



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2016
Т. 8, № 4

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (отв. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, профессор Физики и Оптики **Зельдович Б.Я.** (КРЕОЛ, Университет Центральной Флориды, г. Орландо, США)
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.** (ЮУрГУ)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Корея),
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.** (ЮУрГУ)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

2016

Vol. 8, no. 4

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
B.Ya. Zeldovich, CREOL, University of Central Florida, Orlando, United States of America
V.V. Karachik, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
Kisik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
N.D. Kundikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D.A. Mirzaev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, USA
S.B. Sapozhnikov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
A.O. Chernyavskii, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- ZAMYSHLYAEVA A.A., SVIRIDYUK G.A. Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order 5
- КОРОТКИЙ А.И., ЦЕПЕЛЕВ И.А. Численное моделирование течения вязкой жидкости по тепловым измерениям на ее поверхности 17
- МАШКОВ Е.Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа с переменными матрицами, заданными в терминах текущих скоростей решения..... 26
- РАСУЛОВ К.М., ТИМОФЕЕВА Т.И. О картине разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях..... 33

Механика

- ГОЦЕВ Д.В., ПЕРУНОВ Н.С. Математическая модель напряженно деформированного состояния двухслойного упругого сферического тела с учетом пористой структуры материала..... 41

Физика

- БЕЛЯЕВ П.Е., КЛИНАЧЕВА Н.Л. Влияние экранирующего слоя газозвеси на силовое воздействие ударной волны на жёсткую стенку 49
- КОРЕНЧЕНКО А.Е., ДЖАМАЛ ДЖАЛАЛ В. Математическое моделирование газофазной конденсации металлических наночастиц в камере с дуговым разрядом..... 56
- РИДНЫЙ Я.М., МИРЗОЕВ А.А., МИРЗАЕВ Д.А. Определение оптимальных параметров моделирования для максимально точных расчётов энергий в ОЦК-железе..... 63

Персоналии

- Михаил Маркович Кипнис. К семидесятипятилетию со дня рождения..... 70

CONTENTS

Mathematics

- ZAMYSHLYAEVA A.A., SVIRIDYUK G.A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Linear Sobolev Type Equations of Higher Order 5
- KOROTKIY A.I., TSEPELEV I.A. Numerical Simulation of Viscous Fluid Flow Based on Thermal Measurements at its Surface 17
- MASHKOV E.Yu. On the Stochastic Leontief Type Equations with Variable Matrices Given in Terms of Current Velocities of the Solution..... 26
- RASULOV K.M., TIMOFEEVA T.I. On Solvability of the Hilbert Homogeneous Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in Circular Domains..... 33

Mechanics

- GOTSEV D.V., PERUNOV N.S. Mathematical Model of Intense Deformed State of Two-Layered Elastic Spherical Body within the Porosity Structure of the Material 41

Physics

- BELYAEV P.E., KLINACHEVA N.L. Impact of Gas Suspension Shielding Layer on the Force Effect of Shock Waves on a Rigid Wall 49
- KORENCHENKO A.E., JAMAL JALAL V. Mathematical Simulation of Gas-Phase Synthesis of Metal Nanoparticles in a Chamber with an Arc Discharge 56
- RIDNYI Ya.M., MIRZOEV A.A., MIRZAEV D.A. Determining the Optimal Modeling Parameters for Maximum Precise Calculations of Energy in BCC-Iron 63

Personalia

- Mikhail Markovich Kipnis. To the Seventy-Five Years Anniversary 70

NONCLASSICAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS OF HIGHER ORDER

A.A. Zamyshlyeva, G.A. Sviridyuk

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: zamyshlyeva@susu.ru*

The article presents the review of authors' results in the field of non-classical equations of mathematical physics. The theory of Sobolev-type equations of higher order is introduced. The idea is based on generalization of degenerate operator semigroups theory in case of the following equations: decomposition of spaces, splitting of operators' actions, the construction of propagators and phase spaces for a homogeneous equation, as well as the set of valid initial values for the inhomogeneous equation. The author uses a proven phase space technology for solving Sobolev type equations consisting of reduction of a singular equation to a regular one defined on some subspace of initial space. However, unlike the first order equations, there is an extra condition that guarantees the existence of the phase space. There are some examples where the initial conditions should match together if the extra condition can't be fulfilled to solve the Cauchy problem. The reduction of nonclassical equations of mathematical physics to the initial problems for abstract Sobolev type equations of high order is conducted and justified.

Keywords: nonclassical equations of mathematical physics; the Sobolev type equations of higher order; phase space, propagators.

Introduction

To the linear Sobolev type equations of high order we consider those non-classical equations of mathematical physics, which in suitable functional spaces can be reduced to the abstract operator differential equation of the form

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + B_0u, \quad (1)$$

where $n \in N \setminus \{1\}$, operators A, B_{n-1}, \dots, B_0 are linear and the operator A might not have an inverse, in particular when $\ker A \neq \{0\}$. Usually equation (1) is considered along with the Cauchy initial conditions

$$u^{(m)}(0) = u_m, m = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

However it was shown [1] that the Showalter–Sidorov conditions

$$A(u^{(m)}(0) - u_m) = 0, m = 0, \dots, n-1 \quad (3)$$

are more natural for the Sobolev type equations. Problems (1), (2) and (1), (3) depending on the goals of investigation can be understood in different senses (classical, в зависимости от целей исследования могут пониматься в различных смыслах (classical, generalized, weak, strong, etc.), however it is obvious that (3) is more general in comparison to (2). In a trivial case (when the inverse to A exists) both problems coincide, therefore their solutions coincide. In this paper the Showalter–Sidorov conditions are considered in more general statement

$$P(u^{(m)}(0) - u_m) = 0, m = 0, \dots, n-1, \quad (4)$$

where P is a relative spectral projector. For conduction of computational experiments the Showalter – Sidorov conditions are more suitable than the Cauchy conditions because there is no need to check if the initial data belongs to a phase space of the equation. Apparently A. Poincare [2] was the first to study equations of mathematical physics nonsolvable with respect to the highest derivative in time. However their systematic study was initiated by S.L. Sobolev [3] (see the historical review in [4]). By now there are a lot of methods and results of study of such equations. Their diversity is reflected the terminology: degenerate equations [5], pseudo parabolic equations [6] and even equations “of not Cauchy–Kovalevskaya type” (cited by [4]). We use the term “Sobolev type equations” introduced by R.

Showalter [7]. Firstly, we want to support the outstanding role of our great compatriot in a discovery of a new scientific direction. And the second reason is that this term is becoming more common [7-13].

Even a cursory glance at the vast area of nonclassical equations of mathematical physics [7, 14-16] can detect the variety of aspects in which they are investigated. Our approach is based on a phase space concept, the essence of which lies in a reduction of singular equation (1) to a regular one

$$u^{(n)} = S_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + S_0u + g, \quad (5)$$

defined, however, not on a whole space but on some subset of initial space, containing all initial values (2). In our case the phase space is a subspace of initial space (we show this below) or (in the worst case) an affine manifold (see examples in [8]). In the semilinear case, the phase space is much more interesting, even if $n = 1$ (see the review [17]).

To describe the morphology of the phase space of (1), it may seem that it is sufficient to reduce this equation using the standard procedure to a linear equation of the first order, the phase spaces of which are well studied [8]. However, on that way there arise unexpected difficulties: it turns out that in some cases [18, 19] for the solvability of problem (1), (2) the conditions of the Cauchy problem (2) need to be confirmed. For the relief of these difficulties there was proposed [20] a condition (see paragraph 1 of this article). The discussion of the role of this condition in the description of the phase space of equation (1) is the main content of the article. We should emphasize that there is no such a phenomena in the description of phase spaces of Sobolev type equations of the first order [8] and classical equations (5).

The article besides an introduction and references includes four paragraphs. The first one is devoted to the abstract Cauchy problem and propagators for the higher order Sobolev type equation with relatively p -bounded operator pencil [10]. These results are used to study the solvability of the initial-boundary problem for the equation describing acoustic waves in a smectic [21] in the second paragraph, the Boussinesq–Love equation on a finite connected oriented graph [22] in the third paragraph, equations describing ion-acoustic waves in plasma [23] in the fourth.

Finally note that all considerations are held in real Banach spaces, but when studying spectral problems we introduce their natural complexification. All contours are oriented counterclockwise and bound the domain that lies to the left in this movement.

Propagators

Let U, F be Banach spaces, operators $A, B_0, \dots, B_{n-1} \in L(U; F)$. Denote by \vec{B} a pencil of operators B_{n-1}, \dots, B_0 .

Definition 1. The sets $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in C : (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in L(F; U)\}$ and $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$ are called an A -resolvent set and an A -spectrum of the operator pencil \vec{B} .

Definition 2. The operator-function of a complex variable $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ with the domain $\rho^A(\vec{B})$ is called an A -resolvent of the pencil \vec{B} .

Lemma 1 [24]. Let the operators $A, B_{n-1}, \dots, B_0 \in L(U; F)$. Then the A -resolvent set $\rho^A(\vec{B})$ of the operator pencil \vec{B} is opened, the A -spectrum of the pencil \vec{B} is always closed.

Theorem 1 [24]. $R_\mu^A(\vec{B})$ is analytical in its domain.

Definition 3. The operator pencil \vec{B} is called polynomially bounded with respect to an operator A (or simply polynomially A -bounded), if

$$\exists a \in R_+ \quad \forall \mu \in C \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in L(F; U)).$$

Let the operator \vec{B} be polynomially A -bounded. Introduce the following condition:

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv O, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (A)$$

where the contour $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$.

Lemma 2 [24]. Let the operator pencil \vec{B} be polynomially A -bounded and condition (A) be fulfilled. Then the operators

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) \mu^{n-1} A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^{n-1} A R_{\mu}^A(\vec{B}) d\mu. \quad (6)$$

are projectors in the spaces U and F respectively.

Put $U^0 = \ker P$, $F^0 = \ker Q$, $U^1 = imP$, $F^1 = imQ$. By A^k (B_l^k) denote a restriction of the operator A (B_l) onto U^k , $k = 0, 1$; $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Theorem 2 [24]. Let the operator pencil \vec{B} be polynomially A -bounded and condition (A) be fulfilled. Then the operators actions split:

- (i) $A^k \in L(U^k; F^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) $B_l^k \in L(U^k; F^k)$, $k = 0, 1$, $l = 0, 1, \dots, n-1$;
- (iii) there exists an operator $(A^1)^{-1} \in L(F^1; U^1)$.
- (iv) there exists an operator $(B_0^0)^{-1} \in L(F^0; U^0)$.

Denote $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0$, $H_k = (B_0^0)^{-1} B_{n-k}^0$, $k = 1, n-1$, $S_k = (A^1)^{-1} B_k^1$, $k = 0, n-1$.

Corollary 1 [24]. Let the operator pencil \vec{B} be polynomially A -bounded and condition (A) be fulfilled. Then there exists a constant $b \in R_+$ ($b \geq a$) $\forall \mu \in C$ ($|\mu| > b$) \Rightarrow

$$R_{\mu}^A(\vec{B}) = - \sum_{k=0}^{\infty} (\mu^n H_0 - \dots - \mu H_{n-1})^k (B_0^0)^{-1} (I - Q) + \mu^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu^{-1} S_{n-1} + \dots + \mu^{-n} S_0)^k (A_1^1)^{-1} Q. \quad (7)$$

Definition 1. Let $\ker A \neq \{0\}$, the vector $\phi_0 \in \ker A \setminus \{0\}$ is called an eigenvector of an operator A . An ordered set of vectors $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ is called a chain of \vec{B} -joined vectors of an eigenvector ϕ_0 , if

$$\begin{aligned} A\phi_0 &= 0; \\ A\phi_1 &= B_{n-1}\phi_0; \\ A\phi_2 &= B_{n-1}\phi_1 + B_{n-2}\phi_0; \\ &\dots \\ A\phi_n &= B_{n-1}\phi_{n-1} + B_{n-2}\phi_{n-2} + \dots + B_1\phi_1 + B_0\phi_0; \\ A\phi_{n+q} &= B_{n-1}\phi_{n+q-1} + B_{n-2}\phi_{n+q-2} + \dots + B_1\phi_{q+1} + B_0\phi_q; \\ q &= 1, 2, \dots, \quad \phi_l \notin \ker A \setminus \{0\}, l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

For the \vec{B} -joined vector ϕ_q define its height equal to its index in the chain. The linear hull of all eigenvectors and \vec{B} -joined vectors of the operator A is called a \vec{B} -root lineal. A closed \vec{B} -root lineal is called a \vec{B} -root space of an operator A . The chain of \vec{B} -joined vectors can be infinite. In particular it can be filled in with zeros if

$$\phi_0 \in \ker A \cap \ker B_{n-1} \cap \ker B_{n-2} \cap \dots \cap \ker B_1 \cap \ker B_0.$$

But it is finite in the case of existence of such a \vec{B} -joined vector ϕ_q , that $B_{n-1}\phi_q + B_{n-2}\phi_{q-1} + \dots + B_0\phi_{q-n+1} \notin imA$. The height q of the last \vec{B} -joined vector in a finite chain $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q\}$ is called a length of this chain.

Definition 5. Define the family of operators $\{K_q^1, K_q^2, \dots, K_q^n\}$ as follows:

$$\begin{aligned} K_0^s &= O, s \neq n, K_0^n = O \\ K_1^1 &= H_0, K_1^2 = -H_{n-1}, \dots, K_1^s = -H_{n+1-s}, \dots, K_1^n = -H_1 \\ K_q^1 &= K_{q-1}^n H_0, K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^n H_{n-1}, \dots, K_q^s = K_{q-1}^{s-1} - K_{q-1}^n H_{n+1-s}, \dots, \\ K_q^n &= K_{q-1}^{n-1} - K_{q-1}^n H_1, q = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Definition 6. The point ∞ is called

- (i) a removable singular point of the A -resolvent of the pencil \vec{B} , if $K_1^1 = K_1^2 = \dots = K_1^n \equiv O$;

(ii) a pole of order $p \in N$ of the A -resolvent of the pencil \bar{B} , if $K_p^s \neq O$ for some s but $K_{p+1}^s \equiv O$ for arbitrary s ;

(iii) essentially singular point of the A -резольвенты of the pencil \bar{B} , if $K_p^n \neq O$ for arbitrary $p \in N$.

Theorem 4 [24]. Let the pencil \bar{B} be polynomially A -bounded and ∞ be

(i) a removable singular point of the function $R_\mu(\bar{B})$. Then the operator A does not have \bar{B} -joined vectors, $\ker A = U^0, \text{im } A = F^1$.

(ii) a pole of order $p \in N$ of the function $R_\mu^A(\bar{B})$. Then the length of every chain of \bar{B} -joined vectors of the operator A is bounded by number p (the chains of length p do exist), and the \bar{B} -root lineal of the operator A coincides with the subspace U^0 .

Theorem 3 [24]. Let the operators $A, B_{n-1}, \dots, B_0 \in L(U, F)$, operator A be a Fregholm operator. Then the following statements are equivalent.

(i) The lengths of all chains of \bar{B} -joined vectors of an operator A are bounded by $p \in \{0\} \cup N$.

(ii) The operator pencil \bar{B} is polynomially A -bounded and ∞ is a pole of order not greater than p of the A -resolvent of an operator pencil \bar{B} .

Definition 7. The vector-function $v \in C^n(R; U)$, satisfying (1), is called a solution of this equation. If the solution $v = v(t)$ satisfies (2), then it is called a solution of (1), (2).

Definition 8. The operator-function $V(\cdot) \in C^\infty(R; L(U))$ is called a propagator of (1), if for any $v \in U$ the vector-function $v(t) = V^t v$ is a solution of this equation.

Let the pencil \bar{B} be polynomially A -bounded and (A) be fulfilled. Fix the contour $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$ and consider the family of operators

$$V_k^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^A(\bar{B})(\mu^{n-k-1}A - \mu^{n-k-2}B_{n-1} - \dots - B_{k+1})e^{\mu t} d\mu, k = 0, 1, \dots, n-1, t \in R. \quad (10)$$

Lemma 3 [24]. (i) For any $k = 0, 1, \dots, n-1$ the operator-function V_k^t is a propagator of (1).

(ii) For any $k = 0, 1, \dots, n-1$ the operator-function V_k^t is n entire function.

$$(iii) \left. \frac{d^l}{dt^l} V_k^t \right|_{t=0} = \begin{cases} P, l = k; \\ O, l \neq k; \end{cases} \text{ for all } k = 0, 1, \dots, n-1, l = 0, 1, \dots$$

Definition 9. The set $P \subset U$ is called a phase space of (1), if

(i) any solution $v = v(t)$ of (1) lies in P , i.e. $v(t) \in P \quad \forall t \in R$

(ii) for all $v_k \in P, k = \overline{0, n}$ there exists a unique solution of (1), (2).

Theorem 5 [24]. Let the pencil \bar{B} be polynomially A -bounded, (A) be fulfilled, and ∞ – be pole of order $p \in \{0\} \cup N$ or its A -resolvent. Then the phase space of (1) coincides with the image of the projector P .

The De Gennes equation of the acoustic waves in a smectic

The equation of linear acoustic waves in a smectic [25], firstly obtained by P.G. de Gennes, has the form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta_2 u, \alpha_1 > 0, \quad (11)$$

where $\Delta_3 = \Delta_2 + \partial^2 / \partial z^2, \Delta_2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$. The initial model has sense in a cylindrical domain in variables $\{z, x_1, x_2\} \in [a, b] \times \Omega$. In the case of stabilized acoustic waves in a smectic

$$u(x_1, x_2, z, t) = v(x_1, x_2, z) \exp(-i\omega t),$$

the initial equation takes the form

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta_2 v + \alpha_2 v) + \alpha_2 \Delta_2 v = 0, \alpha_2 = \omega^2 \alpha_1^{-1}. \quad (12)$$

Supply this equation with the initial and boundary conditions

$$\begin{aligned} v(x, 0) = v_0(x), \quad v_z(x, 0) = v_1(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ v(x, z) = 0, \quad (x, z) \in \partial\Omega \times R. \end{aligned} \quad (13)$$

The initial-boundary value problem for (12) can be described in terms of problem (2) for equation (1). For the reduction of (12), (13) to (1), (2), put

$$U = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad F = W_q^l(\Omega),$$

where $W_q^l(\Omega)$ are the Sobolev spaces $2 \leq q < \infty$. Put for the convenience $\alpha = -\alpha_2$, $\Delta = \Delta_2$. Define operators A, B_1 and B_0 by formulas $A = \Delta - \alpha$, $B_1 = O, B_0 = \alpha\Delta$. For any $l \in \{0\} \cup N$ operators $A, B_1, B_0 \in L(U; F)$.

Define by $\{\lambda_k\}$ the set of eigenvalues of the homogeneous Dirichlet problem in a domain Ω for the Laplace operator Δ , numbered in nonincreasing order taking into account their multiplicities, and by $\{\phi_k\}$ denote the family of the corresponding eigenfunctions orthonormal with respect, to the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $L^2(\Omega)$. Since $\{\phi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$, then

$$\mu^2 A - B_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha + \lambda_k)\mu^2 + \alpha\lambda_k] \langle \phi_k, \cdot \rangle \phi_k.$$

Lemma 4 [22, 24] *Let $\alpha \in R$. Then the pencil \bar{B} is polynomially A -bounded and ∞ is nonessential singular point of the A -resolvent of pencil \bar{B} .*

Remark 1. In the case (i) The A -spectrum of pencil \bar{B} $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in N\}$, where $\mu_k^{1,2}$ are the roots of equation

$$(\lambda_k - \alpha)\mu^2 - \alpha\lambda_k = 0. \quad (14)$$

In the case (ii) $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_{i,k}^{1,2} : k \in N\}$, where $\mu_{i,k}^{1,2}$ are the roots of equation (14) for $\alpha \neq \lambda_i$.

Now check (A). In the case (i) there exists an operator $A^{-1} \in L(F; U)$, therefore (A) is fulfilled. In the case (ii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_k, \cdot \rangle \phi_k d\mu}{(\lambda_k - \alpha)\mu^2 - \alpha\lambda_k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_k, \cdot \rangle \phi_k d\mu}{\alpha\lambda_k} = 0.$$

Construct the projectors. In the case (i) $P = I$ and $Q = I$, in the case (ii)

$$P = I - \sum_{\alpha = \lambda_k} \langle \phi_k, \cdot \rangle \phi_k,$$

and the projector Q has the same form but is defined on the space F . Therefore, due to theorem 5, the following theorem is true.

Theorem 6 [24] (i) *Let $\alpha \notin \sigma(\Delta)$. Then the phase space of the equation is the entire space U , that is for all $v_0, v_1 \in U$ there exists a unique solution of (12), (13), given by*

$$\begin{aligned} v(z) = \sum_{\alpha < \lambda_k} \langle v_0, \phi_k \rangle \phi_k \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k - \alpha}} z + \sum_{\alpha > \lambda_k} \langle v_0, \phi_k \rangle \phi_k \cos \sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha - \lambda_k}} z + \\ + \sum_{\alpha < \lambda_k} \langle v_1, \phi_k \rangle \phi_k \sqrt{\frac{\lambda_k - \alpha}{\alpha\lambda_k}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k - \alpha}} z + \sum_{\alpha > \lambda_k} \langle v_1, \phi_k \rangle \phi_k \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_k}{\alpha\lambda_k}} \sin \sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha - \lambda_k}} z. \end{aligned} \quad (15)$$

(ii) *Let $\alpha \in \sigma(\Delta)$. Then the phase space of the equation is the subspace U^1 , that is for all*

$$v_0, v_1 \in U^1 = \{v \in U : \langle v, \phi_k \rangle = 0, \lambda = \lambda_k\}$$

there exists a unique solution of (12), (13), given by (15).

Remark 2. The results of theorem 6 can be easily transcribed in the terms of the initial equation (11), if we take into account the connection between the functions u and v .

The Boussinesq–Love equation on a geometrical graph

Let $G = G(V; E)$ be a finite connected oriented graph, where $V = \{V_i\}_{i=1}^m$ is the set of vertices, and $E = \{E_j\}_{j=1}^n$ is the set of edges. We suppose that each edge has the length $l_j > 0$ and the cross section area $d_j > 0$. On the graph G consider the Boussinesq–Love equations [26]

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxt} = \alpha(u_{jxx} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j), \quad x \in (0, l_j), t \in R, j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

At each vertex $V_i, i = \overline{1, m}$ set the boundary conditions

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{k: E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \tag{17}$$

$$u_s(0, t) = u_j(0, t) = u_k(l_k, t) = u_m(l_m, t), \tag{18}$$

for all $E_s, E_j \in E^\alpha(V_i), E_k, E_m \in E^\omega(V_i)$. Here by $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ we denote the set of edges starting (ending) in the vertex V_i . If we add the initial conditions

$$u_j(x, 0) = u_{0j}(x), u_{jt}(x, 0) = u_{1j}(x), \text{ for all } x \in (0, l_j), j = \overline{1, n}, \tag{19}$$

then we get a problem describing the vibration processes in a construction made of thin elastic rods. The functions $u_j(x, t)$ determine the longitudinal displacement in the point x at the moment t on the j -th element of the construction. The parameters $\lambda, \lambda', \lambda'', \alpha$ and β characterize the material of rods.

Reduce problem (17)–(19) for equations (16) to the Cauchy problem

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \tag{20}$$

for the linear Sobolev type equation of the second order

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u. \tag{21}$$

By $L_2(G)$ denote a set

$$L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

The set $L_2(G)$ is a Hilbert space with an inner product

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

By U denote a set $U = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ and (18) holds}\}$. The set U is a Banach space with a norm

$$\|u\|_U^2 = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2(x) + u_j^2(x)) dx.$$

Due to the Sobolev embedding theorems the space $W_2^1(0, l_j)$ consists of absolutely continuous functions, therefore U is correctly defined, densely and compactly embedded in $L_2(G)$. Identify $L_2(G)$ with its dual space and by F define a dual space to U with respect to the duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Obviously, F is a Banach space and the embedding of U into F is compact.

By formula

$$\langle Du, v \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + a u_j(x) v_j(x)) dx,$$

where $a > 0, u, v \in U$, set an operator defined on the space U . Fix $\alpha, \beta > 0, \lambda, \lambda', \lambda'' \in R$ and construct operators

$$A = (\lambda - a)I + D, B_1 = \alpha((a - \lambda')I + D), B_0 = \beta((a - \lambda'')I + D).$$

Theorem 7 [23] Operators $A, B_1, B_0 \in L(U; F)$, moreover the spectrum $\sigma(A)$ of an operator A is discrete, real tends only to $+\infty$.

So, the reduction of (16)–(19) to (20)–(21) is completed. By theorem 7, the operator A is a Fredholm operator and $\ker A = \{0\}$, if $0 \notin \sigma(A)$.

Lemma 5 [23] Let $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in R \setminus \{0\}$, then the operator pencil \bar{B} is polynomially A -bounded, and ∞ is nonessential singular point of the A -resolvent of the pencil \bar{B} .

Remark 3 [23] It is easily seen that in the case $0 \in \sigma(A)$ and $\lambda = \lambda' = \lambda''$ the operator pencil \bar{B} is not polynomially A -bounded.

Remark 4. [23] n the case $0 \notin \sigma(A)$ or $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\lambda = \lambda' \neq \lambda'')$ condition

$$\int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu = 0, \tag{A}$$

where $\gamma = \{|\mu| = r > a\}$, a is a constant from the definition of the polynomial A -boundedness, holds. In the case $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$

$$\int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu \neq 0,$$

therefore we exclude it from our future considerations when searching the phase space of the equation.

Let $\{\lambda_k\}$ be a set of eigenvalues of the operator D , numbered in nondecreasing order taking into account their multiplicities, and $\{\phi_k\}$ be a set of corresponding orthonormal in sense of $L_2(G)$ eigenfunctions. Construct the projectors

$$P = \begin{cases} I, 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k, 0 \in \sigma(A); \end{cases} \quad Q = \begin{cases} I, 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k, 0 \in \sigma(A), \end{cases}$$

defined on spaces U and F respectively, and the propagators of equation (21)

$$\begin{aligned} V_0^t &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu = \\ &= \sum \left[\frac{\mu_k^1 (\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha (\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k)) (\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2 (\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha (\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k)) (\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right] \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k; \\ V_1^t(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} A e^{\mu t} d\mu = \sum \left[\frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k \right], \end{aligned}$$

where $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in N\}$, and $\mu_k^{1,2}$ are the roots of equation

$$(\lambda - (a + \lambda_k)) \mu^2 + \alpha (\lambda' - (a + \lambda_k)) \mu + \beta (\lambda'' - (a + \lambda_k)) = 0.$$

Here the prime at the sum means the absence of summands with indices k such that $\lambda = a + \lambda_k$. Hence the following theorem is true.

Theorem 8 [23, 24] Let $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in R \setminus \{0\}$ and

(i) $0 \notin \sigma(A)$. Then the phase space of (16) coincides with the space U , i.e. for all $u_0, u_1 \in U$ there exists a unique solution $u \in C^2(R; U)$ of (16)–(19), given by $u(t) = V_0^t u_0 + V_1^t u_1$.

(ii) $0 \in \sigma(A)$ and $\lambda = \lambda'$, but $\lambda \neq \lambda''$. Then the phase space of equation (16) coincides with the subspace $U^1 = \{u \in U : \langle u, \phi_k \rangle = 0 \text{ for } \lambda_k = \lambda - a\}$, i.e. for all $u_0, u_1 \in U^1$ there exists a unique solution $u \in C^2(R; U^1)$ of (16)–(19), given by $u(t) = V_0^t u_0 + V_1^t u_1$.

Remark 5. In the case $0 \in \sigma(A)$ and $\lambda \neq \lambda'$ the phase space, in sense of definition 9, does not exist, since the condition of coordination of initial functions

$$\mu_k \langle u_0, \phi_k \rangle = \langle u_1, \phi_k \rangle \text{ for } \lambda_k = \lambda - a.$$

is necessary for the existence of solution of the problem [18, 19].

Equation of ion-acoustic waves in plasma in external magnetic field

Equation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \left(\Delta_3 \Phi - \frac{1}{r_D^2} \Phi \right) + \omega_{p_i}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 \Phi + \omega_{B_i}^2 \omega_{p_i}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (22)$$

firstly obtained by Yu.D. Pletner [27], describes the ion-acoustic waves in plasma in external magnetic field. The function Φ presents a generalized potential of the electric field, constants $\omega_{B_i}^2$, $\omega_{p_i}^2$, and r_D^2 characterize the ionic gyrofrequency, Langmuir frequency and the Debye radius, respectively. We transform equation (22) and consider the more general problem.

Let $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset R^3$. In a cylinder $\Omega \times R$ consider the Cauchy–Dirichlet problem

$$\begin{aligned} v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \\ v_{tt}(x, 0) = v_2(x), \quad v_{ttt}(x, 0) = v_3(x), \quad x \in \Omega \\ v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times R \end{aligned} \quad (23)$$

for the equation

$$(\Delta - \lambda)v_{ttt} + (\Delta - \lambda')v_{tt} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0, \quad (24)$$

describing the ion-acoustic waves in plasma in external magnetic field. The initial-boundary value problem for (24) can be described in terms of problem (2) for equation (1), and negative values of the parameter λ do not contradict the physical meaning of the problem. Reducing (23), (24) to (1), (2), set

$$U = \{v \in W_2^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad F = W_2^l(\Omega),$$

where $W_2^l(\Omega)$ are the Sobolev spaces. Operators A, B_3, B_2, B_1 and B_0 define by formulas $A = \Delta - \lambda$,

$$B_2 = (\lambda' - \Delta), \quad B_0 = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad B_3 = B_1 = O. \text{ For all } l \in \{0\} \cup N \text{ operators } A, B_1, B_0 \in L(U; F).$$

For proof of the relative boundedness of the pencil \bar{B} consider the eigenfunctions of the Laplace operator Δ , defined in a domain Ω , satisfying the boundary conditions from (23). Denote these eigenfunctions by $\phi_{kmn} = \left\{ \sin \frac{\pi k x_1}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b} \sin \frac{\pi n x_3}{c} \right\}$, where $k, m, n \in N$, thus the eigenvalues

$\lambda_{kmn} = -(k^2 + m^2 + n^2)$. Obviously, the spectrum $\sigma(\Delta)$ is negative, discrete, with finite multiplicities and tends only to $-\infty$. Since $\{\phi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$, then

$$\mu^4 A - \mu^3 B_3 - \mu^2 B_2 - \mu B_1 - B_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} [(\lambda_{kmn} - \lambda)\mu^4 + (\lambda_{kmn} - \lambda')\mu^2 - \alpha \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2] \langle \phi_{kmn}, \cdot \rangle \phi_{kmn},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is an inner product in $L^2(\Omega)$.

Lemma 6 [21]. (i) Let $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. Then the pencil \bar{B} is polynomially A -bounded and ∞ is a removable singular point of the A -resolvent of pencil \bar{B} .

