of the incompressible viscoelastic Kelvin–Voigt fluid of the non-zero order. The problem is studed using the theory of semilinear Sobolev type equations. The Cauchy–Dirichlet problem for the corresponding system of differential equations in partial derivatives is reduced to the abstract Cauchy problem for the indicated equations. The theorem of unique existance of solution to indicated problem, which is a quasistationary trajectory, is proved. The phase space is described.

Keyword: Sobolev type equation; phase space; incompressible viscoelastic fluid.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion Kelvin–Voight and Oldroyd fluids. *Trudy Mat. In-ta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126–164.

2. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy problem for a class of semilinear equations of Sobolev type. *Siberian Mathematical Journal*, 1990, Vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493

3. Sukacheva T.G. On a certain model of motion of an incompressible visco-elastic Kelvin–Voight fluid of nonzero order. *Differential Equations*, 1997, Vol. 33, no. 4, pp. 552–557.

4. Sukacheva T.G., Matveeva O.P. Taylor problem for the zero-order model of an incompressible viscoelastic fluid. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 6, pp. 771–779. DOI: 10.1134/S0012266115060099

5. Matveeva O.P. Quasi-stationary trajectories of the Taylor problem for the model of the incompressible viscoelastic fluid of nonzero order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling and Programming Computer Software*, 2010, issue 5, no. 16(192), pp. 39–47. (in Russ.).

6. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Some mathematical problems of the dynamics of viscoelastic incompressible media. *Vestnik MaGU*, 2005, no. 8, pp. 5–33. (in Russ.).

Received November 20, 2015

УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph160304

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: manakovana@susu.ru

Статья имеет обзорный характер и содержит результаты с описанием морфологии фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа. В первых трех параграфах приведены конкретные краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных соболевского типа, у которых фазовые пространства – простые гладкие банаховы многообразия. В последнем параграфе собраны те математические модели, чьи фазовые пространства лежат на гладких банаховых многообразиях с особенностями. Цель данной статьи – формирование фундамента будущих исследований морфологии фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа. Кроме того, в статье дается объяснение феномена несуществования решения задачи Коши и феномена неединственности решения задачи Шоуолтера–Сидорова для полулинейных уравнений соболевского типа.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; фазовое пространство; морфология фазового пространства; банаховы многообразия; квазистационарные траектории; задача Шоуолтера–Сидорова; задача Коши; k-сборка Уитни.

Введение

К настоящему времени обширный класс процессов и явлений в естествознании и технике моделируется уравнениями или системами уравнений в частных производных, не разрешенных относительно старшей производной по времени [46]. Данные конкретные уравнения и системы уравнений редуцируются к абстрактным линейным

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{1}$$

или полулинейным

$$L\dot{u} = Mu + N(u) \tag{2}$$

вырожденным операторным уравнениям в банаховых пространствах [47]. Здесь операторы L и M – линейные, подлежащие дальнейшему определению; N – нелинейный, как правило, гладкий оператор. Однако мы для идентификации уравнений вида (1) и (2) будем использовать термин «уравнения соболевского типа» [6, 8, 19, 20, 52, 53]. Этот термин ввел в обиход Р. Шоуолтер [51], чтобы увековечить память о великом российском математике С.Л. Соболеве, который в середине прошлого века инициировал активное изучение таких уравнений (см. прекрасное историческое обозрение в [46]).

Как давно и хорошо известно (см., например, [22–24] и библиографию там же), задача Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

в случае

$$\ker L \neq \{0\} \tag{4}$$

для уравнений вида (1), (2) разрешима далеко не при всех начальных значениях u_0. Одним из возможных путей преодоления этой трудности является введение в рассмотрение концепции фазового пространства уравнения (1) или (2). Основы данной концепции заложены в [22] и [23], затем концепция была развита в [24, 25, 3, 27 – 29, 41, 32–34, 37, 4] и многих других работах.

Вкратце суть концепции заключается в следующем. Сначала фазовое пространство определяется как замыкание множества всех допустимых начальных значений u_0, под которыми понимаются такие векторы, для которых существует единственное (локальное) решение задачи (1), (3) или (2), (3). Затем выбирается такой вектор u_0, в окрестности O_{u_0} которого фазовое пространство В является гладким банаховым многообразием, причем в этой окрестности O_{u_0} сингулярное (т.е. с условием (4)) уравнение (1) или (2) редуцируется к регулярному уравнению

$$\dot{u} = F(u), \tag{5}$$

где F – гладкое сечение касательного расслоения TO_{u_0}. Завершает рассмотрение ссылка на теорему Коши [16], гарантирующую однозначную локальную разрешимость задачи (3), (5) и, тем самым, задачи (1), (3) или (2), (3).

Другим подходом, позволяющим преодолевать трудности, связанные с несуществованием решения задач (1), (3) и (2), (3), является рассмотрение в случае (4) вместо начального условия Коши (3) начального условия Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0. \tag{6}$$

Здесь P – проектор, который строится по операторам L, M, такой, что $\ker P \supset \ker L$. Детальное обсуждение условия (6) можно найти в обзорной статье [38]. Здесь же мы отметим основные особенности условия (6). Во-первых, условия (3) и (6) совпадают, если существует непрерывный оператор L^{-1}. Во-вторых, решение задач (1), (6) и (2), (6) существует для всех u_0 (по крайней мере, во всех расмотренных ниже случаях). В-третьих, условие (6) не гарантирует единственности решения задачи (2), (6) в случае (4). Например, в случаях, когда фазовое пространство уравнения (2) лежит на гладком банаховом многообразии, имеющем особенности, такие, как k-сборки Уитни [3, 4, 35, 36].

Однако главное достоинство условия (6) для уравнения (2) в случае (4) раскрывается при постановке вычислительных экспериментов над галеркинскими приближениями точных решений задачи (2), (6) в конкретных ситуациях [2, 11]. Особенно важную роль условие (6) играет при численном исследовании динамической балансовой модели Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом капитальных вложений. Эта модель представлена уравнением (1), где L и M – квадратные матрицы одного порядка, причем $\det L = 0$ [12]. Заметим, что в данном случае вырожденная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется «системой уравнений леонтьевского типа» [39]. Результаты качественного и численного исследования систем уравнений леонтьевского типа выходят за рамки нашего обзора, отметим только их приложения к теории оптимальных измерений [44].

Итак, данная статья имеет обзорный характер и содержит полученные ранее результаты, объясняющие феномены несуществования решений задачи (1), (3) и (2), (3) и неединственность решения задачи (2), (6). В данный обзор не вошли, во-первых, результаты о распространении концепции фазового пространства на полулинейные уравнения соболевского типа высокого порядка [10]. Во-вторых, сюда не вошел обзор результатов о различных обобщениях условия Шоуолтера–Сидорова [7, 9, 31, 54], а также результаты о задаче Шоуолтера–Сидорова для стохастических уравнений соболевского типа [40, 48]. Все эти ранее разрозненные результаты оформились в новые научные направления теории уравнений соболевского типа и ее приложений, которые требуют отдельных подробных обзоров. Наконец, в обзор не вошли результаты (например, [21, 45, 50]), развивающие и обобщающие теорию уравнений, но их авторы не используют ни концепцию фазового пространства, ни неклассические начальные условия вида (6).

Статья содержит обзор работ по изучению морфологии фазовых пространств уравнений соболевского типа и состоит из 4 параграфов, введения и списка литературы. В первом параграфе исследуется существование квазистационарных траекторий задачи (2), (3) в случае (L, p)-ограниченного оператора M; приводятся условия простоты фазового пространства обобщенного уравнения Осколкова [34], уравнения плоскопараллельной динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости [29]. Во втором параграфе находятся условия существования квазистационарных полутраекторий уравнения (2) в случае (L, p)-секториального оператора M; приведены достаточные условия простоты фазового пространства системы уравнений Навье–Стокса [30], уравнения плоскопараллельной конвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости [19]. В третьем параграфе приведены условия существования решения задачи (2), (3) в случае s-монотонного, сильно коэрцитивного оператора M и фредгольмова оператора L и получены достаточные условия простоты фазового пространтства обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска и уравнения нелинейной диффузии [28]. В четвертом параграфе изучен феномен неединственности решения задачи Шоуолтера–Сидорова для уравнения Корпусова–Плетнера–Свешникова [35] и приведены условия существования сборок Уитни фазового пространства рассматриваемых уравнений.

1. Уравнения с относительно *p*-ограниченным оператором

Пусть U и F – банаховы пространства, операторы $L\in \mathrm{L}(U;F)$, $M\in Cl(U;F)$, оператор $N\in C^k(U;F)$, $k\in \mathrm{N}\cup\{\infty\}$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M)=\{\mu\in \mathrm{C}:(\mu L-M)^{-1}\in \mathrm{L}(F,U)\}$ и L-спектр $\sigma^L(M)=\mathrm{C}\setminus\rho^L(M)$ оператора M.

Определение 1.1. Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a\in \mathrm{R}_+\ \forall\mu\in \mathrm{C}\quad (|\mu|>a)\quad\Rightarrow\quad(\mu\in\rho^L(M)).$$

Пусть $\rho^L(M)\neq\varnothing$, через $R_\mu^L(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M)=L(\mu L-M)^{-1}$ обозначим соответственно правую и левую L-резольвенты оператора M.

Лемма 1.1. [52] Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а контур $\Gamma=\{\mu\in \mathrm{C}:|\mu|=r>a\}$. Тогда операторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M)d\mu\in \mathrm{L}(U),\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M)d\mu\in \mathrm{L}(F)$$

являются проекторами.

Положим $U^0=\ker P$, $U^1=\operatorname{im}P$, $F^0=\ker Q$, $F^1=\operatorname{im}\mathrm{Q}$. Обозначим через L_k и M_k сужение оператора L и M на U^k и dom $M\cap U^k$, $k=0,1$, соответственно.

Теорема 1.1. [52] (Теорема о расщеплении) Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда

(i) операторы $L_k:U^k\to F^k$, $M_k:\mathrm{dom}\cap U^k\to F^k$, $k=0,1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1}\in \mathrm{L}(F^0,U^0)$;

(iii) операторы $H=M_0^{-1}L_0\in \mathrm{L}(U^0)$, $S=L_1^{-1}M_1\in \mathrm{L}(U^1)$.

Определение 1.2. Оператор M называется (L,p)-ограниченым, если он (L,σ)-ограничен и $\exists\ p\in\{0\}\cup \mathrm{N}:\ H^p\neq \mathrm{O}$, а $H^{p+1}\equiv \mathrm{O}$.

Определение 1.3. Вектор-функцию $u\in C^k((-\tau,\tau);U)$, $k\in \mathrm{N}\cup\{\infty\}$, назовем *решением уравнения* (2), если она при некотором $\tau\in \mathrm{R}_+$ удовлетворяет ему. Решение $u=u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи Коши* (2), (3), если оно еще и удовлетворяет начальному условию (3).

В дальнейшем будем рассматривать (L,p)-ограниченный оператор M. В силу теоремы 1.1 уравнение (2) редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений

$$H\dot u^0=u^0+M_0^{-1}(I-Q)N(u),\tag{7}$$

$$\dot u^1=Su^1+L_1^{-1}QN(u),\tag{8}$$

где $u^1=Pu$, $u^0=u-u^1$.

Определение 1.4. Вектор-функция $u=u(t)$ называется *квазистационарной траекторией уравнения* (2), если $H\dot u(t)\equiv 0$ при всех $\tau\in \mathrm{R}_+$. Если квазистационарная траектория уравнения (2) удовлетворяет условию Коши (3), то она называется *квазистационарной траекторией уравнения* (2), *проходящей через точку* u_0.

Замечание 1.1. Любая стационарная траектория уравнения (2) будет квазистационарной, однако обратное неверно. В случае $(L,0)$-ограниченности оператора M все решения уравнения (2) являются квазистационарными траекториями.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только квазистационарных траекторий. Введем в рассмотрение множество

$$\mathrm{B}=\{u\in U:(\mathrm{I}-Q)(Mu+N(u))=0\}.$$

Из (7) и теоремы о расщеплении вытекает, что, если $u=u(t)$ – квазистационарная траектория уравнения (2), то она с необходимостью лежит во множестве B, т.е. $u(t)\in \mathrm{B}$ при всех $t\in(-\tau,\tau)$.

Возьмем точку $u_0 \in \mathrm{B}$ и обозначим через F'_{u_0} сужение оператора $(\mathrm{I}-Q)(M+N'_{u_0})(\mathrm{I}-P)$ на подпространство U^0, здесь N'_{u_0} – производная Фреше оператора N в точке u_0. В силу построения оператор $F'_{u_0} \in \mathrm{L}(U^0;F^0)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие условия:

$$\mathrm{B} \neq \varnothing; \tag{9}$$

$$\text{оператор } F'_{u_0} \text{ – диффеоморфизм.} \tag{10}$$

Теорема 1.2. [34] Пусть оператор M $(L,\ p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, причем выполнены условия (9), (10). Тогда существует единственная квазистационарная траектория уравнения (2), проходящая через точку u_0.

Определение 1.5. Множество $\Xi \subset U$ называется *фазовым пространством уравнения* (2), если

(i) любое решение $u = u(t)$ лежит в Ξ как траектория, т.е. $u(t) \in \Xi$ при любом $t \in (-\tau,\tau)$;

(ii) при любом $u_0 \in \Xi$ существует единственное решение задачи (2), (3).

Определение 1.6. Пусть точка $u_0 \in \mathrm{B}$, положим $u_0^1 = Pu_0 \in U^1$. Множество B в точке u_0 является *банаховым C^k-многообразием*, если существуют окрестности $O_0^{\mathrm{B}} \subset \mathrm{B}$ и $O_0^1 \subset U^1$ точек u_0 и u_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : O_0^1 \to O_0^{\mathrm{B}}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на O_0^{B}. Множество B называется *банаховым C^k-многообразием, моделируемым пространством U^1*, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке. Связное банахово C^k-многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Следствие 1.1. [34] Пусть оператор M $(L,\ p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, причем выполнены условия (9), (10). Тогда фазовым пространством уравнения (2) служит простое многообразие B, моделируемое подпространством U^1.

1.1. Обобщенное фильтрационное уравнение Осколкова

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathrm{R}_+ \tag{11}$$

для обобщенного уравнения Осколкова

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - K(u) + f,\ K(0) = 0,\ < K(u), u > \geq 0, \tag{12}$$

описывающего динамику давления неньютоновой жидкости, фильтрующейся в пористой среде. Уравнение (12) моделирует широкий класс процессов фильтрации вязкоупругих жидкостей [17]. Для того чтобы редуцировать задачу (11), (12) к задаче (2), (3) положим $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^{m+2}(\Omega)$, $F = W_2^m(\Omega)$, $m \in \{0\} \cup \mathrm{N}$, зададим операторы $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$. По построению операторы $L, M \in \mathrm{L}(U;F)$, причем оператор L фредгольмов.

Лемма 1.2. [34]

(i) При всех $\alpha \in \mathrm{R}_+$ оператор M $(L,\ 0)$-ограничен.

(ii) При любом векторе $f \in F$, $m + 2 > n/2$ и любой функции $K \in C^\infty(\Omega)$ оператор $N : u \to K(u) - f$ принадлежит классу $C^\infty(U)$.

Обозначим через $\{\varphi_l\}$ собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Δ, а через $\{\lambda_l\}$ – соответствующие им собственные значения, занумерованные по неубыванию. Зафиксируем $f \in F$ и построим множество

$$\mathrm{B}_f = \left\{ u \in U : < Mu - N(u) - f, \varphi_l >= 0,\ \lambda = \lambda_l \right\}.$$

Замечание 1.2. Поскольку оператор M $(L,\ 0)$-ограничен, то все решения уравнения (12) являются квазистационарными траекториями.

Теорема 1.3. [34] Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $m > n/2 - 2$, $f \in F$. Тогда

(i) если $\ker L = \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (12) служит все пространство U;

(ii) если $\ker L \neq \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (12) служит простое многообразие B_f, моделируемое подпространством $U^1 = \left\{ u \in U : \langle u, \varphi_l \rangle = 0,\ \lambda = \lambda_l \right\}$.

1.2. Плоскопараллельная динамика вязкоупругой несжимаемой жидкости

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega; \tag{13}$$

$$u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{14}$$

для уравнения

$$(1 - \chi\Delta)\Delta \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta^2 u - \frac{\partial(u, \Delta u)}{\partial(x,y)} + f. \tag{15}$$

Положим

$$U = \{u \in W_2^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\},\ F = L^2(\Omega).$$

Зададим операторы

$$L : u \to (1 - \chi\Delta)\Delta u,\ M : u \to \nu\Delta^2 u,\ N : u \to -\frac{\partial(u, \Delta u)}{\partial(x,y)} + f.$$

Лемма 1.3. [29]

(i) При любых $\nu, \chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(U; F)$ фредгольмовы.

(ii) При любых значениях параметров $\nu, \chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M (L, σ)-ограничен.

(iii) Оператор $N \in C^\infty(U; F)$.

Обозначим через $\sigma(\Delta)$ спектр однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ, а через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, $\{\varphi_k\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ из $L^2(\Omega)$. Пусть $\chi^{-1} \in \sigma(\Delta)$, тогда в силу фредгольмовости оператора L $\ker\ L = \mathrm{span}\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$, где $\psi_l \in \{\varphi_k\}$, l=1,2,..., m. Построим множество

$$\mathrm{B} = \{u \in U : < Mu + N(u), \psi_l >= 0,\ l = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Положим $U^0 = \ker L$, $U^1 = \ker L^\perp$, где ортогональность понимается в смысле $L_2(\Omega)$. В силу фредгольмовости оператора L имеет место расщепление $U = U^0 \oplus U^1$.

Теорема 1.4. [29]

(i) Пусть $\chi^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Delta)$, тогда фазовым пространством уравнения (15) является все пространство U.

(ii) Пусть $\chi^{-1} \in \sigma(\Delta)$, $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда множество B – простое C^∞-многообразие, моделируемое подпространством U^1.

2. Уравнения с относительно *p*-секториальным оператором

Пусть U и F – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(U; F)$, $M \in Cl(U; F)$.

Определение 2.1. Оператор M называется (L, p)-секториальным с числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max\left\{\| R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \| L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \le \frac{K}{\prod_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$. Здесь

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} (\mu_q L - M)^{-1} L, \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L(\mu_q L - M)^{-1}.$$

Пусть выполнено условие

$$U = U^0 \oplus U^1, \ \ F = F^0 \oplus F^1. \tag{16}$$

Тогда, аналогично п. 1, действия операторов L и M расщепляются, а через L_k и M_k обозначим сужение операторов L и M на U^k и $\operatorname{dom} M \cap U^k$, $k = 0, 1$, соответственно. Пусть выполнено условие

$$\exists\, L_1^{-1} \in \mathcal{L}(F^1; U^1). \tag{17}$$

Тогда оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(U^0)$ нильпотентен степени не выше $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(U^1)$ секториален.

Замечание 2.1. Пусть оператор M (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполнены условия (16), (17), тогда оператор M сильно (L, p)-секториален [26, 30].

Рассмотрим секториальный оператор $A \in Cl(U)$ такой, что $Re\sigma(A) < 0$. Для любого $\alpha > 0$ положим

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Определим A^{α} как оператор, обратный к $A^{-\alpha}$, $\operatorname{dom} A^{\alpha} = \operatorname{im} A^{-\alpha}$, $A^0 = \mathrm{I}$. Далее положим для каждого $\alpha \ge 0$, $U^{\alpha} = \operatorname{dom} A^{\alpha}$ и наделим пространство U^{α} нормой графика $\|u\|_{\alpha} = \|A^{\alpha} u\|$, $u \in U^{\alpha}$. Выберем константу $c \in \mathbb{R}_+$ таким образом, чтобы $\operatorname{Re}\sigma(S - cI) < 0$. По оператору $A = S - c\mathrm{I}$ построим пространства $U^{\alpha}, \alpha \ge 0$. Нормы $\| \cdot \|_{\alpha}$ при фиксированном α и различных c эквивалентны.

Теорема 2.1. [25] Пусть оператор M (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполнены условия (16), (17). Тогда U^{α} – банахово пространство с нормой $\| \cdot \|_{\alpha}$ для $\alpha \ge 0$, причем $U^0 = U$ и $U^1 = \operatorname{dom} A$. Для $\alpha \ge \beta \ge 0$ пространство U^{α} плотно в U^{β} и вложение $U^{\alpha} \subset U^{\beta}$ непрерывно.

Пусть U_1^1 линеал $\operatorname{dom} M \cap U^1$, снабженный нормой графика, и $U_1^0 = \operatorname{dom} M \cap U^0$, положим $U_{\alpha} = U_1^0 \oplus U^{\alpha}$. Пусть при некотором фиксированном $\alpha \in [0,1)$ оператор $N \in C^{\infty}(U_{\alpha}; F)$, тогда рассмотрим задачу Коши (3) для полулинейного уравнения соболевского типа (2).

Определение 2.2. Вектор-функцию $u \in C^1((0,\tau); U) \cap C((0,\tau); U_{\alpha})$ назовем *решением уравнения* (2), если она при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ему. Решение $u = u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи Коши* (2), (3), если оно еще и удовлетворяет $\lim\limits_{t \to 0+} \| u(t) - u_0 \|_{U_{\alpha}} = 0$ при некотором $u_0 \in U_{\alpha}$.

Пусть оператор M (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (16), (17), тогда в силу теоремы о расщеплении [26] уравнение (2) редуцируется к паре эквивалентных ему уравнений (7), (8).

Определение 2.3. Вектор-функция $u = u(t)$, $t \in (0, \tau)$, называется *квазистационарной полутраекторией* уравнения (2), если $H\dot{u}(t) \equiv 0$ при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. Если квазистационарная полутраектория уравнения (2) удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to 0+} \| u(t) - u_0 \|_{U_\alpha} = 0$, то она называется *квазистационарной полутраекторией уравнения* (2), *проходящей через точку* u_0.

Замечание 2.2. Понятие квазистационарной полутраектории вводится по аналогии с понятием квазистационарной траектории (см. п. 1). В случае (L, 0)-секториального оператора M любое решение уравнения (2) является квазистационарной полутраекторией.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только квазистационарных полутраекторий. Аналогично п. 1, квазистационарные полутраектории поточечно принадлежат множеству

$$\mathrm{B} = \{u \in U : (\mathrm{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

Предположим, что множество

$$\mathrm{B} \neq \varnothing. \tag{18}$$

Теорема 2.2. [25] Пусть оператор M (L, p)-секториален, причем выполнены условия (16), (17), а оператор $N \in C^\infty(U_\alpha; F)$. Пусть в точке $u_0 \in \mathrm{B}$ множество B является банаховым C^∞-многообразием. Тогда существует единственная квазистационарная полутраектория уравнения (2), выходящая из точки u_0.

Определение 2.4. Множество $\Xi \subset U_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (2), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит во множестве Ξ поточечно, т.е. $u(t) \in \Xi$, $t \in (0, \tau)$;

(ii) при любом $u_0 \in \Xi$ существует единственное решение задачи (2), (3).

Замечание 2.3. Если выполнены условия теоремы 2.2, то некоторая окрестность $O_0 \subset \mathrm{B}$ точки $u_0 \in \mathrm{B}$ лежит в фазовом пространстве уравнения (2). Если множество B является простым банаховым C^∞-многообразием, то оно совпадает с фазовым пространством уравнения (2).

2.1. Система уравнений Навье–Стокса

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для системы уравнений Навье – Стокса [25, 30]

$$(\lambda - \nabla^2) u_t = \nu \nabla u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p + f, \quad \nabla(\nabla \cdot u) = 0, \tag{19}$$

которая моделирует динамику вязкой несжимаемой жидкости; здесь ∇p – градиент давления, вектор-функция $u = u(x,t) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – вектор скорости жидкости, $f = f(x,t) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – вектор объемных внешних сил, $\nu \in \mathrm{R}_+$ – кинематический коэффициент вязкости.

