



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2017
Т. 9, № 1

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (отв. редактор)

к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)

д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)

к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)

д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А. И. Бурназяна, г. Москва)

д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)

д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)

д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)

д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, профессор Физики и Оптики **Зельдович Б.Я.** (КРЕОЛ, Университет Центральной Флориды, г. Орландо, США)

д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.** (ЮУрГУ)

Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея)

Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Корея),

д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (ЮУрГУ)

д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)

Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)

д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)

д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.** (ЮУрГУ)

Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)

д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2017



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2017
Vol. 9, no. 1

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
B.Ya. Zeldovich, CREOL, University of Central Florida, Orlando, United States of America
A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
Kisik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
N.D. Kundikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, USA
N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
S.B. Sapozhnikov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БАСТРАКОВ С.И., ЗОЛОТЫХ Н.Ю. О динамической задаче построения остова полиэдрального конуса	5
БРОНШТЕЙН Е.М., ГИНДУЛЛИНА Э.В., ГИНДУЛЛИН Р.В. Формализации задач погрузки и доставки	13
САГАДЕЕВА М.А. Вырожденные потоки разрешающих операторов для нестационарных уравнений соболевского типа	22
ТЫРСИН А.Н. Метод подбора наилучшего закона распределения непрерывной случайной величины на основе обратного отображения	31
ШАРЫЙ С.П. Сильная согласованность в задачах восстановления зависимостей по интервальным данным	39

Механика

КОВАЛЕВ Ю.М. Анализ некоторых приближений для описания тепловой части уравнений состояния молекулярных кристаллов	49
---	----

Физика

КОЗЛОВ В.И., КОРСАКОВ А.А., ТАРАБУКИНА Л.Д., ДУЮКОВА Н.С. Вариации числа радиоимпульсов грозовых разрядов по наблюдениям в Якутске	57
ШЕРЫХАЛИНА Н.М., ЗАРИПОВ А.А., ПОРЕЧНЫЙ С.С. Предельно-квазистационарная модель электрохимического формообразования	65

Персоналии

К 65-летию профессора А.В. Панюкова	72
---	----

CONTENTS

Mathematics

BASTRAKOV S.I., ZOLOTYKH N.Yu. On the Dynamic Problem of Computing Generators of a Polyhedral Cone.....	5
BRONSHTEIN E.M., GINDULLINA E.V., GINDULLIN R.V. Formalization of Pickup and Delivery Problem.....	13
SAGADEEVA M.A. Degenerate Flows of Solving Operators for Nonstationary Sobolev Type Equations	22
TYRSIN A.N. The Method of Selecting the Best Distribution Law for Continuous Random Variables on the Basis of Inverse Mapping	31
SHARY S.P. Strong Comptability in Data Fitting Problems Based on Interval Data	39

Mechanics

KOVALEV Yu.M. Analysis of Some Approximation for the Description of Thermal Side of the Equation States of Molecular Crystals.....	49
--	----

Physics

KOZLOV V.I., KORSAKOV A.A., TARABUKINA L.D., DUIUKOVA N.S. Variations in Number of Lightning Discharge Radio Pulses by Observations in Yakutsk.....	57
SHERYKHALINA N.M., ZARIPOV A.A., PORECHNY S.S. Limiting-Quasistationary Model of Electrochemical Shaping	65

Personalia

On 65 th Anniversary of Professor A.V. Panyukov.....	72
---	----

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОСТОВА ПОЛИЭДРАЛЬНОГО КОНУСА

С.И. Бастраков, Н.Ю. Золотых

*Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: sergey.bastrakov@gmail.com*

Рассматривается динамическая задача построения остова полиэдрального конуса. Задача состоит в последовательном выполнении операций добавления или удаления неравенств из фасетного описания полиэдрального конуса с соответствующим перестроением остова. Обсуждается возможность применения метода двойного описания для выполнения обеих операций, приводятся оценки трудоемкости. Для операции удаления неравенства анализируется зависимость размера выхода от размера входа.

Ключевые слова: система линейных неравенств; полиэдральный конус; построение двойственного описания, метод двойного описания.

Основные понятия и обозначения

Любой выпуклый полиэдр (многогранник) в \mathbb{Q}^d может быть представлен в двух видах:

Вершинное описание – как сумма по-Минковскому выпуклой и конической оболочек конечных систем векторов:

$$P = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} + \text{cone}\{u_1, u_2, \dots, u_p\}, v_i \in \mathbb{Q}^d, i = 1, 2, \dots, k, u_j \in \mathbb{Q}^d, j = 1, 2, \dots, p.$$

Фасетное описание – как множество решений конечной системы линейных неравенств:

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^d: Ax \geq b\}, A \in \mathbb{Q}^{m \times d}, b \in \mathbb{Q}^m.$$

Ограниченный выпуклый полиэдр называется политопом.

Частным случаем выпуклого полиэдра является полиэдральный (многогранный) конус, который может быть представлен как коническая оболочка конечной системы векторов и как множество решений конечной однородной системы линейных неравенств. Неприводимая порождающая система векторов многогранного конуса называется его остовом. Обозначим $U(C)$ остов конуса C .

Задача перехода между вершинным и фасетным описаниями выпуклого полиэдра (построение одного описания по заданному другому описанию) называется задачей построения двойственного описания полиэдра. Частным случаем данной задачи являются задачи построения выпуклой оболочки и нахождения общего решения системы линейных неравенств. Задача построения двойственного описания полиэдра является одной из центральных в теории систем линейных неравенств [1–4]. Известно множество алгоритмов решения данной задачи [5–10] и близких к ней задач, включая вопросы трудоемкости и организации параллельных вычислений [11–14]. Задача построения двойственного описания выпуклого полиэдра в \mathbb{Q}^d сводится к аналогичной задаче для полиэдрального конуса в \mathbb{Q}^{d+1} (см., например, [4]). В дальнейшем изложении для краткости под полиэдрами и конусами понимаются, соответственно, выпуклые полиэдры и полиэдральные конусы.

Пусть $A \in \mathbb{Q}^{m \times d}$. Обозначим $A(I)$, где $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, подматрицу матрицы A , составленную из строк с номерами из I .

Постановка задачи

В работе рассматривается следующая задача, тесно связанная с задачей построения двойственного описания. Заданы неприводимые вершинное и фасетное описания полиэдрального конуса C_0 в \mathbb{Q}^d :

$$C_0 = \{x \in \mathbb{Q}^d: Ax \geq 0\} = \text{cone}\{u_1, u_2, \dots, u_p\}, A \in \mathbb{Q}^{m \times d}, u_i \in \mathbb{Q}^d, i = 1, 2, \dots, p.$$

Требуется выполнить последовательность из N операций над конусом C_0 , обозначим C_k конус, полученный в результате выполнения операции с номером k ($k = 1, 2, \dots, N$). Рассматриваются операции двух типов:

1. Пересечение текущего конуса с заданным полупространством:

$$C_k = \{x \in C_{k-1}: a_k x \geq 0\}. \quad (1)$$

2. Удаление неравенства из фасетного описания текущего конуса [15]. Пусть $C_{k-1} = \{x \in \mathbb{Q}^d: A_{k-1}x \geq 0\}$, где матрица A_{k-1} имеет m_k строк. Задается номер удаляемого неравенства i_k ($1 \leq i_k \leq m_k$). Результатом операции является конус

$$C_k = \{x \in \mathbb{Q}^d: A_k x \geq 0\}, A_k = A_{k-1}(\{1, 2, \dots, m_k\} \setminus \{i_k\}), \quad (2)$$

где матрица A_k состоит из всех строк матрицы A_{k-1} , за исключением строки с номером i_k .

В результате выполнения каждой из указанных операций требуется получить неприводимые вершинное и фасетное описания конуса C_k . Таким образом, операция (1) соответствует добавлению неравенства к фасетному описанию конуса, а операция (2) – удалению неравенства из фасетного описания, в обоих случаях производится перестройка остова. Отметим, что требование неприводимости описаний конуса может быть ослаблено для операции (1), однако является существенно важным для операции (2), как показано в [15]. Предполагается, что порядок выполнения операций фиксирован.

Необходимость выполнения подобных операций может возникать в некоторых задачах автоматического анализа и верификации программ для ЭВМ с использованием полиэдральных подходов [15–17]. При этом отметим, что в настоящей работе задача исследуется только с теоретической точки зрения.

Аналогичная задача для выпуклого полиэдра в \mathbb{Q}^d сводится к случаю конуса в \mathbb{Q}^{d+1} . Рассматриваемая задача построения остова конуса в дальнейшем называется динамической по аналогии с динамической задачей построения выпуклой оболочки точек, множество которых может меняться путем добавления или удаления точек в процессе работы. Дальнейшее изложение производится для случая конуса. Для простоты предполагается, что исходный конус и все промежуточные конусы являются острыми: $\text{rank}(A_k) = d$, $k = 1, 2, \dots, N$, в этом случае векторы остова определяют единственным образом с точностью до умножения на положительные скаляры (см., например, [4]).

В разделе 2 рассматривается операция добавления неравенства к фасетному описанию конуса с помощью метода двойного описания, приводятся оценки трудоемкости. Раздел 3 посвящен операции удаления неравенства из фасетного описания и анализу зависимости размера выхода от размера входа.

Операция добавления неравенства к фасетному описанию конуса

Рассмотрим выполнение операции (1), состоящей в добавлении нового неравенства к фасетному описанию многогранного конуса с перестройкой остова. Данная операция возникает в инкрементных (по классификации [18]) алгоритмах построения двойственного описания полиэдра. В связи с тем, что для всех промежуточных конусов известны неприводимые вершинное и фасетное описания, целесообразным представляется использование метода двойного описания [5], иногда также называемого алгоритмом Моцкина–Бургера [19] или алгоритмом Черниковой [6]. Существует множество модификаций метода, например, [20–22]. В настоящем разделе приводится краткое описание метода в контексте выполнения операции добавления неравенства. В связи с этим не рассматривается начальный шаг метода, а также порядок обработки неравенств, который может существенно влиять на трудоемкость метода двойного описания в общем случае (см., например, [18, 20]).

На каждом шаге метода двойного описания выполняется пересечение текущего конуса с полупространством, определяемым очередным обрабатываемым неравенством. В начале шага известны вершинное и фасетное описания текущего конуса C_{k-1} , а также множество $E(C_{k-1})$ пар смежных векторов его остова. В конце шага те же данные определяются для конуса C_k . Таким образом, шаг метода двойного описания соответствует операции (1).

Рассмотрим выполнение одного шага метода. Остов конуса C_{k-1} разбивается на три подмножества в зависимости от того, выполняется ли для них добавляемое неравенство:

$$U_+ = \{u \in U(C_{k-1}): a_k u > 0\}, U_0 = \{u \in U(C_{k-1}): a_k u = 0\}, U_- = \{u \in U(C_{k-1}): a_k u < 0\}.$$

Строятся комбинации пар смежных векторов из $U_+ \times U_-$:

$$U_{\pm} = \{(au)v + (-av)u: u \in U_+, v \in U_-, \{u, v\} \in E(C_{k-1})\}. \quad (3)$$

Искомый остов конуса C' определяется следующим образом:

$$U(C_k) = U_+ \cup U_0 \cup U_{\pm}. \quad (4)$$

Информация о смежности векторов остова конуса C_k определяется следующим образом. Все пары векторов из множества U_+ , являющиеся смежными в конусе C_{k-1} , являются смежными и в конусе C_k . Таким образом, смежность необходимо определить для векторов из множества $U_0 \cup U_{\pm}$. Для каждого вектора u хранится множество $Inc(u)$ номеров неравенств, определяющих конус, которые удовлетворяются этим вектором как равенства.

Известны несколько критериев того, является ли пара векторов остова $\{u, v\}$ смежной:

1. Алгебраический критерий [5]: $\text{rank}(A(Inc(u) \cap Inc(v))) = d - 2$.
2. Комбинаторный критерий [17]:

$$\nexists w \in U_0 \cup U_{\pm}: w \neq u, w \neq v, Inc(u) \cap Inc(v) \subseteq Inc(w).$$

3. Графовый критерий (графовая модификация комбинаторного критерия) [22]. Определим неориентированный граф $G = (V, E)$ следующим образом: $V = U_0 \cup U_{\pm}$, $E = \{\{u, v\}: u, v \in V, |Inc(u) \cap Inc(v)| \geq d - 2\}$. Тогда критерий смежности пары имеет вид:

$$\nexists w \in U_0 \cup U_{\pm}: w \neq u, w \neq v, \{u, w\} \in E, \{v, w\} \in E, Inc(u) \cap Inc(v) \subseteq Inc(w).$$

4. Критерий на основе k -мерных деревьев [21].

Условие $|Inc(u) \cap Inc(v)| \geq d - 2$ является необходимым (но в общем случае не достаточным) для смежности пары $\{u, v\}$.

Обозначим $T_{\text{add}}(C_{k-1})$ трудоемкость выполнения шага метода двойного описания для текущего конуса C_{k-1} . В качестве меры трудоемкости будем использовать количество арифметических операций над целыми числами, вопросы о битовой сложности и росте коэффициентов рассматриваются, например, в [3]. Для изложенного алгоритма справедливы следующие верхние оценки трудоемкости.

Утверждение 1 [23]. Трудоемкость шага метода двойного описания для текущего острого конуса C_{k-1} составляет:

- $T_{\text{add}}(C_{k-1}) \in O(|U(C_{k-1})| \cdot (|U(C_{k-1})| + d) + |U(C_{k-1})|^2 \cdot m_{k-1} d^2)$ при использовании алгебраического критерия смежности;
- $T_{\text{add}}(C_{k-1}) \in O(|U(C_{k-1})| \cdot (|U(C_{k-1})| + d) + |U(C_{k-1})| \cdot m_{k-1} \cdot (|U(C_{k-1})|^2 + d))$ при использовании комбинаторного и графового критериев смежности.

Как показывает утверждение 1, зависимость верхней оценки трудоемкости шага метода двойного описания от размера остова текущего конуса квадратичная при использовании алгебраического критерия и кубическая при использовании комбинаторного и графового критериев смежности. Отметим, что максимальный размер выхода шага метода двойного описания асимптотически ограничен сверху величиной $|U(C_{k-1})|^2$.

Для анализа трудоемкости в следующих разделах введем также обозначение для общей трудоемкости метода двойного описания. Обозначим $T_{\text{DDM}}(m, d)$ трудоемкость метода двойного описания для построения остова конуса в \mathbb{Q}^d , заданного системой из m неравенств. Для описываемого варианта метода двойного описания справедливы следующие оценки:

Утверждение 2 [23]. Трудоемкость метода двойного описания для построения остова острого конуса при любом фиксированном d составляет:

- $T_{\text{DDM}}(m, d) \in O(m^{d+2})$ при использовании алгебраического критерия смежности;
- $T_{\text{DDM}}(m, d) \in O(m^{3d/2+1})$ при использовании комбинаторного и графового критериев смежности.

Операция удаления неравенства из фасетного описания конуса

Настоящий раздел посвящен операции (2) удаления неравенства из фасетного описания конуса. Отметим, что «наивным» способом решения задачи является прямое построение остова конуса C_k по системе неравенств, без использования информации о конусе C_{k-1} . В этом случае, при использовании метода двойного описания, трудоемкость составляет $T_{\text{DDM}}(m_{k-1}-1, d)$.

В [15] предложен алгоритм удаления неравенств из фасетного описания, названный авторами инкрементным. Обозначим F фасету, соответствующую удаляемому неравенству. Строится множество фасет F_{adj} , смежных с F . С помощью метода двойного описания вычисляется остов конуса C_{adj} , определяемого неравенствами, соответствующими фасетами из F_{adj} . В остове конуса C_{adj} находится подмножество векторов U_{new} , которые не принадлежат конусу C_{k-1} . Множество векторов $U(C_{k-1}) \cup U_{\text{new}}$ порождает конус C_{k-1} , однако не обязательно является неприводимым. Для завершения операции достаточно удалить избыточные элементы из множества $U(C_{k-1}) \cup U_{\text{new}}$. Таким образом, трудоемкость инкрементного алгоритма удаления неравенства составляет $T_{\text{remove}}(C_{k-1}) \in O(T_{\text{DDM}}(F_{\text{adj}}, d))$. При этом в худшем случае полученная оценка совпадает с оценкой трудоемкости «наивного» алгоритма. Оценка в терминах количества фасет конуса C_{k-1} может быть получена с помощью утверждения 2.

Отметим, что алгоритм [15] позволяет одновременное удаление нескольких неравенств, отличие от случая одного неравенства состоит лишь в том, что в F_{adj} добавляются фасеты, смежные хотя бы с одной из удаляемых.

В общем случае задача удаления неравенства из фасетного описания является существенно более трудной по сравнению с задачей добавления неравенства, как показывает следующий пример. Рассмотрим семейство политопов $CC_{2\delta}(s)$, являющихся произведением δ циклических политопов $C_{2\delta}(s)$, конструкция и некоторые свойства данного семейства приведены в [18, 24]. Как показано в [24], при удалении любой вершины v политопа $P = CC_{2\delta}(s)$ количество фасет многогранника $\text{conv}(P \setminus \{v\})$, не являющихся фасетами P , составляет $\Theta(s^{(\delta-1)\delta})$. Таким образом, удаление любой вершины такого политопа приводит к образованию очень большого количества новых фасет. При сведении к случаю удаления неравенства из фасетного описания конуса, из этого вытекает следующее утверждение:

Утверждение 3. *Размер выхода задачи удаления одного неравенства из фасетного описания конуса не ограничен полиномом от длины входа.*

Следующая теорема устанавливает один из подклассов, для которых размер выхода полиномиален от длины входа.

Теорема 1. *Пусть острый конус C_k получен путем удаления неравенства $ax \geq 0$ из фасетного описания острого конуса C_{k-1} и выполнено условие*

$$\forall u \in U(C_k) \exists v \in U(C_{k-1}): \{u, v\} \in E(C_k), av > 0. \quad (5)$$

Тогда справедливо неравенство

$$|U(C_k)| \leq |U(C_{k-1})| + |E(C_{k-1})|.$$

Доказательство. Рассмотрим обратную операцию: конус C_{k-1} может быть получен из C_k путем добавления неравенства $ax \geq 0$ с помощью метода двойного описания, рассмотренного в разделе 2. При этом, ввиду соотношения (4), векторы из $U(C_k)$, лежащие в полупространстве $ax \geq 0$, присутствуют и в $U(C_{k-1})$. Таким образом, справедливо неравенство

$$U(C_k) \leq |U(C_{k-1})| + |U(C_k) \setminus U(C_{k-1})|. \quad (6)$$

Для оценки величины $|U(C_k) \setminus U(C_{k-1})|$ отметим, что векторы из этого множества создают комбинации со смежными им векторами из открытого полупространства $ax > 0$, согласно (3). Из условия (5) следует, что каждый вектор из $U(C_k) \setminus U(C_{k-1})$ создаст хотя бы одну комбинацию. Таким образом, каждый вектор из этого множества лежит на пересечении продолжения ребра конуса C_{k-1} , составленного парой векторов из $U(C_{k-1})$, один из которых являлся его «парой» при комбинировании, а другой – результатом комбинирования. Таким образом, количество ребер конуса C_{k-1} дает верхнюю оценку величины $|U(C_k) \setminus U(C_{k-1})|$. Подстановка этой оценки в соотношение (6) и дает доказываемое неравенство.

Так как величина $|E(C_{k-1})|$ ограничена количеством (неупорядоченных) пар векторов остова и всегда меньше, чем $|U(C_{k-1})|^2 / 2$, справедливо следующее

Следствие 1. *В условиях теоремы справедливо неравенство*

$$|U(C_k)| < |U(C_{k-1})| + |U(C_{k-1})|^2 / 2.$$

Таким образом, в условиях теоремы 1 зависимость размера выхода от размера входа не более, чем квадратичная. Отметим, что доказательство теоремы дает полиномиальный от длины входа (в условиях теоремы) алгоритм построения $U(C_k)$ с помощью продолжения ребер конуса C_{k-1} , составленных их пары векторов, один из которых лежит в удаляемой фасете, а другой – нет, до пересечения с фасетами. Смежность векторов может быть определена с помощью одного из

критериев, описанных в разделе 2. Принимая во внимание то, что оценки утверждения 1 также являются полиномиальными от длины входа, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть выполняется последовательность операций добавления и удаления неравенств вида (1), (2) и для каждой операции удаления выполнено условие (5). Тогда существует алгоритм выполнения последовательности операций с трудоемкостью, ограниченной полиномом от длины входа при любом фиксированном числе операций.

Заключение

В статье рассматривается задача построения остова полиэдрального конуса, множество неравенств которого динамически изменяется путем добавления новых и удаления существующих неравенств. Рассматривается применение метода двойного описания для операции добавления нового неравенства, соответствующей итерации метода, приводятся оценки трудоемкости. Для задачи удаления неравенства из фасетного описания конуса рассматриваются «наивный» и инкрементный алгоритмы, приводятся оценки трудоемкости. Приводится пример, показывающий, что размер выхода при удалении неравенства в общем случае не ограничен полиномом от длины входа. Выделяется подкласс задач, для него доказывается, что размер выхода ограничен квадратом от размера входа. Показано, что для данного класса существует алгоритм выполнения последовательного выполнения операций с трудоемкостью, ограниченной полиномом от длины входа при любом фиксированном числе операций.

Авторы благодарят В.Н. Шевченко и А.Н. Максименко за полезные обсуждения.

Литература

1. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
2. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования / А. Схрейвер. – М.: Мир, 1991. – Том 1. – 360 с.
4. Циглер, Г. Теория многогранников / Г. Циглер. – М.: МЦНМО, 2014. – 586 с.
5. Метод двойного описания / Т.С. Моцкин, Х. Райфа, Д.Л. Томпсон, Р.М. Тролл // Матричные игры: сб. науч. тр. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 81–109.
6. Черникова, Н.Б. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств / Н.Б. Черникова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1965. – Т. 5, № 2. – С. 334–337.
7. Avis, D. A Pivoting Algorithm for Convex Hull and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra / D. Avis, K. Fukuda // Discrete and Computational Geometry. – 1992. – Vol. 8. – Issue 3. – P. 295–313.
8. Chazelle, B. An Optimal Convex Hull Algorithm in Any Fixed Dimension / B. Chazelle // Discrete and Computational Geom. – 1993. – Vol. 10. – Issue 4. – P. 377–409.
9. Barber, C.B. The Quickhull Algorithm for Convex Hulls / C.B. Barber, D.P. Dobkin, H. Huhdanpaa // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1996. – Vol. 22, no. 4. – P. 469–483.
10. Bremner, D. Primal-Dual Methods for Vertex and Facet Enumeration / D. Bremner, K. Fukuda, A. Marzetta // Discrete and Computational Geometry. – 1998. – Vol. 20. – Issue 3. – P. 333–357.
11. Шевченко, В.Н. Модификация алгоритма Фурье–Моцкина для построения триангуляции / В.Н. Шевченко, Д.В. Груздев // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. – 2003. – Т. 10, № 1. – С. 53–64.
12. Панюков, А.В. Параллельные реализации симплекс-метода для безошибочного решения задач линейного программирования / А.В. Панюков, В.В. Горбик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – Вып. 9. – № 25(242). – С. 107–118.
13. Панюков, А.В. Представление суммы Минковского для двух полиэдров системой линейных неравенств / А.В. Панюков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14, № 40(299). – С. 108–119.
14. Панюков, А.В. Подход к решению систем линейных алгебраических уравнений с интервальной неопределенностью в исходных данных / А.В. Панюков, В.А. Голодов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 2 – С. 108–119.

15. Amato, G. Efficient Constraint/Generator Removal from Double Description of Polyhedra / G. Amato, F. Scozzari, E. Zaffanella // *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. – 2014. – Vol. 307. – P. 3–15.
16. Cousot, P. Automatic discovery of linear restraints among variables of a program / P. Cousot, N. Halbwachs // *Conference Record of the Fifth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*. – 1978. – P. 84–96.
17. Bagnara, R. Applications of polyhedral computations to the analysis and verification of hardware and software systems / R. Bagnara, P.M. Hill, E. Zaffanella // *Theoretical Computer Science*. – 2009. – Vol. 410. – P. 4672–4691.
18. Avis, D. How Good are Convex Hull Algorithms? / D. Avis, D. Bremner, R. Seidel // *Computational Geometry*. – 1997. – Vol. 7, Issues 5–6. – P. 265–301.
19. Burger, E. Uber homogene lineare Ungleichungssysteme / E. Burger // *Zeitschrift Angewandte Math. Mehanik*. – 1956. – Vol. 36. – Issue 3-4. – P. 135–139.
20. Fukuda, K. Double Description Method Revisited / K. Fukuda, A. Prodon // *Lecture Notes in Computer Science*. – 1996. – Vol. 1120. – P. 91–111.
21. Terzer, M. Accelerating the Computation of Elementary Modes Using Pattern Trees / M. Terzer, J. Stelling // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2006. – Vol. 4175. – P. 333–343.
22. Золотых, Н.Ю. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса / Н.Ю. Золотых // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. – 2012. – Т. 52, № 1. – С. 153–163.
23. Бастратов, С.И. Алгоритмические вопросы построения двойственного описания выпуклого полиэдра: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.И. Бастратов. – Н. Новгород, 2016. – 100 с.
24. Bremner, D. Incremental Convex Hull Algorithms Are Not Output Sensitive / D. Bremner // *Discrete and Computational Geometry*. – 1999. – Vol. 21. – Issue 1. – P. 57–68.

Поступила в редакцию 11 октября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 5–12*

MSC 52B55

DOI: 10.14529/mmph170101

ON THE DYNAMIC PROBLEM OF COMPUTING GENERATORS OF A POLYHEDRAL CONE

S.I. Bastrakov, N.Yu. Zolotykh

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhniy Novgorod, Russian Federation

This paper considers a dynamic problem of computing generators of a polyhedral cone. The problem is to sequentially perform operations of adding and removing inequalities from a facet description of the polyhedral cone with a corresponding re-computation of generators. The application of a double description method for both operations is discussed and complexity estimation is given in the paper.

Adding a new inequality corresponds to a single step of the double description method. It can be performed with time complexity being quadratic or cubic of the input size for the current step, depending on the modification of the method and adjacency tests chosen. We give complexity bounds for adding a single inequality with widely used algebraic and combinatorial adjacency tests.

The problem of removing inequalities is intrinsically much harder, compared to adding inequalities. We briefly describe the naive and incremental algorithms and show an example with output size being superpolynomial of the input size in case of removing a single inequality. A subclass of problems with certain adjacency properties is investigated, for this subclass we prove that the output size is bounded by a quadratic function of the input size. Finally, we prove that for the distinguished subclass any finite sequence of adding and removing inequalities can be performed in polynomial time of the input size.

Keywords: system of linear inequalities; polyhedral cone; computing dual description; double description method.