(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$. Then the pencil \bar{B} is polynomially A -bounded and ∞ is a pole of order 1 of the A -resolvent of pencil \bar{B} .

(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda')$. Then the pencil \bar{B} is polynomially A -bounded and ∞ is a pole of order 3 of the A -resolvent of pencil \bar{B} .

Remark 6 [21] In case (i) of lemma 6 the A -spectrum of pencil \bar{B} $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_{rnm}^j : r, m, n \in N, j = 1, \dots, 4\}$, where μ_{rnm}^j are the roots of equation

$$(\lambda_{rnm} - \lambda)\mu^4 + (\lambda_{rnm} - \lambda')\mu^2 - \alpha \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 = 0, \quad (25)$$

and condition (A) holds. In case (ii) of lemma 6 the A -spectrum of pencil \bar{B} $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_{l,k}^j : k \in N\}$, where $\mu_{l,k}^j$ are the roots of equation (25) with $\lambda = \lambda_l$, and condition (A) does not hold. Therefore this case is excluded from the further considerations. In case (iii) of lemma 6 the A -spectrum of pencil \bar{B} $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_{l,k}^j : k \in N, k \neq l\}$, and condition (A) holds.

Construct the projectors. In case (i) of lemma 6 $P = I$ and $Q = I$, in case (ii) of lemma 6

$$P = I - \sum_{\lambda=\lambda_{kmn}} \langle \phi_{kmn}, \cdot \rangle \phi_{kmn},$$

and the projector Q has the same form but is defined on the space F . In case (ii) construct the set

$$U^1 = \text{im } P = \{v \in U : \sum_{\lambda=\lambda_{kmn}} \langle \phi_{kmn}, v \rangle \phi_{kmn} = 0\}.$$

So, due to theorem 5 the following theorem is true.

Theorem 9 [21] (i) Let $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. Then the phase space of (24) coincides with the space U , i.e. for all $v_0, v_1, v_2, v_3 \in U$ there exists a unique solution $u \in C^2(R; U)$ of (23), (24).

(ii) Let $\lambda \in \sigma(\Delta)$ and $\lambda = \lambda'$. Then the phase space of equation (24) coincides with the subspace U^1 , i.e. for all v_0, v_1, v_2, v_3 such that

$$\sum_{\lambda_{kmn}=\lambda} \langle \phi_{kmn}, v_j \rangle = 0, j = 0, \dots, 3,$$

there exists a unique solution $u \in C^2(R; U^1)$ of (23), (24).

Remark 7. In case $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$ the phase space in sense of definition 9, does not exist, since the condition of coordination of initial functions [19]:

$$(\lambda_{kmn} - \lambda) \langle v_2, \phi_{kmn} \rangle = \alpha \left(\frac{\pi n}{c} \right)^2 \langle v_0, \phi_{kmn} \rangle \text{ при } \lambda_{kmn} = \lambda.$$

is necessary for the existence of solution of the problem.

References

1. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter-Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev-type equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 51–72. (in Russ.).
2. Poincare H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animee d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica*, 1885, Vol. 7, Issue 1, pp. 259–380. DOI:10.1007/BF02402204
3. Sobolev S.L. Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki (On a new problem of mathematical physics). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, issue 1, p. 3–50. (in Russ.).
4. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest order derivative*. N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003, 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433
5. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces*. N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999, 313 p.
6. Kozhanov A.I. On properties of solutions of one class of pseudoparabolic. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1992, vol. 326, issue 5, p. 781–786. (in Russ.).
7. Showalter, R.E. *Hilbert space methods for partial differential equations*. Pitman; London; San Francisco; Melbourne, 1977, 208 p.
8. Sviridyuk, G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501.
9. Al'shin, A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*. De Gruyter, 2011, 648 p.
10. Zamyshlyayeva A.A. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* (Linear Sobolev type equations of high order). Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 107 p. (in Russ.).

11. Sagadeeva M.A. *Dikhotomii resheniy lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa* (Dichotomy of solutions of linear Sobolev type equations). Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 139 p. (in Russ.).
12. Zagrebina S.A., Sagadeeva V.A. *Ustoychivye i neustoychivye mnogoobraziya resheniy polu-lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa* (Stable and nonstable manifolds of solutions of semilinear Sobolev type equations). Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2016. 121 p. (in Russ.).
13. Manakova N.A. *Zadachi optimal'nogo upravleniya dlya uravneniy sobolevskogo tipa* (Optimal control problem for the Sobolev type equations). Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012, 88 p. (in Russ.).
14. Sidorov N., Loginov, Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analysis and applications*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002, 568 p.
15. Kozhanov A.I. *Kraevye zadachi dlya uravneniy matematicheskoy fiziki nechetnogo poryadka* (Boundary problems for equations of mathematical physics of odd order). Novosibirsk, NGU Publ., 1990, 130 p. (in Russ.).
16. Pyatkov, S.G. *Operator Theory. Nonclassical problems*. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002. 346 p. DOI: 10.1515/9783110900163
17. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical equations of mathematical physics. Phase spaces of semilinear Sobolev type equations. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51. (in Russ.).
18. Sviridyuk G.A., Apetova T.V. Fazovye prostranstva lineynykh dinamicheskikh uravneniy tipa Soboleva (Phase spaces of linear dynamical Sobolev type equations). *Doklady Akad. Nauk*, 1993, vol. 330, no. 6, p. 686. (in Russ.).
19. Sviridyuk G.A., Vakarina O.V. Lineynye uravneniya tipa Soboleva vysokogo poryadka (Linear Sobolev type equations of high). *Doklady Akad. Nauk*, 1998, vol. 393, no. 3, pp. 308–310. (in Russ.).
20. Zamyshlyayeva A.A. Phase spaces of one class of linear Sobolev type equations of the second order. *Vychislitelnye tehnologii*, 2003, vol. 8, no. 4, pp. 45–54. (in Russ.).
21. Zamyshlyayeva A.A. Stokhasticheskaya matematicheskaya model' ionno-zvukovykh voln v plazme (Stochastic mathematical model of ion-acoustic waves in plasma). *Estestvennye i tekhnicheskie nauki (Razdel matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы programm)* (Natural and technical sciences (Mathematical modeling, numerical methods and program complexes)), 2013, vol. 4, pp. 284–292. (in Russ.).
22. Zamyshlyayeva A.A. De Gennes equation of acoustic waves in smectics. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2009, Vol. 16, issue 4, pp. 655–656. (in Russ.).
23. Zamyshlyayeva A.A., Yuzeeva A.V. The initial-final value problem for the Boussinesque–Love equation on graph. *Izvestia Irkutskogo gosudarsvennogo universiteta. Seria "Matematika"*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 18–29. (in Russ.).
24. Zamyshlyayeva A.A. Sobolev type mathematical models of high order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming and computer software*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140201
25. Gabov S.A. *Novye zadachi matematicheskoy teorii voln (New problems of mathematical wave theory)*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1998, 448 p. (in Russ.).
26. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* (Mathematical theory of elasticity). Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1935. 674 p. (in Russ.). [Love A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1927.]
27. Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Linear and nonlinear Sobolev type equations*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 736 p. (in Russ.).

Received September 27, 2016

УДК 517.9

DOI: 10.14529/mmph160401

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.А. Замышляева, Г.А. Свиридюк

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zamyshliaeva@susu.ru

Статья содержит обзор результатов авторов в области неклассических уравнений математической физики. Представлена теория линейных уравнений соболевского типа высокого порядка. Идея базируется на обобщении теории вырожденных (полу)групп операторов на случай указанных уравнений: расщеплении пространств, действий всех операторов, построении пропагаторов и фазового пространства однородного уравнения, а также множества допустимых начальных значений для неоднородного уравнения. Использован уже хорошо зарекомендовавший себя при решении уравнений соболевского типа метод фазового пространства, заключающийся в редукции сингулярного уравнения к регулярному, определенному на некотором подпространстве исходного пространства. Однако, в отличие от уравнений первого порядка, в данном случае возникает дополнительное условие, гарантирующее существование фазового пространства, и имеются примеры, когда для разрешимости задачи Коши начальные условия необходимо согласовывать между собой при невыполнении этого условия. В работе проводится редукция неклассических уравнений математической физики к начальным (начально-конечным) задачам для абстрактного уравнения соболевского типа высокого порядка.

Ключевые слова: неклассические уравнения математической физики; уравнения соболевского типа высокого порядка; фазовое пространство; пропагаторы.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
2. Poincare, H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animee d'un mouvement de rotation / H. Poincare // Acta Math. – 1885. – V. 7. – P. 259–380.
3. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, серия «Математика». – 1954. – Т. 18, вып. 1. – С. 3–50.
4. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.
5. Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 313 p.
6. Кожанов А.И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений // ДАН СССР. 1992. – Т. 326, № 5. – С. 781–786.
7. Showalter, R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / R.E. Showalter. – Pitman; London; San Francisco; Melbourne, 1977. – 208 p.
8. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
9. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – De Gruyter, 2011. – 648 с.
10. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

11. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
12. Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.
13. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
14. Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 568 p.
15. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990. – 130 с.
16. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002. – 346 p.
17. Манакова, Н.А. Неклассические уравнения математической физики. Фазовые пространства полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 31–51.
18. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства линейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.В. Апетова // Доклады Академии наук. – 1993. – Т. 330, № 6. – С. 696.
19. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева высокого порядка / Г.А. Свиридюк, О.В. Вакарина // ДАН. – 1998. – Т. 393, № 3. – С. 308–310.
20. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технол. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45–54.
21. Замышляева, А.А. Стохастическая математическая модель ионно-звуковых волн в плазме / А.А. Замышляева // Естественные и технические науки (Раздел математическое моделирование, численные методы и комплексы программ). – 2013. – № 4. – С. 284–292.
22. Замышляева, А.А. Уравнение de Gennes звуковых волн в смектиках / А.А. Замышляева // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, вып. 4. – С. 655–656.
23. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска–Лява на графе / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 18–29.
24. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
25. Габов, С.А. Новые задачи математической теории волн / С.А. Габов. – М.: Физматлит, 1998. – 448 с.
26. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – Москва; Ленинград: ОНТИ, 1935. – 674 с.
27. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2004. – 736 с.

Поступила в редакцию 27 сентября 2016 г.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ТЕПЛОВЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

А.И. Короткий, И.А. Целелев

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Российская Федерация
E-mail: korotkii@imm.uran.ru*

Определяются характеристики течения вязкой теплопроводной жидкости по измерениям температуры и потока тепла на ее дневной поверхности. Искомыми характеристиками являются температура и скорость жидкости. Задача рассматривается в стационарной постановке и формализуется как обратная граничная задача для модели высоковязкой несжимаемой жидкости. Задача является некорректной и решается вариационным методом. Проведены расчеты модельных примеров.

Ключевые слова: вязкая жидкость; обратная граничная задача; вариационный метод; численное моделирование.

Введение

Рассматриваются две взаимно связанные между собой задачи. Одна из этих задач условно называется прямой, другая – обратной. Охарактеризуем содержательные стороны этих задач. Прямая задача состоит в определении характеристик потока вязкой жидкости, протекающей в некоторой известной области. Считается, что математическая модель движения жидкости известна, известны также соответствующие исходные (граничные) данные. Искомыми характеристиками в прямой задаче являются поле температур жидкости в известной области, поле скоростей жидкости и переменная вязкость жидкости. Искомыми характеристиками могут быть также распределения вязкости и плотности в известной области или какие-нибудь другие параметры. Обратная задача состоит в определении характеристик потока жидкости по некоторым «избыточным» исходным данным, заданным на части границы известной области. При этом математическая модель движения жидкости считается известной, а на оставшейся части границы области исходные данные заданы с «недостатком» или вовсе не заданы. Один из методов решения обратной задачи состоит в определении «корректных» граничных данных на участке границы с «недостатком» с помощью модели движения и известным граничным данным на участке границы с «избыточными» данными. Затем, с помощью модели движения и всей совокупности граничных данных определяются в результате решения прямой задачи искомые характеристики потока жидкости во всей известной области. Существуют методы, с помощью которых искомые характеристики могут находиться непосредственно по модели движения и граничным данным на участке границы с «избытком». С физической точки зрения «избыточность» граничных данных на некотором участке границы означает доступность этой части границы, возможность делать на ней дополнительные измерения необходимых величин. «Недостаточность» граничных данных на другом участке границы означает недоступность этой части границы, невозможность делать на ней измерения необходимых величин. Для простоты и определенности будут рассматриваться стационарные (установившиеся) варианты задач.

Рассматриваемая обратная задача является, как правило, некорректной и не обладает свойством устойчивости [1, 2], малое возмущение исходных данных на участке границы с переопределением приводит к неконтролируемым ошибкам в определении искомого величин. Обычные классические численные методы не пригодны для решения неустойчивых задач, поэтому для их численного решения требуется применение или разработка специальных методов и алгоритмов. Одна из основных целей данной работы состоит в построении методов и алгоритмов конструктивного устойчивого численного моделирования решения рассматриваемой обратной задачи. Для решения задачи предлагается воспользоваться вариационным методом [1, 2], который основан на сведении исходной задачи к некоторой экстремальной задаче на минимум подходящего целевого функционала (невязки) и минимизации этого функционала каким-либо подходящим методом (например, модифицированными градиентными методами или подходящими квазиньютоновски-

ми методами [3–6]). При минимизации целевого функционала организуется итерационный процесс, который фактически сводит исходную задачу к серии устойчивых корректно поставленных прямых задач.

Привлечение моделей механики вязкой жидкости для моделирования различных технологических и природных процессов получило широкое распространение, как в России, так и за рубежом (см., например, [7–12]). В частности, такие модели используются для моделирования различных процессов в земной коре и недрах, в вулканологии, металлургии, стекольном деле и многих других областях [10–12]. Совершенствование измерительных приборов и методов обработки данных позволяет получать более детальную информацию о процессе или явлении. Решение обратных задач восстановления характеристик среды по доступным прямому измерению данным с помощью методов решения некорректных задач является перспективным направлением исследований. Интерес к таким задачам возрастает в связи с увеличением производительности вычислительных мощностей современных ЭВМ и расширяющимся кругом приложений. Совместный анализ данных и результатов численного моделирования приводит к более глубокому пониманию природы явлений. Дополнительные мотивации к теме исследований и анализ состояния вопроса описаны, например, в [10–12].

В данном исследовании разработаны алгоритмы, реализующие вариационный метод для рассматриваемой обратной задачи. Проведены серии вычислительных экспериментов, показавших работоспособность предложенных метода и алгоритмов.

Постановка задачи

Математическая модель установившегося движения вязкой жидкости области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (рис. 1) в приближении Буссинеска представлена безразмерными уравнениями [7, 8]

$$\nabla \cdot (\mu(T)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) = Re \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u} + \nabla P - Ra T \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) = \langle \mathbf{u}, \nabla T \rangle, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} \in \Omega$ – точка пространства с декартовыми координатами $(x_1; x_2)$; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}); u_2(\mathbf{x}))$ – вектор скорости движения жидкости; $P = P(\mathbf{x})$ – давление; $T = T(\mathbf{x})$ – температура; $\mu = \mu(T)$ – вязкость; $\lambda = \lambda(T) = k(T) / (c \rho_*)$ – коэффициент температуропроводности; $k = k(T)$ – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; ρ_* – температурно независимая плотность; Re – число Рейнольдса [8, с. 87]; Ra – число Рэлея [7, с. 7]; $\mathbf{e}_2 = (0; -1)$ – единичный вектор; ∇ – градиент; T – операция транспонирования; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов; $\nabla \cdot$ – дивергенция.

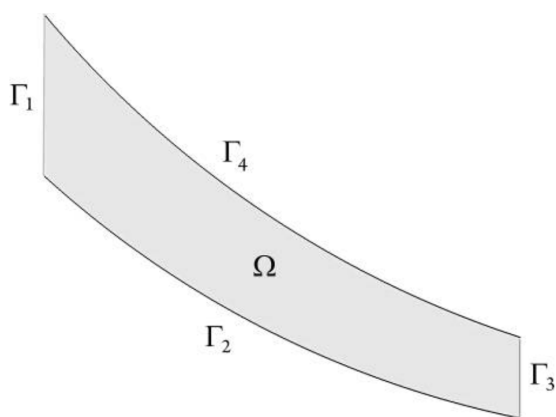


Рис. 1. Область Ω и ее граница Γ

Прямая задача состоит в нахождении решения (T, \mathbf{u}, P) системы уравнений (1)–(3), удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{aligned} \Gamma_1: T = T_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1; \quad \Gamma_2: T = T_2, \quad \mathbf{u} = 0; \\ \Gamma_3: T = T_3, \quad P = 0, \quad \sigma \mathbf{n} = 0; \\ \Gamma_4: T = T_4, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \sigma \mathbf{n} - \langle \sigma \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ – тензор вязких напряжений; $T_1, T_2, T_3, T_4, \mathbf{u}_1$ – заданные функции.

Обратная задача состоит в нахождении решения (T, \mathbf{u}, P) системы уравнений (1)–(3), удовлетворяющего граничным условиям

$$\Gamma_1 : T = T_1, \mathbf{u} = \mathbf{u}_1; \Gamma_2 : \mathbf{u} = 0;$$

$$\Gamma_3 : T = T_3, P = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0;$$

$$\Gamma_4 : T = T_4, k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi, \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = 0;$$

функции $T_1, T_3, T_4, \varphi, \mathbf{u}_1$ заданы (T_4, φ – результаты измерений температуры и потока тепла).

Метод решения обратной задачи

Дадим вариационную формулировку обратной задаче [9, 10]. Пусть наблюдаемый поток тепла φ на Γ_4 в обратной задаче соответствует некоторому заранее неизвестному распределению температуры $T = T_2 = v^*$ на границе Γ_2 . Пусть T^* – компонента решения (T^*, \mathbf{u}^*, P^*) прямой задачи при условии $T = T_2 = v^*$ на границе Γ_2 в (4), тогда $\varphi = k(T^*) \partial T^* / \partial \mathbf{n}$ на Γ_4 . Пусть V – некоторое множество допустимых распределений температуры на Γ_2 , содержащее в себе элемент v^* . Для $v \in V$ рассмотрим функционал качества

$$J(v) = \int_{\Gamma_4} (k(T_v) \frac{\partial T_v}{\partial \mathbf{n}} - \varphi)^2 d\Gamma,$$

где T_v – компонента решения (T_v, \mathbf{u}_v, P_v) прямой задачи с условием $T = T_2 = v$ на Γ_2 в (4). Функционал качества должен принимать нулевое значение при $v = v^*$, $J(v^*) = 0$. Искомое граничное температурное распределение v^* является минимизирующим элементом в вариационной (экстремальной) задаче

$$J(v) \rightarrow \min : v \in V. \quad (5)$$

Таким образом, от решения обратной задачи можно перейти к решению вариационной (экстремальной) задачи (5).

Для минимизации целевого функционала часто необходим градиент этого функционала. Градиент находится по правилу

$$\nabla J(v) = k(T_v) \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2},$$

где z – компонента решения (z, \mathbf{w}, q) сопряженной задачи

$$\nabla \cdot (\mu(T_v) (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)) = \nabla q + z \nabla T_v + Re (\nabla \mathbf{u}_v^T \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} \mathbf{u}_v), \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\nabla \cdot (\lambda(T_v) \nabla z) + \langle \mathbf{u}_v, \nabla z \rangle + Ra \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2 \rangle = \mu'(T_v) \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T, \nabla \mathbf{u}_v + \nabla \mathbf{u}_v^T] + \lambda'(T_v) \langle \nabla T_v, \nabla z \rangle, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 : z = 0, \mathbf{w} = 0;$$

$$\Gamma_3 : z = 0, q = 0, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = 0 \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \eta(T_v) (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T));$$

$$\Gamma_4 : z = 2 \left(k(T_v) \frac{\partial T_v}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right), \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = 0, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = 0.$$

Функционал качества минимизируется методом сопряженных градиентов в реализации Полака–Рибьера [4–6].

Численное моделирование

Для демонстрации работы приведенного алгоритма была разработана программа в пакете инженерных вычислений OpenFOAM (*Open Source Field Operation And Manipulation*). Он представляет собой открытую объектно ориентированную платформу, реализованную на языке программирования C++, обладает большой функциональностью для решения задач механики жидкости и газа, опускает реализацию приложений на мультипроцессорных кластерах. В частности в нем реализованы процедуры решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка в произвольной пространственной области.

Реализация в пакете OpenFOAM использует широкий набор эффективных процедур аппроксимации дифференциальных операторов, различных типов граничных условий и решения систем линейных алгебраических уравнений, которые возникают после дискретизации краевых задач в пространственных областях с различной геометрией. Программные коды легко адаптировать к изменениям в исходной математической модели и архитектуре вычислителя. Полную информацию о возможностях данного пакета можно найти в [13].

Прямая и сопряженная задачи дискретизировались методом конечных объемов. Тестовый пример рассчитывался на сетке из 1500 гексаэдральных ячеек. Для определения поля скоростей и давления при заданном распределении температуры применялся SIMPLE-алгоритм (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) [14]. Для реализации данного алгоритма решались системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с положительно определенными и симметричными матрицами с реализацией метода сопряженных градиентов с подходящим предобуславливателем. Для уравнения теплового баланса соответствующие СЛАУ решалась бинаправленным методом сопряженных градиентов [15]. Для аппроксимации оператора Лапласа всюду выбиралась линейная схема Гаусса с коррекцией потока, для аппроксимации конвективного оператора – TVD схема с ограничителем minmod [16]. Для расчетов использовалось одно ядро CPU Intel Core i5, 2,6 GHz, RAM 16 MB, OS X 10.10. Одна итерация метода сопряженных градиентов рассчитывалась примерно 15 мин. (решение прямой и сопряженной задач и определение шага спуска в методе сопряженных градиентов).

Уточним модельную область Ω . Граница области состоит из следующих частей: Γ_1 есть отрезок прямой линии, соединяющий точки (0; 2,5) и (0; 1,5); Γ_2 – дуга окружности, соединяющая точки (0; 1,5), (1,5; 0,5) и (3; 0;0); Γ_3 – есть отрезок прямой линии, соединяющий точки (3,0; 0) и (3,0; 0,5); Γ_4 – дуга окружности, соединяющая точки (3,0; 0,5), (1,5; 1,2) и (0; 2,5).

Фиксируем следующие характерные значения параметров в модели, соответствующие усредненным значениям в потоке лавы [11, 12, 17]: $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $h = 10 \text{ м}$, $\rho_{ref} = 3000 \text{ кг/м}^3$, $\mu_{ref} = 3,5 \cdot 10^9 \text{ Па с}$, $T_{ref} = 300 \text{ К}$, $T_* = 1473 \text{ К}$, $T_c = 1273 \text{ К}$, $\Delta T = T_* - T_{ref}$, $\lambda_{ref} = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $c_{ref} = 1200 \text{ Дж/кг К}$, $u_{ref} = 10^{-3} \text{ м/с}$, откуда получаем значения $Ra = 100$, $Re = 8,5 \cdot 10^{-8}$.

В модельных расчетах принимается зависимость вязкости от температуры

$$\mu(T) = 1 + \frac{1}{2} 10^3 \left(1 + \tanh(-100(T_{ref}T - T_c)) \right). \quad (21)$$

Принимается зависимость коэффициента теплопроводности от температуры [16]

$$k(T) = \begin{cases} 1,15 + 5,9 \cdot 10^{-7} (T_{ref}T - T_*)^2, & T_{ref}T < T_*, \\ 1,15 + 9,7 \cdot 10^{-6} (T_{ref}T - T_*)^2, & T_{ref}T > T_*. \end{cases} \quad (22)$$

На границе Γ_1 задается температура $T_1(x_1, x_2) = 5,0 - 0,5(x_2 - x_2^B)$, $x_2 \in [x_2^B, x_2^A]$, и скорость $\mathbf{u}_1(x_2) = U(x_2)\mathbf{n}_1$, где $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$ и $U(x_2)$ есть парабола, проходящая через три точки: $U(x_2^A) = 10$, $U(x_2^B) = 0$, $U(0,5(x_2^A + x_2^B)) = 7,25$. Температура $T_3(x_1, x_2) = 3,5 - 2(x_2 - x_2^D)$, $x_2 \in [x_2^D, x_2^E]$, на Γ_3 и $T_4(x_1, x_2) = 4,5 - 2(x_1 - x_1^A)/3$, $x_1 \in [x_1^A, x_1^E]$, на Γ_4 .

Интерес представляет область повышенной вязкости, так как она «тормозит» течения и тепловой поток. Увеличение вязкости жидкости определяется по пороговым значениям вязкости как подмножество $G \subset \Omega$, в точках $\mathbf{x} \in G$ которого $\mu(T(\mathbf{x})) \geq \mu_\varepsilon$, где $\mu_\varepsilon = \mu_{\max} - \varepsilon(\mu_{\max} - \mu_{\min})$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

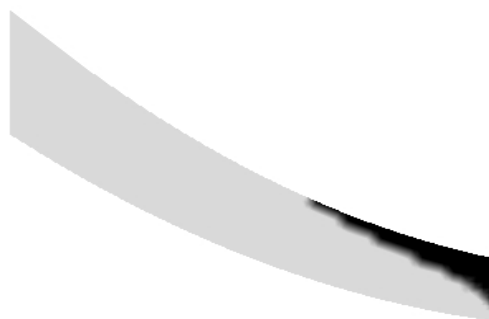


Рис. 2. Область повышенной вязкости (черная)

На рис. 2 показано местоположение области повышенной вязкости, которую необходимо восстановить. На рис. 3 иллюстрируется точность восстановления области повышенной вязкости на шагах итерации $n = 0, 5, 10, 30$ при $\varepsilon = 0,5$.

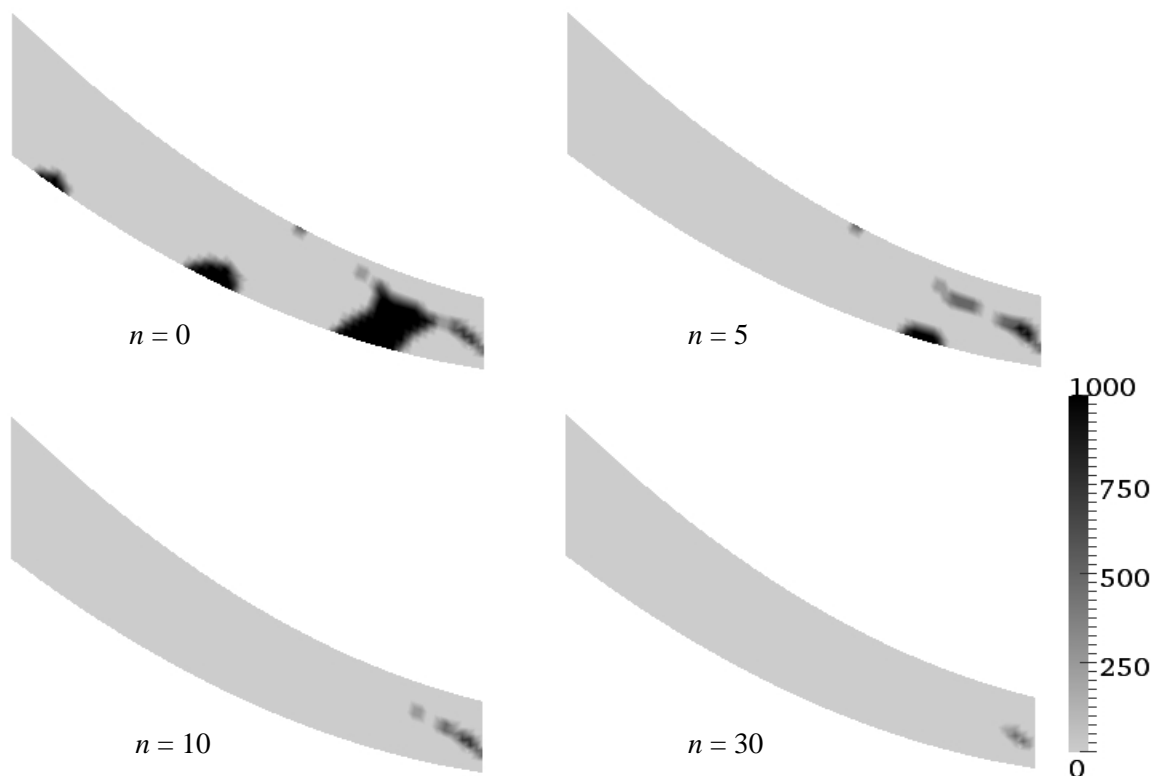


Рис. 3. Точность восстановления области повышенной вязкости



Рис. 4. Распределение температуры в расчетной области

На рис. 4 показано распределение температуры в области Ω ; на рис. 5 – точность восстановления температуры $\left| T^{(n)}(x) - T^*(x) \right|$ на шагах итерации $n = 0, 5, 10, 30$.

На рис. 6 показано поле распределения скоростей в области Ω ; на рис. 7 – точность восстановления поля скоростей $\left\| \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\|$ на шагах итерации $n = 0$ и $n = 30$.

Результаты расчетов показывают, что последовательность приближений метода сопряженных градиентов минимизирует функционал невязки устойчивым образом. Для данной аппроксимации расчетной области относительные точности решения систем линейных алгебраических уравнений в SIMPLE методе и методе решения уравнения теплового баланса составляли 10^{-2} , что

Математика

согласуется с точностью аппроксимации дифференциальных операторов на заданной неструктурированной сетке. Для тестового примера приемлемый уровень точности решения обратной задачи в определении температуры и поля скоростей достигается примерно за 30 итераций.

