



ВЕСТНИК

**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2017
Т. 9, № 3**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

**«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий
Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (отв. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А. И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, профессор Физики и Оптики **Зельдович Б.Я.** (КРЕОЛ, Университет Центральной Флориды, г. Орландо, США)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2017
Vol. 9, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany
D. Guidetti, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
B.Ya. Zeldovich, CREOL, University of Central Florida, Orlando, United States of America
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
Kisik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
N.D. Kundikova, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
L.V. Utkin, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

ГУЛЯЩИХ И.А. Разрешимость одной задачи типа Неймана для тригармонического уравнения в шаре.....	5
МОСКВИЧЕВА П.О. Устойчивость эволюционного линейного уравнения соболевского типа.....	13
ТОКМАЧЕВ М.С. Исследование вероятностного распределения типа гиперболического косинуса.....	18

Механика

АТМАНСКИХ М.Б., БОТАЛОВ А.Ю., ГУБКИН А.С., ПЯТКОВА А.В. Динамика жидкости в подвижном сосуде с наклонными решетками.....	27
РЯЖСКИХ А.В. О задаче идентификации начального гидродинамического участка при ламинарном течении ньютоновской жидкости в горизонтальном кольцевом канале.....	34
РЯЖСКИХ В.И., СЕМЕНОВ М.Е., РУКАВИЦЫН А.Г., КАНИЩЕВА О.И., ДЕМЧУК А.А., МЕЛЕШЕНКО П.А. Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве.....	41

Физика

БЕЛЕНКОВ Е.А., ГРЕШНЯКОВ В.А. Теоретическое исследование фазового превращения тетрагонального графена L_{4-8} в полиморфную разновидность алмаза LA7.....	51
ГУСЕВ А.В., МОРОЗОВ С.И., ЧУДАКОВ А.Е. Совместная поверхностная сегрегация серебра и олова в тройных сплавах Cu–Ag–Sn.....	58
МИРЗАЕВ Д.А., МИРЗОЕВ А.А., СОЗЫКИН С.А., ВОРОБЬЕВА А.С. Дилатометрическое исследование критических точек стали 13X11H2B2MФ.....	66

CONTENTS

Mathematics

- GULYASHIKH I.A. Solvability of One Neumann-Type Problem for 3-Harmonic Equation in a Ball..... 5
- MOSKVICHEVA P.O. Stability of the Evolutionary Linear Sobolev Type Equation 13
- TOKMACHEV M.S. The Study of Probability Distributions of the Hyperbolic Cosine Type 18

Mechanics

- ATMANSKIKH M.B., BOTALOV A.Yu., GUBKIN A.S., PYATKOVA A.V. Fluid Dynamics in Mobile Tank with Inclined Slat Screens..... 27
- RYAZHSHKIKH A.V. On the Identification of Entrance Hydrodynamic Region in Case of Laminar Flow of Newtonian Fluid in Horizontal Annular Channel 34
- RYAZHSHKIH V.I., SEMENOV M.E., RUKAVICIN A.G., KANISHCHEVA O.I., DEMCHUK A.A., Meleshenko P.A. Stabilization of Inverted Pendulum on a Two-Wheeled Vehicle..... 41

Physics

- BELENKOV E.A., GRESHNYAKOV V.A. Theoretical investigation of phase transition of tetragonal L_{4-8} graphene into LA7 diamond polymorph..... 51
- GUSEV A.V., MOROZOV S.I., CHUDAKOV A.E. Combined Segregation of Silver and Tin from the Surface of Cu–Ag–Sn Ternary Alloys 58
- MIRZAEV D.A., MIRZOEV A.A., SOZYKIN S.A., VOROB'EVA A.S. Dilatometric Study of Critical Points of 13Kh11N2V2MF Steel..... 66

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ТРИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

И.А. Гулящих

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: gjarist@mail.ru

Рассматривается краевая задача для тригармонического уравнения в единичном шаре, содержащая в граничных условиях степени лапласиана до второго порядка включительно и нормальную производную. Эта задача является естественным продолжением в стиле Неймана задачи Рикье для тригармонического уравнения. Задача, более общая, чем рассматриваемая, но для бигармонического уравнения была ранее исследована В.В. Карачиком и Б. Торбеком. С помощью сведения исходной краевой задачи к системе трех дифференциальных уравнений третьего порядка в гармонических в единичном шаре функций найдено необходимое и достаточное условие разрешимости исходной краевой задачи типа Неймана. Это условие получено в виде равенства нулю интеграла по единичной сфере от одной из граничных функций задачи. Кроме того, метод доказательства теоремы позволяет строить решение рассматриваемой задачи типа Неймана в явном виде. Также в работе установлено, что решение исходной краевой задачи единственно с точностью до произвольной постоянной.

Ключевые слова: задача Дирихле; задача Неймана; тригармоническое уравнение, условия разрешимости.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – n -мерный единичный шар в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n с нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, а $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера. В единичном шаре S рассмотрим следующую краевую задачу типа Неймана для однородного тригармонического уравнения

$$\Delta^3 u = 0, \quad x \in S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_2, \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, φ_0, φ_1 и φ_2 – заданные функции на ∂S . Данная задача обобщает известную задачу Навье [1], которую также называют задачей Рикье [2]. Для бигармонического уравнения такая задача является частным случаем задачи, исследованной в [3–5]. Условия разрешимости других постановок задач типа Неймана можно найти в работах [6–11]. В работе [12] для краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными в граничных условиях получено достаточное условие фредгольмовости этих задач и приведена формула их индекса. В [13] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для тригармонического уравнения.

Под решением задачи (1)–(2) будем понимать такие тригармонические в S функции $u(x)$, для которых $\nu \cdot \nabla u(x) \rightarrow \varphi_0(s)$, $\nu \cdot \nabla \Delta u(x) \rightarrow \varphi_1(s)$ и $\nu \cdot \nabla \Delta^2 u(x) \rightarrow \varphi_2(s)$ при $x \rightarrow s$, где ν – внутренняя нормаль в точке $s \in \partial S$, проходящая через точку $x \in S$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть $\varphi_k \in C(\partial S)$ при $k = 0, 1, 2$. Решение задачи типа Неймана (1)–(2) существует, если выполнено условие

$$\int_{\partial S} \varphi_2(x) ds_x = 0 \quad (3)$$

и это решение единственно с точностью до константы.

Доказательство. Известно, что всякая тригармоническая в S функция может быть представлена в виде $u(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + |x|^4 u_2(x)$ (см., например, [14, с. 531] или [15]. Пусть $v(x)$ – некоторая гармоническая в S функция и $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i D_{x_i}$. Нетрудно убедиться, что верны равенства

$$\Delta(|x|^2 v(x)) = \Delta(|x|^2)v(x) + 2 \sum_{i=1}^n 2x_i D_{x_i} v(x) + |x|^2 \Delta v(x) = (2n + 4\Lambda)v(x),$$

поскольку $\Delta|x|^2 = 2n$. Аналогично найдем

$$\begin{aligned} \Delta(|x|^4 v(x)) &= \Delta(|x|^4)v(x) + 2|x|^2 \sum_{i=1}^n 4x_i D_{x_i} v(x) + |x|^4 \Delta v(x) = \\ &= 4(n+2)|x|^2 v(x) + 8|x|^2 \Lambda v(x) = 4|x|^2 (n+2+2\Lambda)v(x), \end{aligned}$$

поскольку $\Delta|x|^4 = \sum_{i=1}^n (4|x|^2 + 8x_i^2) = 4(n+2)|x|^2$. Значит можно записать

$$\Delta u(x) = \Delta(u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + |x|^4 u_2(x)) = 2(n+2\Lambda)u_1(x) + 4|x|^2 (n+2+2\Lambda)u_2(x),$$

откуда, учитывая, что функции $\Lambda u_1(x)$ и $\Lambda u_2(x)$ гармонические в S , найдем

$$\Delta^2 u(x) = 8(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2(x).$$

Рассмотрим граничные условия (2). Пусть v – внешняя нормаль к ∂S . Поскольку внутренняя нормаль к ∂S , проходящая через точку $x \in S$ имеет вид $-v = -x/|x|$, то

$$v \cdot \nabla u(x)|_{\partial S} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} D_{x_i} u|_{\partial S} = \Lambda u|_{\partial S},$$

и значит граничные условия (2) можно переписать в виде

$$\Lambda u|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \Lambda \Delta u|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Lambda \Delta^2 u|_{\partial S} = \varphi_2. \quad (4)$$

Пусть v_0, v_1 и v_2 такие гармонические в S функции, что $v_k|_{\partial S} = \varphi_k, k = 0, 1, 2$. Тогда

$$\Lambda u - v_0|_{\partial S} = 0, \quad (\Lambda \Delta u - v_1)|_{\partial S} = 0, \quad (\Lambda \Delta^2 u - v_2)|_{\partial S} = 0. \quad (5)$$

Пусть опять $v(x)$ – некоторая гармоническая в S функция. Так как Λ – линейный однородный дифференциальный оператор первого порядка, то

$$\Lambda(|x|^2 v(x)) = \Lambda(|x|^2)v(x) + |x|^2 \Lambda v(x) = |x|^2 (2 + \Lambda)v(x)$$

и аналогично

$$\Lambda(|x|^4 v(x)) = |x|^4 (4 + \Lambda)v(x).$$

Поэтому, вспоминая значения $\Delta u(x)$ и $\Delta^2 u(x)$, вычисленные выше, из (5) получим

$$(\Lambda u_0 + |x|^2 (2 + \Lambda)u_1 + |x|^4 (4 + \Lambda)u_2 - v_0)|_{\partial S} = 0,$$

а также

$$(2\Lambda(n+2\Lambda)u_1 + 4|x|^2 (\Lambda+2)(n+2+2\Lambda)u_2 - v_1)|_{\partial S} = 0,$$

и наконец

$$(8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2 - v_2)|_{\partial S} = 0.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned} (\Lambda u_0 + (2 + \Lambda)u_1 + (4 + \Lambda)u_2 - v_0)|_{\partial S} &= 0, \\ (2\Lambda(n+2\Lambda)u_1 + 4(\Lambda+2)(n+2+2\Lambda)u_2 - v_1)|_{\partial S} &= 0, \\ (8\Lambda(n+2\Lambda)(n+2+2\Lambda)u_2 - v_2)|_{\partial S} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку внутри внешних скобок находятся гармонические в S функции, то в силу теоремы единственности решения задачи Дирихле в S получим систему уравнений для гармонических в S функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$

$$\begin{aligned} \Lambda u_0 + (2 + \Lambda)u_1 + (4 + \Lambda)u_2 &= v_0, \\ 2\Lambda(n + 2\Lambda)u_1 + 4(\Lambda + 2)(n + 2 + 2\Lambda)u_2 &= v_1, \\ 8\Lambda(n + 2\Lambda)(n + 2 + 2\Lambda)u_2 &= v_2 \end{aligned} \tag{7}$$

с гармонической правой частью. Эту систему можно переписать в матричном виде

$$A(\Lambda)U(x) = V(x), \tag{8}$$

где обозначено

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda + 2 & \Lambda + 4 \\ 0 & 2\Lambda(n + 2\Lambda) & 4(\Lambda + 2)(n + 2 + 2\Lambda) \\ 0 & 0 & 8\Lambda(n + 2\Lambda)(n + 2 + 2\Lambda) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Итак, всякое решение $u(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + |x|^4 u_2(x)$ задачи (1)–(2) порождает решение системы уравнений (7). Верно и обратное утверждение, т. е. если $U(x) = (u_0(x), u_1(x), u_2(x))$ – решение системы уравнений (7), то тригармоническая функция $u(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + |x|^4 u_2(x)$ будет удовлетворять условиям (6), а значит (5) и (4) и следовательно условиям (2).