References

1. Chernikov S.N. *Lineynye neravenstva* (Linear inequalities). Moscow, Nauka Publ., 1968, 488 p. (in Russ.).
2. Emelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtsov M.K. *Mnogogranniki, grafy, optimizatsiya* (Polyhedrons, graphs, optimization). Moscow, Nauka Publ., 1981, 344 p. (in Russ.).
3. Schrijver A. *Theory of Linear and Integer Programming*. New York, Wiley, 1986. 471 p. DOI: 10.1002/net.3230200608
4. Ziegler G.M. Lectures on Polytopes. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 152. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995. 373 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-8431-1
5. Motzkin T.S., Raiffa H., Thompson G.L., Trall R.M. The Double Description Method. *Contributions to the Theory of Games*. Princeton University Press, 1953, Vol. 2, pp. 51–74. DOI (Chapter): 10.1515/9781400881970-004
6. Chernikova N.V. Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of a system of linear inequalities. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 5, Issue 2, 1965, pp. 228–233. DOI:10.1016/0041-5553(65)90045-5
7. Avis D., Fukuda K. A Pivoting Algorithm for Convex Hull and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra. *Discrete and Computational Geometry*, 1992, Vol. 8, Issue 3, pp. 295–313. DOI:10.1007/BF02293050
8. Chazelle B. An Optimal Convex Hull Algorithm in Any Fixed Dimension. *Discrete and Computational Geom.*, 1993, Vol. 10, Issue 4, pp. 377–409. DOI: 10.1007/BF02573985
9. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. The Quickhull Algorithm for Convex Hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1996, Vol. 22, no. 4, pp. 469–483. DOI: 10.1145/235815.235821
10. Bremner D., Fukuda K., Marzetta A. Primal-Dual Methods for Vertex and Facet Enumeration. *Discrete and Computational Geometry*, 1998, Vol. 20, Issue 3, pp. 333–357.
11. Shevchenko V. N., Gruzdev D. V. Modifikatsiya algoritma Fur'e–Motskina dlya postroeniya triangulyatsii (A modification of the Fourier–Motskin algorithm for constructing a triangulation). *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy, Ser. 2*, 2003, Vol. 10, no. 1, pp. 53–64. (in Russ.).
12. Panyukov A.V., Gorbik V.V. The parallel simplex-method achievements for errorless solving of linear programming problems. *Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2011, Issue 9, no. 25(242), pp. 107–118. (in Russ.).
13. Panyukov A.V. The Linear Inequalities Set Representation of Minkovski's Sum for Two Polyhedrons. *Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, Issue 14, no. 40(299), pp. 108–119. (in Russ.).
14. Panyukov A.V., Golodov V.A. Approach to Solve the Set of Linear Algebraic Equations with Interval Uncertainty of Data Given. *Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 108–119. (in Russ.).
15. Amato G., Scozzari F., Zaffanella E. Efficient Constraint/Generator Removal from Double Description of Polyhedra. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2014, Vol. 307, pp. 3–15. DOI:10.1016/j.entcs.2014.08.002
16. Cousot P., Halbwachs N. Automatic discovery of linear restraints among variables of a program. *Conference Record of the Fifth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, 1978, pp. 84–96. DOI: 10.1145/512760.512770
17. Bagnara R., Hill P.M., Zaffanella E. Applications of polyhedral computations to the analysis and verification of hardware and software systems. *Theoretical Computer Science*, 2009, Vol. 410, Issue 46, pp. 4672–4691. DOI:10.1016/j.tcs.2009.07.033
18. Avis D., Bremner D., Seidel R. How Good are Convex Hull Algorithms? *Computational Geometry*, 1997, Vol. 7, Issues 5–6, pp. 265–301. DOI:10.1016/S0925-7721(96)00023-5
19. Burger E. Über homogene lineare Ungleichungssysteme. *Zeitschrift Angewandte Math. Mechanik*, 1956, Vol. 36, Issue 3-4, pp. 135–139. DOI: 10.1002/zamm.19560360308
20. Fukuda K., Prodon A. Double Description Method Revisited. *Lecture Notes in Computer Science*, 1996, Vol. 1120, pp. 91–111. DOI: 10.1007/3-540-61576-8_77
21. Terzer M., Stelling J. Accelerating the Computation of Elementary Modes Using Pattern Trees. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, Vol. 4175, pp. 333–343. DOI: 10.1007/11851561_31

22. Zolotykh N.Yu. New modification of the double description method for constructing the skeleton of a polyhedral cone. *Journal of Computational mathematics and Mathematical Physics*, 2012, Vol. 52, Issue 1, pp. 146–156. DOI: 10.1134/S0965542512010162

23. Bastrakov S.I. *Algoritmicheskie voprosy postroeniya dvoistvennogo opisaniya vypuklogo polyedra: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* (Algorithmic issues of double description of a convex polyhedron. Cand. phys. and math. sci. diss.). Nizhniy Novgorod, 2016, 100 p. (in Russ.).

24. Bremner D. Incremental Convex Hull Algorithms are Not Output Sensitive. *Discrete and Computational Geometry*, 1999, Vol. 21, Issue 1, pp. 57–68. DOI: 10.1007/PL00009410

Received October 11, 2016

ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ПОГРУЗКИ И ДОСТАВКИ

Е.М. Бронштейн¹, Э.В. Гиндуллина¹, Р.В. Гиндуллин²

¹ Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Российская Федерация

² Башкирский государственный университет, г. Уфа, Российская Федерация
E-mail: bro-efim@yandex.ru

Задачи маршрутизации типа «one-to-one» или Traveling Salesman Problem with Pickup and Delivery (TSPPD) заключаются в формировании цикла минимальной длины, обеспечивающего доставку грузов от производителей потребителям при условии доставки груза от каждого производителя конкретному потребителю. Такая задача, в частности, возникает при доставке пассажиров (например, таксопарком). Установлены некоторые свойства поставленной задачи. Построен ряд квадратичных, линейных целочисленных и частично целочисленных формализаций таких задач, в которых число ограничений растет полиномиально с ростом числа пунктов. В частности, в качестве переменных используются булевы элементы матрицы перестановки, двухиндексные и трехиндексные переменные, описывающие отношение предшествования и некоторые другие. При таких формализациях возможно непосредственное использование оптимизационных пакетов. В частности, был проведен вычислительный эксперимент с использованием пакета CPLEX 12.6. Рекордной по производительности на случайно сгенерированных данных оказалась линейная смешанная трехиндексная модель. Установлено, что добавление некоторых дополнительных ограничений существенно повышает эффективность решения, в то время, как использование некоторых других ограничений эффективность снижают. В ряде случаев фактором, препятствующим решению задачи большей размерности, явилась ограниченность оперативной памяти.

При некоторых дополнительных ограничениях задача решалась для множеств пунктов, предлагаемых библиотекой, предложенной в университете г. Гейдельберга (Германия). В этом случае при использовании линейной смешанной трехиндексной модели получены решения задач весьма большой размерности (до 391 пары пунктов). Перспективы применения моделей, предложенных в статье, заключаются в расширении оперативной памяти компьютеров и совершенствовании оптимизационного пакета CPLEX. Некоторые исследователи отмечают, что CPLEX 11 (2007) работает почти в 30 000 раз быстрее, чем CPLEX 1 (1991).

Ключевые слова: маршрутизация; оптимизация; задача погрузки и доставки.

Введение

Впервые задача маршрутизации транспортных средств (VRP – Vehicle Routing Problem) была поставлена в [1]. За истекшие десятилетия рассматривалось множество модификаций VRP. Информация по этой тематике аккумулируется на сайте [2]. Один из подходов к классификации подобных задач приведен в [3].

Предполагается, что граф, вершинами которого являются пункты производства и потребления, а дугами – соответствующие пути, является полным. При формализации этой задачи в качестве неизвестных используются булевы величины – элементы матрицы перестановки или индикаторы непосредственных переходов между пунктами. В первом случае целевая функция оказывается квадратичной, но при этом не может возникнуть подциклов. Во втором задача априори является линейной. Исследовались в основном формализации второго типа, причем число ограничений часто принималось экспоненциально зависящим от числа пунктов, непосредственное применение оптимизационных пакетов при этом затруднительно. Задача успешно решалась методами ветвей и границ или ветвей и отсечений (генерации столбцов). В недавней работе [4] развивается аналогичный подход для задачи с временными окнами и несколькими транспортными

средствами, приводится оригинальная модификация второго подхода. Модели с полиномиально растущим числом ограничений там названы компактными.

В статье приводятся формализации, основанные как на первом, так и втором подходах, с числом ограничений, полиномиально зависящим от числа пунктов. В частности, применяются различные методы линеаризации задачи, которые являются адаптацией описанных в обзорах [5, 6] приемов, применявшихся к квадратичной задаче о назначениях [7].

При реализации некоторых из предложенных подходов в каких-либо программных средах понадобится переход от логических переменных b к их числовым значениям [b]. Заметим, что для популярного пакета CPLEX подобного преобразования не требуется.

Постановка задачи. Квадратичная формулировка

Пусть $P = \{1, \dots, n\}$ – пункты вывоза грузов веса q_i – для i -го пункта, $D = \{n+1, \dots, 2n\}$ – пункты доставки грузов. Полагаем, что в $(n+i)$ -м пункте вес груза отрицательный ($-q_i$). Множество пунктов есть $V = P \cup D \cup \{0\}$, где нулевой пункт является базой. Транспортное средство (ТС) вместимости S должно объехать все пункты по циклу таким образом, чтобы доставить грузы из i -го пункта в $(n+i)$ -й при всех i . Маршрут должен начинаться и заканчиваться в базовом пункте. Известны расстояния между всеми парами пунктов c_{ij} . Требуется найти допустимый цикл минимальной длины. Разумеется, задача относится к классу NP-трудных, поскольку в случае, когда пункты каждой пары совпадают и вместимость ТС большая, получим классическую задачу коммивояжера.

Сформулируем несколько свойств данной задачи.

Минимально допустимая вместимость ТС равна $\max\{q_i\}$. Действительно, очевидно, что при $S < \max\{q_i\}$ организовать перевозку невозможно. При $S = \max\{q_i\}$ допустимым, например, является маршрут $0-1-(n+1)-2-(n+2)-\dots-n-2n-0$. Тем самым, эта задача существенно отличается от более общей задачи транспортировки однородного груза, для которой задача вычисления минимально допустимой вместимости ТС является NP-трудной.

При неограниченной вместимости ТС число допустимых маршрутов равно $(2n)!/2^n$. Действительно, всего перестановок пунктов $(2n)!$, при этом, каждая из допустимых перестановок порождает 2^n перестановок, полученных всевозможными перестановками пар пунктов с номерами $i, (n+i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Этот результат получен в [8] более сложным рассуждением.

При $S \geq \max\{q_i\}$ любой допустимый отрезок маршрута можно продолжить. Действительно, если после прохождения отрезка ТС не содержит груза и при этом есть необслуженные пункты, то в качестве следующего можно принять любой пункт, в котором есть груз. Если в ТС груз есть, то при некотором i груз в i -м пункте забрали, но в $(n+i)$ -й не доставили. Следующим пунктом маршрута можно принять $(n+i)$ -й.

В качестве переменных примем булевы величины x_{ip} ($i, p = 0, 1, \dots, 2n$), равные 1, если i -м в цикле проходится p -й пункт (величины x_{ip} образуют матрицу перестановки). Ограничения имеют вид:

$$\sum_{i=0}^{2n} x_{ip} = 1 \quad (p = 0, \dots, 2n), \quad (1)$$

$$\sum_{p=0}^{2n} x_{ip} = 1 \quad (i = 0, \dots, 2n), \quad (2)$$

$$x_{00} = 1, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} i(x_{i(p+n)} - x_{ip}) \geq 1 \quad (p = 1, \dots, 2n). \quad (4)$$

Условие (4) задает правильность последовательности прохождения пунктов.

Действительно, из условия (2) следует, что при некоторых однозначно определенных i', i'' справедливы равенства $x_{i'(n+p)} = x_{i'p} = 1$. Тогда из условия (4) следует, что $i'' - i' \geq 1$. Поскольку i', i'' это номера пунктов $p, (n+p)$ в порядке прохождения в цикле, то нужное свойство выполняется.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{p=1}^{2n} q_p x_{ip} \leq S \quad (r = 1, \dots, 2n - 1). \quad (5)$$

Условие (5) отражает ограничение на вместимость ТС.

Целевая функция:

$$\sum_{p=1}^{2n} \sum_{r=0}^{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} x_{ip} x_{(i+1)r} c_{pr} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{(2n)i} c_{i0} \rightarrow \min. \quad (6)$$

В задаче (1)–(6) $O(n^2)$ булевых переменных и $O(n)$ ограничений.

Линейная задача 1

Введением дополнительных булевых переменных в целевой функции (6) можно избавиться от нелинейности.

Пусть $y_{ipr} = x_{ip} x_{(i+1)r}$ ($i = 0, 1, \dots, 2n-1$, $p, r = 0, 1, \dots, 2n$). Легко проверить, что эти величины можно задать линейными условиями

$$y_{ipr} \geq x_{ip} + x_{(i+1)r} - 1, \quad (7)$$

$$x_{ip} + x_{(i+1)r} - 2y_{ipr} \geq 0. \quad (8)$$

Целевая функция примет вид

$$\sum_{p=1}^{2n} \sum_{r=0}^{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} y_{ipr} c_{pr} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{(2n)i} c_{i0} \rightarrow \min. \quad (9)$$

В линейной булевой задаче (1)–(5), (7)–(9) число переменных и число ограничений имеют порядок $O(n^3)$.

Линейная задача 2

С помощью преобразования, предложенного в [9], можно уменьшить число переменных, причем часть из них рассматривать как непрерывные.

Введем вещественные переменные $z_{ip} = x_{ip} \sum_{r=0}^{2n-1} x_{(i+1)r} c_{pr}$. Целевая функция (6) примет линейную форму

$$\sum_{p=1}^{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} z_{ip} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{(2n)i} c_{i0} \rightarrow \min. \quad (10)$$

Пусть $Q = \min \left\{ \sum_{j=0}^{2n} \max_i (c_{ij}), \sum_{i=0}^{2n} \max_j (c_{ij}) \right\}$. Величина Q определяется только матрицей расстояний, причем при любых допустимых значениях переменных x и любых i, p справедливы оценки $0 \leq \sum_{r=0}^{2n} x_{(i+1)r} c_{pr} \leq Q$.

Легко проверить, что связь переменных x и z задается неравенствами

$$0 \leq z_{ip} \leq Q x_{ip}, \quad (11)$$

$$\sum_{r=0}^{2n} x_{(i+1)r} c_{pr} - Q(1 - x_{ip}) \leq z_{ip} \leq \sum_{r=0}^{2n} x_{(i+1)r} c_{pr}. \quad (12)$$

В задаче (1)–(5), (9)–(12) число булевых переменных, вещественных переменных, ограничений имеют порядок $O(n^2)$.

Линейная задача 3

Здесь описано преобразование, которое позволяет снять условие целочисленности с основных переменных x_{ip} за счет введения существенно меньшего числа булевых переменных. Пусть

$$A_s = \left\{ i \in \{0, 1, \dots, 2n\} : \text{mod}_2 \left[\frac{i}{2^s} \right] = 0 \right\} \quad (s = 0, 1, \dots, \lceil \log_2(2n+1) \rceil).$$

Иными словами, A_s состоит из тех чисел, в двоичном разложении которых на s -м месте расположен 0.

Введем переменные $u_{sp} = \sum_{i \in A_s} x_{ip}$ ($s = 0, 1, \dots, \log_2(2n+1)$).

Полагаем

$$x_{ip} \in [0, 1]. \quad (13)$$

Проверим, что при выполнении условий (1), (13) и булевости переменных u_{sp} , переменные x_{ip} – булевы.

Пусть напротив $x_{ip} \in (0, 1)$ при некоторых i, p . В силу условия (1) существует еще один индекс $j \neq i$, при котором $x_{jp} \in (0, 1)$. Существует такое значение s , для которого на s -й позиции в разло-

Математика

жениях чисел i и j расположены разные символы. Пусть для определенности $i \in A_s, j \notin A_s$. Но $1 = \sum_{i=0}^{2n} x_{ip} = \sum_{i \in A_s} x_{ip} + \sum_{i \notin A_s} x_{ip} = u_{sp} + \sum_{i \notin A_s} x_{ip}$.

В силу выбора s оба слагаемых в правой части положительные, т.е. значение u_{sp} не может быть булевым. Противоречие.

Применяя конструкцию из предыдущего пункта, получим смешанную задачу, в которой число булевых переменных равно $O(n \log(2n))$, непрерывных переменных и ограничений $O(n^2)$.

Линейная задача 4

К квадратичной модели можно применить линеаризацию иного типа. Пусть A_i – порядковый номер i -го пункта в порядке прохождения от базы, т.е. решение уравнения $x_{ki} = 1$ относительно k .

Справедливо равенство $\sum_{s=0}^{2n} \sum_{k=1}^s x_{ki} = 2n - A_i + 1$, поскольку $\sum_{k=1}^s x_{ki} = 0$ при $s < A_i$ и $\sum_{k=1}^s x_{ki} = 1$ при $s \geq A_i$.

Через величины A_i ограничения записываются следующим образом:

правильность порядка прохождения пунктов $A_i < A_{n+i}$ ($i = 1, \dots, n$);

ограничения на вместимость: $\sum_{i=1}^{2n} q_i [A_i \leq k] \leq S$ ($k = 1, \dots, 2n - 1$).

Целевая функция: $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} [A_i + 1 = A_j] + \sum_{i=n+1}^{2n} c_{i0} [A_i = 2n] \rightarrow \min$.

Линейная задача 5

Двухиндексная формализация является наиболее распространенной. Пусть t_{ij} – булевы переменные, равные 1, если в цикле дуга из i -го пункта ведет в j -й.

Ограничения:

$$\sum_{i=0}^{2n} t_{ij} = 1 \quad (j = 0, 1, \dots, 2n), \quad (14)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} t_{ij} = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, 2n), \quad (15)$$

$$t_{ii} = 0 \quad (i = 0, \dots, 2n). \quad (16)$$

Эти условия означают, что ТС из каждого пункта выезжает, в каждый пункт въезжает. При выполнении условий (14)–(16) цикл может разбиваться на подциклы, состоящие более, чем из одного пункта. Для того, чтобы этого избежать, следуя [10], введем вещественные переменные A_i , удовлетворяющие ограничениям:

$$0 \leq A_i \leq 2n \quad (i = 0, \dots, 2n), A_0 = 0, \quad (17)$$

$$A_i - A_j + (2n+1) t_{ij} \leq 2n \quad (i, j = 0, \dots, 2n). \quad (18)$$

Из условий (14)–(18) следует, что величины A_i автоматически целые, равные, как и в предыдущей модели, номерам пунктов в порядке прохождения в цикле. Правильность последовательности прохождения пунктов приобретает простую форму и ограничения на вместимость имеют тот же вид, что и в выше.

Целевая функция: $\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} c_{ij} t_{ij} \rightarrow \min$.

В этой модели число булевых переменных и ограничений имеет порядок $O(n^2)$, вещественных $O(n)$.

Линейная задача 6

Введение иных вспомогательных переменных позволяет модифицировать линейную модель 5.

Пусть t_{ij} – те же переменные, что и в предыдущей модели, удовлетворяющие условиям (14)–(16). Введем двумерный аналог (α_i, β_i) потенциалов пунктов, исследованных, в частности, в [11]. Смысл вспомогательных вещественных переменных – вес груза, который погрузили (соответственно разгрузили) до посещения i -го пункта, включая i -й. Как обычно, $a^+ = (|a|+a)/2$, $a^- = (|a|-a)/2$ – соответственно положительная и отрицательная части числа. Пусть числа α_i, β_i удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_j \geq t_{ij}(\alpha_i + q_j^+) \quad (i = 0, \dots, 2n; j = 1, \dots, 2n), \quad (19)$$

$$\alpha_j \leq R \quad (j = 0, \dots, 2n), \quad (20)$$

$$\beta_j \geq t_{ij}(\beta_i + q_j^-) \quad (i = 0, \dots, 2n; j = 1, \dots, 2n), \quad (21)$$

$$\beta_j \leq R \quad (j = 0, \dots, 2n), \quad (22)$$

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0. \quad (23)$$

Здесь $R = \sum_{i=0}^{2n} q_i^+ = \sum_{i=0}^{2n} q_i^-$. Из условий (19), (21) следует, что в построенном маршруте нет циклов. Действительно, $q_j^+ + q_j^- = |q_j| > 0$, т.е. при $t_{ij} = 1$ выполняется неравенство $\alpha_j + \beta_j > \alpha_i + \beta_i$, что и требовалось. Отсюда и из условий (14), (15) маршрут является цепью, содержащей все пункты; поскольку $\alpha_j + \beta_j \geq 0$ в силу условий (19), (21), то из (23) следует, что начальный пункт цепи является базой (это следует также из того, что в неравенствах (19), (21) нет ограничений на дугу, конечным пунктом которого является база). Пусть маршрут (незамкнутый) имеет вид $0-i_1-i_2-\dots-i_{2n}$.

$$\text{Докажем, что } \alpha_{i_k} = \sum_{j=1}^k q_{i_j}^+, \quad \beta_{i_k} = \sum_{j=1}^k q_{i_j}^- \quad (k=1, \dots, 2n).$$

Для этого просуммируем неравенства (19). Получим $\alpha_{i_{2n}} \geq \alpha_0 + \sum_{j=1}^{2n} q_{i_j}^+ = R$, тем самым, с учетом (20) и (23) неравенства (19) при $t_{ij} = 1$ фактически являются равенствами, что и требовалось. Утверждение для β аналогично вытекает из (21)–(23).

Нелинейные условия (19), (21) можно привести к линейной форме с помощью приема, аналогичного (11), (12).

Условие правильности прохождения пунктов и ограничения на вместимость имеют простой вид: $\alpha_i + \beta_i \leq \alpha_{(i+n)} + \beta_{(i+n)}$ ($i = 1, \dots, n$); $\alpha_i - \beta_i \leq S$ ($i = 1, \dots, 2n$). Целевая функция та же, что и в модели 5.

Линейная задача 7

Применим трехиндексные переменные, использование которых позволяет получить линейную булеву задачу, причем в этом случае для исключения «коротких» циклов не требуется введения дополнительных переменных. Эта формализация оказалась наиболее эффективной среди нескольких альтернативных при решении задачи доставки однородного груза типа «many-to-many».

Пусть v_{ij}^k ($i, j = 0, \dots, 2n; k = 1, \dots, 2n+1$) – булевы переменные, равные 1, если k -я по порядку дуга в маршруте ведет из i -го пункта в j -й. Эта модель является детализацией линейных моделей 1 и 6. Действительно, $\sum_{i=0}^{2n} v_{ij}^k = x_{kj}$, $\sum_{k=1}^{2n} v_{ij}^k = t_{ij}$.

Ограничения

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=1}^{2n+1} v_{ij}^k = 1 \quad (j = 0, \dots, 2n); \quad (24)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=1}^{2n+1} v_{ij}^k = 1 \quad (i = 0, \dots, 2n); \quad (25)$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^k = 1 \quad (k = 1, \dots, 2n+1) \quad (26)$$

означают, что ТС из каждого пункта выезжает и в каждый въезжает по одному разу, а также, что каждая дуга инцидентна единственной паре пунктов.

Условия

$$\sum_{j=0}^n v_{0j}^1 = 1, \quad \sum_{i=n+1}^{2n} v_{i0}^{2n+1} = 1 \quad (27)$$

означают, что первая дуга ведет из базы в какой-нибудь пункт производства, а последняя по порядку – из какого-нибудь пункта потребления в базу.

Условие последовательного прохождения дуг (конец k -й дуги совпадает с началом $(k+1)$ -й) имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{2n} v_{ij}^k = \sum_{s=0}^{2n} v_{js}^{k+1} \quad (j = 1, \dots, 2n; k = 1, \dots, 2n). \quad (28)$$

Условия (24)–(28) определяют гамильтонов цикл, в котором последовательные дуги имеют соответствующие номера [12].

Докажем, что условия правильности последовательности прохождения пунктов в рассматриваемых переменных можно записать в следующей форме:

$$\sum_{s=1}^{2n} \sum_{k \leq s} \sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)j}^k - v_{ip}^k) \leq 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (29)$$

Действительно, если из i -го пункта ТС выезжает по дуге с номером k_1 , а из $(n+i)$ -го – по дуге с номером k_2 , то $\sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)p}^k - v_{ij}^k) = 0$ при $k \leq \min\{k_1, k_2\}$, поскольку в этом случае $v_{(n+i)p}^k = v_{ij}^k = 0$ при любых p, j , т.е. $\sum_{k \leq s} \sum_{p=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (v_{(n+i)j}^k - v_{ip}^k) = 0$, если $s \leq \min\{k_1, k_2\}$. Это же равенство справедливо при $s \geq \max\{k_1, k_2\}$, поскольку в этом случае $v_{(n+i)p}^{k_1} = v_{ij}^{k_2} = 1$ при некоторых однозначно определенных p, j, k_1, k_2 и $v_{(n+i)p}^{k_1} = v_{ij}^{k_2} = 0$ при всех остальных p, j, k . Если $k_1 < k_2$, то $v_{ip}^{k_1} = 1$ при некотором p и $v_{ip}^k = 0$ при остальных p , $v_{(n+i)p}^k = 0$ для всех p , т.е. неравенство (29) выполняется. Аналогично проверяется, что при $k_2 < k_1$ неравенство (29) не выполняется.

Ограничение на вместимость:

$$\sum_{k \leq s} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^k q_i \leq S \quad (s=1, \dots, 2n). \quad (30)$$

Целевая функция:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_{ij}^k c_{ij} \rightarrow \min. \quad (31)$$

Число булевых переменных и ограничений задачи (24)–(31) имеют порядок $O(n^3)$.

Линейная задача 8

В предыдущих моделях используются разреженные структуры данных. Данные можно уплотнить, используя в качестве основных целочисленные переменные A_i , введенные в модели 4. Ограничения:

$$0 \leq A_i \leq 2n \quad (i=0, \dots, 2n); A_0 = 0.$$

Отсутствие подциклов равносильно биективности отображения A . Поскольку число элементов в обоих множествах равно $2n+1$, то биективность равносильна инъективности, которую можно задать условиями $[A_i = A_j] = 0 \quad (i, j=0, \dots, 2n, i < j)$. Ограничения на правильность последовательности прохождения пунктов и на вместимость, а также целевая функция, имеют тот же вид, что и в модели 4.

Дополнительные ограничения

Избыточные ограничения могут ускорять решение задачи. В [13] сформулирован ряд дополнительных ограничений для случая неориентированного графа и неограниченной вместимости ТС, число которых экспоненциально зависит от числа пунктов. Для рассматриваемого случая целесообразно использовать следующие ограничения.

Для линейных моделей 1–3

$$x_{pi} + x_{(p+1)j} \leq [q_i + q_j \leq S] + 1 \quad (i, j=1, \dots, n, p=1, \dots, 2n-2);$$

$$x_{p(n+i)} + x_{(p+1)(n+j)} \leq [q_i + q_j \leq S] + 1 \quad (i, j=1, \dots, n, p=1, \dots, 2n-2).$$

Обозначение $[a]$ то же, что и во введении. Эти условия означают, что в двух последовательных пунктах производства (потребления) суммарная загрузка (потребность) не превышает вместимости ТС.

Для линейных моделей 4, 5 соответствующие ограничения формулируются проще:

$$t_{ij} \leq [q_i + q_j \leq S]; t_{(n+i)(n+j)} \leq [q_i + q_j \leq S] \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Для линейной модели 6:

$$v_{ij}^k \leq [q_i + q_j \leq S]; v_{(n+i)(n+j)}^k \leq [q_i + q_j \leq S] \quad (i, j=1, \dots, n; k=1, \dots, 2n+1).$$

Аналогичные условия можно сформулировать для цепи, содержащей любое число пунктов производства или потребления.

Сформулируем некоторые дополнительные ограничения, которые являются адаптацией ограничений для близких задач из [12] и являются следствиями правильности последовательности прохождения пунктов.

Дуги, соединяющие пункты $i - (n + j)$ и $j - (n + i)$ при различных направлениях движения одновременно, в маршрут перевозок входить не могут, поэтому для линейных моделей 1–3

$$x_{pi} + x_{(p+1)(n+j)} + x_{sj} + x_{(s+1)(n+i)} \leq 3; x_{pi} + x_{(p+1)(n+j)} + x_{s(n+i)} + x_{(s+1)i} \leq 3;$$
$$x_{p(n+i)} + x_{(p+1)j} + x_{s(n+j)} + x_{(s+1)i} \leq 3, (i, j = 1, \dots, n; p, s = 1, \dots, 2n-1).$$

Для моделей 4, 5:

$$t_{i(n+j)} + t_{j(n+i)} \leq 1; t_{i(n+j)} + t_{(n+i)j} \leq 1; t_{(n+i)j} + t_{(n+j)i} \leq 1 (i, j=1, \dots, n).$$

Аналогично формулируются условия для моделей 6.

Аналог этих условий можно сформулировать для большего числа дуг. Например, одновременно не могут входить в маршрут дуги, соединяющие пункты $i - (n + j)$, $j - (n + p)$, $p - (n + i)$ при различных направлениях движения.

Другой класс условий такого типа. Не существует цепи, соединяющей $(n + i)$ -й и i -й пункты. Например, для цепи длины 2 для моделей 4, 5 получаем условие $t_{(n+i)j} + t_{ji} \leq 1 (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 2n)$.

Заключение

В работе построен ряд моделей, относящихся к задачам транспортной маршрутизации типа «one-to-one», основанных на различных подходах. Большая часть рассмотренных моделей – линейные булевы или смешанные. Для сравнения вычислительной эффективности моделей был проведен эксперимент с использованием оптимизационного пакета CPLEX 12.6. Рекордной по производительности на случайно сгенерированных данных оказалась линейная смешанная трехиндексная модель.

Установлено, что добавление некоторых дополнительных неравенств существенно повышает эффективность работы метода, в то время, как иные добавленные неравенства снижают эффективность.

В ряде случаев фактором, препятствующим решению задачи большей размерности, явилась ограниченность оперативной памяти.

При некоторых дополнительных ограничениях задача решалась для множеств пунктов, предлагаемых библиотекой [14]. В этом случае при использовании линейной смешанной трехиндексной модели получены решения задач весьма большой размерности (до 391 пары пунктов).

Перспективы применения моделей, предложенных в статье, заключаются в расширении оперативной памяти компьютера и совершенствовании оптимизационного пакета CPLEX. Как отметил К. Archetti (Брешиа, Италия) в докладе на 3 совещании Европейской рабочей группы VeRoLog (Осло, 2014 г) [15], CPLEX 11 (2007) работает почти в 30 000 раз быстрее, чем CPLEX 1 (1991).