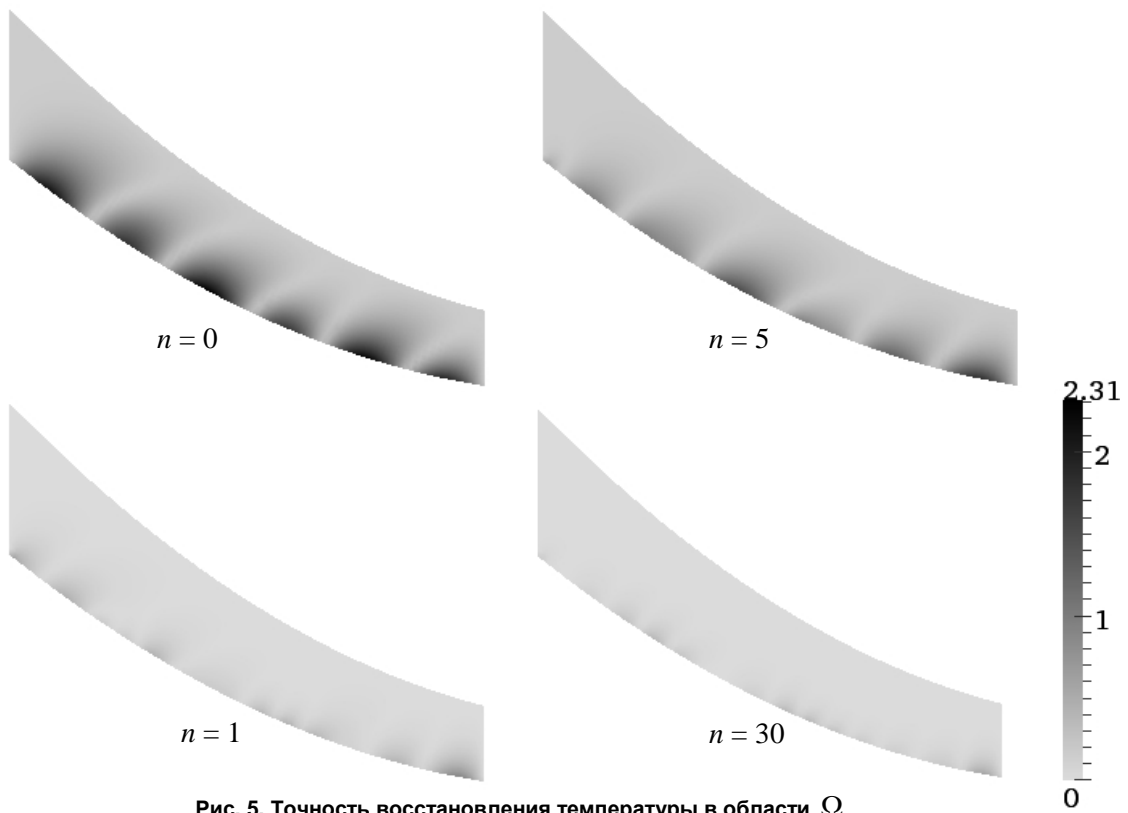


Рис. 5. Точность восстановления температуры в области Ω

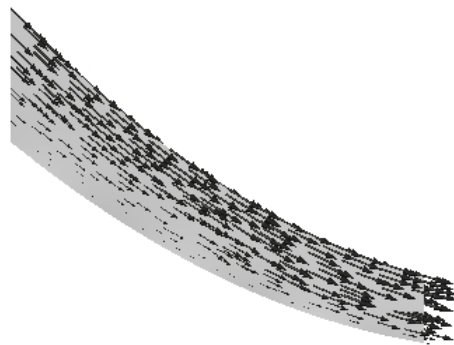


Рис. 6. Поле скоростей в расчетной области

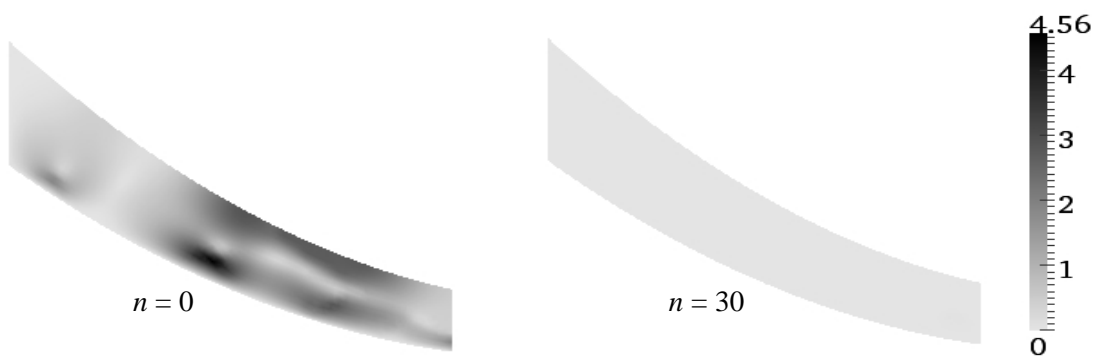


Рис. 7. Точность восстановления поля скоростей в области Ω

Заключение

Разработан алгоритм численного решения неустойчивой обратной граничной задачи механики вязкой жидкости, устойчивый к вычислительным погрешностям. Данный алгоритм основан на сочетании аналитических методов исследования математической модели и эффективных устойчивых методов решения экстремальных задач. Реализация алгоритма в пакете OpenFOAM позволила создать программные коды для решения рассматриваемой задачи, соответствующие современному уровню развития вычислительной техники и программного обеспечения для этой техники.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00155) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-10).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
4. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – New York: Springer, 1999. – 664 p.
5. Polak, E. Computational methods in optimization: a unified approach / E. Polak. – New York: Academic Press, 1971. – 329 p.
6. Floudas, Ch.A. Encyclopedia of optimization / Ch.A. Floudas, P.M. Pardalos. – New York: Springer, 2009. – 4626 p.
7. Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability / S. Chandrasekhar. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – 654 p.
8. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
9. Короткий, А.И. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости / А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2006. – Т. 12, № 2. – С. 88–97.
10. Короткий, А.И. Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2015. – 168 с.
11. Ismail-Zadeh, A. Data-driven numerical modelling in geodynamics: methods and applications / A. Ismail-Zadeh, A. Korotkii, I. Tsepelev. – Berlin: Springer International Publishing, 2016. – 105 p. DOI 10.1007/978-3-319-27801-8
12. Korotkii, A. Quantitative reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements / A. Korotkii, D. Kovtunov, A. Ismail-Zadeh, I. Tsepelev, O. Melnik // Geophysical Journal International. – 2016. – Vol. 205. – Issue 3. – P.1767–1779. DOI:10.1093/gji/ggw117.
13. <http://www.openfoam.org/>
14. Issa, R.I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting / R.I. Issa // J. Comput. Phys. – 1986. – Vol. 62. – P. 40–65.
15. Van der Vorst, H.A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H.A. Van der Vorst // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1992. – Vol. 13. – № 2. – P. 631–644.
16. Sweby, P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws / P.K. Sweby // J. Numer. Anal. – 1984. – Vol. 21. – P. 995–1011.
17. Hidaka, M. VTFS project: Development of the lava flow simulation code LavaSIM with a model for three-dimensional convection, spreading, and solidification / M. Hidaka, A. Goto, S. Umino, E. Fujita // Geochem. Geophys. Geosyst. – 2005. – № 6. – Q07008, doi:10.1029/2004GC000869.

Поступила в редакцию 27 июня 2016 г.

NUMERICAL SIMULATION OF VISCOUS FLUID FLOW BASED ON THERMAL MEASUREMENTS AT ITS SURFACE

A.I. Korotkiy, I.A. Tsepelev

*Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: korotkii@imm.uran.ru*

The viscous heat-conducting fluid flow characteristics are determined based on temperature measurements and heat flow on its daylight surface. The desired characteristics are temperature and fluid velocity in the whole model area. The problem is considered in a stationary setting and formalized as an inverse boundary problem for the model of high-viscosity incompressible fluid. A mathematical model of this fluid flow is described with the help of the Navier–Stokes equations for a Newtonian fluid in the Boussinesq approximation in a gravity field, incompressible fluid equation, and equation of the energy conservation with the appropriate boundary conditions. The fluid density and viscosity depend on the temperature. The considered problem is incorrect and does not possess the property of stability. Therefore, a small perturbation of the initial data on the accessible part of the border leads to uncontrolled errors in the determination of the unknown quantities in the model area. Conventional classical numerical methods are not suitable for solving the problem, which is why a variation method is used for its numerical solution, which reduces the solution of the original inverse problem to a series of solutions for stable problems. The Polak–Ribiere conjugate gradient method is used to minimize a merit functional in a variation method. This method steadily solves a corresponding extremal problem. The gradient of merit functional is defined analytically as a sequential solution of the direct and conjugate boundary problems. Direct and conjugate problems are numerically solved by the classical method of finite volumes. Constructed algorithms of numerical simulation are implemented in OpenFOAM software. The calculations of model problems are done.

Keywords: viscous fluid; inverse boundary problem; variation method; numerical simulation.

References

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods of solution for ill-posed problems). Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p. (in Russ.).
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i eye prilozheniya* (The theory of linear ill-posed problems and its applications). Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).
3. Vasil'ev, F.P. *Metody optimizatsii* (Optimization methods). Moscow, Faktorial Press Publ., 2002, 824 p. (in Russ.).
4. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical optimization*. New York, Springer, 1999, 664 p. DOI: 10.1007/b98874
5. Polak E. *Computational methods in optimization: a unified approach*. New York, Academic Press, 1971, 329 p.
6. Floudas Ch.A., Pardalos P.M. *Encyclopedia of optimization*. New York, Springer, 2009, 4626 p.
7. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford, Clarendon Press, 1961, 652 p. DOI: 10.1017/s0022112062210592
8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* (Hydrodynamics). Moscow, Nauka, 1986, 736 p. (in Russ.).
9. Korotkiy A.I., Kovtunov D.A. Rekonstruktsiya granichnykh rezhimov v obratnoy zadache teplovoy konveksii vysokovyazkoy zhidkosti (Reconstruction of boundary regimes in the inverse problem of

thermal convection of a highly viscous fluid). *Tr. IMM UrO RAN*, 2006, Vol. 12, no. 2, pp. 88–97. (in Russ.).

10. Korotkiy A.I., Starodubtseva Yu.V. *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modeley teplomassoperenosa* (Simulation of direct and inverse boundary problems for stationary models of heat and mass transfer). Ekaterinburg: Izdatel'stvo Ural'skogo universiteta Publ., 2015, 168 p. (in Russ.).

11. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I. *Data-driven numerical modelling in geodynamics: methods and applications*. Berlin: Springer International Publishing, 2016. 105 p. DOI: 10.1007/978-3-319-27801-8_1

12. Korotkii A., Kovtunov D., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O. Quantitative reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements. *Geophysical Journal International*, 2016, Vol. 205, Issue 3. pp. 1767–1779. DOI: 10.1093/gji/ggw117.

13. <http://www.openfoam.org/>

14. Issa R.I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1986, Vol. 62, pp. 40–65. DOI:10.1016/0021-9991(86)90099-9

15. Van der Vorst H.A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 1992, Vol. 13, no. 2. pp. 631–644. DOI: 10.1137/0913035

16. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *J. Numer. Anal.*, 1984, Vol. 21, pp. 995–1011. DOI: 10.1137/0721062

17. Hidaka M., Goto A., Umino S., Fujita E. VTFS project: Development of the lava flow simulation code LavaSIM with a model for three-dimensional convection, spreading, and solidification. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 2005, no. 6., Q07008. DOI: 10.1029/2004GC000869

Received June 27, 2016

О СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ МАТРИЦАМИ, ЗАДАНЫМИ В ТЕРМИНАХ ТЕКУЩИХ СКОРОСТЕЙ РЕШЕНИЯ

Е.Ю. Машков

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Стохастические уравнения леонтьевского типа являются частным случаем стохастических систем дифференциально-алгебраического типа. В работе изучается система, заданная в терминах текущих скоростей (симметрических производных в среднем) решения. Отметим, что по физическому смыслу текущая скорость стохастических процессов являются прямым аналогом физической скорости детерминированных процессов. Предполагается, что матрицы изучаемой системы являются прямоугольными зависящими от времени и удовлетворяют требованиям, при выполнении которых система не разрешима относительно симметрической производной. Для исследования данной системы уравнений мы используем подход, основанный на преобразовании квадратной матрицы к канонической форме Жордана и замене метрики пространства. Доказана теорема существования решений для стохастического уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях при выполнении некоторых дополнительных условий на ее матрицы коэффициентов и свободные члены.

Ключевые слова: производная в среднем; текущая скорость; винеровский процесс; стохастическое уравнение леонтьевского типа.

Введение

Под стохастическим уравнением леонтьевского типа понимается стохастическая дифференциально-алгебраическая система

$$dL(t)\zeta(t) = M(t)\zeta(t)dt + f(t)dt + N(t)dw(t),$$

где $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ – достаточно гладкие $k \times n$ матрицы, $f(t)$ – достаточно гладкая k – мерная вектор-функция, $w(t)$ – винеровский процесс. Такие системы возникают в приложениях при математическом описании технических [1], биологических [2], экономических [3] и других систем. Здесь процессом белого шума $\frac{dw(t)}{dt}$ описываются помехи в системе. Для изучения дан-

ного класса систем в работе [4] была построена модификация подхода, описанного в работах Бояринцева Ю.Е. и Чистякова В.Ф. [5] при исследовании соответствующих дифференциальных уравнений без случайных возмущений. В этой работе мы изучаем процессы, описываемые стохастическим уравнением леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения [6, 7]. Отметим, что текущие скорости (симметрические производные в среднем) введены Э. Нельсоном в 60-х годах 20 века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики) и они являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. Доказана теорема существования решений стохастического уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях при выполнении некоторых ограничений на его матрицы коэффициентов и свободные члены.

Производные в среднем

Рассмотрим случайный процесс $\zeta(t)$ в R^n (где мы фиксируем σ – алгебру борелевских множеств), $t \in [0, l]$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) и такой, что $\zeta(t)$ является L_1 – случайной величиной при всех t .

Определение 1. [8] σ – подалгебра σ – алгебры F , порожденная прообразами борелевских множеств при отображении $\xi(t): \Omega \rightarrow R^n$, называется «настоящее» и обозначается N_t^ξ .

Всюду далее для удобства мы обозначаем через E_t^ξ условное математическое ожидание $E(\cdot | N_t^\xi)$ относительно «настоящего» N_t^ξ для $\xi(t)$. Обычное («безусловное») математическое ожидание обозначается символом E .

В общем случае, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, поэтому его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Э. Нельсону (см., например, [8]) даем следующее определение:

Определение 2. [8] (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 – случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 – случайная величина вида

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right),$$

где условия и обозначения такие же, как в (i).

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [9]) вытекает, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий) $Y^0(t, x)$ и $Y_*^0(t, x)$ на R^n , то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Определение 3. [8] Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.

Введем в рассмотрение векторные поля $v^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) + Y_*^0(t, x))$ и $u^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) - Y_*^0(t, x))$.

Определение 4. [8] $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Физический смысл текущей и осмотической скоростей (см., например, [8]) состоит в следующем. Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов. Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Введем, следуя Ю.Е. Гликлиху [6], дифференциальный оператор D_2 , который действует на L_1 – случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, l]$ по правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right),$$

где $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в R^n), а $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ – это вектор-строка (сопряженный или транспонированный вектор), а предел предполагается су-

существующим в $L_1(\Omega, F, P)$. Отметим, что матричное произведение столбца слева и строки справа – это матрица, так что $D_2\xi(t)$ есть симметрическая неотрицательно-определенная матричная функция на $[0, l] \times R^n$.

Определение 5. [6] D_2 называется квадратичной производной в среднем.

Замечание 1. Из свойств условного математического ожидания [9] следует, что существует измеримое по Борелю отображение (регрессия) $\alpha(t, x): R \times R^n \rightarrow \bar{S}_+$, такое, что $D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t))$, где \bar{S}_+ – множество неотрицательно определенных симметрических $n \times n$ матриц.

Рассмотрим диффузионный процесс, являющийся сильным решением следующего стохастического дифференциального уравнения в форме Ито

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s), \quad (1)$$

где $a(t, x)$ и $A(t, x)$ – гладкие по совокупности переменных отображения из $[0, l] \times R^n$ в R^n и в $L(R^n, R^n)$, соответственно. Тогда имеют место

Теорема 1. [6] Пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс (1). Тогда производная в среднем справа $D\xi(t)$ существует и имеет вид $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$.

Теорема 2. [6] Для диффузионного процесса (1) квадратичная производная $D_2\xi(t)$ существует и имеет вид $D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t))$, $\alpha(t, x) = A(t, x)A^*(t, x)$ – коэффициент диффузии.

Основной результат

Рассмотрим вещественные C^∞ -гладкие $k \times n$ матрицы $L(t)$, $M(t)$ и k – мерную вектор-функцию $f(t)$. Пусть псевдообратная матрица $M^+(t)$ к $M(t)$ тоже C^∞ -гладкая и

$$P_{L^*(t)}^* M(t) \neq 0, P_{M^*(t)}^* L(t) = 0, P_{M^*(t)}^* f(t) = 0, \quad (2)$$

где $P_{L^*(t)}^*: R^k \rightarrow N(L^*(t))$ – ортогональный проектор. Как и в работе [10] предположим, что матрица $M^+(t)L(t)$ постоянного ранга $\text{rank } M^+(t)L(t) = \delta$, $n - \delta = \omega$ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической. При этом неособенным преобразованием подобия матрица $M^+(t)L(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$ ($\det S(t) \neq 0$) приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & 0 \\ 0 & O_\omega \end{pmatrix}, J_\delta(t) \in R^{\delta \times \delta}, \det J_\delta(t) \neq 0, O_\omega \in R^{\omega \times \omega}.$$

Рассмотрим некоторую гладкую симметрическую положительно определенную матрицу $\Xi(t)$ в R^δ . Для матрицы $\Xi(t)$ существует (см. [6]) гладкая невырожденная матрица $C(t)$ в R^δ , такая, что $\Xi(t) = C(t)C^*(t)$, где матрица $C^*(t)$ является сопряженной к $C(t)$. Введем в R^n матрицы

$\Theta(t) = \begin{pmatrix} \Xi(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{\Theta} = S(t)\Theta(t)S^*(t)$. Тогда мы будем иметь дело с системой

$$\begin{cases} L(t)D_S\xi(t) = M(t)\xi(t) + f(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{\Theta}, \end{cases} \quad (3)$$

которую, как и в работе [7], будем называть стохастическим уравнением леонтьевского типа в текущих скоростях.

Корректные начальные условия для решений уравнения (3) мы опишем ниже. При выполнении условий (2) систему (3) можно представить в виде

$$\begin{cases} M^+(t)L(t)D_S\xi(t) = \xi(t) + M^+f(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{\Theta}. \end{cases}$$

С применением неособенного преобразования подобия, описываемого матрицей $S(t)$, эта система преобразуется к следующему каноническому виду

$$\begin{cases} J(t)D_S\eta(t) = \left(I_n - J(t)S^{-1}(t)\frac{dS}{dt} \right)\eta(t) + S^{-1}(t)M^+(t)f(t), \\ D_2\eta(t) = \Theta, \end{cases} \tag{4}$$

где $\eta(t) = S^{-1}(t)\xi(t) := \text{col}(\eta^{(1)}(t), \eta^{(2)}(t))$, $\eta^{(1)}(t) \in R^\delta$, $\eta^{(2)}(t) \in R^\omega$. Заметим, что первое уравнение системы (4) не разрешимо относительно симметрической производной, поскольку $P_{J^*(t)}\left(I_n - J(t)S^{-1}(t)\frac{dS}{dt} \right) = P_{J^*(t)} \neq 0$, где ортогональный проектор определяется по формуле

$$P_{J^*(t)} = \begin{pmatrix} O_\delta & 0 \\ 0 & I_\omega \end{pmatrix}, P_{J^*(t)} : R^n \rightarrow N(J^*(t)).$$

Введем обозначение

$$S^{-1}(t)\frac{dS}{dt} = \begin{pmatrix} G_{\delta\delta}(t) & G_{\delta\omega}(t) \\ G_{\omega\delta}(t) & G_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, G_{\delta\delta}(t) \in R^{\delta \times \delta}, G_{\omega\omega}(t) \in R^{\omega \times \omega}.$$

Также обозначим $S^{-1}(t)M^+(t)f(t) = \text{col}(\phi(t), \psi(t))$, где $\phi(t) = (I_\delta, O)S^{-1}(t)M^+(t)f(t) \in R^\delta$, $\psi(t) = (O, I_{n-\delta})S^{-1}(t)M^+(t)f(t) \in R^\omega$.

Отметим, что поскольку по построению матрицы $\bar{\Theta}$ и $\Theta(t)$ симметричны и неотрицательно определены, уравнения (3) и (4) корректны.

Таким образом, R^n разлагается в прямую сумму двух подпространств R^δ и R^ω так, что уравнение (4) разлагается на два уравнения в этих подпространствах:

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = (J_\delta^{-1}(t) - G_{\delta\delta}(t))\eta^{(1)}(t) - G_{\delta\omega}(t)\eta^{(2)}(t) + \phi(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t) = \Xi(t) \end{cases}$$

в подпространстве R^δ и

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + \psi(t) = 0, \\ D_2\eta^{(2)}(t) = O \end{cases} \tag{5}$$

в подпространстве R^ω .

Из второго равенства (5) вытекает, что решение уравнения (5) не является стохастическим, тогда из первого равенства вытекает, что решение уравнения (5) имеет вид $\eta^{(2)}(t) = -\psi(t)$. Очевидно, что начальные условия в этом случае предполагаются вида $\eta^{(2)}(0) = -\psi(0)$.

С учетом сказанного выше, уравнение в подпространстве R^δ примет вид

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = (J_\delta^{-1}(t) - G_{\delta\delta}(t))\eta^{(1)}(t) + G_{\delta\omega}(t)\psi(t) + \phi(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t) = \Xi(t). \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что если решение (6) существует, то оно должно представляться в виде (1).

Для исследования (6) введем в R^δ новое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которое для произвольных векторов X и Y из R^δ имеет вид $\langle X, Y \rangle = (\Xi^{-1}(t)X, Y)$. Введем начальное вероятност-

ное распределение ρ_0 в R^δ такое, что оно нигде не равно нулю, через $\eta_0^{(1)}$ обозначим случайную величину в R^δ с плотностью ρ_0 . Рассмотрим векторное поле $v(t, x) = (J_\delta^{-1}(t) - G_{\delta\delta}(t))x + G_{\delta\omega}(t)\psi(t) + \phi(t)$ и обозначим через g_t его поток. Тогда из Теоремы 8.50 из [6] следует, что плотность $\rho(t)$ решения (6) с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t, x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (\text{Div } v)(s, g_s(g_{-t}(x))) ds$, $p_0 = \ln \rho_0$ и Div обозначает дивергенцию в R^δ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Отсюда, для заданной матрицы $\Xi(t)$ и начальной плотности ρ_0 построенная плотность $\rho(t)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с гладким векторным полем $v(t, x)$. Тогда после нахождения плотности $\rho(t)$ для решения уравнения (6) мы можем вычислить также осмотическую скорость $u(t, x)$ по формуле $u = \frac{1}{2} \text{Grad } p$, где Grad – градиент относительно нового скалярного произведения [6]. Заметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и матрицей Ξ и, стало быть, производная в среднем справа для решения также однозначно вычисляется по формуле $a(t, x) = v(t, x) + \frac{1}{2} \text{Grad } p$. Следовательно, по теории уравнений с производными в среднем справа (см. Теоремы 1 и 2, а также [6]) $\eta^{(1)}(t)$ должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению $\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int_0^t a(s, \eta^{(1)}(s)) ds + \int_0^t C(s) dw(s)$, которое имеет сильное и сильно единственное решение $\eta^{(1)}(t)$ с начальной плотностью ρ_0 , корректно определенное для $t \in [0, l]$ (см. [11]). А это и есть решение уравнения (6) в виде (1), которое мы ищем.

Таким образом, мы доказали

Теорема 3. Пусть у нас имеются C^∞ -гладкие $k \times n$ матрицы $L(t)$, $M(t)$ и k -мерная вектор-функция $f(t)$, такие что $P_{L(t)}^* M(t) \neq 0$, $P_{M^*(t)} L(t) = 0$, $P_{M^*(t)} f(t) = 0$, где $P_{L(t)}^* : R^k \rightarrow N(L^*(t))$; пусть псевдообратная матрица $M^+(t)$ к $M(t)$ тоже C^∞ -гладкая; пусть матрица $M^+(t)L(t)$ постоянного ранга $\text{rank } M^+(t)L(t) = \delta$, $n - \delta := \omega$, и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; пусть $S(t)$ – неособенная $n \times n$ – матрица, преобразующая матрицу $M^+(t)L(t)$ к канонической форме Жордана, $M^+(t)L(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$; пусть $\Xi(t)$ – гладкая симметрическая положительно определенная матрица в R^δ , $\Theta(t) = \begin{pmatrix} \Xi(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\Theta} = S(t)\Theta(t)S^*(t)$ и $t \in [0, l]$. Тогда уравнение

$$\begin{cases} L(t)D_S \xi(t) = M(t)\xi(t) + f(t), \\ D_2 \xi(t) = \bar{\Theta} \end{cases} \quad \text{преобразованное} \quad \text{к}$$

$$\begin{cases} J(t)D_S \eta(t) = \left(I_n - J(t)S^{-1}(t) \frac{dS}{dt} \right) \eta(t) + S^{-1}(t)M^+(t)f(t), \\ D_2 \eta(t) = \Theta, \end{cases} \quad \text{где } \eta(t) = S^{-1}(t)\xi(t), \text{ с начальными}$$

условиями $\eta^{(2)}(0) = -\psi(0)$ в R^ω , где $\psi(t) = (O, I_{n-\delta})S^{-1}(t)M^+(t)f(t)$, и случайной величиной с плотностью ρ_0 нигде не равной нулю в R^δ , имеет решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00620).

Литература

1. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридок // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192). – С. 116–120.
2. Келлер, А.В. О вырожденной дискретной балансовой динамической модели клеточного цикла / А.В. Келлер, С.И. Эбель // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию: сб. тр. всероссийской научно-практической конференции. – Челябинск, 2014. – С. 74–79.
3. Келлер, А.В. Методика построения статической и динамической балансовых моделей на уровне предприятия / А.В. Келлер, Т.А. Шишкина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. – 2013. – Т. 7. – № 3. – С. 6–11.
4. Mashkov, E.Yu. On the stochastic systems of differential-algebraic type / E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 34–45.
5. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.
7. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 2. – P. 45–51.
8. Nelson, E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews. – 1966. – Vol. 150, no. 4. – P. 1079–1085.
9. Партасарати, К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К.Р. Партасарати. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
10. Чуйко, С.М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем / С.М. Чуйко // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 5. – С. 769–783.
11. Gihman, I.I. Theory of stochastic processes. Vol. 3. / I.I. Gihman, A.V. Skorohod. – New York: Springer-Verlag, 1979. – 388 p.

Поступила в редакцию 4 августа 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 4, pp. 26–32*

DOI: 10.14529/mmph160403

ON THE STOCHASTIC LEONTIEF TYPE EQUATIONS WITH VARIABLE MATRICES GIVEN IN TERMS OF CURRENT VELOCITIES OF THE SOLUTION

E.Yu. Mashkov

Southwest State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru

The stochastic Leontief type equations are a particular case of stochastic systems of differential-algebraic type. The paper deals with the study of the system given in terms of current velocities (symmetric derivatives at an average value) of the solution. It should be noted that in a physical meaning the current velocity of stochastic processes is a direct analog of the physical velocity of deterministic process. The authors assume that the matrices of the system under consideration are rectangular time dependants and satisfy the conditions, under which the system is not solvable with respect to the symmetric derivative. In order to investigate the system of equations the authors use an approach based on the transformation of a square matrix to the canonical Jordan form and changing the metric in the space. The theorem on solution existence for stochastic Leontief type equation with current velocities under some additional conditions on its matrices of coefficients and free terms is proved.

Keywords: derivative at an average value; current velocity; Wiener process; stochastic Leontief type equation.

References

1. Shestakov A.L., Sviridyk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Perturbed Signals. *Bulletin of the South Ural State University, Series of "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2010, no. 16(192), Issue 5, pp. 116–120. (in Russ.).
2. Keller A.V., Ebel' S.I. O vyrozhdennoy diskretnoy balansovoy dinamicheskoy modeli kletchnogo tsikla (On degenerate discrete balance dynamic model of cellular cycle). *Yuzhno-Ural'skaya molodezhnaya shkola po matematicheskomu modelirovaniyu: sbornik trudov vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* (South Ural Youth School on mathematical modeling: Proc. of All-Russian scientific-practical conference). Chelyabinsk, 2014, pp. 74–79. (in Russ.).
3. Keller A.V., Shishkina T.A. Metodika postroeniya staticheskoy i dinamicheskoy balansovykh modeley na urovne predpriyatiya (The method of constructing dynamic and static balance models at the company level). *Bulletin of SUSU. Series "Economics and Management"*, 2013, Vol. 7, no. 3, pp. 6–11. (in Russ.).
4. Mashkov E.Yu. On the stochastic systems of differential-algebraic type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 34–45.
5. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsial'nye sistemy. Metody resheniya i issledovaniya* (Algebraic-differential systems. Solution methods and investigations). Novosibirsk, Nauka Publ., 1998, 224 p. (in Russ.).
6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Springer-Verlag, 2011, 460 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9
7. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff type equations in terms of current velocities of the solution. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 45–51.
8. Nelson E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics. *Phys. Reviews*, 1966, Vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085. DOI: 10.1103/PhysRev.150.1079
9. Parthasarathy K.R. *Introduction to probability and measure*. Springer-Verlag, New York, Macmillan India, 1978, 312 p.
10. Chuiko S.M. Linear Noether boundary value problem for linear differential-algebraic system. *Computer Research and Modeling*, 2013, Vol. 5, no. 5, pp. 769–783. (in Russ.).
11. Gihman I.I., Skorohod A.V. *Theory of stochastic processes. Vol. 3*. New York, Springer-Verlag, 1979, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-8065-2

Received August 4, 2016

О КАРТИНЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

К.М. Расулов, Т.И. Тимофеева

Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация

E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Рассматривается краевая задача типа задачи Гильберта в классах квазигармонических функций. Разработан метод решения в явном виде однородной задачи Гильберта для квазигармонических функций первого рода в круговых областях. Кроме того, установлено, что картина разрешимости рассматриваемой задачи существенно зависит от того, является ли носителем краевых условий единичная окружность или окружность неединичного радиуса.

Ключевые слова: краевая задача; задача типа Гильберта; квазигармоническая функция; дифференциальное уравнение; круговая область; единичная окружность; неединичная окружность.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L .

Напомним [1–2], что квазигармоническими функциями рода n в области T^+ называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1–3], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ рода n ($n \geq 1$) принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. аналитическая функция $\varphi(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$\operatorname{Re}\{\overline{h(t)} \cdot W(t)\} = q(t), \quad (3)$$

где $h(t) = a(t) + ib(t)$ и $q(t)$ – заданные на контуре L функции класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющие на L условию Гельдера).

В дальнейшем сформулированную выше задачу будем называть *задачей Гильберта для квазигармонических функций рода n* или, коротко, *задачей Γ_n* , а соответствующую однородную задачу ($q(t) \equiv 0$) назовем *задачей Γ_n^0* .

Сразу заметим, что в силу представления (2) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \left(\overline{h(t)} \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} \right) = q(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

где $\varphi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \varphi(z)$. Но равенство (4) есть краевое условие хорошо известной (см., например, [4, с. 245]) *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи типа Гильберта* относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi(z)$.

Таким образом, по сути, задача Γ_n равносильна *обобщенной (дифференциальной) задаче типа Гильберта* (4) относительно аналитической функции $\varphi(z)$.

Хорошо известно (см., например, [4, 5]), что в общем случае обобщенная краевая задача Гильберта с краевым условием вида (4) решается *методом интегральных уравнений*, и её картина разрешимости не допускает точного описания (обычно в таких случаях говорят, что краевая задача *не решается в замкнутой форме*). Поэтому для краевых задач вида (4) актуальной является проблема, состоящая в установлении частных случаев достаточно общего характера, когда рассматриваемая задача решается эффективно и допускает точное описание картины её разрешимости.