Решим систему уравнений (7). Рассмотрим ее последнее уравнение

$$8\Lambda(n + 2\Lambda)(n + 2 + 2\Lambda)u_2 = v_2. \tag{9}$$

Обозначим здесь $\omega(x) = 8\Lambda(n + 2\Lambda)(n + 2 + 2\Lambda)u_2(x)$. Тогда будем иметь в S уравнение $\Lambda\omega(x) = v_2(x)$, в котором $\omega(x)$ и $v_2(x)$ – гармонические в S функции. Это уравнение имеет решение только и только тогда, когда $v_2(0) = 0$ и оно единственно с точностью до константы. Действительно, если $v_2(x)$ и $\omega(x)$ гармонические в S функции, то в окрестности нуля они имеют вид

$$\omega(x) = \omega(0) + \sum_{i=1}^n \omega_i x_i + O(|x|^2), \quad v_2(x) = v_2(0) + \sum_{i=1}^n v_2^i x_i + O(|x|^2).$$

Поэтому в окрестности нуля должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^n \omega_i x_i + O(|x|^2) = v_2(0) + \sum_{i=1}^n v_2^i x_i + O(|x|^2).$$

Полагая в нем $x=0$, получим $v_2(0) = 0$ – необходимое условие существования решения уравнения $\Lambda\omega(x) = v_2(x)$. Достаточность этого условия следует из представления [10]

$$\omega(x) = \int_0^1 v_2(tx) \frac{dt}{t} + C,$$

которое справедливо, если $v_2(0) = 0$ (интеграл сходится). Нетрудно убедиться, что для такой функции $\omega(x)$ будет $\Lambda\omega(x) = v_2(x)$ в S . Таким образом из (9) относительно $u_2(x)$ получаем другое уравнение

$$32(n/2 + \Lambda)(n/2 + 1 + \Lambda)u_2 = \int_0^1 v_2(tx) \frac{dt}{t} + C, \tag{10}$$

где C – произвольная константа. Рассмотрим оператор [4]

$$M_\lambda v = \int_0^1 v(tx) t^{\lambda-1} dt,$$

который действует на гармонические в S функции и определен при $\lambda > 0$. Очевидно, что операторы M_λ и M_μ коммутируют

$$\begin{aligned} M_\lambda M_\mu v(x) &= M_\lambda \int_0^1 v(tx) t^{\mu-1} dt = \int_0^1 \tau^{\lambda-1} \int_0^1 v(t\tau x) t^{\mu-1} dt d\tau = \\ &= \int_0^1 t^{\mu-1} \int_0^1 v(t\tau x) \tau^{\lambda-1} dt d\tau = M_\mu M_\lambda v(x). \end{aligned}$$

Для оператора M_λ при $\lambda > 0$ верны равенства

$$\begin{aligned} (\Lambda + \lambda)M_\lambda v(x) &= (\Lambda + \lambda) \int_0^1 v(tx)t^{\lambda-1} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i v_{x_i}(tx)t^\lambda dt + \lambda M_\lambda v(x) = \\ &= \int_0^1 (v(tx))'_t t^\lambda dt + \lambda M_\lambda v(x) = v(tx)t^\lambda \Big|_0^1 - \lambda \int_0^1 v(tx)t^{\lambda-1} dt + \lambda M_\lambda v(x) = v(x). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (10) можно переписать единственным образом в виде

$$u_2(x) = \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 v_2(x) + \frac{C}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} 1. \quad (11)$$

Нетрудно подсчитать, что

$$M_\lambda 1 = \int_0^1 t^{\lambda-1} dt = \frac{t^\lambda}{\lambda} \Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda},$$

а поэтому из (11) находим

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 v_2(x) + \frac{C}{32} \frac{1}{n/2+1} \frac{1}{n/2} = \\ &= \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 v_2(x) + \frac{C}{8n(n+2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (7). Подставим в него найденное значение $u_2(x)$. Учитывая, что если $P(t)$ полином, то $P(\Lambda)1 = P(0)$ будем иметь

$$4\Lambda(n/2 + \Lambda)u_1 + \frac{8}{32}(\Lambda + 2)(n/2 + 1 + \Lambda)M_{n/2+1}M_{n/2}M_0v_2(x) + \frac{C}{8n(n+2)}8(n+2) = u_1.$$

Отсюда выводим

$$4\Lambda(n/2 + \Lambda)u_1 = \omega_1(x), \quad (13)$$

где обозначено

$$\omega_1(x) = v_1(x) - \frac{1}{4}(\Lambda + 2)M_{n/2}M_0v_2(x) - \frac{C}{n}.$$

Аналогично исследованию решений уравнения (9), полученное уравнение имеет решение, если

$$\omega_1(0) = v_1(0) - \frac{1}{4}(\Lambda + 2)M_{n/2}M_0v_2(x) \Big|_{x=0} - \frac{C}{n} = 0.$$

Нетрудно видеть, что поскольку $v_2(0) = 0$, то

$$(\Lambda + 2)M_{n/2}M_0v_2(x) \Big|_{x=0} = M_{n/2}v_2(x) \Big|_{x=0} + 2M_{n/2}M_0v_2(x) \Big|_{x=0} = 0,$$

а значит уравнение (13) имеет решение только в случае, если $u_1(0) = \frac{C}{n}$. Выберем произвольную константу C так, что $C = nu_1(0)$, а значит условие разрешимости уравнения (13) будет выполнено. В этом случае $v_2(x)$ из (12) примет вид

$$u_2(x) = \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 v_2(x) + \frac{u_1(0)}{8n(n+2)}. \quad (14)$$

Следовательно, решение уравнения (13) существует и имеет вид

$$u_1(x) = \frac{1}{4} M_{n/2} M_0 \omega_1(x) + C_1,$$

где с учетом найденного значения C

$$\omega_1(x) = v_1(x) - v_1(0) - \frac{1}{4}(\Lambda + 2)M_{n/2}M_0v_2(x) = v_1(x) - v_1(0) - \frac{1}{4}M_{n/2}(1 + 2M_0)v_2(x).$$

Поэтому $u_1(x)$ имеет вид

$$u_1(x) = \frac{1}{4} M_{n/2} M_0 \left(v_1(x) - v_1(0) - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) v_2(x) \right) + C_1. \quad (15)$$

Это решение единственно с точностью до константы C_1 . Теперь обратимся к первому уравнению системы (7). Запишем его в виде

$$\Lambda u_0(x) = \omega_0(x),$$

где обозначено

$$\omega_0(x) = v_0(x) - (\Lambda + 2)u_1(x) - (\Lambda + 4)u_2(x).$$

Как было показано выше, решение этого уравнения существует только в случае $\omega_0(0) = 0$. Проверим выполнимость условия существования решения. Подставим в $\omega_0(x)$ найденные значения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из (15) и (14)

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= v_0(x) - (\Lambda + 2) \left(\frac{1}{4} M_{n/2} M_0 \left(v_1(x) - v_1(0) - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) \right) v_2(x) + C_1 \right) - \\ &\quad - (\Lambda + 4) \left(\frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} M_0 v_2(x) + \frac{v_1(0)}{8n(n+2)} \right) = \\ &= v_0(x) - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) \left(v_1(x) - v_1(0) - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) \right) v_2(x) - 2C_1 - \\ &\quad - \frac{1}{32} M_{n/2+1} M_{n/2} (1 + 4M_0) v_2(x) + \frac{4v_1(0)}{8n(n+2)} = v_0(x) - 2C_1 - \frac{v_1(0)}{2(n+2)} - \\ &\quad - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) (v_1(x) - v_1(0)) + \frac{1}{32} M_{n/2} (2M_{n/2} (1 + 2M_0)^2 - M_{n/2+1} (1 + 4M_0)) v_2(x). \end{aligned}$$

Если положить здесь $x = 0$, то с учетом равенства $v_2(0) = 0$ получим

$$\omega_0(0) = v_0(0) - 2C_1 - \frac{v_1(0)}{2(n+2)}.$$

Для того, чтобы $\omega_0(0) = 0$, необходимо выполнение равенства

$$C_1 = \frac{1}{2} v_0(0) - \frac{v_1(0)}{4(n+2)}.$$

С этим учетом $u_1(x)$ из (15) примет вид

$$u_1(x) = \frac{1}{4} M_{n/2} M_0 \left(v_1(x) - v_1(0) - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) \right) v_2(x) + \frac{1}{2} v_0(0) - \frac{v_1(0)}{4(n+2)}. \quad (16)$$

Поэтому, если произвольную константу C_1 выбрать таким образом, то первое уравнение системы (7) будет разрешимо и его решение запишется в виде

$$u_0(x) = M_0 \omega_0(x) + C_2.$$

С учетом найденного значения $\omega_0(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} u_0(x) &= M_0 (v_0(x) - v_0(0)) - \frac{1}{4} M_{n/2} (1 + 2M_0) M_0 (v_1(x) - v_1(0)) + \\ &\quad + \frac{1}{32} M_{n/2} (2M_{n/2} (1 + 2M_0)^2 - M_{n/2+1} (1 + 4M_0)) M_0 v_2(x) + C_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Итак, решение системы уравнений (7) построено и находится по формулам (14), (16) и (17), а значит тригармоническая функция $u(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + |x|^4 u_2(x)$ является решением задачи (1)–(2). Условие существования этого решения $v_2(0) = 0$ можно переписать в терминах граничных функций в виде (3). Решение задачи единственно с точностью до константы C_2 . Выполнимость граничных условий в указанном смысле обеспечивается непрерывностью результата применения коэффициентов операторной матрицы $A(\Lambda)$ к гармоническим функциям $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$, находимым из (14), (16) и (17). Нетрудно видеть, что степени оператора Λ из матрицы $A(\Lambda)$ при действии на эти функции «компенсируются» операторами M_λ и поэтому дополнительной гладкости, кроме непрерывности функций $v_0(x)$, $v_1(x)$ и $v_2(x)$, не требуется. Последнее же обеспечивается непрерывностью граничных функций $\varphi_0(s)$, $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$. Теорема доказана.