Положим H^2_σ и H^2_π (H_σ и H_π) – подпространства соленоидальных и потенциальных вектор-функций [15, 43] пространства $\mathsf{H}^2 = (W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ ($\mathsf{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$). Оператор $A = \mathrm{diag}\{\nabla^2, \ldots, \nabla^2\}$ является линейным непрерывным оператором с дискретным конечнократным отрицательным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Обозначим через $A_{\sigma(\pi)}$ сужение оператора A на $\mathsf{H}^2_{\sigma(\pi)}$. Зададим оператор $K : u \to \nabla(\nabla \cdot u)$, оператор $K \in \mathrm{L}(\mathsf{H}^2, \mathsf{H}_\pi)$ и $\ker K = \mathsf{H}^2_\sigma$. Обозначим через $\Pi \in \mathrm{L}(\mathsf{H}^2, \mathsf{H}^2_\pi)$ проектор вдоль H^2_σ и построим проектор $\Sigma = \mathrm{I} - \Pi$.

Положим $U = \mathsf{H}^2_\sigma \times \mathsf{H}^2_\pi \times \mathsf{H}_p$, $F = \mathsf{H}_\sigma \times \mathsf{H}_\pi \times \mathsf{H}_p$, где $\mathsf{H}_\pi = \mathsf{H}_\sigma$. Формулами

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Pi & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \nu A_\pi & \nu A_\pi & -\Pi \\ \mathbf{O} & K & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

зададим операторы $L \in \mathrm{L}(U; F)$, $\mathrm{im}\, L = \mathsf{H}_\sigma \times \mathsf{H}_\pi \times \{0\}$, $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathsf{H}_p$ и $M \in Cl(U; F)$, $\mathrm{dom}\, M = \mathsf{H}^2_\sigma \times \mathsf{H}^2_\pi \times \mathsf{H}^2_p$. Положим $\mathsf{H}^1 = \left(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^n$.

Лемма 2.1. [25]

(i) При любых $\nu \in \mathrm{R}_+$ оператор M $(L,\,1)$-секториален и выполнены условия (16), (17).

(ii) При $n \in \{2,3,4\}$ оператор $C : v \to (v \cdot \nabla) v$ принадлежит классу $C^\infty(\mathsf{H}^1(\Omega); \mathsf{L}^2(\Omega))$.

Построим оператор

$$N(u) = \mathrm{col}(\Sigma C(u), \Pi C(u), 0), \quad u = u_\sigma + u_\pi .$$

Оператор $N \in C^\infty(\mathsf{H}^1_\sigma \times \mathsf{H}^1_\pi \times \mathsf{H}_p; \mathsf{H}_\sigma \times \mathsf{H}_\pi \times \mathsf{H}_p)$ и $\mathrm{dom}\, M \subset \mathsf{H}^1_\sigma \times \mathsf{H}^1_\pi \times \mathsf{H}_p \subset U$, где линеал $\mathrm{dom}\, M$ снабжен «нормой графика». Подпространство $U^1 = \mathsf{H}_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$, тогда $\mathrm{dom}\, M \cap U^1 = \mathsf{H}^2_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$. Отсюда $\mathsf{H}^1_\sigma \times \{0\} \times \{0\} = \left[U^1_1 \right]_{1/2}$, где $U^1_1 = \mathrm{dom}\, M \cap U^1$. Далее построим $U^0 = \mathrm{dom}\, M \cap U^0 = \{0\} \times \mathsf{H}^2_\pi \times \mathsf{H}^2_p$. Поэтому $U_\alpha = \mathsf{H}^1_\sigma \times \mathsf{H}^2_\pi \times \mathsf{H}^2_p$. Получим, что оператор $N \in C^\infty(U_\alpha; F)$. Множество, содержащее квазистационарные траектории, имеет вид

$$\mathrm{B} = \left\{ u \in U_\alpha : u_\pi = 0, \quad u_p = -\Pi C(u_\sigma) \right\}.$$

Теорема 2.3. [30] При любых $n \in \{2,3,4\}$, $\nu \in \mathrm{R}_+$ фазовым пространством уравнений (19) служит простое банахово многообразие B, моделируемое подпространством $\mathsf{H}^1_\sigma \times \{0\} \times \{0\}$.

2.2. Плоскопараллельная конвекция вязкоупругой несжимаемой жидкости

Пусть $\Omega = (0,l) \times (0,h) \subset \mathrm{R}^2$. В области $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим задачу Бенара

$$\psi(x,0,t) = \Delta\psi(x,0,t) = 0, \;\; \psi(x,h,t) = \Delta\psi(x,h,t) = 0, \tag{20}$$

$$\Theta(x,0,t) = \Theta(x,h,t) = 0, \tag{21}$$

функции Θ и ψ периодичны по x с периодом l, (22)

$$\psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), \quad \Theta(x,y,0) = \Theta_0(x,y) \tag{23}$$

для системы уравнений

$$\begin{gathered} (1-\chi\Delta)\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu\Delta^2\psi - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x,y)} + g\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \delta\Delta\Theta - \frac{\partial(\psi,\Theta)}{\partial(x,y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{gathered} \tag{24}$$

которая моделирует термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта [14]. Здесь функция $\Theta = \Theta(x,t)$ соответствует температуре жидкости, параметр $\delta \in \mathrm{R}_+$ характеризует температуропроводность, g – ускорение свободного падения. Положим

$$U = U_\psi \times U_\Theta, \; F = F_\psi \times F_\Theta,$$

где

$$U_\psi = \{\psi \in W_2^4(\Omega) : \psi \text{ удовлетворяет (20), (22)}\},$$

$$U_\Theta = \{\psi \in W_2^4(\Omega) : \Theta \text{ удовлетворяет (21), (22)}\},$$

$$F_\psi = F_\Theta = L^2(\Omega).$$

Зададим операторы

$$L = \begin{pmatrix} (1-\chi\Delta)\Delta & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu\Delta^2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \delta\Delta \end{pmatrix},$$

$$N : u \to \begin{pmatrix} g\alpha \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} - \dfrac{\partial(\psi,\Delta\psi)}{\partial(x,y)} \\ \beta \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial(\psi,\Theta)}{\partial(x,y)} \end{pmatrix}, \quad u = (\psi, \Theta).$$

Тогда

$$\mathrm{dom}M = U_\psi \times \{\Theta \in W_2^2(\Omega) : \Theta \text{ удовлетворяет (21), (22)}\}.$$

Лемма 2.2. [14]

(i) При любых $\chi \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ оператор $L \in \mathrm{L}(U;F)$ фредгольмов.

(ii) При любых значениях параметров $\nu, \delta \in \mathrm{R}_+$, $\chi \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ оператор M сильно $(L, 0)$-секториален.

(iii) Оператор $N \in C^\infty(U;F)$.

Рассмотрим пространство

$$U_N = U_\psi \times \{\Theta \in W_2^1(\Omega) : \Theta \text{ удовлетворяет (21), (22)}\}$$

и множество

$$\mathrm{B}_N = \{(\psi, \Theta) \in U_N : < \nu\chi^{-2}\psi + g\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x,y)}, \xi_l >= 0,\ l = 1, 2, \ldots, \dim\ker(\chi^{-1} - \Delta)\}.$$

Теорема 2.4. [14] Пусть $\nu, \delta \in \mathrm{R}_+$ и, если

(i) $\chi^{-1} \in \setminus \sigma(\Delta)$, тогда фазовым пространством системы уравнений (24) служит множество U_N;

(ii) $\chi^{-1} \in \sigma(\Delta)$, тогда фазовым пространством для системы уравнений (24) служит простое банахово C^∞-многообразие B_N, моделируемое подпространством

$$U_N^1 = \{(\psi, \Theta) \in U_N : < \psi, \xi_l >= 0,\ l = 1, 2, \ldots, \dim\ker(\chi^{-1} - \Delta)\}.$$

3. Уравнения с *s*-монотонным и сильно коэрцитивным оператором

Пусть $H = (H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; (A, A^*) и (V, V^*) – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$V \subset A \subset H \subset A^* \subset V^* \tag{25}$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in L(A; A^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, $N \in C^r(V; V^*), r \geq 1$ – *s*-монотонный (т.е. $\left\langle N'_u v, v \right\rangle > 0,\quad u, v \neq 0$) и сильно коэрцитивный (т.е. $\lim\limits_{\|v\|_V \to \infty} \frac{\langle N(u+v), v\rangle}{\| v \|_V} = +\infty \quad \forall u \in V$) оператор.

Рассмотрим задачу Коши (3) для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} + N(u) = f. \tag{26}$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $A \supset \ker L \equiv \mathrm{coker}\, L \subset A^*$, тогда $A^* = \mathrm{coker}\, L \oplus \mathrm{im}\, L$. Обозначим через $\overline{\mathrm{im}\, L}$ замыкание $\mathrm{im}\ L$ в топологии V^*, тогда $V^* = co\ker L \oplus \overline{\mathrm{im}\, L}.$ Обозначим через Q проектор V^* вдоль $\mathrm{coker}\, L$ на $\overline{\mathrm{im}\, L}$ и сделаем допущение:

$$(\mathrm{I} - Q)f \text{ не зависит от } t \in (0, \tau). \tag{27}$$

Тогда, если $u = u(t),\ t \in (0, \tau)$, – решение уравнения (26), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathrm{B}_f = \begin{cases} \{u \in V : (\mathrm{I} - Q)N(u) = (\mathrm{I} - Q)f\}, \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ V, \quad \text{если} \quad \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathrm{coim}\, L = \{u \in A : \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\mathrm{coim}\, L \cap V \equiv \tilde{V}$. Ввиду (25) $V = \ker L \oplus \tilde{V}$.

Теорема 3.1. [28] Пусть выполнено условие (27), тогда множество B_f есть банахово C^r-многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\widetilde{V}$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.

3.1. Обобщенное фильтрационное уравнение Буссинеска

В цилиндре $\Omega\times\mathrm{R}_+$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda-\Delta)u_t-\Delta(|u|^{p-2}u)=f, \qquad p\geq 2, \tag{28}$$

которое моделирует процесс фильтрации жидкости. Здесь искомая функция $u=u(x,t)$ отвечает потенциалу скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha\in\mathrm{R}_+$, $\lambda\in\mathrm{R}$ характеризуют среду, причем параметр λ может принимать отрицательные значения; свободный член $f=f(x,t)$ соответствует внешнему воздействию.

Положим $H=W_2^{-1}(\Omega)$, $A=L_2(\Omega)$, $V=L_p(\Omega)$. В силу теоремы вложения Соболева при $p\geq\dfrac{2n}{n+2}$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ вложены непрерывно, поэтому выполнено непрерывное вложение $L_p(\Omega)\subset W_2^{-1}(\Omega)$. Определим в H скалярное произведение формулой

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega u\tilde{v}dx \ \ \forall u,v\in H, \tag{29}$$

где $\tilde{v}$ – обобщенное решение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω. Положим $V^*=(L_p(\Omega))^*$ и $A^*=(L_2(\Omega))^*$, где $(L_p(\Omega))^*$ – сопряженное относительно двойственности (29) пространство, и выполнено непрерывное вложение $W_q^{-1}(\Omega)\subset(L_p(\Omega))^*$. При таком определении A^* и V^* имеют место плотные и непрерывные вложения (25). Операторы L и M определим следующим образом:

$$\langle Lu,v\rangle=\int_\Omega(\lambda u\tilde{v}+uv)dx, \quad u,v\in A;$$

$$\langle N(u),v\rangle=\int_\Omega|u|^{p-2}uvdx, \quad u,v\in V.$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω, а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 3.1. [28]

(i) При всех $\lambda\geq-\lambda_1$ оператор $L\in\mathrm{L}(A;A^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве A.

(ii) Оператор $N\in C^1(V;V^*)$ s-монотонен и сильно коэрцитивен.

Постороим проектор

$$Q=\begin{cases}\mathrm{I}, & \text{если}\ \lambda\neq-\lambda_1;\\ \mathrm{I}-\langle\cdot,\varphi_1\rangle, & \text{если}\ \lambda=-\lambda_1\end{cases}$$

и множества

$$\mathrm{B}_f=\begin{cases}V, & \text{если}\ \lambda>-\lambda_1;\\ \{u\in V:\int_\Omega|u|^{p-2}u\varphi_1\,dx=\int_\Omega f\tilde{\varphi}_1\,dx\}, & \text{если}\ \lambda=-\lambda_1,\end{cases}$$

$$\operatorname{coim}L=\begin{cases}A, & \text{если}\ \lambda>-\lambda_1;\\ \{u\in A:\langle u,\varphi_1\rangle=0\}, & \text{если}\ \lambda=-\lambda_1.\end{cases}$$

Теорема 3.2. [28] Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$ и выполнено условие (27). Тогда множество B_f – простое банахово C^1-многообразие, моделируемое пространством $\mathrm{coim}\, L \cap V$.

3.2. Уравнение нелинейной диффузии

В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для уравнения

$$(\lambda - \Delta)u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f, \qquad p \geq 2, \tag{30}$$

которое моделирует процесс нелинейной диффузии [5]. Здесь искомая функция $u = u(x,t)$ отвечает потенциалу концентрации вещества; параметр $\lambda \in \mathrm{R}$ – коэффициент вязкости.

Положим $H = L_2(\Omega)$, $A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V = \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$, $A^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $V^* = W_p^{-1}(\Omega)$. Определим в H скалярное произведение формулой

$$\langle u,v \rangle = \int_\Omega uv dx \quad \forall u,v \in H .$$

При таком опеределении пространств A и V имеют место плотные и непрерывные вложения (25). Операторы L и N определим следующим образом:

$$\langle Lu,v \rangle = \int_\Omega (\lambda \nabla u \nabla v + uv) dx, \quad u,v \in A;$$

$$\langle N(u),v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx, \quad u,v \in V.$$

Лемма 3.2. [28]

(i) При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор $L \in \mathrm{L}(A;A^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве A.

(ii) Оператор $M \in C^1(V;V^*)$ s-монотонен и сильно коэрцитивен.

Построим проектор

$$Q = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{если } \lambda \neq -\lambda_1; \\ \mathrm{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Множества

$$\mathrm{B}_f = \begin{cases} V, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in V : \langle N(u), \varphi_1 \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases} \quad coim\, L = \begin{cases} A, & \text{если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{u \in A : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Теорема 3.3. [28] Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$ и выполнено условие (27). Тогда множество B_f – простое банахово C^1-многообразие, моделируемое пространством $\mathrm{coim}\, L \cap V$.

4. Особенности фазового пространства

Перейдем к рассмотрению случаев, когда фазовое пространство B не является простым банаховым многообразием, что может повлечь неединственность решения задачи Шоуолтера–Сидорова (2), (6). При помощи исследования морфологии фазового пространства удается изучить данные особенности. Пусть выполнены все условия на пространства и операторы п. 2.

Определение 4.1. Пусть функция $G \in C^\infty(\mathrm{R} \times U; \mathrm{R})$. Уравнение $G(x,v) = 0$ определяет k-сборку Уитни над открытым множеством $V \subset U$, если существуют функции $g_0, g_1, ..., g_k \in C^\infty(V;\mathrm{R})$ такие, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$0 = g_0(u) + g_1(u)x + ... + g_k(u)x^k + x^{k+1} \quad \forall u \in V.$$

Определение 4.2. Пусть вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется цепочкой M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0,1,..., \quad \varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}, \quad l = 1,2,...$$

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его высотой, а порядковый номер последнего вектора в конечной цепочке – длиной этой цепочки.

Теорема 4.1. [52] Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны

(i) оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$;

(ii) длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L ограничена числом $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$.

Рассмотрим случай, когда оператор L фредгольмов и не имеет M-присоединенных векторов, но имеет $(M + N'_{u_0})$ -присоединенные векторы и $\dim\ker L = 1$.

Теорема 4.2. [36] Пусть оператор L фредгольмов и $\dim\ker L = 1$. Пусть оператор L не имеет M-присоединенных векторов, но имеет в некоторой точке $u_0 \in U$ $(M + N'_{u_0})$ -присоединенные векторы высоты не больше $p \in \mathrm{N}$. Тогда в некоторой окрестности $O_{u_0} \subset U$ точки u_0 уравнение (2) может быть приведено к виду

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_q = \xi_{q-1} + g_{q-1}(u), q = 1,2,..., p,\\ 0 = \xi_p + g_p(u), \\ \dot{u}^1 = Su^1 + F(u), \quad F = L_1^{-1}QN \in C^\infty(U;U^1).\end{gathered} \tag{31}$$

4.1. Уравнение Хоффа

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\mathrm{R}$ рассмотрим обобщенное уравнение Хоффа [49]

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha_1 u + \alpha_2 u^3 + ... + \alpha_k u^{2k-1}, \tag{32}$$

моделирующее выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Здесь искомая функция $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega\times\mathrm{R}$ имеет физический смысл отклонения балки от вертикали, параметры $\alpha_i \in \mathrm{R}\setminus\{0\}$, i = 1, ..., k, характеризуют свойства материала балки, параметр $\lambda \in \mathrm{R}_+$ характеризует нагрузку на балку. Рассмотрим задачу Коши–Дирихле (11) для уравнения (31).

Пусть $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $F = W_2^{-1}(\Omega)$, зададим операторы

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\lambda uv - \nabla u\nabla v)dx, \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

$$\langle Mu, v\rangle = \alpha_1 \int_\Omega uvdx, \quad \forall u, v \in L_{2k}(\Omega),$$

$$\langle N(u), v\rangle = \int_\Omega (\alpha_2 u^3 + ... + \alpha_{k-1}u^{2k-3} + \alpha_k u^{2k-1})vdx \quad \forall u, v \in L_{2k}(\Omega).$$

В силу теорем вложения Соболева вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_{2k}(\Omega)$ плотно и непрерывно, следовательно, операторы $L, M \in \mathrm{L}(U;F)$, причем оператор L фредгольмов.

Лемма 4.1. [32]

(i) При всех $\alpha_1 \in \mathrm{R}\setminus\{0\}$, тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен.

(ii) Оператор $N \in C^\infty(U;F)$, если k = 1, 2 при n = 4 или k = 1, 2, 3 при n = 3 или $k \in \mathrm{N}$ при n = 1, 2.

Обозначим через $\{\varphi_l\}$ собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Δ, а через $\{\lambda_l\}$ – соответствующие им собственные значения, занумерованные по неубыванию. Построим множество

$$\mathrm{B} = \left\{ u \in U : \int_\Omega (\alpha_1 + \alpha_2 u^2 + ... + \alpha_k u^{2k-2})u\varphi_l dx = 0, \quad \lambda = -\lambda_l \right\}.$$

Замечание 4.1. Поскольку оператор M (L, 0)-ограничен, то все решения уравнения (32) являются квазистационарными траекториями.

Теорема 4.3. [32] Пусть $k = 1$, 2 при $n = 4$ или $k = 1$, 2, 3 при $n = 3$ или $k \in \mathrm{N}$ при $n = 1$, 2. Тогда

(i) если $\ker L = \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (32) служит все пространство U;

(ii) если $\ker L \neq \{0\}$, все коэффициенты $\alpha_i \in \mathrm{R}\setminus\{0\}$, $I = 1$, ..., k одного знака, то фазовым пространством уравнения (32) служит простое многообразие B, моделируемое подпространством $U^1 = \{u \in U : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \quad \lambda = -\lambda_l\}$.

Рассмотрим задачу Коши–Дирихле для уравнения Хоффа (11), (32) в случае $k = 2$ и $\dim\ker L = 1$. Построим проектор $\mathrm{I} - Q = <\cdot, \psi>$, где $\psi \in \ker L$, $\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = 1$, и множество

$$\Xi = \{u \in U : < Mu + N(u), \psi >= 0\}.$$

Построим подпространство $U^1 = \{u \in U : < u, \psi >= 0\}$ и представим вектор $u = s\psi + v$, тогда множество Ξ C^∞-диффеоморфно множеству

$$\Xi_s = \left\{ (s,v) \in \mathrm{R}\times U : s^3 \|\psi\|_U^4 + 3s^2 \int\limits_\Omega \psi^3 v dx + s\left(\int\limits_\Omega \psi^2 v^2 dx + \alpha_1\alpha_2^{-1}\right) + \int\limits_\Omega \psi v^3 dx = 0 \right\}.$$

Выделим во множестве Ξ подмножество

$$\Xi' = \{u \in U :< M\psi + N_u'\psi, \psi >= 0\} \cap \Xi.$$

Множество Ξ' C^∞-диффеоморфно множеству

$$\Xi'_s = \left\{ (s,v) \in \mathrm{R}\times U^1 : 3s^2 \|\psi\|_U^4 + 6s\int\limits_\Omega \psi^3 v dx + 3\int\limits_\Omega \psi^2 v^2 dx + \alpha_1\alpha_2^{-1} = 0 \right\} \cap \Xi'.$$

Теорема 4.4. [36] Пусть $1 \le n \le 4$, $\alpha_1\alpha_2 < 0$, $\lambda = \lambda_1$. Тогда

(i) любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет $(M + N_u')$-присоединенных векторов, если $u \in \Xi \setminus \Xi'$;

(ii) любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один $(M + N_u')$-присоединенный вектор, если $u \in \Xi' \setminus U^1$.

Замечание 4.2. Множество Ξ_s образует 2-сборку Уитни.

4.2. Уравнение Корпусова–Плетнера–Свешникова

Пусть $\Omega = (a,b) \subset \mathrm{R}$. В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим уравнение Корпусова–Плетнера–Свешникова

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\,\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,u), \tag{33}$$

моделирующее метастабильные процессы в жидком двухкомпонентном полупроводнике. Параметры $\alpha, \beta, \lambda \in \mathrm{R}$ характеризуют свойства полупроводника. В случае отрицательности коэффициента λ возможен пробой полупроводника. Впервые уравнение (33) было получено в работе [13] и была установлена однозначная разрешимость начально-краевой задачи для уравнения (33) в случае положительности параметра λ.

Положим $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $F = W_2^{-1}(\Omega)$. Пространство F сопряжено к U относительно скалярного произведения $<\cdot,\cdot>$ из $L_2(\Omega)$. Операторы L, M и N определим следующим образом:

$$< Lu, v >= \int\limits_a^b (\lambda uv + u_x v_x)dx, \quad < Mu, v >= -\int\limits_a^b \alpha u_x v_x dx, \quad u, v \in U,$$

$$< N(u), v >= -\int\limits_a^b \beta u u_x v_x dx, \quad u, v \in U.$$

По построению операторы $L, M \in \mathrm{L}(U;F)$ и фредгольмовы. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ занумерованное по невозрастанию множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ на (a, b), а через $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное в смысле $L_2(\Omega)$ множество соответствующих собственных функций. Построим множество

$$\Xi = \{u \in \mathsf{U} : \langle (Mu + N(u)), \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}$$

и пространства

$$U^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l : \lambda = \lambda_l\}, \quad U^1 = \{u \in U : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \lambda = \lambda_l\}.$$

Возьмем произвольную точку $u \in U$, тогда $u = a\varphi_l + v$, где $v = Pu \in U^1$, $a \in R$. Точка $u \in \Xi$ точно тогда, когда выполнено

$$\frac{a^2}{2}\|\varphi_l\|^3_{L_3(\Omega)} + a\left(\int_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\int_a^b v^2\varphi_l dx = 0. \tag{34}$$

Введем в рассмотрение функционал $\delta : U^1 \to \mathrm{R}$:

$$\delta(v) = (\int_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta})^2 - \|\varphi_l\|^3_{L_3(\Omega)} \int_a^b v^2 \varphi_l dx$$

и построим множества

$$U_+^1 = \{v \in U^1 : \delta(v) > 0\}, \quad U_-^1 = \{v \in U^1 : \delta(v) < 0\}.$$

Возьмем точку $v \in U_+^1$, тогда уравнение (34) имеет два решения

$$a_- = \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3(\Omega)}\left(-\frac{\alpha}{\beta} - \int_a^b v\varphi_l^2 dx - \sqrt{\delta(v)}\right), \quad a_+ = \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3(\Omega)}\left(-\frac{\alpha}{\beta} - \int_a^b v\varphi_l^2 dx + \sqrt{\delta(v)}\right).$$

Построим множества

$$\Xi_{+(-)} = \{u \in U : u = a_{+(-)}(v)\varphi_l + v, \ v \in U_+^1\}.$$

Теорема 4.5. [35] Пусть $\alpha, \beta \in R \setminus \{0\}$ и

(i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (33) является все пространство *U*.