Литература

1. Danzig, G. The Truck Dispatching Problem / G. Danzig, J. Ramser // Management Science. – 1959. – Vol. 6. – Issue 1. – P. 80–91.
2. <http://neo.lcc.uma.es/vrp/>
3. Бронштейн, Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е.М. Бронштейн, Т.А. Заико // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 10. – С. 133–147.
4. Furtadoa, M. Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation / M. Furtadoa, P. Munaria, R. Morabito // Technical Report. Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Rod. Washington Luís, km 235 – SP-310, São Carlos – SP – CEP: 13565-905 – Brazil, July, 2015. www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.html
5. Burkard, R.E. The quadratic assignment problem / R.E. Burkard, E. Cela, P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis // Handbook of Combinatorial Optimization: сб. науч. тр. – Springer US, 1999. – P. 1713–1809.
6. Glover, F. Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems / F. Glover // Management Science. – 1975. – Vol. 22. – P. 455–460.
7. Lawler, E.L. The quadratic assignment problem / E.L. Lawler // Management Science. – 1963. – Vol. 9. – P. 586–599.

8. Ruland, K.S. The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm / K.S. Ruland, E.Y. Rodin // *Computers & mathematics with applications*. – 1997. – Vol. 33, no. 12. – P. 1–13.
9. Kaufmann, L. An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders' decomposition / L. Kaufmann, F. Broeckx // *European Journal of Operational Research*. – 1978. – no. 2. – P. 204–211.
10. Miller, C. Integer programming formulations and travelling salesman problems / C. Miller, A. Tucker, R. Zemlin // *J. A.C.M.* – 1960. – Vol. 7, no. 4. – P. 326–329.
11. Desrochers, M. Improvements and extensions to the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints / M. Desrochers, G. Laporte // *Operations Research Letters*. – 1991. – Vol. 10. – Issue 1. – P. 27–36.
12. Cordeau, J.-F. Recent models and algorithms for one-to-one pickup and delivery problems / J.-F. Cordeau, G. Laporte, S. Ropke // *The Vehicle Routing Problem, Latest Advances and Challenges* B.L. Golden, S. Raghavan, and E.A. Wasil (Eds). – Boston, Springer, 2007. – P. 327–357.
13. <http://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74>
14. <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/>

Поступила в редакцию 16 сентября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 13–21*

DOI: 10.14529/mmph170102

FORMALIZATION OF PICKUP AND DELIVERY PROBLEM

E.M. Bronshtein¹, E.V. Gindullina¹, R.V. Gindullin²

¹ *Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation*

² *Bashkirian State University, Ufa, Russian Federation*

E-mail: bro-efim@yandex.ru

The problems of routing like ONE-TO-ONE or Traveling Salesman Problem with Pickup and Delivery (TSPPD) consist in forming a cycle of the minimal length that guarantees a shipment from manufacturers to customers in case of the shipment from each producer to a specific customer. In particular, the problem occurs in case of delivery of passengers (for example, by a taxi company). Some properties of the set problem are specified. The range of quadratic, integer linear and mixed integer linear formalizations of such problems, in which the number of limitations grows polynomially with the increase in the number of points, is considered. In particular, Boolean elements of a permutation matrix, two-index and three-index variables, which describe a precedence relation, are used as variables. In the context of such formalizations it is possible to use optimization packages. We have conducted the computational experiment with the help of CPLEX 12.6 package. The mixed integer linear three-index model was record-breaking in terms of productivity based on randomly generated data. It's found out that some additional limitations significantly improve the effectiveness of a solution. Meanwhile, the use of some other restrictions negates the effectiveness. In most cases the limitedness of RAM is a factor which hinders the solution of high dimension problems.

In case of some additional restrictions the problem is solved for a set of points, suggested by a library proposed by Heidelberg University (Germany). When using the mixed integer linear model, solutions of extremely high dimension problems are obtained (up to 391 pairs of points). The prospects of applying these models consist in RAM expansion and improvement of CPLEX optimization package. Some scholars note that CPLEX 11 (2007) works 30 000 times faster than CPLEX 1 (1991).

Keywords: routing; optimization; pickup and delivery problem.

References

1. Danzig G., Ramser J. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 1959, Vol. 6, Issue 1, pp. 80–91. DOI: 10.1287/mnsc.6.1.80
2. <http://neo.lcc.uma.es/vrp/>

3. Bronshtein E.M., Zaiko T.A. Deterministic optimizational problems of transportation logistics. *Automation and Remote Control*, 2010, Vol. 71(10), pp. 2132–2144. DOI: 10.1134/S0005117910100127
4. Furtado M.G.S., Munari P., Morabito R. Pickup and delivery problem with time windows: a new compact two-index formulation. *Technical Report*. Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Rod. Washington Luís, km 235 - SP-310, São Carlos - SP - CEP: 13565-905, Brazil. July, 2015. www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/07/5022.html
5. Burkard R.E., Cela E., Pardalos P.M., Pitsoulis L.S. The Quadratic Assignment Problem. *Handbook of Combinatorial Optimization: Vol. 1-3*, Springer US, 1999, pp. 1713–1809. DOI: 10.1007/978-1-4613-0303-9_27.
6. Glover, F. Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems. *Management Science*, 1975, Vol. 22, pp. 455–460. DOI: 10.1287/mnsc.22.4.455
7. Lawler E.L. The quadratic assignment problem. *Management Science*, 1963, Vol. 9, pp. 586–599. DOI: 10.1287/mnsc.9.4.586
8. Ruland K.S., Rodin E.Y. The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm. *Computers & Mathematics with Applications*, 1997, Vol. 33, no. 12, pp. 1–13. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00090-4
9. Kaufmann L., Broeckx F. An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders' decomposition. *European Journal of Operational Research*, 1978, no. 2, pp. 204–211. DOI: 10.1016/0377-2217(78)90095-4
10. Miller C., Tucker A., Zemlin R. Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *J.A.C.M.*, 1960, Vol. 7, no. 4, pp. 326–329. DOI: 10.1145/321043.321046
11. Desrochers M., Laporte G. Improvements and extensions to the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 1991, Vol. 10, Issue 1, pp. 27–36. DOI: 10.1016/0167-6377(91)90083-2
12. Cordeau J.-F., Laporte G., Ropke S. Recent Models and Algorithms for One-to-One Pickup and Delivery Problems. *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, 2008, Springer US, pp. 327–357. DOI: 10.1007/978-0-387-77778-8_15.
13. <http://www.sintef.no/contentassets/cfb19ab9b7c74>
14. <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/>

Received September 16, 2016

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПОТОКИ РАЗРЕШАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.А. Сагадеева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Исследования стационарных уравнений соболевского типа стали основой для изучения множества различных задач, таких как задачи оптимального управления, системы леонтьевского типа, задачи оптимального измерения и т.д. Нестационарные уравнения соболевского типа изучались лишь фрагментарно. В данной статье обосновываются методы, необходимые для нахождения решений таких уравнений. А именно, исследуются вырожденные потоки разрешающих операторов, с помощью которых показана разрешимость начальных задач для нестационарных уравнений соболевского типа.

Ключевые слова: относительно ограниченный оператор; вырожденная группа операторов; задача Коши; задача Шоултера–Сидорова.

Введение

Пусть X, Y – банаховы пространства. Оператор $L \in L(X; Y)$ (т.е. линейный непрерывный) и оператор $M \in CI(X; Y)$ (т.е. линейный замкнутый, плотно определенный в X). На промежутке $J \subset R$ рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

при $t_0 \in J$ для нестационарного уравнения вида

$$L\dot{x} = aMx + g, \quad (2)$$

где $\ker L \neq \{0\}$, а скалярная функция $a: J \rightarrow R_+$ и вектор-функция $g: J \rightarrow Y$ подлежат дальнейшему определению.

При условии $a \equiv \text{const}$ уравнение (2) в силу нетривиальности ядра оператора L относится к стационарным уравнениям соболевского типа [1]. В настоящее время уравнения соболевского типа активно исследуются в различных направлениях, о чем могут свидетельствовать монографии, целиком или частично посвященные их исследованию [1–7]. Результаты этих исследований стали основой для изучения систем леонтьевского типа (см. напр. [8, 9]), задач оптимального управления (см. напр. [5]), на основе которых было предложено задачу восстановления динамически искаженного сигнала [10, 11] рассматривать как задачу оптимального измерения [12, 13]. Более того, стационарные уравнения соболевского типа начали рассматриваться в квазибанаховых пространствах [14–16], а также в пространствах «шумов» [17, 18]. Отметим, также, что основой исследования уравнений соболевского типа стал метод фазового пространства [6, 19].

Нестационарные уравнения соболевского типа исследовались автором довольно фрагментарно (см. напр. [20]). Целью данной работы является полное математическое обоснование методов, необходимых при нахождении решения нестационарных уравнений соболевского типа вида (2) и начальных задач для него.

Статья кроме введения, заключения и списка литературы содержит три части. В первой весьма кратко описывается теория относительно p -ограниченных операторов. Все результаты данной части приведены без доказательства, обосновывается лишь переход от контурного интегрирования к предельным переходам. Далее, во второй (основной) части рассматриваются вырожденные группы и потоки операторов, используя которые в третьей части получены решения начальных задач для нестационарных уравнений соболевского типа. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия автора.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность своему научному консультанту профессору А.Л. Шестакову за внимание к данной работе, профессору Г.А. Свиридюку за строгую, но конструктивную критику, а также коллектив кафедры уравнений математической физики за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе.

Относительно p -ограниченные операторы

Следуя [1], множества $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in L(Y; X)\}$ и $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ назовем L -резольвентным множеством и L -спектром оператора M соответственно. В силу результатов [1] множество $\rho^L(M)$ является открытым, а поэтому $\sigma^L(M)$ всегда замкнуто.

L -резольвентное множество оператора M может быть пустым множеством, например, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Предполагая, что множество $\rho^L(M)$ не пусто, введем в рассмотрение оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$, которые будем называть соответственно L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами оператора M . В силу [1], L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.

Определение 1. Оператор M назовем *спектрально ограниченным относительно оператора L* (коротко, (L, σ) -ограниченным), если $\exists r \in R_+ \quad \forall \mu \in C \quad (|\mu| > r) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$.

Возьмем (L, σ) -ограниченный оператор M , выберем в комплексной плоскости C контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = h > r\}$. Тогда имеют смысл такие интегралы, как интегралы от голоморфных оператор-функций комплексного переменного по замкнутому контуру,

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu. \quad (3)$$

Так как правая $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левая $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L -резольвенты оператора M голоморфны [1], то операторы P и Q не зависят от радиуса h контура γ .

Лемма 1. [1] Пусть $L \in L(X; Y)$, $M \in CI(X; Y)$ и оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда операторы $P \in L(X)$ и $Q \in L(Y)$ являются проекторами.

Введем обозначение $X^0 = \ker P$, $X^1 = \text{im } P$, $Y^0 = \ker Q$, $Y^1 = \text{im } Q$; а через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на X^k ($X^k \cap \text{dom } M$), $k = 0, 1$.

Теорема 1 (теорема Г.А. Свиридюка о расщеплении). [1] Пусть операторы $L \in L(X; Y)$ и $M \in CI(X; Y)$, причем оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) операторы $L_k \in L(X^k; Y^k)$ и $M_k \in CI(X^k; Y^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $L_1^{-1} \in L(Y^1; X^1)$ и $M_0^{-1} \in L(Y^0; X^0)$.

При условии (L, σ) -ограниченности оператора M , согласно теореме 1, существуют операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in L(X^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in L(X^1)$, используя которые можно разложить L -резольвенту оператора M в кольце $|\mu| > r$ в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1} (I_Y - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

При этом бесконечно удаленная точка является

- (i) устранимой особой точкой, если $H = O$;
- (ii) полюсом порядка $p \in N$, если $H^p \neq O$, а $H^{p+1} = O$;
- (iii) существенно особой точкой, если $H^k \neq O$ для всех $k \in N$.

Бесконечно удаленную точку будем называть полюсом порядка $p \in N_0$ ($\equiv \{0\} \cup N$), если она является устранимой особой точкой ($p = 0$) или полюсом порядка $p \in N$.

Определение 2. Оператор M будем называть (L, p) -ограниченным ($p \in N_0$), если он (L, σ) -ограничен и бесконечность является полюсом порядка $p \in N_0$ для $(\mu L - M)^{-1}$.

Следствие 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$). Тогда

$$P = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^{p+1}, \quad Q = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu L_{\mu}^L(M))^{p+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^{p+1} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\mu (\mu L - M)^{-1} L (P + (I_X - P)) \right)^{p+1} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\left(I_X - \frac{1}{\mu} L_1^{-1} M_1 \right)^{-1} P + \left(\mu (\mu H - I_X)^{-1} H \right)^{p+1} (I_X - P) \right) = P + O(I_X - P) = P. \end{aligned}$$

Утверждение относительно проектора Q доказывается аналогично. Следствие доказано.

Вырожденные группы и потоки операторов.

Пусть X, Y – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ и $M \in \mathcal{C}\mathcal{I}(X; Y)$.

Определение 3. Однопараметрическое семейство $X(\cdot): R \rightarrow \mathcal{L}(X)$ будем называть *вырожденной группой операторов*, если выполнены условия

- (i) $X(0) = P$,
- (ii) $X(t)X(s) = X(t + s)$ для всех $t, s \in R$.

Замечание 1. Если первое условие определения 3 заменить на $X(0) = I_X$, то группа вырожденной не является, и в этом случае ее называют просто группой операторов.

Вырожденная группа операторов называется *аналитической*, если она допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i) и (ii).

Теорема 3. [1] Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда существует аналитическая группа $\{X(t) \in \mathcal{L}(X): t \in R\}$ $\{Y(t) \in \mathcal{L}(Y): t \in R\}$, причем ее операторы задаются интегралами типа Данфорда–Тейлора по контуру $\gamma = \{\mu \in C: |\mu| = h > r\}$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \quad \left(Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \right). \quad (4)$$

Замечание 2. Сужение операторов $X(t)|_X = \exp(tS)$, где $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(X^1)$ из теоремы 1.

Следствие 2. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$). Тогда операторы группы $\{X(t) \in \mathcal{L}(X): t \in R\}$ $\{Y(t) \in \mathcal{L}(Y): t \in R\}$ заданы аппроксимациями Хилле–Уиддера–Поста

$$X(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k \quad \left(Y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} L_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k \right).$$

Доказательство. Рассмотрим группу $\{X(t) \in \mathcal{L}(X): t \in R\}$. В силу теоремы 2 и следствия 1

$$\begin{aligned} X(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}^L(M) (P + (I_X - P)) \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} \left(\frac{k}{t} L_1 - M_1 \right)^{-1} L_1 P + \frac{k}{t} \left(\frac{k}{t} L_0 - M_0 \right)^{-1} L_0 (I_X - P) \right)^k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(I_X - \frac{k}{t} L_1^{-1} M_1 \right)^{-k} P + \left(\frac{k}{t} \left(\frac{k}{t} H - I_X \right)^{-1} H \right)^k (I_X - P) \right) = \exp(St)P + O(I_X - P). \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание замечание 2, получаем утверждение относительно $X(t)$.

Утверждение относительно группы $Y(t)$ доказывается аналогично. Следствие доказано.

Определение 4. Двухпараметрическое семейство $X(\cdot, \cdot): R \times R \rightarrow \mathcal{L}(X)$ будем называть *вырожденным потоком операторов*, если выполнены условия

- (i) $X(t, t) = P$, для всех $t \in R$
- (ii) $X(t, \tau)X(\tau, s) = X(t, s)$ для всех $t, \tau, s \in R$.

Замечание 3. Если первое условие определения 4 заменить на $X(t, t) = I_X$, то поток вырожденным не является, и в этом случае его называют просто потоком операторов.

Вырожденный поток операторов называется *аналитическим*, если он допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i) и (ii).

Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R)$. По аналогии с (4) рассмотрим при $t, s \in R$ выражение

$$X(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_s^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu, \quad (5)$$

где контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = h > r\}$.

Теорема 4. Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R)$. Тогда семейство $\{X(t, s) \in L(X) : t, s \in R\}$, операторы которого заданы формулой (5), является вырожденным аналитическим потоком операторов.

Доказательство. Для операторов (5) потока $\{X(t, s) \in L(X) : t, s \in R\}$ очевидно существует аналитическое продолжение.

Покажем, что $X(t, s)$ образуют поток операторов. Свойство (i) из определения 4 следует из способа задания операторов $X(t, s)$. Рассмотрим свойство (ii) из определения 4:

$$\begin{aligned} X(t, \tau)X(\tau, s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu \cdot \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \left(\int_{\gamma'} R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda \right) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{\exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda}{\lambda - \mu} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) \int_{\gamma} \frac{\exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu}{\mu - \lambda} d\lambda \right), \end{aligned}$$

где точка $\mu \in \gamma$ лежит внутри области, ограниченной контуром γ' , а точка $\lambda \in \gamma'$ находится вне области, ограниченной контуром γ . Тогда в силу теоремы о вычетах, учитывая последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} X(t, \tau)X(\tau, s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu \cdot \int_{\gamma'} R_{\lambda}^L(M) \exp\left(\lambda \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \left(\int_{\tau}^t a(\zeta) d\zeta + \int_s^{\tau} a(\zeta) d\zeta\right)\right) d\mu = X(t, s). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В силу теоремы 1 сужение операторов потока $X(t, s)|_X = \exp\left(S \int_s^t a(\zeta) d\zeta\right)$, где оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in L(X^1)$.

Замечание 5. В пространстве $L(Y)$ по аналогии с (5) также можно задать поток операторов следующей формулой

$$Y(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_s^t a(\zeta) d\zeta\right) d\mu. \quad (6)$$

Доказательство свойств такого потока аналогично доказательству теоремы 4.

Следствие 3. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R_+)$. Тогда операторы потоков $\{X(t, s) \in L(X) : t, s \in R\}$ и $\{Y(t, s) \in L(Y) : t, s \in R\}$ задаются с помощью аппроксимаций Хилле–Уиддера–Поста

$$X(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} L \right)^k \quad \text{и} \quad Y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(L \left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \right)^k. \quad (7)$$

Начальные задачи для нестационарных уравнений соболевского типа.

Пусть X, Y – банаховы пространства, операторы $L \in L(X; Y)$ и $M \in CI(X; Y)$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \quad (8)$$

для однородного нестационарного уравнения вида

$$L\dot{x} = aMx, \quad (9)$$

где функция $a : R \rightarrow R_+$ подлежит дальнейшему определению.

Определение 5. Вектор-функция $x \in C^1(R; X)$ называется (классическим) решением (9), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (9) делает его верным тождеством. Решение $x = x(t)$ уравнения (9) будем называть решением задачи Коши (8) для уравнения (9) (коротко, задачи (8), (9)), если оно удовлетворяет условию Коши (3) при некотором $x_0 \in X$.

Замкнутое множество $\mathcal{D} \subset X$ назовем фазовым пространством уравнения (9), если

- (i) любое решение $x = x(t)$ лежит в \mathcal{D} поточечно (т.е. $x(t) \in \mathcal{D}$ при всех $t \in R$),
- (ii) при любом $x_0 \in \mathcal{D}$ существует единственное решение задачи Коши (8), (9).

Вместе с уравнением (9) будем рассматривать эквивалентное ему при $v \in \rho^L(M)$ уравнение

$$L(vL - M)^{-1} \dot{y} = aM(vL - M)^{-1} y. \quad (10)$$

Теорема 5. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C(R; R_+)$. Тогда фазовым пространством уравнения (9) ((10)) является множество $X^1(Y^1)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 уравнение (9) эквивалентно системе

$$H\dot{x}^0 = ax^0, \quad \dot{x}^1 = Sx^1.$$

Выразим x^0 из первого уравнения этой системы и получим $x^0 = \frac{1}{a} H\dot{x}^0$. Продифференцируем это выражение и применим оператор $\frac{1}{a} H$, в силу уравнения получим

$$\frac{1}{a} H\dot{x}^0 = \frac{1}{a} H \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} H\dot{x}^0 \right) = H^2 \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \dot{x}^0 \right) = \dot{x}^0$$

и так далее. На шаге с номером p получим $\frac{1}{a} H\dot{x}^0 = H^{p+1} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \right)^p \left(\frac{1}{a} \dot{x}^0 \right) = \dot{x}^0$.

Откуда в силу нильпотентности оператора H , получим, что $\dot{x}^0 = 0$.

Перейдем к рассмотрению второго уравнения системы. В силу [21] решение этого уравнения имеет вид $x^1(t) = \exp \left(S \int_{t_0}^t a(\zeta) d\zeta \right) x_0$, где $S = L_1^{-1} M_1 \in L(X^1)$. Откуда при $x_0 \in X^1$, в силу замечания 4, решение имеет вид $x(t) = X(t, t_0)x_0$. Теорема доказана.

Определение 7. Поток операторов $X(\cdot, \cdot) : R \times R \rightarrow L(X)$ называется потоком разрешающих операторов (или просто разрешающим потоком) уравнения (9), если для любого $x_0 \in X$ вектор-функция $x(t) = X(t, t_0)x_0$ является решением уравнения (9) в смысле определения 5.

Перейдем к рассмотрению задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(x(t_0) - x_0) = 0 \quad (11)$$

для неоднородного уравнения

$$L\dot{x} = aMx + g \quad (12)$$

с функцией $g : [t_0, T) \rightarrow Y$. В дальнейшем будем использовать обозначение $g^0 = (I_Y - Q)g$.

Определение 8. Вектор-функция $x \in C^1([t_0, T); X)$ называется (классическим) решением (12), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (12) делает его верным тождеством при некоторой вектор-функции $g : [t_0, T) \rightarrow Y$. Решение $x = x(t)$ уравнения (12) будем называть решением задачи Шоултера–Сидорова (11) для уравнения (12) (коротко, задачи (11), (12)), если оно удовлетворяет условию (11) при некотором $x_0 \in X$.

Теорема 6. Пусть оператор M (L, p) -ограничен ($p \in N_0$) и функция $a \in C^{p+1}([t_0, T); \mathbb{R}_+)$. Тогда для любой вектор-функции $g : [t_0, T) \rightarrow Y$ такой, что $Qg \in C^1([t_0, T); Y^1)$ и $g^0 \in C^{p+1}([t_0, T); Y^0)$, и для любого начального значения $x_0 \in X$ существует единственное решение $x \in C^1([t_0, T); X)$ задачи Шоултера–Сидорова (11), (12), которое имеет вид

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}Qg(s)ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t)}{a(t)}. \quad (13)$$

Если дополнительно выполнено условие согласования

$$(I_X - P)x_0 = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t_0)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t_0)}{a(t_0)},$$

то функция (13) является единственным решением задачи Коши (9) для уравнения (12).

Доказательство. В силу теоремы 1 задача (11), (12) эквивалентна системе задач

$$\dot{x}^1 = aL_1^{-1}M_1x^1 + L_1^{-1}Qg, \quad x^1(t_0) = Px_0, \quad (14)$$

$$H\dot{x}^0 = ax^1 + M_0^{-1}g^0, \quad x^0(t_0) - \text{любое} \quad (15)$$

на подпространствах X^1 и X^0 соответственно.

Уравнение в задаче (14) не является вырожденным, а, следовательно, решение задачи (14), в силу результатов [21], имеет вид $x^1(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}Qg(s)ds$.

Перейдем к задаче (15). Выразим x^0 из уравнения задачи (15) и получим

$$x^0 = \frac{1}{a} Hx^0 - M_0^{-1} \frac{g^0}{a}.$$

Продифференцируем это выражение, и применим оператор $\frac{1}{a}H$, в силу уравнения получим

$$\dot{x}^0(t) + M_0^{-1} \frac{g^0(t)}{a(t)} = H^2 \frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^0(t)}{a(t)} \right) - HM_0^{-1} \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{g^0(t)}{a(t)} \right).$$

Далее снова выразим x^0 , продифференцируем это выражение, применим оператор $\frac{1}{a}H$, и так далее. На шаге с номером p получим

$$\dot{x}^0(t) = H^{p+1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^p \left(\frac{\dot{x}^0(t)}{a(t)} \right) - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{g^0(t)}{a(t)} \right),$$

откуда в силу нильпотентности оператора H , получим часть решения на X^0 в виде:

$$x^0(t) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{g^0(t)}{a(t)} \right).$$

Откуда получаем вид (13) для решения задачи Шоултера–Сидорова (11), (12).

Ясно, что если в начальный момент времени выполнено равенство

$$x^0(t_0) = (I_X - P)x_0 = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t_0)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t_0)}{a(t_0)},$$

то есть выполнено условие согласования, то функция (13) будет являться единственным решением задачи Коши (9) для уравнения (12). Теорема доказана.

Заключение. В дальнейшем планируется применить все полученные результаты для исследования задачи оптимального измерения в нестационарном случае. Такое измерение модели оптимального измерения позволяет учитывать, например, снижение чувствительности измерительного устройства [20].

Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.
2. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.
3. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
4. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
5. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
6. Матвеева, О.П. Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.
7. Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – 121 с.
8. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоултера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.
9. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.
10. Грановский, В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.
11. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск, 2013. – 257 с.
12. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16(192). – С. 116–120.
13. Shestakov, A.L. Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–15.
14. Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.
15. Замышляева, А.А. О некоторых свойствах решений одного класса эволюционных математических моделей соболевского типа в квазисоболевых пространствах / А.А. Замышляева, Дж. К.Т. Аль-Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 113–119.
16. Сагадеева, М.А. Ограниченные решения модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 138–144.
17. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоултера–Сидорова и аддитивными «шумами» / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова. – Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.
18. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196.

19. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.

20. Shestakov, A. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measure Transducer Degradation / A. Shestakov, G. Sviridyuk, M. Sagadeeva // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, no. 41-44. – P. 2125–2130.

21. Афанасьев, С.Н. Начальные и граничные задачи для сингулярных абстрактных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.Н. Афанасьев. – Воронеж, 2004. – 105 с.

Поступила в редакцию 20 мая 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 22–30

DOI: 10.14529/mmp170103

DEGENERATE FLOWS OF SOLVING OPERATORS FOR NONSTATIONARY SOBOLEV TYPE EQUATIONS

M.A. Sagadeeva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Research of stationary Sobolev type equations were the basis for the study of a variety of different problems, such as optimal control problem, Leontief type system, the optimal measurement problems, etc. Nonstationary Sobolev type equations have been studied only in fragments. In this article the methods required to find solutions to such equations are substantiated. Namely, we investigate degenerate flows of solving operators with which shows the solvability of initial value problems for nonstationary equations of Sobolev type.

Keywords: relatively bounded operator; degenerate groups of operators; Cauchy problem; Showalter–Sidorov problem.

References

1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

2. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003, 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433

3. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6

4. Zamyshlyayeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012, 88 p. (in Russ.).

5. Manakova N.A. *Problems of Optimal Control for the Semilinear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012, 107 p. (in Russ.).

6. Matveeva O.P., Sukacheva T.G. *Mathematical Models of the Non-zero Order Viscoelastic Incompressible Fluids*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2014, 101 p. (in Russ.).

7. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. *Stable and Unstable Manifolds of Solutions to Nonlinear Sobolev Type Equations*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2016, 121 p. (in Russ.).

8. Keller A.V. Numerical Solutions of the Optimal Control Theory for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27, pp. 50–56. (in Russ.).

9. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk* (Numerical Investigation of the Optimal Control Problem for Leontief Type Models. Dr. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2011, 237 p.

10. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya* (Dynamic measurements. Fundamentals of metrology provision). Leningrad, 1984, 257 p. (in Russ.).
11. Shestakov A.L. *Methods of the automat control theory to dynamical measurements*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013, 127 p. (in Russ.).
12. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16, pp. 116–120. (in Russ.).
13. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 3–15.
14. Keller A.V., Al-Delfi J.K. Holomorphic Degenerate Groups of Operators in Quasi-Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics*, 2015, Vol. 7, no. 1, pp. 20–27. (in Russ.).
15. Zamyshlyayeva A.A., Al-Isawi J.K.T. On Some Properties of Solutions to One Class of Evolution Sobolev Type Mathematical Models in Quasi-Sobolev Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 113–119. DOI: 10.14529/mmp150410
16. Sagadeeva M.A., Hasan F.L. Bounded Solutions of Barenblatt–Zheltoy–Kochina Model in Quasi-Sobolev Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 138–144. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150414
17. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140108
18. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise". *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI:10.3934/cpaa.2016.15.185
19. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase Spaces of a Class of Operator Semilinear Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, Vol. 26, no. 2, pp. 188–195.
20. Shestakov A., Sviridyuk G., Sagadeeva M. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measure Transducer Degradation. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, Vol. 8, no. 41-44, pp. 2125–2130. DOI: 10.12988/ams.2014.312718
21. Afanasiev S.N. *Nachal'nye i granichnye zadachi dlya singulyarnykh abstraknykh differentsial'nykh uravneniy: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* (The Initial and Boundary Value Problems for the Singular Abstract Differential Equations. Cand. phys. and math. sci. diss.). Voronezh, 2004, 105 p.

Received May 20, 2016

МЕТОД ПОДБОРА НАИЛУЧШЕГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА ОСНОВЕ ОБРАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А.Н. Тырсин

Научно-инженерный центр «Надежность и ресурс больших систем и машин» УрО РАН,
г. Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: at2001@yandex.ru

Описан новый метод выбора закона распределения непрерывной случайной величины из заданного множества моделей распределений. Идея метода состоит в непрерывном отображении эмпирического выборочного распределения на эталонную прямую. Для каждого модельного распределения определяют значение функционала, равного среднеквадратической величине ошибок при отображении на эталонную прямую. В результате в качестве наиболее вероятного закона для исходной выборки выбирают тот, для которого соответствующее значение функционала будет минимальным. Приведены примеры реализации метода с помощью статистических испытаний на основе метода Монте-Карло.