Литература

1. Gazzola, F. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. / F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers // *Lecture Notes in Mathematics*. – 2010. – Vol. 1991. – Berlin: Springer. – 423 p.
2. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2003. – Vol. 287, Issue 2. – P. 577–592.
3. Karachik, V.V. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball / V.V. Karachik, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2015. – Vol. 2015, № 244. – P. 1–9.
4. Karachik, V.V. On one mathematical model described by boundary value problem for the biharmonic equation / V.V. Karachik, B.T. Torebek // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 40–52.
5. Karachik, V.V. On an Uniqueness and Correct Solvability of the Biharmonic Boundary Value Problem / V.V. Karachik, B.T. Torebek // *AIP Conference Proceedings*. – 2016. – Vol. 1759. – 020045.
6. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2013. – Т. 16, № 4(56). – С. 61–74.
7. Гулящих, И.А. О задаче Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / И.А. Гулящих // *Системы компьютерной математики и их приложения*. – 2015. – № 16. – С. 144–145.
8. Карачик, В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения / В.В. Карачик // *Дифференциальные уравнения*. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461.
9. Кангужин, Б.Е. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре / Б.Е. Кангужин, Б.Д. Кошанов // *Уфимский математический журнал*. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.
10. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // *Математические труды*. – 2016. – № 2. – С. 86–108.
11. Turmetov, B. On solvability of the Neumann boundary value problem for non-homogeneous biharmonic equation / B. Turmetov, R. Ashurov // *British J. Math. and Comp. Sci.* – 2014. – Vol. 4, № 4. – P. 557–571.
12. Кошанов, Б.Д. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости / Б.Д. Кошанов, А.П. Солдатов // *Дифференциальные уравнения*. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1666–1681.
13. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика*. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.
14. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
15. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // *Математические заметки*. – 2008. – Т. 83, № 3. – С. 370–380.

Поступила в редакцию 19 апреля 2017 г.

SOLVABILITY OF ONE NEUMANN-TYPE PROBLEM FOR 3-HARMONIC EQUATION IN A BALL**I.A. Gulyashikh**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: gjarist@mail.ru

A boundary-value problem for 3-harmonic equation in a unit ball, containing in the boundary conditions the Laplacian levels up to the second order inclusively, and the normal derivative, is considered. This problem is a natural Neumann-type continuation of the Riquier problem for a 3-harmonic equation. The problem is more general than the considered one, but it has been researched before by V.V. Karachik and B. Torebek for a biharmonic equation. By the means of reducing the initial boundary-value problem to a system of three differential equations of the third order in harmonic equations in a unit ball of functions, the necessary and sufficient condition for solvability of the initial Neumann-type boundary-value problem is discovered. This condition is obtained as a vanishing of the integral over the unit sphere from one of the boundary functions of the problem. Besides, the method of theorem proof allows framing the solution of the considered Neumann-type problem in an explicit form. Moreover, it is determined in the article that solution of the initial boundary-value problem is unique up to an arbitrary constant.

Keywords: Dirichlet problem; Neumann problem; 3-harmonic equation; solvability conditions.

References

1. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. *Lecture Notes in Mathematics*, 2010, Vol. 1991, Berlin, Springer, 423 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12245-3
2. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, Vol. 287, Issue 2, pp. 577–592. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00583-3
3. Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T. Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, Vol. 2015, no. 244, pp. 1–9.
4. Karachik V.V., Torebek B.T. On one mathematical model described by boundary value problem for the biharmonic equation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2016, Vol. 9, no. 4, pp. 40–52. DOI: 10.14529/mmp160404
5. Karachik V.V., Torebek B.T. On an Uniqueness and Correct Solvability of the Biharmonic Boundary Value Problem. *AIP Conference Proceedings*, 2016, Vol. 1759, 020045, 4 p. DOI: 10.1063/1.4959659
6. Karachik V.V., On solvability conditions for a Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2013, Vol. 16, no. 4, pp. 61–74. (in Russ.).
7. Gulyashchikh I.A. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya*, 2015, no.16, pp. 144–145. (in Russ.).
8. Karachik V.V. Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation. *Differential Equations*, 2014, Vol. 50, no. 11, pp. 1449–1456. DOI: 10.1134/S0012266114110032
9. Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Necessary and sufficient conditions of resolvability boundary problems for non-uniform polyharmonics equations in ball. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010, Vol. 2, Issue 2, pp. 41–52. (in Russ.).
10. Karachik V.V. *Mat. Tr.*, 2016, Vol. 19, no. 2, pp. 86–108. (in Russ.). DOI: 10.17377/mattrudy.2016.19.203

11. Turmetov B., Ashurov R. On solvability of the Neumann boundary value problem for non-homogeneous biharmonic equation. *British J. Math. and Comp. Sci.*, 2014, Vol. 4, no. 4, pp. 557–571. DOI : 10.9734/BJMCS/2014/6825

12. Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary Value Problem with Normal Derivatives for a Higher-Order Elliptic Equation on the Plane. *Differential Equations*, 2016, Vol. 52, Issue 12, pp. 1594–1609. DOI: 10.1134/S0012266116120077

13. Karachik V.V. Polynomial solutions to Dirihlet boundary value problem for the 3-harmonic equation in a ball. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2012, Vol. 5, Issue 4, pp. 527–546. (in Russ.).

14. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* (Introduction to the theory of cubature formulas). Moscow, Nauka Publ., 1974, 808 p. (in Russ.).

15. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes*, 2008, Vol. 83, no. 3, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X

Received April 19, 2017

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

П.О. Москвичева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: pelageia@bk.ru

Уравнения соболевского типа являются частью обширной области неклассических уравнений математической физики. Они возникают при моделировании различных процессов в естественных и технических науках.

Исследуется устойчивость стационарного решения эволюционного уравнения, возникшего в теории фильтрации и заданного в ограниченной области. Для данного уравнения рассматривается начально-краевая задача. Получены условия, при которых нулевое решение уравнения устойчиво.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа; относительно p -секториальные операторы; устойчивость; функционал Ляпунова.

Введение

Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u - \beta \Delta^2 u + \gamma u + f \quad (1)$$

описывает эволюцию формы свободной поверхности фильтрующейся жидкости (см. [1]). Здесь функция $u = u(x, t)$ имеет физический смысл потенциала скорости движения свободной поверхности. Вещественные параметры α, β, γ и λ характеризуют свойства среды, причем $\alpha, \beta, \gamma > 0$, а λ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Для уравнения (1) на боковой границе $\partial\Omega \times R$ цилиндра $\Omega \times R$ зададим краевые условия

$$u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times R, \quad (2)$$

а также начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0, x \in \Omega. \quad (3)$$

Нас интересует устойчивость нулевого решения однородного уравнения (1) (т. е. такого, у которого $f = 0$). Устойчивость мы будем понимать в смысле Ляпунова.

Отметим, что ранее уравнение (1) изучалось в различных аспектах. Например, в работе [2] исследовалась разрешимость начально-конечной задачи для уравнения (1). Устойчивость уравнения (1), заданного на конечном связном ориентированном графе, в терминах экспоненциальной дихотомии рассматривалась в [3].

Статья, кроме введения и списка литературы, состоит из двух частей. В первой проводится редукция задачи (1)–(3) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \quad (4)$$

для абстрактного линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \quad (5)$$

Затем применяются методы теории относительно p -секториальных операторов. Во второй части проводится исследование устойчивости нулевого решения задачи (1)–(3) методом функционала Ляпунова, адаптированного для случая нормированных пространств. Подробно этот метод описан в работе [4], в которой отмечается тот факт, что при переходе от полных метрических пространств к нормированным пространствам (без требования их полноты), с одной стороны, теряется равномерность в устойчивости и асимптотической устойчивости, а с другой – значительно расширяется диапазон решаемых задач.

Фазовое пространство

Пусть U и F – банаховы пространства; оператор $L: U \rightarrow F$ является линейным и непрерывным, а оператор $M: U \rightarrow F$ является линейным, замкнутым и плотно определенным. Рас-

смотрим L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} : F \rightarrow U \text{ линейен и непрерывен}\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M [5].

Вектор-функцию $u \in C^1((0, T); U)$ будем называть *решением* задачи (4)–(5), если она, во-первых, удовлетворяет уравнению (5), а во-вторых, $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0$.

В случае (L, p) -секториальности оператора M существует аналитическая разрешающая полугруппа абстрактного линейного однородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu.$$

Одной из таких полугрупп будет семейство операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, t \in R_+.$$

Обозначим $U^0 = \ker U^* = \{\varphi \in U : U^t \varphi, t \in R_+\}$, $U^1 = \text{im } U^* = \{v \in U : \lim_{t \rightarrow 0+} U^t v = v\}$. Аналогично $F^0(F^1)$ – ядро (образ) аналитической полугруппы

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L(\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, t \in R_+.$$

Пусть $P(Q)$ – проектор на $U^1(F^1)$ вдоль $U^0(F^0)$. Введем обозначения

$$H = M_0^{-1} L_0, R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, t \in R_+.$$

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -секториален и $U^0 \oplus U^1 = U$, $F^0 \oplus F^1 = F$. Тогда для любых $T \in R_+$, $f \in C^{p+1}([0, T]; F)$ и $u_0 \in \{u \in U : (I - P)u = -\sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (I - Q)^{f^{(q)}}(0)\}$ существует единственное решение и задачи (4)–(5), представимое в виде

$$u(t) = \sum_{q=0}^p H_q M_0^{-1} (I - Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds.$$

Для того чтобы редуцировать задачу (1)–(3) к задаче (4)–(5), введем в рассмотрение банаховы пространства $\mathcal{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ и $\mathcal{F} = L_2(\Omega)$, а также операторы $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2 + \gamma$. Причем область определения оператора M есть

$$\text{dom } M = \{u \in W_2^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Обозначим $\{\varphi_k : k \in N\}$ — ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения $\Delta u = 0$ в области Ω , занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in N\}$ с учетом их кратности.

По построению оператор $L : U \rightarrow F$ и $M : \text{dom } M \rightarrow F$ линейны и непрерывны, а значит оператор $M : U \rightarrow F$ линейен замкнут и плотно определен. Редукция задачи (1)–(3) к задаче (4)–(5) закончена.

Теперь покажем, что оператор $M(L, p)$ -секториален. Поскольку

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) + \alpha\lambda_k + \beta\lambda_k^2 - \gamma},$$

то спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{-\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2 + \gamma}{(\lambda - \lambda_k)} : k \in N \setminus \{l : \lambda - \lambda_k = 0\} \right\}.$$

В силу того, что точки спектра оператора Лапласа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественны, дискретны, конечнократны и сгущаются только к $+\infty$, то относительный спектр $\sigma^L(M)$ обладает теми же свойствами. А из формул

$$R_{\mu}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \mu_k} (\mu L - M)^{-1} L (vL - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu - \mu_k)(v - v_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

аналогично [5, гл. 5] следует сильная (L, p) -секториальность оператора M , из которой вытекает $(L, 0)$ -секториальность оператора M , а также выполнение условий $U^0 \oplus U^1 = U$, $F^0 \oplus F^1 = F$ и существование линейного непрерывного оператора $L_1^{-1} : F^1 \rightarrow U^1$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. При любых $\alpha, \beta, \gamma \in R_+$, $\lambda \in R$ таких, что либо λ не является корнем уравнения $\alpha a + \beta a^2 - \gamma = 0$, либо $\lambda \notin \{\lambda_k\}$ оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален.