(ii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (33) является множество $\Xi_+ \cup \Xi_-$, каждая компонента которого Ξ_+ и Ξ_- биективно проектируется на множество U_+^1.

Перейдем к рассмотрению задачи Шоуолтера–Сидорова–Дирихле

$$(\lambda - \Delta)(u(x,0) - u_0(x)) = 0, \ x \in (a,b); \quad u(a,t) = u(b,t) = 0, \ t \in \mathrm{R}. \tag{35}$$

Теорема 4.6. [35] При любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ и

(i) $\lambda \in \mathrm{R} \setminus \{-\lambda_k\}$ существует точно одно решение задачи (33), (35) при любых $u_0 \in U$.

(ii) $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ существует два различных решения задачи (33), (35) при любых $u_0 \in U$ таких, что $Pu_0 \in U_+^1$.

(iii) $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ не существует ни одного решения задачи (33), (35) при любых $u_0 \in U$ таких, что $Pu_0 \in U_-^1$.

Замечание 4.3. В работе [4] была исследована неединственность решения задачи Шоуолтера–Сидорова для модели Плотникова.

4.3. Уравнение Бенжамина–Бона–Махони на графе

Пусть $\mathrm{G} = \mathrm{G}(V;E)$ – конечный связный ориентированный граф, где $V = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $E = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. На графе G рассмотрим уравнения

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = u_j u_{jx} - \nu u_{jxx} + \varepsilon u_j, \tag{36}$$

каждое их которых служит одномерным аналогом системы уравнений Осколкова и является гибридом уравнений Бенджамина–Бони–Махони и Бюргерса и моделирует длинные волны в диссипативных и дисперсных средах. Для уравнений (36) в каждой вершине графа зададим условия

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_p(l_p,t), \tag{37}$$

$$\sum_j d_j u_{jx}(0,t) - \sum_m d_m u_{mx}(l_m,t) = 0, \tag{38}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i)$, $E_m, E_p \in E^{\omega}(V_i)$, $t \in \mathrm{R}$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i.

Для редукции задачи (36)–(38) к уравнению (2) введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\mathrm{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением

$$< g, h >= \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Положим $U = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено условие (37)$\}$, а через F обозначим сопряженное пространство к U относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$. Формулой

$$< Au, v >= \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + \lambda_0 u_j(x) v_j(x)) dx, \quad \lambda_0 > 0, \quad u, v \in U,$$

зададим оператор, определенный на пространстве U. Спектр оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$, а его собственные функции образуют базис в пространстве $L_2(\mathrm{G})$ [1]. Обозначим через φ_0 первую собственную функцию, отвечающую первому собственному значению λ_0, а через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим семейство остальных собственных значений оператора A, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности; через $\{\varphi_k\}$ обозначим соответствующие ортонормированные в смысле $L_2(\mathrm{G})$ собственные функции. Формулами $L = A - \lambda$, $M = \nu(\lambda_0 - A) + \varepsilon$ зададим операторы $L, M : U \to F$. Далее формулой

$$\langle N(u), v \rangle = -\sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} u_j u_{jx} v_j dx$$

зададим оператор $N : U \to F$.

Лемма 4.2. [37]

(i) При всех $\varepsilon, \lambda, \lambda_0, \nu \in \mathrm{R}$ операторы L, M принадлежат $\mathrm{L}(U;F)$, причем, если $|\varepsilon| + |\lambda_0| > 0$, то оператор M является (L, 0)-ограниченным.

(ii) Оператор N принадлежит $C^{\infty}(U;F)$.

Построим подпространство $U^1 = \{u \in U :< u, \varphi_0 >= 0\}$ и множества

$$\Xi_{+(-)} = \{u \in U^1 : \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} - \varepsilon) dx > 0\}.$$

Теорема 4.7. [37] При любых $\nu \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $\lambda_0 \in \mathrm{R}_+$ фазовым пространством задачи (36) – (38) является

(i) пространство U, если $\lambda \in (0, \lambda_1) \setminus \{\lambda_0\}$;

(ii) C^{∞}-банахово многообразие $\Xi = \Xi_+ \cup \Xi_-$, моделируемое подпространством U^1, любой атлас которого эквивалентен атласу из двух непересекающихся карт, если $\lambda = \lambda_0$.

Замечание 4.4. В теореме 4.7 показано, что фазовым многообразием задачи (36)–(38) является C^{∞}-банахово многообразие, однако многообразие не является простым и состоит из двух непересекающихся компонент.

Литература

1. Баязитова, А.А. Задача Штурма–Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – вып. 5. – № 16 (192). – С. 4–10.

2. Богатырева, Е.А. Численное моделирование процесса неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Е.А. Богатырева, Н.А. Манакова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 1. – С. 125–132.

3. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.

4. Гильмутдинова, А.Ф. О неединственности решений задачи Шоуолтера–Сидорова для одной модели Плотникова / А.Ф. Гильмутдинова // Вестник СамГУ. – 2007. – № 9/1. – С. 85–90.

5. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – № 5. – С. 1031–1033.

6. Загребина, С.А. Устойчивые и неусточивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.

7. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.

8. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

9. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнений Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Вып. 11. – № 5 (264). – С. 13–24.

10. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А Замышляева., Е.В. Бычков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Вып. 12. – № 18 (277). – С. 13–19.

11. Замышляева, А.А. Вычислительный эксперимент для одной математической модели ионно-звуковых волн / А.А. Замышляева, А.С. Муравьев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 127–132.

12. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – вып. 7. – № 4 (221). – С. 40–46.

13. Корпусов, М.О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 4, № 8. – С. 1237–1249.

14. Кузнецов, Г.А. Фазовое пространство задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Кузнецов, М.М. Якупов // Вестник Челябинского государственного университета. – 2002. – Т. 3, № 1. – С. 92–103.

15. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961. – 204 с.

16. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М.: Мир, 1967. – 203 с.

17. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1985. – Т. 147. – С. 110–119.

18. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труда Матем. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.

19. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.

20. Осколков, А.П. К теории устойчивости решений полулинейных диссипативных уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ПОМИ. – 1992. – Т. 200. – С. 139–148.

21. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

22. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289, № 6. – С. 1315–1318.

23. Свиридюк, Г.А. О многообразии решений одной задачи динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 10. – С. 1846–1848.

24. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

25. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 2. – С. 252–272.

26. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

27. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия ВУЗ. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.

28. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства уравнений типа Соболева с s-монотонными и сильно коэрцитивными операторами / Г.А. Свиридюк, М.В. Климентьев // Известия ВУЗ. Математика. – 1994. – № 11. – С. 75–82.

29. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.

30. Свиридюк, Г.А. Об относительно сильной p-секториальности линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов // Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 365, № 6. – С. 736.

31. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1646–1652.

32. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.

33. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Математика. – 2003.– № 9. – С. 36–41.

34. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной обобщенной модели Осколкова / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1124–1131.

35. Свиридюк, Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Карамова // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1476–1581.

36. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.

37. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126–131.

38. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.

39. Свиридюк, Г.А. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (23). – С. 24–33.

40. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова и аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

41. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552–557.

42. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

43. Темам, Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981.

44. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

45. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011. – 648 p.

46. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solved with respect to the highest order derivative // G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.

47. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.: Marcel Dekker, Inc. 1999. – 236 p.

48. Favini, A. Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of «noises» // A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – Article ID 697410. – p. 8

49. Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff // Journal of Aeronautical Sciences. – 1956. – №. 7. – P. 1–20.

50. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002. – 346 p.

51. Showalter, R.E. The Sobolev equation / R.E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V. 5, № 1. – P. 5–22; V. 5, № 2. – P. 81–89.

52. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003. – 216 p.

53. Sukacheva, T.G. On a class of Sobolev-type equations / T.G. Sukacheva, A.O. Kondyukov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 5–21.

54. Zagrebina, S.A. A Multipoint initial-final value problem for a linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid / S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 5–22.

Поступила в редакцию 15 июня 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51

DOI: 10.14529/mmph160304

NONCLASSICAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. PHASE SPACE OF SEMILINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: manakovana@susu.ru

The article surveys the results concerning the morphology of phase spaces for semilinear Sobolev type equations. The first three paragraphs present specific boundary value problems for Sobolev type partial differential equations whose phase spaces are simple smooth Banach manifolds. The last section

contains the mathematical models whose phase spaces lie on a smooth Banach manifolds with singularities. The purpose of this article is the formation of a basis for future studies of the morphology of phase spaces for semilinear Sobolev type equations. In addition, the article provides an explanation of the phenomenon of nonexistence of solutions to the Cauchy problem and the phenomenon of nonuniqueness of solutions to the Showalter–Sidorov problem for the semilinear Sobolev type equations.
Keywords: Sobolev type equations; phase space; the morphology of the phase space; Banach manifold; quasistationary trajectory; Showalter–Sidorov problem; Cauchy problem; k-assembly Whitney.

References

1. Bayazitova A.A. The Sturm–Liouville problem on geometric graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16 (192), Issue 5, pp. 4–10. (in Russ.).

2. Bogatyreva E.A., Manakova N.A. Numerical simulation of the process of nonequilibrium counterflow capillary imbibition. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, Vol. 56, no. 1, pp. 132–139. DOI: 10.1134/S0965542516010085

3. Bokarieva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney folds in phase spaces of some semilinear Sobolev-type equations. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776

4. Gil'mutdinova A.F. [On the non-uniqueness of solutions of Showalter–Sidorov problem for one Plotnikov model]. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 9/1, pp. 85–90.

5. Dzektser E.S. Obobshchenie uravneniya dvizheniya gruntovykh vod [The generalization of the equations of motion of groundwater]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, no. 5, pp. 1031–1033. (in Russ.).

6. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. *Stable and unstable manifolds of solutions of nonlinear Sobolev type equations*. Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2016, 121 p. (in Russ.).

7. Zagrebina S.A. The initial-finite problems for nonclassical models of mathematical physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 5–24. (in Russ.).

8. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev type equations of higher-order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 107 p. (in Russ.)

9. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The optimal control over solution of the initial-finish value problem for the Boussinesque–Love equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, Issue 11, no. 5 (264), pp. 13–24. (in Russ.).

10. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. The phase space of the modified Boussinesq equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, Issue 12, no. 18 (277), pp. 13–19. (in Russ.).

11. Zamyshlyaeva A.A., Muravyev A.S. Computational experiment for one mathematical model of ion-acoustic waves. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 127–132. DOI: 10.14529/mmp150211

12. Keller A.V. The algorithm for solution of the Showalter–Sidorov problem for Leontief type models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, issue 7, no. 4(221), pp. 40–46. (in Russ.).

13. Korpusov M.O., Pletner Yu.D., Sveshnikov A.G. On quasi-steady processes in conducting nondispersive media. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, Vol. 40, no. 8, pp. 1188–1199.

14. Kuznetsov G.A., Yakupov M.M. The phase space of the problem of convection of viscoelastic incompressible fluid. *Bulletin of the Chelyabinsk State University*, 2002, Vol. 3, no. 1, pp. 92–103. (in Russ.).

15. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. N.Y., London, Paris, Gordon and Breach, 1969, 234 p.

16. Leng S. *Introduction to Differentiable Manifolds*. N.Y., Springer, 2002, 263 p.

17. Oskolkov A.P. [Initial-boundary value problems for equations of motion nonlinear viscoelastic fluids]. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 1985, Vol. 147, pp. 110–119. (in Russ.).

18. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, Vol. 179, pp. 137–182.

19. Oskolkov A.P. Nonlocal problems for one class of nonlinear operator equations that arise in the theory of Sobolev type equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 1993, Vol. 64, issue 1, pp. 724–736. DOI: 10.1007/BF02988478

20. Oskolkov A.P. On stability theory for solutions of semilinear dissipative equations of the Sobolev type. *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, Vol. 77, no. 3, pp. 3225–3231. DOI: 10.1007/BF02364715

21. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear the Sobolev type equations]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007, 736 p. (in Russ.).

22. Sviridyuk G.A. Mnogoobrazie resheniy odnogo singulyarnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya [The manifold of solutions of an operator singular pseudoparabolic equation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Vol. 289, no. 6, pp. 1315–1318. (in Russ.).

23. Sviridyuk G.A. O mnogoobrazii resheniy odnoy zadachi dinamiki vyazkouprugoy neszhimaemoy zhidkosti [On the manifold of solutions of a problem on the dynamics of a incompressible viscoelastic fluid]. *Differential Equations*, 1988, Vol. 24, no. 10, pp. 1846–1848. (in Russ.).

24. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. The Cauchy problem for a class of semilinear equations of Sobolev type. *Siberian Mathematical Journal*, 1991, Vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493

25. Sviridyuk G.A. Phase portraits of Sobolev-type semilinear equations with a relatively strongly sectorial operator. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 5, pp. 1109–1126.

26. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

27. Sviridyuk G.A. A model of dynamics of incompressible viskoelastic liquid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, Vol. 38, no. 1, pp. 59–68.

28. Sviridyuk G.A., Kliment'ev M.V. Phase spaces of Sobolev-type equations with *s*-monotone or strongly coercive operators. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, Vol. 38, no. 11, pp. 72–79.

29. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The phase space of the initial-boundary value problem for the Oskolkov system. *Differential equations*, 1996, Vol. 32, no. 11, pp. 1535–1540.

30. Sviridyuk G.A., Kuznetsov G.A. Relatively strongly p-sectorial linear operators. *Doklady Mathematics*, 1999, Vol. 59, no. 2, pp. 298–300.

31. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Verigin's problem for linear equations of the Sobolev type with relatively *p*-sectorial operators. *Differential Equations*, 2002, Vol. 38, no. 12, pp. 1745–1752.

32. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The phase space of an initial-boundary value problem for the Hoff equation. *Mathematical Notes*, 2002, Vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266. DOI: 10.1023/A:1013919500605

33. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Phase space of the Cauchy–Dirichlet problem for the Oskolkov equation of nonlinear filtration. *Russian Mathematics*, 2003, Vol. 47, no. 9, pp. 33–38.

34. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The phase space of one generalized model of Oskolkov. *Siberian Math. J.*, 2003, Vol. 44, no. 5, pp. 1124–1131. (in Russ.).

35. Sviridyuk G.A., Karamova A.F. On the crease phase space of one non-classical equations. *Differential equations*, 2005, Vol. 41, no. 10, pp. 1476–1581. (in Russ.). DOI: 10.1007/s10625-005-0300-5

36. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney fold in the phase space of the Hoff equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, Vol. 49, no. 10, pp. 49–55.

37. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff equations on graphs. *Differential Equations*, 2006, Vol. 42, no. 1, pp. 139–145. DOI: 10.1134/S0012266106010125

38. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev type equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

39. Sviridyuk G.A., Keller A.V. On the convergence of the numerical solution of optimal control problems for systems of Leontief type equations. *Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 24–33. (In Russ.)

40. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The dynamical models of Sobolev type with Showalter–Sidorov condition and additive “noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathemati-*

cal Modelling, Programming and Computer Software, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. DOI: 10.14529/mmp140108

41. Sukacheva T.G. A model for the motion of incompressible viscoelastic fluid Kelvin–Voigt nonzero order. *Differential Equations*, 1997, Vol. 33, no. 4, pp. 552–557. (in Russ.).

42. Pokornyy Yu.V., Penkin O.M., Borovskikh A.V., Pryadiev V.L., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential equations on geometrical graphs]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 272 p. (In Russ.)

43. Temam R. *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*. Stud. Math. Appl., 2. Amsterdam, N.Y., North-Holland, 1979, 519 p.

44. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical solution of the optimal measurement problem. *Automation and Remote Control*, 2012, Vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079

45. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations.* Series in Nonlinear Analisys and Applications. Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011, 648 p.

46. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial differential equations and systems not solved with respect to the highest order derivative*. N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003, 239 p.

47. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces*. N.Y., Marcel Dekker, Inc., 1999, 236 p.

48. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev type equations with relatively. *p*-sectorial operators in space of “noises”, *Abstract and Applied Analysis*, 2015, p. 8, Article ID 697410. DOI:10.1155/2015/697410

49. Hoff N.J. Creep buckling. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956, no. 7, pp. 1–20.

50. Pyatkov S.G. *Operator theory. Nonclassical problems*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2002, 346 p.

51. Showalter R.E. The Sobolev equation. *Applicable Analysis*, 1975, Vol. 5, no. 1, pp. 5–22; Vol. 5, no. 2, pp. 81–89. DOI: 10.1080/00036817508839103

52. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2003, 216 p. (in Russ.).

53. Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. On a class of Sobolev-type equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 4, pp. 5–21. DOI: 10.14529/mmp140401

54. Zagrebina S.A. A Multipoint initial-final value problem for a linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 5–22. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140301

Received June 15, 2016

УДК 517.968 DOI: 10.14529/mmph160305

ВЫРОЖДЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С.С. Орлов
Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

Изучен вопрос однозначной разрешимости линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части. Операторнозначное ядро имеет специальный вид $K(t, s) = g(t - s)A$, где $g = g(t)$ – числовая функция, A – линейный оператор. Именно в такой форме эти уравнения часто встречаются в приложениях. Для их исследования становится возможным применение структурной теории пучков двух линейных операторов, которая в настоящее время наиболее полно разработана Г.А. Свиридюком и его учениками. Еще одна особенность изучаемых в данной работе задач состоит в наличии у функции $g = g(t)$ кратного нуля в точке $t = 0$. В предположении спектральной ограниченности оператора A относительно вырожденной главной части уравнений построены фундаментальные оператор-функции соответствующих интегральных и интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах. На этой основе доказаны теоремы существования и единственности решений рассматриваемых задач в классе распределений с ограниченным слева носителем. Установлена зависимость порядка сингулярности обобщенных решений от кратности нуля интегрального ядра в начальной точке. Получены условия, при которых обобщенные решения совпадают с классическими. Теоремы, сформулированные для абстрактных уравнений, применены к исследованию содержательных начально-краевых задач, возникающих в физике плазмы и математической теории упругости.

Ключевые слова: относительная спектральная ограниченность линейного оператора; распределение; фундаментальная оператор-функция.

Введение

Теория интегральных уравнений в абстрактных пространствах представляет интерес примерно с 60-х годов прошлого столетия. Этой тематике посвящена обширная библиография (см. монографии [1–3] и сопутствующие им обзоры литературы); среди отечественных исследований в данной области следует отметить работы И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [4], М.М. Лаврентьева [5], А.Л. Бухгейма [6], И.В. Сапронова [7], Н.Д. Копачевского [8] и др. Во всех упомянутых работах изучаются классы уравнений Вольтерра с тождественным или непрерывно обратимым линейным оператором при внеинтегральном слагаемом (в главной части). Вырожденные интегральные уравнения в абстрактных пространствах представлены в современной литературе существенно меньшим числом публикаций, примерами таких являются [9–12]. Исследования систем интегральных уравнений с необратимой матрицей коэффициентов в главной части проводились М.В. Булатовым [13], В.Ф. Чистяковым [14] и др. Интегральные уравнения Вольтерра с вырождением в бесконечномерных пространствах впервые рассмотрены в пионерской работе Н.А. Сидорова [15], где изучалась однозначная разрешимость в классе непрерывных функций уравнения

$$Bu(t) - \int_0^t K(t-s)u(s)ds = f(t)$$

с фредгольмовым оператором B и операторнозначным ядром $K(t)$. В [16] к исследованию этой задачи впервые применен аппарат обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах, ее однозначная разрешимость в классе распределений с ограниченным слева носителем доказана в [17] с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции. В этих работах естественным образом возникала задача о построении обобщенного жорданова набора оператора B

относительно оператор-функции $K(t)$. Как отмечено автором [18, с. 112], применение разработанных методов становится весьма затруднительным, если $K(t)$ имеет в точке $t=0$ нуль кратности ℓ, т. е. $K(0)=K'(0)=\ldots=K^{(\ell-1)}(0)=\mathrm{O}$ и $K^{(\ell)}(0)\neq\mathrm{O}$. Здесь и далее O – нулевой оператор. В этом случае неизвестно как строится жорданов набор оператора B. Подобная проблема возникает при изучении сингулярных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах с дифференциальной частью высокого порядка, в которой отсутствует хотя бы одно слагаемое наивысшего порядка группы младших производных.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $\mathrm{u}=u(t)$, $\mathrm{f}=f(t)$ – неизвестная и заданная функции неотрицательного действительного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$Bu(t)-\int_0^t g(t-s)Au(s)ds=f(t), \tag{1}$$

где B, A – линейные операторы, причем $B\in L(E_1,E_2)$, $A\in Cl(E_1,E_2)$ (т. е. A замкнут и $\overline{D(A)}=E_1$), ядро $\mathrm{g}=g(t)$ – числовая функция. В этом случае $K(t)=g(t)A$, и он наиболее типичен для приложений. Будем предполагать, что оператор B является необратимым, а функция $\mathrm{g}=g(t)$ – аналитической в точке $t=0$ и имеет в этой точке нуль кратности ℓ.

В работе [19] исследован вопрос существования и единственности решения уравнения (1) в классе распределений с ограниченным слева носителем в условиях фредгольмовости оператора B и наличия у функции $\mathrm{g}=g(t)$ в точке $t=0$ нуля кратности ℓ. Показано, что в этих предположениях порядок сингулярности обобщенного решения возрастает на кратную ℓ величину. Представляемая статья посвящена изучению однозначной разрешимости уравнения (1) с (B,p)-ограниченным оператором A. Применяется синтез идей теорий полугрупп операторов с ядрами Г.А. Свиридюка [20, 21] и фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах [17]. Подход оказался применимым к исследованию начальной задачи

$$Bu^{(N)}(t)-\int_0^t g(t-s)Au(s)ds=f(t), \tag{2}$$

$$u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0)=u_{N-1}, \tag{3}$$

при аналогичных предположениях на операторные коэффициенты и ядро интегральной части.

Разрешимость абстрактных уравнений Вольтерра

В пространстве $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем уравнение (1) принимает сверточный вид

$$\mathbf{I_0}(\delta(t))*\tilde{u}(t)=\tilde{f}(t), \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{I_0}(\delta(t))=B\delta(t)-Ag(t)\theta(t)$, $\tilde{u}(t)=u(t)\theta(t)$, $\tilde{f}(t)=f(t)\theta(t)$, $\delta(t)$ – функция Дирака, $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $u(t)$ – классическое (сильно непрерывное) решение уравнения (1).

Определение 1. *Фундаментальной оператор-функцией интегрального оператора* $\mathbf{I_0}(\delta(t))$ *называется обобщенная оператор-функция* $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)$ *такая, что для любых* $v(t)\in K'_+(E_1)$ *и* $w(t)\in K'_+(E_2)$ *справедливы равенства* $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)*\mathbf{I_0}(\delta(t))*v(t)=v(t)$, $\mathbf{I_0}(\delta(t))*\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)*w(t)=w(t)$.