Ключевые слова: случайная величина; закон распределения; идентификация; случайная выборка; статистические испытания методом Монте-Карло; критерий согласия.

Введение

Как известно [1, с. 525], задача математической статистики состоит в том, чтобы на основе анализа выборки сделать научно обоснованное заключение о распределении генеральной совокупности. Очевидно, что установить истинный вид распределения по конечной выборке нельзя, поскольку между конечной выборкой и бесконечным количеством законов распределения невозможно построить однозначное соответствие. Поэтому на практике упрощают постановку задачи, и на основании выборки экспериментальных данных и теоретических соображений подбирают вероятностную модель, которая в некотором смысле наилучшим образом приближает этот истинный закон [2].

Классический подход к структурно-параметрической идентификации закона распределения базируется на аппарате математической статистики [3–6]. Он состоит в последовательной реализации следующей двухэтапной процедуры для каждого вида параметрической модели из рассматриваемого множества законов:

- 1) построение по выборке данных из рассматриваемого множества моделей модели закона определенного вида и оценивание параметров этой модели;
- 2) оценивание на основе критериев согласия степени адекватности полученной модели экспериментальным наблюдениям.

Однако здесь возникает проблема неопределенности результата, поскольку обычно множество распределений будут не противоречить нулевой гипотезе. Формальной процедуры выбора из множества непротиворечивых законов распределения, в большей степени соответствующего выборке данных, нет. Кроме того, критерии согласия имеют разную мощность по отношению к различным альтернативам. Это означает, что у любого из них существуют наиболее близкие альтернативы, для которых он может оказаться несостоятельным, т.е. мощность окажется слишком малой [7].

Другое направление исследований состоит в разработке методов восстановления неизвестной функции плотности, рассчитанных на конкретную ситуацию [8–11]. Однако их эффективное применение требует достаточно большой выборки данных или наличия априорной информации о форме распределения на малых выборках, что не всегда возможно. Можно также отметить на неудобство интерпретации полученной оценки распределения.

Известен так называемый топологический подход [2], основанный на идентификации вид закона распределения на основании вектора значений оценок некоторых числовых характеристик

(например, коэффициенты асимметрии и эксцесса [12], энтропийный коэффициент и контрэксцесс [13] и др.), вычисляемых по выборочным данным. Однако как отмечено в [2], данный подход имеет ряд существенных недостатков:

- низкая точность оценок центральных моментов высоких порядков;
- неустойчивость выборочных оценок таких числовых характеристик к незначительным отклонениям выборочных данных от предполагаемого закона, включая наличие выбросов;
- чувствительность оценок к выбираемой длине интервала при группировании данных.

Можно также отметить недостаточное теоретическое обоснование топологического подхода, так как не исследован вопрос наличия различных распределений с близкими значениями рассматриваемых числовых характеристик. Поэтому, несмотря на простоту и привлекательность топологического подхода, указанные недостатки существенно снижают достоверность идентификации закона распределения.

Таким образом, представляется актуальным направлением разработка методов идентификации закона распределения генеральной совокупности по конечной выборке на основе выбора модели, достаточно адекватно ее описывающей. Это означает, что по экспериментальным данным из заданного множества различных законов распределений необходимо выбрать тот, который бы в наибольшей степени соответствовал измеренной случайной величине. В этом случае одна и та же выборка может принадлежать с различной вероятностью каждому из рассматриваемых законов распределения. В качестве искомого нужно выбрать наиболее вероятный закон распределения для данной выборки из конечного множества моделей. Удобство использования аналитического распределения и простота интерпретации результатов в случае достаточной близости эмпирического распределения к выбранной модели могут оказаться существенными преимуществами. Кроме того, результат может быть в дальнейшем улучшен на основе использования критериев согласия.

В [14] описан метод подбора наилучшего закона распределения случайной величины по экспериментальным данным, реализующий указанный выше подход. Однако достоверность выбора из множества моделей истинного теоретического распределения оказалась недостаточно высокой на малых выборках. Также не высока и скорость сходимости к единице вероятности выбора истинной модели. В качестве основного недостатка метода можно указать на неоднозначность определения выборочной функции распределения до непрерывной. Использование двойных интегралов при этом усиливает погрешность, снижая достоверность распознавания.

Таким образом, целью предлагаемой работы является разработка ориентированного на практическое применение метода, позволяющего для малых выборок с приемлемой точностью выбирать наиболее соответствующий экспериментальным данным вид закона распределения среди конечного множества заданных моделей.

Методика решения

Пусть имеется простая выборка (x_1, \dots, x_n) из генеральной совокупности ξ , имеющей некоторую неизвестную непрерывную функцию распределения $F_0(x)$. Также зададим конечное множество непрерывных законов распределения, описываемых с помощью плотностей $\{p_1(x), \dots, p_m(x)\}$ либо функций распределения $\{F_1(x), \dots, F_m(x)\}$. В это множество необходимо включить с точностью до значений параметров такие законы распределения, которые могут соответствовать исследуемой генеральной совокупности ξ . Необходимо определить среди них наиболее вероятный закон для данной выборки.

Пусть $F_0(x)$ – функция распределения произвольной непрерывной случайной величины ξ . Так как функция $F_0(x)$ является строго монотонно возрастающей, то она имеет обратную функцию. Зададим произвольную монотонно возрастающую на всей числовой оси функцию $F(x)$. Для функций $F(x)$, $F_0(x)$ введем отображение $G(F, F_0): F(x) \rightarrow f(x)$ как

$$\{F^{-1}[F_0(x)]\} = f(x), \quad (1)$$

где F^{-1} – функция, обратная к функции F .

Из свойств обратной функции следует, что если $F_0(x) = F(x)$, то согласно (1) $F_0(x) \xrightarrow{G(F_0, F_0)} x$. Т.е. в этом случае отображение (1) даст прямую линию $y = x$. Очевидно, что $\forall F(x)$ такой, что $F_0(x) \neq F(x)$ получим $\{F^{-1}[F_0(x)]\} = f(x) \neq x$. Поскольку обратное преобразование является непрерывным, то в результате удастся установить отношение порядка на любом конечном множестве модельных функций распределения $W = \{F_1(x), \dots, F_m(x)\}$. В идеале если одна из функций множества W совпадет с функцией $F_0(x)$, то отображение (1) полностью совпадет с линейной функцией $y = x$. В противном случае получим множество функций $\{F_k^{-1}[F_0(x)]\} = f_k(x) \neq x, k = 1, 2, \dots, m$.

Упорядочим выборку (x_1, \dots, x_n) , т.е. составим вариационный ряд $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Для вариационного ряда $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ вместо функции распределения $F_0(x)$ получим функцию $\hat{F}_n(x)$, которая в точках $x_{(i)}$ будет равна

$$\hat{F}_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

Отметим, что на практике измеренные значения экспериментальных данных обычно округляют с заданной точностью, при этом некоторые варианты могут совпасть. Поэтому если $x_{(j-1)} = x_{(j-1+1)} = \dots = x_{(j)}$, то считаем $\hat{F}_n(x_{j-1}) = \hat{F}_n(x_{j-1+1}) = \dots = \hat{F}_n(x_j) = \frac{j}{n}$.

Далее значениям (2) с помощью (1) ставим в соответствие некоторые значения

$$\{F_k^{-1}[\hat{F}_n(x_{(i)})]\} = \hat{x}_i^{(k)}, \quad (3)$$

где $\hat{x}_i^{(k)}$ – решение уравнения $F_k(x) = x_{(i)}$; $e_i^{(k)} = \hat{x}_i^{(k)} - x_{(i)}$ – отклонения (невязки) полученных оценок $\hat{x}_i^{(k)}$ относительно вариант $x_{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Отметим, что согласно (3) не требуется доопределять выборочную функцию распределения $\hat{F}_n(x)$ между точками $x_{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, n$. Это значительно упрощает реализацию метода и устраняет проблему неоднозначности доопределения выборочной функции распределения $\hat{F}_n(x)$ между вариантами вариационного ряда.

Преобразование (3) независимо от функциональной формы модельных распределений из множества W отображает выборочную функцию распределения $\hat{F}_n(x)$ на одну и ту же прямую $y = x$. Чем более адекватна модель $F_k(x)$ эмпирическому распределению $\hat{F}_n(x)$, а значит по вероятности и распределению $F_0(x)$ генеральной совокупности ξ , тем ближе будут расположены точки $\hat{x}_i^{(k)}$ к значениям $x_{(i)}$. Поскольку в (3) при вычислении оценок $\hat{x}_i^{(k)}$ не оценивались параметры моделей распределений $F_k(x)$ то данная процедура является непараметрической. С учетом этого и того, что для однотипных линейных моделей критерием точности является среднее значение квадратов ошибок [15], используем в качестве критерия эффективности величину

$$d_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i^{(k)})^2. \quad (4)$$

Согласно этому критерию в качестве наиболее достоверной модели для исходной выборки выбираем модельное распределение $F_k(x)$, которое обеспечит минимум среднеквадратической величины ошибок (4).

Отметим, что для данного метода достаточно легко обеспечить свойство робастности относительно возможного присутствия в выборке выбросов [16]. Для этого нужно выполнить цензурирование, т.е. исключить из рассмотрения несколько крайних вариант вариационного ряда.

Экспериментальная часть

Проведем с помощью метода статистических испытаний Монте-Карло [17] несколько экспериментов для исследования эффективности предложенного метода.

Каждый эксперимент выполним по стандартной схеме. Для $L = 1000$ независимых случайных выборок из генеральной совокупности с распределением $F_0(x)$ объемом n будем выбирать наиболее вероятный закон из некоторого набора законов распределения $\{F_1(x), \dots, F_m(x)\}$, содержащего закон $F_0(x)$, с помощью описанного метода. У всех распределений зададим те же математические ожидания и дисперсии, что и у распределения $F_0(x)$, а именно, математическое ожидание равно 0, а дисперсия равна 1. Для каждого закона распределения $F_k(x)$ определим процент случаев, когда он был выбран наиболее вероятным.

Пример 1. Рассмотрим экспоненциальное семейство распределений [18] с плотностью

$$f(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\theta_1\Gamma(1/\lambda)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\sqrt{2}\theta_1}\right)^\lambda\right\}, \quad (5)$$

где θ_0 – параметр сдвига, равный математическому ожиданию; θ_1 – параметр масштаба; λ – параметр формы. Частными случаями данного закона являются распределение Лапласа (при $\lambda = 1$), нормальное ($\lambda = 2$), предельными – распределение Коши ($\lambda \rightarrow 0$) и равномерное ($\lambda \rightarrow \infty$). Параметр масштаба задает дисперсию распределения. В частности, в табл. 1 для нескольких распределений из семейства (5) приведены значения параметра масштаба, соответствующие единичной дисперсии.

Таблица 1
Значения параметров формы и масштаба для некоторых распределений, имеющих единичную дисперсию

λ	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
θ_1	0,06454	0,27279	0,5	0,82284	1	1,09906	1,15735	1,19329	1,21628

Случай 1. Пусть генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения ($\lambda = 2$) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Результаты эксперимента приведены в табл. 2.

Таблица 2
Результаты эксперимента для пяти законов распределения с разными параметрами формы λ , генеральная совокупность имеет нормальное распределение

λ	Объем выборки n			
	100	200	400	800
1	0,5 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
1.5	22,4 %	17,2 %	7,6 %	1,8 %
2	48,3 %	61,0 %	77,0 %	92,1 %
2.5	19,3 %	17,9 %	15,1 %	6,1 %
3	9,5 %	3,9 %	0,3 %	0,0 %

Видим, что предложенный метод позволяет определить наиболее вероятный закон. Нормальное распределение наиболее часто оказывался самым вероятным законом. Достоверность выбора истинного распределения растет с увеличением объема выборки. Отметим, что предложенный метод обеспечил значительно более высокую достоверность распознавания по сравнению с известным методом из [14], там частота правильного выбора нормального распределения была равна: 41,5 % (при $n = 100$); 53,5 % (при $n = 200$); 69,1 % (при $n = 400$); 84,3 % (при $n = 800$).

Случай 2. Пусть генеральная совокупность имеет закон распределения Лапласа ($\lambda = 1$) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Результаты эксперимента приведены в табл. 3. Видим, что результаты оказались лучше, чем для случая 1.

Пример 2. Исследуем теперь достоверность правильного выбора распределения среди двух законов – нормального распределения и распределения Симпсона с одинаковыми нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Критерий согласия χ^2 -Пирсона начинает достаточно устойчиво их различать, начиная от объема выборки $n = 1000$. Результаты эксперимента приведены в табл. 4, 5. В первом случае (табл. 4) генеральная совокупность имела нормальное распределение, во втором (табл. 5) – распределение Симпсона. Результаты моделирования свидетельствуют о высокой достоверности идентификации истинного закона распределения.

Таблица 3

Результаты эксперимента для пяти законов распределения с разными параметрами формы λ , генеральная совокупность имеет распределение Лапласа

λ	Объем выборки n			
	100	200	400	800
0,75	19,4 %	16,3 %	8,9 %	2,3 %
1	59,7 %	71,8 %	87,1 %	97,0 %
1,5	19,9 %	11,9 %	4,0 %	0,7 %
2	0,8 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
2,5	0,2 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %

Таблица 4

Результаты эксперимента для двух законов распределения, генеральная совокупность имеет нормальное распределение

Распределение	Объем выборки n			
	100	200	400	800
Нормальное распределение	80,8 %	90,3 %	95,9 %	99,7 %
Распределение Симпсона	19,2 %	9,7 %	4,1 %	0,3 %

Таблица 5

Результаты эксперимента для двух законов распределения, генеральная совокупность имеет распределение Симпсона

Распределение	Объем выборки n			
	100	200	400	800
Нормальное распределение	16,9 %	5,8 %	0,9 %	0,0 %
Распределение Симпсона	83,1 %	94,2 %	99,1 %	100,0 %

Таблица 6

Среднеквадратические значения и 95 %-е доверительные интервалы для оценок dk , генеральная совокупность имеет нормальное распределение

Объем выборки n	Нормальное распределение		Распределение Симпсона	
	Среднее значение ошибок \bar{d}_1	95 %-й доверительный интервал ошибок	Среднее значение ошибок \bar{d}_2	95 %-й доверительный интервал ошибок
100	0,00458	(0,00355; 0,00598)	0,00589	(0,00407; 0,00697)
200	0,00294	(0,00206; 0,00404)	0,00454	(0,00257; 0,00565)
400	0,00209	(0,00117; 0,00285)	0,00496	(0,00224; 0,00702)
800	0,00121	(0,00075; 0,00248)	0,00681	(0,00326; 0,00974)

Для иллюстрации достоверности идентификации для первого случая (фактическим распределением генеральной совокупности является нормальный закон) в табл. 6 приведены значения оценок математического ожидания \bar{d}_k среднеквадратического значения ошибок и его 95 %-го доверительного интервала. Из табл. 6 видно, что величина среднеквадратических ошибок \bar{d}_1 для нормального распределения и ее доверительный интервал (оно в данном случае являлось фактическим распределением генеральной совокупности ξ) с ростом объема выборки n монотонно уменьшаются, что свидетельствует о сходимости оценок к нулю. А величина среднеквадратических ошибок \bar{d}_2 для распределения Симпсона и ее доверительный интервал с ростом объема выборки n не уменьшаются, а наоборот, начиная с $n = 400$, начинают расти. Это говорит о том, что

они не сходятся к нулю и предлагаемый метод работает корректно. Отметим, что аналогичные результаты относительно сходимости оценок среднеквадратических ошибок \bar{d}_k наблюдались во всех экспериментах.

Аналогичные результаты были получены и для других испытаний. В частности, метод оказался устойчивым относительно ошибок при задании параметров распределений. Метод, как правило, выбирал из нескольких однотипных моделей распределения ту, у которой параметры были ближе к истинным величинам генеральной совокупности.

Выводы

1. Предложен новый метод идентификации закона распределения непрерывной случайной величины по малым выборкам экспериментальных данных. Он позволяет из заданного конечного множества выбрать наиболее вероятный непрерывный закон распределения. Суть метода состоит в отображении выборочной функции распределения на эталонную прямую $y = x$.

2. Достоинствами предложенного метода идентификации закона распределения являются:

– метод является непараметрическим, так как не требует оценивания параметров моделей распределений, что без знания типа распределения может привести к снижению достоверности выбора распределения;

– не требуется доопределять выборочную функцию распределения до непрерывной;

– метод обладает свойством робастности по отношению к присутствию выбросов в выборочной совокупности.

3. Проведенное исследование предложенного метода на основе статистических испытаний показало его работоспособность.

Литература

1. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – 2-е изд., перераб. и дополн. / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

2. Лемешко, Б.Ю. О задаче идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений / Б.Ю. Лемешко // Метрология. – 2004. – № 7. – С. 8–17.

3. Кендалл, М. Статистические выводы и связи: Пер. с англ. / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука. Физматлит, 1973. – 899 с.

4. Крамер, Г. Математические методы статистики: Пер. с англ. – 2-е изд. / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

5. Леман, Э. Проверка статистических гипотез: Пер. с англ. – 2-е изд., испр. / Э. Леман. – М.: Наука. Физматлит, 1979. – 408 с.

6. Уилкс, С. Математическая статистика: Пер. с англ. / С. Уилкс. – М.: Наука. Физматлит, 1967. – 632 с.

7. Ивченко, Г.И. Введение в математическую статистику / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: ЛКИ, 2010. – 600 с.

8. Тарасенко, Ф.П. Непараметрическая статистика / Ф.П. Тарасенко. – Томск: Изд-во ТГУ, 1976. – 294 с.

9. Катковник, В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных / В.Я. Катковник. – М.: Наука, Физматлит, 1985. – 336 с.

10. Деврой, Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 -подход: Пер. с англ. / Л. Деврой, Л. Дьерфи. – М.: Мир, 1988. – 408 с.

11. Карандеев, Д.А. Проблема оценивания плотности вероятности по эмпирическим данным / Д.А. Карандеев, И.М. Эйсымонт // Управление большими системами. – 1998. – Вып. 1. – С. 48–57.

12. Яшин, А.В. Выбор метода решения задачи идентификации законов распределения случайных погрешностей средств измерений / А.В. Яшин, М.А. Лотонов // Измерительная техника. – 2003. – № 3. – С. 3–5.

13. Новицкий, П.В. Основы информационной теории измерительных устройств / П.В. Новицкий. – Л.: Энергия, 1968. – 248 с.

14. Клявин, И.А. Метод подбора наилучшего закона распределения случайной величины по экспериментальным данным / И.А. Клявин, А.Н. Тырсин // Автометрия. – 2013. – Т. 49, № 1. – С. 18–25.

15. Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс. – 6-е изд., перераб. и доп. / Я.Р. Магнус, П.К. Катыхов, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2004. – 576 с.

16. Панюков, А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков, А.Н. Тырсин // Известия Челябинского научного центра. – 2007. – Вып. 1(35). – С. 6–11.

17. Ермаков, С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы / С.М. Ермаков. – М.: Наука, 1975. – 472 с.

18. Лемешко, Б.Ю. Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности / Б.Ю. Лемешко, С.С. Помадин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 115–130.

Поступила в редакцию 18 сентября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 31–38*

DOI: 10.14529/mmph170104

THE METHOD OF SELECTING THE BEST DISTRIBUTION LAW FOR CONTINUOUS RANDOM VARIABLES ON THE BASIS OF INVERSE MAPPING

A.N. Tyrsin

*Science and Engineering Center «Reliability and Resource of Large Systems and Machines», Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: at2001@yandex.ru*

The article describes a new method of identification of the law of distribution of a continuous random variable. The method is based on the selection from a given set of models of the distributions of such law distribution, which would be most consistent with the experimental data sample. The idea of the method is a continuous mapping of an empirical sampling distribution into the standard line. For each distribution model the functional value is determined. It is equal to the RMS error value is displayed into standard line. As a result, as the most probable law for initial sampling researchers select the law for which the corresponding value of the functional will be minimum. The examples of the method implementation using statistical tests based on a Monte-Carlo technique are given.

Keywords: random variable; distribution law; identification; random sampling; statistical tests based on a Monte-Carlo method; test for concordance.

References

1. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike (Handbook of Probability Theory and Mathematical Statistics), Moscow, Nauka Publ., 1985, 640 p. (in Russ.).

2. Lemeshko B. Yu. *Metrologiya*, 2004, no. 7, pp. 8–17. (in Russ.).

3. Kendall M., Stuart A. *Statisticheskie vyvody i svyazi* (Statistical inference and communication), Moscow, Nauka Publ., 1973, 899 p. (In Russ.).

4. Cramer H. *Matematicheskie metody statistiki* (Mathematical Methods of Statistics), Moscow, Mir Publ., 1975, 648 p. (in Russ.).

5. Lehmann E. *Proverka statisticheskikh gipotez* (Testing of Statistical Hypotheses), Moscow, Nauka Publ., 1979, 408 p. (in Russ.).

6. Wilks S. *Matematicheskaya statistika* (Mathematical Statistics), Moscow, Nauka Publ., 1967, 632 p. (in Russ.).

7. Ivchenko G.I., Medvedev Yu.I. *Vvedenie v matematicheskuyu statistiku* (Introduction to Mathematical Statistics), Moscow, LKI Publ., 2010, 600 p. (in Russ.).
8. Tarasenko F.P. *Neparametricheskaya statistika* (Nonparametric statistics). Tomsk, Izd-vo TGU Publ., 1976, 294 p. (in Russ.).
9. Katkovnik V.Ya. *Neparametricheskaya identifikatsiya i sglazhivanie dannykh* (Non-parametric identification and data smoothing), Moscow, Nauka Publ., 1985, 336 p. (in Russ.).
10. Devroy L., D'erfi L. *Neparametricheskoe otsenivanie plotnosti. L1-podkhod* (Nonparametric density estimation (The L_1 -approach)). Moscow, Mir Publ., 1988, 408 p. (in Russ.).
11. Karandeev D.A., Eysymont I.M. *Upravlenie bol'shimi sistemami*, 1998, Issue 1, pp. 48–57. (in Russ.).
12. Yashin A.V., Lotonov M.A. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2003, no. 3, pp. 3–5. (in Russ.).
13. Novitskiy P.V. *Osnovy informatsionnoy teorii izmeritel'nykh ustroystv* (Fundamentals of information theory of measurement devices). Leningrad, Energiya Publ., 1968, 248 p. (in Russ.).
14. Klyavin I.A., Tyrsin A.N. *Avtometriya*, 2013, Vol. 49, no. 1, pp. 18–25. (in Russ.).
15. Magnus Ya.R., Katyshev P.K., Peresetskiy A.A. *Ekonometrika. Nachal'nyy kurs* (Econometrics. Initial course), Moscow, Delo Publ., 2004, 576 p. (in Russ.).
16. Panyukov A.V., Tyrsin A.N. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*, 2007, no. 1(35), pp. 6–11. (in Russ.).
17. Ermakov S.M. *Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy* (The Monte Carlo method and related questions), Moscow, Nauka Publ., 1975, 472 p. (in Russ.).
18. Lemeshko B.Yu., Pomadin S.S. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2002, Vol. 5, no. 3, pp. 115–130. (in Russ.).

Received September 18, 2016

СИЛЬНАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПО ИНТЕРВАЛЬНЫМ ДАННЫМ

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

E-mail: shary@ict.nsc.ru

Для задачи восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью вводится понятие сильной согласованности данных и параметров. Дается его содержательная интерпретация. Показывается, что получающаяся усиленная формулировка задачи сводится к исследованию непустоты и дальнейшему оцениванию так называемого допускового множества решений для интервальной системы уравнений, построенной по обрабатываемым данным.

Ключевые слова: задача восстановления зависимостей; согласование параметров и данных; сильное согласование; интервальная система уравнений; допусковое множество решений.

Задача восстановления зависимостей – это популярная и практически важная задача, в которой по эмпирическим данным требуется построить зависимость заданного вида между «входными» и «выходными» величинами. Далее в работе мы рассматриваем простейшую зависимость вида

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad (1)$$

в которой значения b являются линейной функцией от независимых переменных a_1, a_2, \dots, a_n . Необходимо определить неизвестные коэффициенты x_i , чтобы получившаяся зависимость «наилучшим образом» соответствовала заданному набору значений a_i и b , полученному в результате m измерений (наблюдений)

$$\begin{aligned} & a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, b^{(1)}, \\ & a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, b^{(2)}, \\ & \dots \\ & a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}, b^{(m)} \end{aligned} \quad (2)$$

(верхние индексы в скобках означают номер измерения). Нередко эту постановку называют также задачей оценивания параметров объекта или задачей идентификации.

Подставляя данные (2) в равенство (1), после переобозначения $a_{ij} := a_j^{(i)}$ и $b_i := b^{(i)}$ получаем систему уравнений относительно x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с $m \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$ и m -вектором $b = (b_i)$. Её решение, обычное или в обобщённом смысле, принимается за оценку параметров x_1, x_2, \dots, x_n . Наглядная графическая иллюстрация задачи восстановления зависимости показана на рис. 1: требуется найти прямую, проходящую через начало координат, которая «наилучшим образом» приближает множество точек с координатами (2).

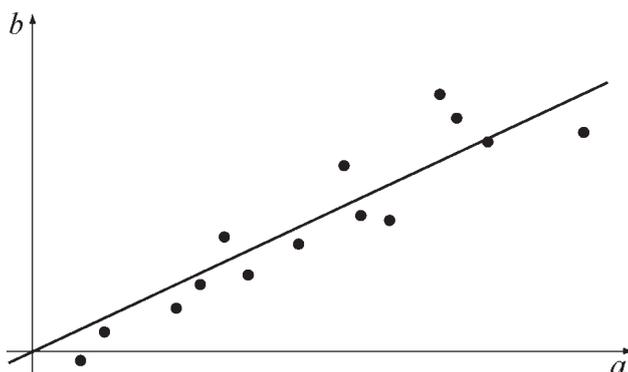


Рис. 1. Иллюстрация задачи восстановления линейной зависимости: точки – это данные измерений, по которым необходимо построить функцию заданного вида, «наиболее точно» приближающую их

Но в практических задачах восстановления зависимостей данные почти всегда неточны, поскольку на результаты измерений влияют внешние неконтролируемые факторы, сами измерительные приборы не являются абсолютно точными т. д. и т. п. Таким образом, реально мы должны иметь дело с той или иной *неопределённостью* – состоянием частичного знания об измеряемой величине, когда нам известно какое-то её значение, но оно приближённое, и имеется также некоторая информация (качественная и количественная) о погрешности этого значения.

Как описывать эти погрешности? Иными словами, какую «модель неопределённости» данных мы принимаем? Традиционный выбор – это теоретико-вероятностная модель ошибок, основы которой заложили на рубеже XVIII и XIX веков К.Ф. Гаусс и П.С. Лаплас. Согласно этому подходу ошибки измерений и наблюдений являются случайными величинами, адекватно описываемыми математическим аппаратом теории вероятностей, и нам (более-менее) известны характеристики этих случайных величин. Теоретико-вероятностная модель ошибок за прошедшие два века получила очень большое развитие и популярность, сделавшись основным инструментом обработки данных. Тем не менее, её приложение вызывает необходимость ответа на многие нетривиальные вопросы, и эти ответы подчас не вполне удовлетворительны.

Ниже мы конспективно перечислим некоторые из проблем, возникающих при применении теоретико-вероятностных методов в статистике. Наш короткий обзор естественно дополняет работы [1, 2], где есть подробное обсуждение проблем и трудностей теоретико-вероятностной статистики.

Статистическая устойчивость. Прежде всего, мы должны принимать во внимание тот факт, что в основе самого понятия вероятности лежит так называемая частотная интерпретация, при которой вероятность того или иного события понимается как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов рассматриваемого явления (эксперимента и т.п.), либо близкая к ней конструкция. Несмотря на то, что в современной теории вероятностей, построенной на аксиоматике А.Н. Колмогорова, математическая вероятность определяется как некоторая специальная мера на множестве событий, она формализует именно частотное понимание вероятности. Наконец, именно частотная интерпретация вероятности является основой всех приложений теории вероятностей к практике (см., к примеру, [3]). Существование подобной частоты, как объективной характеристики реальных явлений и процессов, является фундаментом самого существования теории вероятностей и залогом её успешного применения к моделированию окружающего нас мира.

Но важно осознавать, что эта модель не универсальна, она является определённой идеализацией, имеющей свою сферу применимости, весьма широкую, но всё-таки ограниченную. Многие явления окружающего нас мира, в отношении которых вполне применим общепринятый термин «случайные», не обладают свойством существования устойчивой частоты, так как при росте числа наблюдений эта относительная частота не устанавливается, а имеет тенденцию к постоянным колебаниям [4]. Для описания и анализа подобных явлений традиционная теория вероятностей непригодна.