В связи со сказанным выше, примем следующее определение (см. также [1, 6]).

Определение 2. Будем говорить, что краевая задача Γ_n допускает *явное решение*, если её общее решение удастся построить, используя только известные формулы для решения обычной скалярной задачи Гильберта для аналитических функций, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в явном виде (в квадратурах).

В работе [2] одного из авторов был разработан метод явного решения задачи Γ_n в случае, когда T^+ – *единичный круг*. Однако недавно авторы обнаружили, что картина разрешимости рассматриваемой задачи существенно меняется, если вместо единичного круга рассмотреть круг *не единичного радиуса*. Поэтому основной целью настоящей заметки является установление причины различия в картинах разрешимости однородной задачи Γ_n^0 в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $r > 0$, в зависимости от того, является ли $r=1$ или $r \neq 1$. Для удобства при сравнительном анализе результатов исследования задачи Γ_n^0 в случаях $r=1$ и $r \neq 1$, ниже мы отдельно излагаем эти результаты, причем ради краткости ограничиваемся решением задачи Γ_n^0 в классах квазигармонических функций *первого рода*, т.е. при $n=1$.

2. Метод явного решения задачи Γ_1^0 и картина её разрешимости в случае единичного круга. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$. Сразу отметим, что в случае $n=1$ представление (2) принимает вид:

$$W(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \varphi(z), \quad (5)$$

где $\varphi(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$.

Так как в точках единичной окружности L выполняется тождество $\bar{t} = 1/t$, то краевое условие (3) для однородной задачи Γ_1^0 ($q(t) \equiv 0$) с учетом (5) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ t^{-1} \overline{h(t)} \left(t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \varphi^+(t) \right) \right\} = 0, \quad t \in L, \quad (6)$$

где $\varphi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \varphi(z)$.

Далее введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге T^+ функцию

$$\Phi(z) = z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \varphi(z), \quad z \in T^+, \quad (7)$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая компонента искомой квазигармонической функции $W(z)$. С учетом (7) и $\bar{t} = 1/t$ краевое условие (6) можно записать так:

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{t \cdot h(t)} \cdot \Phi^+(t)\right\} = 0, \quad t \in L, \quad (8)$$

где $\Phi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} \Phi(z)$.

В дальнейшем равенство (8) будем использовать в следующей комплексной форме:

$$\Phi^+(t) = G(t) \overline{\Phi^+(t)}, \quad t \in L, \quad (9)$$

где

$$G(t) = -t^2 \frac{h(t)}{\overline{h(t)}}.$$

Поскольку решения задачи Гильберта Γ_1^0 ищутся в классе $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, то равенство (9) (или, что то же самое, (8)) есть краевое условие *обычной однородной* краевой задачи Гильберта относительно функции $\Phi(z)$, аналитической в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ (см., например, [1, с. 80] или [4, с. 283]).

В дальнейшем *индекс задачи Гильберта* (9), т.е. число $\chi = \operatorname{Ind} G(t) = 2(m+1)$, где $m = \operatorname{Ind} h(t)$, будем также называть *индексом исходной задачи* Γ_1^0 .

Как известно (см., например, [1, с. 91] или [4, с. 283]), если индекс $\chi \geq 0$, то однородная задача Гильберта (9) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулой

$$\Phi(z) = z^{m+1} X_0^+(z) \left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_k z^k + \bar{\lambda}_k z^{-k}) \right\}, \quad z \in T^+, \quad (10)$$

где

$$X_0(z) = \exp\{\gamma_0(z)\}, \quad \gamma_0(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi} G(\tau)]}{\tau} \frac{\tau+z}{\tau-z} d\tau; \quad (11)$$

α_0 – произвольная действительная постоянная, а $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) – произвольные комплексные постоянные. Если же индекс $\chi < 0$, то однородная задача Гильберта (9) не имеет (нетривиальных) решений.

Предположим, что $\chi \geq 0$. Тогда в силу (7) получаем

$$z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \varphi(z) = \Phi(z), \quad z \in T^+, \quad (12)$$

где $\Phi(z)$ – общее решение задачи Гильберта (9), задаваемое формулой (10). Таким образом, в случае $\chi \geq 0$ аналитическая компонента $\varphi(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ должна удовлетворять линейному неоднородному дифференциальному уравнению 1-го порядка вида (12).

Для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (12) сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \varphi(z) = 0, \quad z \in T^+. \quad (13)$$

Равенство (13) есть линейное однородное дифференциальное уравнение Эйлера 1-го порядка (см., например, [7], с. 136). Легко проверить, что все аналитические в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ решения уравнения Эйлера (13) можно задавать формулой

$$\varphi_0(z) = C_1 z, \quad (14)$$

где C_1 – произвольная комплексная постоянная.

Далее, частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (12) будем искать методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде

$$\varphi_1(z) = C_1(z) \cdot z, \quad (15)$$

где $C_1(z)$ – мероморфная в круге T^+ функция комплексной переменной z , для которой выражение $C_1(z) \cdot z$ есть аналитическое решение дифференциального уравнения (12) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на единичную окружность L вместе со своей производной 1-го порядка, т.е. $\varphi_1(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$. Для нахождения функции $C_1(z)$, подставляя функцию (15) в левую часть неоднородного уравнения (12), получаем следующее уравнение Лагранжа:

$$C_1'(z) = z^{-2}\Phi(z). \quad (16)$$

Из формулы (16) видно, что для того чтобы функция $C_1(z)$ была мероморфной в единичном круге T^+ , необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\Phi'(0) = 0. \quad (17)$$

При выполнении условия (17), с помощью интегрирования из (16) получаем

$$C_1(z) = \int z^{-2}\Phi(z)dz, \quad (18)$$

где $\int z^{-2}\Phi(z)dz$ – фиксированная первообразная функции $z^{-2}\Phi(z)$ в единичном круге T^+ .

Итак, в силу (15) и (18), частное решение неоднородного дифференциального уравнения (12) при $\chi \geq 0$ можно задавать в виде

$$\varphi_1(z) = z \int z^{-2}\Phi(z)dz. \quad (19)$$

Поскольку решения задачи Гильберта Γ_1^0 ищутся в классе $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, то функция (19) должна принадлежать классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, т.е. быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур L вместе со своей производной 1-го порядка. В силу известной теоремы Харди и Литтльвуда (см., например, [8, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге T^+ выполнялись неравенства:

$$\left| \frac{d^k \varphi_1(z)}{dz^k} \right| \leq \frac{M_k}{(1-\rho)^{1-\delta_k}}, \quad k=1,2, \quad (20)$$

где $\rho = |z|$; M_k, δ_k ($k=1,2$) – некоторые положительные постоянные, причем $0 < \delta_k \leq 1$.

Замечание 1. Важно отметить, что при $\chi \geq 0$ некоторые из условий вида (17) и (20) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений произвольных постоянных α_0 и $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k=1,2,\dots,m+1$), входящих в выражение функции $\Phi(z)$, задаваемой формулой (см. ниже пример 1).

Предположим, что условия (17) и (20) выполняются. Тогда при $\chi \geq 0$ общее решение линейного дифференциального уравнения (12), принадлежащее классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, можно задавать так:

$$\varphi(z) = C_1 z + z \int z^{-2}\Phi(z)dz, \quad (21)$$

где C_1 – произвольная комплексная постоянная. Тогда (в силу представления (5)) общее решение искомой однородной задачи Γ_1^0 при $\chi \geq 0$ можно задавать формулой:

$$W(z) = C_1 + z^{-1}\Phi(z) + \int z^{-2}\Phi(z)dz - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \left(C_1 z + z \int z^{-2}\Phi(z)dz \right). \quad (22)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\chi < 0$. В этом случае (см., например, [1, с. 91] или [4, с. 283]) однородная задача Гильберта (8) имеет лишь *тривиальное* (нулевое) решение, т.е. $\Phi(z) \equiv 0$. Следовательно, аналитическая компонента $\varphi(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ в данном случае должна удовлетворять линейному *однородному* дифференциальному уравнению

Эйлера 1-го порядка вида (13). Но как показано выше, общее решение однородного уравнения (13) задается формулой (14). Значит, при $\chi < 0$ общее решение однородной задачи Γ_n^0 также можно задавать формулой (22), где нужно положить $\Phi(z) \equiv 0$.

Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Если индекс $\chi \geq 0$ и $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, то для разрешимости однородной задачи Γ_1^0 в классе квазигармонических функций первого рода, необходимо и достаточно, чтобы функция $h(t)$ удовлетворяла условиям (17) и (20), причем при выполнении указанных условий, общее решение задачи Γ_1^0 можно задавать формулой (22). Если же индекс $\chi < 0$, то однородная задача Γ_1^0 в единичном круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ безусловно разрешима и её общее решение задается формулой (22), где нужно положить $\Phi(z) \equiv 0$.

Далее, пользуясь теоремой 1, опишем картину разрешимости однородной задачи Γ_n^0 в единичном круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, т.е. установим число l линейно независимых (над полем действительных чисел \mathbf{R}) решений этой задачи.

Пусть $\chi < 0$. Тогда, как видно из формулы (22), где $\Phi(z) \equiv 0$, общее решение однородной задачи Γ_1^0 в единичном круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ линейно зависит лишь от одной произвольной комплексной постоянной $C_1 = p_1 + iq_1$, т.е. от двух произвольных действительных постоянных p_1, q_1 . Значит, если $\chi < 0$, то $l = 2$.

Предположим теперь, что $\chi = 2(m+1) \geq 0$ и $T^+ = \{z: |z| < 1\}$. В этом случае общее решение однородной задачи Гильберта (8) (т.е. аналитическая функция $\Phi(z)$) линейно зависит от $2m+3$ произвольных действительных постоянных (см. формулу (10)). Но некоторые из указанных постоянных могут исчезнуть в результате удовлетворения условий разрешимости вида (17) и (20) (см. замечание 1 и ниже пример 1). Следовательно, в данном случае общее решение задачи Γ_1^0 , задаваемое формулой (22), линейно зависит не более чем от $2m+5$ произвольных действительных постоянных, т.е. если $\chi \geq 0$, то $l \leq 2m+5$, где $m = \text{Ind}h(t)$.

Пример. Требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ первого рода в круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, принадлежащие классу $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ и удовлетворяющие на $L = \{t: |t| = 1\}$ условию

$$\text{Re}\{W(t)\} = 0. \quad (23)$$

Решение. В данном примере $n=1$, $h(t)=1$ и $m = \text{Ind}h(t) = 0$. Следовательно, индекс данной задачи $\chi = 2(m+1) = 2$. Значит, согласно формуле (10), в данном случае имеем:

$$\Phi(z) = iz\{\alpha_0 + (\lambda_1 z - \bar{\lambda}_1 z^{-1})\}, \quad z \in T^+, \quad (24)$$

где α_0 – произвольная действительная постоянная, а $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ – произвольная комплексная постоянная. Заметим, что дифференциальное уравнение (13) в данном случае имеет вид:

$$z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \varphi(z) = iz\{\alpha_0 + (\lambda_1 z + \bar{\lambda}_1 z^{-1})\}, \quad z \in T^+. \quad (25)$$

Теперь нетрудно проверить, что для того чтобы выполнялось условие вида (17), достаточно положить правой части (24) $\alpha_0 = 0$. Тогда из (25) получаем

$$z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \varphi(z) = i\lambda_1 z^2 + i\bar{\lambda}_1, \quad z \in T^+. \quad (26)$$

Согласно формуле (19), частное решение дифференциального уравнения (26) можно задавать так:

$$\varphi_1(z) = i\lambda_1 z^2 - i\bar{\lambda}_1, \quad (27)$$

где λ_1 – произвольная комплексная постоянная. Очевидно, что для функции вида (27) выполняются условия вида (20). Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (25), принадлежащее классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, имеет вид:

$$\varphi(z) = i\lambda_1 z^2 + C_1 z - i\bar{\lambda}_1, \quad (28)$$

где C_1, λ_1 – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, подставив значение функции (28) в правую часть формулы (5), получим общее решение исходной задачи (23) в виде

$$W(z) = C_1 + 2i\lambda_1 z - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}(i\lambda_1 z^2 + C_1 z - i\bar{\lambda}_1),$$

где C_1, λ_1 – произвольные комплексные постоянные.

3. О решении задачи Γ_1^0 и картине её разрешимости в случае $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ и $L_r = \{t: |t| = r\}$, где $r \neq 1$. Будем искать решение задачи Γ_1^0 в виде

$$W(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi(z), \quad (29)$$

где $\varphi(z) \in A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$.

Так как в точках окружности $L_r = \{t: |t| = r\}$ выполняется тождество $\bar{t} = r^2/t$, то с учетом (29) краевое условие (3) при $n=1$ и $q(t) \equiv 0$ можно переписать так:

$$\operatorname{Re} \left\{ t^{-1} \overline{h(t)} \left(t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - \frac{r^2}{1+r^2} \varphi^+(t) \right) \right\} = 0, \quad t \in L_r, \quad (30)$$

где $\varphi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \varphi(z)$.

Введем теперь в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ функцию

$$\Psi(z) = z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi(z), \quad z \in T_r^+, \quad (31)$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая компонента искомой квазигармонической функции $W(z)$. С учетом (31) краевое условие (28) примет вид:

$$\operatorname{Re} \left\{ t^{-1} \overline{h(t)} \Psi^+(t) \right\} = 0, \quad t \in L_r, \quad (32)$$

где $\Psi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Psi(z)$. Ясно, что равенство (32) есть краевое условие однородной задачи Гильберта относительно аналитической в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ функции $\Psi(z)$.

Пусть $\chi = 2(m+1)$, где $m = \operatorname{Ind} h(t)$, есть индекс задачи Гильберта (32). Тогда при $\chi \geq 0$ однородная задача Гильберта (32) безусловно разрешима и ее общее решение линейно зависит ровно от $\chi+1$ произвольных действительных постоянных (см. формулу (10)). Если же $\chi < 0$, то однородная задача Гильберта (32) не имеет нетривиальных решений.

Далее предположим, что $\chi = 2(m+1) \geq 0$ и $\Psi(z)$ – общее решение однородной задачи Гильберта (32). Тогда в силу (31) получаем

$$z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi(z) = \Psi(z), \quad z \in T_r^+. \quad (33)$$

Таким образом, аналитическая компонента $\varphi(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка вида (33).

Легко проверить, что однородное дифференциальное, соответствующее неоднородному уравнению (33), т.е. уравнение

$$z \frac{d\varphi(z)}{dz} - \frac{2r^2}{1+r^2} \varphi(z) = 0, \quad z \in T_r^+, \quad (34)$$

не имеет в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r \neq 1$, нетривиальных (ненулевых) решений, принадлежащих классу $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$. Следовательно, в случае разрешимости, решение неоднородного дифференциального уравнения (33) может содержать не более чем $\chi + 1$ произвольных действительных постоянных.

Предположим, что дифференциальное уравнение (33) в классе функций $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$ разрешимо, и уже найдено его решение $\tilde{\varphi}(z)$. Тогда в силу (29) решение искомой задачи Гильберта Γ_1^0 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r \neq 1$, можно задавать формулой:

$$W(z) = \frac{d\tilde{\varphi}^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \tilde{\varphi}^+(z), \quad (35)$$

где $\tilde{\varphi}(z)$ – решение линейного дифференциального уравнения (33), принадлежащее классу $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если индекс $\chi \geq 0$, то для разрешимости неоднородной задачи Гильберта Γ_1^0 в классе квазигармонических функций первого рода в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r \neq 1$, необходимо и достаточно, чтобы линейное дифференциальное уравнение (33) было разрешимо в классе функций $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$, и при этом общее решение однородной задачи Γ_1^0 , задаваемое формулой (33), линейно зависит не более чем от $\chi + 1$ произвольных действительных постоянных. Если же индекс $\chi < 0$, то однородная задача Γ_1^0 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r \neq 1$, не имеет (нетривиальных) решений.

Замечание 2. Сравнивая изложенные выше решения однородной задачи Γ_1^0 в единичном круге $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ и в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r \neq 1$, замечаем, что существенное различие в картинах разрешимости этой задачи в указанных двух случаях возникает из-за того, что однородное дифференциальное уравнение вида (34) в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $r \neq 1$, не имеет (нетривиальных) решений, принадлежащих классу $A(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$, а в единичном круге, т.е. при $r = 1$, имеет ненулевые решения вида (14).

Литература

1. Расулов, К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
2. Расулов, К.М. Краевая задача Гильберта в классах квазигармонических функций в круге / К.М. Расулов // Известия СмолГУ. – 2014. – № 4(28). – С. 331–338.
3. Bauer, K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie / K.W. Bauer // Bonner Math. – 1965. – Schriften 23.
4. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
6. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2011. – Т. 11, Вып. 2. – С. 9–20.
7. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.
8. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Поступила в редакцию 10 июня 2016 г.

ON SOLVABILITY OF THE HILBERT HOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

K.M. Rasulov, T.I. Timofeeva

Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation

E-mail: kahrmanr@yandex.ru

A Hilbert-type boundary value problem in the classes of quasi-harmonic functions is considered. Quasi-harmonic functions are regular solutions of an elliptic differential equation form $\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0$, where $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, and n is a given positive integer.

Using the fact that a circle is an analytic curve, we have developed an explicit method for finding solutions of the Hilbert homogeneous boundary value problem for quasi-harmonic functions in circular domains. The principal logic of this method consists of two stages. At stage one we are using a representation of quasi-harmonic function via analytic function and its derivatives to reduce the problem to the classical Hilbert problem for some auxiliary analytic function in the circular domain. A solution $\Phi(z)$ for this problem will be used at stage two, when we solve the linear differential Euler equation of order n with the right-hand side $\Phi(z)$. General solution for the problem can be explicitly expressed in terms of the solution of the Euler equation. Moreover, we have established that the solvability for the considered boundary-value problem depends essentially on whether a unit circumference is the carrier of boundary conditions or a non-unit circle.

Keywords: boundary value problem; Hilbert-type boundary value problem; quasiharmonic function; differential equation; cyclic domain; unit circumference; non-unit circumference.

References

1. Rasulov K.M. *Metod sopryazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* (Conjugation method of analytic functions and some of its applications). Smolensk, SmolGU Publ., 2013, 188 p. (in Russ.).
2. Rasulov K.M. The Boundary Value Problem of Hilbertin Classes of Quasiharmonic Functions in a Circle. *Izvestia of Smolensk State University*, 2014, no. 4(28), pp. 331–338. (in Russ.).
3. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner Math.*, Schriften Nr. 23, Bonn: Math. Inst. Univ., 1965.
4. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary Value problems). Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).
5. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equations). Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).
6. Adukov V.M., Patrushev A.A. On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, Vol. 11, no. 2, pp. 9–20. (in Russ.).
7. Coddington E.A., Levinson N. *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Theory of ordinary differential equations). Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ., 1958, 474 p. (in Russ.). [Coddington E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. Tata McGraw-Hill, 1955, 429 p.]
8. Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka Publ., 1966, 628 p. (in Russ.).

Received June 10, 2016

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

Д.В. Гоцев, Н.С. Перунов

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние двухслойного неоднородного сферического тела, находящегося под действием равномерно сжимающих нагрузок с учетом пористой структуры внутреннего слоя. Построение модели проводилось в рамках осесимметричной постановки. Определена зависимость внешних сжимающих нагрузок, при которых начальная пористость материала достигает во всем слое своего нулевого значения; выведены аналитические выражения для нахождения напряженно-деформированных состояний в каждом слое, а также получено уравнение для определения деформированной границы контакта слоев. В качестве условий совместности на деформированной границе выбирались условия непрерывности радиальной компоненты напряжений и перемещений. Дана оценка влияния на величину границы раздела слоев упругих констант материалов.

Ключевые слова: пористые материалы; неоднородное сферическое тело при сжатии; напряженно-деформированное состояние.

В настоящее время актуальными остаются вопросы строительства и охраны подземных сооружений различного назначения, в том числе подземных сферических полостей. При этом возникает необходимость решения ряда сопутствующих задач, таких, как борьба с горными ударами, взрывные подземные работы, охрана окружающей среды от загрязнения, проблемы сейсмобезопасности и др.

Цель расчета подземных конструкций заключается в определении полей напряжений и перемещений, возникающих в элементах этих сооружений и установлении условий их прочности и устойчивости. В соответствии с результатами расчета выбираются рациональные конструкции крепей и оптимальные размеры их сечений, обеспечивающих надежную работу сооружений при минимальных затратах.

Обеспечение устойчивости неглубоких выработок при достаточно прочных вмещающих породах, как правило, не составляет особых затруднений. Однако в настоящее время непрерывно увеличивается объем горных выработок, проходимых на больших глубинах и в сложных горно-геологических условиях (многолетняя мерзлота, высокая сейсмичность, неотектонические явления и т.п.), что отчасти связано с активным освоением арктического пространства. При нарушении условия благоприятного сочетания глубины и прочности материалов, обеспечение устойчивости выработок и их крепей приобретает черты сложной инженерной и научной проблемы.

Для решения всех этих вопросов необходимы представления о разрушении горных массивов, а также об устойчивости крепей подземных сооружений.

Разрушение крепи подземной конструкции может произойти в результате следующих двух ситуаций: 1) достижение напряженно-деформированным состоянием (далее НДС) пределов прочности; 2) достижение напряженно-деформированным состоянием критических значений, соответствующих потере устойчивости (отказу) крепи.

Решение первой задачи основано на сравнении найденного (в аналитическом или численном виде) НДС с пределами прочности материалов. Во втором случае начальным этапом решения задачи устойчивости является нахождение в аналитическом виде основного НДС конструкции. В связи с этим получение аналитических соотношений, описывающих докритическое НДС в аналитической форме, является актуальной задачей.

Помимо объектов исследования механики горных пород слоистые сферические конструкции находят широкое применение в различных областях строительной механики и машиностроения. Поэтому вопрос определения и анализа НДС с учетом различных физико-механических и геометрических параметров сферических конструкций является объектом внимания достаточно большого количества исследований. Так в монографии [1] в рамках теории малых деформаций в аналитическом виде получены поля напряжений и перемещений горного массива вблизи сферической полости при учете неупругой работы грунта. В работе [2] найдено НДС монолитной сферической крепи подземного нефтехранилища с учетом начальной пористости материала и сложной реологии сжатой матрицы. В статье [3] на основе метода малого параметра получены приближенные аналитические выражения НДС упругого пространства, ослабленного сферической полостью, с учетом температуры.

В настоящей работе решается задача определения НДС двухслойного сферического тела, находящегося под действием сжимающих нагрузок интенсивностями q_b и q_a , равномерно распределенных по внешнему и внутреннему контурам тела соответственно. Материал внешнего слоя будем моделировать упругим сжимаемым телом с параметрами Ламе λ_1, μ_1 . Деформирование материала внутреннего слоя, имеющего пористую структуру, разделим на два этапа [4, 5]. Первый этап – деформирование среды при наличии несжатых пор, второй – деформирование сжатого скелета. На первом этапе в качестве модели материала принимается модель упругого сжимаемого тела с параметрами Ламе λ_2, μ_2 , на втором – модель упругой несжимаемой среды с модулем сдвига $\mu = \mu_2 + \mu_3$.

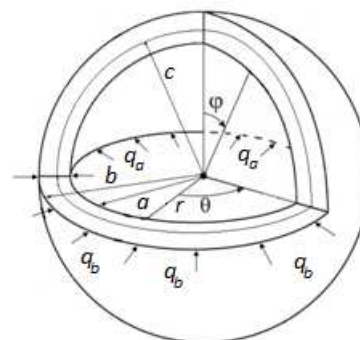


Рис. 1. Двухслойное сферическое тело при сжатии

Согласно работе [6], в качестве условия полного сжатия пор в некоторой точке среды выбирается условие равенства объемной деформации в этой точке величине ε_0 – начального раствора пор.

Обозначим радиус внешней границы c , внутренней границы a , радиус недеформированной границы контакта слоев – b (рис. 1).

На первом этапе деформирования НДС в рамках осесимметричной постановки задачи в сферической системе координат (r, θ, φ) будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории.

Уравнение равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Закон Гука для внешнего слоя:

$$\sigma_r^{(1)} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r^{(1)} + 2\lambda_1\varepsilon_\theta^{(1)}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \lambda_1\varepsilon_r^{(1)} + 2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_\theta^{(1)}. \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями для внутреннего слоя:

$$\sigma_r^{(2)} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + 2\lambda_2\varepsilon_\theta^{(2)}, \quad \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} = \lambda_2\varepsilon_r^{(2)} + 2(\lambda_2 + \mu_2)\varepsilon_\theta^{(2)}. \quad (4)$$

Условие наличия несхлопнутых пор для внутреннего слоя:

$$-(\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\theta^{(2)}) < \varepsilon_0. \quad (5)$$

Граничные условия на внешнем и внутреннем контурах запишем соответственно в виде:

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a} = -q_a. \quad (6)$$

Здесь в (1)–(6) и далее $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$ – главные компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, u – радиальная составляющая вектора перемещений, индекс (1) вверху компонент напряжений, деформаций и перемещений обозначает их принадлежность к

внешнему слою, индекс (2) – к внутреннему слою, отсутствие верхних индексов у указанных величин обозначает их принадлежность как к внутреннему, так и к внешнему слоям сферического тела.

Из решения системы (1)–(6) получим следующие НДС:
для внутреннего слоя

$$u^{(2)} = C_3 r + \frac{C_4}{r^2}, \quad \varepsilon_r^{(2)} = C_3 - \frac{2C_4}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^{(2)} = \varepsilon_\varphi^{(2)} = C_3 + \frac{C_4}{r^3},$$

$$\sigma_r^{(2)} = C_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\mu_2 \frac{C_4}{r^3}, \quad \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} = C_3(3\lambda_1 + 2\mu_1) + 2\mu_1 \frac{C_4}{r^3}; \quad (7)$$

для внешнего слоя

$$u^{(1)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_r^{(1)} = C_1 - \frac{2C_2}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\varphi^{(1)} = C_1 + \frac{C_2}{r^3},$$

$$\sigma_r^{(1)} = C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{r^3}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^3}, \quad (8)$$

где константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 , а так же γ – деформированный радиус контакта слоев, которые находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности

$$\begin{cases} \sigma_r^{(2)}|_{r=a} = -q_a \\ \sigma_r^{(1)}|_{r=b} = -q_b \\ \sigma_r^{(1)}|_{r=\gamma} = \sigma_r^{(2)}|_{r=\gamma} \\ u^{(1)}|_{r=\gamma} = u^{(2)}|_{r=\gamma} \\ \gamma = c + u^{(2)}(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{\gamma^3} = C_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\mu_2 \frac{C_4}{\gamma^3} \\ C_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\mu_2 \frac{C_4}{a^3} = -q_a \\ C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{b^3} = -q_b \\ C_3\gamma + \frac{C_4}{\gamma^2} = C_1\gamma + \frac{C_2}{\gamma^2} \\ \gamma = c(1 + C_3) + \frac{C_4}{c^2} \end{cases} . \quad (9)$$

Решая систему (9) получим:

$$C_1 = \frac{4\mu_2 c^2 (\gamma - c) B (\gamma^3 - a^3) - q_a a^3 (B\gamma^3 + 4\mu_2 c^3) + q_b P b^3}{AP(\gamma^3 - b^3)},$$

$$C_2 = \frac{(4\mu_2 B c^2 (\gamma - c) (\gamma^3 - a^3) - q_a a^3 (B\gamma^3 + 4\mu_2 c^3) + q_b \gamma^3 P) b^3}{4\mu_1 P (\gamma^3 - b^3)},$$

$$C_3 = \frac{4\mu_2 c^2 (\gamma - c) - q_a a^3}{P}, \quad C_4 = \frac{a^3 c^2 (B(\gamma - c) + q_a c)}{P}, \quad (10)$$

$$A = 3\lambda_1 + 2\mu_1, \quad B = 3\lambda_2 + 2\mu_2, \quad P = Ba^3 + 4\mu_2 c^3.$$

При этом деформированный радиус γ контакта слоев определим из уравнения

$$\alpha_1 \gamma^7 + \alpha_2 \gamma^6 + \alpha_3 \gamma^4 + \alpha_4 \gamma^3 + \alpha_5 \gamma + \alpha_6 = 0, \quad (11)$$

где

$$\alpha_1 = 4\mu_1 \mu_2 c^2 (A - B), \quad \alpha_2 = -\mu_1 (4\mu_2 c^3 (A - B) + q_a a^3 (A + B)),$$

$$\alpha_3 = c^2 (AB(\mu_1 a^3 - \mu_2 b^3) + 4\mu_1 \mu_2 (Ba^3 - Ab^3)),$$

$$\alpha_4 = q_a a^3 \left(\mu_1 A c^3 + \mu_1 A b^3 + 4\mu_1 \mu_2 c^3 + \frac{AB}{4} b^3 \right) - q_b b^3 \left(\mu_1 B a^3 + 4\mu_1 \mu_2 c^3 + \frac{AB}{4} a^3 + \mu_2 A c^3 \right) +$$

$$+ AB c^3 (\mu_2 b^3 - \mu_1 a^3) + 4\mu_1 \mu_2 c^3 (Ab^3 - Ba^3)$$

$$\alpha_5 = AB(\mu_2 - \mu_1)a^3b^3c^2, \quad \alpha_6 = A(\mu_1 - \mu_2)(B - q_a)a^3b^3c^3.$$

Объемная деформация на этом этапе для внутреннего слоя согласно (7) определится в форме

$$\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\theta^{(2)} = 3C_3.$$

Тогда условие наличия в теле не полностью сжатых пор запишется в виде

$$q_a a^3 < P \cdot \frac{\varepsilon_0}{3} + 4\mu_2 c^2 (\gamma - c). \quad (12)$$

Следовательно, схлопывание пор произойдет одновременно во всем внутреннем слое, когда внешняя и внутренняя нагрузки будут удовлетворять условию

$$q_a a^3 \geq \frac{P\varepsilon_0}{3} + 4\mu_2 c^2 (\gamma - c). \quad (13)$$

На втором этапе деформирования, то есть при выполнении условия (13), НДС будем моделировать соотношениями (1)–(2), присоединяя к ним граничные условия (6), реологические соотношения (3) для внешнего слоя, и соотношения

$$S_r^{(2)} = 2\mu\varepsilon_r^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_r^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0, \quad S_\theta^{(2)} = S_\varphi^{(2)} = 2\mu\varepsilon_\theta^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_\theta^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0, \quad (14)$$

для внутреннего.

Здесь в (14) и далее $\mu = \mu_2 + \mu_3$, $S_r^{(2)}$, $S_\theta^{(2)}$, $S_\varphi^{(2)}$ – компоненты тензора дивергента напряжений, $\varepsilon_r^{(0)}$, $\varepsilon_\theta^{(0)}$ – деформации внутреннего слоя на момент полного сжатия пор, которые определяются из соотношений (7), (10)–(12) при переходе в (12) к равенству.