Смысл конструкции в том, что, если известен вид $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)$, то единственным решением уравнения (1) в $K'_+(E_1)$ (*обобщенным решением* уравнения (1)) является $\tilde{u}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t)*\tilde{f}(t)$, в чем нетрудно убедиться, так же как это сделано, например, в работах [18, 19].

Изложению основных результатов предпошлем некоторые вспомогательные сведения из [20, 21], которые приведем в удобных для нас обозначениях.

Определение 2. *Множество* $\rho^B(A)=\{\mu\in\mathrm{C}:\ (\mu B-A)^{-1}\in L(E_2,E_1)\}$ *называется резольвентным множеством оператора* A *относительно оператора* B *(*B*-резольвентным множе-*

ством оператора A), а оператор-функция $(\mu B - A)^{-1}$ – резольвентой оператора A относительно оператора B (B-резольвентой оператора A).

Определение 3. *Оператор-функции $R_\mu^B(A) = (\mu B - A)^{-1} B$ и $L_\mu^B(A) = B(\mu B - A)^{-1}$ называются соответственно правой и левой резольвентами оператора A относительно оператора B (правой и левой B-резольвентами оператора A).*

Определение 4. *Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B ((B,σ)-ограниченным), если существует $a > 0$ такое, что $\{\mu \in \mathrm{C}: |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$.*

Замечание 1. Пусть $\Gamma = \{\mu \in \mathrm{C}: |\mu| = r > a\}$. Тогда, как показано в [20, 21], если оператор A спектрально ограничен относительно B, то операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_\mu^B(A)d\mu \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma L_\mu^B(A)d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P)$, $E_1 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q)$. Действия операторов A и B расщепляются, при этом $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$, $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничен. Имеют место равенства $QB = BP$, $QA = AP$.

Замечание 2. Если существует $p \in \{0\} \cup \mathrm{N}$ такое, что $(A_0 B_0^{-1})^p \neq \mathrm{O}_1$, но $(A_0 B_0^{-1})^{p+1} = \mathrm{O}_1$, то бесконечно удаленная точка является *несущественно особой* точкой (либо *устранимой особой* точкой при $p = 0$, либо *полюсом* порядка $p \in \mathrm{N}$) B-резольвенты оператора A. В этом случае, согласно [20, 21], (B,σ)-ограниченный оператор называется (B, p)*-ограниченным*.

Теорема 1. *Пусть $B \in L(E_1, E_2)$, оператор $A \in Cl(E_1, E_2)$ спектрально ограничен относительно B, $g(t) \in C(t \geq 0)$, тогда интегральный оператор $\mathbf{I_0}(\delta(t)) = B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) = B^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1 B_1^{-1})^{k-1} Q(g(t)\theta(t))^{k-1} - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)(\gamma(t))^{q+1},$$

здесь и всюду далее $\gamma(t)$ – обратный к $g(t)\theta(t)$ элемент в сверточной алгебре D'_+, т. е. $\gamma(t) * g(t)\theta(t) = \delta(t)$, степень обобщенных функций понимается в смысле операции свертки, причем $(g(t)\theta(t))^0 = \delta(t)$.

Доказательство. Согласно определению 1, следует показать, что $\mathbf{I_0}(\delta(t)) * \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) = \mathrm{I}_2\,\delta(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) * \mathbf{I_0}(\delta(t)) = \mathrm{I}_1\,\delta(t)$, где I_1, I_2 – тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно. Справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{I_0}(\delta(t)) * \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) = (B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) =$$

$$= BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k Q(g(t)\theta(t))^k + BB_1^{-1}Q\delta(t) - B\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)(\gamma(t))^{q+1} -$$

$$- AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} Q(g(t)\theta(t))^k + A\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)(\gamma(t))^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k Q(g(t)\theta(t))^k + Q\delta(t) - B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)(\gamma(t))^{q+1} -$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k Q(g(t)\theta(t))^k + B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)(\gamma(t))^{q+1} + AA_0^{-1}(\mathrm{I}_2 - Q)\delta(t) =$$

$$= Q\delta(t) + (\mathrm{I}_2 - Q)\delta(t) = \mathrm{I}_2\,\delta(t).$$

Далее, учитывая $QB = BP$, $QA = AP$, получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) * \mathbf{I_0}(\delta(t)) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{0}(t) * (B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) =$$

$$= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k BP(g(t)\theta(t))^k + B_1^{-1}BP\delta(t) - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}B(\mathrm{I}_1-P)(\gamma(t))^{q+1} -$$

$$- B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} AP(g(t)\theta(t))^k + \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}A(\mathrm{I}_1-P)(\gamma(t))^q =$$

$$= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P(g(t)\theta(t))^k + P\delta(t) - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(\mathrm{I}_1-P)(\gamma(t))^{q+1} -$$

$$- B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1} A_1P(g(t)\theta(t))^k + \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1} A_0^{-1}A(\mathrm{I}_1-P)(\gamma(t))^{q+1} + A_0^{-1}A(\mathrm{I}_1-P)\delta(t) =$$

$$= P\delta(t) + (\mathrm{I}_1-P)\delta(t) = \mathrm{I}_1\,\delta(t),$$

что доказывает второе сверточное равенство и завершает доказательство всей теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3. Если в теореме 1 дополнительно положить, что ∞ – несущественно особая точка B-резольвенты оператора A, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = B^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(g(t)\theta(t))^{k-1} - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)(\gamma(t))^{q+1},$$

$p\in\{0\}\cup\mathrm{N}$ (см. замечание 2).

Следующая теорема, доставляющая способ построения $\gamma(t)$, доказана в работе [19].

Теорема 2. *Пусть* $g(t)\in C^{\ell+1}(t>0)$ *является аналитической функцией в точке* $t=0$ *и в этой точке имеет нуль кратности* ℓ, *т. е.* $g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(\ell-1)}(0)=0$ *и* $g^{(\ell)}(0)\neq 0$, *тогда обратным элементом* $\gamma(t)$ *к* $g(t)\theta(t)$ *в сверточной алгебре* D'_+ *является обобщенная функция*

$$\gamma(t) = \frac{\delta^{(\ell+1)}(t)}{g^{(\ell)}(0)} * (\delta(t) + r(t)\theta(t)),$$

где $r(t)$ *– резольвента ядра* $-\dfrac{g^{(\ell+1)}(t)}{g^{(\ell)}(0)}$.

Замечание 4. В условиях этой теоремы и (B,p)-ограниченности оператора A

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = B^{-1}\delta(t) * (\mathrm{I}_2\,\delta(t) + R_0(t)\theta(t))Q - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)\frac{\delta^{((q+1)(\ell+1))}(t)}{(g^{(\ell)}(0))^{q+1}} * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}.$$

Здесь $R_0(t)$ – резольвента ядра $A_1B_1^{-1}g(t)$, в терминах которой представлена первая группа слагаемых формулы в замечании 3. Рассмотрим последовательность из $K'_+(E_2)$ вида

$$f_k(t)\theta(t) = \frac{1}{(g^{(\ell)}(0))^k}(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k * f(t)\theta(t),\ k\in\mathrm{N},$$

где $r(t)$ из теоремы 2. Имеют место рекуррентные соотношения

$$g(t)\theta(t) * f_k(t)\theta(t) = \frac{t^\ell}{\ell!}\theta(t) * f_{k-1}(t)\theta(t),\ \int_0^t g(t-s)f_k(s)ds = \int_0^t \frac{(t-s)^\ell}{\ell!} f_{k-1}(s)ds,\ k\in\mathrm{N}.$$

Поскольку известен вид $\boldsymbol{\varepsilon}_0(t)$, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2, оператор* $A\in Cl(E_1,E_2)$ *является* (B,p)*-ограниченным, тогда уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{(p+2)(\ell+1)}(t\geq 0),\ f(t)\in \mathrm{C}^{(p+1)(\ell+1)}(t\geq 0;E_2),$$

то оно имеет вид

$$\widetilde{u}(t) = \left[B_1^{-1}Qf(t) + B_1^{-1}\int_0^t R_0(t-s)Qf(s)ds - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)f_{q+1}^{((q+1)(\ell+1))}(t)\right]\theta(t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\ell+1}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q w_{j-1[q]}\delta^{((q+1)(\ell+1)-j)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 1, 2 и 4, а также

$$w_{j-1[q]}=\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)f_{k+q+1}^{(k(\ell+1)+j-1)}(0),\ q=0,\ldots,p,\ j=1,\ldots,\ell+1.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда, если*

$$w_{j-1[q]}=0,\ q=0,\ldots,p,\ j=1,\ldots,\ell+1,$$

то уравнение (1) имеет единственное классическое решение

$$u(t)=B_1^{-1}Qf(t)+B_1^{-1}\int_0^t R_0(t-s)Qf(s)ds-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)f_{q+1}^{((q+1)(\ell+1))}(t).$$

Начальная задача (2), (3) в пространстве $K'_+(E_1)$ принимает вид сверточного уравнения

$$\mathbf{I_N}(\delta(t))*\tilde{u}(t)=\tilde{h}(t), \tag{5}$$

в котором $\mathbf{I_N}(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-Ag(t)\theta(t)$, $\tilde{u}(t)=u(t)\theta(t)$, а правая часть

$$\tilde{h}(t)=\mathbf{I_N}(\delta(t))*p(t)\theta(t)+h_0(t)\theta(t)$$

включает не только свободную функцию уравнения (2), но и начальные условия (3). Здесь

$$h_0(t)=f(t)+\int_0^t g(t-s)Ap(s)ds,\ p(t)=\sum_{j=1}^{N}u_{j-1}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Единственным решением уравнения (5) в $K'_+(E_1)$ (*обобщенным решением* задачи Коши (2), (3)) является распределение $\tilde{u}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{N}}(t)*\tilde{h}(t)$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{N}}(t)$ – фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора $\mathbf{I_N}(\delta(t))$.

Теорема 5. *Пусть* $B\in L(E_1,E_2)$, *оператор* $A\in Cl(E_1,E_2)$ *является* (B,p)*-ограниченным, а функция* $g(t)\in C^{\ell+1}(t>0)$ *– аналитической в точке* $t=0$ *и в этой точке имеет нуль кратности* ℓ, *тогда интегро-дифференциальный оператор* $\mathbf{I_N}(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-Ag(t)\theta(t)$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{N}}(t)=B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\mathrm{I}_2\,\delta(t)+R_N(t)\theta(t))Q-$$

$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)\frac{\delta^{(q(N+\ell+1)+\ell+1)}(t)}{(g^{(\ell)}(0))^{q+1}}*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

где $R_N(t)$ – резольвента ядра $A_1B_1^{-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds$.

Техника доказательства этой теоремы аналогична применяемой выше для интегрального оператора $\mathbf{I_0}(\delta(t))$. Всюду далее используются обозначения

$$h_k(t)\theta(t)=\frac{1}{(g^{(\ell)}(0))^k}(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k*h_0(t)\theta(t),\ k\in\mathrm{N},$$

где $r(t)$ – резольвента ядра $-\frac{g^{(\ell+1)}(t)}{g^{(\ell)}(0)}$ (см. теорему 2).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5, тогда задача Коши (2), (3) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{pN+(p+2)(\ell+1)}(t\geq 0),\ f(t)\in \mathrm{C}^{pN+(p+1)(\ell+1)}(t\geq 0;E_2),$$

то оно имеет вид

$$\widetilde{u}(t)=\left[p(t)+B_1^{-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}Qh_0(s)ds+B_1^{-1}\int_0^t\int_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}R_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds-\right.$$

$$\left.-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)h_{q+1}^{(q(N+\ell+1)+\ell+1)}(t)\right]\theta(t)-\sum_{j=1}^{\ell+1}w_{j-1[0]}\delta^{(\ell+1-j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{N+\ell+1}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}w_{j-1[q+1]}\delta^{((q+1)(N+\ell+1)+\ell+1-j)}(t),$$

где используются введенные выше обозначения, а также

$$w_{j-1[q]}=\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)h_{k+q+1}^{(k(N+\ell+1)+j-1)}(0),\ q=0,\ldots,p,\ j=1,\ldots,N+\ell+1.$$

Замечание 5. Построенное в $K'_+(E_1)$ решение начальной задачи (2), (3) представляет собой сумму $\widetilde{u}(t)=u(t)\theta(t)+\omega(t)$, где функция $\mathrm{u}=u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) и начальным условиям $u^{(j-1)}(0)=u_{j-1}-w_{j+\ell[0]}$, $j=1,\ldots,N$, а $\omega=\omega(t)$ является линейной комбинацией функции Дирака и ее производных. Оно совпадает с классическим (N раз сильно непрерывно дифференцируемым) решением этой задачи, если порядки гладкости $\mathrm{g}=g(t)$ и $\mathrm{f}=f(t)$ увеличить еще на N и положить все $w_{j-1[q]}=0$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и*

$$g(t)\in C^{(p+1)N+(p+2)(\ell+1)}(t\geq 0),\ f(t)\in \mathrm{C}^{(p+1)(N+\ell+1)}(t\geq 0;E_2),$$

тогда, если $w_{j-1[q]}=0$, $q=0,\ldots,p$, $j=1,\ldots,N+\ell+1$, *то задача Коши (2), (3) имеет единственное классическое решение*

$$u(t)=p(t)+B_1^{-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}Qh_0(s)ds+B_1^{-1}\int_0^t\int_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}R_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathrm{I}_2-Q)h_{q+1}^{q(N+\ell+1)+\ell+1}(t).$$

Замечание 6. *Порядки сингулярности* (см. определение в работе [19]) обобщенных решений уравнения (1) и начальной задачи (2), (3) определяются порядками старших производных дельта-функции, входящих в эти решения, и равны $(p+1)(\ell+1)$ и $pN+(p+1)(\ell+1)$ соответственно. Таким образом, наличие у функции $\mathrm{g}=g(t)$ нуля кратности ℓ в точке $t=0$ приводит к увеличению порядков сингулярности обобщенных решений рассматриваемых задач на величину, кратную ℓ.

Приложения

Пример 1. Пусть $\mathrm{Q}=[0;\,h]\times[0;\,h]\times[0;\,h]$, $h>0$. Рассмотрим граничную задачу

$$(\Delta-\alpha)u(t,x,y,z)+\beta\int_0^t(t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\tau,x,y,z)d\tau=f(t,x,y,z),\ t>0,\ (x,y,z)\in\mathrm{Q}; \tag{6}$$

$$u(t,x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\partial\mathrm{Q}}=0, \tag{7}$$

которая описывает низкочастотные электронные (ионные) магнитозвуковые колебания во внешнем магнитном поле [22]. Здесь $\alpha\neq 0$, $\beta>0$ – параметры, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Выбирая

$$E_1=\dot{H}^{L+2}(\mathrm{Q})=\left\{u(x,y,z)\in W_2^{L+2}(\mathrm{Q}):u(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\partial\mathrm{Q}}=0\right\},\ E_2=H^L(\mathrm{Q}),\ L\in\{0\}\cup\mathrm{N}$$

($H^0(\mathrm{Q}) \equiv L_2(\mathrm{Q})$ – пространство функций с квадратом, интегрируемым по Лебегу на Q), а также полагая $B = \Delta - \alpha$, $A = -\beta \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $g(t) = t$, сведем эту задачу к уравнению (1). Рассмотрим далее однородную задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in \mathrm{Q}} = 0.$$

Ее спектр $\sigma(\Delta)$ состоит из $\lambda_{k,m,n} = -\dfrac{\pi^2}{h^2}(k^2+m^2+n^2)$, $k,m,n \in \mathrm{N}$, т. е. за необходимостью всякое собственное число имеет вид $\lambda_{k,m,n} = -\dfrac{\pi^2}{h^2}s$, $s \in \mathrm{N}$. Кратность $d(\lambda_{k,m,n})$ собственного числа $\lambda_{k,m,n}$ равна количеству различных решений $(k,m,n) \in \mathrm{N}^3$ уравнения $k^2+m^2+n^2 = s$ при заданном $s \in \mathrm{N}$. Учитывая известную теоретико-числовую теорему о представлении натурального числа суммой квадратов целых чисел [23, с. 344; p. 279], можно получить точную формулу

$$d(\lambda_{k,m,n}) = \sum_{\substack{k\in \mathrm{N}\\ k^2<s}} \Big(\sum_{\substack{d\in \mathrm{N}\\ s-k^2 | d}} \chi_4(d) - \sum_{i\in \mathrm{N}} \delta_{s-k^2\, i^2} \Big),$$

где $\chi_4(d)$ – характер Дирихле по модулю 4 числа $d \in \mathrm{N}$, $\delta_{i\,j}$ – символ Кронекера. Система собственных функций рассматриваемой однородной граничной задачи, ортонормированная в смысле скалярного произведения пространства $H^L(\mathrm{Q})$, имеет вид

$$\varphi_{k,m,n}(x,y,z) = C_{k,m,n} \sin\frac{\pi k}{h}x \sin\frac{\pi m}{h}y \sin\frac{\pi n}{h}z, \quad k,m,n \in \mathrm{N}.$$

Здесь $C_{k,m,n} = \dfrac{2}{h}\sqrt{\dfrac{2}{h\mu_{k,m,n}}}$, $\mu_{k,m,n} = \sum\limits_{0\le|\alpha|\le L} \left(\dfrac{\pi}{h}\right)^{2|\alpha|} k^{2\alpha_1} m^{2\alpha_2} n^{2\alpha_3}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$, тогда $B = \Delta - \alpha$ – фредгольмов оператор. Более того, нетрудно показать, что его нули $\varphi_{k,m,n}(x,y,z)$, $k^2+m^2+n^2 = s$, не имеют A-присоединенных элементов. Тем самым, за достаточностью A является $(B,0)$-ограниченным [20, 21]. Функция $g(t) = t$ в точке $t = 0$ имеет нуль кратности $\ell = 1$. Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = -\dfrac{\pi^2}{h^2}s \in \sigma(\Delta)$, $s \in \mathrm{N}$, *тогда краевая задача (6), (7) имеет единственное обобщенное решение, и, если* $f(t,x,y,z) \in \mathrm{C}^2(t \ge 0; H^L(\mathrm{Q}))$, *то оно имеет вид*

$$\tilde{u}(t,x,y,z) = \sum_{k^2+m^2+n^2<s} \frac{1}{\lambda_{k,m,n}-\alpha}\Bigg[(f,\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} +$$

$$+ \frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\lambda_{k,m,n}-\alpha}} \int_0^t \mathrm{sh}\frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\lambda_{k,m,n}-\alpha}}(t-\tau)(f,\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}d\tau \Bigg] \varphi_{k,m,n}(x,y,z)\,\theta(t) +$$

$$+ \sum_{k^2+m^2+n^2>s} \frac{1}{\lambda_{k,m,n}-\alpha}\Bigg[(f,\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} -$$

$$- \frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\alpha-\lambda_{k,m,n}}} \int_0^t \sin\frac{\pi n\sqrt{\beta}}{h\sqrt{\alpha-\lambda_{k,m,n}}}(t-\tau)(f,\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}d\tau \Bigg] \varphi_{k,m,n}(x,y,z)\,\theta(t) +$$

$$- \frac{1}{\beta} \sum_{k^2+m^2+n^2=s} \frac{h^2}{\pi^2 n^2}\Bigg[(f_{tt},\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}\theta(t) + (f_t\big|_{t=0},\varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})}\delta(t) +$$

$$+ (f|_{t=0}, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} \delta'(t) \Bigg] \varphi_{k,m,n}(x,y,z) .$$

Замечание 7. Если в условиях этой теоремы $(f|_{t=0}, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} = (f_t|_{t=0}, \varphi_{k,m,n})_{H^L(\mathrm{Q})} = 0$, $k^2 + m^2 + n^2 = s$, то $\widetilde{u}(t,x,y,z) = u(t,x,y,z)\theta(t)$, где функция $\mathrm{u} = u(t,x,y,z)$ является решением граничной задачи (6), (7) в классе $\mathrm{C}(t \ge 0; \dot{H}^{L+2}(\mathrm{Q}))$.

Аналогичные задачи физики плазмы рассматривались ранее. Например, модель ионно-звуковых волн изучалась А.А. Замышляевой, в том числе с применением вычислительных методов [24], в виде начально-краевой задачи для дифференциального уравнения соболевского типа высокого порядка относительно обобщенного потенциала электрического поля [22, с. 37].

Пример 2. Реализацией начальной задачи (2), (3) является задача Коши–Дирихле вида

$$\alpha_1 u_{tt} - u_{ttxx} + a(\alpha_2 u_t - u_{txx}) + b(\alpha_3 u - u_{xx}) = f(t,x),\ t > 0,\ x \in [0;\, h]; \tag{8}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = u_0(x),\ u_t(t,x)|_{t=0} = u_1(x),\ x \in [0;\, h];\ u(t,0) = u(t,h) = 0,\ t \ge 0, \tag{9}$$

которая при $\alpha_2 = \alpha_1$ заменой $v(t,x) = u_t(t,x) + au(t,x)$ сводится к начально-краевой задаче

$$\alpha_1 v_t - v_{txx} + b\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}(\alpha_3 v(\tau,x) - v_{xx}(\tau,x))d\tau = f(t,x) - b(\alpha_3 u_0(x) - u_0''(x))\mathrm{e}^{-at},\ t > 0,\ x \in [0;\, h]; \tag{10}$$

$$v(t,x)|_{t=0} = u_1(x) + au_0(x),\ x \in [0;\, h];\ v(t,0) = v(t,h) = 0,\ t \ge 0. \tag{11}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b \in \mathrm{R}$ – ненулевые параметры. Уравнение (8) описывает продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и массовой нагрузки. В современной научной литературе это уравнение и его многомерные аналоги именуют *уравнениями Буссинеска–Лява* [25].

Задача Коши–Дирихле (10), (11) является частным случаем начальной задачи (2), (3) при

$$N = 1,\ B = \alpha_1 - \frac{d^2}{dx^2},\ A = -b\Big(\alpha_3 - \frac{d^2}{dx^2}\Big),\ g(t) = \mathrm{e}^{-at},$$

если пространствами E_1 и E_2 выбрать, например, $\dot{H}^{L+2}_{[0;h]}$ и $H^L_{[0;h]}$, $L \in \{0\} \cup \mathrm{N}$. Введем в рассмотрение собственные числа $\lambda_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{h^2}$, $n \in \mathrm{N}$, краевой задачи $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$, $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, и систему соответствующих им собственных функций

$$\varphi_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{h}x,\ C_n = \sqrt{\frac{2}{h\upsilon_n}},\ \upsilon_n = \sum_{k=0}^{L}\left(\frac{\pi n}{h}\right)^{2k},$$

ортонормированную в $H^L_{[0;h]}$. Пусть $\alpha_1 = \lambda_s$, $s \in \mathrm{N}$, тогда оператор B – фредгольмов, причем его нуль $\varphi_s(x) \in N(B)$ не имеет A-присоединенных элементов. Значит, оператор A спектрально ограничен относительно B и ∞ является устранимой особой точкой относительной резольвенты $(\mu B - A)^{-1}$. Функция $g(t) = \mathrm{e}^{-at}$ при $t = 0$ не обращается в нуль, т. е. $\ell = 0$. Сформулированное далее утверждение является следствием теоремы 6.