Свойство существования относительной частоты событий называется *статистической устойчивостью* (статистической однородностью), и часто теорию вероятностей определяют как «математическую теорию статистически устойчивых явлений» (так делается, к примеру, в классической книге [5]).

Так или иначе, если нет статистической устойчивости, теоретико-вероятностные конструкции напрямую применять к решению задачи нельзя. В этом случае и традиционная математическая статистика, основанная на теории вероятностей, также не может служить подходящим инструментом для обработки данных.

Проблема малых выборок. Теоретико-вероятностные закономерности проявляются как тенденции, которые наиболее ярко видны для массовых явлений. При малом или небольшом количестве испытаний выводы теории вероятностей могут оказаться весьма далёкими от истинной картины явления. «Проблема малых выборок» — это вопрос о том, достаточен ли объём выборки (количество измерений и т. п.) для того, чтобы выводы, получаемые на основе теоретико-вероятностной модели ошибок, имели приемлемую практическую достоверность. Связанный с этим вопрос: какие методы следует применять для обработки выборок, являющихся «малыми», где теория вероятностей не способна адекватно описать поведение погрешностей?

Неизвестные вероятностные характеристики распределения. Каков конкретный вид распределения погрешностей? Каковы его числовые характеристики? Имеют ли данные корреляцию между собой? Или же они независимы? Многие классические результаты теоретико-вероятностной статистики требуют, как известно, независимости рассматриваемых случайных величин либо заданного уровня корреляции. Проверка этих условий на практике представляется почти невозможной.

«Робастность» модели обработки данных. Под этим требованием понимается адекватная устойчивость оценок, получаемых на основе тех или иных моделей, к малым возмущениям в данных, т. е. к вероятностным характеристикам распределений и их форме. Некоторые вероятностно-статистические методы не обладают этим свойством, давая ответы, чувствительность которых к возмущениям в данных неразумно велика.

Удобство вычислительных методов. Насколько удобны и практичны вычислительные технологии для решения соответствующих задач статистики? Некоторые традиционные методы теоретико-вероятностной статистики удовлетворяют этому условию. Например, широчайшее распространение метода наименьших квадратов в задачах обработки данных обусловлено, помимо ясного теоретико-вероятностного смысла, также его удобной вычислительной схемой: в линейном случае решение задачи наименьших квадратов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Но в более сложных ситуациях методы теоретико-вероятностной статистики технологической простотой уже не обладают (например, тот же самый метод наименьших квадратов в нелинейном случае). Это повышает «конкурентоспособность» альтернативных подходов к обработке данных.

В связи с поднятыми вопросами следует вспомнить многолетнюю дискуссию Ю.И. Алимова и В.Н. Тутубалина в 70–90-е годы XX века [6–9] по вопросам применимости и адекватности теоретико-вероятностных методов в статистике.

В целом, при неудовлетворённости теоретико-вероятностным описанием погрешностей часто удобнее работать с неопределённостями и неточностями в данных с помощью методов интервального анализа. При этом вместо вероятностных распределений заданными считаются интервальные оценки результатов измерений величин, т. е. их принадлежности некоторым интервалам. В частности, в рассматриваемой нами задаче оценивания параметров линейной зависимости мы считаем, что

$$a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij} = [\inf a_{ij}, \sup a_{ij}] \quad \text{и} \quad b_i \in \mathbf{b}_i = [\inf b_i, \sup b_i]$$

(через « \inf » и « \sup » здесь и далее обозначены нижний и верхний концы интервала).

Пионером нового подхода к обработке данных выступил Л.В. Канторович [10]. В дальнейшем в развитие теории восстановления зависимостей с интервальными неопределённостями в данных у нас в стране значительный вклад внесли М.Л. Лидов [11], С.И. Спивак [12, 13], А.П. Вошинин [1, 14], Н.М. Оскорбин [15], С.И. Жилин [16–18], Б.Т. Поляк [19] и другие исследователи. За рубежом первой публикацией по теме стала работа Ф. Швеппе [20]. Далее значительные результаты в новом направлении были получены в работах Дж.П. Нортонна,

М. Миланезе, Дж. Бельфорте, Л. Пронцато, Э. Вальтера и других (см. монографию [21] и коллективный обзор [22]). Этому же вопросу посвящены работы автора настоящей статьи [23–26], развивающие так называемый метод максимума согласования для восстановления линейных зависимостей по интервальным данным.

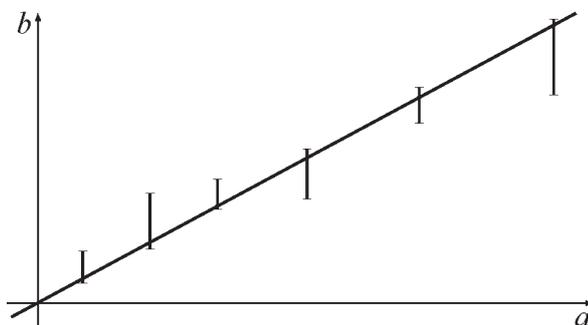


Рис. 2. Иллюстрация согласования параметров линейной модели и интервальных данных измерений, когда входные значения являются известными точно

Итак, нам необходимо найти или как-то оценить коэффициенты x_j , $j=1,2,\dots,m$, для которых линейная функция (1) «наилучшим образом» приближала бы интервальные данные. При этом идеальным является, конечно, случай, когда график восстанавливаемой зависимости проходит через все точки наблюдений, т. е. когда приближение данных в самом деле полное и имеет почти тот же смысл, что и в задаче интерполирования.

Отметим, что в постановке Л.В. Канторовича [10] и его последователей задача восстановления зависимостей по неточным данным имела не самый общий случай: неопределённости во входных данных предполагались отсутствующими, т. е. $a_{ij} = a_{ij}$. Тогда (см. рис. 2)

$$\inf b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sup b_i,$$

$i=1,2,\dots,m$. Согласование параметров и данных следует понимать как прохождение регрессионной прямой через все коридоры неопределённости выходных данных. Этот случай, тем не менее, практически очень важен и именно его тщательное решение способствовало широкому распространению новых подходов на практике. При этом с математической точки зрения получаем систему линейных неравенств, которую можно решать, к примеру, методами линейного программирования.

В общем случае, когда интервальную неопределённость имеют как входные, так и выходные данные, естественным представляется следующее

Определение 1. Будем говорить, что набор параметров x_1, x_2, \dots, x_n линейной зависимости (1) согласуется с интервальными экспериментальными данными $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i$, $i=1, 2, \dots, m$, если для каждого наблюдения i в пределах измеренных интервалов найдутся такие представители $a_{i1} \in a_{i1}, a_{i2} \in a_{i2}, \dots, a_{in} \in a_{in}$ и $b_i \in b_i$, что имеет место равенство

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

В соответствии с этим определением данные каждого замера входов и выхода представляют собой в пространстве \mathbb{R}^{n+1} как бы большие точки, «раздувшиеся» до брусков (прямоугольных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным осям), а прохождение графика конструируемой зависимости через такую точку понимается как её пересечение с этим бруском (см. рис. 3).

Если из интервальных данных задачи организовать $m \times n$ -матрицу $A = (a_{ij})$ и m -вектор $b = (b_i)$, то множество параметров, согласующихся с данными в смысле первого определения – это множество, определяемое как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{существуют такие } A \in A \text{ и } b \in b, \text{ что } Ax = b\}.$$

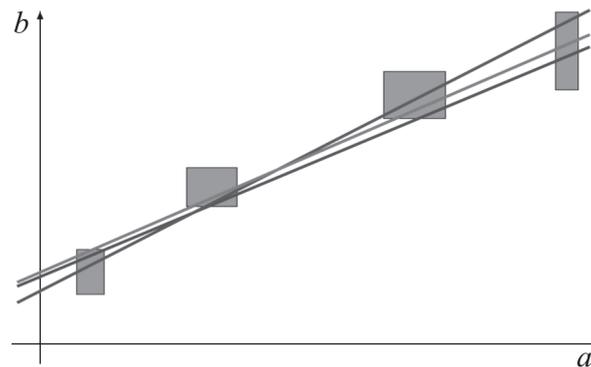


Рис. 3. Иллюстрация согласования параметров линейной модели и интервальных данных измерений

С помощью формального языка логики предикатов его можно переписать также в виде

$$\mathcal{E}_{uni}(A, \mathbf{b}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathcal{A})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(Ax = \mathbf{b}) \right\},$$

и в интервальном анализе это множество называется *объединённым множеством решений* интервальной линейной системы уравнений $Ax = \mathbf{b}$ (нижний индекс «uni» в обозначении множества – от английского термина *united solution set*).

Но раздувшаяся точка-брус приобретает уже дополнительную структуру, которой не было у исходных бесконечно малых точек. Как следствие, в условиях неточности данных, когда каждое измерение-наблюдение вместо точки представляет собой целое множество возможных значений рассматриваемой величины, само понятие «прохождения через точки наблюдений» должно быть переосмыслено. Дело в том, что теперь наличие у множеств неопределённости наблюдений «тонкой структуры» вызывает необходимость различать те или иные случаи прохождения графика конструируемой функции через эти множества.

Прежде всего, нужно различать входные переменные и выходные. Входы и выходы системы (соответствующие независимым переменным функции и её значениям) отличаются друг от друга по целевому назначению, а их измерения могут выполняться отличным друг от друга способом или даже в разное время. Как следствие, различные грани бруса неопределённости замера имеют разный смысл (на рис. 3 это вертикальные и горизонтальные стороны прямоугольников), а задача восстановления зависимостей по неточным данным приобретает иной контекст. Становится важным, как именно график восстанавливаемой зависимости проходит через брус неопределённости. Если процесс измерения значений входа и выхода разорван во времени и разделён на этапы, когда выходы измеряются *после* фиксации значений входов, то более адекватно другое понимание «согласования» параметров и данных, при котором ограничение на выходе должно выполняться *равномерно* при любых значениях входов. Иными словами, действительное значение b_i на выходе принадлежит \mathbf{b}_i вне зависимости от того, каковы входные значения $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ в пределах соответствующих интервалов $\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}$.

Формально эта ситуация описывается другим определением:

Определение 2. Будем говорить, что набор параметров x_1, x_2, \dots, x_n линейной зависимости (1) *сильно согласуется* с интервальными экспериментальными данными $\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}, \mathbf{b}_i, i = 1, 2, \dots, m$, если для каждого наблюдения i для любых значений $a_{i1} \in \mathbf{a}_{i1}, a_{i2} \in \mathbf{a}_{i2}, \dots, a_{in} \in \mathbf{a}_{in}$ в пределах измеренных интервалов \mathbf{b}_i на выходе найдётся такое $b_i \in \mathbf{b}_i$, что выполняется равенство

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Множество параметров, сильно согласующихся с данными в смысле второго определения, можно описать как

$$\mathcal{E}_{tol}(A, \mathbf{b}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{для любой } A \in \mathcal{A} \text{ найдётся такое } b \in \mathbf{b}, \text{ что } Ax = b \right\}.$$

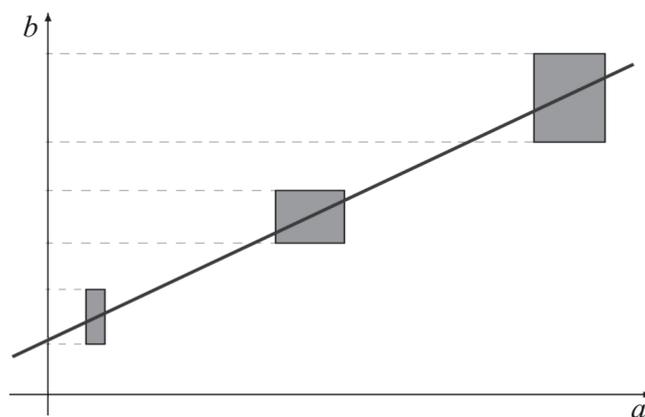


Рис. 4. Иллюстрация сильного согласования параметров линейной модели и интервальных данных измерений

На формальном языке оно определяется как

$$\mathcal{E}_{tol}(A, \mathbf{b}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathcal{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \right\},$$

и в интервальном анализе это множество называется *допусковым множеством решений* интервальной линейной системы уравнений $Ax = \mathbf{b}$ [27–29]. Соответствующий английский термин *tolerable solution set* (отсюда и индекс «tol» в обозначении множества), а точки из этого множества часто называют «tolerance solutions» [28]. Нетрудно понять, что

$$\mathcal{E}_{tol}(A, \mathbf{b}) \subseteq \mathcal{E}_{uni}(A, \mathbf{b}),$$

т.е. допусковое множество решений интервальной системы уравнений всегда является подмножеством объединённого.

Как и в традиционном неинтервальном случае, иногда не существует набора параметров, согласующихся с данными, т. е. линии, проходящей через все брусы неопределённости замеров в нужном нам смысле, сильном или обычном. В этом случае оценкой параметров конструируемой зависимости следует взять точку, которая обеспечивает «наименьшее несогласование» параметров и данных, аналогично тому, как это сделано в [23–26].

Итак, множество параметров модели, удовлетворяющих условию сильного согласования, является *допусковым множеством решений* для интервальной системы уравнений, построенной по данным наблюдений. Допусковое множество решений для интервальных систем линейных алгебраических уравнений сравнительно хорошо изучено [27–31]. Известно, что оно всегда является выпуклым полиэдральным множеством. Существуют практические методы для распознавания пустоты или непустоты допускового множества решений, а также для его внутреннего и внешнего оценивания. В частности, можно порекомендовать читателю свободно распространяемую программу [32].

Отметим, что ранее возможность использования допускового множества решений в задаче восстановления зависимостей отмечалась в [33]. Но никаких соображений в пользу такого выбора в этой работе не представлено. Между тем в дополнение к уже сказанному о содержательных причинах применения сильного согласования и допускового множества решений можно добавить следующее. Уникальными особенностями допускового множества решений для интервальных линейных систем уравнений, коренным образом отличающими его от других множеств решений и оправдывающими введение на его основе отдельного понятия «сильной согласованности», является то, что это

- наиболее «устойчивое» из множеств решений,
- множество решений, имеющее полиномиальную сложность распознавания.

Таким образом, основанные на использовании допускового множества решений подходы к оцениванию параметров и восстановлению зависимостей будут обладать вычислительной эффективностью и, как следствие, смогут завоевать популярность у специалистов, решающих прикладные задачи. Для сравнения напомним, что распознавание и оценивание объединённого множества решений интервальных линейных систем уравнений является NP-трудной задачей. По этой

причине сильная согласованность данных и параметров приводит (по крайней мере, в линейном случае) к более практичной вычислительной технологии решения задачи восстановления зависимостей, чем обычная согласованность.

Литература

1. Вошинин, А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы / А.П. Вошинин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – Т. 68, №1. – С. 118–126.
2. Вошинин, А.П. Задачи анализа с неопределёнными данными – интервальность и/или случайность? / А.П. Вошинин // Труды Международной конференции по вычислительной математике. Рабочие совещания. Совещание «Интервальная математика и методы распространения ограничений» ИМРО-2004. – Издательство ИВМиМГ СО РАН: Новосибирск, 2004. – С. 147–158. http://www.nsc.ru/interval/Conferences/IMRO_04/Voschinin.pdf
3. Тутубалин, В.Н. Теория вероятностей: Краткий курс и научно-методические замечания / В.Н. Тутубалин. – Москва: Изд-во МГУ, 1972. – 230 с.
4. Горбань, И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань. – Киев: Наукова думка, 2014. – 444 с.
5. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – Москва: Мир, 1975. – 648 с.
6. Алимов, Ю.И. Альтернатива методу математической статистики / Ю.И. Алимов. – Москва: Знание, 1980. – 64 с.
7. Алимов, Ю.И. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? / Ю.И. Алимов, Ю.А. Кравцов // Успехи физических наук. – 1992. – Т. 162, №7. – С. 149–182.
8. Тутубалин, В.Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности) / В.Н. Тутубалин. – Москва: Знание, 1977. – 64 с.
9. Тутубалин, В.Н. Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента / В.Н. Тутубалин // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163, №7. – С. 93–109.
10. Канторович, Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений / Л.В. Канторович // Сибирский матем. журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
11. Лидов, М.Л. Минимаксные методы оценивания / М.Л. Лидов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2010. – № 071. – 87 с.
12. Спивак, С.И. Применение метода выравнивания по П.Л. Чебышёву при построении кинетической модели сложной химической реакции / С.И. Спивак, В.И. Тимошенко, М.Г. Слинько // Доклады Академии Наук. – 1970. – Т. 192, № 3. – С. 580–582.
13. Оценка погрешности и значимости измерений для линейных моделей / С.И. Спивак, О.Г. Кантор, Д.С. Юнусова и др. // Информатика и её применения. – 2015. – Т. 9, вып. 1. – С. 87–97.
14. Вошинин, А.П. Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке / А.П. Вошинин, А.Ф. Бочков, Г.Р. Сотиров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1990. – Т. 56, №7. – С. 76–81.
15. Оскорбин, Н.М. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённости / Н.М. Оскорбин, А.В. Максимов, С.И. Жилин // Известия Алтайского государственного университета. – 1998. – № 1. – С. 37–40.
16. Жилин, С.И. Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.И. Жилин. – Барнаул: АлтГУ, 2004. – 119 с.
17. Zhilin, S.I. On fitting empirical data under interval error / S.I. Zhilin // Reliable Computing. – 2005. – Vol. 11, no. 5. – P. 433–442.
18. Zhilin, S.I. Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error / S.I. Zhilin // Chemometrics and Intellectual Laboratory Systems. – 2007. – Vol. 88, no. 1. – P. 60–68.
19. Поляк, Б.Т. Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределённостью / Б.Т. Поляк, С.А. Назин // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 1-2. – С. 103–115.
20. Schweppe, F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs / F.C. Schweppe // IEEE Trans. Autom. Control, AC-13. – 1968. – no. 1. – P. 22–28.
21. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2007. – 468 с.

22. Bounding approaches to system identification / Milanese, M., Norton, J., Piet-Lahanier, H., Walter, E., eds. – New York: Plenum Press. 1996. – 567 p.
23. Шарый, С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями / С.П. Шарый // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 111–125.
24. Шарый, С.П. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных / С.П. Шарый, И.А. Шарая // Вычисл. технологии. – 2013. – Т. 18, №3. – С. 80–109.
25. Shary, S.P. Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty / S.P. Shary // Journal of Global Optimization. – 2016. – Vol. 66, Issue 1. – P. 111–126.
26. Kreinovich, V. Interval methods for data fitting under uncertainty: a probabilistic treatment / V. Kreinovich, S.P. Shary // Reliable Computing. – 2016. – Vol. 23. – P. 105–140.
27. Shary, S.P. Solving the linear interval tolerance problem / S.P. Shary // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
28. Шарый, С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках / С.П. Шарый // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 147–162.
29. Шарый, С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Новосибирск: XYZ, 2016. – 606 с.
30. Rohn, J. A handbook of results on interval linear problems / J. Rohn. – Prague: Czech Academy of Sciences, 2005. – 80 p. <http://www.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ILinProblems.pdf>
31. Шарая, И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы / И.А. Шарая // Вычисл. технологии. – 2005. – Т. 10, № 5. – С. 103–119. <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/ct05.pdf>
32. <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/tolsolvty.m>
33. Gutowski, M.W. Interval experimental data fitting / M.W. Gutowski // Focus on Numerical Analysis: сб. науч. тр. – New York: Nova Science Publishers, 2006. – P. 27–70.

Поступила в редакцию 14 октября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 39–48*

DOI: 10.14529/mmph170105

STRONG COMPATABILITY IN DATA FITTING PROBLEMS WITH INTERVAL DATA

S.P. Shary

Institute of Computational Technologies of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

E-mail: shary@ict.nsc.ru

The data fitting problem is a popular and practically important problem in which a functional dependency between “input” and “output” variables is to be constructed from the given empirical data. Real-life data are almost always inaccurate, and we have to deal with the measurement uncertainty. Traditionally, when processing the measurement results, models of probability theory are used, which are not always adequate to the situations under study. An alternative way to describe data inaccuracy is to use methods of interval analysis, based on specifying interval bounds of the measurement results.

Data fitting problems under interval uncertainty are being solved for about half a century. Most studies in this field rely on the concept of compatibility between parameters and measurement data in which any measurement result is a kind of a large point “inflated” to a box (rectangular parallelepiped with facets parallel to the coordinate axes). That the graph of the constructed function passes through such a “point” means a nonempty intersection of the graph with the box. However, in some problems, this natural concept turns out to be unsatisfactory.

In this work, for the data fitting under interval uncertainty, we introduce the concept of strong compatibility between data and parameters. It is adequate to the situations when measurements of input and output variables are broken in time, and we strive to uniformly take into account the interval results of output measurements. The paper gives a practical interpretation of the new concept. It is shown that the modified formulation of the problem reduces to recognition and further estimation of the so-called tolerable solution set to interval systems of equations constructed from the processed data.

Keywords: data fitting problem; compatibility between data and parameters; strong compatibility; interval linear equation system; tolerable solution set.

References

1. Voshchinin, A.P. *Industrial laboratory. Materials diagnostics*, 2002, Vol. 68, no. 1, pp. 118–126. (in Russ.).
2. Voshchinin, A.P. Zadachi analiza s neopredelyennymi dannymi – interval'nost' i/ili sluchaynost'? (Analysis problems with uncertain data – intervality and/or randomness?). *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii po vychislitel'noy matematike. Rabochie soveshchaniya. Soveshchanie "Interval'naya matematika i metody rasprostraneniya ogranicheniy" IMRO-2004* (Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Working meetings. Meeting "Interval mathematics and methods of constraint propagation" IMRO-2004). Novosibirsk, IVMiMG SO RAN Publ., 2004, pp. 147–158. http://www.nsc.ru/interval/Conferences/IMRO_04/Voschinin.pdf
3. Tutubalin, V.N. *Teoriya veroyatnostey: Kratkii kurs i nauchno-metodicheskie zamechaniya* (Probability Theory: A Short Course, scientific and methodological notes). Moskva, MGU Publ., 1972. 230 p. (in Russ.).
4. Gorban', I.I. *Fenomen statisticheskoy ustoychivosti* (Phenomenon of statistical stability). Kiev: Naukova dumka, 2014, 444 p.
5. Kramer, G. *Matematicheskie metody statistiki* (Mathematical Methods of Statistics). Moskva, Mir Publ., 1975. 648 p.
6. Alimov, Yu.I. *Al'ternativa metodu matematicheskoy statistiki* (Alternative to the method of mathematical statistics). Moskva, Znanie Publ., 1980, 64 p. (In Russ.).
7. Alimov, Yu.I., Kravtsov, Yu.A. Is probability a 'normal' physical quantity? *Sov. Phys. Usp.*, 1992, Vol. 35, no. 7., pp.606–622 DOI: 10.1070/PU1992v035n07ABEH002250
8. Tutubalin, V.N. *Granitsy primenimosti (veroyatnostno-statisticheskie metody i ikh vozmozhnosti)* (Limits of applicability (probability and statistical methods and their possibilities)). Moscow, Znanie Publ., 1977, 64 p.
9. Tutubalin, V.N. Probability, computers, and processing the experimental data. *Phys. Usp*, 1993, Vol. 36, no. 7, pp. 628–641. DOI: 10.1070/PU1993v036n07ABEH002294
10. Kantorovich, L.V. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1962, Vol. 3, no. 5, pp. 701–709. (in Russ.).
11. Lidov, M.L. Minimax methods for estimation. *Keldysh Institute preprints*, 2010, no. 071, 87 pp. (in Russ.).
12. Spivak, S.I., Timoshenko, V.I., Slin'ko, M.G. *Doklady Akademii Nauk*. 1970. Vol. 192, no. 3, pp. 580–582. (in Russ.).
13. Spivak, S.I., Kantor, O.G., Yunusova, D.S., Kuznetsov, S.I., Kolesov, S.V. Evaluation of measurement accuracy and significance for linear models. *Inform. Primen.*, 2015, Vol. 9, Issue 1, pp. 87–97. DOI: 10.14357/19922264150108
14. Voshchinin, A.P., Bochkov, A.F., Sotirov, G.R. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 1990, Vol. 56, no. 7, pp. 76–81. (in Russ.).
15. Oskorbin, N.M., Maksimov, A.V., Zhilin, S.I. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1998, no. 1, pp. 37–40. (in Russ.).
16. Zhilin, S.I. *Nestatisticheskie modeli i metody postroeniya i analiza zavisimostey. Dissertatsiya kand. fiz.-mat. nauk* (Non-statistical models and methods for construction and analysis of dependencies. Cand. phys. and math. sci. diss.). Barnaul, AltGU Publ., 2004, 119 p.
17. Zhilin, S.I. On fitting empirical data under interval error. *Reliable Computing*, 2005, Vol. 11, no. 5, pp. 433–442. DOI: 10.1007/s11155-005-0050-3

18. Zhilin, S.I. Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error. *Chemometrics and Intellectual Laboratory Systems*, 2007, Vol. 88, no. 1, pp. 60–68.
19. Polyak, B.T., Nazin, S.A. Estimation of Parameters in Linear Multidimensional Systems under Interval Uncertainty. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2006, Vol. 38, Issue 2, pp. 19–33. DOI: 10.1615/J Automat Inf Scien.v38.i2.20
20. Schweppe, F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1968, Vol. 13, Issue 1, pp. 22–28. DOI: 10.1109/TAC.1968.1098790
21. Jaulin, L., Kieffer M., Didrit, O., Walter, E. *Prikladnoi interval'nyi analiz* (Applied Interval Analysis). Moscow-Izhevsk, RKhD Publ., 2007. 468 p.
22. Milanese, M., Norton, J., Piet-Lahanier, H., Walter, E., eds. *Bounding approaches to system identification*. New York, Plenum Press, 1996, 567 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-9545-5
23. Shary, S.P. Solvability of interval linear equations and data analysis under uncertainty. *Automation and Remote Control*, 2012, Vol. 73, no. 2, pp. 310–322 DOI: 10.1134/S0005117912020099
24. Shary, S.P., Sharaya, I.A. Recognizing solvability of interval equations and its application to data analysis. *Journal of Computational Technologies*, 2013, Vol. 18, no. 3, pp. 80–109. (in Russ.).
25. Shary, S.P. Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty. *Journal of Global Optimization*, 2016, Vol. 66, Issue 1, pp. 111–126. DOI: 10.1007/s10898-015-0340-1
26. Kreinovich, V., Shary, S.P. Interval methods for data fitting under uncertainty: a probabilistic treatment. *Reliable Computing*, 2016, Vol. 23, pp. 105–140.
27. Shary, S.P. Solving the linear interval tolerance problem. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1995, Vol. 39, pp. 53–85. DOI: 10.1016/0378-4754(95)00135-K
28. Shary, S.P. An interval linear tolerance problem. *Automation and Remote Control*, 2004, Vol. 65, no. 10, pp.1653–1666. DOI: 10.1023/B:AURC.0000044274.25098.da
29. Shary, S.P. *Konechnomernyi interval'nyi analiz* (The finite-dimensional interval analysis). Novosibirsk, XYZ Publ., 2016. 606 p. (in Russ.).
30. Rohn, J. *A handbook of results on interval linear problems*. Prague, Czech Academy of Sciences, 2005, 80 p. <http://www.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ILinProblems.pdf>
31. Sharaya, I.A. Structure of the tolerable solution set of an interval linear system. *Journal of Computational Technologies*, 2005, Vol. 10, no. 5, pp. 103–119. (in Russ.).
32. <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/tolsolvty.m>
33. Gutowski, M.W. *Interval experimental data fitting. Focus on Numerical Analysis*. New York, Nova Science Publishers, 2006, pp. 27–70.

Received October 14, 2016

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛОВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Ю.М. Ковалев

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: yum_kov@mail.ru

Приводится анализ существующих приближений для описания зависимости теплоемкости при постоянном объеме от температуры молекулярного кристалла. Показано, что рассмотренные приближения не позволяют адекватно описывать зависимость теплоемкости при постоянном объеме от температуры молекулярных кристаллов нитросоединений. Данное заключение требует разработки специальных приближений, описывающих как низкочастотную, так и высокочастотную части колебательных спектров молекулярных кристаллов.

Ключевые слова: уравнение состояния; молекулярный кристалл; энергия Гельмгольца; постоянная Планка; постоянная Больцмана; приближение Дебая; приближение Эйнштейна.