Фазовое пространство задачи (1)–(3) имеет вид

$$B = \begin{cases} U, & \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}, \\ \{u \in U : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda = \{\lambda_k\} \text{ и } \lambda \text{ не является корнем уравнения } a + \beta a^2 - \gamma = 0\}. \end{cases}$$

Устойчивость

Пусть H – нормированное пространство. Будем говорить, что на H задан поток, если существует отображение S такое, что для любого $u \in H$ и некоторого $\tau = \tau(u) \in R_+$ выполнены следующие условия:

- (i) $S = S(t, u) \in H$ при всех $t \in (-\tau, \tau)$; $S(0, u) = u$;
- (ii) $S(t + s, u) = S(t, S(s, u))$ при всех $t + s \in (-\tau, \tau)$.

Точка $u \in H$, такая, что

- (iii) $S(t, u) = u, t \in R$, называется *стационарной точкой* потока S .

Определение 1. Стационарная точка u потока S называется

- (i) *устойчивой* (по А.М. Ляпунову), если для любой окрестности O_u точки u существует (возможно, другая) окрестность \dot{O}_u той же точки, что $S(t, v) \in \dot{O}_u$ для любых $v \in O_u$ и $t \in R_+$;
- (ii) *асимптотически устойчивой* (по А.М. Ляпунову), если она устойчива и, кроме того, для любой точки v из некоторой окрестности O_u точки u выполнено $S(t, v) \rightarrow u$ при $t \rightarrow \infty$.

Определение 2. Функционал $V \in C(H, R)$ называется *функционалом Ляпунова* потока S , если

$$\dot{V}(u) = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (V(S(t, u)) - V(u)) \leq 0$$

для всех $u \in O_u$.

Теорема 3. Пусть u – стационарная точка потока S на O_u , если для потока S существует функционал Ляпунова такой, что

- (i) $V(u) = 0$;
- (ii) $V(v) \geq \varphi(\|v - u\|)$,

где φ – строго возрастающая непрерывная функция, такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(r) > 0$, тогда точка u устойчива.

Теорема 4. Пусть выполнены условия Теоремы 3 и существует строго возрастающая непрерывная функция ψ , такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(r) > 0$ при $r \in R_+$, причем $\dot{V}(v) \leq -\psi(\|v - u\|)$, тогда точка u асимптотически устойчива.

Теперь применим теоремы 3 и 4 к нашей задаче. Для этого построим нормированное пространство H . В пространстве U зададим норму пространства L_2 . Таким образом, на H будет существовать поток, который задается формулой

$$S(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) u e^{\mu t} d\mu, t \in R.$$

Здесь замкнутый контур γ ограничивает область, которая содержит L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M , а оператор-функция $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$. Очевидно, что точка нуль – это стационарная точка данного потока. Зададим функцию Ляпунова формулой

$$V(u) = \int_{\Omega} (u_x^2 + \lambda u^2) dx.$$

Очевидно, что $V(0) = 0$, а в силу теоремы вложения Соболева $V(u) \geq c \|u\|^2$. После скалярного умножения в L_2 уравнения (1) на u и применения интегрирования по частям с учетом условий (2) мы получим, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_x^2 + \lambda u^2) dx = -\alpha \int_{\Omega} u_x^2 dx - \beta \int_{\Omega} u_{xx}^2 dx - \gamma \int_{\Omega} u^2 dx$$

или

$$\dot{V}(u) \leq -c \|u\|_U^2,$$

где $c = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. Нулевое решение задачи (1)–(3) асимптотически устойчиво для любых $\alpha, \beta, \gamma \in R_+$ и $\lambda \geq 0$.

Литература

1. Свиридчук, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридчук, М.В. Суханова // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 508–515.
2. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 15 (115). – Вып. 1. – С. 23–26.
3. Свиридчук, Г.А. Эволюционные линейные уравнения соболевского типа на графе / Г.А. Свиридчук, П.О. Пивоварова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 8. – С. 1147–1152.
4. Загребина, С.А. Устойчивость линейных уравнений ХOFFA на графе / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 11–16.
5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

Поступила в редакцию 6 июля 2017 г.

STABILITY OF THE EVOLUTIONARY LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATION**P.O. Moskvicheva**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: pelageia@bk.ru

Sobolev type equations are a part of extensive area of non-classical equations of mathematical physics. These are equations that are not solved respective to the highest derivative with respect to time. Research of different problems for equations of the given type nowadays are very relevant, as such equations appear during modeling of different processes in natural and engineering sciences. In this article, stability of stationary solution of an evolutionary equation, which appeared in the filter theory and which describes development of form of the filterable liquid's free surface, is researched.

For this equation, an initial boundary-value problem in limited area is considered. The article consists of an introduction, a list of references and two parts. In the first part, general concepts and theory assertions concerning p -sectorial operators are given. After that, reduction of the considered problem to the Cauchy problem for a Sobolev type abstract linear equation, by the means of selecting the corresponding Banach spaces and linear operators, is carried out. Then the phase space of our problem is described.

In the second part, general concepts of the stability theory such as flow, stationary point of the flow, and Lyapunov functional, are given. Theorems of stability and asymptotical stability of a stationary point of the flow are given. In this article, the method of Lyapunov functional, modified for the case of complete normalized spaces, is used. It should be noted, that modification of the method lies in transition from incomplete normalized spaces to complete normalized spaces. As a result, the uniformity of stability and asymptotic stability is lost, but the class of problems being solved gets considerably expanded. The main result of the article are conditions formulated as a theorem of stability and asymptotic stability of zero solution of the considered problem.

Keywords: Sobolev type equation; relatively p -sectorial operators; stability; Lyapunov functional.

References

1. Sviridyuk G.A., Sukhanova M.V. Solvability of the Cauchy problem for linear singular equations of evolution type. *Differential Equations*, 1992, Vol. 28, no. 3, pp. 438–444.

2. Zagrebina S.A., Solovyeva N.P. The Initial-Finite Problem for the Evolution Sobolev-Type Equations on a Graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2008, no. 15 (115), Issue 1, pp. 23–26. (in Russ.).

3. Sviridyuk G.A., Pivovarova P.O. Evolution linear equations of the Sobolev type on a graph. *Differential Equations*, 2010, Vol. 46, Issue 8, pp. 1157–1163. DOI: 10.1134/S0012266110080094

4. Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. The stability of the Hoff linear equations on a graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2010, no. 16(192), Issue 5, pp. 11–16. (in Russ.).

5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

Received July 6, 2017

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО КОСИНУСА

М.С. Токмачев

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: mtokm@yandex.ru

Исследовано полученное в результате характеристики трехпараметрическое вероятностное распределение, являющееся обобщением известных распределений: однопараметрического распределения гиперболического косинуса (секанса) и двухпараметрического распределения Майкснера. Приведено доказательство его безграничной делимости. По характеристической функции в общем виде восстановлена плотность распределения вероятностей, выраженная через бета-функцию комплексно-сопряженных аргументов. Наряду с единой формулой, при целых значениях параметра m для функции плотности выведены соотношения в элементарных функциях.

Ключевые слова: распределение типа гиперболического косинуса; характеристическая функция; безгранично делимое распределение; бета-функция.

Введение

Вероятностным распределением типа гиперболического косинуса называют трехпараметрическое распределение с характеристической функцией

$$f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-m}, \text{ где } \mu, \beta, m \in \mathbb{R}, m > 0, \beta \neq 0. \quad (1)$$

Впервые функция (1) получена автором при решении задачи характеристики распределений свойством постоянства регрессии квадратичной статистики Q на линейную статистику A [1]:

$$E(Q | A) = E(Q), \text{ где } Q = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} X_j X_k; \quad A = \sum_{j=1}^n X_j. \quad (2)$$

X_1, X_2, \dots, X_n – независимые, одинаково распределенные случайные величины. В зависимости от соотношения коэффициентов статистики Q условие постоянства регрессии (2) является характеристическим (характеристическим) для ряда известных распределений [2–4] и, в частности, распределения типа гиперболического косинуса.

Указанное трехпараметрическое распределение является обобщением двухпараметрического распределения Майкснера (*J. Meixner*) [5, 6] с характеристической функцией

$$f(t) = (\operatorname{ch} t - i\theta \operatorname{sh} t)^{-m}, \quad m > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Распределение Майкснера получается, если в (1) положить $\beta = m$ и переобозначить параметр $\mu/\beta = \mu/m = \theta$. Наличие третьего параметра позволяет получить большее разнообразие распределений: каждое двухпараметрическое распределение Майкснера с конкретными параметрами (θ, m) является семейством распределений с параметром β . Например, при $\theta = 2, m = 1$ получаем тройку параметров $(\mu = 2\beta, m = 1, \beta)$, где $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. В частности, эти параметры (μ, m, β) могут быть $(2; 1; 1)$ – распределение Майкснера, а также $(1; 1; 0,5)$, $(-1; 1; -0,5)$, $(4; 1; 2)$ и т. д. Заметим, что в трехпараметрическом распределении математическое ожидание случайной величины равно параметру μ . При этом параметр μ является параметром не только сдвига, но и участвует в формировании дисперсии и других моментов.

В частности, при $\mu = 0, m = 1$ из (1) получаем характеристическую функцию однопараметрического распределения гиперболического косинуса (секанса). При сдвиге случайной величины, распределенной по закону гиперболического косинуса, на величину λ получим двухпараметрическое распределение, известное как распределение Чампернауна [7].

Таким образом, распределение типа гиперболического косинуса оказывается обобщением двухпараметрического распределения Майкснера, которое, в свою очередь, является обобщением однопараметрического распределения гиперболического косинуса на случай $\mu \neq 0$.

В данной работе восполняются пробелы в доказательной части теории: представлено обоснование найденного ранее распределения и выведен ряд соотношений.

Исследование характеристической функции

Докажем, что функция $f(t)$ вида (1), полученная как результат характеристики распределений свойством постоянства регрессии, действительно является характеристической функцией.

Теорема 1. Функция

$$\frac{1}{q(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t}, \quad (3)$$

где μ, β, m – действительные постоянные, $\beta, m \neq 0$, является характеристической функцией некоторого распределения.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы потребуются две леммы.

Лемма 1. Функция

$$q(t) = \operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t, \quad (4)$$

где μ, β, m – действительные константы, $\beta, m \neq 0$, является целой функцией порядка 1.

Доказательство леммы 1. Для доказательства леммы 1 достаточно проверить условия Коши–Римана применительно к функции комплексной переменной $q(z)$ вида (4), которые справедливы на всей комплексной плоскости. Порядок целой функции $q(z)$ определяют функции $\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} z$

и $\operatorname{sh} \frac{\beta}{m} z$, которые являются целыми функциями первого порядка.

Лемма 2. Задана функция

$$q(z) = \operatorname{ch} \frac{\beta}{m} z - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} z,$$

где μ, β, m – действительные константы, $\beta, m \neq 0$. Тогда а) $q(z)$ имеет лишь чисто мнимые нули; б) все нули функции $q(z)$ простые; в) $z = 0$ не является нулем функции $q(z)$.