Следствие 2. *Пусть* $\alpha_1 = -\dfrac{\pi^2 s^2}{h^2}$, $s \in \mathrm{N}$, *тогда начально-краевая задача (10), (11) имеет единственное обобщенное решение, и, если* $f(t,x) \in \mathrm{C}^1(t \ge 0; H^L_{[0;h]})$, *то оно имеет вид:*

$$\widetilde{v}(t,x) = u_1(x) + au_0(x) + \sum_{n \ne s}\frac{1}{\alpha_1 - \lambda_n}\left[w_n(t) + \int_0^t r_n(t-\tau)w_n(\tau)d\tau\right]\varphi_n(x)\,\theta(t) +$$

$$+\frac{1}{b(\alpha_3 - \alpha_1)}\Big[\big(f_t + af - b(\alpha_3 - \alpha_1)(u_1 + au_0), \varphi_s\big)_{H^L_{[0;h]}}\theta(t) + \big(f|_{t=0} - b(\alpha_3 - \alpha_1)u_0, \varphi_s\big)_{H^L_{[0;h]}}\delta(t)\Big]\varphi_s(x),$$

где $w_n(t) = \left(\int_0^t f(\tau,x)d\tau - \frac{b}{a}(\alpha_3 - \lambda_n)\left(t(u_1 + au_0) + \frac{1}{a}(e^{-at} - 1)u_1\right), \varphi_n\right)_{H^L_{[0;h]}}$, $r_n(t)$ – *резольвента ядра* $\frac{b\gamma_n}{a}(e^{-at} - 1)$, $\gamma_n = \frac{\alpha_3 - \lambda_n}{\alpha_1 - \lambda_n}$, *которая определяется формулами*

$$r_n(t) = -\frac{2b\gamma_n}{\sqrt{4b\gamma_n - a^2}} e^{-\frac{a}{2}t} \sin\frac{\sqrt{4b\gamma_n - a^2}}{2} t \text{ при всех } n \in \mathrm{N} \text{ таких, что } 4b\gamma_n - a^2 > 0;$$

$$r_n(t) = -\frac{2b\gamma_n}{\sqrt{a^2 - 4b\gamma_n}} e^{-\frac{a}{2}t} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{a^2 - 4b\gamma_n}}{2} t \text{ при всех } n \in \mathrm{N} \text{ таких, что } 4b\gamma_n - a^2 < 0;$$

$$r_n(t) = -\frac{a^2}{4} e^{-\frac{a}{2}t} \text{ при всех } n \in \mathrm{N} \text{ таких, что } 4b\gamma_n - a^2 = 0.$$

Замечание 8. Если $f(t,x) \in \mathrm{C}^2(t \ge 0; H^L_{[0;h]})$ и

$$\left(f\big|_{t=0} - b(\alpha_1 - \alpha_3)u_0, \varphi_s\right)_{H^L_{[0;h]}} = \left(f'\big|_{t=0} - b(\alpha_1 - \alpha_3)u_1, \varphi_s\right)_{H^L_{[0;h]}} = 0,$$

то $\tilde{v}(t,x) = v(t,x)\theta(t)$, где функция $\mathrm{v} = v(t,x)$ представляет собой решение начально-краевой задачи (10), (11) в классе $\mathrm{C}^1(t \ge 0; \dot{H}^{L+2}_{[0;h]})$.

Вопросы однозначной разрешимости различных начально-краевых задач для уравнения (8) и его многомерных аналогов при $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_1 \in \sigma(\Delta)$ изучены в цикле работ А.А. Замышляевой и ее учеников. Случай $\alpha_2 \ne \alpha_1$, $\alpha_1 \in \sigma(\Delta)$, рассмотрен в [18]. Представленные в данной работе результаты исследования задачи Коши–Дирихле (8), (9) в интегро-дифференциальной форме (10), (11) согласуются с полученными ранее.

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 16-31-00291 мол_а.

Литература

1. Corduneanu, C. Integral Equations and Applications / C. Corduneanu. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 380 p.

2. Prüss, J. Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. – Basel; Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2012. – 366 p.

3. Kostić, M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. – Florida: CRC Press, 2015. – 484 p.

4. Гохберг, И.Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 508 с.

5. Lavrentiev, M.M. Operator Volterra Equations and Integral Geometry Problems / M.M. Lavrentiev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1998. – Vol. 6, № 4. – P. 353–359.

6. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 208 с.

7. Сапронов, И.В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И.В. Сапронов // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 11. – С. 45–55.

8. Kopachevsky, N.D. Linear Volterra Integro-Differential Second-Order Equations Unresolved with Respect to the Highest Derivative / N.D. Kopachevsky, E.V. Syomkina // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 4, № 4. – P. 64–87.

9. Favini, A. Degenerate Volterra equations in Banach spaces / A. Favini, H. Tanabe // Differential and Integral Equations. – 2001. – Vol. 14, № 5. – P. 613–640.

10. Lizama, C. Maximal Regularity for Degenerate Differential Equations with Infinite Delay in Periodic Vector-Valued Function Spaces / C. Lizama, R. Ponce // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2013. – Vol. 56, № 3. – P. 853–871.

11. Bu, S.Q. Solutions of Second Order Degenerate Integro-Differential Equations in Vector-Valued Function Spaces / S.Q. Bu, G. Cai // Science China Mathematics. – 2013. – Vol. 56, № 5. – P. 1059–1072.

12. Федоров, В.Е. О разрешимости эволюционных уравнений с памятью / В.Е. Федоров, О.А. Стахеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2014. – Вып. 36. – № 19(190). – С. 111–125.

13. Булатов, М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М.В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 330–335.

14. Чистяков, В.Ф. О некоторых свойствах систем интегральных уравнений Вольтерра IV рода с ядром типа свертки / В.Ф. Чистяков // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 1. – С. 113–118.

15. Сидоров, Н.А. Об одном классе уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах / Н.А. Сидоров // Сибирский математический журнал. – 1983. – Т. 21, № 2. – С. 202–203.

16. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 308–318.

17. Фалалеев, М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.

18. Орлов, С.С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах / С.С. Орлов. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с.

19. Орлов, С.С. О порядке сингулярности обобщенного решения интегрального уравнения Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах / С.С. Орлов // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 10. – С. 76–92.

20. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

21. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

22. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.

23. Айерлэнд, К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. – М.: Мир, 1987. – 416 с.

24. Zamyshlyaeva, A.A.Computational Experiment for One Mathematical Model of Ion-Acoustic Waves / A.A. Zamyshlyaeva, A.S. Muravyev // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. – 2015. – Vol. 8, № 2. – P. 127–132.

25. Zamyshlyaeva, A.A. Mathematical models based on Boussinesq–Love equation / A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov, O.N. Tsyplenkova // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, № 110. – P. 5477–5483.

Поступила в редакцию 11 февраля 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 52–63

DOI: 10.14529/mmph160305

DEGENERATE VOLTERRA EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE IN BANACH SPACES AND THEIR APPLICATIONS

S.S. Orlov
Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

The article is devoted to the problem of unique solvability of linear integral and integral-differential Volterra equations in Banach spaces with irreversible operator in the main part. Operator-valued kernel has a special form, $K(t, s) = g(t - s)A$, where $g = g(t)$ is a numeric function, and A is a linear operator. Abstract equations of this kind are very typical for applications. For the study of such equations it is possible to use structural stack theory of two linear operators, which has been developed by Professor G.A. Sviridyuk and his students. Another peculiarity of the studied problems is multiple zero of function $g = g(t)$ at the point $t = 0$. Fundamental operator-functions of considered integral and integral-differential operators in Banach spaces are constructed under the assumption of relative spectrally boundness of operator A with respect to degenerated main part of equations. On this basis, theorems of unique existence of solutions in the class of distributions with left-bounded support are proved. The dependence between the order of singularity of generalized solutions and multiplicity of zero of integral kernel at the initial point is ascertained. Also we have obtained conditions under which generalized solutions are equal to the classical solutions. Theorems formulated for abstract equations are applied to the study of significant initial boundary value problems arising in plasma physics and mathematical theory of elasticity.

Keywords: relative spectral boundedness of linear operator; distribution; fundamental operator-function.

References

1. Corduneanu C. *Integral Equations and Applications*. Cambridge, Cambridge University Press, 1991. 366 p. DOI: 10.1017/CBO9780511569395

2. Prüss J. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Basel, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, Springer, 2012, 366 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0499-8

3. Kostić M. *Abstract Volterra Integro-Differential Equations*. Florida, CRC Press, 2015, 484 p. DOI: 10.1201/b18463

4. Gohberg I.C., Kreĭn M.G. *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 24. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1970, 430 p.

5. Lavrentiev M.M. Operator Volterra Equations and Integral Geometry Problems. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1998, Vol. 6, no. 4, pp. 353–359. DOI: 10.1515/jiip.1998.6.4.353

6. Bukhgeim A.L. *Volterra Equations and Inverse Problems*. Utrecht, Tokyo, VSP, 1999, 204 p.

7. Sapronov I.V. The Volterra Equation with a Singularity in a Banach Space. *Rus. Math.* 2007, Vol. 51, Issue 11, pp. 44–54. DOI: 10.3103/S1066369X07110072

8. Kopachevsky N.D., Syomkina E.V. Linear Volterra Integro-Differential Second-Order Equations Unresolved with Respect to the Highest Derivative. *Eurasian Math. J.*, 2013, Vol. 4, no. 4, pp. 64–87.

9. Favini A., Tanabe H. Degenerate Volterra equations in Banach spaces. *Diff. Int. Eqs*, 2001, Vol. 14, no. 5, pp. 613–640.

10. Lizama C., Ponce R. Maximal Regularity for Degenerate Differential Equations with Infinite Delay in Periodic Vector-Valued Function Spaces. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 2013, Vol. 56, no. 3, pp. 853–871.

11. Bu S.Q., Cai G. Solutions of Second Order Degenerate Integro-Differential Equations in Vector-Valued Function Spaces. *Sci. China Math*, 2013, Vol. 56, no. 5, pp. 1059–1072. DOI: 10.1007/s11425-012-4491-y

12. Fedorov V.E., Stakheeva O.A. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*, 2014, Issue 36, no. 19(190), pp. 111–125. (in Russ.).

13. Bulatov M.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2002, Vol. 42, no. 3, pp. 330–335. (in Russ.).

14. Chistyakov V.F. On Some Properties of Systems of Volterra Integral Equations of the Fourth Kind with Kernel of Convolution Type. *Math. Notes*, 2006, Vol. 80, Issue 1, pp. 109–113. DOI: 10.1007/s11006-006-0114-7

15. Sidorov N.A. *Sibirskiy matematicheskiy jurnal*, 1983, Vol. 21, no. 2, pp. 202–203. (in Russ.).

16. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Obobshchennye resheniya vyrozhdennykh differentsial'nykh i integral'nykh uravneniy v banakhovykh prostranstvakh (Generalized Solutions of Degenerated Differential and Integral Equations in Banach Spaces). *Metod Funkciy Lyapunova v analize dinamiki sistem*, Novosibirsk, Nauka, 1988, pp. 308–318. (in Russ.).

17. Falaleev M.V. Fundamental Operator-Functions of Singular Differential Operators in Banach Spaces. *Sib. Math. J.*, 2000, Vol. 41, Issue 5, pp. 960–973. DOI: 10.1007/BF02674751

18. Orlov S. S. *Obobshchennye resheniya integro-differentsial'nykh uravneniy vysokikh poryadkov v banakhovykh prostranstvakh* [Generalized Solutions of Degenerate Differential and Integral Equations in Banach Spaces]. Irkutsk, ISU Publ., 2014, 149 p. (in Russ.).

19. Orlov S.S. *Izvestiya irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*, 2014, Vol. 10, pp. 76–92. (in Russ.).

20. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

21. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

22. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations]. Moscow, FizMatLit Publ., 2007, 736 p. (in Russ.).

23. Ireland K., Rosen M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 84. New York, Springer, 1982, 356 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-1779-2

24. Zamyshlyaeva A.A., Muravyev A.S. Computational Experiment for One Mathematical Model of Ion-Acoustic Waves. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 127–132. DOI: 10.14529/mmp150211

25. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N. Mathematical models based on Boussinesq–Love equation. *Appl. Math. Sci.*, 2014, Vol. 8, no. 110, pp. 5477–5483. DOI: 10.12988/ams.2014.47546

Received February 11, 2016

УДК 511.21; 519.2 DOI: 10.14529/mmph160306

СЕЧЕНИЯ ЧИСЛОВОЙ ПРИЗМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛИНОМАМИ БЕССЕЛЯ

М.С. Токмачев
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: mtokm@yandex.ru

Рассматривается числовая призма, полученная ранее автором при изучении моментов вероятностного распределения типа гиперболического косинуса. Определены целочисленные последовательности, являющиеся сечениями числовой призмы, классифицированные как коэффициенты в полиномах Бесселя. Опираясь на теоретические разработки, связанные с полиномами Бесселя, найдены и обоснованы зависимости и соотношения для ряда сечений числовой призмы. Полученные результаты также позволили связать последовательности с гипергеометрической функцией и модифицированной функцией Бесселя.

Ключевые слова: распределение типа гиперболического косинуса; числовая призма; сечения; числовые последовательности; полиномы Бесселя.

Введение

Основой данной работы служит множество чисел, которые структурированы в виде бесконечной числовой призмы. Рассматриваемое множество (числовая призма) – это упорядоченное объединение бесконечного количества непересекающихся числовых треугольников («пачка» треугольников), каждый последующий из которых зависит от предыдущего.

Рассматриваемое множество чисел возникло в задаче нахождения кумулянтов и моментов [1] нового трехпараметрического вероятностного распределения. Само же это авторское распределение, определяемое характеристической функцией

$$f(t)=\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{m}t-i\frac{\mu}{\beta}\operatorname{sh}\frac{\beta}{m}t\right)^{-m}, \text{ при } \mu,\beta,m\in\mathrm{R}\,;\ m>0\,,\ \beta\neq 0\,,\ i=\sqrt{-1}\,,$$

введено в научную терминологию как распределение «типа гиперболического косинуса». В указанном виде оно получено при решении задачи характеризации распределений условием постоянства регрессии квадратичной статистики на линейную статистику [2, 3]. Найденное распределение исследовано [4, 5] и является обобщением двухпараметрического вероятностного распределения, известного в литературе [6], как распределение Майкснера ($m=\beta$, $\frac{\mu}{\beta}\equiv\theta$), которое, в свою очередь, при $\mu=0$, $m=1$ также обобщает классическое однопараметрическое распределение гиперболического косинуса (секанса).

В [1] установлено, что кумулянты и моменты распределения типа гиперболического косинуса выражаются через семейство полиномов, коэффициенты которых удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$U(0;0,0)=1\,,\ U(0;k,j)=0 \text{ для любых } k,j\neq 0\,,$$
$$U(n+1;k,j)=U(n;k-1,j-1)+(j-1)U(n;k,j-1)+(j+1)U(n;k,j+1) \tag{1}$$

при $n=0,1,2,\ldots$; $j,k=1,2,\ldots$.

Именно это трехмерное целочисленное множество $\{U(n;k,j)\}$, формируемое согласно (1), и классифицируется как числовая призма. При фиксировании одного из аргументов этой призмы получаем распределения соответствующих чисел в одной плоскости, т.е. сечения призмы. Следуя традиции, полученные множества будем называть числовыми треугольниками. В [7] указано, что при фиксировании аргумента k соответствующие сечения содержат упорядоченные коэффициенты в разложениях степеней тангенса. Ранее для них найдены дифференциальные соотношения полиномов с этими коэффициентами. При фиксировании двух аргументов множества $\{U(n;k,j)\}$ приходим к одномерному случаю размещения (упорядочивания) чисел: получается числовая последовательность.

Из числовой призмы числовые последовательности можно получить различным образом. В частности, в [1, 7] представлены некоторые как ранее известные (тангенциальные числа $\{U(2n;1,0)\}$, обобщенные тангенциальные числа $\{U(n;1,n-4)\}$, секансные числа $\left\{\sum_{k=1}^{n} U(2n;k,0)\right\}$ и др.), так и новые последовательности. Например, (см. [7], *теорема* 1) сечение числовой призмы $\{U(n;k,n)\}$ является числовым треугольником Стирлинга, представляющим совокупность известных целочисленных последовательностей чисел Стирлинга первого рода

$$\{U(n;k,n)\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \text{ где } n,k = 0,1,2,\ldots,$$

а сечение вида $\{U(2n+1;k,3)\}$ в подавляющем большинстве состоит из неизвестных ранее последовательностей.

Одним из сечений числовой призмы является и числовой треугольник Бесселя. К функциям и полиномам Бесселя, давно ставших математической классикой, не иссякает интерес как к объекту изучения до настоящего времени (см., например, [8]). Изучение полиномов Бесселя, как правило, базируется на дифференциальных и интегральных соотношениях или свойствах и интерпретациях коэффициентов. Отличительной характеристикой данной работы является рассмотрение множества коэффициентов полиномов Бесселя в связи со структурой и соотношениями в числовой призме. Эта связь коэффициентов полиномов и элементов призмы позволяет по-новому, с других позиций изучать как свойства полиномов, так и свойства числовой призмы.

Основная часть

Рассмотрим группу последовательностей: коэффициенты при разложении функций вида $P_m(x)/\sqrt{(1-2x)^{2s+1}}$, где $P_m(x)$ – полиномы, показатели степени m,s – целые, неотрицательные. Некоторые из такого рода последовательностей приведены в электронной Энциклопедии целочисленных последовательностей (*OEIS*) [9]. Представим разложения для этих функций и их место в структуре числовой призмы, см. табл. 1.

Данные разложения замечательны тем, что они представляют коэффициенты в полиномах Бесселя. Согласно заданным в числовой призме последовательностям легко построить известный числовой треугольник Бесселя. Указанные в табл. 1 последовательности располагаются в треугольнике Бесселя по столбцам и являются 1-м, 2-м, 3-м и т.д. коэффициентами в полиномах Бесселя. Коэффициенты полинома Бесселя n-го порядка размещаются в соответствующей n-й строке числового треугольника. Сам треугольник Бесселя входит в рассматриваемую числовую призму как сечение $\{U(2n-j;n,j)\}$, где $n=0,1,2,\ldots$, $j=0,1,2,\ldots,n$. Начальные значения треугольника коэффициентов и их место в структуре числовой призмы см. в табл. 2.

Исходя из места коэффициентов в числовой призме, можно выписать полиномы Бесселя в общем виде, опираясь на эту структуру.

Отметим, что полиномами Бесселя называют [10] полиномы $y_n(x)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$x^2 y'' + (2x+2)y' - n(n+1)y = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

а также родственные им полиномы [11] $p_n(x) = x^n \cdot y_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, определяемые при $n \ge 1$ и удовлетворяющие рекуррентному дифференциальному соотношению

$$p_n''(x) - 2p_n'(x) + 2n\, p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 2,3,4,\ldots.$$

В явном виде соответствующие формулы для $y_n(x)$ и $p_n(x)$ такие:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!} x^k = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\frac{1}{x}} K_{-n-1/2}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

где $K_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода;

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!(k-1)!} x^k = (2n-3)!!x \; {}_1F_1(1-n; 2-2n; 2x), \tag{3}$$

где ${}_1F_1(a;b;z)$ – гипергеометрическая функция первого рода, $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Таблица 1

Разложения функций вида $P_m(x)/\sqrt{(1-2x)^{2s+1}}$

Функция, $f(x)$	Коэффициенты, $f^{(k)}(0)$ № в *OEIS*	Последовательность в призме
$\frac{1}{\sqrt{(1-2x)}}$	1,1,3,15,105,945,10395, … [*OEIS*: *A*001147]	$U(2n; n, 0)$, $n = 0,1,2,\ldots$; $U(2n-1; n, 1)$, $n = 1,2,3,\ldots$
$\frac{1+x}{\sqrt{(1-2x)^5}}$	1,6,45,420,4725,62370,945945, … [*OEIS*: *A*001879]	$U(2n-2; n, 2)$, $n = 2,3,4,\ldots$
$\frac{1+3x}{\sqrt{(1-2x)^7}}$	1,10,105,1260,17325,270270,4729725, … [*OEIS*: *A*000457]	$U(2n-3; n, 3)$, $n = 3,4,5,\ldots$
$\frac{1+6x+\frac{3}{2}x^2}{\sqrt{(1-2x)^9}}$	1,15,210,3150,51975,945945, … [*OEIS*: *A*001880]	$U(2n-4; n, 4)$, $n = 4,5,6,\ldots$
$\frac{1+10x+\frac{15}{2}x^2}{\sqrt{(1-2x)^{11}}}$	1,21,378,6930,135135,2837835, … [*OEIS*: *A*001881]	$U(2n-5; n, 5)$, $n = 5,6,7,\ldots$
$\frac{1+15x+\frac{45}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3}{\sqrt{(1-2x)^{13}}}$	1,28,630,13860,315315,7567560, … [*OEIS*: *A*038121]	$U(2n-6; n, 6)$, $n = 6,7,8,\ldots$
$\frac{1+21x+\frac{105}{2}x^2+\frac{33}{2}x^3}{\sqrt{(1-2x)^{15}}}$	1,36,990,25740,675675,18378360, … [*OEIS*: *A*130563]	$U(2n-7; n, 7)$, $n = 7,8,9,\ldots$
$\frac{1+28x+105x^2+70x^3+\frac{35}{8}x^4}{\sqrt{(1-2x)^{17}}}$	1,45,1485,45045,1351350,41351310, … [отсутствует в *OEIS*]	$U(2n-8; n, 8)$, $n = 8,9,10,\ldots$
$\frac{1+36x+189x^2+210x^3+\frac{315}{8}x^4}{\sqrt{(1-2x)^{19}}}$	1,55,2145,75075,2552550,87297210, … [отсутствует в *OEIS*]	$U(2n-9; n, 9)$, $n = 9,10,11,\ldots$
$\frac{1+45x+315x^2+525x^3+\frac{1575}{8}x^4+\frac{63}{8}x^5}{\sqrt{(1-2x)^{21}}}$	1,66,3003,120120,4594590,174594420,… [отсутствует в *OEIS*]	$U(2n-10; n, 10)$, $n = 10,11,12,\ldots$
…	…	…

Таблица 2

Сечение числовой призмы $\{U(2n-j;\,n,\,j)\}$ (числовой треугольник Бесселя)

n \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	$U(2n;\,n,0)$	$U(2n–1;n,1)$	$U(2n–2;n,2)$	$U(2n–3\,n,3)$	$U(2n–4;n,4)$	$U(2n–5;n,5)$	$U(2n–6;n,6)$	$U(2n–7;n,7)$	$U(2n–8;n,8)$	$U(2n–9;n,9)$
0	$U(0;\,0,0)=$ 1									
1	$U(2;\,1,0)=$ 1	$U(1;\,1,1)=$ 1								
2	$U(4;\,2,0)=$ 3	$U(3;\,2,1)=$ 3	$U(2;\,2,2)=$ 1							
3	$U(6;\,3,0)=$ 15	$U(5;\,3,1)=$ 15	$U(4;\,3,2)=$ 6	$U(3;\,3,3)=$ 1						
4	$U(8;\,4,0)=$ 105	$U(7;\,4,1)=$ 105	$U(6;\,4,2)=$ 45	$U(5;\,4,3)=$ 10	$U(4;\,4,4)=$ 1					
5	$U(10;\,5,0)=$ 945	$U(9;\,5,1)=$ 945	$U(8;\,5,2)=$ 420	$U(7;\,5,3)=$ 105	$U(6;\,5,4)=$ 15	$U(5;\,5,5)=$ 1				
6	$U(12;\,6,0)=$ 10395	$U(11;\,6,1)=$ 10395	$U(10;\,6,2)=$ 4725	$U(9;\,6,3)=$ 1260	$U(8;\,6,4)=$ 210	$U(7;\,6,5)=$ 21	$U(6;\,6,6)=$ 1			
7	$U(14;\,7,0)=$ 135135	$U(13;\,7,1)=$ 135135	$U(12;\,7,2)=$ 6237	$U(11;\,7,3)=$ 17325	$U(10;\,7,4)=$ 3150	$U(9;\,7,5)=$ 378	$U(8;\,7,6)=$ 28	$U(7;\,7,7)=$ 1		
8	$U(16;\,8,0)=$ 2027025	$U(15;\,8,1)=$ 2027025	$U(14;\,8,2)=$ 945945	$U(13;\,8,3)=$ 270270	$U(12;\,8,4)=$ 51975	$U(11;\,8,5)=$ 6930	$U(10;\,8,6)=$ 630	$U(9;\,8,7)=$ 36	$U(8;\,8,8)=$ 1	
9	$U(18;\,9,0)=$ 34459425	$U(17;\,9,1)=$ 34459425	$U(16;\,9,2)=$ 16216200	$U(15;\,9,3)=$ 4729725	$U(14;\,9,4)=$ 945945	$U(13;\,9,5)=$ 135135	$U(12;\,9,6)=$ 13860	$U(11;\,9,7)=$ 990	$U(10;\,9,8)=$ 45	$U(9;\,9,9)=$ 1

В частности, известную [*OEIS*: *A*001498] модифицированную сферическую функцию Бесселя второго рода $k_n(x)$, где $k_n(x)\equiv\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}K_{n+1/2}(x)$, можно представить в виде

$$k_n(x)=\frac{e^{-x}}{x^{n+2}}\,p_{n+1}(x).$$

При этом,

$$y_0(x)=1,\qquad p_1(x)=x,$$
$$y_1(x)=x+1,\qquad p_2(x)=x+x^2,$$
$$y_2(x)=3x^2+3x+1,\qquad p_3(x)=3x+3x^2+x^3,$$
$$y_3(x)=15x^3+15x^2+6x+1,\qquad p_4(x)=15x+15x^2+6x^3+x^4,$$
$$y_4(x)=105x^4+105x^3+45x^2+10x+1,\qquad p_5(x)=105x+105x^2+45x^3+10x^4+x^5,$$
$$\ldots\qquad\qquad\ldots$$

Оформим найденные соотношения связи полиномов Бесселя с числовой призмой в виде утверждений.