Введение

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с развитием математических моделей, адекватно описывающих физику быстропротекающих процессов. Законы сохранения массы импульса и энергии лежат в основе математических моделей механики сплошных сред, термодинамики, электродинамики и т.д. Однако законы сохранения не являются замкнутой системой. Требуются зависимости между входящими в уравнения сохранения величинами – уравнения состояния. Уравнения состояния определяют фундаментальную связь между термодинамическими параметрами, не зависящую от способа достижения тех или иных значений этих параметров. Математические модели термодинамических свойств вещества в различных областях фазовой диаграммы постоянно совершенствуются. Для анализа и проверки адекватности предлагаемых математических моделей требуется наличие экспериментальных данных в широком диапазоне температур и давлений. Несмотря на то, что решению этой задачи посвящено достаточно большое количество как экспериментальных, так и теоретических работ, теория построения уравнений состояния далека от своего завершения. Это связано с тем, что теоретическое определение зависимостей, характеризующих поведение твердых взрывчатых веществ (ВВ), которые относятся к молекулярным кристаллам, осложняется большим числом внутренних степеней свободы молекул, входящих в состав кристалла. В связи с трудностью расчета межчастичного взаимодействия в молекулярных кристаллах описание термодинамических характеристик обычно осуществляется в рамках полуэмпирических подходов. При таком подходе функциональная зависимость термодинамического потенциала определяется исходя из теоретических соображений, а выбор некоторых коэффициентов этой зависимости рассчитывается из условия наилучшего совпадения с экспериментальными данными.

Термодинамические свойства вещества полностью определяются, если известен один из термодинамических потенциалов. Удобно исходить из определения свободной энергии Гельмгольца $F(V, T)$, которая наиболее простым образом связана с моделью строения вещества [1–2]:

$$F = U + E_0 + kT \sum_{\alpha} \ln(1 - \exp(-\frac{h\omega_{\alpha}}{kT})), \quad E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} h\omega_{\alpha}. \quad (1)$$

Здесь U – энергия взаимодействия между атомами; V – удельный объем; T – температура тела; h – постоянная Планка; k – постоянная Больцмана; ω_{α} – частоты нормальных колебаний; E_0 – энергия нулевых колебаний.

Если известен вид функции свободной энергии Гельмгольца $F(V, T)$ и определены все значения параметров, входящих в описание функции $F(V, T)$, то дифференцированием могут быть найдены выражения для определения всех измеряемых и вычисляемых термодинамических величин:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V; \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V;$$
$$E = F + TS; \quad C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p; \quad C_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v.$$

Второе из данных соотношений определяет уравнение состояния твердого тела.

В настоящее время принято считать, что в уравнения состояния молекулярных кристаллов входит две составляющие: тепловая и «холодная». Тепловая составляющая определяется колебательным движением молекул, входящих в состав кристалла, а холодная составляющая – изменением энергии взаимодействия, как внутри молекулы, так и между молекулами, входящих в состав кристалла, в зависимости от объема. Связь между тепловой и холодной составляющими определяется зависимостью коэффициента Грюнайзена от удельного объема и является одной из основных задач при построении уравнений состояния твердых тел. Зависимость коэффициента Грюнайзена от удельного объема может определяться формулами Ландау–Слейтера, Дугдала–Мак-Дональда и т.д. [1].

Определение тепловой составляющей уравнений состояния молекулярных кристаллов

Для определения тепловой составляющей уравнений состояния молекулярных кристаллов могут быть использованы приближения Дебая или Эйнштейна. В настоящее время наибольшее распространение получила теория Дебая. Наиболее простой способ получения значений температуры Дебая это анализ зависимости теплоемкости от температуры. Однако уже здесь начинаются проблемы. Из потенциала Гельмгольца легко определяется теплоемкость при постоянном объеме C_v , а в эксперименте получают данные по теплоемкости при постоянном давлении C_p . В силу того, что при температурах, при которых проводятся эксперименты, присутствует ангармонизм, то теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении не совпадают. Легко показать, что связь между теплоемкостями определяется следующим равенством

$$C_p - C_v = T \frac{\alpha^2}{\beta_T} V,$$

здесь α – изобарический коэффициент объемного расширения; β_T – изотермическая сжимаемость. Легко определить связь между теплоемкостями и сжимаемостями

$$\frac{\beta_S}{\beta_T} = \frac{C_v}{C_p},$$

где β_S – адиабатическая сжимаемость. В силу того, что адиабатическая сжимаемость связана с адиабатической скоростью звука C_s соотношением вида

$$C_s^2 = \frac{V}{\beta_S},$$

то легко определяется связь адиабатической сжимаемости и адиабатической скорости звука с известными из эксперимента термодинамическими параметрами [3, 4]

$$\beta_S = \frac{V}{C_s^2} = \beta_T - \frac{T\alpha^2 V}{C_p}.$$

Приведенные выше соотношения позволяют определить выражение для теплоемкости при постоянном объеме, в которое входит теплоемкость при постоянном давлении, изобарический коэффициент объемного расширения, адиабатической скорости звука и температура

$$C_v = \frac{C_p^2}{(C_p + T\alpha^2 C_s^2)}.$$

В качестве исходных данных для определения начального теплового состояния молекулярного кристалла были использованы экспериментальные значения соответствующих величин, приведенные в справочниках Ливерморской национальной лаборатории [5] (редакторы В.М. Dobratz, Р.С. Crawford) и Лос Аламосской национальной лаборатории (редакторы Т.Р. Gibbs, А. Rapolato) [6]. В табл. 1 приведены экспериментальные данные и результаты расчетов значений, позволяющих определять тепловую составляющую в уравнении состояния молекулярного кристалла.

Таблица 1

Параметры	Тепловые параметры уравнения состояния кристалла			
	Название соединения			
	гексоген	тэн	тетрил	тритил
μ , кг/кмоль	222,13	316,50	287,15	227,13
ρ_0 , кг/м ³	1806,0	1778,0	1731,0	1653,0
C_p , кдж/кг·К	0,9707	1,6694	0,9046	1,1255
C_v , кдж/кг·К	0,9017	1,5902	0,7805	0,9559
T_0 , К	293,0	293,0	293,0	293,0
C_{s0} , м/сек	2650	2320	2190	2160
$\alpha \cdot 10^{-3}$, К ⁻¹	0,1908	0,2300	0,3200	0,3200

Приведенные в табл. 1 экспериментальные данные позволяют определить теплоемкость при постоянном объеме и апробировать различные модели описания ее поведения в зависимости от температуры.

Рассмотрим приближение Дебая. Следуя теории Дебая, заменим в колебательной части свободной энергии Гельмгольца реальный спектр колебаний параболой, оборвав ее на некоторой частоте. С этой целью перепишем выражение (1) для свободной энергии Гельмгольца в виде

$$F = U + E_0 + 9NRT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \xi^2 \ln(1 - \exp(-\xi)) d\xi, \quad (2)$$

где R – универсальная газовая постоянная; N – число атомов в молекуле; θ_D – характеристическая температура Дебая.

Интегрируя по частям выражение для колебательной составляющей свободной энергии Гельмгольца $F(V, T)$ (2) и вводя функцию Дебая $D(x)$ по формуле, приведенной в монографиях [3, 4],

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \xi^3 \frac{d\xi}{\exp(\xi) - 1},$$

получаем выражение для составляющей свободной энергии Гельмгольца в терминах характеристических температур

$$F = U + E_0 + 3NRT \left(\ln(1 - \exp(-x_D)) - \frac{D(x_D)}{3} \right), \quad (3)$$

где $x_D = \frac{\theta_D}{T}$. Если продифференцировать дважды выражение (3) по температуре при постоянном объеме, получим выражение для теплоемкости при постоянном объеме в приближении Дебая терминах характеристических температур

$$C_V = 3NR \left(4D(x_D) - \frac{3x_D}{\exp(x_D) - 1} \right), \quad (4)$$

Легко показать, что выражение, стоящее в скобках правой части формулы (4) есть результат интегрирования по частям функции теплоемкости Дебая $D_C(x)$, которая определяется следующим выражением

$$D_C(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \xi^4 \frac{\exp(\xi)}{(\exp(\xi) - 1)} d\xi,$$

Функция Дебая $D(x)$ и функция теплоемкости Дебая $D_C(x)$ протабулированы и представлены в справочной литературе по статистической термодинамике [3]. Значения характеристических температур в приближении Дебая приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения характеристических температур в приближении Дебая

Параметры	Название соединения			
	гексоген	тэн	тетрил	тротил
$D_C(x)$	0,4116	0,6959	0,3597	0,4855
x_D	4,6	2,8	5,075	4,155
θ_D	1347,8	820,4	1487,0	1217,4

Данные табл. 2 показывают, что полученные значения характеристических температур не стыкуются с экспериментальными данными для органических кристаллов.

Если для одноатомного вещества с физической точки зрения модель Эйнштейна представляется малореалистичной, то для молекулярных кристаллов, каждая молекула которых имеет свой набор частот, часть спектра, соответствующая оптическим частотам, может быть приближенно описана эйнштейновской моделью [3].

Рассмотрим приближение Эйнштейна. Следуя теории Эйнштейна, будем считать, что все колебательные моды имеют одну и ту же частоту, и заменим в колебательной части свободной энергии Гельмгольца реальный спектр колебаний одной эффективной частотой. В этом случае выражение для свободной энергии Гельмгольца имеет следующий вид

$$F = U + E_0 + 3NRT \ln(1 - \exp(-\theta_E/T)), \quad (5)$$

где θ_E – характеристическая температура Эйнштейна. Дифференцируя дважды выражение (5) по температуре при постоянном объеме, получим выражение для теплоемкости при постоянном объеме в приближении Эйнштейна

$$C_V = \frac{3NRx_E^2 \exp(x_E)}{(\exp(x_E) - 1)^2},$$

где $x_E = \theta_E/T$. Значения характеристических температур в приближении Эйнштейна приведены в табл. 3, где $E(x)$ – функция Эйнштейна. Видно, что значения характеристических температур в приближении Эйнштейна стали ниже, но не настолько, чтобы претендовать на достоверность.

Таблица 3

Значения характеристических температур в приближении Эйнштейна

Параметры	Название соединения			
	гексоген	тэн	тетрил	тротил
$E(x)$	0,4116	0,6959	0,3597	0,4855
x_E	3,4	2,12	3,71	3,05
θ_E	996,2	621,16	1087,03	893,65

В работах А.И. Китайгодского [4] изучали изотермическое сжатие и полиморфные переходы в органических молекулярных кристаллах типа бензола и нафталина, и было высказано предположение о том, что для описания поведения органического молекулярного кристалла целесообразно разбивать его термодинамические функции на межмолекулярные и внутримолекулярные. Межмолекулярная часть спектра состояла из шести колебаний на молекулу: три колебания – колебания центра тяжести молекулы, а три колебания – колебания углов Эйлера. В этом случае выражение для свободной энергии Гельмгольца можно представить в виде двух составляющих: межмолекулярной и внутримолекулярной

$$F = U_K + U_M + E_0 + 18RT(T/\theta_D)^3 \int_0^{\theta_D/T} \xi^2 \ln(1 - \exp(-\xi)) d\xi + RT \sum_{i=7}^{3N} \ln(1 - \exp(-x_i)), \quad (6)$$

где $x_i = \frac{h\omega_i}{kT}$, а ω_i – частоты нормальных колебаний атомов внутри молекул для гексогена, тротила и тэна приведены в работе [2, 7], а для тетрила выбираются из таблицы 4, U_K – межмолекулярная энергия взаимодействия, U_M – внутримолекулярной энергия взаимодействия.

Дифференцируя дважды выражение (6) по температуре при постоянном объеме, получим выражение для теплоемкости при постоянном объеме в виде двух составляющих: межмолекулярной и внутримолекулярной

$$C_{VM} = R \sum_{i=7}^{3N} \frac{x_i^2 \exp(x_i)}{(\exp(x_i) - 1)^2}, \quad (7)$$

$$C_{VD} = C_V - C_{VM} = 6R \left(4D(x_D) - \frac{3x_D}{\exp(x_D) - 1} \right). \quad (8)$$

Здесь C_{VD} – составляющая теплоемкости при постоянном объеме, зависящая от колебаний молекулы как целого (три колебания центра масс и три колебания углов Эйлера) и определяемая в приближении Дебая, а C_{VM} – составляющая теплоемкости при постоянном объеме, зависящая от внутримолекулярных колебаний. Часть теплоемкости C_{VD} называют межмолекулярной, а C_{VM} – внутримолекулярной. Предельные значения составляющих теплоемкости, соответствующие полному возбуждению всех степеней свободы, равны $6R$ и $(3N - 6)R$ соответственно. Молекулярные кристаллы обычно имеют низкие температуры Дебая ($\sim 100 \div 300$ К) [4], поэтому при комнатных температурах и выше межмолекулярная теплоемкость приближается к своему предельному значению $6R$.

Силовые постоянные для расчета спектров нормальных колебаний внутри молекулы были определены с помощью квантово-химического метода РМ-3, подробно описанного в монографии [8]. Для обеспечения достоверности получаемых в расчетах внутримолекулярных колебательных спектров конформации молекул определялись из данных рентгеноструктурного анализа соответствующих молекулярных кристаллов. ИК – спектры для гексогена, тротила, тетрила и тэна хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [6].

Таблица 4

Частоты нормальных колебаний молекулы тетрила

№	ω , см ⁻¹	№	ω , см ⁻¹	№	ω , см ⁻¹	№	ω , см ⁻¹
1	0,0	20	240,348	39	749,053	58	1406,639
2	0,0	21	286,929	40	763,767	59	1509,956
3	0,0	22	298,088	41	779,645	60	1546,358
4	0,0	23	307,265	42	815,651	61	1575,216
5	0,0	24	340,648	43	867,666	62	1586,392
6	0,0	25	356,145	44	964,598	63	1598,301

Механика

7	21,336	26	369,054	45	974,782	64	1606,320
8	27,127	27	399,233	46	982,691	65	1763,955
9	30,257	28	463,543	47	1000,385	66	1781,842
10	42,904	29	474,235	48	1018,690	67	1919,321
11	66,457	30	523,934	49	1047,872	68	1929,307
12	86,979	31	530,913	50	1117,056	69	1930,257
13	94,445	32	573,397	51	1191,818	70	2067,383
14	112,512	33	624,624	52	1254,034	71	2959,388
15	134,349	34	641,694	53	1299,481	72	2990,426
16	140,958	35	661,442	54	1325,535	73	3051,476
17	150,317	36	675,225	55	1351,626	74	3060,535
18	154,322	37	679,609	56	1356,989	75	3128,352
19	177,163	38	746,899	57	1377,814		

Таблица 5

Значения характеристических температур

Параметры	Название соединения			
	гексоген	тэн	тетрил	тротил
C_{VM}	0,82402	0,91367	0,82153	0,78031
C_{VD}	0,07768	0,67653	0,08044	0,34139
$D_C(x)$	0,34617	0,42921	0,46305	0,79960
x_D	5,2	4,53	4,27	2,20
θ_D	1523,6	1327,7	1251,1	664,60

Выводы

Как наглядно следует из табл. 2, 3, 5 и по результатам работы можно делать следующие выводы:

1. Рассмотренные приближения не дают возможности получать правильные значения характеристических температур для молекулярных кристаллов нитросоединений.
2. Для определения характеристических температур молекулярных кристаллов нитросоединений необходимо разрабатывать специальные методы и приближения.

Автор выражает свою благодарность профессору А.В. Белику за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Жарков, В.Н. Уравнения состояния при высоких температурах и давлениях / В.Н. Жарков, В.А. Калинин. – М.: Наука, 1968. – 311 с.
2. Ковалев, Ю.М. Математическое моделирование тепловой составляющей уравнения состояния молекулярных кристаллов / Ю.М. Ковалев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 34–42.
3. Жирифалько, Л. Статистическая физика твердого тела / Л. Жирифалько. – М.: Мир, 1975. – 382 с.
4. Китайгородский, А.И. Молекулярные кристаллы / А.И. Китайгородский. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
5. Dobratz, V.M. LLNL Explosives Handbook. Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants. Lawrence Livermore National Laboratory Report UCRL-52997 / V.M. Dobratz, P.C. Crawford. – 1985.
6. Gibbs, T.R. Last explosive property data. Los Alamos series on dynamic material properties / T.R. Gibbs, A. Popolato. – Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press, 1980.
7. Ковалев, Ю.М. Определение тепловой составляющей уравнения состояния молекулярных кристаллов / Ю.М. Ковалев, А.В. Белик // Вестник Челябинского государственного университета. – 2013. – № 9(300). – С. 5–10.
8. Кларк, Т. Компьютерная химия / Т. Кларк. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 49–56*

DOI: 10.14529/mmph170106

ANALYSIS OF SOME APPROXIMATION FOR THE DESCRIPTION OF THERMAL SIDE OF THE EQUATION STATES OF MOLECULAR CRYSTALS

Yu.M. Kovalev

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: yum_kov@mail.ru

The paper deals with the analysis of available approximations to describe the dependence of heat capacity at constant volume on the temperature of a molecular crystal. The information on the dependence of heat capacity at constant volume on the molecular crystal's temperature plays an important role in construction of molecular crystal state equations. Molecular crystals are closing relations of mathematical models, which describe shock wave propagation, initiation of detonation in molecular crystals, etc. It is shown that the examined in the paper Debye and Einstein approximations, widely used for description of thermodynamic properties of monoatomic crystals, do not enable us to sufficiently describe the dependence of heat capacity at constant volume on the temperature of molecular crystals of nitro compounds. The suggestion by A.I. Kitaygorosky to divide crystal vibration frequency into intramolecular and vibration of a molecule as a whole (three vibrations of the molecule's center of gravity and three vibrations of Euler angles), well-proven when calculating thermodynamic functions of a number of organic molecular crystals with planar molecules, doesn't make it possible to adequately describe the dependence of heat capacity at constant volume on the temperature of molecular crystals of nitro compounds. The obtained in this work results highlight the necessity for development of special approximations, which provide an opportunity to adequately describe both low-frequency and high-frequency parts of a vibration spectrum of molecular crystals of nitro compounds, the dependence of heat capacity at constant volume on the crystal's temperature and the Gruneisen function, which is a link between heat and cold components of the molecular crystal state equation.

Keywords: equation of state; molecular crystal; energy of Helmholtz; Planck's constant; Boltzmann's constant; Debye approximation; Einstein's approach.

References

1. Zharkov V.N., Kalinin V.A. *Uravneniya sostoyaniya pri vysokikh temperaturakh i davleniyakh* (Equations of state at high temperature and pressure). Moscow, Nauka Publ., 1968, 311 p. (in Russ.).
2. Kovalev Yu.M. Mathematical Modelling of the Thermal Component of the Equation of State of Molecular Crystals. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 1, pp. 34–42.
3. Zhirifal'ko L. *Statisticheskaya fizika tverdogo tela* (Statistical physics of solid body). Moscow, Mir Publ., 1975, 382 p. (in Russ.).
4. Kitaygorodskiy A.I. *Molekulyarnye kristally* (Molecular crystals). Moscow, Nauka Publ., 1971, 424 p.
5. Dobratz B.M., Crawford P.C. *LLNL Explosives Handbook. Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants*. Lawrence Livermore National Laboratory Report UCRL-52997, 1985
6. Gibbs T.R., Popolato A. *Last explosive property data. Los Alamos series on dynamic material properties*. Berkeley, Los Angeles, London, University of California Press, 1980.
7. Kovalev Yu.M., Belik A.V. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, no. 9(300), pp. 5–10. (in Russ.).
8. Klark T. *Komp'yuternaya khimiya* (Computer chemistry). Moscow, Mir Publ., 1990, 384 p. (in Russ.).

Received December 1, 2016

ВАРИАЦИИ ЧИСЛА РАДИОИМПУЛЬСОВ ГРОЗОВЫХ РАЗРЯДОВ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В ЯКУТСКЕ

В.И. Козлов, А.А. Корсаков, Л.Д. Тарабукина, Н.С. Дуюкова

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск,

Российская Федерация

E-mail: vkozlov@ikfia.ysn.ru

По данным часового счета атмосфериков, регистрируемых непрерывно в окрестностях Якутска с 2001 по 2015 г., с учетом вклада распространения, установлено, что отношение между количеством атмосфериков в минимуме и максимуме солнечной активности составляет около 159 % (лето). В Северной Азии вариация грозовых разрядов находится в фазе с вариацией галактических космических лучей и противофазна солнечной активности.

Ключевые слова: атмосферик; грозовая активность; солнечная активность; распространение радиоволн; галактические космические лучи.

Основным природным источником очень низкочастотного излучения (ОНЧ: 3–30 кГц) являются грозовые разряды, порождающие радиоимпульсы – атмосферерики. Атмосферерики распространяются на большие расстояния с малым затуханием. Исследованиям импульсной составляющей радиосуммов ОНЧ-диапазона посвящен ряд работ [1, 2]. Ряд вопросов, связанных с проведением регистрации и обработки атмосфериков, методы мониторинга грозовой активности описаны в работах Панюкова А.В. [3–5]. В работах [6–8] авторы указывают на зависимость атмосферных помех от активности Солнца.

Атмосферерики регистрировались в 30 км от г. Якутска ($\varphi = 62^\circ \text{N}$; $\lambda = 129,72^\circ \text{E}$). Рамочная приемная антенна ориентирована восток–запад. Приемный тракт включает в себя предварительный усилитель с полосой усиления 0,3–10 кГц, что соответствует полосе сосредоточения наибольшей энергии наземных грозовых разрядов. Порог регистрации выбирался так, что средняя плотность потока атмосфериков в суточном дневном летнем максимуме превышала 1 сек^{-1} . Пороговый уровень поля, принимаемого антенной $\sim 2 \text{ мВ/м}$, что для ночной трассы распространения дает возможность регистрации импульсов на дальности до $\sim 6000 \text{ км}$. Выставленный порог превышает верхнюю оценку шумовой составляющей. Стандартное отклонение шумовой составляющей атмосферных помех в полосе частот 2–9 кГц, измеренное в Канаде в 1950-х годах лежит в пределах $0,03 \dots 2 \text{ мВ/м}$ [9]. Наши измерения показывают, что для окрестности г. Якутска, максимальная величина флуктуационной составляющей во время летних ближних гроз достигает 1 мВ/м . Превысивший порог сигнал поступал на счетчик.

Для исследования вариаций потока атмосфериков использованы данные регистрации счета импульсов в час с 2001 по 2015 гг. В указанный период регистрации получены суточные и сезонные хода принимаемых атмосфериков. В суточном ходе импульсов выделяются три характерных периода: 3–7 UT – минимум в суточном ходе, обусловленный утренним и дневным временем в окрестности точки регистрации, при минимальной активности остальных очагов, входящих в зону регистрации, и максимальным затуханием на трассе распространения; 8–12 UT – максимум в летнее время, обусловленный дневным и вечерним временем в окрестности точки регистрации, максимумом вклада местной грозовой активности при максимальном затухании сигналов при их распространении; 15–19 UT – максимум, наблюдаемый зимой и второй летний максимум, обусловленный ночным временем в окрестности точки регистрации, при минимальном затухании на трассе распространения. В сезонной вариации максимум наблюдается в летнее время [10]. Вариация для суточного максимума в $\sim 17 \text{ ч (UT)}$ между летними и зимними месяцами составляет 230 %, а в $\sim 9 \text{ ч (UT)}$ – 2600 %, что определяется вкладом местной грозовой активности летом.

Одиннадцатилетняя вариация имеет характерный вид полуволны с максимумом на 1 год раньше минимума солнечной активности для всех отмеченных выше экстремумов суточного хо-

да как для летних (рис. 1), так и для зимних месяцев (рис. 2). На ниспадающей ветви солнечной активности, с максимума (2001 г.) до минимума (2008 г.), идет нарастание превышающего порог 1,75 мВ/м. числа атмосфериков. Вместе с тем, при нарастании солнечной активности (2008–2015 гг.), наоборот, наблюдается уменьшение плотности потока атмосфериков. Таким образом, поток атмосфериков находится в противофазе с солнечной активностью и в фазе с вариацией космических лучей, которые и ответственны за ионизацию атмосферы. От максимума к минимуму солнечной активности (2001–2007 гг.) изменение потока радиоимпульсов 3–7 UT составило 59 и 13 раз в зимний и летний сезоны соответственно. Изменение потока атмосфериков 15–19 UT составило 38 и 5 раз в зимний и летний сезоны соответственно. Повышение потока атмосфериков, соответствующих местной грозовой активности летом и грозовому очагу Северной Индии зимой (8–12 UT), составило 34 и 8 раз для зимы и лета соответственно.

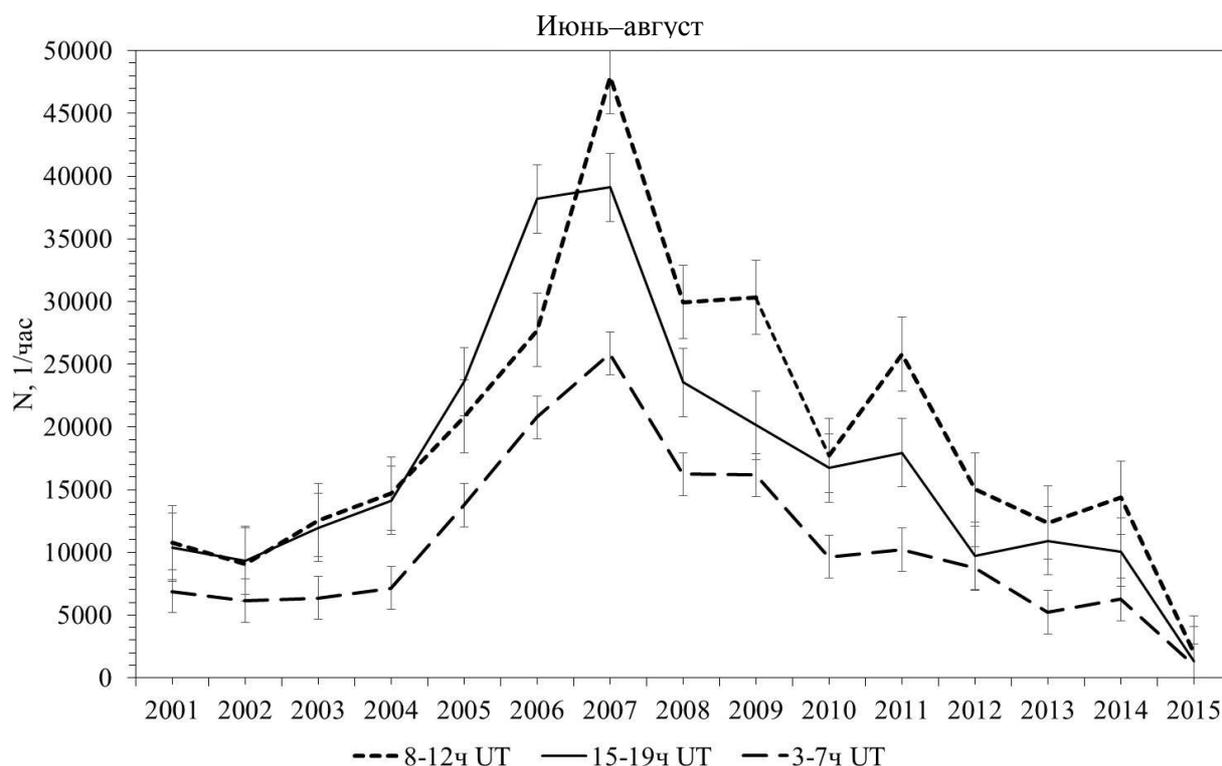


Рис. 1. Вариации числа атмосфериков, превышающих 1,75 мВ/м, по наблюдению в Якутске в летние месяцы 2001–2015 гг.

Одиннадцатилетняя вариация количества регистрируемых атмосфериков, на наш взгляд, может быть объяснена тремя причинами: изменением величины затухания атмосфериков при распространении, изменением активности грозовых очагов и смещением положения этих очагов относительно пункта регистрации.

В зимние месяцы регистрируются атмосферика от грозовых разрядов, происходящих на самом севере полуострова Индостан. Небольшое смещение положения этого грозового очага в солнечном цикле приводит к значительным вариациям числа регистрируемых атмосфериков.

С 2009 г. в Якутске регистрируются сигналы ОНЧ навигационной системы станций РСДН – 20 (Новосибирск и Хабаровск). Методика регистрации описана в работе [11]. Была проведена калибровка путем одновременных измерений амплитуды сигналов радиостанций РСДН-20 стационарным регистрирующим комплексом и дополнительным мобильным приемником, в состав которого вошли сертифицированная дипольная антенна П6-51 (Антенна дипольная активная П6-51 – № 349 Руководство по эксплуатации, ИУШЯ.464651.006РЭ), АЦП Е14-440, ноутбук с программным обеспечением для АЦП «LGraph2». Сертификат соответствия позволил определить, что на частоте 15 кГц номинальное значение коэффициента преобразования антенны ($K_{ант}$) составляет 15,9 дБ(1/м). Одновременно со стационарным регистратором были проведены измерения амплитуд ОНЧ сигналов радиостанций дополнительным мобильным приемником. Измерения выполнены на открытой сельской местности в окрестностях г. Якутска (удаление 10 км), без

застроек в радиусе 2 км. Местность представляет открытый луг без посевов и кустарников, плотность застройки < 1/га, вдали от крупных автодорог и от электрифицированных железных дорог. Предполагается, что основным источником радишума является атмосферный шум грозовых разрядов (9 кГц – 30 МГц).