Доказательство леммы 2. Положим, $q(z) = 0$. Решая указанное уравнение с использованием формулы $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$, получаем $\operatorname{ctg} i \frac{\beta}{m} z = \frac{\mu}{\beta}$. Отсюда находим нули функции $q(z)$:

$$z_k = -\frac{im}{\beta} \left(\operatorname{arccctg} \frac{\mu}{\beta} + \pi k \right) \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Из (5) следует справедливость утверждений а) и б) леммы 2. Утверждение в) проверяется непосредственно. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Для целой функции $q(z)$ вида (4) применим теорему Вейерштрасса о факторизации целых функций [8]:

$$q(z) = z^{S_0} e^{\eta(z)} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{z/z_k} \right]^{m_k}.$$

Упростим данное выражение, используя утверждения леммы 1: так как $z = 0$ не является нулем функции $q(z)$, то $S_0 = 0$; так как все корни z_k простые, то все m_k равны 1, $k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно,

$$q(z) = e^{\eta(z)} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{z/z_k}.$$

Исходя из (5), обозначим $z_k = -\frac{i}{B_k}$, $k \in \mathbb{Z}$, где B_k – действительные и различные при разных k . Тогда

$$q(z) = e^{\eta(z)} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - iB_k z) e^{iB_k z}. \quad (6)$$

Поскольку, согласно лемме 1, $q(z)$ – целая функция первого порядка, то $\eta(z)$ – многочлен степени не выше первой, а именно: $\eta(z) = az + b$. Из условия $q(0) = 1$ и из (6) следует, что $b = 0$.

Таким образом, (6) принимает вид

$$q(z) = e^{az} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - iB_k z) e^{iB_k z}.$$

Перейдем к действительной переменной t , тогда

$$q(t) = e^{at} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - iB_k t) e^{iB_k t}. \quad (7)$$

Для определения a продифференцируем функцию $q(t)$, заданную соотношением (7):

$$q'(t) = ae^{at} \left(\prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - iB_k t) e^{iB_k t} \right) + e^{at} \left(\prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - iB_k t) e^{iB_k t} \right)'. \quad (8)$$

Из (8) следует $q'(0) = a + iB$, где B – действительное число. Однако, из (4) получаем $q'(0) = -i \frac{\mu}{m}$. Два последних соотношения приводят к выводу, что a – чисто мнимое (возможно, $a = 0$). Положим, $a = iA$, где A – действительная постоянная.

Подставив это значение в (7), приходим к выражению

$$q(t) = e^{iAt} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - iB_k t) e^{iB_k t}.$$

Тогда

$$\frac{1}{q(t)} = e^{-iAt} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - iB_k t} \right) e^{-iB_k t}. \quad (9)$$

Функции-сомножители в правой части (9) являются характеристическими функциями:

e^{-iAt} , $e^{-iB_k t}$ – характеристические функции вырожденного распределения,

$\frac{1}{1 - iB_k t}$ – характеристическая функция гамма-распределения при $B_k > 0$ и характеристическая функция распределения, сопряженного с гамма-распределением при $B_k < 0$.

Введем функцию $h_n(t)$ следующим образом

$$h_n(t) = e^{-iAt} \prod_{k=-n}^n \left(\frac{1}{1 - iB_k t} \right) e^{-iB_k t}. \quad (10)$$

Согласно известному свойству произведения характеристических функций, функция $h_n(t)$ при любом конечном n является характеристической. Из (9), (10) следует, что

$$\frac{1}{q(t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t). \quad (11)$$

По следствию из теоремы непрерывности характеристических функций ([9], следствие 2 теоремы 3.6.1) предельная функция $\frac{1}{q(t)}$ также является характеристической функцией. Таким образом, теорема 1 доказана. Отметим, что соотношения (10), (11) представляют структуру характеристических функций вида (3).

Исследуем найденное распределение на безграничную делимость.

Теорема 2. Функция

$$\frac{1}{q(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t}$$

является безгранично делимой характеристической функцией.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1, функция $\frac{1}{q(t)}$ является характеристической функцией. Обратимся к доказательству теоремы 1.

Из (10) следует, что характеристическая функция $h_n(t)$ является произведением конечного числа безгранично делимых характеристических функций гамма-распределения и вырожденного распределения. Следовательно ([9], теорема 5.3.2), $h_n(t)$ также безгранично делима.

Характеристическая функция $\frac{1}{q(t)}$ безгранично делима, поскольку, согласно (11), является пределом последовательности безгранично делимых характеристических функций $h_n(t)$ ([9], теорема 5.3.3).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Функция $f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-m}$ при любом $m > 0$ является безгранично делимой характеристической функцией.

Доказательство теоремы 3. Поскольку любая положительная степень безгранично делимой характеристической функции сама является характеристической функцией ([9], следствие теоремы 5.3.3), а функция $\frac{1}{q(t)}$ безгранично делима, согласно теореме 2, то $f(t) = \left(\frac{1}{q(t)} \right)^m$, $m > 0$ также является характеристической функцией, причем безгранично делимой. Теорема 3 доказана.

Вывод соотношений для плотности распределения вероятностей

Плотность распределения $p_m(x)$ как обратное преобразование Фурье характеристической функции $f(t)$ вида (1) при $\beta > 0$ имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} p_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx} dt}{\left(\operatorname{ch} \beta t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \beta t \right)^m} = \\ &= \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi (\beta^2 + \mu^2)^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu} \right)^{\frac{imx}{2\beta}} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $B(p; q)$ – бета-функция, а сомножитель с мнимой единицей имеет вид:

$$A \equiv \left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu} \right)^i = \begin{cases} e^{\operatorname{arctg} \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2}} & \text{при } \beta^2 - \mu^2 > 0, \\ e^{\operatorname{arctg} \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2} + \pi \operatorname{sign} \mu} & \text{при } \beta^2 - \mu^2 < 0, \\ e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \mu} & \text{при } \beta^2 - \mu^2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

При целых m функцию плотности в (12) можно выразить в элементарных функциях.

Теорема 4. При $m = 1$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_1(x) = \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}}. \quad (14)$$

Справедливость (14) следует из (12) при использовании известных соотношений:

$$B\left(\frac{1}{2} - z; \frac{1}{2} + z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \quad \operatorname{cos} iz = \operatorname{ch} z.$$

Теорема 5. При $m = 2$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_2(x) = \frac{2xA^{\frac{x}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}}. \quad (15)$$

Справедливость (15) следует из (12) при использовании известных соотношений

$$B(1 + z; 1 - z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}, \quad \operatorname{sin} iz = i \operatorname{sh} z.$$

Также отметим, что при целых m случайная величина X с характеристической функцией вида (1) представляет собой сумму m независимых случайных величин $X_1 + X_2 + \dots + X_m$, каждая из которых обладает характеристической функцией

$$f(t) = \left(\operatorname{ch} \frac{\beta}{m} t - i \frac{\mu}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta}{m} t \right)^{-1}.$$

Следовательно, функция $p_2(x)$ вида (15) как плотность вероятностей распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2 является сверткой:

$$p_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y) p_1(x - y) dy, \quad \text{где } p_1(y) = p_1\left(y \mid \frac{\mu}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Теорема 6. При $m = 3, 5, 7, \dots$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_m(x) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^2 (m-1)!} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{ch} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{n=1}^{m-1} \left[(2n-1)^2 \beta^2 + m^2 x^2 \right]. \quad (16)$$

Доказательство теоремы 6. Итак, полагаем $m = 2k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда

$$\begin{aligned} B\left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right) &= B\left(k + \frac{1}{2} - \frac{imx}{2\beta}; k + \frac{1}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(k + \left(\frac{1}{2} - \frac{imx}{2\beta}\right)\right) \Gamma\left(k + \left(\frac{1}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right)\right)}{\Gamma(2k + 1)} = \frac{\Gamma(k + z) \Gamma(k + \bar{z})}{(2k)!}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция, $z = \frac{1}{2} - \frac{imx}{2\beta}$, z и \bar{z} – комплексно-сопряженные величины.

По свойствам гамма-функции

$$\Gamma(k + z) = (k - 1 + z)(k - 2 + z) \dots z \Gamma(z), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - \omega\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \omega\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \omega}$$

получаем

$$\Gamma(k + z) \Gamma(k + \bar{z}) = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{imx}{2\beta}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{imx}{2\beta}\right) \dots \left(\frac{2k-1}{2} - \frac{imx}{2\beta}\right) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) \dots \left(\frac{2k-1}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) \right] \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{imx}{2\beta} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) = \\ & = \left(\frac{1}{4} + \frac{m^2 x^2}{4\beta^2} \right) \left(\frac{9}{4} + \frac{m^2 x^2}{4\beta^2} \right) \dots \left(\frac{(2k-1)^2}{4} + \frac{m^2 x^2}{4\beta^2} \right) \frac{\pi}{\cos \frac{i\pi m x}{2\beta}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении перейдем к функции гиперболического косинуса, $\cos i\omega = \operatorname{ch} \omega$, заменим значение k на $\frac{m-1}{2}$ и вынесем общие множители слагаемых в скобках. Тогда

$$B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) = \frac{\pi(\beta^2 + m^2 x^2)(9\beta^2 + m^2 x^2) \dots ((m-2)^2 \beta^2 + m^2 x^2)}{2^{m-1} \beta^{m-1} (m-1)! \operatorname{ch} \frac{\pi m x}{2\beta}}. \quad (17)$$

Следовательно, исходя из выражения (12) и соотношений (13), (17), для функции плотности вероятностей при $m = 3, 5, 7, \dots$ приходим к формуле (16). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. При $m = 4, 6, 8, \dots$ функция плотности $p_m(x)$ имеет вид:

$$p_m(x) = \frac{m^2 x}{2(\beta^2 + \mu^2)^2 (m-1)!} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi m x}{2\beta}} \prod_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} (4n^2 \beta^2 + m^2 x^2). \quad (18)$$

Доказательство теоремы 7. Полагаем $m = 2k$ ($k = 2, 4, \dots$). Тогда

$$\begin{aligned} B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) &= B \left(k - \frac{ikx}{\beta}; k + \frac{ikx}{\beta} \right) = \\ &= \frac{\Gamma \left(k - \frac{ikx}{\beta} \right) \Gamma \left(k + \frac{ikx}{\beta} \right)}{\Gamma(2k)} = \frac{\Gamma(k-z) \Gamma(k+z)}{(2k-1)!}, \text{ где } z = \frac{ikx}{\beta}, k = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Вновь используем свойства гамма-функции:

$$\Gamma(k+z) = (k-1+z)(k-2+z) \dots (1+z)\Gamma(1+z), \quad \Gamma(k-z) = (k-1-z)(k-2-z) \dots (1-z)\Gamma(1-z),$$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(1+z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

и получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(k-z)\Gamma(k+z) &= \left((k-1)^2 - z^2 \right) \left((k-2)^2 - z^2 \right) \dots \left(1^2 - z^2 \right) \Gamma(1-z)\Gamma(1+z) = \\ &= \left(1-z^2 \right) \left(4-z^2 \right) \dots \left((k-1)^2 - z^2 \right) \frac{\pi z}{\sin \pi z} = \left(1 + \frac{k^2 x^2}{\beta^2} \right) \left(4 + \frac{k^2 x^2}{\beta^2} \right) \dots \left((k-1)^2 + \frac{k^2 x^2}{\beta^2} \right) \frac{\pi \frac{ikx}{\beta}}{\sin \pi \frac{ikx}{\beta}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении перейдем к функции гиперболического синуса, $\sin i\omega = i \operatorname{sh} \omega$, и вынесем общие множители слагаемых в скобках. Тогда

$$B \left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta} \right) = \frac{(\beta^2 + k^2 x^2)(4\beta^2 + k^2 x^2) \dots ((k-1)^2 \beta^2 + k^2 x^2) \pi k x}{\beta^{2k-1} (2k-1)! \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{\beta}}. \quad (19)$$

Таким образом, согласно соотношениям (13), (19), для функции плотности вероятностей, заданной (12), при $m = 4, 6, 8, \dots$ приходим к формуле (18). Теорема 7 доказана.