Теорема 1. Полиномы вида

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}U(2n-2-j;n-1,j)x^{j+1}\ \text{ при }\ n\ge 1;\quad y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}U(2n-j;n,j)x^{n-j}\ \text{ при }\ n\ge 0,$$

где $U(n;k,j)$ – элементы числовой призмы, определяемые (1), являются соответствующими полиномами Бесселя $p_n(x)$ и $y_n(x)$.

При этом, согласно (3), (2), оказывается, что

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}U(2n-2-j;n-1,j)x^{j+1}=(2n-3)!!x\ {}_1F_1(1-n;2-2n;2x),\ n=2,3,4,... \qquad (4)$$

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}U(2n-j;n,j)x^{n-j}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\frac{1}{x}}K_{-n-1/2}\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (5)$$

В соотношении (4) полагая x равными конкретным значениям (в частности, $x=1$, $x=-1$, $x=2$), приходим к равенствам для сумм элементов числовой призмы с использованием значений гипергеометрической функции первого рода ${}_1F_1(a;b;z)$.

Теорема 2. Для последовательностей числовой призмы $\{U(n;k,j)\}$ при $n\geq 2$ справедливы соотношения

$$\sum_{j=0}^{n-1}U(2n-2-j;n-1,j)=(2n-3)!!\ {}_1F_1(1-n;2-2n;2);$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^jU(2n-2-j;n-1,j)=(2n-3)!!\ {}_1F_1(1-n;2-2n;-2);$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}U(2n-2-j;n-1,j)2^j=(2n-3)!!\ {}_1F_1(1-n;2-2n;4).$$

При $x=1$, $x=2$, $x=0{,}5$ из соотношения (5) также следует связь элементов числовой призмы со значениями модифицированной функции Бесселя второго рода $K_n(x)$.

Теорема 3. Для последовательностей числовой призмы $\{U(n;k,j)\}$ при $n\geq 0$ справедливы соотношения

$$\sum_{j=0}^{n}U(2n-j;n,j)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}eK_{-n-1/2}(1);$$

$$\sum_{j=0}^{n}U(2n-j;n,j)2^{n-j}=\sqrt{\frac{e}{\pi}}K_{-n-1/2}\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$\sum_{j=0}^{n}U(2n-j;n,j)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}=\sqrt{\frac{4}{\pi}}e^2K_{-n-1/2}(2).$$

Приравнивая полиномы Бесселя $p_n(x)$ и $y_n(x)$, представленные в общеизвестном виде (3), (2) и в смысле теоремы 1, приходим к равенству коэффициентов полиномов при одинаковых степенях переменной.

Теорема 4. Для элементов числовой призмы $\{U(n;k,j)\}$ справедливы соотношения

$$U(2n-2-j;n-1,j)=\frac{(2n-2-j)!}{2^{n-j-1}j!(n-j-1)!}\ \text{при}\ n\geq 1,\ 0\leq j\leq n-1;$$

$$U(n+j;n,n-j)=\frac{(n+j)!}{2^j j!(n-j)!}\ \text{при}\ n\geq 0,\ 0\leq j\leq n.$$

Следовательно, элементы числовой призмы в рассматриваемых последовательностях можно выразить через отношение факториалов и степеней, связанных с индексными переменными.

Заключение

Множество $\{U(n;k,j)\}$, структурированное как числовая призма, заданное соотношениями (1), представляет большое разнообразие упорядоченных подмножеств с различными свойствами. Кроме ряда широко известных целочисленных последовательностей, частично представленных в [1, 7], в данной работе выделены последовательности, связанные с полиномами Бесселя, указаны их свойства именно, как объектов числовой призмы, представлены некоторые соотношения.

Отметим, что множество $\{U(n;k,j)\}$, обладая элементарностью построения своих элементов, содержит объекты более сложной структуры, связанные с функциональными преобразованиями, дифференцированием и интегрированием функций. Изучение этого множества позволяет выявить неизвестные ранее свойства и связи как уже известных математических объектов (конкретных последовательностей, полиномов, функций и др.), так и находить новые с последующими приложениями. В частности, в [7] указываются взаимно-обратные соотношения между секансными числами $\left\{E_j\right\} = \{1, 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, ...\}$ и тангенциальными числами $\left\{T_j\right\} = \{1, 2, 16, 272, 7936, 353792, ...\}$, $j = 1, 2, ...$; также в последовательности чередующихся секансных и тангенциальных чисел (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, …) найдены формулы связи, выражающие элементы последовательности через свои предыдущие. В [12] представлено множество нетривиальных интегралов от комбинаций некоторых функций (показательной, степенной, гиперболических косинуса или синуса и определенного вида полиномов-сомножителей), вычисляемых с помощью свойств $\{U(n;k,j)\}$. Указан ряд конкретных соотношений.

Безусловно, дальнейшее изучение структуры и свойств представленного числового множества $\{U(n;k,j)\}$ является перспективным в теоретическом и прикладном аспектах.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.949.2014/K.

Литература

1. Токмачев, М.С. Вычисление кумулянтов и моментов распределения Майкснера / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2013. – № 75, Т. 2. – С. 47–51.

2. Токмачев, М.С. Характеризация распределения типа гиперболического косинуса свойством постоянства регрессии / М.С. Токмачев // Деп. в ВИНИТИ 21.06.94. – № 1542 – В94. – 11 с.

3. Токмачев, М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 1995. – № 1. – С. 139–141.

4. Токмачев, М.С. Распределение типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев, А.М. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2001. – № 17. – С. 85–88.

5. Токмачев, М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2005. – № 34. – С. 96–99.

6. Lai, C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions / C.D. Lai // Aust. J. Stat. – 1982. – Vol. 24. – P. 221–233.

7. Токмачев, М.С. О числовых множествах и последовательностях в связи с распределением типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2015. – № 3(86), часть 2. – С. 35–39.

8. Kim, T. Identities involving Bessel polynomials arising from linear differential equations / T. Kim, D.S. Kim // arXiv:1602.04106 [math.NT], 2016.

9. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. (OEIS). http://www.research.att.com/~njas/sequences/ (дата обращения: 25.02.2016).

10. Krall, H.L. A New Class of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials / H.L. Krall, O. Fink // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 65. – P. 100–115.

11. Carlitz, L. A Note on the Bessel Polynomials / L. Carlitz // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24. – P. 151–162.

12. Токмачев, М.С. Вычисление интегралов от функций некоторого класса с вероятностной интерпретацией / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2014. – № 80. – С. 42–46.

Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 64–71

DOI: 10.14529/mmph160306

SECTIONS OF NUMERICAL PRISM AND BESSEL POLYNOMIALS

M.S. Tokmachev
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation
E-mail: mtokm@yandex.ru

The integer set previously obtained by the author in the study of moments and cumulants of three-parameter probability distribution of the hyperbolic cosine type is considered. This distribution is a generalization of Meixner two-parameter distribution. Moments of distribution at specific parameters vary as a certain class of polynomials with the corresponding coefficients. On the basis of the differential ratio of polynomials, recurrence formulas for their coefficients are received. The set of polynomial coefficients $\{U(n; k, j)\}$ that depends on three indices, and which is formed by these formulas, is the object of study.

The set is structured in the form of a numeric prism. When fixing one or two indices or functional connection between the indices, different sections of numerical prisms are obtained: number triangles or number sequences. Among the sections of the numerical prism are both known (Stirling triangle, tangential numbers, secant numbers, etc.) and new integer sets. Classic Bessel triangle enters into the considered numerical prism as a section $\{U(2n–j; n, j)\}$, where $n = 0, 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots n$. In this section the sequences classified as coefficients in the Bessel polynomials are determined. Based on the theoretical developments related to the Bessel polynomials, dependences and relations for a number of elements of numerical prism are found and justified. The obtained results also allow putting sequences through the values of hypergeometric functions and modified Bessel functions of the second kind. Considered set differs in the ease of construction, and its study has revealed previously unknown properties and relations of various mathematical objects (sequences, polynomials, functions, etc.), particularly related to the Bessel polynomials.

Keywords: hyperbolic cosine type distribution; numerical prism; sections; numerical sequences; Bessel polynomials.

References

1. Tokmachev M. S. Vychislenie kumulyantov i momentov raspredeleniya Mayksnera [Calculation of cumulants and moments of the distribution of Meixner]. *Bulletin of the Novgorod state University*, 2013, no. 75, Vol. 2. p. 47–51. (in Russ.).

2. Tokmachev M.S. Kharakterizatsiya raspredeleniya tipa giperbolicheskogo kosinusa svoystvom postoyanstva regressii [The characterization of the distribution type hyperbolic cosine property of the constancy of the regression]. *Dep. in VINITI* 21.06.94, no. 1542, B94, 11 p. (in Russ.).

3. Tokmachev M.S. Postoyanstvo regressii kvadratichnoy statistiki na lineynuyu statistiku [Constancy of regression of quadratic statistics with linear statistics]. *Bulletin of the Novgorod state University,* 1995, no. 1. pp. 139–141. (in Russ.).

4. Tokmachev M.S., Tokmachev A.M. Raspredelenie tipa giperbolicheskogo kosinusa [Distribution type hyperbolic cosine]. *Bulletin of the Novgorod state University*, 2001, no. 17, p. 85–88. (in Russ.).

5. Tokmachev M.S. Prikladnoy aspekt obobshchennogo raspredeleniya giperbolicheskogo kosinusa [Applied aspect of the generalized hyperbolic cosine distribution]. *Bulletin of the Novgorod state University*, 2005, no. 34, p. 96–99. (in Russ.).

6. Lai C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions. *Aust. J. Stat.*, 1982, Vol. 24, pp. 221–233. DOI: 10.1111/j.1467-842X.1982.tb00828.x

7. Tokmachev M.S. O chislovykh mnozhestvakh i posledovatel'nostyakh v svyazi s raspredeleniem tipa giperbolicheskogo kosinusa [On numerical sets and sequences in connection with the distribution

type hyperbolic cosine]. *Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences*, 2015, no. 3(86), part 2, pp. 35–39. (in Russ.).

8. Kim T., Kim D.S. Identities involving Bessel polynomials arising from linear differential equations, *arXiv:1602.04106 [math.NT]*, 2016.

9. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)*. http://www.research.att.com/~njas/sequences/ (accessed: 25.02.2016).

10. Krall H. L., Fink O.A New Class of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, Vol. 65, pp. 100–115. DOI: 10.2307/1990516

11. Carlitz L. A Note on the Bessel Polynomials. *Duke Math. J.*, 1957, Vol. 24, pp. 151–162. DOI: 10.1215/S0012-7094-57-02421-3

12. Tokmachev M.S. Vychislenie integralov ot funktsiy nekotorogo klassa s veroyatnostnoy interpretatsiey [Calculation of integrals of functions of some class with the probabilistic interpretation]. *Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences*, 2014, no. 80, pp. 42–46. (in Russ.).

Received March 18, 2016

Физика

УДК 538.915 DOI: 10.14529/mmph160307

НОВАЯ МОНОКЛИННАЯ ПОЛИМОРФНАЯ РАЗНОВИДНОСТЬ АЛМАЗА, ОБРАЗУЕМАЯ ИЗ ГРАФЕНОВЫХ СЛОЕВ

В.А. Грешняков, Е.А. Беленков
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: belenkov@csu.ru

Методами теории функционала плотности в приближении локальной плотности рассчитана геометрически оптимизированная структура и ряд свойств новой углеродной алмазоподобной фазы. Кристаллическая решетка фазы моноклинная ($P2_1/m$). Эта фаза может быть получена при сжатии графита в направлении [001]. В результате расчетов найдены значения следующих характеристик фазы: энергия сублимации – 8,67 эВ/атом; объемный модуль – 458 ГПа; твердость по Виккерсу – 90,9 ГПа; ширина запрещенной зоны – 4,5 эВ. Расчет трансформации графита в новую фазу при сжатии показал, что давление фазового перехода составляет 60 ГПа. Идентифицировать новую моноклинную фазу можно по рассчитанной порошковой рентгенограмме.

Ключевые слова: алмаз, алмазоподобная фаза; кристаллическая структура, электронная структура; компьютерное моделирование.

Введение

Алмазоподобные фазы – это полиморфные разновидности алмаза, структура которых образована четырехкоординированными атомами углерода [1–3]. Атомы в структуре алмазоподобных фаз могут находиться как в эквивалентных, так и в неэквивалентных кристаллографических позициях. Априори предполагается, что наиболее устойчивыми должны быть фазы с эквивалентными позициями атомов, потому что наиболее устойчивыми аллотропными модификациям и углерода являются гексагональный графит и кубический алмаз, в которых все атомы находятся в эквивалентных позициях. Однако это допущение не является строго доказанным. Возможно, существуют алмазоподобные фазы из неэквивалентных атомов, которые могут быть стабильными при нормальных условиях. Поэтому необходимы исследования устойчивости алмазоподобных фаз, состоящих из атомов, находящихся в различных кристаллографических позициях. Такие фазы можно получить по методике, описанной в работах [2, 3]. По данной методике алмазоподобные фазы модельно могут быть получены в результате сшивки или совмещения предшественников – 3*D*-графитов, графеновых слоев, нанотрубок или фуллереноподобных кластеров. Для получения фаз с неэквивалентными позициями атомов в качестве предшественников можно использовать любых предшественников, а не только те структуры, которые состоят из атомов в эквивалентных состояниях. В данной работе была исследована алмазоподобная фаза с четырьмя различными кристаллографическими позициями атомов, модельно получаемая в результате сшивки слоев гексагонального графена.

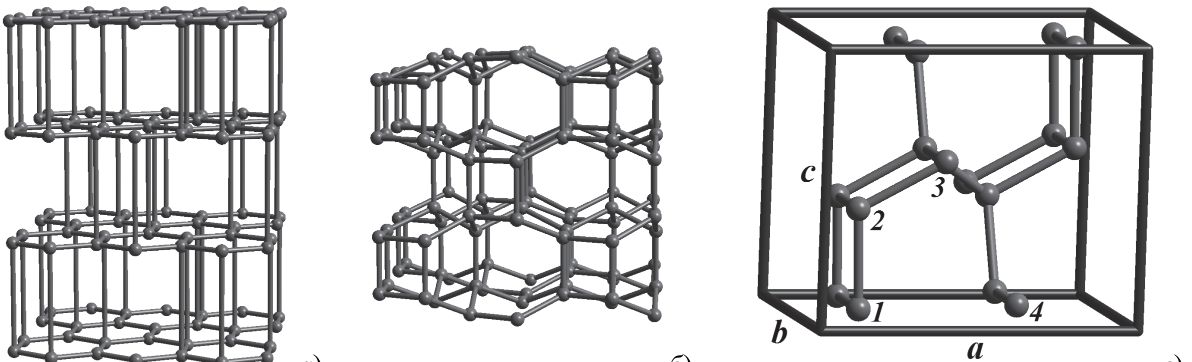
Методика расчетов

Кристаллическая структура моноклинной алмазоподобной фазы была рассчитана в результате геометрической оптимизации методом теории функционала плотности (density functional theory – DFT) [4] в приближении локальной плотности (local density approximation – LDA). Для расчетов был использован функционал обменно-корреляционной энергии Perdew–Zunger [5]. Влияние ионных остовов учитывалось через сохраняющие норму псевдопотенциалы. Для вычислений была использована сетка 12×12×12 из *k*-точек. Кинетическая энергия отсечки составляла 60 Ридберг. Оптимизация структур выполнялась при использовании метода сопряженных градиентов, пока величина сил, действующих на атом, и напряжений не станет меньше 0,15 мэВ/нм и 0,2 ГПа соответственно. Объемный модуль был определен по методике из работы [6]. Значения удельных объемов и разностных полных энергий, которые необходимы для определения объемного модуля, были рассчитаны методом DFT-LDA при относительном изменении объема фазы от 0 до 1,5 %. Твердость по Виккерсу рассчитана по эмпирической методике, описанной в работе [7]. Порошковая рентгеновская дифрактограмма алмазоподобной фазы рассчитана с помощью стандартной методики [8], а также при длине волны излучения 1,5405 Å (Cu-α), среднем размере кристаллитов в 50 нм и значениях координат атомов и параметров элементарной ячейки, найденных методом DFT-LDA.

Для оценки устойчивости и определения условий, при которых можно синтезировать новую моноклинную алмазоподобную фазу, были выполнены модельные исследования фазового перехода графита в данную алмазоподобную фазу по методике из работы [9].

Результаты и обсуждение

Модельно структура новой алмазоподобной фазы может быть сформирована в результате сшивки гексагональных графеновых слоев L_6. Сшивка слоев производится таким образом, чтобы атомы каждого графенового слоя образовывали одинаковое число связей с атомами двух близлежащих слоев (рис. 1, *а*). Кристаллическую структуру алмазоподобной фазы, образовавшуюся в процессе геометрической оптимизации, можно наблюдать на рис. 1, *б*.



а) *б*) *в*)

Рис. 1. *а*) сшивка гексагональных графеновых слоев L_6; *б*) фрагмент структуры моноклинной алмазопобной фазы, полученный в результате геометрической оптимизации сшитых графеновых слоев; *в*) элементарная ячейка алмазоподобной фазы (цифрами отмечены кристаллографически неэквивалентные атомные позиции).

Проведенный анализ показал, что решетка Браве новой алмазоподобной фазы примитивная моноклинная (*P*), в которой содержится 16 атомов углерода. Кристаллическая решетка фазы относится к пространственной группе симметрии $P2_1/m$. Значения параметров элементарной ячейки, вычисленные методом DFT-LDA, составляют a = 5,0201 Å, b = 4,3305 Å, c = 4,3752 Å и β = 89,53°. Координаты атомов в элементарной ячейке, выраженные в долях векторов элементарных трансляций, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Координаты атомов в элементарной ячейке моноклинной алмазоподобной фазы в долях длин векторов элементарных трансляций (*n* – номер атома; N_c – номер кристаллографически неэквивалентной атомной позиции)

n	N_c	*x*	*y*	*z*	*n*	N_c	*x*	*y*	*z*
1	1	0,12552	0,06681	0,06929	9	1	0,87442	0,56690	0,93072
2	2	0,11514	0,07347	0,42404	10	2	0,88486	0,57352	0,57594
3	3	0,38632	0,06732	0,59151	11	3	0,61367	0,56743	0,40847
4	4	0,62372	0,06534	0,08335	12	4	0,37623	0,56542	0,91663
5	1	0,12552	0,43326	0,06929	13	1	0,87442	0,93318	0,93072
6	2	0,11514	0,42661	0,42404	14	2	0,88486	0,92656	0,57594
7	3	0,38632	0,43276	0,59151	15	3	0,61367	0,93265	0,40847
8	4	0,62372	0,43474	0,08335	16	4	0,37623	0,93466	0,91663

Дальнейший анализ геометрически оптимизированной структуры моноклинной фазы показал, что в этой фазе атомы находятся в четырех кристаллографически неэквивалентных позициях (рис. 1, *в*). Кристаллографическая позиция каждого атома характеризуется длинами четырех межатомных ковалентных связей (L_i, где i = 1–4) и шестью углами между углерод-углеродными связями (β_{ij}, i = 1–4, $i < j \le 4$), значения которых приведены в табл. 2. Кольцевые параметры, соответствующие четырем кристаллографическим позициям, следующие: $Rng_1 = Rng_3 = 4^1 6^5$, $Rng_2 = 4^2 6^3 8^1$, $Rng_4 = 6^6$. Степень напряженности кристаллической решетки алмазоподобной фазы может быть охарактеризована двумя деформационными параметрами, которые являются суммой модулей отклонений длин связей (*Str*) и углов между связями (*Def*) от соответствующих характеристик кубического алмаза [10, 11]. Поскольку в элементарной ячейке фазы имеется четыре неэквивалентных атомных позиции, то общие деформационные параметры определяются средним от деформационных параметров для этих атомных позиций. Следовательно, *Str* составляет 0,093 Å, тогда как *Def* равен 39,8°.

Таблица 2

Структурные характеристики моноклинной алмазоподобной фазы: длины связей (L_i) и углы между связями (β_{ij}).

N_c	L_1, Å	L_2, Å	L_3, Å	L_4, Å	β_{12}, °	β_{13}, °	β_{14}, °	β_{23}, °	β_{24}, °	β_{34}, °
1	1,5869	1,5528	1,5179	1,5309	88,94	112,41	111,95	112,65	117,63	111,45
2	1,5293	1,5528	1,5516	1,4732	91,06	90,98	115,59	116,70	117,56	117,90
3	1,5825	1,5516	1,5346	1,5063	89,02	111,99	112,78	114,95	114,80	111,53
4	1,5997	1,5346	1,5527	1,5309	111,99	111,37	111,95	106,18	106,56	108,48

Расчеты, выполненные в данной работе, показали, что моноклинная фаза обладает следующими структурными, энергетическими и механическими характеристиками: плотность (ρ) составляет 3,355 г/см^3; атомарный объем (V) – 5,944 Å^3; энергия сублимации (E_{sub}) – 8,67 эВ/атом; модуль объемной упругости (B_0) – 458 ГПа; твердость по Виккерсу (H_V) – 90,9 ГПа. Рассчитанные характеристики были сопоставлены с аналогичными величинами, рассчитанными таким же методом DFT-LDA, для кубического алмаза. Вычисленные значения структурных параметров и свойств кубического алмаза (ρ = 3,546 г/см^3; атомарный объем (V) – 5,625 Å^3; E_{sub} = 8,96 эВ/атом; B_0 = 538 ГПа; H_V = 94.7 ГПа) хорошо соответствуют экспериментальным величинам [12], что свидетельствует об адекватности использованной методики расчета. Значения рассчитанных свойств новой алмазоподобной фазы меньше значений соответствующих свойств кубического алмаза на величину, находящуюся в диапазоне от 3,2 до 14,9 %.