Из решения системы (1)–(3), (6), (14) при условии (13) получим следующие НДС: для внешнего слоя

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= D_3 r + \frac{D_4}{r^2}, \quad \varepsilon_r^{(1)} = D_3 - \frac{2D_4}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\varphi^{(1)} = D_3 + \frac{D_4}{r^3}, \\ \sigma_r^{(1)} &= A \cdot D_3 - 4\mu_1 \cdot \frac{D_4}{r^3}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = A \cdot D_3 + 2\mu_1 \cdot \frac{D_4}{r^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

для внутреннего слоя

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= D_1 r + \frac{1}{r^2} \left(D_2 - \frac{4\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left(\frac{1}{3} + \ln r \right) \right), \\ \varepsilon_r^{(2)} &= D_1 - \frac{2}{r^3} \left(D_2 - \frac{2\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left(2 \ln r - \frac{1}{3} \right) \right), \quad \varepsilon_\theta^{(2)} = \varepsilon_\varphi^{(2)} = D_1 + \frac{1}{r^3} \left(D_2 - \frac{4\mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left(\frac{1}{3} + \ln r \right) \right), \\ \sigma_r^{(2)} &= \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left(\mu D_1 - \frac{2}{r^3} \left(\mu D_2 - \mu_3 C_4^{(0)} \left(4 \ln r + \frac{1}{3} \right) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right), \\ \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} &= \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left(\mu D_1 + \frac{1}{r^3} \left(\mu D_2 - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{3} (7 + 12 \ln r) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где константы $C_3^{(0)}$, $C_4^{(0)}$ определяются соотношениями (10), в которых среда рассмотрена на момент полного сжатия пор и имеют вид

$$C_3^{(0)} = -\frac{\varepsilon_0}{3}, \quad C_4^{(0)} = \frac{c^2 \left(a^3 B (\gamma - c) + c \left(4\mu_2 c^2 (\gamma - c) + P(\varepsilon_0/3) \right) \right)}{P}; \quad (17)$$

константы интегрирования D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , а так же γ – деформированный радиус контакта слоев на этом этапе деформирования находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a} = -q_a \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = -q_b \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=\gamma} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=\gamma} \\ u^{(1)} \Big|_{r=\gamma} = u^{(2)} \Big|_{r=\gamma} \\ \gamma = c + u^{(2)}(c) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left(\mu D_1 - \frac{2}{a^3} \left(\mu D_2 - \mu_3 C_4^{(0)} \left(4 \ln r + \frac{1}{3} \right) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right) = -q_a, \\ A \cdot D_3 - 4 \mu_1 \cdot \frac{D_4}{b^3} = -q_b, \\ A \cdot D_3 - 4 \mu_1 \cdot \frac{D_4}{\gamma^3} = \lambda_2 \varepsilon_0 + 2 \left(\mu D_1 - \frac{2}{\gamma^3} \left(\mu D_2 - \mu_3 C_4^{(0)} \left(4 \ln r + \frac{1}{3} \right) \right) - \mu_3 C_3^{(0)} \right), \\ D_3 \gamma + \frac{D_4}{\gamma^2} = D_1 \gamma + \frac{1}{\gamma^2} \left(D_2 - \frac{4 \mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left(\frac{1}{3} + \ln \gamma \right) \right), \\ \gamma = c + D_1 c + \frac{1}{c^2} \left(D_2 - \frac{4 \mu_3 C_4^{(0)}}{\mu} \left(\frac{1}{3} + \ln c \right) \right), \end{array} \right.$$

разрешив которую получим константы интегрирования:

$$D_1 = \frac{12 \mu c^2 (\gamma - c) + 12 \mu_3 C_4^{(0)} \left(1 + 4 \ln \frac{c}{a} \right) - a^3 (F + 3q_a)}{6 \mu R},$$

$$D_2 = \frac{a^3 (6 \mu c^2 (\gamma - c) + c^3 (F + 3q_a)) + 4 \mu_3 C_4^{(0)} \left(6 \ln (a^{2c^3} c^{a^3}) + c^3 + 2a^3 \right)}{6 \mu R}, \quad (18)$$

$$D_3 = \frac{2c^2 y_1(\gamma) (6 \mu (\gamma - c) + Fc) + 12 \mu_3 C_4^{(0)} \left(4 \ln \left(\frac{c^{y_1(\gamma)} \cdot \gamma^R}{a^{2c^3 + \gamma^3}} \right) + y_1(\gamma) \right) + 3 (q_b b^3 R - q_a a^3 (2c^3 + \gamma^3))}{3AR y_2(\gamma)},$$

$$D_4 = \frac{b^3 \left(2c^2 y_1(\gamma) (6 \mu (\gamma - c) + Fc) + 12 \mu_3 C_4^{(0)} \left(4 \ln \left(\frac{c^{y_1(\gamma)} \cdot \gamma^R}{a^{2c^3 + \gamma^3}} \right) + y_1(\gamma) \right) + 3 (q_b \gamma^3 R - q_a a^3 (2c^3 + \gamma^3)) \right)}{12 \mu_1 R y_1(\gamma)},$$

а так же уравнение для поиска границы γ контакта слоев в случае деформирования сжатого скелета

$$4 \mu_3 C_4^{(0)} \left(12 \ln \left(\frac{c^{\mu y_1(\gamma) y_4(\gamma) - \mu_1 A y_2(\gamma) (2\gamma^3 + a^3)} \cdot \gamma^{R(\mu y_4(\gamma) + \mu_1 A y_2(\gamma))}}{a^{\mu y_4(\gamma) (2c^3 + \gamma^3) - 2A \mu_1 y_2(\gamma) y_3(\gamma)}} \right) + 3 \mu y_4(\gamma) y_1(\gamma) - 6 A \mu_1 y_2(\gamma) y_3(\gamma) \right) +$$

$$+ c^2 (6 \mu (\gamma - c) + Fc) (2 \mu y_4(\gamma) y_1(\gamma) - 2 A \mu_1 a^3 y_2(\gamma)) + 2 \mu_1 A \gamma^3 (F a^3 - 12 \mu c^2 (\gamma - c)) y_2(\gamma) +$$

$$+ 3 q_b \mu (4 \mu_1 + A) b^3 \gamma^3 R + 3 q_a a^3 (2 \mu_1 A y_2(\gamma) y_3(\gamma) - \mu y_4(\gamma) (2c^3 + \gamma^3)) = 0, \quad (19)$$

В (18), (19) приняты следующие обозначения $y_1(\gamma) = \gamma^3 - a^3$, $y_2(\gamma) = \gamma^3 - b^3$, $y_3(\gamma) = \gamma^3 - c^3$, $y_4(\gamma) = 4 \mu_1 \gamma^3 + A b^3$.

Таким образом, НДС двухслойного сферического тела на этапе упругого деформирования пористого материала внутреннего слоя, то есть при реализации условия (12) определяется соотношениями (7), (8), (10), а на этапе упругого деформирования сжатого скелета внутреннего слоя (при выполнении условия (13)) – формулами (15)–(18). При этом деформированный радиус γ контакта слоев на первом и втором этапах деформирования находится соответственно из уравнений (11), (19).

Полученные в данной работе аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного сферического тела при действии сжимающих нагрузок, могут быть использованы в качестве ос-

Механика

новного докритического состояния при решении задач устойчивости многослойных крепей подземных сферических полостей, а также защитных сферических резервуаров, находящихся под действием всестороннего равномерного сжатия в случае упругой работы материалов.

При проведении численного эксперимента все соотношения приводились к безразмерному виду, при этом величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине μ_1 , а имеющие размерность длины – к радиусу b .

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 и 3.

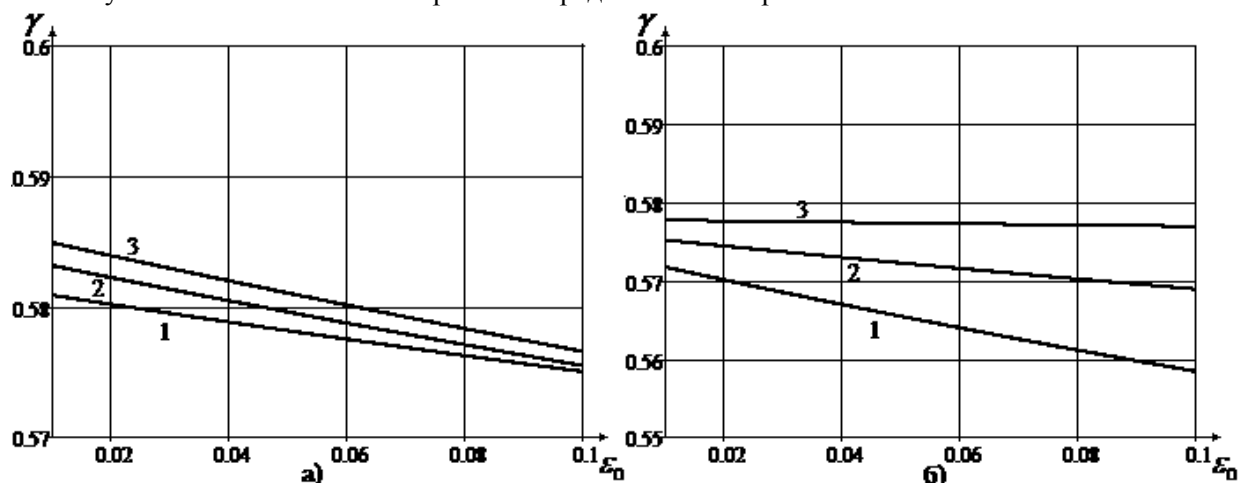


Рис. 2. Зависимость деформированной границы контакта слоев от начального раствора пор при деформировании сжатого скелета: а) 1 – $\mu_2 = 3$, 2 – $\mu_2 = 4$, 3 – $\mu_2 = 5$; б) 1 – $\mu_3 = 1$, 2 – $\mu_3 = 2$, 3 – $\mu_3 = 3$

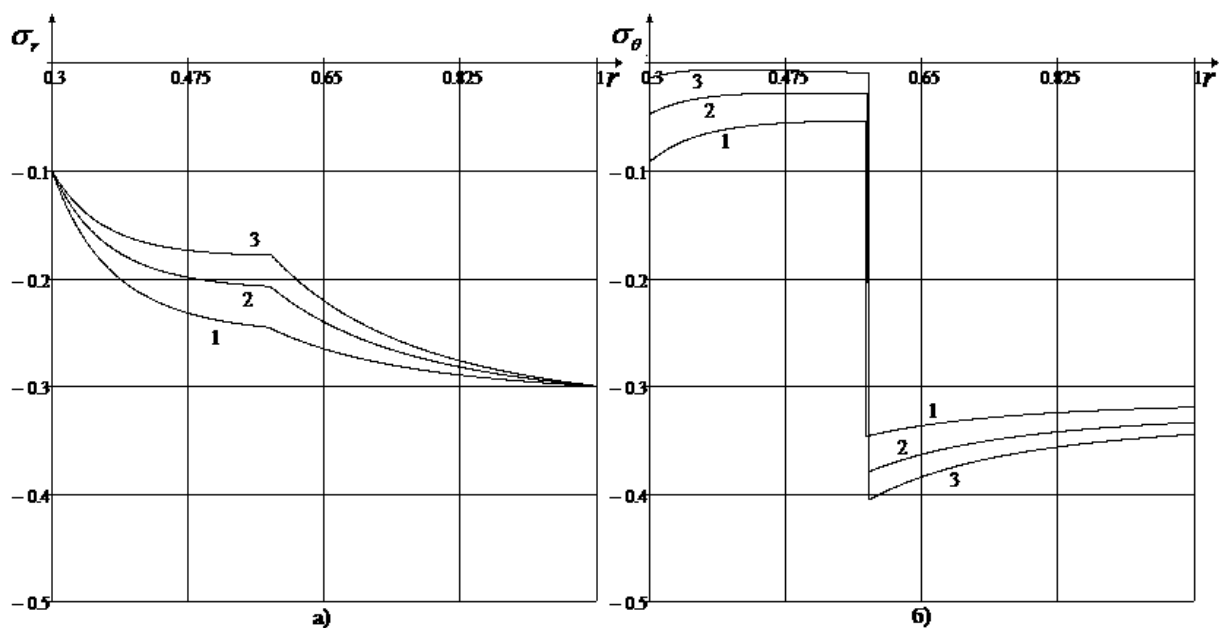


Рис. 3. Зависимость напряжений от координаты при деформировании сжатого скелета

На рис. 3 и 4 кривые 1 соответствуют $\mu_1 = 1$, кривые 2 – $\mu_1 = 2$, кривые 3 – $\mu_1 = 3$.

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими $q_a = 0,1$, $q_b = 0,3$, $a = 0,3$, $c = 0,6$, $b = 1$, $\varepsilon_0 = 0,02$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$.

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания напряженно-деформированного состояния двухслойного сферического тела с учетом пористой структуры внутреннего слоя при упругой работе материалов. В рамках предложенного подхода к деформированию пористых сред получены аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного сферического тела, находящегося под действием всестороннего равномерного сжатия, на эта-

пах упругого сжатия пор и упругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей. Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всей области внутреннего слоя. Для каждого из этапов деформирования получены уравнения для определения деформированной границы контакта слоев. При этом из анализа решений следует, что как при увеличении модуля сдвига μ_2 сжимаемого скелета на первом этапе деформирования, так и с ростом модуля сдвига $\mu_2 + \mu_3$ сжатой матрицы величина деформированного радиуса раздела слоев увеличивается. Также для обоих этапов наблюдается убывающая зависимость радиуса контакта слоев от начального раствора пор.

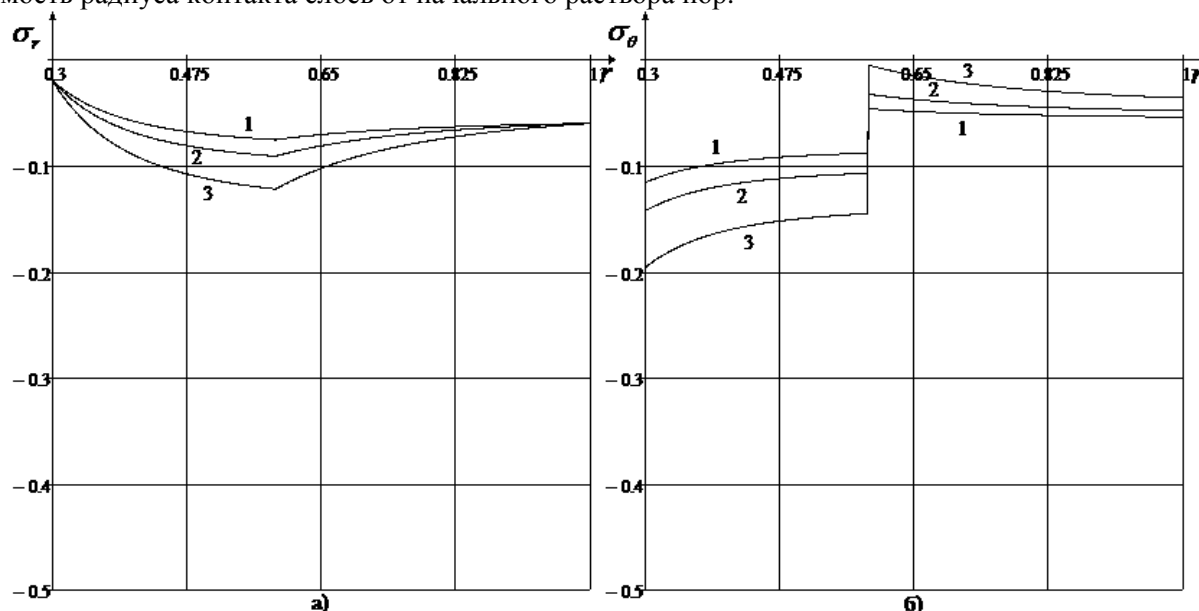


Рис. 4. Зависимость напряжений от координаты при деформировании несжатого скелета

Литература

1. Спорыхин, А.Н., Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А.Н. Спорыхин, А.И. Шашкин. – М.: Физматлит, 2004. – 231 с.
2. Гоцев, Д.В. Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала / Д.В. Гоцев, А.Е. Бунтов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 114–123.
3. Ковалев, А.В. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры / А.В. Ковалев, И.Г. Хвостов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2(20). – С. 29–35.
4. Садовская, О.В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О.В. Садовская, В.М. Садовский. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
5. Гоцев, Д.В. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок / Д.В. Гоцев, А.Н. Спорыхин. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
6. Гоцев, Д.В. Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета / Д.В. Гоцев, А.Е. Бунтов, Н.С. Перунов // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы». – Чувашский государственный педагогический университет, 2015. – С. 91–99.

Поступила в редакцию 17 января 2016 г.

MATHEMATICAL MODEL OF INTENSE DEFORMED STATE OF TWO-LAYERED ELASTIC SPHERICAL BODY WITHIN THE POROSITY STRUCTURE OF THE MATERIAL**D.V. Gotsev, N.S. Perunov**

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Mathematical model describing intense deformed state of two-layered heterogeneous spherical body under uniformly compressing loads within the porosity structure of the inner layer is built. Deformation of the porous medium under the influence of given uniformly compressing loads can be divided into two interrelated phases: deformation of the porous medium and further deformation of compressed matrix. Construction of mathematical model describing stress fields and displacement of the spherical body is carried out in a framework of axially symmetric installation. We have discovered analytical relations, defining the fields of stresses, strains and displacements. We have also discovered the equation for determining the deformed interface between the porous and non-porous areas for the first phase of deformation. Dependence of the external compressive loads that make initial porosity of the material reach its zero value at the whole level has been defined. We have derived analytical form for finding deflected modes in each layer during phase two. We have also deduced an equation for determining strained interface between the porous and nonporous zones. The continuity conditions of the radial component of the stress and displacement at the interface were chosen as the compatibility conditions for the strained interface of the porous and nonporous zones. We have estimated impact of each layer's constant strength on the value of medium's interfacial area. The curves are constructed for every of the stress components displaying the dependence of the coordinates and deformed interface of porous and nonporous zones on the parameter of initial pores' solution within different values of physical-mechanical and geometric parameters of the material and construction.

Keywords: porous materials; heterogeneous spherical body under compressive load; intense deformed state.

References

1. Sporykhin A.N., Shashkin A.I. *Ustoychivost' ravnovesiya prostranstvennykh tel i zadachi mekhaniki gornykh porod* (Stability of spatial equilibrium of bodies and spatial problems of the mechanics of rock). Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 231 p. (in Russ.).
2. Gotsev D.V., Buntov A.E. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2014, no. 4(22), pp. 114–123. (in Russ.).
3. Kovalev A.V., Khvostov I.G. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2014, no. 2(20), pp. 29–35.
4. Sadovskaya O.V., Sadovskiy V.M. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki sypuchikh sred* (Mathematical modeling in problems of mechanics of bulk materials). Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 368 p. (in Russ.).
5. Gotsev D.V., Sporykhin A.N. *Metod vozmushcheniy v zadachakh ustoychivosti podkreplennykh gornykh vyrabotok* (Perturbation method in problems of underpinned excavation stability). Voronezh, Voronezhskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2010, 299 p. (in Russ.).
6. Gotsev D.V., Buntov A.E., Perunov N.S. *Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannykh sostoyaniy poristykh tsilindricheskikh i sfericheskikh tel pri szhatii s uchetom neuprugogo povedeniya szhatogo skeleta* (Mathematical modeling of stress-strain states porous cylindrical and spherical bodies in compression considering inelastic behavior of compressed skeleton). *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy shkoly-konferentsii "Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy"* (Proceedings of the scientific school-conference "Mechanics limit state and related problems"). Chuvashskiy gosudarstvennyy pedagogicheskiy universitet, 2015, pp. 91–99. (in Russ.).

Received January 17, 2016

ВЛИЯНИЕ ЭКРАНИРУЮЩЕГО СЛОЯ ГАЗОВЗВЕСИ НА СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ЖЁСТКУЮ СТЕНКУ

П.Е. Беляев, Н.Л. Клиначева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: gbelbih@gmail.com

Приводится анализ влияния параметров экранирующего слоя на величину импульса избыточного давления, передаваемого на жёсткую неподвижную стенку ударной волной. Показано, что уменьшение диаметра частиц в экранирующем слое приводит к замедлению оттока газа от преграды, что, в свою очередь, приводит к увеличению импульса избыточного давления. На основе численного эксперимента выработаны предложения по повышению эффективности экранирования с учётом описанного эффекта.

Ключевые слова: ударные волны; экранирование; защита от ударных волн; газовзвесь.

Введение

Причиной возникновения ударных волн может быть множество явлений, таких как взрывы, аварийные разрывы ёмкостей высокого давления, перемещения тел в среде со скоростью, превышающей скорость звука в данной среде. Ударные волны могут представлять большую опасность для инженерных сооружений и персонала из-за сильных перепадов давления и высоких скоростей. Несмотря на то, что первые работы по способам защиты от ударных волн были опубликованы более сорока лет назад, данная тема до сих пор остаётся актуальной и последние работы [1–4] это подтверждают.

Постановка задачи

Рассмотрим одномерную задачу о набегании плоской ударной волны длины l_w на однородный слой газовзвеси длины l_s , экранирующий жёсткую неподвижную стенку. Для описания движения газа с твёрдыми частицами используем модель двухскоростного двухфазного континуума с основными допущениями: расстояния, на которых меняются средние значения параметров много больше размеров частиц и расстояний между ними, за исключением фронта ударной волны, частицы имеют сферическую форму, смесь монодисперсная, эффекты вязкости и теплопроводности существенны лишь в процессах межфазного взаимодействия, столкновения и дробление частиц не происходят. Несущей фазой является калорически идеальный газ. Однако для газовой фазы может быть использовано и более сложное уравнение состояния, позволяющее вычислять температуру газа [5]. Расчёты будем проводить посредством численного алгоритма на основе метода крупных частиц [6] с модификацией, предложенной в [7, 8].

Система уравнений математической модели соответствует [1, 9, 10]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u_2}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - n f, \quad \rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} - n f,$$

$$\rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} = -\frac{p \alpha_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + n f (u_1 - u_2) - n q, \quad \rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = -\frac{p \alpha_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + n q.$$

Где, согласно [11],

$$f = \frac{\pi d^2 \rho_1^\circ C_d (u_1 - u_2) |u_1 - u_2|}{8}, \quad q = \pi d \lambda_1 Nu (T_1 - T_2).$$

Для замыкания системы уравнений используем

$$p = p_1(\rho_1^0, T_1) = p_2(\rho_2^0, T_2), \quad e_1 = e_1(\rho_1^0, T_1), \quad e_2 = e_2(\rho_2^0, T_2),$$

$$\rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^0 \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_i = e_i + \frac{u_i^2}{2} \quad (i=1,2).$$

Начальное распределение параметров ударной волны с треугольным профилем скорости задаётся аналогично [2]:

$\frac{u_1}{u_{1H}} = \frac{x}{x_H}$	$\frac{\rho_1^0}{\rho_{1b}^0} = \xi$	$\frac{p}{p_H} = \xi^\gamma$	$\alpha_1 = 1$	$(0 \leq x \leq x_H)$
$u_1 = 0$	$\frac{\rho_1}{\rho_{1b}^0} = 1$	$\alpha_1 = 1$	$\frac{p}{p_0} = 1$	$(x_H \leq x \leq x_s)$
$u_1 = 0$	$\frac{\rho_1}{\rho_{1b}^0} = \alpha_{10}$	$\alpha_1 = \alpha_{10}$	$\frac{p}{p_0} = 1$	$(x_s \leq x \leq x_w)$
$u_2 = 0$	$\frac{\rho_2}{\rho_{20}^0} = 1$	$\alpha_2 = \alpha_{20}$	$\frac{T_2}{T_0} = 1$	$(x_s \leq x \leq x_w)$

$$\xi = \left(1 - \frac{(\gamma-1)(u_{1H} - u_1)}{2a_{1H}} \right)^\gamma$$

Здесь u_i, ρ_i, e_i, T_i – скорость, плотность, энергия, объёмная доля и температура ($i=1,2$). Параметры с индексом 1 относятся к газу, с индексом 2 – к частицам. Параметры с индексом 0 и b отвечают начальным значениям. ρ_i^0 – истинное значение плотности.

Значение параметров по разные стороны разрыва связаны между собой соотношениями Ренкина–Гюгонио. Схема постановки задачи представлена на рис. 1.

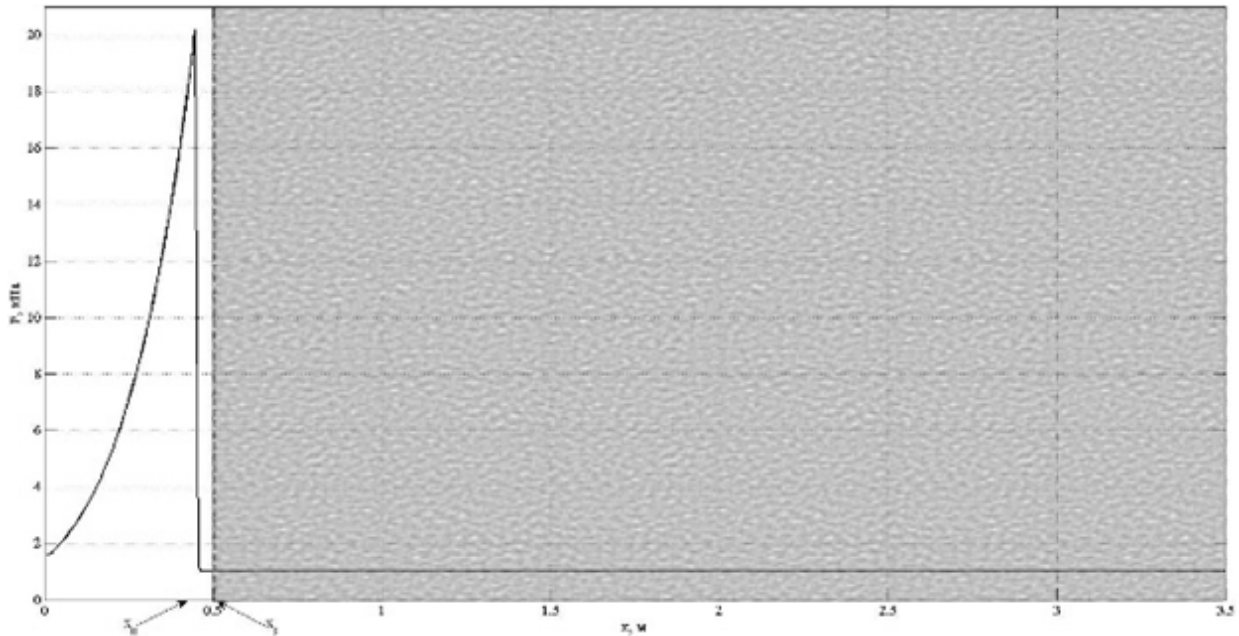


Рис. 1

Результаты

Расчёты проводились при следующих параметрах смеси газа с кварцевым песком: $T_0 = 293$ К, $p_0 = 0,1$ МПа, $c_p = 1005$ м²/(с²·К), $\gamma = 1,4$, $\alpha_{10} = 341$ м/с, $\rho_{10}^0 = 1,21$ кг/м³, $\lambda_1 = 0,026$ кг·м/(с³·К), $\mu_1 = 1,85 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $\rho_2^0 = 2500$ кг/м³, $c_2 = 710$ м²/(с²·К).

Расчёт выполнен для экранирующего слоя газозвеси с длиной $l_s = 3$ м, объёмных долей частиц $0,001 \leq \alpha_2 \leq 0,01$ и диаметром частиц $100 \text{ мкм} \leq d \leq 1 \text{ мм}$.

В процессе взаимодействия ударной волны с неподвижной стенкой можно выделить три этапа: мгновенное повышение давления на стенке, последующее плавное повышение давления и постепенное падение давления до начального. Первый этап связан с отражением от стенки переднего ударного скачка в газовой фазе, при этом давление в ней резко повышается, возникает движущаяся в обратном направлении отражённая ударная волна. На втором этапе давление повышается плавно в силу взаимодействия падающей и отражённой ударных волн. Отражённая ударная волна движется навстречу набегающему потоку газозвеси, давление которого плавно возрастает, а скорость уменьшается. Наибольшее давление образуется вблизи стенки, где тормозится набегающий поток. Происходит дальнейшее взаимодействие отражённой волны уплотнения с волной разряжения, что подводит к началу третьего этапа, этапа разгрузки преграды. Давление на стенке начинает уменьшаться, а поток меняет своё направление на противоположное. Первой своё направление меняет несущая, газовая фаза. Если масса дисперсной фазы мала, то частицы, увлекаемые газом, меняют направление движения. Тяжёлые частицы, движущиеся медленнее, чем газ, или движущиеся в противоположную сторону, препятствуют оттоку газа от стенки, увеличивая тем самым время действия избыточного давления на неё.

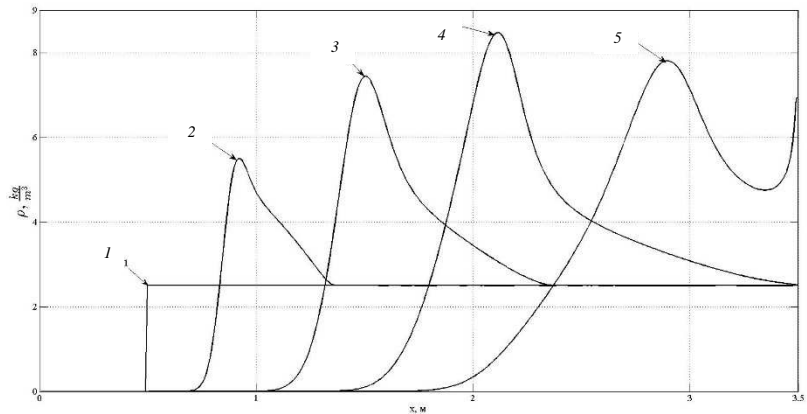


Рис. 2

На рис. 2 представлена зависимость парциальной плотности конденсированной фазы от координаты. Номера графиков соответствуют моментам времени: 1 – $t = 0$ с, 2 – $t = 0,9$ мс, 3 – $t = 2,8$ мс, 4 – $t = 5,5$ мс, 5 – $t = 14,8$ мс. Из рис. 2 видно, что частицы скапливаются возле стенки, что мешает оттоку газа от преграды.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости избыточного давления на стенке от времени при

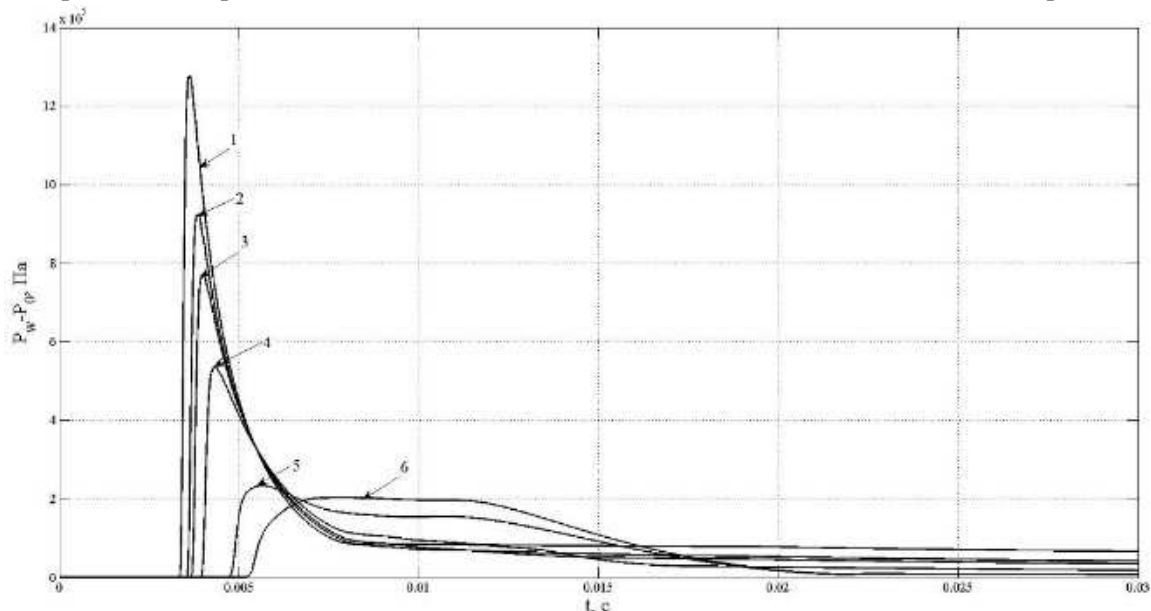


Рис. 3

фиксированных объёмных долях частиц в экранирующем слое газозвеси и различных диаметрах. Номер графика соответствует диаметру частиц в экранирующем слое следующим образом: 2 – $d = 1$ мм, 3 – $d = 600$ мкм, 4 – $d = 300$ мкм, 5 – $d = 100$ мкм, 6 – $d = 60$ мкм. Графики с номером 1 соответствуют протеканию процесса при отсутствии экранирующего слоя. Графики зависимостей на рис. 3 построены для объёмной доли частиц $\alpha_2 = 0,001$, на рис. 4 – для $\alpha_2 = 0,01$.