Можно доказать, что в общем случае

$$E(X) = \mu; \quad \sigma^2 = \frac{\beta^2 + \mu^2}{m}; \quad \gamma_1 = \frac{2\mu}{m\sigma}; \quad \gamma_2 = \frac{2}{m} + \left(\frac{2\mu}{m\sigma} \right)^2 = \frac{2}{m} + \gamma_1^2,$$

где $\sigma^2 = V(X)$, $\gamma_1 = As(X)$, $\gamma_2 = Ex(X)$. Исходя из указанных соотношений, легко найти зависимость параметров μ , β , m от первых моментов:

$$\mu = E(X); \quad m = \frac{2\mu}{\gamma_1\sigma} = \frac{2}{\gamma_2 - \gamma_1^2}; \quad \beta^2 = m\sigma^2 - \mu^2.$$

В статистическом анализе данных найденные соотношения позволяют использовать метод моментов. При обработке реальных данных из области медицины и здравоохранения (различные показатели физического состояния и показатели заболеваемости населения) с помощью разработанного программного обеспечения установлено согласие многих из них с распределением типа гиперболического косинуса [11].

Заключение

Можно найти примеры применения указанного распределения кроме вероятностных. В частности, в [12, 13] представлено множество нетривиальных интегралов, вычисляемых на основе моментов распределения при различных параметрах. В [14] также из найденных взаимосвязи и структуры моментов распределения типа гиперболического косинуса сформировано структурированное множество в виде бесконечной числовой призмы, исследован ряд её сечений, в частности, в связи с числами Стирлинга первого рода и коэффициентами полиномов Бесселя. В [15] в качестве сечений числовой призмы представлены и систематизированы как широко известные классические, так и числовые треугольники, и числовые последовательности, ранее в литературе не встречавшиеся. Для них найдены многие интересные свойства и соотношения.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.949.2014/К.

Литература

1. Токмачев, М.С. Характеризация распределения типа гиперболического косинуса свойством постоянства регрессии / М.С. Токмачев // Деп. в ВИНТИ 21.06.94. – № 1542-В94. – 11 с.
2. Токмачев, М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. – 1995. – № 1. – С. 139–141.
3. Каган, А.М. Характеризационные задачи математической статистики / А.М. Каган, Ю.В. Линник, С.Р. Рао. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
4. Клебанов, Л.Б. Когда квадратичная статистика имеет постоянную регрессию на выборочное среднее? / Л.Б. Клебанов // Теория вероятн. и её примен. – 1979. – XXIV, 3 – С. 646–648.
5. Lai, C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions / C.D. Lai // Australian & New Zealand Journal of Statistics. – 1982. – Vol. 24. – P. 221–233.
6. Lai, C.D. A characterization of gamma, Meixner hypergeometric and negative binomial distributions based on canonical measures / C.D. Lai // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. – 1982. – Vol. 34. – Issue 1. – P. 359–363.
7. Вадзинский, Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
8. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов – М.: Наука, 1974. – Т. 3, Ч. 2. – 672 с.
9. Лукач, Е. Характеристические функции / Е. Лукач. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
10. Токмачев, М.С. Распределение типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев, А.М. Токмачев // Вестник НовГУ. – 2001. – № 17. – С. 85–88.
11. Токмачев, М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Техн. науки. – 2005. – № 34. – С. 96–99.
12. Токмачев, М.С. Некоторые интегралы, связанные с распределением типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Математика в вузе и в школе: Труды XXIV Международной научно-методической конференции. – СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2012. – С. 185–186.

13. Токмачев, М.С. Вычисление интегралов от функций некоторого класса с вероятностной интерпретацией / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2014. – № 80. – С. 42–46.

14. Токмачев, М.С. О числовых множествах и последовательностях в связи с распределением типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник НовГУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2015. – № 3-2(86). – С. 35–39.

15. Токмачев, М.С. Множество подмножеств в структуре некоторой числовой призмы: монография / М.С. Токмачев // Деп. В ВИНТИ 09.06.2016. – № 91-В2016. – 90 с.

Поступила в редакцию 30 ноября 2016 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 3, pp. 18–26*

DOI: 10.14529/mmph170303

THE STUDY OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF THE HYPERBOLIC COSINE TYPE

M.S. Tokmachev

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation

E-mail: mtokm@yandex.ru

Probability distribution, obtained earlier by the author in a result of the characterization of distributions by the property of the constant regression of quadratic statistics on a linear form and called the hyperbolic cosine type distribution, is considered. Along with the classic normal distribution, gamma distribution, negative binomial and some other distributions, the given three-parameter distribution is related to the class of probability distributions, united by a common characterization condition. The obtained distribution is a generalization of the famous two-parameter Meixner distribution.

In the article, a proof that a function appeared in the result of given characterization is indeed characteristic is given. The structure of this function, in connection with gamma distribution and the corresponding distribution conjugated with the gamma distribution, along with the constant distribution, is presented. Infinite decomposability of distribution is proved.

Based on characteristic function, the probability density function, expressed through the beta function of complex conjugate arguments is recovered in general terms. Along with a unified formula, correlations in elementary functions are deduced for the distribution density functions at integer values of parameter m . Density formulas at odd and even values of the parameter are similar on the structure of cofactors: exponent function, hyperbolic secant or cosecant correspondingly, and polynomial factors.

The distribution under study has multiple applications, not only in probability problems. Moments of distribution at specified parameters change as polynomials of some class with corresponding coefficients. These coefficients can be constructed as number sets (number triangles and number sequences), both known and new with setting of a row of functional relationships.

Keywords: distribution of the hyperbolic cosine type; characteristic function; infinitely divisible distribution; beta function.

References

1. Tokmachev M.S. *Dep. in VINITI* 21.06.94, no. 1542-B94, 11 p. (in Russ.).
2. Tokmachev M.S. Postoyanstvo regressii kvadrachnoy statistiki na lineynuyu statistiku (Constancy of regression of quadratic statistics with linear statistics). *Bulletin of the Novgorod state University*, 1995, no. 1, pp. 139–141 (in Russ.).
3. Kagan A.M., Linnick Y.V., Rao S.R. *Kharakterizatsionnye zadachi matematicheskoy statistiki* (Characterization problems of mathematical statistics), Moscow, Nauka Publ., 1972, 656 p. (in Russ.).

4. Klebanov L.B. *Kogda kvadratichnaya statistika imeet postoyannuyu regressiyu na vyborochnoe srednee?* (When the quadratic statistic has constant regression on the sample mean?). *Teoriya veroyatnostey i eye primeneniye* (Theory of probability and its applications), 1979, XXIV, 3. pp. 646–648. (in Russ.).
5. Lai C.D. Meixner classes and Meixner hypergeometric distributions. *Aust. J. Stat.*, 1982, Vol. 24, pp. 221–233. DOI: 10.1111/j.1467-842X.1982.tb00828.x
6. Lai C.D. A characterization of gamma, Meixner hypergeometric and negative binomial distributions based on canonical measures. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 1982, Vol. 34, Issue 1, pp. 359–363. DOI: 10.1007/BF02481035
7. Vadzinskiy R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* (Handbook of Probabilistic Distributions), St. Petersburg, Nauka Publ., 2001, 295 p. (in Russ.).
8. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki* [Course of Higher Mathematics], Moscow, Nauka Publ., 1974, Vol. 3, part 2, 672 p. (in Russ.).
9. Lukacs E. *Characteristic functions*. Hafner Publishing Co., New York, 1970, 350 p.
10. Tokmachev M.S., Tokmachev A.M. Raspredelenie tipa giperbolicheskogo kosinusa (Distribution type hyperbolic cosine). *Bulletin of the Novgorod state University*, 2001, no. 17, pp. 85–88. (in Russ.).
11. Tokmachev M.S. Prikladnoj aspekt obobshhennogo raspredeleniya giperbolicheskogo kosinusa (Applied aspect of the generalized hyperbolic cosine distribution). *Bulletin of the Novgorod state University*, 2005, no. 34, p. 96–99 (in Russ.).
12. Tokmachev M.S. Nekotorye integraly, svyazannye s raspredeleniem tipa giperbolicheskogo kosinusa (Some integrals associated with the distribution type hyperbolic cosine). *Matematika v vuze i v shkole: Trudy XXIV Mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii* (Mathematics in high school and in school: Proceedings of the XXIV International Scientific and Methodical Conference), St. Petersburg, Peterburgskiy gos. universitet putey soobshcheniya Publ., 2012, pp. 185–186. (in Russ.).
13. Tokmachev M.S. Vychislenie integralov ot funkciy nekotorogo klassa s verojatnostnoj interpretaciej (Evaluation of integrals for some class of functions with probabilistic interpretation). *Vestnik NovGU. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki* (*Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences*), 2014, no. 80, pp. 42–46 (in Russ.).
14. Tokmachev M.S. O chislovyh mnozhestvah i posledovatel'nostyah v svyazi s raspredeleniem tipa giperbolicheskogo kosinusa (About number sets and sequences in connection with a distribution of the hyperbolic cosine type). *Vestnik NovGU. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki* (*Bulletin of the Novgorod state University. Ser.: Physical and mathematical Sciences*), 2015, no. 3-2 (86), pp. 35–39. (in Russ.).
15. Tokmachev M.S. *Dep. in VINITI* 09. 06. 2016, no. 91-B2016, 90 p. (in Russ.).

Received November 30, 2016

ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОМ СОСУДЕ С НАКЛОННЫМИ РЕШЕТКАМИ

М.Б. Атманских¹, А.Ю. Боталов², А.С. Губкин^{1,2}, А.В. Пяткова²

¹ Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация

² Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: aybotalov@bk.ru

Рассмотрены вынужденные колебания сосуда прямоугольной формы, частично заполненного жидкостью. В сосуде расположены вставки в виде двух наклонных решеток. Исследовано влияние угла наклона вставок на коэффициент потерь давления при различных значениях амплитуды колебания сосуда и длин пластин решеток. Проведено сравнение с известной аналитической зависимостью коэффициента потерь давления от угла наклона, полученной для стационарного протекания через наклонную решетку.