Свойства электронной системы моноклинной фазы были исследованы в результате расчетов зонной структуры и плотности электронных состояний. Зонная структура алмазоподобной фазы продемонстрирована на рис. 2, *а*. Изменение энергий электронов исследовано на десяти интервалах для восьми характерных точек в зоне Бриллюэна: ГB, BD, DZ, ZГ, ГY, YC, CZ, ZE, EA и AГ. Минимальная разница в значениях энергий электронов вершины валентной зоны и дна зоны проводимости наблюдается в центре зоны Бриллюэна (Г) и составляет 4,51 эВ. На рис. 2, *б* приведена расчетная плотность электронных состояний (*density of states* – DOS) моноклинной алмазоподобной фазы. Значение ширины запрещенной зоны, определенное по DOS-картине, составляет 4,56 эВ. Поскольку ширина запрещенной зоны кубического алмаза, вычисленная в работе [10] по аналогичной методике, составила 5,7 эВ (что близко к экспериментальному значению 5,48 эВ [12]), то можно утверждать, что исследуемая в данной работе углеродная алмазоподобная фаза является широкозонным полупроводником с прямой запрещенной зоной.

Модельная порошковая рентгенограмма моноклинной алмазоподобной фазы (рис. 3) была рассчитана по структурным параметрам, которые были найдены в результате расчетов методом DFT-LDA. По расположению главных дифракционных пиков рентгенограмма новой фазы достаточно сильно отличается от экспериментальных рентгенограмм гексагонального графита, кубического и гексагонального алмазов, однако ее вид близок к суперпозиции рентгенограмм гексагонального алмаза и графита. Поэтому о присутствии моноклинной фазы в синтезированных углеродных материалах достаточно точно можно судить по наличию на рентгенограмме двух дифракционных максимумов малой интенсивности: I_{-101} = 13,4 % (2θ = 29,0°) и $I_{-202} + I_{2-21}$ = 21 % (2θ = 60,1°).

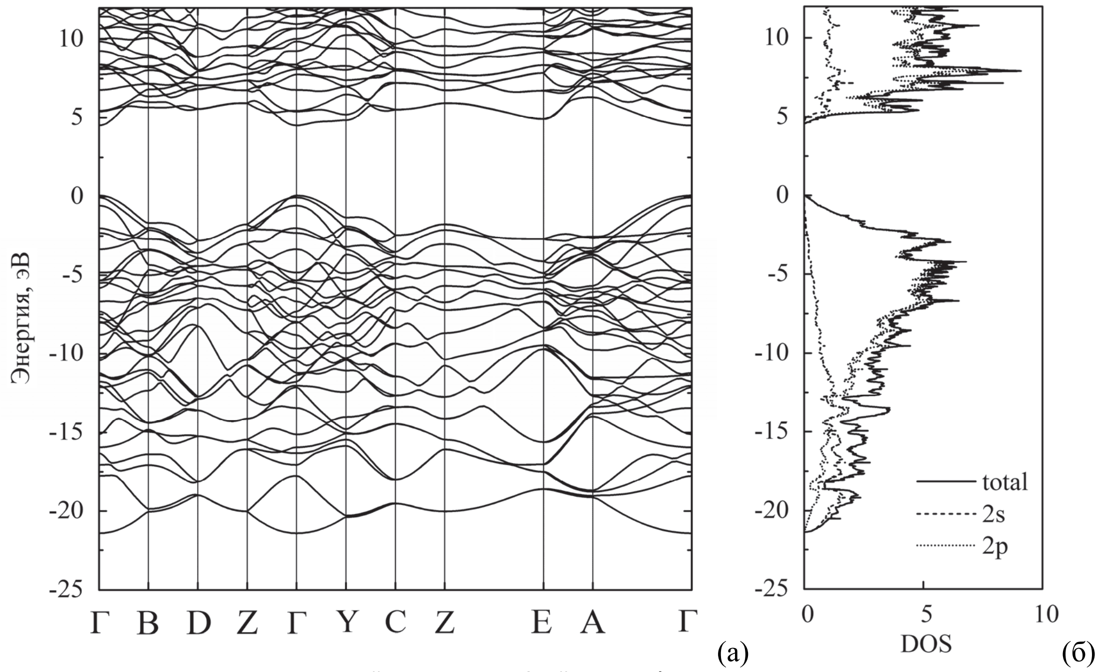


Рис. 2. ***а*) зонная структура моноклинной алмазоподобной фазы, *б*) полная и парциальные плотности электронных состояний (нулевое значение энергии на графиках соответствует энергии Ферми).**

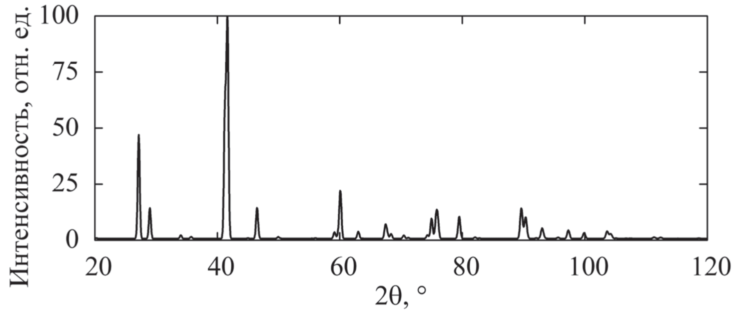
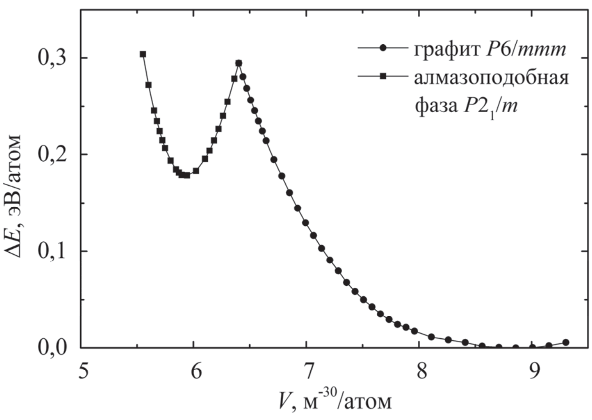


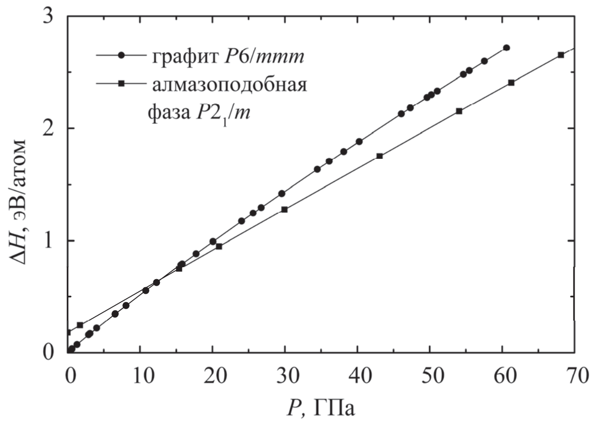
Рис. 3. Порошковая рентгенограмма моноклинной алмазоподобной фазы.

Графики изменения физических величин в процессе трансформации графита в новую алмазоподобную фазу приведены на рис. 4. Используя график зависимости полной энергии (E) от атомарного объема (V) графита и моноклинной алмазоподобной фазы (рис. 4, *а*), можно определить высоту энергетического барьера (Δ), который необходимо преодолеть для структурного преобразования графита в алмазоподобную фазу (Δ = 0,38 эВ/атом). Атомарный объем графита в точке фазового перехода составляет 6,40 $Å^3$/атом при параметре элементарной ячейки графита c = 4,861 Å. По значениям V и E можно найти давление, при котором происходит фазовый переход. Давление было рассчитано по следующей формуле: $P = -\,dE/dV$. Структурное преобразование графита в алмазоподобную фазу представляет собой фазовый переход первого рода, при котором происходит скачкообразное увеличение плотности на 11,8 % при 60 ГПа.

Кроме того, для определения количества энергии, которое выделится или поглотится в результате фазового перехода графита в алмазоподобную фазу, была рассчитана разность их энтальпий ($\Delta H = H_{monoclinic} - H_{graphite}$). Расчет энтальпии производился из соотношения $H = E + PV_{\text{at}}$. Так как энтальпия определяется с точностью до константы, то значения энтальпии фазы рассчитывались относительно энтальпии графита, вычисленной при нулевом давлении. На рис. 4, *б* изображены графики энтальпии углеродных фаз в зависимости от давления в пределах от 0 до 70 ГПа. Расчеты показали, что структурный переход будет сопровождаться выделением энергии, величина которой при давлении фазового превращения составляет 0,34 эВ/атом.



а)



б)

Рис. 4. Графики зависимостей термодинамических потенциалов от переменных для графита и моноклинной алмазоподобной фазы: *а*) разностной полной энергии от атомарного объема, *б*) энтальпии от давления.

Заключение

Таким образом, в данной работе рассчитаны геометрически оптимизированная структура и некоторые свойства новой углеродной алмазоподобной фазы. Кроме того, проведены расчеты фазового перехода гексагонального графита в моноклинную алмазоподобную фазу. Установлено, что изученная алмазоподобная фаза должна быть достаточно устойчивой, так как величина потенциально барьера, отделяющего структурные состояния, соответствующие графиту и этой фазе, составляет 0,12 эВ/атом, что примерно в три раза энергии тепловых колебаний при нормальных условиях. Экспериментальное получение этой фазы возможно в результате сжатия гексагонального графита при давлении ~ 60 ГПа.

Ряд свойств новой алмазоподобной фазы по значениям близок к свойствам кубического алмаза. Так, плотность, энергия сублимации и твердость по Виккерсу моноклинной фазы не более чем на 5,4 % уступают значениям соответствующих характеристик алмаза. Значения ширины запрещенной зоны и модуля объемной упругости новой фазы меньше значений этих характеристик для кубического алмаза на 15–21 %. Энергетические и механические свойства фазы, исследованной в данной работе, превосходят свойства большинства алмазоподобных фаз, состоящих из атомов в эквивалентных кристаллографических позициях [10, 11, 13, 14], что указывает на высокую вероятность ее синтеза. Экспериментально идентифицировать моноклинную алмазоподобную фазу методом рентгеноструктурного анализа можно будет только по вторичным дифракционным максимумам низкой интенсивности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-33-00030 мол_а.

Литература

1. Грешняков, В.А. Кристаллическая структура и свойства углеродных алмазоподобных фаз / В.А. Грешняков, Е.А. Беленков, В.М. Березин. – Челябинск: ЮУрГУ, 2012. – 150 с.

2. Belenkov, E.A. Classification schemes of carbon phases and nanostructures / E.A. Belenkov, V.A. Greshnyakov // New Carbon Materials. – 2013. – Vol. 28, no. 4. – P. 273–283. DOI: 10.1016/S1872-5805(13)60081-5

3. Беленков, Е.А. Классификация структурных разновидностей углерода / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ФТТ. – 2013. – Т. 55, № 8. – С. 1640–1650. DOI: 10.1134/S1063783413080039

4. Hohenberg, P. Inhomogeneous electron gas / P. Hohenberg, W. Kohn // Phys. Rev. – 1964. – Vol. 136, no. 3B. – P. 864–871. DOI: 10.1103/PhysRev.136.B864

5. Perdew, J.P. Self-interaction correction to density-functional approximations for many-electron systems / J.P. Perdew, A. Zunger // Phys. Rev. B. – 1981. – Vol. 23, no. 10. – P. 5048–5079. DOI: 10.1103/PhysRevB.23.5048

6. Грешняков, В.А. Методика расчета модуля объемной упругости / В.А. Грешняков, Е.А. Беленков // Известия вузов. Физика. – 2014. – Т. 57, № 6. – С. 24–29. DOI: 10.1007/s11182-014-0297-4

7. Hardness of covalent crystals / F. Gao, J. He, E. Wu *et al.* // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91, no. 1. – P. 015502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.015502

8. Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия / Я.С. Уманский, Ю.А. Скаков, А.Н. Иванов, Л.Н. Расторгуев. – М.: Металлургия, 1982. – 632 с.

9. Yin, M.T. Theory of static structural properties, crystal stability, and phase transformations: Application to Si and Ge / M.T. Yin, M.L. Cohen // Phys. Rev. B. – 1982. – Vol. 26, no. 10. – P. 5668–5687. DOI: 10.1103/PhysRevB.26.5668

10. Belenkov, E.A. Novel carbon diamond-like phases LA5, LA7 and LA8 / E.A. Belenkov, M.M. Brzhezinskaya, V.A. Greshnyakov // Diam. Relat. Mater. – 2014. – Vol. 50. – P. 9–14. DOI: 10.1016/j.diamond.2014.08.012

11. Беленков, Е.А. Алмазоподобные фазы, получаемые из графеновых слоев / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ФТТ. – 2015. – Т. 57, № 1. – С. 192–199. DOI: 10.1134/S1063783415010047

12. Pierson, H.O. Handbook of carbon, graphite, diamond, and fullerenes: properties, processing, and application / H.O. Pierson. – Park Ridge: Noyes, 1993. – 402 p.

13. Беленков, Е.А. Алмазоподобные фазы, получаемые из нанотрубок и трехмерных графитов / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ФТТ. – 2015. – Т. 57, № 6. – С. 1229–1239. DOI: 10.1134/S1063783415060049

14. Беленков, Е.А. Алмазоподобные фазы, получаемые из фуллереноподобных кластеров / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ФТТ. – 2015. – Т. 57, № 11. – С. 2262–2271. DOI: 10.1134/S1063783415110062

Поступила в редакцию 15 апреля 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics" 2016, vol. 8, no. 3, pp. 72–78

DOI: 10.14529/mmph160307

NEW MONOCLINIC POLYMORPHIC VARIETY OF DIAMOND FORMED OF GRAPHENE LAYERS

V.A. Greshnyakov, E.A. Belenkov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: belenkov@csu.ru

Using the density functional theory method, geometrically optimized structure and some properties of a new carbon diamond-like phase are calculated in the local density approximation. The phase crystalline lattice is monoclinic ($P2_1/m$). This phase can be obtained by compressing the graphite in the direction of [001]. As a result of calculations, values of the following characteristics of the phase have been determined: the sublimation energy is 8,67 eV/atom; the volume modulus is equal to 458 GPa; the Vickers hardness is 90,9 GPa; the band gap is 4,5 eV. The calculation of graphite transformation into the monoclinic phase under compression has shown that the pressure of phase transition is 60 GPa. The new diamond-like phase can be identified by a calculated X-ray powder diffraction pattern.

Keywords: diamond; diamond-like phase; crystal structure; electronic structure; computer simulation.

References

1. Greshnyakov V.A., Belenkov E.A., Berezin V.M. *Kristallicheskaya struktura i svoyistva uglerodnikh almazopodobnikh faz* [Crystal structure and properties of diamond-like carbon phases]. Chelyabinsk: South Ural State University Publ., 2012, 150 p. (in Russ.)

2. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Classification schemes of carbon phases and nanostructures. *New Carbon Materials*, 2013, Vol. 28, no. 4, pp. 273–283. DOI: 10.1016/S1872-5805(13)60081-5

3. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Classification of structural modifications of carbon. *Phys. Solid State*, 2013, Vol. 55, no. 8, pp. 1754–1764. DOI: 10.1134/S1063783413080039

4. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogeneous electron gas. *Phys. Rev.*, 1964, Vol. 136, no. 3B, pp. 864–871. DOI: 10.1103/PhysRev.136.B864

5. Perdew J.P., Zunger A. Self-interaction correction to density-functional approximations for many-electron systems. *Phys. Rev. B*, 1981, Vol. 23, no. 10, pp. 5048–5079. DOI: 10.1103/PhysRevB.23.5048

6. Greshnyakov V.A., Belenkov E.A. Technique for calculating the bulk modulus. *Russ. Phys. J.,* 2014, Vol. 57, no. 6, pp. 731–737. DOI: 10.1007/s11182-014-0297-4

7. Gao F., He J., Wu E., Liu S., Yu D., Li D., Zhang S., Tian Y. Hardness of covalent crystals. *Phys. Rev. Lett.,* 2003, Vol. 91, no. 1, pp. 015502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.015502

8. Umanskii Ya.S., Skakov Yu.A., Ivanov A.N., Rastorguev L.N. *Kristallografiya, rentgenografiya i elektronnaya mikroskopiya* [Crystallography, X-ray analysis and electron microscopy]. Moscow: Metallurgiya Publ., 1982, 632 p. (in Russ.)

9. Yin M.T., Cohen M.L. Theory of static structural properties, crystal stability, and phase transformations: Application to Si and Ge. *Phys. Rev. B.*, 1982, Vol. 26, no. 10, pp. 5668–5687. DOI: 10.1103/PhysRevB.26.5668

10. Belenkov E.A., Brzhezinskaya M.M., Greshnyakov V.A. Novel carbon diamond-like phases LA5, LA7 and LA8. *Diam. Relat. Mater.*, 2014, Vol. 50, pp. 9–14. DOI: 10.1016/j.diamond.2014.08.012

11. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Diamond-like phases prepared from graphene layers. *Phys. Solid State*, 2015, Vol. 57, no 1, pp. 205–212. DOI: 10.1134/S1063783415010047

12. Pierson H.O. *Handbook of carbon, graphite, diamond, and fullerenes: properties, processing, and application*. Park Ridge: Noyes, 1993, 402 p.

13. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Diamond-like phases obtained from nanotubes and three-dimensional graphites. *Phys. Solid State*, 2015, Vol. 57, no. 6, pp. 1253–1263. DOI: 10.1134/S1063783415060049

14. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Diamond-like phases formed from fullerene-like clusters. *Phys. Solid State*, 2015, Vol. 57, no. 11, pp. 2331–2341. DOI: 10.1134/S1063783415110062

Received April 15, 2016

УДК 533.951 DOI: 10.14529/mmph160308

ДИНАМИКА ЗАХВАТА И ПОСЛЕДУЮЩЕГО СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Г.С. Мкртичян
Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: hay-13@mail.ru

Рассмотрена и исследована динамика заряженных частиц при их серфинге на электромагнитных волнах в космической плазме. С помощью численных расчетов рассмотрены траектории заряженных частиц на фазовой плоскости, захват частиц волной в эффективную потенциальную яму с последующим сильно релятивистским ускорением. Учитывалось возможное циклотронное вращение частиц до их захвата волной. Установлено, что на фазовой плоскости траектория захваченных частиц имеет особую точку типа устойчивый фокус, а поведение траектории соответствует движению в достаточно сложном нелинейном, нестационарном эффективном потенциале. Получены асимптотики основных характеристик ускоренных частиц. Указана причина возникновения наблюдаемых вариаций потоков космических лучей с реализацией механизма серфотронного ускорения частиц электромагнитными волнами в сравнительно спокойной космической плазме.

Ключевые слова: захват; черенковский резонанс; траектории заряженных частиц; структура фазовой плоскости; устойчивый фокус; потенциальная яма; серфинг заряженных частиц; космическая плазма.

Введение

Серфотронное ускорение заряженных частиц – это их ускорение плазменной волной в направлении вдоль фронта волны, которое обусловлено присутствием стационарного магнитного поля [1]. Серфинг заряженных частиц на электромагнитных волнах в космической плазме может быть одним из главных механизмов формирования потоков ультрарелятивистских частиц (см., например, работы [2–14]). Необходимые условия реализации серфинга заряженных частиц в магнитоактивной космической плазме следующие.

1. Фазовая скорость электромагнитной волны в плазме должна быть меньше скорости света в вакууме и тогда возможен черенковский резонанс при взаимодействии волна-частица.

2. Амплитуда волны должна быть больше некоторого порогового значения, которое сравнительно невелико и можно пренебречь нелинейностью плазмы. При выполнении этого условия и при наличии внешнего магнитного поля возникает эффективный потенциал. Он удерживает частицу в ускоряющей фазе поля электромагнитной волны.

3. В режим ускорения захват частиц происходит для диапазона благоприятных фаз волны на траектории ускоряемой частицы. Этот диапазон может быть достаточно широким. Во время захвата скорость заряженных частиц в направлении распространения волны должна быть весьма близка к фазовой скорости волны.

В данной работе приведены результаты численных расчетов захвата слаборелятивистских электронов и их последующего сильного серфотронного ускорения в магнитоактивной космической плазме при черенковском резонансе с электромагнитных волн, которые распространяются поперек внешнего магнитного поля. Задача сведена к численному решению нелинейного, нестационарного уравнения второго порядка для фазы одной из волн на траектории частицы. Численные расчеты показали, что имеется достаточно широкая область благоприятных начальных фаз волн для реализации серфинга заряженных частиц на электромагнитных волнах. Для захваченных частиц исследуется пространственно-временная картина фазовой плоскости для нелинейного уравнения. Численные расчеты показали, что при сильном ускорении заряженных частиц на фазовой плоскости траектория изображающей точки по спирали приближается к особой точке типа устойчивый фокус. Заряженные ускоряемые частицы накапливаются на дне эффективной потенциальной ямы. После пересечения волн эти траектории раскручиваются, удаляясь от фокуса. После вылета из эффективной потенциальной ямы амплитуда электрического поля волн становится ниже порогового значения (для реализации серфинга) и наблюдается циклотронное вращение частиц во внешнем магнитном поле.

Результаты численных расчетов

Пусть электромагнитная волна *p*-поляризации распространяется поперек внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. Рассмотрим сильнорелятивистское ускорение заряженных частиц (электронов) этой волной.

Механизм серфотронного ускорения связан с черенковским резонансом при взаимодействии волна-частица. Показатель преломления плазмы $N = ck/\omega$ на частоте волны ω определяется выражением $N^2 = \varepsilon_\perp - \left(\varepsilon_c^2/\varepsilon_\perp\right) = 1 - \left[\upsilon(1-\upsilon)\right]/\left(1-u^2-\upsilon\right)$, где k – волновой вектор. Здесь $\varepsilon_\perp, \varepsilon_c$ компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы. Внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z: $\boldsymbol{H}_0 = H_0 e_z$. Захват в режим серфинга происходит для амплитуд волны выше некоторого порогового значения, т.е. для $\sigma > \sigma_c$, где $\sigma = eE/mc\omega$ и $\sigma_c = u\gamma_p = u/\left(1-\beta_p^2\right)^{1/2}, \beta_p = \omega/kc$. Безразмерные параметры данной задачи: $\tau = \omega t$ – безразмерное время, $u = \omega_{He}/\omega, \upsilon = \left(\omega_{pe}/\omega\right)^2, \omega_{He}$ – гирочастота нерелятивистских электронов плазмы, $\omega_{pe} = \left(4\pi e^2 n_0/m\right)^{1/2}$ – электронная ленгмюровская частота. При поперечном распространении волна *p*-поляризации имеет компоненты полей E_x, E_y, H_z. Пусть у волнового спектра несущая частота $\omega_0 = \omega(k_0)$. Для лоренцовского спектра волн в пакете основная компонента электрического поля имеет вид:

$$E_x(x,t) = \left\{E_m/\left[1+\zeta^2/L^2\right]\right\}\cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right),$$

где $\zeta = x - \upsilon_g(k_0)t, L = 1/k_p$ – полуширина локализованного волнового пакета, движущегося с групповой скоростью $\upsilon_g(k_0)$, которая обычно мала по сравнению с фазовой скоростью пакета на несущей частоте ω_0/k_0. Аналогичным образом находятся и другие компоненты полей пакета E_y, H_z. Характерное время пересечения захваченным зарядом волнового пакета имеет порядок $\delta t \sim 2L/\upsilon_p$ (или в безразмерном времени имеем $\delta t \sim 2Lk_0$). За это время центр волнового пакета сместится на расстояние $\delta x \sim 2L\left(\upsilon_g/\upsilon_p\right) \ll 2L$. Расчеты показали, что сильное (ультрарелятивистское) ускорение захваченных зарядов имеет место в случае достаточно большого времени удержания частиц пакетом в ускоряющей фазе поля, т.е. при $\tau_1 \ge \left(10^4 \div 10^6\right)$, когда $Lk_0 = \rho \ge \left(10^4 \div 10^6\right)$, и это обеспечивает ультрарелятивистское ускорение зарядов пространственно локализованным волновым пакетом.