Из рис. 3 и 4 видно, что при фиксированной объёмной доле уменьшение диаметра частиц ведёт к уменьшению максимального избыточного давления, создаваемого на стенке набегающей ударной волной, но также видно, что уменьшение диаметра увеличивает время разгрузки стенки.

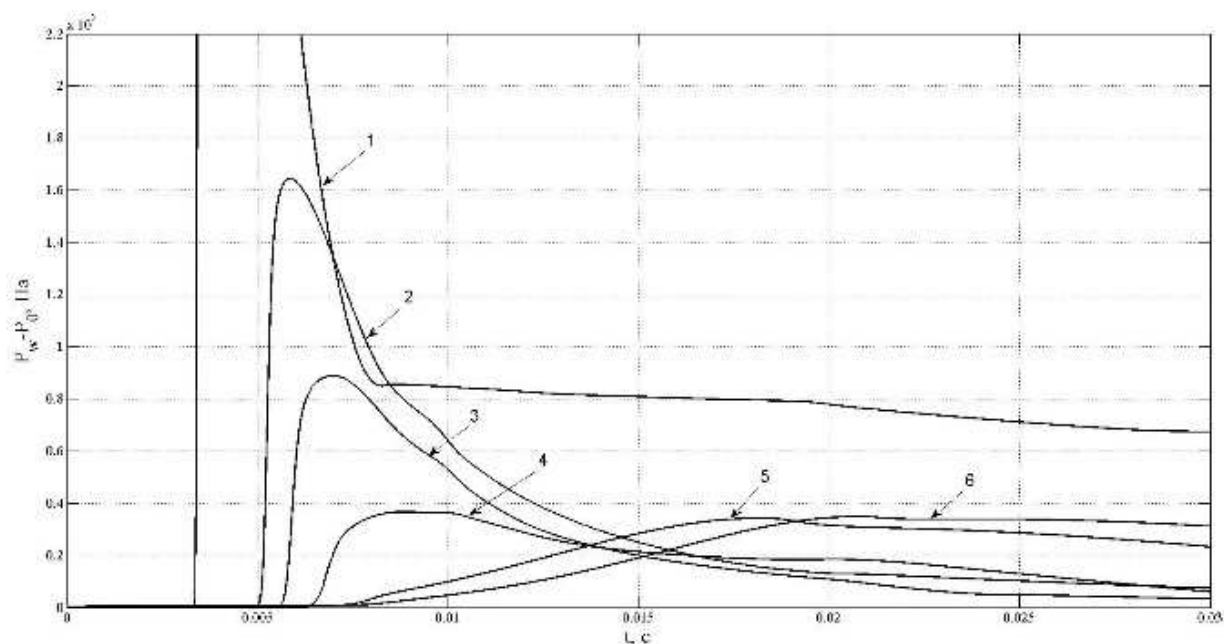


Рис. 4

На рис. 5 представлены зависимости импульса избыточного давления, передаваемого набегающей ударной волной на стенку, I_g от диаметра частиц в экранирующем слое при фиксированной объёмной доле.

$$I_g = \int_{t_s}^{t_f} (P_w(\tau) - P_0) d\tau.$$

Здесь $P_w(\tau)$ – величина давления на стенке в момент времени τ , P_0 – давление в начальный момент времени в невозмущённой области, t_s – время начала взаимодействия ударной волны со стенкой, t_f – время конца взаимодействия ударной волны со стенкой.

На рис. 6 представлена зависимости максимального избыточного давления на стенке от диаметра частиц в экранирующем слое при фиксированной объёмной доле частиц.

Номера графиков на рис. 5 и 6 соответствуют объёмной доле частиц в экранирующем слое: 1 – $\alpha_2 = 0,001$, 2 – $\alpha_2 = 0,004$, 3 – $\alpha_2 = 0,007$, 4 – $\alpha_2 = 0,01$.

Из рис. 6 видно, что при уменьшении диаметра и увеличении объёмной доли частиц максимальное избыточное давление на стенке значительно снижается. Так, например, использование экранирующего слоя с параметрами $\alpha_2 = 0,007$ и $d = 0,0004$ позволяет снизить максимальную величину избыточного давления в условиях данной задачи в десять раз.

При этом, как видно из рис. 5, уменьшение диаметра при фиксированной объёмной доле частиц не даёт однозначного повышения эффективности экранирующего слоя в плане уменьшения импульсного воздействия ударной волны на стенку: при уменьшении диаметра частиц импульс избыточного давления так же уменьшается, но до определённой величины диаметра, своей для разных значений объёмной доли частиц, начиная с которой наблюдается быстрый рост величины импульса избыточного давления.

Рис. 5 и 6 наглядно демонстрируют необходимость подбора параметров экранирующего с учётом выносливости и предела прочности материалов. Построение данных зависимостей позволяет при фиксированной объёмной доле частиц определить допустимый диапазон диаметров, ограничиваемы слева соотношением выносливости материалов экранируемого сооружения, справа – соотношением предела прочности материалов и максимального избыточного давления.

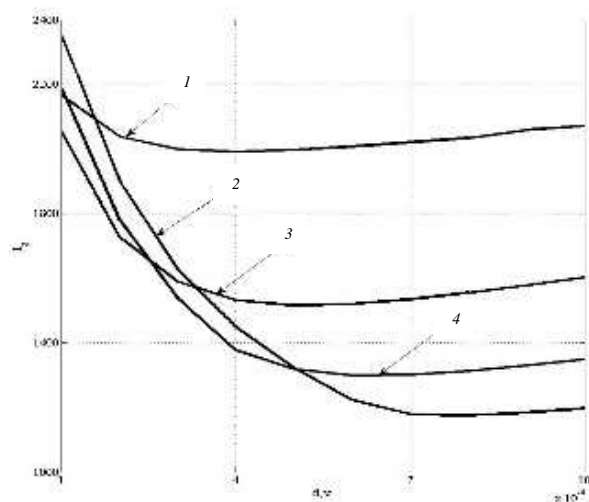


Рис. 5

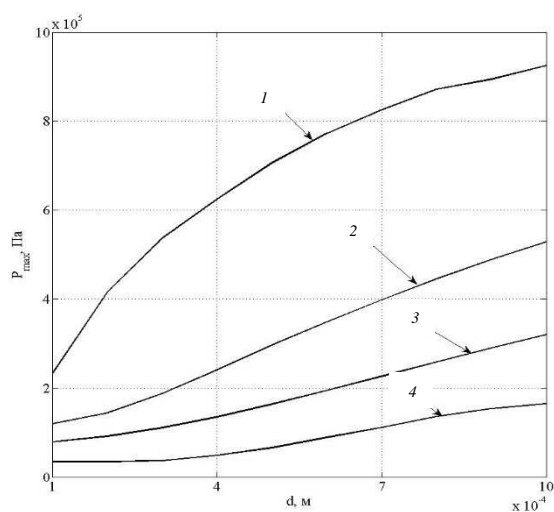


Рис. 6

Заключение

В ходе работы показано, что уменьшение диаметра частиц в экранирующем слое приводит к увеличению времени разгрузки экранируемой преграды, что увеличивает импульсное воздействие избыточного давления, создаваемого ударной волной на стенке. Начиная с определённой величины диаметра при фиксированной объёмной доле частиц, дальнейшее уменьшение диаметра приводит к снижению эффективности экранирующего слоя. При выборе параметров экранирующего слоя следует учитывать данную особенность экранирования газозвесями, так при снижении величины максимального избыточного давления ниже предела прочности нужно, вместе с тем, не превысить допустимые для выносливости экранируемой конструкции величины импульсного воздействия.

Литература

1. Клиначева, Н.Л. Численное исследование инвариантности некоторых моделей многокомпонентных сред / Н.Л. Клиначева // Наука ЮУрГУ: материалы 67-й научной конференции Секции естественных наук. – 2015. – С. 121–124.
2. Клиначева, Н.Л. Модифицированная математическая модель «замороженной» газозвеси / Н.Л. Клиначева, Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 6. – С. 1398–1403.
3. Ковалёв, Ю.М. Особенности ослабления ударных волн экранирующими решётками / Ю.М. Ковалёв // Вестник Челябинского государственного университета. – 1997. – Т. 6, № 1. – С. 72–81.
4. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Мат. моделирование физ. процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.
5. Моделирование взрыва шнурового заряда в пологе леса при отсутствии пожара / В.А. Антонов, А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев, Л.Ю. Наймушина // Физика горения и взрыва. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 115–123.
6. Белоцерковский, О.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
7. Ковалёв, Ю.М. Анализ некоторых модификаций метода крупных частиц на примере исследования течений газозвесей / Ю.М. Ковалёв, Е.А. Ковалёва, Е.Е. Пигасов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 71–77.
8. Гришин, Ю.А. Повышение устойчивости вычислительного алгоритма метода крупных частиц / Ю.А. Гришин, В.А. Зенкин // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – № 13. – С. 41.

9. Ковалёв, Ю.М. Математическая модель газозвеси с химическими превращениями в приближении парных взаимодействий. / Ю.М. Ковалёв, Е.Е. Пигасов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 40–49.

10. Ковалёв, Ю.М. Определение вида силы межфазного взаимодействия для математической модели газозвеси с парными взаимодействиями / Ю.М. Ковалёв // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 23–29.

11. Бусройд, Р. Течение газа со взвешенными частицами / Р. Бусройд. – М.: Мир, 1976. – 377 с.

Поступила в редакцию 8 августа 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2016, vol. 8, no. 4, pp. 49–55*

DOI: 10.14529/mmph160406

IMPACT OF GAS SUSPENSION SHIELDING LAYER ON THE FORCE EFFECT OF SHOCK WAVES ON A RIGID WALL

P.E. Belyaev, N.L. Klinacheva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: gbelbih@gmail.com

The article deals with the analysis of influence of shielding layer parameters on the amount of excessive pressure impulse translated on the fixed rigid wall by the shock wave. It is demonstrated that the decrease in the diameter of particles in shielding layer leads to gas drainage from the barrier, which in turn leads to the increase of excessive pressure impulse. The suggestions on increasing the shielding efficiency are made based on the numerical experiment and taking into account the described effect.

Keywords: shock waves; shielding; shock wave protection; gas suspension.

References

1. Klinacheva N.L. Chislennoe issledovanie invariantnosti nekotorykh modeley mnogokomponentnykh sred (Numerical investigation of invariance of some multicomponent medium models). *Nauka YuUrGU: materialy 67-y nauchnoy konferentsii Sektsii estestvennykh nauk* (Science of SUSU: Proceedings of the 67th Scientific Conference. Section of Natural Sciences), 2015, pp. 121–124. (in Russ.).

2. Klinacheva N.L., Kovalev Y.M., Kuropatenko V.F. Modified Mathematical Model of a "Frozen" Gas Suspension. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, Vol. 87, no. 6, pp. 1456–1462. DOI: 10.1007/s10891-014-1150-x

3. Kovalyev Yu.M. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1997, Vol. 6, no. 1, pp. 72–81. (in Russ.).

4. Kovalev Yu.M., Cheremokhov A.Yu. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. "Mat. modelirovanie fiz. protsessov"*, 1997, Issue 3, pp. 39–43. (in Russ.).

5. Antonov V.A., Grishin A.M., Kovalev Yu.M., Naymushina L.Yu. *Fizika goreniya i vzryva*, 1993, Vol. 29, no. 4, pp. 115–123. (in Russ.).

6. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* (Particle-in-cell method in gas dynamics). Moscow, Nauka Publ., 1982, 392 p. (in Russ.).

7. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A., Pigasov E.E. The Analysis of Some Modifications of the Large-Particle Method on the Basis of Research of Gas-Suspension Currents. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2015, Vol. 7, no 3, pp. 71–77. (in Russ.).

8. Grishin Yu.A., Zenkin V.A. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*, 2011, no. 13, p. 41. (in Russ.).

9. Kovalev Yu.M., Pigasov E.E. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no 3, pp. 40–49. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140304

10. Kovalev Y.M. Detection of a Type of Interphase Interaction Force for Mathematical Models of Gas Suspension with Pair Interaction. *Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2014, Vol. 6, no. 3, pp. 23–29. (in Russ.).

11. Busrojd R. *Techenie gaza so vzveshennymi chastitsami* (The gas flow with suspended particles). Moscow, Mir Publ., 1976, 377 p. (in Russ.).

Received August 8, 2016

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОФАЗНОЙ КОНДЕНСАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ В КАМЕРЕ С ДУГОВЫМ РАЗРЯДОМ

А.Е. Коренченко, В. Джамал Джалал

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: korenchenkoa@susu.ru

Проведено математическое моделирование формирования металлических наночастиц в камере с дуговым разрядом. Получены распределения макроскопических (температура, давление, поле скоростей) и микроскопических (распределение кластеров по размерам) величин в рабочей камере. Обнаружено, что функция распределения кластеров по размерам имеет два максимума, первый располагается в области малых кластеров, второй приходится на кластеры, содержащие более 10^4 атомов. На основании результатов численных расчетов сделаны предположения о связи между видом функции распределения и характеристиками процесса.

Ключевые слова: металлические наночастицы; газофазный синтез; гомогенная нуклеация.

Введение

Газофазный синтез является одним из методов получения металлических наночастиц и заключается в переводе расплавленного металла в газовую фазу с последующей конденсацией паров в атмосфере холодного инертного газа. Известны несколько вариантов этого метода: плазмохимический синтез, электровзрыв, лазерная абляция и т.д. [1–6]. Почти во всех экспериментальных реализациях метода образованные кластеры подхватываются конвективными течениями и распространяются по всему объему рабочей камеры, постепенно осаждаясь на ее стенках.

Математическое моделирование газофазного синтеза выполняется с целью подбора параметров процесса – формы рабочей камеры, давления и температуры в ней, расположения источников тепла, вида инертного газа и др. – для получения наночастиц с наперед заданными характеристиками.

В процессе кластерообразования в камере образуется неравновесная многофазная среда, в которой наряду с атомами инертного газа и металла содержатся также твердые и жидкие металлические частицы. Сложность количественного описания такой среды заключается в необходимости решения задач на разном уровне размеров и времен, т.к. описание формирования наноструктур включает две составляющие: макроскопическую часть (конвекция, диффузия, перенос тепла в объеме рабочей камеры и т.д.) и микроскопическую или атомную часть (формирование критического зародыша, рост нанокластеров, выделение скрытой теплоты конденсации). Способы раздельного описания макроскопических и микроскопических процессов хорошо известны. Описание макроскопических процессов происходит в рамках уравнений непрерывной среды, которые хорошо изучены и уже используются на уровне инженерных пакетов. Для изучения микроскопических процессов также созданы разнообразные пакеты молекулярной динамики: LAMMPS, SIESTA, CPMD и другие [7–10].

Количественное взаимодействие между микро- и макропроцессами не установлено на достаточном уровне, так, чтобы использовать данные микроскопического моделирования при описании выхода готового продукта. Поэтому на данном этапе предлагается использовать термодинамические теории гомогенной нуклеации [11, 12], хотя известно, что количественное расхождение между термодинамическими расчетами скорости нуклеации и результатами экспериментов может составлять несколько порядков [13, 14]. Мы ожидаем, что термодинамическое описание позволит выявить, по крайней мере, качественные закономерности кластерообразования.

Схема численного эксперимента

В методах газофазной конденсации подвод энергии для испарения может осуществляться дуговым разрядом. На рис. 1 показана схема такой установки. Дуга формируется между электродом-стержнем и электродом-диск и вызывает испарение материала стержня. Электрод-диск изготовлен из тугоплавкого материала и может вращаться вокруг своей оси. Из камеры откачивают воздух и наполняют аргоном, так что распыление материала стержня происходит в разреженный инертный газ, а вращение диска придает разлету интенсивный характер.

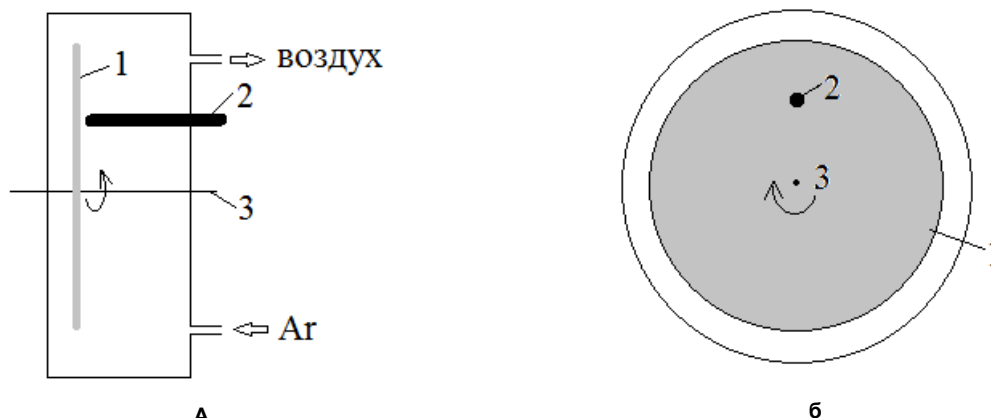


Рис. 1. Вид камеры с дуговым разрядом: а) вид сбоку; б) вид спереди;
1 – электрод-диск, 2 – электрод-стержень, 3 – ось вращения электрода-диска

Математическая модель представляет собой систему уравнений для макроскопических величин: скорости, температуры, плотности смеси и массовых долей атомов и кластеров металла в каждой точке камеры реактора

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla P + \nabla(\eta(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)) + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} T) = \nabla(\kappa \nabla T) + Q, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho C_{Ar}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} C_{Ar}) = \nabla(\rho D \nabla C_{Ar}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho C_{M_1}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} C_{M_1}) = \nabla(\rho D \nabla C_{M_1}) + \rho R_{M_1}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho C_{M_n}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} C_{M_n}) = -\nabla(\rho D \nabla C_{M_n}) + \rho R_{M_n}, \quad n = 2, N_{\max}. \quad (6)$$

В системе (1)–(6) уравнения (1) и (2) представляют собой законы сохранения импульса и вещества, (3) – уравнение теплопроводности, а (4)–(6) описывают конвективную диффузию атомов аргона Ar, металла M_1 и металлических кластеров M_n , содержащих n атомов. В уравнении (6) $N_{\max} \sim 10^{11}$ равно числу атомов в самом большом кластере, который может быть учтен [15]. Приняты следующие обозначения: $\mathbf{V} = \{V_r, V_\theta, V_z\}$ – скорость газодинамических течений в камере, T – температура газовой смеси, ρ – плотность, C_{Ar} , C_M – массовая доля аргона и кластеров металла в смеси. Кластеры полагаются малыми, так что можно считать, что они увлекаются потоками газа. В качестве уравнения состояния газовой смеси использовалось уравнение идеального газа.

Разбиение задачи на взаимодействующие между собой составляющие: газодинамическую и микроскопическую, связанную с нуклеацией, проявляется в том, что в правых частях уравнений (3), (5) и (6) содержатся слагаемые, описывающие выделение скрытой теплоты конденсации и слагаемые-источники для атомов и кластеров металла. Эти величины появляются из-за того, что состав газовой смеси и ее температура изменяются не только в результате диффузионных и конвективных процессов, но также из-за процессов объединения атомов металла в кластеры и обратных процессов их распада. Электрическая часть дуги в работе не описывается, вместо этого задается температура в месте расположения электрического контакта и расход материала стержня в секунду. Оба эти значения выбираются в диапазонах, наблюдающихся в эксперименте.

Систему (1)–(6) дополняют граничные условия. Границы камеры считаются изотермическими, на них выполнены условия прилипания и непроницаемости, т.е.

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad T = 300 \text{ K}, \quad C_{M_n} = 0, \quad n = 1, \quad N_{\max}, \quad \partial C|_{Ar} / \partial n = 0. \quad (7)$$

Условие для массовой доли кластеров означает, что частицы, оказавшись в пристенном слое, мгновенно исчезают из газового потока, оседая на стенке, т.е. осаждение кластеров определяется их диффузией к стенкам. Инерционным и гравитационным осаждением пренебрегаем. Дуговой разряд полагается точечным и сферически-симметричным, причем в прилежащей дуге области содержится только атомарный пар металла:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad T = 2000 \dots 3000 \text{ K}, \quad C|_{M_1} = 1, \quad C|_{M_{n \neq 1}} = 0, \quad C|_{Ar} = 0. \quad (8)$$

На поверхности вращающегося электрода полагается выполненными условия непротекания и непроницаемости:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = \omega r, \quad \partial C|_{M_n} / \partial \mathbf{n} = 0, \quad n = 1, \quad N_{\max}, \quad \partial C|_{Ar} / \partial \mathbf{n} = 0. \quad (9)$$

В начальном состоянии смесь содержит только атомы аргона при температуре $T = 300 \text{ K}$. Коэффициенты диффузии атомов и кластеров и коэффициент теплопроводности определяются в рамках модели твердых сфер [16].

Микроскопическая модель

Процессы нуклеации в пересыщенном паре в пренебрежении тройными и более столкновениями описываются уравнениями

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \sum_{k+m \geq n}^{\infty} \beta_{n,m,k} f_m f_k, \quad (10)$$

здесь f_n – концентрация кластеров, состоящих из n атомов, а коэффициенты уравнений $\beta_{n,m,k}$ пропорциональны вероятностям образования кластера размера n в результате столкновения кластеров, состоящих из m и k атомов. Уравнения (10) записаны в предположении, что частота столкновений описывается кинетической теорией идеального газа и может быть определена из концентраций кластеров. В термодинамических теориях проводится учет столкновений кластеров только с атомами (мономерами) и вводится предположение, что все такие столкновения приводят к их слиянию, либо к отделению атома от кластера. В этих обстоятельствах (10) преобразуется до

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \beta_{n,n-1,1} f_{n-1} f_1 - \beta_{n+1,n,1} f_n f_1 + \alpha_{n,n+1,1} f_{n+1} f_1 - \alpha_{n-1,n,1} f_n f_1, \quad (11)$$

где коэффициенты β пропорциональны вероятности слияния кластера и атома, а α – отделения атома при столкновении кластер-атом. Коэффициенты $\alpha_{n-1,n,1}$ и $\beta_{n+1,n,1}$ связаны соотношением

$$\frac{\beta_{n+1,n,1}}{\alpha_{n-1,n,1}} = \frac{P_n^*}{P_n}, \quad \text{где } P_n^* \text{ – есть давление насыщенного пара над устойчивым зародышем, } P_n \text{ – над}$$

кластером, содержащим n атомов [11]. Давления P_n^* и P_n определяются по формуле Гиббса–Кельвина, а радиус устойчивого зародыша при данных температуре и пересыщении в ячейке можно рассчитать из зависимости свободной энергии образования кластера-капли от радиуса капли – по абсциссе максимума этой зависимости [17].

Численный метод решения

Учет распределения кластеров по размерам в каждой ячейке камеры проводится аналогично работе [15], где была введена логарифмическая шкала размеров, вдоль которой, согласно формулам (11), происходит миграция кластеров. Решение уравнений (11) проводится явно для всех кластеров из линейки размеров и в каждой ячейке разностной схемы. После перерасчета на единицу времени и объема это дает значения прироста массовой доли и тепловыделения для подстановки в уравнения (3, 5, 6). Решение системы (1)–(9) проводится разностными методами, т.е. разбиением всего рабочего объема на элементы, в объеме которых можно считать температуру, плотность смеси, скорость и массовые доли кластеров и атомов постоянными. Разностная сетка равномерна в цилиндрических координатах, системы разностных уравнений решаются методом исключения Гаусса. Расчеты проведены для меди.

Результаты и обсуждение

На рис. 2, *a* и *б* показаны распределения скоростей и температуры, полученные решением системы (1)–(9), (11). Как показали расчеты, наибольшая скорость достигается вблизи дуги. Разлетающиеся от дуги частицы подхватываются круговыми течениями и устремляются к стенке. Расчеты для рис. 2 выполнены при температуре в дуге 3000 К, расход меди составлял 10 мг/с.

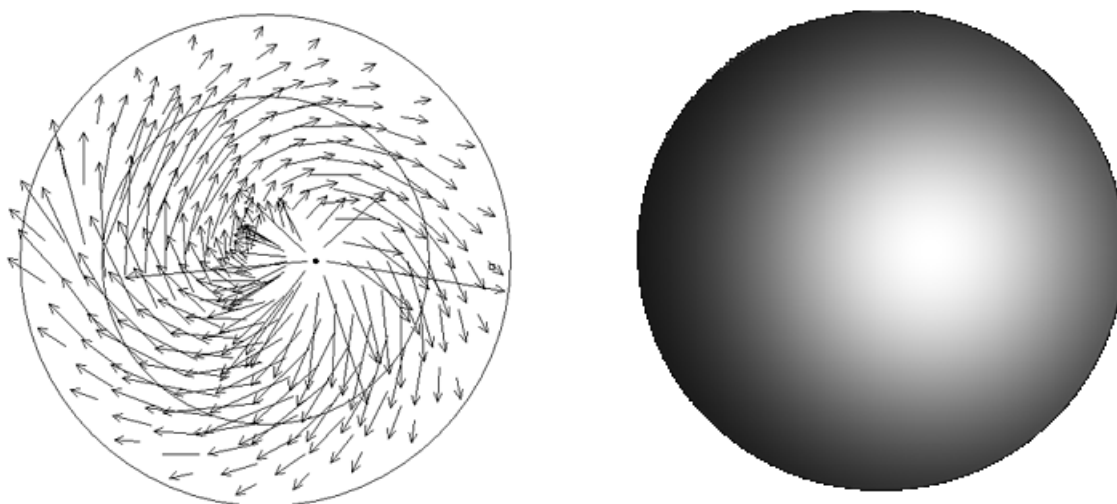


Рис. 2. Поля скорости и температуры в газе вблизи вращающегося электрода. Черной точкой отмечена дуга. Внутренний круг изображает электрод-диск, внешний круг показывает границы камеры

Использование уравнений (11) для каждой ячейки разностной схемы и на каждом временном шаге позволяет получить локальные распределения металлических частиц по размерам. Исходя из этих данных, можно вычислить интегральный диффузионный поток к стенкам камеры и, следовательно, временную эволюцию количества осажденных на стенках частиц. На рис. 3 показаны распределения по размерам осевших на стенках за 10 мкс частиц, полученные при значениях угловой скорости вращения диска 100 и 250 рад/с и температурах в дуге 2000 К и 3000 К. Как видно из рис. 3, во всех случаях формируется сплошное распределение, максимум которого приходится на кластеры малых размеров (1–50 ат.). Распределения тем уже, чем выше угловая скорость вращения диска и чем выше температура в дуге. На рис. 3, *б* видно формирование второго максимума распределения, приходящегося на частицы, содержащие 10^4 атомов (около 1 нм). Появление второго горба кривой распределения связано, возможно, с тем, что 10^4 – это среднее количество атомов, которые могут объединиться в кластер в пути по пересыщенной среде от электрода к стенке, т.е. среднее количество присоединенных атомов. Это отчасти подтверждает факт, что при дальнейшем уменьшении скорости вращения и (или) температуры горб на распределении смещается в сторону больших размеров кластеров, а при увеличении исчезает – сливается с хвостом кривой, имеющей максимум при малых значениях n (рис. 3, *a*, *б*).