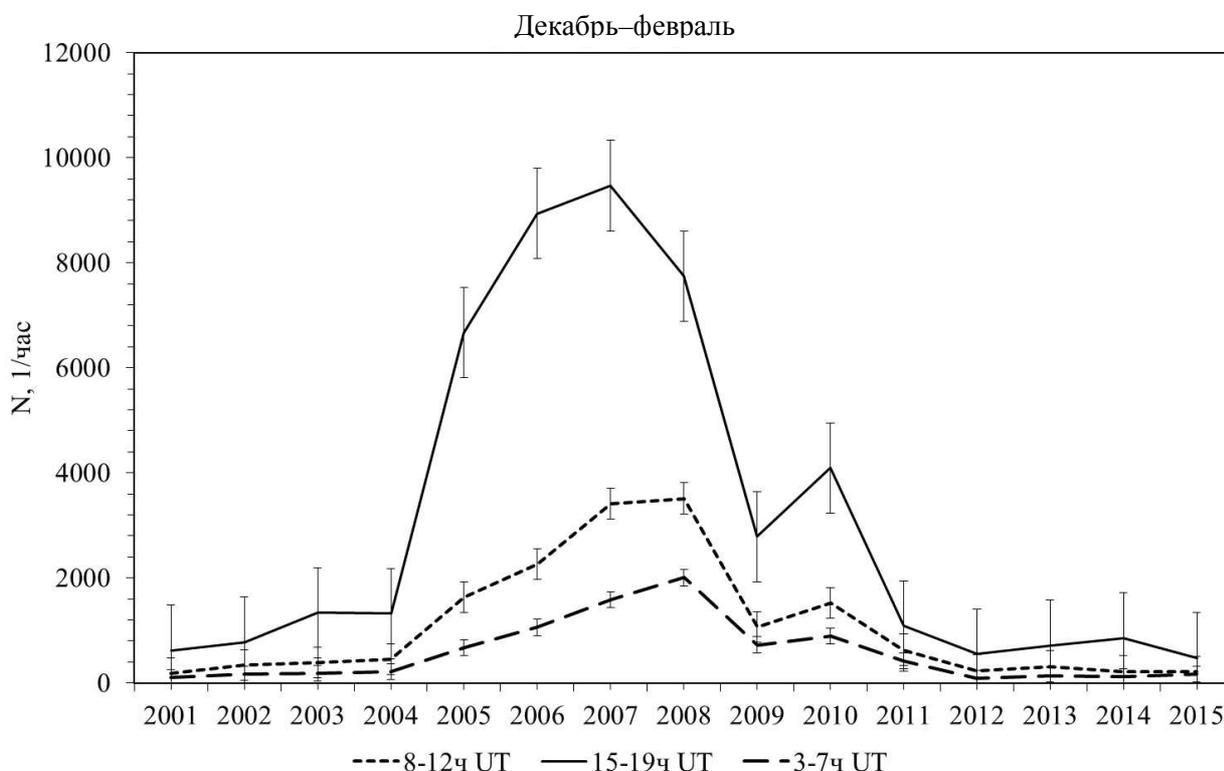


Рис. 2. Вариации числа атмосфериков, превышающих 1,75 мВ/м по наблюдению в Якутске в зимние месяцы 2001–2015 гг.

Для спектрального анализа выбрано прямоугольное окно $\text{дБ}(\text{Вср.кв.}/\sqrt{\text{Гц}})$, время полевых измерений амплитуды сигналов радиостанций 04:12 UT. Полоса спектрального анализа (прямоугольное окно) стационарного регистратора ОНЧ радиосигналов равна 372 Гц.

В таблице представлены усредненные коэффициенты пересчета к 1 отн.ед. или 1 В амплитудного значения стационарного регистратора к уровню электрической составляющей поля ($\text{мкВср.кв.}/\text{м}\cdot\sqrt{\text{Гц}}$) ОНЧ сигналов радиостанций на частотах 11,904, 12,649 и 14,881 кГц у приемной антенны.

Коэффициент пересчета 1 В амплитудного значения (1 отн. ед.) стационарного регистратора к уровню электрической составляющей поля ОНЧ радиосигналов

Частота сигнала, кГц	Коэффициент пересчета, $\text{дБ}(\text{Вср.кв.}/\text{м}\cdot\sqrt{\text{Гц}})$	Коэффициент пересчета, $\text{дБ}(\text{мкВср.кв.}/\text{м}\cdot\sqrt{\text{Гц}})$	Уровень сигнала, принимаемого антенной, $\text{мкВср.кв.}/\text{м}\cdot\sqrt{\text{Гц}}$
11,904 кГц	-81,4	38,6	85,11
12,649 кГц	-80,76	39,24	91,62
14,881 кГц	-83,05	36,95	70,39

На рис. 3 и 4 представлены суточные вариации электрической составляющей поля сигналов радиостанций, принимаемых на частотах 11,904 и 14,881 кГц с учетом коэффициента пересчета к уровню электрической составляющей поля. Здесь же показана суточная вариация флуктуационной составляющей радишума, регистрируемая в интервалы времени отсутствия сигналов радиостанций. Соотношение между величиной сигнала радиостанций и радишума определяет отношение сигнал \ шум.

Якутский пункт с 2009 г. входит в мировую сеть регистрации гроз WWLLN [12]. По данным этой сети для Северо-Восточной Азии выделяются два максимума плотности грозовых разрядов, вносящих большой вклад в местную послеполуденную (3–7 UT) грозовую активность в летний период. Один максимум находится западнее Новосибирска, а второй – южнее Хабаровска. Ва-

риации распространения атмосфериков из этих областей до Якутска оцениваются с помощью регистрации сигналов станций Новосибирск и Хабаровск. В работе [13] указывается, что в дневных условиях в минимуме солнечной активности затухание примерно на 0,3 дБ/Мм больше, чем в солнечном максимуме. Максимальное расстояние регистрации атмосфериков составляет 6 Мм, таким образом оценка затухания в солнечном цикле меняется на 1,8 дБ, что соответствует изменению величины электрического поля в 1,41 раза. По нашим наблюдениям (рис. 5) на трассе Новосибирск–Якутск изменение затухания составляет 1,5 дБ, что соответствует изменению величины электрического поля в 1,2 раза.

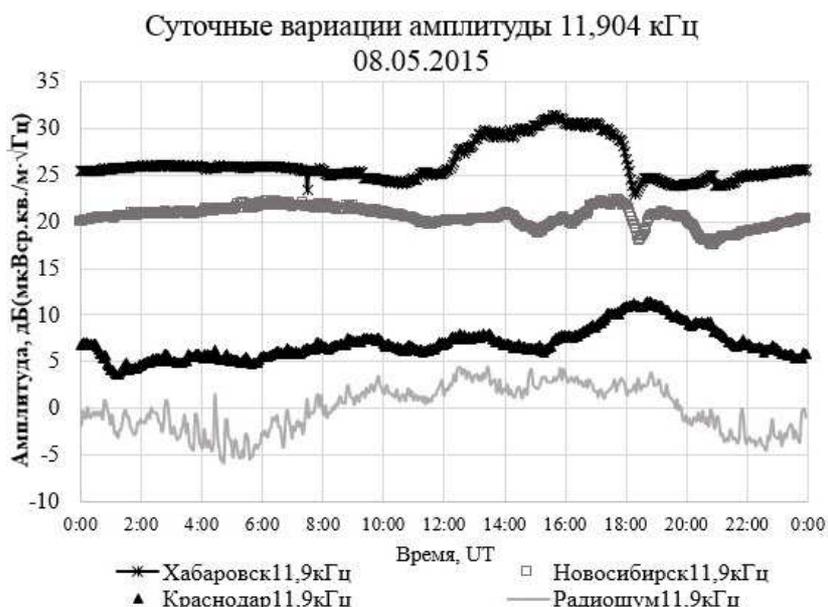


Рис. 3. Суточные вариации поля ОНЧ сигналов радиостанций и радишума 11,904 кГц

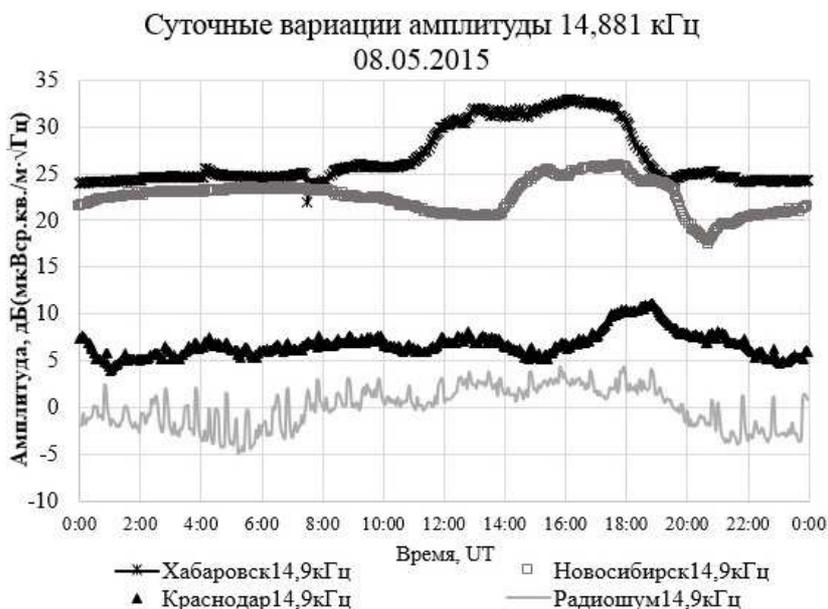


Рис. 4. Суточные вариации поля ОНЧ сигналов радиостанций и радишума 14,881 кГц

Для пересчета изменений в величине электрического поля E в изменения в плотности потока атмосфериков $N(E)$ воспользуемся соотношением:

$$N(E)/N(E_0) = (E/E_0)^\kappa,$$

где в нашем случае $\kappa = 2,5$. Соотношение выведено исходя из следующих допущений: равномерного распределения гроз по поверхности Земли; амплитуда атмосферика убывает по степенному закону при удалении от источника; функция распределения амплитуд атмосфериков логарифми-

чески нормальная для любого грозового очага на небольшом расстоянии от него. Значения показателя k для Якутска изменяются от 1,36...3 летом до 2...3,2 зимой. Для сезонов весна–осень значения показателя составляют 2,2...2,9. Полученные нами значения k соответствуют значениям 1,5...3 весной и осенью, 1...2 летом и 2,5...3,5 зимой, измеренным в средних широтах европейской части России [2]. Сравнение вариаций ОНЧ сигналов радиостанций, зарегистрированных в 2009–2014 гг., с вариациями потока атмосфериков указывает на присутствие связи солнечной активности с числом регистрируемых импульсов от грозовых источников. С учетом вклада распространения, отношение между количеством атмосфериков, принятых в минимуме солнечной активности (2009 г.) и максимуме (2013 г.) для летних месяцев составляет около 159 %.

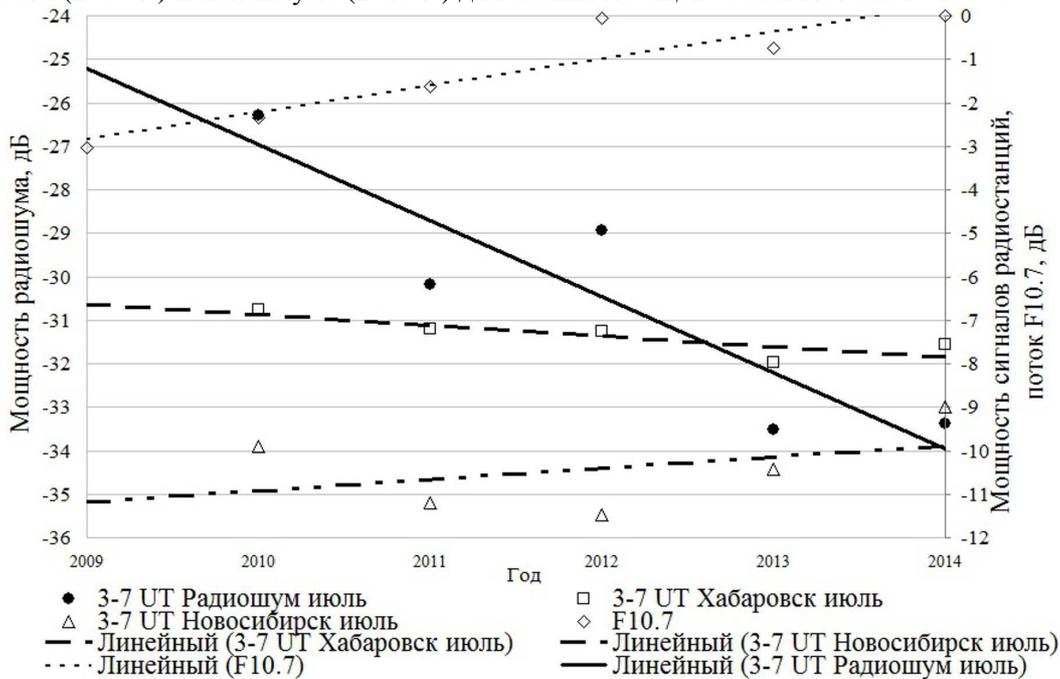


Рис. 5. Вариации потока F10.7, спектральной составляющей мощности радиошума и сигналов радиостанций (14,88 кГц) в дневной летний период

Эффекты вариаций флуктуационной составляющей ОНЧ естественных радиошумов, вызываемых грозовой активностью по наблюдениям в 1979–1996 гг. в Якутске рассмотрены в [8], где показано, что вариация интенсивности регистрируемых радиошумов противофазна солнечной активности и модулируется параметрами солнечного ветра. Количество молний по наблюдениям в Европе также модулируется скоростными потоками солнечного ветра [14, 15].

Регистрируемое на основе вариаций амплитуд сигналов радиостанций изменение функции прохождения не может полностью объяснить величину наблюдаемой нами одиннадцатилетней вариации количества регистрируемых атмосфериков. Имеются публикации о регистрации длинного ряда грозовых разрядов в двух регионах, Южной (8°N–35°N, 60°E–95°E) и Юго-Восточной Азии (8°N–35°N, 95°E–120°E) [16]. В работе рассмотрен длинный ряд данных регистрации числа световых вспышек молний спутниковым прибором Lightning Imaging Sensors (LISs) помещенным на борту спутника Tropical Rainfall Measuring Mission (TRMM). LIS определяет местоположение молнии с пространственным разрешением 5–10 км и временным разрешением 2 мс на большой области земной поверхности в окрестности от 35° южной широты до 35° северной широты. Эффективность детектирования молниевых вспышек LIS около 90 % в поле наблюдения сенсора, прибор обнаруживает как внутриоблачные разряды, так, и разряды облако–земля в дневных и ночных условиях. Использованы ежемесячные данные, с разрешением 5°×5° за период 1998–2010. Одиннадцатилетняя вариация количества гроз как в Южной Азии, так и Юго-Восточной Азии находится в противофазе с солнечной активностью, выражаемой количеством солнечных пятен и потоком радиоизлучения F10,7. В то же время одиннадцатилетняя вариация количества гроз коррелирует в фазе с потоком космических лучей. Изменение количества гроз с 2000 по 2007 год составило 3,5 раза.

Подобный анализ регистрации грозových разрядов, использующих данные как спутника ОТД, так и LIS для того же временного периода 1998–2009 годы проведен в работе [17]. Данные по количеству грозových разрядов для региона Индии анти коррелируют с солнечной активностью и коррелируют со средней температурой земной поверхности. При этом изменение плотности грозových разрядов для северной геосферы от минимума 1999–2000 до максимума 2006–2007 составляет 1,4 раза.

В заключение можно сделать вывод, что с учетом вклада распространения, отношение между количеством атмосфериков, принятых в минимуме солнечной активности (2009 г.) и максимуме (2013 г.) составляет около полутора раз. Это соответствует вариации количества грозových разрядов, наблюдаемых в Южной и Юго-Восточной Азии. Таким образом, как в регионах Южной и Юго-Восточной Азии, так и в Северной Азии вариация грозových разрядов находится в противофазе с солнечной активностью и в фазе с вариацией галактических космических лучей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, № 15-45-05005-р_восток_а, № 15-45-05135-р_восток_а и частично РНФ (проект №14-19-01079).

Литература

1. Ремизов, Л.Т. Естественные радиопомехи / Л.Т. Ремизов. – М.: Наука, 1985. – 196 с.
2. Александров, М.С. Исследование атмосферных радиопомех ОНЧ- и НЧ-диапазонов и их источников / М.С. Александров // Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – № 10. – С. 3–25.
3. Панюков, А.В. Системы пассивного мониторинга грозовой деятельности / А.В. Панюков, Д.В. Будуев, Д.Н. Малов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – Вып. 4. – № 8(24). – С. 11–20.
4. Панюков, А.В. Математическое и программное обеспечение распределенной сети грозопенггаторов-дальномеров / А.В. Панюков // VI Российская конференция по атмосферному электричеству (Нижний Новгород, 1–7 октября 2007). – Нижний Новгород: ИПФ РАН. – С. 255–256.
5. Панюков, А.В. Спектрально-статистический метод определения параметров положения дипольного источника электромагнитного излучения / А.В. Панюков, А.К. Богушов // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2016. – Т. 59, № 4. – С. 308–319.
6. Лихтер, Я.И. О циклических вариациях интенсивности атмосферных радиопомех / Я.И. Лихтер // Геомагнетизм и аэрномия. – 1966. – Т. 6, № 4. – С. 795–796.
7. Клейменова, З.П. Об изменении грозовой активности в солнечном цикле / З.П. Клейменова // Метрология и гидрология. – 1967. – № 8. – С. 64–68.
8. Mullayarov, V.A. Effect of variations in the solar-wind parameters on thunderstorm activity / Mullayarov V.A., V.I. Kozlov, R.R. Karimov // Geomagnetism and Aeronomy. – 2009. – Vol. 49, Issue 8. – pp. 1299–1301.
9. McKerrow, C.A. Some Measurements of Atmospheric Noise at Low and Very Low Frequencies in Canada / C.A. McKerrow // Journal of Geophysical Research. – 1960. – Vol. 65, № 7. – P. 1911–1926.
10. Козлов, В.И. Суточно-сезонные вариации атмосфериков / В.И. Козлов, Г.В. Федорова, С.Н. Шабаганова // Вестник Якутского государственного университета. – 2009. – Т. 6, № 4. – С. 29–34.
11. Вариации параметров сигналов радионавигационных станций, регистрируемых в Якутске в диапазоне очень низких частот / Р.П. Каримов, В.И. Козлов, А.А. Корсаков и др. // Современные проблемы дистанционного зондирования земли из космоса. – 2012. – Т. 9, № 4. – С. 57–62.
12. Relative detection efficiency of the World Wide Lightning Location Network / M.L. Hutchins, R.H. Holzworth, J.B. Brundell, C.J. Rodger // Radio Sci. – 2012. – Vol. 47. – P. RS6005. (9 p.). DOI: 10.1029/2012RS005049.
13. Thomson, N.R. Solar cycle changes in daytime VLF subionospheric attenuation / N.R. Thomson, M.A. Clilverd // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. – 2000. – Vol. 62, № 7. – P. 601–608.
14. Evidence for solar wind modulation of lightning / C.J. Scott, R.G. Harrison, M.J. Owens *et al.* // Environmental Research Letters. – 2014. – Vol. 9, no. 5. – P. 055004 (12 p.).

15. Global Circuit Response to the 11-Year Solar Cycle: Changes in Source or in Medium? / E. Williams, A. Guha, R. Boldi *et al.* // XV International Conference on Atmospheric Electricity (ICAE 2014), 15–20 June 2014, Norman, Oklahoma, U.S.A.

16. Siingh, D. Lightning, convective rain and solar activity – Over the South/Southeast Asia / D. Siingh, P.R. Kumar, M.N. Kulkarni // *Atmospheric Research*. – 2013. – Vol. 120–121. – P. 99–111.

17. Pereira, F.B. A possible relationship between global warming and lightning activity in India during the period 1998–2009 / F.B. Pereira, G. Priyadarsini, T.E. Girish. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1012/1012.3338.pdf>

Поступила в редакцию 5 октября 2016 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 57–64

DOI: 10.14529/mmph170107

VARIATIONS IN NUMBER OF LIGHTNING DISCHARGE RADIO PULSES BY OBSERVATIONS IN YAKUTSK

V.I. Kozlov, A.A. Korsakov, L.D. Tarabukina, N.S. Duiukova
North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation
E-mail: vkozlov@ikfia.ysn.ru

The main natural source of very low-frequency radiation (LFR: 3–30 kHz) is a lightning discharge which generates radio pulses, namely atmospheric. The atmospheric were registered in the period from 2001–2015 30 km away from Yakutsk (62N; 129,72 E) in the context of industrial noise-free environment. A receive path corresponds to a band of ground lightning discharge's energy concentration: 0,3–10 kHz. The threshold level of a field, received by a frame antenna ~2 mV/m, which provides an opportunity to register radio pulses at night propagation conditions is up to ~6 000 km. The specific period of a daily variation: minimum 3–7 UT (minimum thunderstorm activity, maximum radio signal attenuation); the summer maximum 8–12 UT (influence of local thunderstorms, maximum signal attenuation); the winter and summer maximum 15–19 UT (minimum attenuation in radio signal propagation). The variation of maximums 17 h (UT) – 230 % (summer to winter) and 9 h (UT) – 2 600 % (local thunderstorms in summer). The 11-year variation is a half-wave with the maximum of 1 year earlier than the minimum of solar activity. The flow of atmospheric is in an antiphase with the solar activity and in a phase with the variation of cosmic rays. From the maximum to the minimum of the solar activity (2001–2007) the change of radio pulse flow 3–7 UT has comprised 59 and 13 times; 15–19 UT comprised 38 and 5 times; 8–12 UT comprised 34 and 8 in winter and summer, respectively. According to our observations, by registering radio signals of a radio navigation system RSDN-20, in the radio path Novosibirsk – Yakutsk the change of attenuation from the minimum to the maximum of the solar activity is 120 %. Taking into account the propagation, the ratio between the number of atmospheric, accepted in the minimum of the solar activity (2009) and the maximum (2013) for summer months is 159 %.

Keywords: atmospheric; thunderstorm activity; solar activity; radio wave propagation; galactic cosmic rays.

References

1. Remizov L.T. *Estestvennye radiopomekhi* (Natural interference). Moscow, Nauka Publ., 1985, 196 p. (in Russ.).

2. Aleksandrov M.S. Issledovanie atmosferykh radiopomekh ONCh- i NCh-diapazonov i ikh istochnikov (The study of atmospheric radio interference VLF and LF bands and their sources). *Uspekhi sovremennoy radioelektroniki*, 1998, no. 10, pp. 3–25. (in Russ.).

3. Panyukov A.V., Buduev D.V., Malov D.N. Sistemy passivnogo monitoringa grozovoy deyatel'nosti (Passive monitoring systems of thunderstorm). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*, 2003, Issue 4, no. 8(24), pp. 11–20. (in Russ.).

4. Panyukov A.V. Matematicheskoe i programmnoe obespechenie raspredelennoy seti grozopelen-gatorov-dal'nomerov (Mathematical and software support of distributed network of thunderstorm pelen-gation and distance measuring). *VI Rossiyskaya konferentsiya po atmosfernomu elektrichestvu, Nizhniy Novgorod, 1–7 oktyabrya 2007* (Proceedings of the VI Russian Conference on Atmospheric Electricity, Nizhniy Novgorod, October 1–7, 2007), Nizhniy Novgorod, IPF RAN, Publ., pp. 255–256. (in Russ.).
5. Panyukov A.V., Bogushov A.K. The Spectral Statistical Method for Determining the Location Parameters of a Dipole Source of Electromagnetic Radiation. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2016, Vol. 59, Issue 4, pp. 278–288. DOI: 10.1007/s11141-016-9696-4
6. Likhter Ya.I. *Geomagnetizm i aeronomiya*, 1966, Vol. 6, no. 4, pp. 795–796. (in Russ.).
7. Kleymenova Z.P. *Metrologiya i gidrologiya*, 1967, no. 8, pp. 64–68. (in Russ.).
8. Mullayarov V.A., Kozlov V.I., Karimov R.R. Effect of variations in the solar-wind parameters on thunderstorm activity. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2009, Vol. 49, Issue 8, pp. 1299–1301. DOI: 10.1134/S0016793209080556
9. McKerrow C.A. Some Measurements of Atmospheric Noise at Low and Very Low Frequencies in Canada. *Journal of Geophysical Research*, 1960, Vol. 65, no. 7, pp. 1911–1926. DOI: 10.1029/JZ065i007p01911
10. Kozlov V.I., Fedorova G.V., Shabaganova S.N. *Vestnik Yakutskogo gosudarstvennogo univer-siteta*, 2009, Vol. 6, no. 4, pp. 29–34. (in Russ.).
11. Karimov R.R., Kozlov V.I., Korsakov A.A., Mullayarov V.A., Melchinov V.P. Variations of very low frequency signal parameters of radio navigation stations, registrated in Yakutsk. *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2012, Vol. 9, no. 4, pp. 57–62. (in Russ.).
12. Hutchins M.L., Holzworth R.H., Brundell J.B., Rodger C.J. Relative detection efficiency of the World Wide Lightning Location Network. *Radio Science*, 2012, Vol. 47, p. RS6005 (9 p). DOI: 10.1029/2012RS005049.
13. Thomson N.R., Clilverd M.A. Solar cycle changes in daytime VLF subionospheric attenuation. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2000, Vol. 62, no. 7, pp. 601–608. DOI: 10.1016/s1364-6826(00)00026-2
14. Scott C.J., Harrison R.G., Owens M.J., Lockwood M., Barnard L. Evidence for solar wind modulation of lightning. *Environmental Research Letters*, 2014, Vol. 9, no. 5, p. 055004 (12p). DOI:10.1088/1748-9326/9/5/055004.
15. Williams E., Guha A., Boldi R., Satori G., Koloskov A., Yampolski Yu. Global Circuit Re-sponse to the 11-Year Solar Cycle: Changes in Source or in Medium? *XV International Conference on Atmospheric Electricity (ICAE 2014)*, June 15–20, 2014, Norman, Oklahoma, U.S.A.
16. Siingh D., Kumar P.R., Kulkarni M.N., Singh R.P., Singh A.K. Lightning, convective rain and solar activity – Over the South/Southeast Asia. *Atmospheric Research*, 2013, Vol. 120–121, pp. 99–111. DOI: 10.1016/j.atmosres.2012.07.026
17. Pereira F.B., Priyadarsini G., Girish T.E. *A possible relationship between global warming and lightning activity in India during the period 1998–2009*. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1012/1012.3338.pdf>

Received October 5, 2016

ПРЕДЕЛЬНО-КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

Н.М. Шерыхалина, А.А. Зарипов, С.С. Поречный

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа,
Российская Федерация
E-mail: porechny@mail.ru

Рассмотрена задача моделирования электрохимической обработки в квазистационарном приближении. Решена задача формообразования при обработке электрод-инструментом в виде пластины. При решении задачи зависимость выхода по току от плотности тока принималась в виде ступенчатой функции. Для построения конформных отображений использовались преобразования Жуковского и Шварца–Кристоффеля.

Ключевые слова: электрохимическая обработка; функции комплексного переменного; конформное отображение; квазистационарное приближение.

Введение

Для математического моделирования процесса электрохимической обработки (ЭХО) используются законы Фарадея и Ома. В соответствии с этими законами скорость растворения равна $V_{\text{см}} = k\eta E$, $E = j/\kappa$, $k = \kappa\varepsilon/\rho$, где E, j – напряженность и плотность тока на границе анода; κ – электропроводность электролита; $\eta = \eta(j)$ – выход по току; ε – электрохимический эквивалент; ρ – плотность растворяемого материала.

Рассматривается ЭХО в пассивирующем электролите с круто падающей до нуля при уменьшении плотности тока зависимостью $\eta(j)$. В [1–3] рассматривались стационарные и квазистационарные процессы, для этого использовалась ступенчатая зависимость

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \eta \in [0, \eta_0], & j = j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе проводится исследование нестационарных процессов с помощью квазистационарной модели. Рассматриваются процессы с предельно высокой локализацией, при этом максимальное значение плотности тока на обрабатываемой поверхности E_0 равно критическому $E_1 = j_1/\kappa$. Аналогичные задачи для других конфигураций электрод-инструментов (ЭИ) рассмотрены в [2].

Будем считать электрическое поле в межэлектродном пространстве (МЭП) соленоидальным и потенциальным. Тогда задачу определения напряженности поля можно решать с помощью аналитических функций комплексного переменного.

Задача формообразования при обработке пластинчатым электрод-инструментом

Рассмотрим задачу обработки угловой поверхности ЭИ в виде пластины ACB' с изолированной верхней поверхностью, которая движется горизонтально вправо с постоянной скоростью $V_{\text{ет}}$. Формы межэлектродного пространства (МЭП) до и в процессе обработки показаны на рис. 1.

На плоскости комплексного потенциала образом МЭП является полуполоса шириной U (рис. 2, а).