Из численных расчетов следует, что можно пренебречь вихревыми компонентами волновых полей E_y, H_z и для фазы пакета на несущей частоте $\psi_0(\tau) = \omega_0 t - k_0 x$ использовать следующее нелинейное уравнение [12–13]

$$\gamma\beta_{po} d^2\psi_0/d\tau^2 - \left(1-\beta_x^2\right)\cdot\left(eE_x/mc\omega_0\right) - u_0\beta_y = 0, (1) \qquad (1)$$

где $\beta_{po} = \omega_0/ck_0, \gamma = \left(1+h^2+r_0^2\right)^{0,5}/\left(1-\beta_x^2\right)^{0,5}, r_0 = \gamma(0)\beta_y(0)$ – начальный импульс частицы вдоль волнового фронта и $J = \gamma\beta_y y + u_0\beta_{po}\left(\psi_0 - \tau\right)$ – интеграл движения. Имеется и второй интеграл движения $\gamma\beta_z = \mathrm{const} \equiv h$. Кроме того, из формулы для фазы волнового пакета следует выражение для скорости частицы в направлении распространения пакета $\beta_x = \beta_{po}\left[1 - d\psi_0 / d\tau\right]$. Нелинейное, нестационарное дифференциальное уравнение второго порядка (1) решалось численно для следующих значений исходных параметров задачи $u = 0{,}31, \beta_{po} = 0{,}9,\quad h = 0{,}88, r_0 = 0{,}49,$ $\rho = 3{,}5 \cdot 10^4, \sigma = 1{,}3\sigma_c$.

Согласно численным расчетам при ускорении захваченной частицы ее релятивистский фактор и поперечные к внешнему магнитному полю компоненты импульса $\gamma\beta_y, \gamma\beta_x$ возрастают пропорционально времени удержания заряда волнами в эффективной потенциальной яме. В области волнового пакета, где амплитуда электрического поля выше порогового значения, а скорость заряда в направлении распространения волнового пакета соответствует реализации черенковского резонанса $\beta_x \approx \beta_{po}$, имеют место захват и последующее сильное ультрарелятивистское ускорение частиц локализованным волновым пакетом.

В качестве примера приведем результаты расчетов для следующего варианта выбора начальной фазы пакета на несущей частоте $\psi_c(0) = 2\pi \cdot 6879 + 2$ при слаборелятивистской начальной энергии заряженной частицы, находящейся на задней стороне волнового пакета. Захват частицы в режим сильного серфотронного ускорения происходит сразу при данном значении начальной фазы.

Захват электронов в режим серфинга зависит от начальной фазы. В общем случае эта зависимость весьма немонотонная. Для большинства значений начальных фаз из интервала $\left|\psi(0) - \psi_c(0)\right| < 3{,}1$ захват частиц волной в режим ускорения происходит сразу или на сравнительно малых временах τ по сравнению со временем ультрарелятивистского ускорения $\tau_{ac} \sim 60\,000$, которое соответствует увеличению энергии частицы на 3 порядка. В указанном случае выбора начальной фазы максимальное значение релятивистского фактора ускоренного электрона $\gamma_{\max} \approx 12\,832$. Поскольку захваченная частица смещается вместе с волной со скоростью $\beta_x \approx \beta_p$, координата $\zeta(\tau) = \omega_0 x / c$ возрастает практически пропорционально времени $\zeta(\tau) \approx \beta_p \cdot \tau$. Динамика фазы волнового пакета на несущей частоте на траектории частицы представлена на рис. 1.

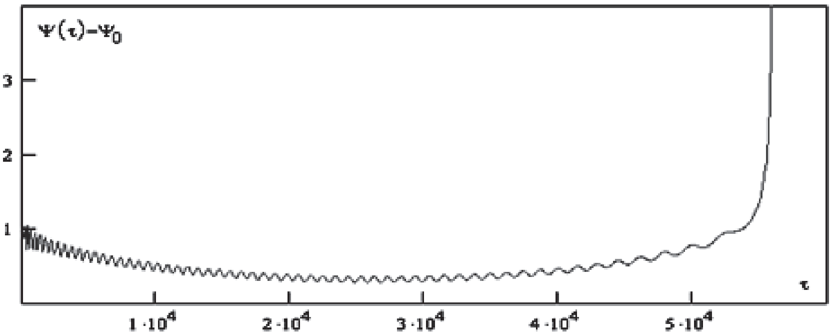


Рис. 1. График фазы пакета, когда частица сразу захватывается.

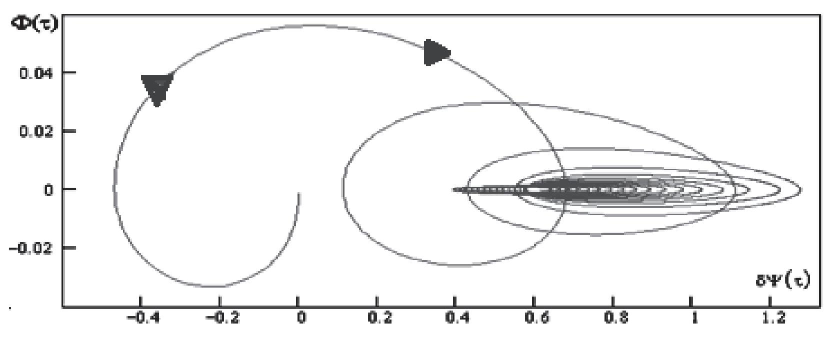


Рис. 2. Структура фазовой плоскости частицы на временном интервале $\tau < 60\,000$.

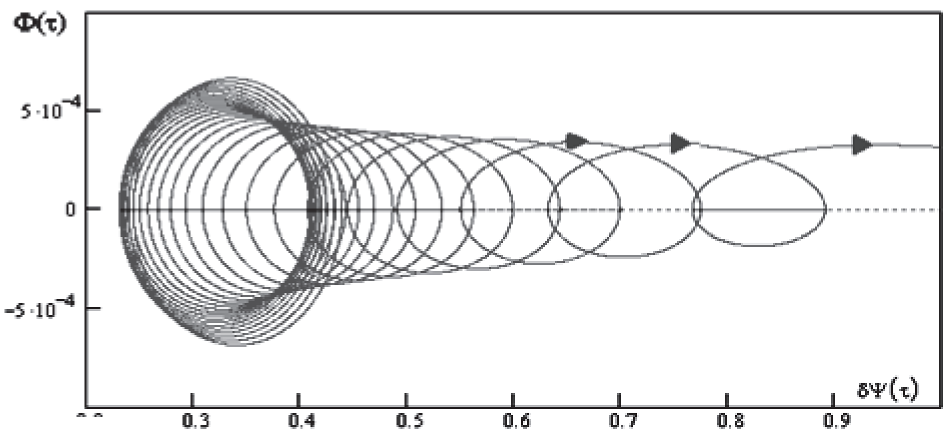


Рис. 3. Структура фазовой плоскости частицы для $25\,000 < \tau < 60\,000$ **.**

Для захваченной частицы фаза колеблется в диапазоне ускоряющих полей волны. После пересечения центральной части пакета поле волны меньше порогового значения, частица становится пролетной и фаза пакета быстро нарастает, энергия частицы практически постоянна (рис. 1).

Структура фазовой плоскости частицы показана на рис. 2, где $\phi(\tau) = d\psi(\tau)/d\tau$ для интервала времени $\tau < 60\,000$, на котором частица является захваченной. Для больших времен потенциальная яма исчезает, ускорение прекращается и имеет место циклотронное вращение (рис. 3).

Заключение

Согласно расчетам при другом знаке компоненты импульса вдоль волнового фронта (отрицательном) динамика такова. Вначале у захваченной частицы компонента импульса $\gamma\beta_y$ и энергия частицы уменьшаются, скорость β_y меняет знак на положительное значение и далее происходит ускорение. Заметим, что отрицательное начальное значение $\gamma\beta_y$ не соответствует его асимптотике при серфинге частицы на электромагнитной волне. Расчеты показывают, что темп торможения частицы почти не меняется (практически постоянен). После изменения знака компоненты импульса $\gamma\beta_y$ происходит серфотронное ускорение частицы до больших энергий. Таким образом для максимального ускорения частиц оптимальным условием, кроме выполнения условия черенковского резонанса, является и положительный знак компоненты скорости частицы β_y в момент захвата частицы волной.

Пакеты электромагнитных волн в окрестностях относительно спокойных звезд (например, Солнца) могут быть локальными источниками доускорения части спектра космических лучей с начальными энергиями порядка ГэВ до энергий в сотни Гэв и десяток ТэВ, что обеспечивает наблюдаемые вариации спектра космических лучей в этой области от зависимости от космической погоды. Гораздо большее доускорение космических лучей может быть в плазме местных межзвездных облаков на расстояниях от Солнца порядка парсек.

Анализ серфотронного механизма генерации потоков релятивистских заряженных частиц электромагнитными волнами в сравнительно спокойной космической плазме важен для понимания причин наблюдаемой переменности энергетических спектров КЛ и появления разнообразных особенностей в их энергетическом спектре. Это позволит дать корректную интерпретацию экспериментальных данных. Важно отметить, что потоки КЛ могут существенно влиять на вертикальные профили температуры атмосферы, выпадение осадков и динамику крупномасштабного тропического циклогенеза.

Литература

1. Заславский, Г.М. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. – М.: Наука, 1988. – 368 с.

2. Katsouleas N. / N. Katsouleas, J.M. Dawson // Physical Review Letters. – 1983. – V. 51, № 5. – P. 392.

3. Ситнов, М.И. Максимальная энергия частиц в серфотроне в режиме «неограниченного ускорения» / М.И. Ситнов // Письма в ЖТФ. – 1988. – Т. 14. – Вып. 1. – С. 89.

4. Кичигин, Г.Н. Особенности ускорения электронов в серфотроне / Г.Н. Кичигин // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108. – Вып. 4. – С. 1342–1354.

5. Joshi, C. The surfatron laser-plasma accelerator: Prospects and limitations/ C. Joshi // Radiation in plasmas: сб. науч. тр. – 1984. – Vol. 1. – P. 514–527.

6. Ерохин, Н.С. / Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев // Письма в Астрономический журнал. – 1989. – Т. 15, № 1. – С. 3–10.

7. Увлечение и ускорение заряженных частиц замедленной волной в неоднородной плазме // Н.С. Ерохин, А.А. Лазарев, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295, № 4. – С. 849–852.

8. Ерохин, Н.С. Релятивистский серфинг в неоднородной плазме и генерация космических лучей / Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев // Письма в Астрономический журнал. – 1989. – Т. 15, № 1. – С. 3–10.

9. Ерохин, Н.С. Ускорение зарядов поперек магнитного поля при взаимодействии сильной плазменной волны с многокомпонентными потоками релятивистских частиц / Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, А.Г. Хачатрян // Физика плазмы. – 1990. – Т. 16, Вып. 8. – С. 945–947.

10. Кичигин, Г.Н. Серфотронный механизм ускорения космических лучей в галактической плазме // Г.Н. Кичигин. – ЖЭТФ. – 2001. Т. 119, вып. 6. – С. 1038–1049.

11. Лозников, В.М. Переменный источник избытка космических электронов в гелиосфере / В.М. Лозников, Н.С. Ерохин // Вопросы атомной науки и техники, сер. Плазменная электроника. – 2010. – № 4 (68). – С. 121–124.

12. Динамика релятивистского ускорения заряженных частиц в космической плазме при серфинге на пакете электромагнитных волн / Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Е.А. Кузнецов, Л.А. Михайловская // Вопросы атомной науки и техники, сер. Плазменная электроника. – 2010. – № 4(68). – С. 116–120.

13. Ерохин, Н.С. Особенности захвата и серфотронного ускорения ультрарелятивистских частиц в космической плазме в присутствии попутной волны / Н.С. Ерохин, Н.Н. Зольникова, Л.А. Михайловская // Вопросы атомной науки и техники. – 2008. – № 4. – С. 114–118.

14. Chernikov, A.A. Unlimited Particle Acceleration by Waves in a Magnetic Field / A.A. Chernikov, G. Schmidt, A.I. Neishtadt // Physical Review Letters. – 1992. – V. 68, № 10. – P. 1507–1510.

Поступила в редакцию 30 октября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 3, pp. 79–85

DOI: 10.14529/mmph160308

DYNAMICS OF CAPTURE AND SUNSEQUENT SURFATRON ACCELERATION OF ELECTORNS BY ELECTROMAGNETIC WAVES IN COSMIC PLASMA

G.S. Mkrtichyan
People's Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation
E-mail: hay-13@mail.ru

The research of dynamics of the capture and subsequent surfatron acceleration of electrons by electromagnetic waves, propagating perpendicular to the magnetic field in cosmic plasma is conducted on the basis of nonlinear numerical calculations. The optimal conditions for the realization of ultra-relativistic electron acceleration by wave packets in cosmic plasma including favorable initial phase of the wave on the particle trajectory, the sign of electron initial impulse in the direction of the wave front, the magnitude of the phase velocity of the wave are formulated. The asymptotic behavior of the electron characteristics under hard acceleration (relativistic factor, the impulse components and the captured particle velocity, position of the bottom of the effective potential well, etc.) is obtained. It is shown that the trajectories have the form of a spiral on the phase plane for trapped electrons and gradually approach the singular point of the type of stable focus. The bottom position of effective non-stationary potential well for the trapped electrons is different because it depends on the charge sign of the accelerated particle. For trapped electrons the wave phase graphics on the particle trajectory correspond to oscillations with an increasing period and decreasing amplitude with the increase of energy of the particle. The bottom of an effective non-stationary potential well is achieved by trapped particle asymptotically. Thus, the trapped electrons with different initial wave phases in their trajectory are gradually condensed on the bottom of the effective non-stationary potential well.

It is important to emphasize that the packets of electromagnetic waves in the vicinity of relatively quiet stars (like the Sun) can be local sources of additional acceleration of the spectrum of cosmic rays with initial energies of the order of GeV up to the energies of hundreds of GeV and a dozen of TeV, which provides the observed variation of the spectrum of cosmic rays in this area depending on the space weather. Much more additional acceleration of cosmic rays can be in the plasma of local interstellar clouds at distances from the Sun of about parsecs.

The analysis of surfatron generation mechanism of relativistic particles charged with electromagnetic waves in the relatively tranquil cosmic plasma is important for understanding the causes of the observed variability of the energy spectra of cosmic rays and the appearance of various features in their energy spectrum. This allows giving a correct interpretation of the experimental data. It is important to note that the flows of cosmic rays can significantly affect the vertical profiles of atmospheric temperature, precipitation, and the dynamics of large-scale tropical cyclogenesis.

Keywords: capture; Cherenkov resonance; trajectories of charged particles; phase plane structure; stable focus; potential well; surfing of charged particles; cosmic plasma.

References

1. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. *Vvedenie v nelineynuyu fiziku: ot mayatnika do turbulentnosti i khaosa* [Introduction to nonlinear physics: from the pendulum to turbulence and chaos], Moscow: Nauka Publ., 1988, 368 p.

2. Katsouleas N., Dawson J.M. *Physical Review Letters*, 1983, Vol. 51, no. 5, p. 392. DOI: 10.1103/physrevlett.51.392

3. Sitnov M.I. *Technical Physics Letters*, 1988, Vol. 14, Issue 1, p. 89. (in Russ.).

4. Kichigin G.N. *JETP*, 1995, Vol. 81, no. 4, p. 736.

5. Joshi C. The surfatron laser-plasma accelerator: Prospects and limitations. *Radiation in plasmas*, 1984, Vol. 1, pp. 514–527.

6. Erokhin N.S., Moiseev S.S., Sagdeev R.Z. *Pis'ma v Astronomicheskiy zhurnal* [Letters to the Astronomical Journal], 1989, Vol. 15, no. 1, pp. 3–10. (in Russ.).

7. Erokhin N.S., Lazarev A.A., Moiseev S.S., Sagdeev R.Z. *DAN SSSR*, 1987, Vol. 295, no. 4, pp. 849–852. (in Russ.).

8. Erokhin N.S., Moiseev S.S., Sagdeev R.Z. Relyativistskiy serfing v neodnorodnoy plazme i generatsiya kosmicheskikh luchey [Relativistic surfing in inhomogeneous plasma and the generation of cosmic rays]. *Pis'ma v Astronomicheskiy zhurnal* [Letters to the Astronomical Journal], 1989, Vol. 15, no. 1, pp. 3–10. (in Russ.).

9. Erokhin N.S., Zolnikova N.N., Khachatryan A.G. Uskorenie zaryadov poperek magnitnogo polya pri vzaimodeystvii sil'noy plazmennoy volny s mnogokomponentnymi potokami relyativistskikh chastits [Acceleration of charges across the magnetic field in the interaction of plasma waves with strong multicomponent stream of relativistic particles]. *Fizika plazmy* [Plasma Physics], 1990, Vol. 16, Issue 8, pp. 945–947. (in Russ.).

10. Kichigin G.N. The surfatron acceleration of cosmic rays in the galactic plasma. *JETP*, 2001, Vol. 92, no 6, p. 895–904. DOI: 10.1134/1.1385629

11. Loznikov V.M., Erokhin N.S. Peremennyy istochnik izbytka kosmicheskikh elektronov v geliosfere [The variable source of cosmic excess electrons in the heliosphere]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki, ser. Plazmennaya elektronika* [Problems of Atomic Science and Technology, Ser. Plasma electronics], 2010, no. 4(68), pp. 121–124. (in Russ.).

12. Erokhin N.S., Zolnikova N.N., Kuznezov E.A., Mihaylovskaya L.A. Dinamika relyativistskogo uskoreniya zaryazhennykh chastits v kosmicheskoy plazme pri serfinge na pakete elektromagnitnykh voln [The dynamics of a relativistic charged particle acceleration in space plasma when surfing on a packet of electromagnetic waves]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki, ser. Plazmennaya elektronika* [Problems of Atomic Science and Technology, Ser. Plasma electronics], 2010, no. 4(68), pp.116–120. (in Russ.).

13. Erokhin N.S., Zolnikova N.N., Mihaylovskaya L.A. Osobennosti zakhvata i serfotronnogo uskoreniya ul'trarelyativistskikh chastits v kosmicheskoy plazme v prisutstvii poputnoy volny [Features of the capture and serfotronnogo acceleration of relativistic particles in the cosmic plasma in the presence of a passing wave]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki* [Problems of Atomic Science and Technology], 2008, no. 4, pp. 114–118. (in Russ.).

14. Chernikov A.A., Schmidt G., Neishtadt A.I. Unlimited Particle Acceleration by Waves in a Magnetic Field. *Physical Review Letters*, 1992, Vol. 68, no. 10, pp. 1507–1510. DOI: 10.1103/PhysRevLett.68.1507

Received October 30, 2015

Персоналии

ТАМАРА ГЕННАДЬЕВНА СУКАЧЕВА. К 60-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Тамара Геннадьевна Сукачева родилась 29 марта 1955 года в Новгороде. После окончания с отличием факультета математики и физики Новгородского государственного педагогического института она начала свою научную карьеру.

В аспирантуре Тамара Геннадьевна присоединилась к исследованиям Г.А. Свиридюка в области уравнений соболевского типа. Перед ней была поставлена задача описания морфологии фазового, а затем и обобщенного фазового пространства в различных моделях Осколкова. Эти исследования были проведены по инициативе и при содействии А.П. Осколкова. По их результатам в 1990 году Тамара Геннадьевна защитила кандидатскую диссертацию в качестве первой ученицы Г.А. Свиридюка, а затем и докторскую в 2005 году. Их плодотворное научное сотрудничество продолжается уже многие годы.

С 1977 года Т.Г. Сукачева работала сначала в Новгородском государственном педагогическом институте (НГПИ), а после 1993 г. в Новгородском государственном университете имени Ярослава Мудрого, который был создан на базе трех институтов Великого Новгорода. Одним из них был НГПИ. Таким образом, Тамара Геннадьевна в одном и том же вузе прошла долгий путь от студентки до профессора. С 2006 года она является членом диссертационного совета университета, а в 2014 году была избрана заведующей кафедрой алгебры и геометрии.

Т.Г. Сукачева является автором более 100 научных и учебно-методических работ, в том числе более тридцати статей, опубликованных в ведущих российских и международных журналах, двух монографий, пяти учебных пособий. Ее основные труды посвящены теории уравнений соболевского типа, а также математическому моделированию. Круг приложений включает такие области как гидро- и термодинамика. В 1996 году под руководством Т.Г. Сукачевой защитилась первая аспирантка Л.Л. Дудко. Ее работа была посвящена обобщению результатов по аналитическим группам операторов с ядрами в случае относительной радиальности оператора.

Затем к исследованиям Тамары Геннадьевны присоединились аспиранты И.А. Судаков и О.П. Матвеева. В своих кандидатских диссертациях они рассматривали задачи математического моделирования атмосферы и земной коры, а также несжимаемых вязкоупругих жидкостей ненулевого порядка. В диссертации была разработана и исследована модель, описывающая термический режим криолитозоны (или вечной мерзлоты). Результаты вычислительного эксперимента с этой моделью позволили сделать прогнозы о протаивании вечной мерзлоты Ямала в XXI веке. Впервые были описаны фазовые пространства задачи Коши–Дирихле для моделей динамики несжимаемых вязкоупругих жидкостей ненулевого порядка и соответствующих моделей термоконвекции.

Помимо научной деятельности, Тамара Геннадьевна также ведет большую учебную работу. Она читает такие фундаментальные курсы как математический анализ, математическая логика, теория обобщенных функций, функциональный анализ, теория функций комплексной переменной, а также спецкурс «уравнения соболевского типа». Также она активно участвует в конференциях, семинарах и проектах различного уровня. В 2010 г. она проходила стажировку в Болонском университете (Италия) в рамках программы «*Erasmus Mundus*», а в 2013–2014 г.г. по программе

Фулбрайта работала в университете Юты (США). С 1995 года является членом Американского математического общества.

За многолетнюю и плодотворную научную, научно-педагогическую и научно-организационную деятельность Т.Г. Сукачева была удостоена звания «Соросовский доцент» (1995, 1997, 1999), а также отмечена почетными грамотами администрации Новгородского государственного педагогического института (1989), Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации (1999), ректора Новгородского государственного университета (2009, 2015). Ее биография опубликована в нескольких изданиях международного биографического центра (IBC) «Who is Who in the World», «100 лучших работников образования».

От всей души желаем Тамаре Геннадьевне крепкого здоровья, благополучия и новых творческих достижений!

А.О. Кондюков, П.О. Москвичева

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

16+

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям наук и группам специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 01.04.00 – физика.

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», Е29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.
2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.
3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.
4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.
5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.
6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.
7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, ответственному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Differential and Stochastic Equations Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru
9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. http://vestnik.susu.ru/mmph.
10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, http://вестник.юургу.рф/mmph.
11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор *А.Ю. Федерякин*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 22.07.2016. Дата выхода в свет 29.07.2016.
Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23.
Тираж 500 экз. Заказ 304/315. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.