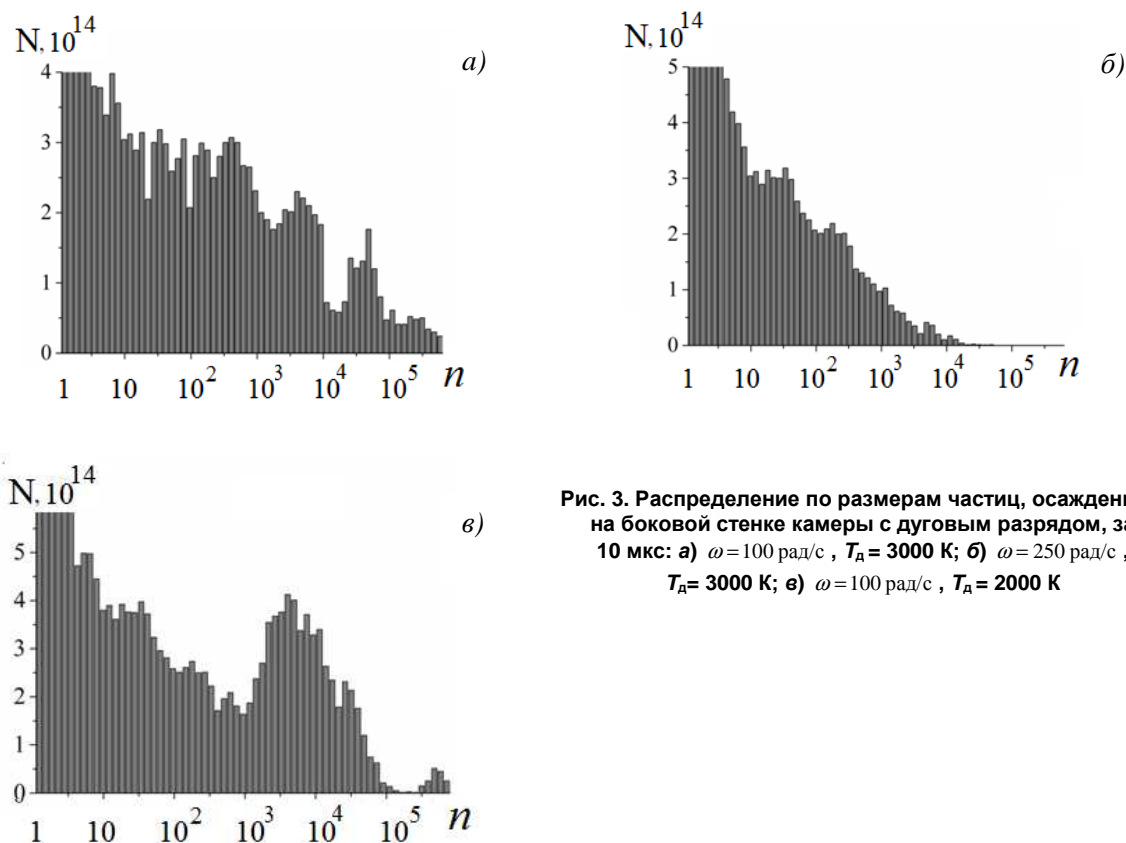


Рис. 3. Распределение по размерам частиц, осажденных на боковой стенке камеры с дуговым разрядом, за 10 мкс: а) $\omega = 100$ рад/с , $T_d = 3000$ К; б) $\omega = 250$ рад/с , $T_d = 3000$ К; в) $\omega = 100$ рад/с , $T_d = 2000$ К

Заключение

Таким образом, в работе предложена и реализована модель процессов формирования наночастиц меди в процессах испарения-конденсации в камере с дуговым разрядом.

Получены распределения макроскопических (температура, давление, поле скоростей) и микроскопических частиц (распределение кластеров по размерам) в каждой точке рабочей камеры.

Обнаружено, что при температурах в дуге $T < 2000$ К и скоростях вращения электрода-диска, меньших 100 рад/с, функция распределения кластеров по размерам имеет два максимума, один – в области малых кластеров, другой приходится на кластеры, содержащие более 10^4 атомов. Появление второго горба кривой распределения связано, видимо, с существованием среднего числа атомов, которые могут присоединиться друг к другу за средний путь от места дугового разряда и до стенок камеры. На это среднее число и приходится второй пик кривой. Полученные результаты не претендуют на количественное совпадение с экспериментом, однако позволяют предсказать эволюцию функции распределения по размерам частиц, осевших на стенках камеры, при изменениях температуры в дуге и скорости вращения электрода-диска.

Авторы выражают благодарность проф. Б.Р. Гельчинскому за полезные обсуждения и Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку, грант РФФИ № 15-03-04182.

Литература

1. Газофазный метод получения порошков / И.В. Фришберг, Л.И. Кватер, Б.П. Кузьмин, С.В. Грибовский. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
2. Flagan, R.C. Particle structure control in nanoparticle synthesis from the vapor phase / R.C. Flagan, M.M. Lunden // Mater. Sci. Eng. – 1995. – A204. – P. 113.
3. Kinetics and mechanisms of nanoparticle formation and growth in vapor phase condensation process / A. Simchi, R. Ahmadi, S. Reihani, A. Mahdavi // Materials and Design. – 2007. – Vol. 28, № 3. – P. 850–856.

4. Зависимость дисперсных характеристик нанопорошков металлов от условий электрического взрыва проводников / М.И. Лернер, В.И. Давыдович, Н.В. Сваровская, В.В. Домашенко // Нанотехника. – 2009. – № 17. – С. 57–60.
5. Симакин, А.В. Образование наночастиц при лазерной абляции твердых тел в жидкостях / А.В. Симакин, В.В. Воронов, Г.А. Шафеев // Труды института им. Прохорова. – 2004. – Т. 60. – С. 83–106.
6. Granqvist, C.G. Ultrafine metal particles / C.G. Granqvist, R.A. Buhrman // Journal of Applied Physics. – 1976. – Vol. 47, № 5. – P. 2200–2219.
7. Kesälä, E. Molecular dynamics simulation of pressure dependence of cluster growth in inert gas condensation / E. Kesälä, A. Kuronen, K. Nordlund // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 75. – 174121.
8. Raty J.-Y. Growth of Carbon Nanotubes on Metal Nanoparticles: A Microscopic Mechanism from Ab Initio Molecular Dynamics Simulations / J.-Y. Raty, F. Gygi, G. Galli // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 95. – 096103.
9. Воронцов, А.Г. Моделирование зарождения и роста металлических наночастиц в процессе конденсации из пересыщенного пара / А.Г. Воронцов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2009. – Вып. 1. – № 22(155). – С. 39–44.
10. Hendy, S. Coalescence of nanoscale metal clusters: Molecular-dynamics study / S. Hendy, S.A. Brown, M. Hyslop // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 68. – 241403.
11. Becker, R. The kinetic treatment of nuclear formation in supersaturated vapors / R. Becker, W. Doring // Ann. Phys. – 1935. – Vol. 24. – P. 719–738.
12. Зельдович, Я.Б. К теории образования новой фазы. Кавитация / Я.Б. Зельдович // ЖЭТФ. – 1942. – Т. 12. – С. 525.
13. Лушников, А.А. Современное состояние теории гомогенной нуклеации / А.А. Лушников, А.Г. Сутугин // Успехи химии. – 1976. – Т. 45. – С. 385–417.
14. Фисенко, С.П. Микроструктура поля пересыщения при гомогенной нуклеации в парогазовой смеси / С.П. Фисенко // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, № 5. – С. 35–40.
15. Коренченко, А.Е. Математическое моделирование процесса образования металлических наночастиц при конденсации паров расплавленного металла / А.Е. Коренченко, Б.Р. Гельчинский // Расплавы. – 2011. – № 1. – С. 60–67.
16. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, В. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 692 с.
17. Петров, Ю.И. Кластеры и малые частицы / Ю.И. Петров. – М.: Наука, 1986. – 367 с.

Поступила в редакцию 15 июня 2016 г.

MATHEMATICAL SIMULATION OF GAS-PHASE SYNTHESIS OF METAL NANOPARTICLES IN A CHAMBER WITH AN ARC DISCHARGE

A.E. Korenchenko, V. Jamal Jamal

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: korenchenkoae@susu.ru

Numerical simulation of the metallic nanoparticles synthesis in a chamber with an arc discharge were elaborated. The efficiency of the vapor phase condensation of metallic nanoclusters and nanopowders was determined by setting optimum process parameters, the possibilities of experimental estimation of which is limited. Mathematical and physical models were developed to perform computer analysis of the vapor phase condensation to describe the macroscopic characteristics of the process (temperature regime, gas mixture dynamics, diffusion and convective transport of clusters) with allowance for the properties of the components on a microscopic level. The classical Becker-Döring-Folmer-Weber ther-

modynamic nucleation theory was used for the description of the probability of atom-cluster aggregation. The distributions of macroscopic (temperature, pressure, velocity field) and microscopic (cluster size distribution) values in the chamber were obtained. It is found that the size distribution function of clusters deposited on the chamber walls has two peaks, the first – in the region of small clusters (1–50 atoms) and the second – for the clusters containing more than 10^4 atoms. Based on the results of numerical calculations the assumptions are made about the relationship between the type of size distribution function and characteristics of the process.

Keywords: metal nanoparticles; gas-phase synthesis; homogeneous nucleation.

References

1. Frishberg I.V., Kvater L.I., Kuz'min B.P., Gribovskiy S.V. *Gazofaznyy metod polucheniya poroshkov* (Gas-phase method for obtaining powders). Moscow, Nauka Publ., 1978, 223 p. (in Russ.).
2. Flagan R.C., Lunden M.M. Particle structure control in nanoparticle synthesis from the vapor phase. *Mater. Sci. Eng.*, 1995, A204, P. 113. DOI: 10.1016/0921-5093(95)09947-6
3. Simchi A., Ahmadi R., Reihani S., Mahdavi A. Kinetics and mechanisms of nanoparticle formation and growth in vapor phase condensation process. *Materials and Design*, 2007, Vol. 28, no. 3, pp. 850–856. DOI: 10.1016/j.matdes.2005.10.017
4. Lerner M.I., Davydovich V.I., Svarovskaya N.V., Domashenko V.V. Disperse characteristics of metallic nanopowders as a function of electric explosion of wire (EEW) conditions. *Nanotekhnika*, 2009, no. 17, pp. 57–60. (in Russ.).
5. Simakin A.V., Voronov V.V., Shafeev G.A. *Trudy instituta im. Prokhorova*, 2004, Vol. 60, pp. 83–106. (in Russ.).
6. Granqvist C.G., Buhrman R.A. Ultrafine metal particles. *Journal of Applied Physics*, 1976, Vol. 47, no. 5, pp. 2200–2219. DOI: 10.1063/1.322870
7. Kesälä E., Kuronen A., Nordlund K. Molecular dynamics simulation of pressure dependence of cluster growth in inert gas condensation. *Phys. Rev. B.*, 2007, Vol. 75, 174121. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.174121
8. Raty J.-Y., Gygi F., Galli G. Growth of Carbon Nanotubes on Metal Nanoparticles: A Microscopic Mechanism from *ab initio* Molecular Dynamics Simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, Vol. 95, 096103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.096103
9. Vorontsov A.G. Modeling of nucleation and growth of metal nanoparticles during the condensation from vapour phase. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2009, Issue 1, no. 22(155), pp. 39–44. (in Russ.).
10. Hendy S., Brown S.A., Hyslop M. Coalescence of nanoscale metal clusters: Molecular-dynamics study. *Phys. Rev. B*, 2003, Vol. 68, 241403. DOI: 10.1103/physrevb.68.241403
11. Becker R., Doring W. The kinetic treatment of nuclear formation in supersaturated vapors. *Ann. Phys.*, 1935, Vol. 24, pp. 719–738.
12. Zel'dovich Ya.B. *ZhETF*, 1942, Vol. 12, p. 525. (in Russ.).
13. Lushnikov A.A., Sutugin A.G. *Uspekhi khimii*, 1976, Vol. 45, pp. 385–417. (in Russ.).
14. Fisenko S.P. Microstructure of the Supersaturation Field in Homogeneous Nucleation in a Vapor-Gas Mixture. *Technical Physics*, 2013, Vol. 58, pp. 658–663. DOI: 10.1134/s1063784213050083
15. Korenchenko A.E., Gel'chinskiy B.R. Mathematical simulation of the formation of metallic nanoparticles during the condensation of molten metal vapors. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2011, Vol. 2011, Issue 8, pp. 723–728. DOI: 10.1134/s003602951108009x
16. Berd R., St'yuard V., Layftut V. *Yavleniya perenosa* (Transport phenomenon). Moscow, Khimiya Publ., 1974, 692 p. (in Russ.). [Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, 1960, 780 p.]
17. Petrov Yu.I. *Klastery i malye chastitsy* (Clusters and small particle). Moscow, Nauka Publ., 1986, 367 p. (in Russ.).

Received June 15, 2016

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНО ТОЧНЫХ РАСЧЁТОВ ЭНЕРГИЙ В ОЦК-ЖЕЛЕЗЕ

Я.М. Ридный, А.А. Мирзоев, Д.А. Мирзаев

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: ridnyiim@susu.ru

В новой версии (11.1) программного пакета WIEN2k проведено первопринципное моделирование равновесной структуры и свойств ОЦК-железа. Определены оптимальные значения основных параметров моделирования, позволяющие рассчитывать энергетические характеристики системы с точностью не менее 0,01 эВ. Энергия растворения углерода в ОЦК-железе составила 0,85 эВ.

Ключевые слова: ОЦК-железо; парамагнитное состояние; первопринципное моделирование; примеси углерода; WIEN2k; метод LAPW.

Введение

Сплавы на основе железа, несмотря на развитие производства других металлов, пластмасс, керамики, композитов, остаются основными конструкционными материалами. Первопринципное моделирование ОЦК-железа проводилось неоднократно, существует множество работ по этой теме [1–9]. В работах [1–4] моделирование проводилось псевдопотенциальным методом, который точно описывает электронный спектр только валентных электронов. Этого вполне достаточно для описания чистых веществ, однако может приводить к погрешностям при расчете растворов внедрения, где может возникнуть необходимость в учете более глубоких электронных уровней. Отсутствие учёта этих уровней приводит к менее точным результатам. В отличие от псевдопотенциального метода в полнопотенциальном происходит учёт всех электронов, что делает его наиболее точным. Данный метод используется в программном пакете WIEN2k [5–9]. В большинстве работ [7–9] отсутствует объяснение причины выбора тех или иных значений параметров моделирования. Задача выбора оптимальных параметров системы для моделирования электронных и магнитных свойств является чрезвычайно важной, поскольку от них зависит точность полученных результатов. Частично это связано с тем, что ряд параметров моделирования оптимизированы самими разработчиками пакета WIEN2k, либо группами, которые тесно с ними сотрудничают. Для расчетов сплавов на основе железа обычно используют обобщенное градиентное приближение PBE-GGA и типовые значения параметров, характеризующие базис плоских волн, которые составляющие $E_{cut} = -7$ Рб, $G_{max} = 20$ Рб^{0.5} [10–12]. Другие параметры моделирования были оптимизированы в работах нашей группы [5–6] и составили: $N_k = 3 \times 3 \times 3$ точки; $K_{max} = 5$ а.е.⁻¹; $R_{mt}(Fe) = 2,0$ а.е.

В версии WIEN2k_11.1 [13] произошла смена схемы расчёта полной энергии системы. Смена расчётной схемы позволила получить более быструю и монотонную сходимость. Можно предполагать, что такое изменение приведет к тому, что параметры моделирования, оптимизированные для предыдущих версий программы, должны быть переопределены. Повышение достоверности и точности прогнозирования структуры и свойств, как чистого железа, так и сплавов на его основе является насущной задачей, стоящей перед материалововедами. В связи с этим настоящая работа посвящена выбору оптимальных параметров для построения модели ОЦК-железа в новой версии программного пакета WIEN2k, обеспечивающих точность расчета полной энергии моделируемой системы не хуже 0,01 эВ.

Методика расчётов

В данной работе расчёты проводились из первых принципов методом LAPW [10] в программном пакете WIEN2k [11], обеспечивающим высокую точность расчета полной энергии при минимальном количестве подгоночных параметров. Это наиболее точный метод, используемый в рамках теории функционала плотности. Для расчётов использовался вычислительный комплекс

ЮУрГУ-Торнадо [14]. Для интегрирования в обратном пространстве и вычисления электронной плотности использовалась схема Монхорста–Пака с сеткой из N_k точек в зоне Бриллюэна. Чем больше используется точек, тем выше точность интегрирования, однако при этом возрастает расчетное время, поэтому оптимальное значение определяется из условия достижения требуемой точности энергии системы [15]. Критерием сходимости во всех расчётах было достижение точности расчета полной энергии системы, заряда и силы взаимодействия между двумя атомами не менее 10^{-4} РБ, $10^{-3}e$ и 1 мРБ/а.е. соответственно. В данной работе ОЦК-железо моделировалось в суперячейке состоящей из 54 атомов железа.

Для определения энергии растворения углерода относительно фазы графита использовалась формула:

$$\Delta H = E(\text{Fe}_{54}\text{C}) - E(\text{Fe}_{54}) - E(\text{C}), \quad (1)$$

где $E(\text{Fe}_{54}\text{C})$ – энергия суперячейки, состоящей из 54 атомов железа и одного атома углерода, находящегося в октапоре, $E(\text{Fe}_{54})$ – энергия суперячейки, состоящей из 54 ат. железа, а $E(\text{C})$ – энергия одного атома углерода в решётке графита. Параметры структуры графита были взяты из работы Джанг [3] ($a = 2,462 \text{ \AA}$, $c = 6,656 \text{ \AA}$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$).

Результаты

В данной работе проведены вычисления, с помощью которых определены оптимальные параметры, позволяющие обеспечить высокую точность расчетов с приемлемыми затратами компьютерных ресурсов. Часть параметров можно взять из нашей работы [16]. В ней моделировалось растворение углерода в ГЦК-железо на 11.1 версии WIEN2k. Эти параметры $R_{\text{mt}}(\text{Fe}) = 2,0$ а.е. и $R_{\text{mt}}(\text{C}) = 1,2$ а.е. Значение $R_{\text{mt}}(\text{Fe}) = 2,0$ а.е. совпало со значением полученным в работах нашей группы на предыдущих версиях WIEN2k [5–6].

В первую очередь была выполнена оптимизация количества k -точек, так как этот параметр не зависит от других. Были взяты значения, задаваемые для ОЦК-железа по умолчанию: $a = 2,84 \text{ \AA}$, $K_{\text{max}} = 5,0$ а.е.⁻¹ [5–6]. На рис. 1 представлен график зависимости энергии системы от количества N_k точек в зоне Бриллюэна.

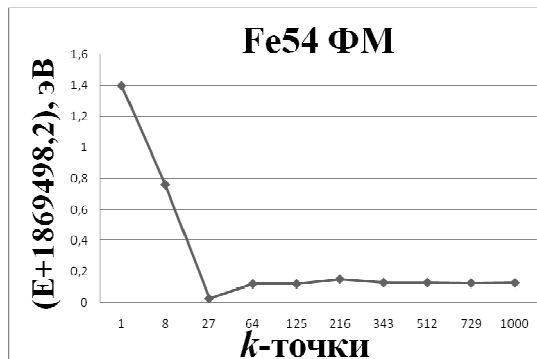


Рис. 1. График зависимости энергии системы от количества k -точек в зоне Бриллюэна

Из рис. 1 видно, что при увеличении количества k -точек выше 64 энергия системы перестает меняться. Таким образом, оптимальное число k -точек, необходимое для получения требуемой точности расчета полной энергии для суперячейки из 54 атомов, равно 64. Несимметричные k -сетки решено не рассматривать, ввиду того что система у нас симметричная и у неё нет никаких выделенных направлений для растяжения.

Весьма важным параметром моделирования является величина K_{max} . Для оптимизации данного параметра была изучена сходимость результатов расчета полной энергии системы от K_{max} , для ферромагнитной (ФМ) фазы ОЦК-железа, представленная на рис. 2. Видно, что в новой версии пакета, в отличие от прежней, не наблюдается сходимость значений энергии при значении параметра $K_{\text{max}} = 5$ а.е.⁻¹.

Расчеты показали, что с увеличением K_{max} энергия системы монотонно падает, в силу чего не удастся достичь такого значения параметра, после которого наблюдается сходимость в пределах 0,01 эВ для полной энергии системы. Отметим, однако, что реальной величиной, которую мы хотим получить при проведении расчетов, является не сама энергия, а ее разность для двух раз-

личных конфигураций суперячейки. В работе [6], например, проводилась оптимизация K_{max} для достижения заданной точности расчета энергии растворения водорода в ОЦК-железе и было рекомендовано значение $K_{max} = 5$ а.е.⁻¹. Следуя примеру работы [6], мы решили определить оптимальное значение данного параметра по сходимости расчетной величины энергии растворения атома углерода в железе. С этой целью нами были определены равновесные значения параметров решётки для чистого железа и железа с одним атомом углерода (рис. 3).

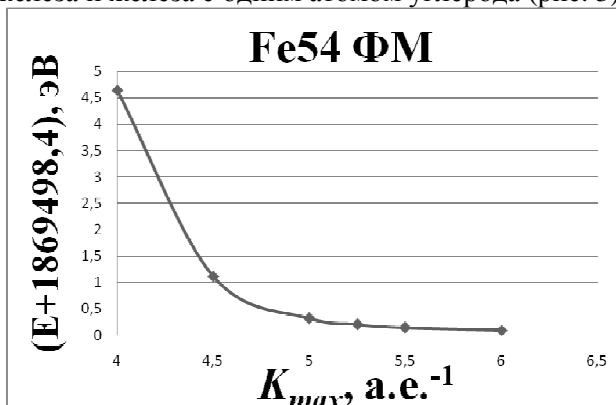


Рис. 2. График зависимости энергии системы от параметра K_{max}

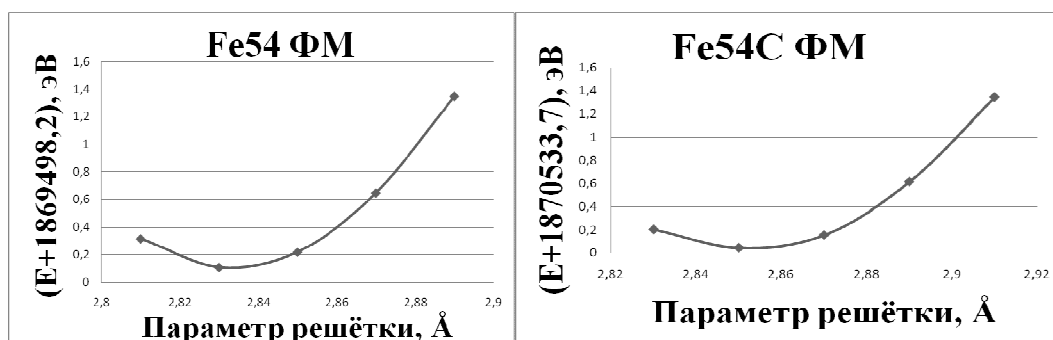


Рис. 3. График зависимости энергии системы от параметра решётки для чистого железа и железа с одним атомом углерода

Из рис. 3 видно, что оптимальные параметры решётки $a = 2,835$ Å для чистого железа и $a = 2,85$ Å для системы с одним растворённым атомом углерода. Параметр решётки чистого железа практически совпадает с параметром определённым в работе [5], $a = 2,84$ Å. Небольшие отклонения в 0,2 % являются следствием изменений схемы расчёта.

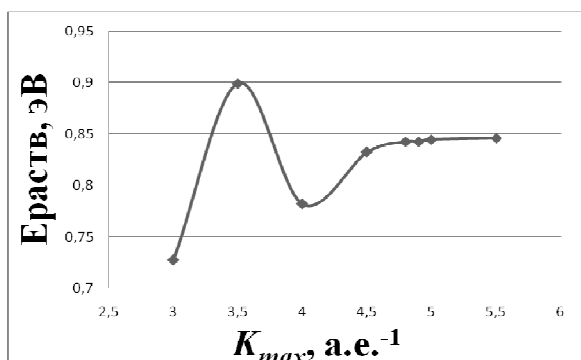


Рис. 4. График зависимости энергии растворения углерода от параметра K_{max}

После определения равновесных параметров решётки, которые мало чувствительны к выбору параметра K_{max} , была изучена сходимость значений по энергии растворения углерода в ОЦК-железе при вариации этого параметра (рис. 4). На графике видно, что наименьшим (оптимальным) значением параметра, обеспечивающим точность значений энергии не хуже 0,01 эВ, является $K_{max} = 5$ а.е.⁻¹. Таким образом, определенные нами оптимальные параметры моделирования

совпадают с параметрами, полученными в работах [5–6], за исключением числа k -точек, число которых необходимо увеличить с 27 до 64 точек.

После определения оптимальных параметров моделирования проведено сравнение энергии растворения углерода в ОЦК-железе, полученной в нашей работе, со значениями, полученными другими авторами (см. таблицу).

Энергия растворения углерода в ОЦК-железе

Работа	Метод	Энергия растворения, эВ
[3,4]	Псевдопот.	0,7–0,74
[17]	Терм. анализ	0,99
[18]	Эксп. ($T = 1000$ К)	1,01
[19]	Эксп. ($T = 955–1000$ К)	1,14–1,19
[20]	Эксп. ($T = 773–993$ К)	0,6–0,78
[21]	Эксп. ($T = 873–1073$ К)	0,63–0,98
Данная работа	Полнопот. (27 k -точки)	0,92±0,01
Данная работа	Полнопот. (64 k -точки)	0,85±0,01

Из таблицы видно, что данные по энергии растворения очень сильно различаются. Вычисленное нами значение энергии растворения углерода в ОЦК-железе лежит в середине интервала энергий растворения вычисленных экспериментально, что свидетельствует о более высокой точности проведенного моделирования, чем в работах [3, 4]. Показано, что использование параметров моделирования полученных в предыдущих версиях WIEN2k приводит к ошибке в определении энергии растворения углерода в ОЦК-железе в 0,07 эВ.

Заключение

Определены оптимальные значения основных параметров моделирования примесей углерода в ОЦК-железе, позволяющие рассчитывать энергетические характеристики системы с точностью не менее 0,01 эВ в новой версии (11.1) программного пакета WIEN2k. Показано, что:

1. Для обеспечения данной точности необходимо увеличить количество k -точек до 64 по сравнению со значением $k = 27$, рекомендованным в работах [5, 6]. Оптимальное значение параметра K_{max} не изменилось и по-прежнему составляет 5 а.е.⁻¹.

2. С использованием найденных значений параметров моделирования проведено вычисление энергии растворения атома углерода в ферромагнитной фазе ОЦК-железа, которая составила 0,85 эВ, что находится в хорошем согласии с результатами эксперимента и других первопринципных расчетов. Использование параметров моделирования, полученных для предыдущих версий WIEN2k, приводит к ошибке в определении энергии растворения углерода в ОЦК-железе в 0,07 эВ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 16-19-10252 и гранта РФФИ № 16-03-00486 А.

Литература

1. Domain, C. Ab initio Study of Foreign Interstitial Atom (C, N) Interactions with Intrinsic Point Defects in α -Fe / C. Domain, C.S. Becquart, J. Foct // Physical Review B. – 2004. – Т. 69, № 14. – P. 144112.
2. Ruban, A.V. Self-trapping of carbon atoms in α -Fe during the martensitic transformation: A qualitative picture from ab initio calculations / A.V. Ruban // Physical Review B. – 2014. – Vol. 90. – P. 144106.
3. Jiang, D.E. Carbon dissolution and diffusion in ferrite and austenite from first principles / D.E. Jiang, E.A. Carter // Physical Review B. – 2003. – Vol. 67. – P. 214103.
4. Hepburn, D.J. First-principles study of helium, carbon, and nitrogen in austenite, dilute austenitic iron alloys, and nickel / D.J. Hepburn, D. Ferguson, S. Gardner, G.J. Ackland // Physical Review B. – 2013. – Vol. 88. – P. 024115.

5. Урсаева, А.В. Выбор оптимальных параметров для построения максимально точной модели ОЦК-железа / А.В. Урсаева, Г.Е. Рузанова, А.А. Мирзоев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 2, № 9(185). – С. 97–101.
6. Ракитин, М.С. Изменение электронной структуры α -железа, содержащего внедренные атомы водорода / М.С. Ракитин, А.А. Мирзоев, Д.А. Мирзаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». – 2010. – Вып. 14, № 13(189). – С. 67–71.
7. Stojica, N.L. Phase stability of Fe and Mn within density-functional theory plus on-site Coulomb interaction approaches / N.L. Stojica, N.L. Binggeli // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2008. – Vol. 320. – P. 100–106.
8. Iglesias, R. Ab initio studies on the magnetic phase stability of iron / R. Iglesias, S.L. Palacios // Acta Materialia. – 2007. – Vol. 55. – P. 5123–5129.
9. Herper, H.C. Ab initio full-potential study of the structural and magnetic phase stability of iron / H.C. Herper, E. Hoffmann, P. Entel // Physical Review B. – 1999. – Vol. 60. – P. 3839–3848.
10. Cottenier, S. Density Functional Theory and the family of (L)APW-methods: a step-by-step introduction / S. Cottenier, 2004. [http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/DFT_and_LAPW-2_cottenier.pdf]
11. Schwarz, K. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material science / K. Schwarz, P. Blaha, G.K.H. Madsen // Computer Physics Communications. – 2002. – Vol. 147. – P. 71–76.
12. Blaha, P. An Augmented PlaneWave + Local Orbitals Program for Calculating Crystal Properties revised edition WIEN2k_11.1 (Release 5.4.2011) / P. Blaha, K. Schwarz, G. Madsen *et al.* [http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/usersguide.pdf].
13. Marks, L.D. Fixed-Point Optimization of Atoms and Density in DFT / L.D. Marks // J. Chem. Theory Comput. – 2013. – Vol. 9, № 6. – P. 2786–2800.
14. <http://supercomputer.susu.ac.ru/computers/tornado/>
15. Monkhorst, H.J. Special points for Brillouin-zone integrations / H.J. Monkhorst, J.D. Pack // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, № 12. – P. 5188–5192.
16. Ридный, Я.М. Ab-initio моделирование влияния ближнего окружения примесей углерода на энергию их растворения в ГЦК-железе / Я.М. Ридный, А.А. Мирзоев, Д.А. Мирзаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 108–116.
17. Могутнов, Б.М. Термодинамика сплавов железа / Б.М. Могутнов, И.А. Томилин, Л.А. Шварцман. – Москва: Metallurgia, 1984. – 206 с.
18. Dunn, W.W. The thermodynamic properties of carbon in body-centered cubic iron / W.W. Dunn, R.B. McLellan // Metallurgical Transactions. – 1971. – Vol. 2. – P. 1079–1086.
19. Lobo, J.A. Thermodynamics and solubility of carbon in ferrite and ferritic Fe-Mo alloys / J.A. Lobo, G.H. Geiger // Metallurgical Transactions A. – 1976. – Vol. 7A. – P. 1347–1357.
20. Shumilov, M. Solubility of carbon in ferrite / M. Shumilov, A. Kozak, L. Yakushechkina, K. Sokolov // The Physics of Metals and Metallography. – 1973. – Vol. 47. – P. 2169–2178.
21. Schlirrmann, E. Carburisation equilibria of alpha-iron with methane-hydrogen mixtures in the 600-800 C range and their / E. Schlirrmann, T. Schmidt, F. Tillmann // Giesserei-Forschung. – 1967. – Vol. 19, № 1. – pp. 35–41.

Поступила в редакцию 16 мая 2016 г.

**DETERMINING THE OPTIMAL MODELING PARAMETERS
FOR MAXIMUM PRECISE CALCULATIONS OF ENERGY IN BCC-IRON****Ya.M. Ridnyi, A.A. Mirzoev, D.A. Mirzaev***South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation**E-mail: ridnyiim@susu.ru*

The ab initial modeling of the equilibrium structure and properties of BCC-iron is performed in the new version (11.1) of WIEN2k software package. A full-potential method of linear joined plane waves LAPW is used for the calculations, taking into account the generalized gradient approximation PBE-GGA, in supercell consisted of 54 iron atoms with periodic boundary conditions. This is the most accurate method used in the framework of density functional theory. Integration into the reciprocal space and calculation of electron density is held in accordance with the Monkhorst–Pack scheme with a grid of N_k points in the Brillouin zone. The criterion for the convergence in all the calculations is to achieve the accuracy of the calculation of the total energy of the system, charge and force of interaction between two atoms of not less than 10^{-4} Ry, $10^{-3}e$ and 1 mRy/a.u. respectively.