При использовании зависимости выхода по току (1) и условия $E_0 = E_1$ на обрабатываемой поверхности образуются две зоны, в одной из которых происходит растворение, в другой – отсутствует. В первой зоне $FMNG$ модуль напряженности равен E_1 . На плоскости $\bar{E} = dW/dZ = |E|e^{-i\theta}$ этой зоне соответствует дуга окружности радиуса E_1 с центром в начале

координат. Участкам AF ($\theta = 0$) и GB ($\theta = -\pi/2$), где отсутствует растворение, на плоскости \bar{E} соответствуют отрезки, соответственно, действительной AF и мнимой GB осей.

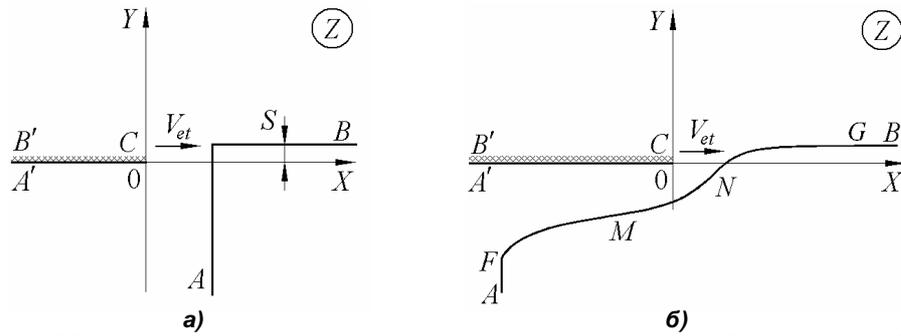


Рис. 1. Формы МЭП на физической плоскости: а) перед началом процесса; б) в процессе обработки. $FMNG$ – зона критического значения напряженности E_1 ; AF, GB – нерастворяемые границы

На поверхности ЭИ $A'C$ угол $\theta = -\pi/2$, на $B'C$ $\theta = \pi$. Поэтому на плоскости годографа \bar{E} имеем, соответственно, вертикальный и горизонтальный лучи. Область на плоскости годографа размещается на двулистной поверхности. Для наглядности можно изобразить каждый лист отдельно (рис 2, б, в).

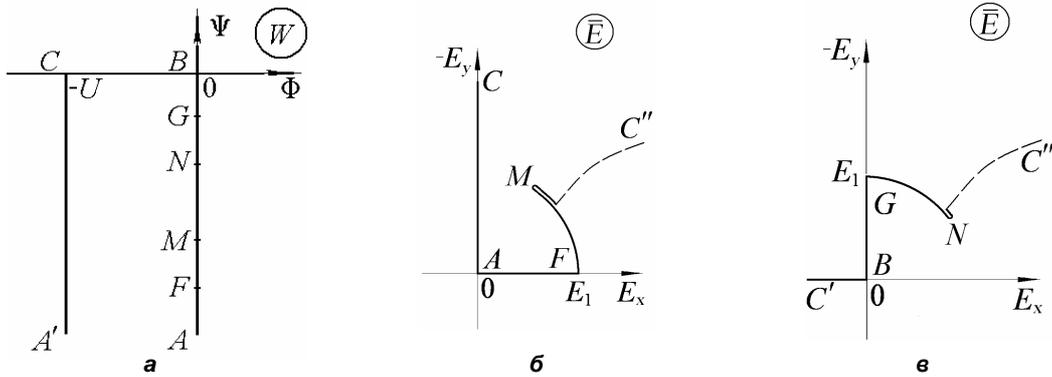


Рис. 2. Образы МЭП на плоскостях: а) комплексного потенциала; б), в) годографа; б) первый лист; в) – второй лист

Применив преобразование Жуковского

$$\omega = i \ln \frac{\bar{E}}{E_1} = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{|E|}{E_1}, \quad (2)$$

получим фигуру, граница которой содержит только части прямых, т.е. многоугольник с углами A, B, C, F, G, M, N , равными $0; 0; 0, \pi/2; \pi/2; 2\pi, 2\pi$ соответственно (рис. 3, а, б).

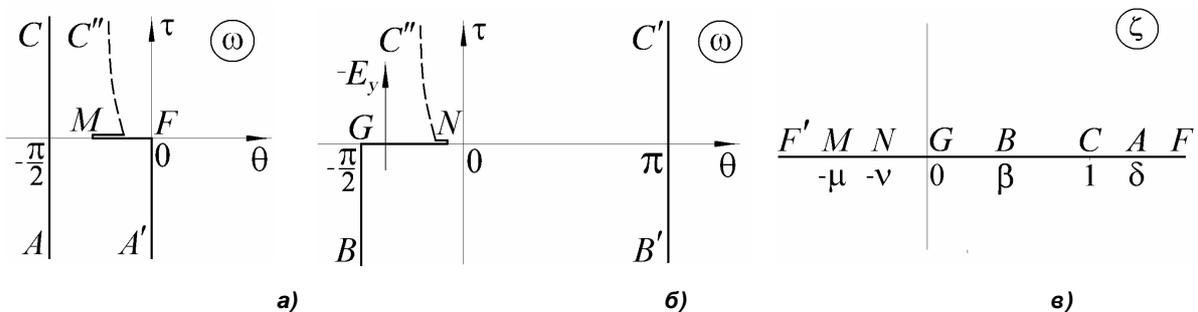


Рис. 3. Образы МЭП на плоскостях параметрического переменного: а) первый лист плоскости α б) второй лист плоскости α в) плоскость ζ

Для получения функции, конформно отображающей верхнюю полуплоскость ζ (рис. 3, в) на этот многоугольник, используем преобразование Шварца–Кристоффеля

$$\omega(\zeta) = C_1 \int_{\infty}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)\zeta^{1/2}}, \quad (3)$$

Имеем

$$\frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)} = \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\zeta - \delta} + \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\zeta - \beta} + \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} \frac{1}{\zeta - 1},$$

$$\int \frac{d\zeta}{(\zeta - \delta)\sqrt{\zeta}} = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{\zeta} \\ du = \frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta}} \end{array} \right| = 2 \int \frac{du}{u^2 - \delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{u - \sqrt{\delta}}{u + \sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}.$$

Тем самым

$$\omega(\zeta) = C_1 \int_{\infty}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)\zeta^{1/2}} = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} +$$

$$+ C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \quad (4)$$

Поскольку в соответствии с рис. 3

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) = \pi, \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \delta}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

то

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \delta}{2}\right) = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{i}{2}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi = \pi, \quad \frac{i}{2} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi = \pi,$$

$$C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} = -i \frac{3}{2}, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \omega\left(\frac{\beta}{2}\right) = C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{i}{2} i\pi - i \frac{3}{2} i\pi + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = i \frac{3}{2} \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7)

$$C_1 = i \frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(\delta - 1)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu)}, \quad (8)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(\delta - 1) (1 + \mu)(1 + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu) (1 - \delta)(1 - \beta)} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(1 + \mu)(1 + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu)(1 - \beta)} = \frac{3}{2}, \quad (9)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta)(\delta - 1) (\beta + \mu)(\beta + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu) (\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\sqrt{\delta} (\delta - 1) (\beta + \mu)(\beta + \nu)}{2 (\delta + \mu)(\delta + \nu) (\beta - 1) \sqrt{\beta}} = -\frac{3}{2}. \quad (10)$$

Если точки перегиба M и N отсутствуют, то параметры μ и ν – комплексно сопряженные, (т.е. $\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$). Тогда уравнения (9), (10), примут вид

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta - \beta) \left((1 + \mu_1)^2 + \nu_1^2 \right)}{2 (1 - \beta) \left((\delta + \mu_1)^2 + \nu_1^2 \right)} = \frac{3}{2}, \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}(\delta-1)((\beta+\mu_1)^2+v_1^2)}{2(\beta-1)((\delta+\mu_1)^2+v_1^2)\sqrt{\beta}} = -\frac{3}{2}. \quad (12)$$

Тем самым с учетом (5)–(7), окончательно

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} + i \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} - i \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \quad (13)$$

Согласно (2)

$$\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = E_1 e^{-i\omega} = E_1 \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} \right)^{3/2} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1} \right)^{3/2}. \quad (14)$$

С учетом (13)

$$dZ = \frac{1}{E_1} e^{i\omega} dW = \frac{1}{E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \right)^{3/2} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{3/2} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (15)$$

Теперь с помощью преобразования Шварца–Кристоффеля найдем функцию $W(\zeta)$

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= C_2 \int_{\beta}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)^{1/2}(\zeta - 1)^{1/2}} = \\ &= C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} \ln \left[\frac{\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} - \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}}{\zeta - \delta} \right] \Bigg|_{\beta}^{\zeta} = \\ &= C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} \ln \frac{(1 - \beta)(\zeta - \delta)}{[\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} + \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}]^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При обходе точки $\zeta = \delta$ по полуокружности малого радиуса против часовой стрелки действительная часть W получает приращение, равное $-U$, логарифм – приращение мнимой части $i\pi$. Отсюда

$$\Delta \operatorname{Re} W = -U = C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} i\pi.$$

Тогда

$$C_2 = i \frac{U}{\pi} \sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}.$$

Тем самым, окончательно

$$W(\zeta) = i \frac{U}{\pi} \ln \frac{(1 - \beta)(\zeta - \delta)}{[\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} + \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}]^2}. \quad (17)$$

Производная

$$\frac{dW}{d\zeta} = i \frac{U}{\pi} \frac{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}}{(\zeta - \delta)\sqrt{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)}}. \quad (18)$$

Из (15) и (18)

$$dZ = i \frac{U}{\pi E_1} \sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta})(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta})^3}{(\zeta - \delta)^{3/2}(\zeta - \beta)^2(\sqrt{\zeta} + 1)^3} d\zeta. \quad (19)$$

Интегрируя (19) численно от $\zeta = 1$, получим функцию $Z(\zeta)$.

Параметры заглупления кромки ЭИ L и S определяются следующим образом

$$L = -\operatorname{Re} Z(\infty), \quad S = \operatorname{Im} Z(0), \quad (20)$$

безразмерное время $\tau = L \frac{E_1}{U}$.

На рис. 4 приведены формы обрабатываемой поверхности в неподвижной относительно материала заготовки и подвижной (связанной с кромкой ЭИ) системах координат, соответствующие $s = S \frac{E_1}{U} = 0$ и $\tau = -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; \dots; 5$.

На рис. 4, а при $\tau \rightarrow \infty$ видно установление предельно-стационарной конфигурации с $|\bar{E}| = E_1$. Вблизи нерастворяемой зоны AF при возрастании τ формируется некоторая предельная форма (рис. 4, б, кривая ∞). Эта форма соответствует решению задачи об истечении из-под щита [4]. Известно, что эта кривая является гладкой, но ее кривизна в точке перехода к прямой равна бесконечности.

Следует отметить, что при $\tau < 0$ образы точек перегиба $-\mu$ и $-\nu$ совпадают и при дальнейшем уменьшении τ становятся комплексно сопряженными (обозначим их $\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$ (11), (12)). При этом внутри области на плоскости \bar{E} появляется точка ветвления M , являющаяся образом точки $\zeta = -\mu + i\nu$. Линия «склейки» на плоскости \bar{E} начинается с некоторой точки на границе области, проходит через точку ветвления, разворачивается и уходит на бесконечность (рис. 5). Как видно из рис. 4, б, при $\tau \rightarrow -\infty$ длина обработанной части поверхности уменьшается и стремится к нулю.

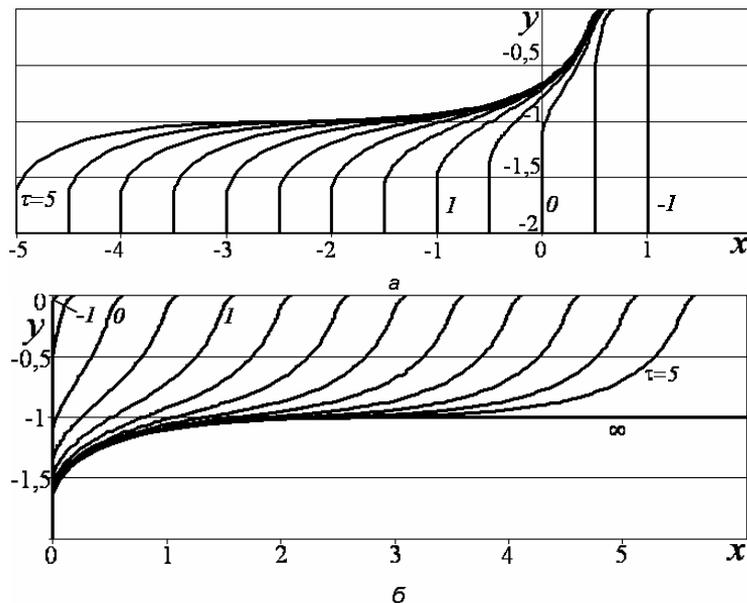


Рис. 4. Формы обрабатываемой поверхности для $s = 0$:
а) в системе координат, связанной с кромкой ЭИ $C(0,0)$;
б) в неподвижной системе координат

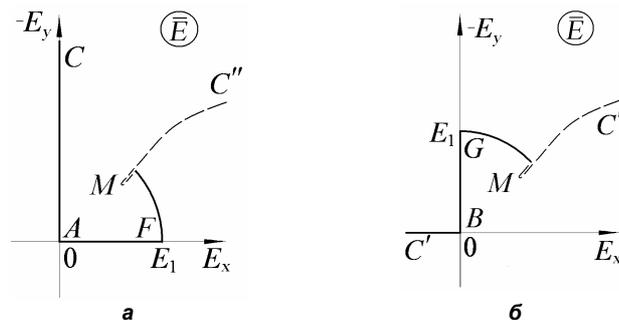


Рис. 5. Образ МЭП на плоскости годографа:
а) первый лист; б) второй лист

Выводы

Таким образом, в квазистационарном приближении решена плоская задача обработки горизонтальным пластинчатым электрод-инструментом с изолированной верхней поверхностью заготовки, имевшей до обработки угловую форму. Как показывают численные исследования [5], в таких задачах квазистационарное приближение весьма точно (до 3–4 значащих цифр) приближает нестационарное решение.

Литература

1. Житников, В.П. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании / В.П. Житников, Е.М. Ошмарина, Г.И. Федорова // Известия Вузов. Математика. – 2010. – № 10. – С. 77–81.
2. Житников, В.П. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования / В.П. Житников, Е.М. Ошмарина, Г.И. Федорова // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 12. – С. 21–29.
3. Житников, В.П. Моделирование прецизионной электрохимической обработки секционированным катодом / В.П. Житников, Е.М. Ошмарина, О.Р. Зиннатуллина // ПМТФ. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 185–192.
4. Гуревич, М.И. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
5. Житников, В.П. Моделирование процессов нестационарного электрохимического формообразования применительно к прецизионным технологиям / В.П. Житников, Р.Р. Муксимова, Е.М. Ошмарина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань, изд-во КГУ, 2010. – Т. 42. – С. 99–122.

Поступила в редакцию 7 сентября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 1, pp. 65–71*

DOI: 10.14529/mmph170108

LIMITING-QUASISTATIONARY MODEL OF ELECTROCHEMICAL SHAPING

N.M. Sherykhalina, A.A. Zaripov, S.S. Porechny

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation

E-mail: porechny@mail.ru

The paper is focused on modeling of electrochemical machining in quasistationary approximation. The modeling is based on the use of Faraday's and Ohm's laws. The dependence of current efficiency on the current density in the form of a step function is used when solving this problem. The model enables us to study the configuration of a machining area, obtained in case of extreme high localization of a solution process. For this function there is a possibility in case of a non-steady process to divide sections of the machining area into zones with different conditions (presence and lack of solution). As the solution in case of such machining happens at a constant value of intensity module, there is a possibility to simulate the change of machining time by embedding of an electrochemical machining electrode into the edge of a workpiece. The evidence from practice shows that the accuracy of approximation of the non-steady process by quasistationary has three and more significant digits. Meanwhile, the computing time decreases by 100 and more times.

The problem of shaping while machining by the machining electrode in the shape of a plate with the isolated top surface is solved. The methods of the complex variable theory have been used to solve the problems on the assumption about constancy of electrolytic conduction. The Joukowski and Schwarz-Christoffel transformations are applied to construct conformal mapping. The accurate solution on the problem in quadratures is obtained.

The study on non-steady processes using a quasistationary model makes it possible to get information about a shape of the machining area at the beginning, continuation and the end of the machining process. In particular, it's found out that near the section of the machining start there is a solution like outflow from the board, well-known in hydrodynamics. It allows examining properties of a shape that is formed at the edge of the machining area.

Keywords: electrochemical machining; complex functions; conformal mapping; quasistationary approximation.

References

1. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Fyodorova G.I. The use of discontinuous functions for modeling the dissolution process of steady-state electrochemical shaping. *Russian Mathematics*, 2010, Vol. 54, no. 10, pp. 67–70.
2. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Fedorova G.I. Exact solutions of two limiting quasistationary electrochemical shaping problems. *Russian Mathematics*, 2011, Vol. 55, no. 12, pp. 16–22.
3. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Zinnatullina A.R. Simulation of precision electrochemical machining of metals by a segmented cathode. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, Vol. 52, no. 6, pp. 1004–1010.
4. Gurevich M.I. *Teoriya struy ideal'noy zhidkosti* (Theory of ideal fluid streams). Moscow, Nauka Publ., 1979, 536 p.
5. Zhitnikov V.P., Muksimova R.R., Oshmarina E.M. Modelirovanie protsessov nestatsionarnogo elektrokhimicheskogo formoobrazovaniya primenitel'no k pretsizionnym tekhnologiyam (Process modeling of non-stationary electrochemical shaping applied to a high-precision technologies). *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo* (Proceedings of the N.I. Lobachevsky Mathematical Centre). Kazan', KGU Publ., 2010, Vol. 42, pp. 99–122.

Received September 7, 2016

Персоналии

К 65-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА А.В. ПАНЮКОВА

28 ноября 2016 г. свой 65-летний юбилей отметил Панюков Анатолий Васильевич, заслуженный работник высшей школы, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Института естественных и точных наук.

Анатолий Васильевич Панюков родился в г. Копейске, в семье рабочих. До него в семье никто не имел высшего образования. В 1971 г. он с отличием окончил дневное отделение Челябинского радиотехнического техникума по специальности «Радиоаппаратостроение» и сразу же был призван на службу в Советскую Армию. Служил в войсках дальней космической связи, демобилизован в звании сержанта.

Трудовой стаж начался летом 1970 г. с производственных практик на Челябинском радиозаводе. После службы в армии работал в должности радиоинженера в НИИ измерительной техники ПО «Полет» и без отрыва от производства учился на вечернем отделении Челябинского политехнического института по специальности «Автоматика и телемеханика».

В 1976 г. Панюков А.В. по настойчивой рекомендации доцентов В.А. Штрауса, М.М. Гольденберга и М.Р. Решетова тогда еще молодой кафедры прикладной математики был переведен на дневное отделение приборостроительного факультета.

В 1980 году дипломы инженеров-математиков по специальности «Прикладная математика» впервые в вузе были вручены первым выпускникам кафедры прикладной математики. С этого момента начинается история выпускников кафедры ПРИМА. Старейшие преподаватели кафедры прикладной математики до сих пор помнят фамилии первых выпускников, среди которых особенно ярким был Анатолий Панюков, исключительность которого и сегодня вызывает заслуженное уважение.

К моменту окончания вуза в соавторстве с коллегами из ПО Полет А.В. Панюков имел 17 авторских свидетельств на изобретения (награжден нагрудным знаком «Изобретатель СССР»), медаль Минвуза СССР за лучшую студенческую работу, научные публикации в рецензируемых журналах.

С 1980 года Панюков А.В. – инженер НИЧ кафедры прикладной математики, затем – младший научный сотрудник и ассистент той же кафедры. В ходе работ над проектом САПР обустройства нефтяных и газовых месторождений Западной Сибири (под руководством Б.В. Пельцвергера) им были получены значимые результаты в области дискретной оптимизации и математического моделирования.

В 1982 г. Анатолий Васильевич поступил в очную аспирантуру кафедры прикладной математики, которую успешно окончил в ноябре 1985 г. с завершением работы над диссертацией, вернувшись на должность младшего научного сотрудника кафедры. В мае 1986 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР (Киев). Природа по-своему ярко отметила защиту А.В. Панюкова. Не успевая сдать в Ученый совет автореферат диссертации, Анатолий должен был остаться в Киеве до понедельника, а в воскресенье, 26 апреля, он услышал слово «Чернобыль».

С октября 1986 г. переведен на должность старшего преподавателя кафедры Высшей математики № 2, которой заведовал Беляков Л.М., а с ноября 1988 г. – доцента кафедры прикладной математики. С ноября 1990 г. переведен на должность доцента вновь созданной кафедры информатики факультета экономики и управления. Ученое звание доцента по кафедре прикладной математики присуждено в июле 1991 г.

В октябре 1999 года без отрыва от преподавательской работы А.В. Панюков защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в ВЦ РАН (Москва) по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. В марте 2000 г. года был избран на должность профессора кафедры информатики. Ученое звание профессора присвоено в июне 2001 года.

Благодаря сложившимся обстоятельствам Анатолий Васильевич приобрел широкую эрудицию и огромный запас знаний, которыми он щедро делился со всеми, кто к нему обращался.

Энциклопедичность знаний, нетрадиционный ход смелой мысли, желание и умение решать нерешаемые задачи обеспечили ему известность и признание в научном мире на родине и за рубежом. В течение многих лет работал референтом РЖ «Математика» в разделе «Математическая кибернетика».

По сей день он неоднократно приглашается в качестве председателя секций на Международные конференции по методам оптимизации и их приложениям (Институт математики СО РАН, Институт математики и механики УрО РАН, Омский филиал института математики СО РАН), является членом программного комитета международной научной конференции «Информационные технологии и системы» (г. Магнитогорск).

С 2000 г. его работа способствовала становлению и развитию фундаментального математического образования в Южно-Уральском государственном университете. В мае 2001 г. на факультете экономики и управления ему было предложено организовать и возглавить кафедру экономико-математических методов и статистики, для подготовки выпускников по специальности «Математические методы в экономике» и новой для вуза и региона специальности «Статистика». Обучение опиралось на мощные математический и экономический блоки. На должном уровне обеспечивалось базовое образование по статистике. Как следствие, студенты обеих специальностей были неоднократно победителями всероссийских олимпиад по названным и смежным специальностям.

В период с 1994 г. по 2000 г. Анатолий Васильевич активно занимался профориентационной работой среди школьников в рамках программы «Шаг в будущее». Ученики М.И. Германенко, В.В. Горбик, Д.В. Будувев и Д.Н. Малов и др. были лауреатами программы, а впоследствии успешно защитили кандидатские диссертации.

На кафедре была открыта и успешно функционировала аспирантура по специальностям 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», 05.13.17 «Теоретические основы информатики», 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики». А.В. Панюков являлся членом диссертационных советов Д 122.298.02 при ЮУрГУ (с 2001 по 2007 гг.), Д 212.298.14 при ЮУрГУ (с 2008 г. по настоящее время), ДМ 212.298.18 при ЮУрГУ (с 2012 г. по настоящее время), ДМ 212.189.07 при ПермГУ (с 2009 по 2012 гг.). К 2016 г. кафедра имела в своем составе оборудованную силами кафедры многофункциональную лабораторию, методический кабинет, кабинет заведующего. Кафедра приобрела опыт организации учебного процесса по семи образовательным программам.

За пятнадцать лет руководства кафедрой профессор А.В. Панюков смог создать ядро из высококвалифицированных и абсолютно надежных опытных преподавателей (А.А. Кощев, И.В. Парасич, В.И. Дударева, Н.С. Колотова, Т.А. Макаровских (Панюкова), С.У. Турлакова, А.Д. Липенков и др.), привлечь на кафедру более 30 преподавателей, создать среди коллег атмосферу доброжелательности, привить желание заниматься наукой и педагогическим трудом. Двери его кабинета были всегда открыты как для преподавателей, так и для студентов. Многие выпускники стремились сохранить связь с кафедрой, работая почасовиками или поступив в аспирантуру (А.А. Макаева (Остренок), Т.А. Лыкова, Е.С. Исакова, Е.А. Савицкий и др.).

Панюков А.В. внес немалый вклад не только в развитие математического образования на факультете экономики и управления, но и в открытие специальности «Математика» на механико-математическом факультете университета, который был организован в вузе в 2003 году.

С участием Анатолия Васильевича был организован и факультет вычислительной математики и информатики, в составе которого кафедра находилась до реструктуризации университета. В июле 2016 г. кафедра экономико-математических методов и статистики включена во вновь образованную в результате реструктуризации университета кафедру математического и компьютерного моделирования. Многие ученики Анатолия Васильевича – молодые амбициозные преподаватели кафедры получили заманчивые предложения работать во вновь организованных структурах вуза.

Энциклопедичность и фундаментальность знаний Анатолия Васильевича, умение войти практически в любую задачу позволили ему после защиты докторской диссертации подготовить двух кандидатов технических наук (Д.В. Будувев, Д.Н. Малов), двух кандидатов экономических наук (Е.С. Будина, И.А. Тетин), четырех кандидатов физико-математических наук

Персоналии

(А.Т. Латипова, М.И. Германенко, В.А. Голодов, Р.Э. Шангин) осуществить научное консультирование двух докторов наук (М.М. Валиев, А.Н. Тырсин).

Направления диссертационных работ учеников представляют развитие основных направлений его докторской диссертации:

- развитие непереборных методов решения комбинаторных задач;
- разработка и анализ решения обратных задач и неустойчивых проблем;
- приложения к решению задач естествознания, техники, экономики;
- исследование возможностей высокопроизводительных гетерогенных вычислительных систем для эффективного осуществления точной дробно-рациональной арифметики.

Найденные подходы к решению обратных и неустойчивых задач нашли применение в технологиях неразрушающего контроля, технической диагностике, геофизике. Алгоритмы были использованы в экономических и социально-поведенческих исследованиях, проекте пассивной системы определения местоположения грозовых очагов, реализованном Российским Федеральным ядерным центром (г. Снежинск) при финансовой поддержке Международного научно-технического центра.

В настоящее время А.В. Панюков работает в должности профессора кафедры математического и компьютерного моделирования.

Анатолий Васильевич – профессор, активно работающий со студентами и аспирантами. В настоящее время он проводит все виды учебных занятий по дисциплинам «Методы оптимизации», «Теория игр и исследование операций» для студентов бакалавриата по направлению «Прикладная математика и информатика», «Современные проблемы прикладной математики и информатики», «Непрерывные математические модели», «Теория принятия решений» и семинара по математическому и информационному обеспечению экономической деятельности для студентов магистратуры по направлению «Прикладная математика и информатика».

В 2009 году Панюковым А.В. в одном из крупнейших издательств научной литературы URSS (книжный дом «ЛИБРОКОМ») издан учебник «Математическое моделирование экономических процессов», в 2015 году учебник был переиздан. В 2014 году в соавторстве с Т.А. Макаровских там же был издан (в двух томах) учебник по алгоритмизации и программированию на языке C++ «Языки и методы программирования» (переиздан в 2015 году).

Анатолий Васильевич всегда стремится неформально выполнять возложенную на него работу. Он активно принимает участие в работе УМО по специальности «Статистика» и «Математические методы в экономике» (МЭСИ), в настоящее время является действительным членом Правления Российской ассоциации статистиков, организованной в 2012 году. Панюков А.В. является членом Научно-методического совета Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Челябинской области.

В 2006 г. Панюкову присвоено звание Заслуженного работника высшей школы.

В 2013 г. Анатолий Васильевич сообщил о решении одной из семи так называемых математических задач тысячелетия – равенство классов P и NP . Результаты были представлены на международных конференциях: 7-th Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications (г. Кошице, Словакия, 2013), 3-ей международной научной конференции «Информационные технологии и системы» (г. Магнитогорск, 2014), IV International Conference «Mathematical Modelling, Optimization and Information Technologies» (г. Петровац, Черногория, 2014). Результаты работы периодически обсуждаются на научных семинарах в Институте математики и механики УрО РАН и Институте проблем управления РАН. Однако, в поданной в 2013 г. в журнал «Автоматика и телемеханика» статье была найдена «ошибка» и статья не была опубликована. По словам Анатолия Васильевича ошибки находят не в доказательстве полиномиальной разрешимости задач класса NP , а в предложенных алгоритмах. В ближайшее время он планирует представить откорректированный алгоритм.

Сложилось так, что с завидной регулярностью, каждые десять лет, в жизни профессора А.В. Панюкова происходят кардинальные изменения. Год 2016-й относится к таким вехам. Что-то будет впереди? А пока пожелаем ему новых достойных учеников, способных перенять его любовь к научной работе, работоспособность и целеустремленность.

Т.А. Макаровских, В.И. Дударева

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям наук и группам специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 01.04.00 – физика.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям “Ulrich’s Periodicals Directory”, “Zentralblatt MATH”.

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, ответственному редактору профессору Загребинной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Differential and Stochastic Equations Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.yourgpu.rf/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор *А.Н. Пузырева*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 23.01.2017. Дата выхода в свет 31.01.2017.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,83.

Тираж 500 экз. Заказ 12/29. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.