Ключевые слова: свободная поверхность; вынужденные колебания; наклонные решетки; коэффициент потерь давления; TLD.

Введение

Одним из ключевых приложений задач динамики сосудов, частично заполненных жидкостью, является разработка эффективного демпфера вибраций различных конструкций: высотных зданий, нефтяных платформ. В качестве такого эффективного демпфера могут использоваться резервуары, частично заполненные жидкостью, с частотой собственных колебаний жидкости, согласующейся с собственной частотой колебания конструкции (TLD – Tuned Liquid Damper). При этом жидкость воздействует на конструкцию с силой, находящейся в противофазе к внешней нагрузке [1]. Для интенсификации диссипативных процессов в жидкости в сосуде располагают вертикальные решетки [2, 3]. Кроме того, решетки могут быть использованы как управляемый элемент системы TLD, при помощи которого можно изменять свойства демпфера, подстраивая его под внешние условия. Одним из таких механизмов управления служит изменение угла наклона решеток, что приводит к изменению структуры потока в резервуаре и, следовательно, к изменению собственной частоты системы и сопротивления решеток.

В представленной работе рассматриваются гармонические колебания сосуда с двумя решетками, частично заполненного жидкостью. Проводится сравнение различных моделей турбулентности на точность расчета коэффициента потерь давления. На основе численного моделирования уравнений Навье–Стокса исследуется влияние угла наклона решеток на коэффициент потерь давления при различных значениях амплитуды колебания сосуда и длин пластин решеток. Влияние угла наклона решеток на диссипативные свойства было ранее исследовано аналитически [4]. В работе [4] на основе модели потенциального течения жидкости с учетом потерь давления потока при протекании через решетки получены распределения диссипации энергии системы от частоты колебаний сосуда. Причем, как будет показано в представленной работе, используемая в работе [4] аналитическая зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона решеток нуждается в уточнении.

Постановка задачи

Пусть сосуд прямоугольной формы, частично заполненный жидкостью до уровня h , колеблется вдоль горизонтальной оси по гармоническому закону:

$$x_s = A \sin(ft),$$

где A – амплитуда колебаний, f – частота колебаний, t – время. Симметрично вертикальной оси в сосуде расположены две решетки, отклоненные от вертикали на угол $\pm\varphi$ (рис. 1). Расстояние между решетками обозначим как L_1 при длине дна сосуда, равной L .

Значения параметров задачи выбраны в соответствии с работой [2]: $L = 0,966$ м, $L_I = 0,2L$, $h = 0,119$ м. Введенные на рис. 1 параметры решеток взяты следующими: $b_s = 0,001$ м, $d_e = 0,005, 0,01, 0,02$ м, d_s подобран таким образом, чтобы «сплошность» решеток S_n была фиксирована $S_n = d_s / (d_s + d_e) = 0,42$. Угол наклона решеток варьировался: $40^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Частота колебаний соответствовала резонансной частоте малых колебаний данного сосуда без решеток: $f = 3,4585$ с⁻¹. Амплитуда колебаний изменялась: $A = 0,0025, 0,005, 0,01$ м. Теплофизические свойства жидкости соответствовали воде ($\mu_{ж} = 10^{-3}$ Па·с, $\rho_{ж} = 1\ 000$ кг/м³), газа – воздуху ($\mu_{г} = 1,48 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho_{г} = 1$ кг/м³).

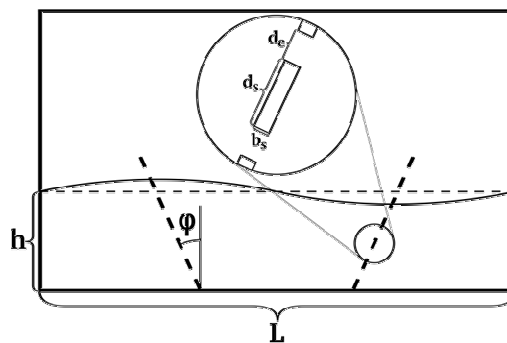


Рис. 1. Схема сосуда с решетками

Математическое описание

Наличие вставок в сосуде приводит к возникновению вихревого течения. В случае размещения в колеблющемся сосуде решеток за ними образуются разномасштабные вихревые структуры (рис. 2), что может привести к турбулизации течения жидкости. На рис. 3 показано распределение кинематической турбулентной вязкости в области около решеток и между решетками при колебании сосуда. Расчеты кинематической турбулентной вязкости показывают, что при заданных параметрах колебаний сосуда в области между решетками развиваются пульсации, генерируемые решетками. Данный факт говорит о необходимости проведения расчетов в турбулентном приближении.

Моделирование турбулентного движения системы двух несжимаемых жидкостей в подвижном сосуде проводится при помощи осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса совместно с SST $k-\omega$ моделью, записанных в неинерциальной системе отсчета. Для моделирования границы раздела фаз жидкость–газ используется метод объема жидкости (VOF) [5]. Система уравнений имеет

вид:

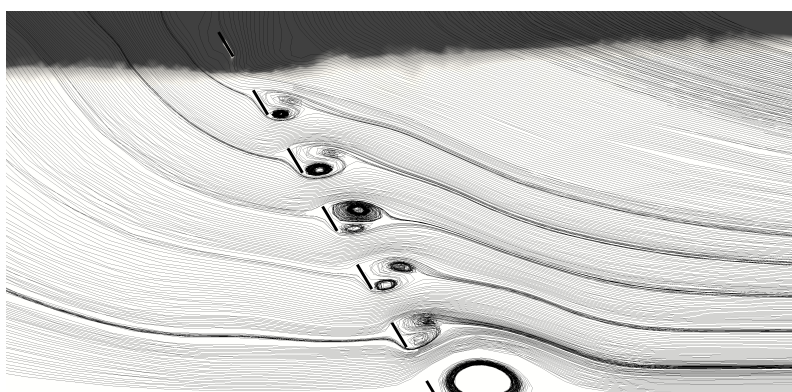


Рис. 2. Линии тока в области около решетки: темный цвет – газ, светлый – жидкость

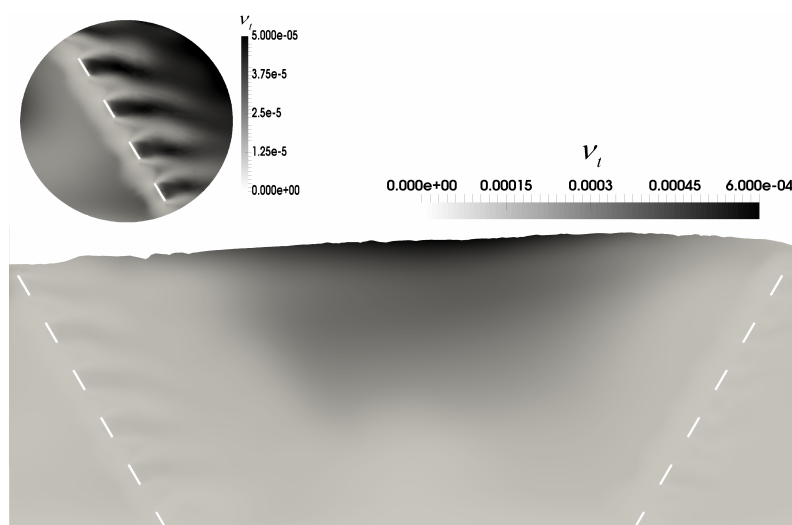


Рис. 3. Распределение турбулентной вязкости

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} \vec{v} = -\nabla p + \nabla \left((\mu + \mu_t) \nabla \vec{v} \right) - \rho \ddot{x}_s \vec{i} + \rho g \vec{j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{v} \nabla \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \sqrt{2 S_t F_2})}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} k = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla k \right) + \tilde{P}_k - \beta^* \rho k \omega, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} \omega = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\tilde{\sigma}_\omega} \right) \nabla \omega \right) + \tilde{C}_\alpha \frac{\omega}{k} P_k - \tilde{C}_\beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{\rho}{\omega} \nabla k \nabla \omega. \quad (6)$$

Здесь \vec{v} – поле вектора осредненной скорости, p – поле давления, \vec{i}, \vec{j} – единичные векторы в направлении осей x и y , g – ускорение свободного падения, α – маркерная функция, принимающая значения от 0 до 1 (причем 0 соответствует газу, 1 – жидкости), k – поле кинетической энергии турбулентности, ω – поле удельной скорости диссипации энергии, ρ, μ – плотность и динамическая вязкость, пересчитываемые следующим образом:

$$\rho = \rho_{жс} \alpha + \rho_g (1 - \alpha), \mu = \mu_{жс} \alpha + \mu_g (1 - \alpha).$$

Модельные функции и константы определены следующим образом:

$$S_t = \sqrt{2 S_{t1} \cdot S_{t1}}, \quad S_{t1} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T), \quad F_2 = \tanh(\gamma_2^2), \quad \gamma_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \mu / \rho}{d^2 \omega} \right),$$

$$\beta^* = 0,09, \quad \tilde{P}_k = \min(P_k, c_1 \beta^* k \omega), \quad P_k = \mu_t \left(2 S_{t1} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{E} \right) \nabla \vec{v},$$

$$\tilde{C}_\alpha = F_1 C_{\alpha 1} + (1 - F_1) C_{\alpha 2}$$

$$\tilde{C}_\beta = F_1 C_{\beta 1} + (1 - F_1) C_{\beta 2},$$

$$\tilde{\sigma}_k = F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2},$$

$$\tilde{\sigma}_\omega = F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2}$$

$$F_1 = \tanh(\gamma_1^4), \quad \gamma_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \mu / \rho}{d^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{C D_{k\omega} d^2} \right),$$

$$C D_{k\omega} = \max(2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-10}), \quad a_1 = 0,31, \quad c_1 = 10,$$

$$C_{\alpha 1} = 0,5532, \quad C_{\beta 1} = 0,075, \quad \sigma_{k1} = 2, \quad \sigma_{\omega 1} = 2,$$

$$C_{\alpha 2} = 0,4403, \quad C_{\beta 2} = 0,0828, \quad \sigma_{k2} = 1, \quad \sigma_{\omega 2} = 1,186,$$

d – расстояние от расчетной точки до ближайшей твердой стенки, \mathbf{E} – единичная матрица.

В качестве граничных условий на границах решеток для k, ω и осредненной скорости течения жидкости задавались нулевые значения, на границах полости для k и ω использовались пристеночные функции [6], для осредненной скорости течения жидкости задавались условия прилипания.

В данной модели пренебрегаем влиянием сил поверхностного натяжения, что оправдано применением на практике сосудов больших размеров.