The optimal values of the basic simulation parameters of carbon impurities in the BCC-iron are determined. They allow calculating the energy performance of the system with an accuracy of not less than 0,01 eV. These parameters compile $N_k = 64$ points, $K_{\max} = 5$ a.u.⁻¹. It is shown that the use of the simulation parameters obtained in previous versions of WIEN2k leads to the error in determining the carbon dissolving power in BCC-iron at 0,07 eV.

The calculation of energy of dissolution of carbon atoms in the ferromagnetic phase of BCC-iron is conducted using the obtained simulation parameters. It amounts to $0,85 \pm 0,01$ eV, which is a good fit to the experimental results and other first-principle calculations.

Keywords: BCC-iron; paramagnetic state; ab initio modeling; carbon impurities; WIEN2k; LAPW method.

References

1. Domain C., Becquart C.S., Foct J. Ab Initio Study of Foreign Interstitial Atom (C, N) Interactions with Intrinsic Point Defects in α -Fe. *Phys. Rev. B*, 2004, Vol. 69, no. 14, P. 144112. DOI:10.1103/PhysRevB.69.144112.
2. Ruban A.V. Self-trapping of carbon atoms in α -Fe during the martensitic transformation: A qualitative picture from ab initio calculations. *Phys. Rev. B*, 2014, Vol. 90, P. 144106. DOI:10.1103/PhysRevB.90.144106.
3. Jiang D.E., Carter E.A. Carbon dissolution and diffusion in ferrite and austenite from first principles. *Phys. Rev. B*, 2003, Vol. 67, P. 214103. DOI:10.1103/PhysRevB.67.214103.
4. Hepburn D.J., Ferguson D., Gardner S., Ackland G.J. First-principles study of helium, carbon, and nitrogen in austenite, dilute austenitic iron alloys, and nickel. *Phys. Rev. B*, 2013, Vol. 88, P. 024115. DOI:10.1103/PhysRevB.88.024115.
5. Ursaeva A.V., Ruzanova G.E., Mirzoev A.A. Vybór optimal'nykh parametrov dlya postroeniya maksimal'no tochnoy modeli OTsK-zheleza (Selection of optimal parameters for formation the most accurate model of BCC iron). *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2010, Issue 2, no. 9(185), pp. 97–101. (in Russ.).
6. Rakitin M.C., Mirzoev A.A., Mirzaev D.A. Izmenenie elektronnoy struktury α -zheleza, sodershashchego vnedrennye atomy vodoroda (Change of electronic structure in iron containing interstitial atoms of hydrogen). *Vestnik YuUrGU. Seriya: Metalurgiya*, 2010, Issue 14, no. 13(189), pp. 67–71. (in Russ.).

7. Stojica N.L., Binggeli. N.L. Phase stability of Fe and Mn within density-functional theory plus on-site Coulomb interaction approaches. *Jour. of Magnetism and Magnetic Mat.*, 2008, Vol. 320, pp. 100–106. DOI: 10.1016/j.jmmm.2007.05.011.
8. Iglesias R., Palacios. S.L. Ab initio studies on the magnetic phase stability of iron. *Acta Mater.*, 2007, Vol. 55, pp. 5123–5129. DOI: 10.1016/j.actamat.2007.05.035.
9. Herper H.C., Hoffmann E., Entel. P. Ab initio full-potential study of the structural and magnetic phase stability of iron. *Phys. Rev. B*, 1999, Vol. 60, pp. 3839–3848. DOI: 10.1103/PhysRevB.60.3839.
10. Cottenier S. *Density Functional Theory and the family of (L)APW-methods: a step-by-step introduction*. 2004. Available at: [http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/DFT_and_LAPW-2_cottenier.pdf]
11. Schwarz K., Blaha P., Madsen G.K.H. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material science. *Comp. Phys. Commun.*, 2002, Vol. 147, pp. 71–76. DOI:10.1016/S0010-4655(02)00206-0.
12. Blaha P., Schwarz K., Madsen G. *et. al. An Augmented PlaneWave + Local Orbitals Program for Calculating Crystal Properties revised edition WIEN2k_11.1 (Release 5.4.2011)*. Available at: [http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/usersguide.pdf].
13. Marks L.D. Fixed-Point Optimization of Atoms and Density in DFT. *J. Chem. Theory Comput.*, 2013, Vol. 9, no. 6, pp. 2786–2800. DOI:10.1021/ct4001685.
14. <http://supercomputer.susu.ac.ru/computers/tornado/>
15. Monkhorst H.J., Pack J.D. Special points for Brillouin-zone integrations. *Phys. Rev. B*, 1976, Vol. 13, no. 12, pp. 5188–5192. DOI: 10.1103/physrevb.13.5188
16. Ridnyi Ya.M., Mirzoev A.A., Mirzaev D.A. Ab-initio simulation of influence of short-range ordering carbon impurities on the energy of their dissolution in the FCC-iron. *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2013, Vol. 5, no. 2, pp. 108–116. (in Russ.).
17. Mogutnov B.M., Tomilin I.A., Shvartsman L.A. *Termodinamika splavov zheleza* (Thermodynamics of ferroalloys). Moscow, Metallurgiya Publ., 1984, 206 p. (in Russ.).
18. Dunn W.W., McLellan R.B. The thermodynamic properties of carbon in body-centered cubic iron. *Metall. Trans.*, 1971, Vol. 2, pp. 1079–1086. DOI:10.1007/BF02664239.
19. Lobo J.A., Geiger G.H. Thermodynamics and Solubility of Carbon in Ferrite and Ferritic Fe-Mo Alloys. *Metallurgical Transactions A*, 1976, Vol. 7A, pp. 1347–1357. DOI:10.1007/BF02658820.
20. Shumilov M., Kozak A., Yakushechkina L., Sokolov K. Solubility of carbon in ferrite. *The Physics of Metals and Metallography*, 1973, Vol. 47, pp. 2169–2178.
21. Schlirrmann E., Schmidt T., Tillmann F. Carburisation equilibria of alpha-iron with methane-hydrogen mixtures in the 600–800 C range and their. *Giesserei-Forschung*, 1967, Vol. 19, no. 1, pp. 35–41.

Received May 16, 2016

Персоналии

МИХАИЛ МАРКОВИЧ КИПНИС. К СЕМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



Михаил Маркович Кипнис родился 27 мая 1941 года в Чернигове, на Украине. Его отец Кипнис Мордко (в русской транскрипции – Марк) Гершкович был служащим на железной дороге, мать Брайна Береливна – домохозяйка. С началом войны отец ушел на фронт, а мама с маленьким Мишей и его одиннадцатилетним братом Борисом, отправилась в эвакуацию «в сторону Саратова». В результате остановились в городе Орске Оренбургской (тогда Чкаловской) области. В этом пыльном городишке, в одной комнате барака семья жила 16 лет. Барак стоял под горой, на которой возвышалась башня. Сейчас этот барак снесен, а башня доросла до православного храма.

Маленький Миша был обаятельным, общительным, и самостоятельным ребенком. Однажды, в возрасте 3–4 лет, он ушел из дома без сопровождения взрослых. Когда мама нашла его довольно далеко от дома, она услышала, как какая-то девочка сказала: «Какой красивый мальчик! Мама, давай возьмем его к себе!». Детство проходило не без приключений. Как-то зимой Миша катался с горы. Он шел к горе, держал крепко веревку в руках, к ней были привязаны санки. Сзади ехала машина, задела санки, ребенок опрокинулся, сломал ключицу и потерял сознание. Некоторое время ходил с повязкой. Детские годы, как вспоминает Михаил Маркович, «прошли на улице» и запомнились тесным общением с разновозрастной уличной компанией – играли в футбол, прятки, лапту, подкидывали ногой «лянгун» (это кусочек кожи с мехом, отягощенный куском свинца). Тем не менее, активная уличная жизнь не мешала пытливому мальчику значительную часть своего досуга уделять книгам.

Материально семья жила тяжело. Отец пропал без вести на фронте, пенсию начали выплачивать только в 1947 году. Мама делала леденцы на палочке (петушки и другие фигурки) и продавала их на рынке. Так выжила и вырастила двух сыновей.

Миша, будучи общительным мальчиком, очень болезненно переживал разрыв с уличной компанией в 1953 году, инспирированный «делом врачей». Одним из немногих его друзей, с которым Миша продолжал дружить и общаться летом 1953 года, был еврейский мальчик Витя Брук, впоследствии ставший музыкальным руководителем Оренбургского музыкального театра.

В 1955 г., в возрасте четырнадцати лет, Михаил Маркович поступил в Орский индустриальный техникум, а в 1957 г. – переехал в Челябинск, где к этому времени обосновался его старший брат Борис Маркович. Миша продолжил обучение в Челябинском монтажном техникуме. В 1959 г. окончил техникум и стал работать в г. Куйбышеве (ныне – Самаре) в Безымянском монтажном управлении треста «Волгоэлектромонтаж» сначала рабочим, потом – инженером производственно-технического отдела. С марта 1961 г. по июль 1961 г. работал в отделе охраны Безымянского отдела милиции.

Трудно хронологически точно определить время, когда у Михаила Марковича зародился интерес к математике. Но уже работа в Куйбышеве сопровождалась чтением нетривиальных учебников элементарной математики Моденова П.С. и Новоселова С.И. и, совершенно избыточного с точки зрения потребностей учащегося техникума, учебника Фихтенгольца Г.М.

В 1961 году Михаил Маркович поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета. Специализировался по математической логике, его научным руководителем (*гуру*) был Николай Макарьевич Нагорный¹, а *грангуру* – Андрей Андреевич

¹ Н.М. Нагорный (1928–2007) – советский, российский математик, к.ф.-м.н., ученик и соавтор А.А. Маркова

Марков¹. Последний в то время был главой школы так называемых конструктивистов, к которой и примкнул М.М. Кипнис.

Здесь необходимо некоторое пояснение. Конкретные математические теории, развиваемые в рамках представлений конструктивной математики, обладают рядом существенных отличий от соответствующих теоретико-множественных теорий. Например, основное понятие математического анализа – понятие действительного числа – вводится в традиционном варианте теории на базе общего представления о множестве. Для конструктивной математики, требующей, чтобы рассмотрение ограничивалось конструктивными объектами, такой способ определения понятия действительного числа неприемлем.

У классических теоретико-множественных определений есть один изъян – нет ни одного объекта в мире, который можно взять в руки, помять, ощутить его тяжесть – и признать действительным числом. Человечество глубоко погрузилось в платонизм внутри математики. Уход от платонизма и есть конструктивизм. В конструктивной математике под «существованием» конструктивного объекта понимается его *потенциальная осуществимость* – то есть наличие в нашем распоряжении метода, позволяющего воспроизводить этот объект любое потребное число раз. Такое понимание резко расходится с пониманием существования объекта, принятым в теоретико-множественной математике. Например, действительное число с точки зрения конструктивистов – это алгоритм, задающий последовательность рациональных чисел и снабженный алгоритмическим регулятором сходимости – не будем здесь уточнять это. Ясно, что такая точка зрения имеет право на обсуждение и развитие.

Так или иначе, Михаилу Марковичу эта тематика показалась близкой – ему всегда были интересны дискретные проблемы, простые и прозрачные. Поэтому он с энтузиазмом взялся за проблемы реализуемости пропозициональных и логико-арифметических формул. Некоторые результаты были получены еще в студенческие годы [1].

В 1966 г. М.М. Кипнис окончил механико-математический факультет МГУ. К сожалению, продолжить начатую научную деятельность в аспирантуре Михаилу Марковичу не довелось – партком факультета не дал ему рекомендацию, без которой поступление в аспирантуру МГУ было невозможным. Скорее всего, причиной стало то, что писатели Аркадий и Борис Стругацкие² называли «невосторженным образом мышления».

Михаил Маркович, как человек обладающим острым умом и склонный к мотивированным логическим умозаключениям, не мог не видеть катастрофического несоответствия между провозглашаемыми идеалами и окружающей действительностью. Ханжество и ложь, процветающие в обществе, не вписывались в картину мира, которую юный Миша Кипнис построил для себя, читая книги ученых-философов, политиков и общественных деятелей. Еще в бытность свою совслужащим в Куйбышеве, наряду с математической литературой, он читал и Гегеля, и Ленина, сравнивал, анализировал и пытался обсуждать прочитанное с окружающими, в связи с чем заслужил реплику коменданта общежития: «Какой-то вы не советский». При переезде из Челябинска в Куйбышев потерял комсомольский билет и решил его не восстанавливать, автоматически покинув ряды коммунистического союза молодежи.

Обдумывая постулаты марксизма, Михаил Маркович искал аналогии с ситуацией в науке, с соотношением классической и конструктивной ветвей математики. *«Сказано – материя первична, сознание вторично, и это решение основного вопроса философии. А я хотел бы, чтоб дали возможность переставить приоритеты, а также объявить эту дилемму бессмысленной, а также объявить основным вопросом философии – следует ли оканчивать жизнь самоубийством... И чтобы государство не вмешивалось в решения, а поощряло разнообразие»*, – рассуждал Михаил Маркович. Неприятие советского образа жизни у М.М. Кипниса не было публичным и агрессивным, тем не менее, парткому мехмата МГУ не могло понравиться, что он манкировал летними принудительными сельхозработами, не был комсомольцем и, возможно, туда докатились слухи о его антисоветских настроениях.

По завершении обучения в МГУ, в 1966 году Михаил Маркович с молодой женой, сокурсницей Галиной Константиновной Тарасовой, приступил к работе на кафедре высшей математики

¹ А.А. Марков (мл.) (1903–1979) – выдающийся советский математик, член-корреспондент АН СССР, создатель школы конструктивной математики и логики в СССР, автор понятия нормального алгорифма.

² А. Стругацкий, Б. Стругацкий. Трудно быть богом. В сб. «Далекая радуга», М., СП, 1964 г.

Персоналии

№1 Челябинского политехнического института. Кафедрой в это время заведовал Абрам Давидович Кацман, который прилагал значительные усилия для привлечения на работу молодых перспективных выпускников лучших вузов страны. Михаил Маркович легко вписался в коллектив и, благодаря высокому профессионализму, незлобности и любви к студентам, стал одним из любимейших преподавателей.

В 1969 году Михаил Маркович защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, фактически под руководством Николая Макарьевича Нагорного.

В 1973 году в ЧПИ была создана кафедра прикладной математики, заведующий которой В.А. Цыганков пригласил М.М. Кипниса для работы на кафедре в качестве одного из немногих специалистов Челябинска по дискретной математике. Здесь Михаил Маркович познакомился с доцентом Олегом Яковлевичем Каретным, сотрудником приборостроительного факультета, который заинтересовал его прикладными задачами.

В 1976 г. М.М. Кипнис уходит из Челябинского политехнического института (ЧПИ) в Челябинский государственный педагогический институт (ЧГПИ) в связи с грозившим ему в ЧПИ понижением в должности. К этому моменту он отработал пять лет в *должности* доцента, но так и не был утвержден ВАКом в *звании* доцента из-за различного рода бюрократических проволочек. По действовавшим в то время нормам, такой сотрудник не мог более занимать должность и должен был быть переведен на должность ассистента. Следует отметить, что вскоре М.М. Кипнис это звание получил, но уже будучи сотрудником ЧГПИ.

Активно работая с О.Я. Каретным в области исследования широтно-импульсных систем управления, Михаил Маркович опубликовал с ним в соавторстве несколько работ о периодических режимах в подобных системах [3, 4]. Затем, уже самостоятельно, М.М. Кипнис стал исследовать особые режимы в таких системах, которые характеризовались последовательностями нулей и единиц, и таким образом соприкоснулся с символической динамикой [5–7].

Он открыл (как оказалось позднее – переоткрыл) явление равномерного 2-раскрашивания в импульсных системах управления. *«Оно было таким красивым, что я чувствовал, что это где-то уже живет, и надо только найти»* вспоминал позднее Михаил Маркович.

«Я еду в Киев на семинар Шарковского¹, рассказываю там об итерациях одномерных кусочно-линейных отображений и получаю сдержанное одобрение. И вот я в Москве, около 1990 года, напрашиваюсь на семинар академика Аносова² и проф. Стёпина³ и рассказываю об этих явлениях, и спрашиваю, не знают ли они, где еще появляются подобные структуры. Нет, не знаю, отвечает Аносов, но вот недавно мне дал статью один швед, и может быть, в ней есть что-то близкое. Я получил эту статью, – и обомлел. Оказывается, явление одномерного 2-раскрашивания открыл еще последний из Бернулли в XVIII веке, этой проблематикой занимался А.А. Марков, отец моего грангуру А.А. Маркова, оно обнаружено в моделях статистической механики Хаббарда, сходных с моделями Изинга, и, наконец, имеется недавняя статья Я.Г. Синая о моделях Хаббарда, к которой мои результаты имеют прямое отношение.»

Заметим здесь, что в упомянутой работе Я.Г. Синая⁴ доказывалась полнота канторовой лестницы в модели Хаббарда с выпуклой функцией взаимодействия, а в варианте модели Хаббарда, рассмотренной Кипнисом М.М., канторова лестница оказалась полна и для монотонной функции. Естественным было обсудить эти результаты с Синаем, и Михаил Маркович доложил свою работу на его семинаре.

В феврале 1993 г. М.М. Кипнис в Москве, на семинаре в Институте системного анализа (ИСА РАН) выступил с обширным докладом о придуманной им процедуре булева усреднения, общей для таких разнородных систем, как системы импульсного управления, модели статистической механики и итераций одноименных отображений. Его доклад был принят доброжелательно и руководители семинара высказали мнение, что полученные автором результаты могли бы лечь

1 Шарковский Александр Николаевич (07.12.1936), академик НАН Украины, заложил основы топологической теории одномерных динамических систем.

2 Аносов Дмитрий Викторович (1936-2014) – выдающийся советский и российский математик, ученик Л.С. Понтрягина, академик АН СССР, один из крупнейших специалистов по теории динамических систем.

3 Стёпин Анатолий Михайлович (20.08.1940) – почетный профессор МГУ, внесший значительный вклад в эргодическую теорию, лауреат премии Колмогорова А.Н.

4 Синай Яков Григорьевич (21.09.1935) – выдающийся математик, ученик Комогорова А.Н., академик РАН, специалист в области теории фазовых переходов, квантового хаоса, динамических систем. Лауреат премий Пуанкаре и Абеля.

в основу будущей докторской диссертации. Михаил Маркович на подъеме. Неожиданно скорострительно умирает его жена, известие о кончине которой он получает вечером того же дня, когда был сделан доклад в ИСА. Михаил Маркович остается с двумя детьми – Анной и Марком – на руках.

Упорно преодолевая немалые трудности, как бытового, так и формального характера, Кипнис М.М., тем не менее, не прекращает работу над докторской диссертацией, и успешно защищает её в ИСА РАН в 1995 году. Как Михаил Маркович вспоминал позднее, «...мне очень не понравилось защищать диссертацию после 50 лет, но я был твердо уверен, что я доктор наук, и требуется только формальная легитимация в этом качестве», каковой, добавим, и стала эта защита. С тех пор Михаил Маркович убежденный противник двухступенчатой системы научной аттестации.

1995 год стал особым в жизни Михаила Марковича Кипниса. В канун 54-летия, после долгих лет напряженной работы была защищена докторская диссертация, результаты Михаила Марковича получили международное признание, он был приглашен на конференцию в США, куда поехал выступить с докладом. Произошли значительные перемены и в личной жизни – Михаил Маркович связал свою жизнь с Татьяной Евгеньевной Николаевой, ставшей его женой Татьяной Кипнис.

После 1995 года в научной работе М.М. Кипниса наступило некоторое затишье. Активно работающему математику необходимо соответствующее окружение, он должен находиться внутри близкого по духу научного сообщества, подпитываться идеями единомышленников и оппонентов, и, в свою очередь, делиться с окружающими коллегами своими замыслами. Та проблематика, которая составляла круг интересов Михаила Марковича, таких возможностей не предоставляла.

Оставаясь в русле столь близких его менталитету дискретных идей, он переключился на разностные уравнения. Совместно с аспирантом Равилем Нигматулиным в 2004 году М.М. Кипнис опубликовал работу об устойчивости линейного разностного уравнения с двумя запаздываниями [15]. Эта работа получила широкую известность в России и за рубежом, не только за полученный в ней значимый научный результат, но, не в последнюю очередь и потому, что Михаил Маркович, участвуя в работе многих международных конференций, не забывал активно пропагандировать результаты и достижения – свои, своих учеников и коллег.

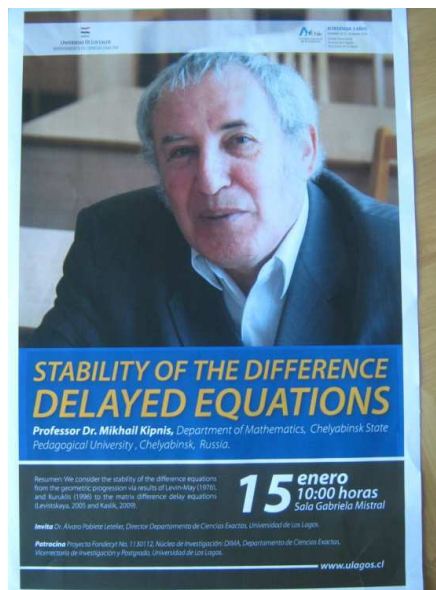
В разные годы научные исследования Кипниса М.М. и его учеников были поддержаны грантами РФФИ (1995, 1997) и фонда Дж. Сороса (1994, 1998).

Вот список некоторых международных конференций, где он участвовал (всюду непременно сопровождаемый женой): Мюнхен (2005, заодно посетили Лондон и Эдинбург), Лиссабон (2007, заодно посетили Рим и Барселону), Стамбул (2008, заодно посетили Иерусалим), Каркавелаш (Португалия, 2009, заодно посетили Париж), Рига (2010, заодно посетили Юрмалу, видели самого Киркорова!), Вена (2012), Созополь (Болгария, 2013).

В январе 2014 года М.М. Кипнис, по приглашению коллеги Ригоберто Медины, был пару недель приглашенным профессором университета Лос Лагоса в Чили.

Значительное место в жизни и творчестве Михаила Марковича занимает педагогическая и преподавательская деятельность. Его лекции по математической логике, дискретной математике, математическому анализу, отличаясь глубоким научным содержанием и одновременно прозрачностью изложения и доступностью для понимания, на протяжении многих лет пользуются популярностью у студентов различных специальностей и направлений. Нельзя не отметить особо и тот большой вклад, который Михаил Маркович внес в математическую составляющую образовательной программы студентов факультета информатики ЧГПУ, возглавляемого профессором Матросом Д.Ш.

Кипнис М.М., являясь сотрудником педагогического университета, никогда не прерывал своих связей с ЧПИ–ЧГТУ–ЮУрГУ, в разные годы сотрудничая с кафедрами прикладной мате-



Плакат с анонсом лекции М.М. Кипниса в Осорно – Чили

Персоналии

матики и математического анализа, читая лекции для студентов математического, приборостроительного и других факультетов ЮУрГУ.

Кипнис М.М. пользуется авторитетом и уважением среди своих коллег как в Челябинске, так и за его пределами. Он – член Ученых Советов по защите докторских диссертаций в ЧелГУ и ЮУрГУ. Михаил Маркович неоднократно возглавлял Государственные экзаменационные комиссии в различных вузах региона.

Кипнис М.М. – талантливый и заботливый наставник. Под его руководством защищены 6 кандидатских диссертаций. Вот коротко о его учениках: Л. Бакалинский развивал идеи статистической механики Хаббарда, Р. Нигматуллин работает в области разностных уравнений, М. Вагина получила интересные результаты об устойчивости линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями, Д. Комиссарова изучала задачи устойчивости разностных уравнений как моделей динамики популяций, Т. Хохлова значительно продвинулась в исследовании задачи об устойчивости матричных дифференциальных уравнений с запаздываниями, С. Иванов изучал модели нейронных сетей с запаздываниями.

Совместно с учениками и коллегой из Перми Малыгиной В.В. Кипнис М.М. сделал привычными в научной литературе такие термины, как «овал устойчивости» и «конус устойчивости» [22–24], на основе давних работ одессита Рехлицкого.

Всего Михаилом Марковичем опубликовано более 70 работ, список наиболее значимых из которых приведен в списке литературы.

Последняя к настоящему моменту его работа – это возвращение (вместе с Р. Нигматулиным) к теме разностных уравнений с двумя запаздываниями и доказательство единым простым методом, как прежних результатов, так и некоторых достижений в этой области коллег из Брно.

В 2009 году М.М. Кипнис был удостоен правительственной награды – указом Президента РФ ему было присвоено почетное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации».

Семья Михаила Марковича – дочь Анна (литератор), сын Марк (художник), внуки Марк (студент) и Илья (школьник), внучка Лина (школьница). В его семейный круг входит также семья сына жены Татьяны Евгеньевны – Николая, с его дочкой Лизой.

Несмотря на солидный возраст, Михаил Маркович в полной мере демонстрирует творческую активность, высокую научную квалификацию и талант педагога, оставаясь по-прежнему добросовестным и принципиальным преподавателем и демонстрируя уважительное отношение к студентам и коллегам.

Коллеги и друзья Михаила Марковича сердечно поздравляют его с семидесятипятым юбилеем и желают ему здоровья, долголетия, и дальнейших успехов и достижений.

В.Л. Дильман, В.И. Заляпин, В.В. Карачик, Л.Д. Менихес

Литература

1. Кипнис, М.М. Об одном свойстве пропозициональных формул / М.М. Кипнис // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 174, № 2. – С. 277–278.
2. Кипнис, М.М. Инвариантные свойства систем формул элементарных аксиоматических теорий / М.М. Кипнис // Известия АН СССР, Математика. – 1970. – Т. 37, № 5. – С. 963–976.
3. Каретный, О.Я. Расчет параметров периодических режимов в системах с интегральной широтно-импульсной модуляцией / О.Я. Каретный, М.М. Кипнис, А.М. Глумчер // Электромеханика. Изв. ВУЗ. – 1984. – № 2. – С. 40–45.
4. Каретный, О.Я. Применение импульсно-частотных характеристик для исследования периодических режимов работы в системах с интегральной широтно-импульсной модуляцией / О.Я. Каретный, М.М. Кипнис, Ю.Б. Петрова // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 8. – С. 59–68.
5. Кипнис, М.М. Фазовые портреты широтно-импульсных систем / М.М. Кипнис // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 12. – С. 105–115.
6. Кипнис, М.М. Символическая и хаотическая динамика широтно-импульсной системы управления / М.М. Кипнис // ДАН России. – 1992. – Т. 324, № 2. – С. 273–276.
7. Кипнис, М.М. Хаотические явления в детерминированной одномерной системе управления / М.М. Кипнис // Изв. АН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 1. – С. 107–112.

8. Кипнис, М.М. Локальная устойчивость импульсных систем и устойчивость нулевого решения квазилинейных дискретных уравнений в свертках / М.М. Кипнис // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 4. – С. 86–93.
9. Кипнис, М.М. Одномерные модели статистической механики с гамильтонианом Хаббарда и функцией взаимодействия, свободной от условия выпуклости / М.М. Кипнис // ДАН. – 1994. – Т. 336, № 3. – С. 316–319.
10. Kipnis, M.M. Boolean Averaging in a Statistical Mechanics Model and in an Analog-to-Digital Converter / M.M. Kipnis // Russian J. of Mathematical Physics. – 1996. – Vol. 4, no. 3. – P. 397–402.
11. Kipnis, M.M. Periodic Ground State Configurations in a One-dimensional Hubbard Model of Statistical Mechanics / M.M. Kipnis // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. – 2000. – no. 3. – P. 101–115.
12. Вагина, М.Ю. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями / М.Ю. Вагина, М.М. Кипнис // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74. – Вып. 5. – С. 786–789.
13. Кипнис, М.М. Устойчивость некоторых разностных уравнений с двумя запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматуллин // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №5. – С. 122–130.
14. Вагина, М.Ю. Устойчивость логистической модели динамики популяций с запаздыванием в реакции окружающей среды / М.Ю. Вагина, М.М. Кипнис // Автоматика и телемеханика. 2004. – № 5. – С. 38–44.
15. Кипнис, М.М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматуллин // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 25–39.
16. Kipnis, M.M. Stability of Delay Difference Systems / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // Advances in Difference Equations. – 2006. – Vol. 2006. – P. 1–9. Article ID31409. DOI: 10.1155/ADE/2006/31409
17. Kipnis, M.M. A Note on Explicit Stability Conditions of Autonomous Higher Order Difference Equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // J. of Difference Equ. and Appl. – 2007. – Vol. 13, no. 5. – P. 457–461.
18. Kipnis, M.M. Stability of delay difference and differential equations: similarity and distinctions / M.M. Kipnis, I.S. Levitskaya // Proc. of the Int. Conf. Difference equations, special functions and orthogonal polynomials, Munich, Germany, 25–30 July 2005. – P. 315–324. DOI: 10.1142/9789812770752_0027
19. Idels, L. Stability criteria for a nonlinear nonautonomous system with delays / L. Idels, M.M. Kipnis // Applied Mathematical Modelling. – 2009. – Vol. 33. – Issue 5. – P. 2293–2297. DOI: 10.1016/j.apm.2008.06.005
20. Гилязов, М.В. Выпуклость последовательности коэффициентов и устойчивость линейных систем / М.В. Гилязов, М.М. Кипнис // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. – С. 101–108.
21. Berezansky, L. Mathematical model of marine protected areas / L. Berezansky, L. Idels, M.M. Kipnis // IMA J. of Applied Mathematics. – 2011. – no. 76. – P. 312–325. DOI: 10.1093/imamat/hxq043
22. Khokhlova, T.N. The stability cone for a delay differential matrix equation / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // Applied Mathematics Letters. – 2011. – Vol. 24. – P. 742–745.
23. Ivanov, S.A. Stability analysis of discrete-time neural networks with delayed interactions: torus, ring, grid, line / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis // Int. J. of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – V. 78(5). – P. 691–709.
24. Khokhlova, T.N. The breaking of a delayed ring neural network contributes to stability: The rule and exceptions / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis // Neural Networks. – 2013. – Vol. 48. – P. 148–152.
25. Ivanov, S.A. On the stability of the Cartesian product of a neural ring and an arbitrary neural network / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis, R. Medina // Advances in Difference Equations. – 2014. – Vol. 2014, no. 1. – P. 176. DOI: 10.1186/1687-1847-2014-176
26. Ivanov, S.A. On the stability of a neural network with links based on the Watts-Strogatz model / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis // Int. J. of Pure and Applied Mathematics. – 2015. – V. 105, no. 3. – P. 431–438. DOI: 10.12732/ijpam.v105i3.11

Поступила в редакцию 25 сентября 2016 г.

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям наук и группам специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 01.04.00 – физика.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям “Ulrich’s Periodicals Directory”, “Zentralblatt MATH”.

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, ответственному редактору профессору Загребинной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Differential and Stochastic Equations Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.yourgpu.rf/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор *А.И. Ивашкина*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 14.10.2016. Дата выхода в свет 28.10.2016.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,83.

Тираж 500 экз. Заказ 375/423. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.