Процедура численного решения

Для решения системы уравнений (1)–(6) использовался открытый пакет OpenFoam [6]. Особенностью реализации метода VOF в пакете OpenFoam является использование в уравнении переноса маркерной функции (3) искусственного конвективного члена \vec{v}_r , уменьшающего толщину переходного слоя между фазами [5]:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla(\vec{v}, \alpha) + \nabla(\vec{v}, \alpha(1 - \alpha)) = 0.$$

Расчеты проводились на двумерной сетке, содержащей 140 000 ячеек. В основной области потока строилась неструктурированная треугольная сетка, а вокруг каждой пластины структурированная прямоугольная, обеспечивающая разрешение вязкого подслоя (рис. 4). Для совместного решения уравнений для давления и импульса использовался алгоритм PISO-SIMPLE. Для аппроксимации конвективных членов уравнений движения и турбулентных характеристик использовалась схема вверх по потоку, для уравнения переноса маркера – схема SuperBee. Для решения системы линейных уравнений использовался метод сопряженных градиентов с предобуславливателем. Для поиска предобуславливающей матрицы использовался обобщенный многосеточный метод. Шаг по времени выбирался так, чтобы число Куранта не превосходило 0,5.

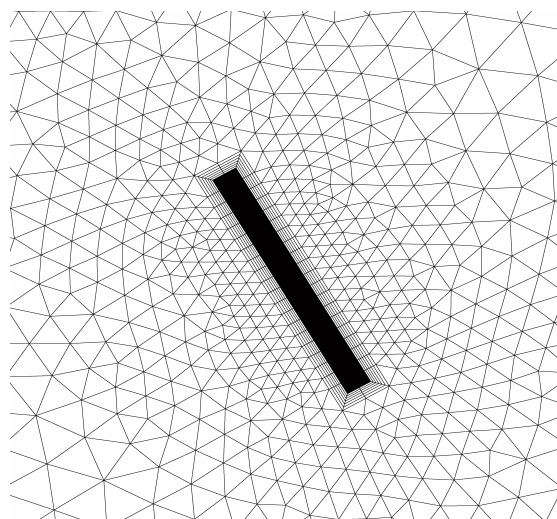


Рис. 4. Пример расчетной сетки в области около пластины при $\varphi = \pi/6$

Верификация модели

Для апробации выбранной модели турбулентности и расчетной сетки была проведена серия расчетов с вертикальными решетками. На рис. 5 показана зависимость осредненного коэффициента потерь давления C_l от числа Келегана–Карпентера KC [7]:

$$C_l = -\frac{3}{4} S_n \int_0^{2\pi} \frac{F \cos \theta}{\rho U_m^2 d_s} d\theta,$$

где F – сила, действующая на решетку со стороны жидкости, $\theta = ft$, $U_m = \frac{\zeta fL}{\pi h} \sin(0,5\pi(1-L_1/L))$, ζ – амплитуда колебания свободной поверхности.

Число Келегана–Карпентера: $KC = \frac{2\pi U_m}{fd_s}$.

Как видно из данного рисунка, результаты, полученные при помощи SST $k-\omega$ модели турбулентности хорошо, согласуются с экспериментом, что говорит о достоверности результатов, полученных в статье.

Результаты расчетов

В результате проведенных расчетов была получена зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона решеток при различных значениях амплитуды колебаний. На рис. 6 изображена зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона решеток при $d_e = 0,01$ м. Как видно из рисунка, данная зависимость имеет локальный максимум, зависящий от амплитуды колебаний сосуда. Данный факт свидетельствует о том, что при заданной амплитуде существует угол на-

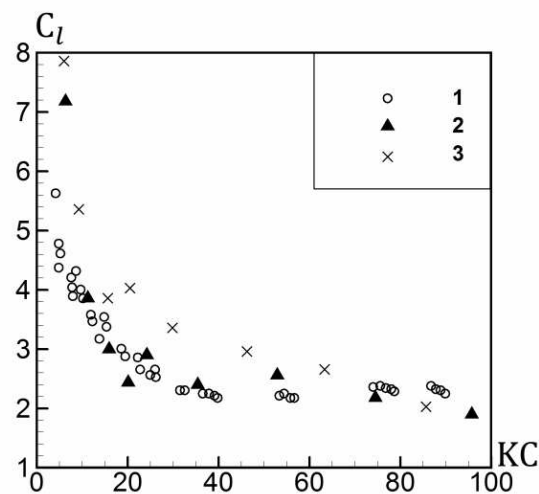


Рис. 5. Зависимость коэффициента потерь давления от числа Келегана–Карпентера; 1 – экспериментальные данные, 2 – SST $k-\omega$ модель турбулентности, 3 – $k-\epsilon$ модель турбулентности

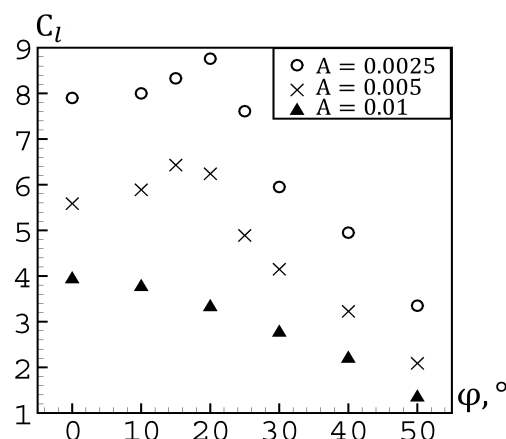


Рис. 6. Зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона решеток при различных значениях амплитуды колебаний

клона, когда диссипация энергии колебаний жидкости наибольшая ($\varphi_{\max} \approx 20^\circ$ при $A = 0,0025$ м, $\varphi_{\max} \approx 15^\circ$ при $A = 0,005$ м). Однако при $A = 0,01$ м локальный максимум не наблюдается, что может быть связано с характерными значениями числа Келегана–Карпентера: $21 < KC < 35$ при $A = 0,0025$ м, $34 < KC < 70$ при $A = 0,005$ м и $60 < KC < 100$ при $A = 0,01$ м.

На рис. 7 изображена зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона при $A = 0,01$ м и различных длин пластин решеток: $d_e = 0,005, 0,01, 0,02$ м. При этом число Келегана–Карпентера принимает следующие значения: $126 < KC < 150$ при $d_e = 0,005$ м, $22 < KC < 40$ при $d_e = 0,01$ м, $22 < KC < 40$ при $d_e = 0,02$ м. Видно, что при малых значениях числа KC (при $d_e = 0,02$ м) в зависимости C_l от угла наклона также наблюдается локальный максимум.

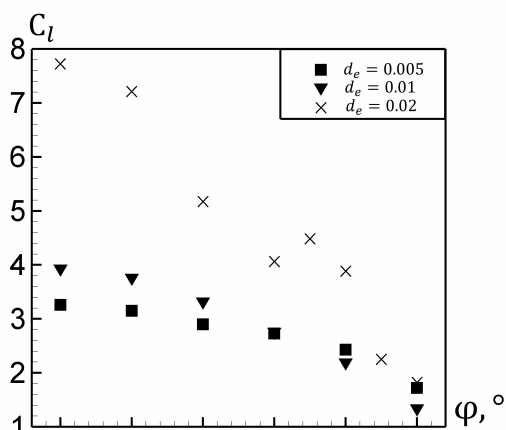


Рис. 7. Зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона решеток при $A = 0,01$ м и различных значениях d_e

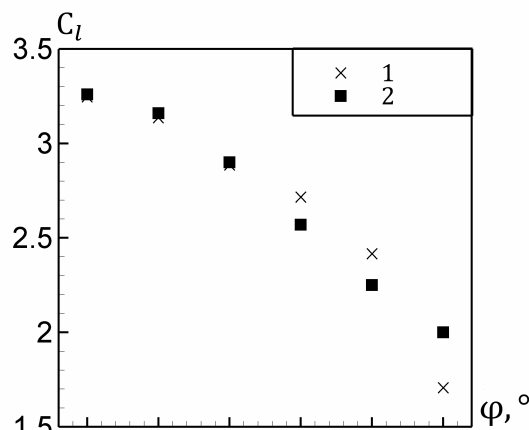


Рис. 8. Зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона решеток при $A = 0,01$ м; $d_e = 0,005$ м; 1 – численное решение, 2 – аналитическое

В работе [8] на основе экспериментальных данных по измерению отклонения потока при стационарном протекании через наклонную решетку получено аналитическое выражение для зависимости коэффициента потерь давления от угла наклона:

$$C_l = \left(\left(\sqrt{C_l \varphi_0} + 1 \right) \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} - 1 \right)^2, \quad (7)$$

где ψ – угол отклонения потока от нормали к решетке, значение которого были найдены из эксперимента [4, 8].

Авторы [4] применяют данную зависимость для случая колебательного движения сосуда при больших значениях числа KC ($KC > 40$). На рис. 8 показано изменение коэффициента потерь давления при увеличении угла наклона для случая $A = 0,01$ м и $d_e = 0,005$ м ($126 < KC < 150$). Из данного рисунка видно, что при малых углах наклона наблюдается хорошее согласование значений C_l , полученных по формуле (7) и расчетных значений. При больших углах наклона решеток расчетные значения отличаются от значений C_l , полученных по формуле (7). Кроме того, формула (7) не применима при малых значениях числа Келегана–Карпентера, что говорит о необходимости ее уточнения для случая периодического течения жидкости через решетки при широком диапазоне значений числа Келегана–Карпентера и угла наклона решеток.

Заключение

В результате проведенных расчетов задачи колебания прямоугольного сосуда, частично заполненного жидкостью и имеющего вставки в виде наклонных решеток, были получены коэффициенты потерь давления при различных значениях параметров: угла наклона решеток, амплитуды колебания сосуда, длины пластин решеток. На основе анализа полученных значений коэффициентов потерь давления можно сделать следующие выводы:

- при малых значениях числа Келегана–Карпентера зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона имеет локальный максимум. Угол, при котором достигается локальный максимум, зависит как от амплитуды колебаний, так и от геометрических параметров решеток;

- зависимость коэффициента потерь давления от угла наклона, используемая в литературе, требует уточнения для случая больших углов наклона решеток и малых значений числа Келегана–Карпентера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00068 мол_а.

Литература

1. Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper / K. Fujii, Y. Tamura, T. Sato, T. Wakahara // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. – 1990. – Vol. 33. – Issue 1-2. – P. 263–272.
2. Numerical flow models to simulate tuned liquid dampers (TLD) with slat screen / M.J. Tait, A.A. El Damatty, N. Isyumov, M.R. Siddique // *Journal of Fluids and Structures*. – 2005. – Vol. 20. – Issue 8. – P. 1007–1023.
3. Боталов А.Ю. Вынужденные колебания твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью / А.Ю. Боталов, С.П. Родионов // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. – 2014. – № 7. – С. 120–126.
4. Modeling of a tuned liquid damper with inclined damping screens / M.R. Cassolato, J.S. Love, M.J. Tait // *Struct. Control Health Monit.* – 2011. – Vol. 18. – Issue 6. – P. 674–286.
5. Gopala, V.R. Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows / V.R. Gopala, B.G.M. Van Wachem // *Chemical Engineering Journal*. – 2008. – Vol. 141. – Issue 1-3. – P. 204–221.
6. Moukalled, F. The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM and Matlab / F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. – 791 p.
7. Tuned liquid dampers with a Keulegan–Carpenter number-dependent screen drag coefficient / J.A. Hamelin, J.S. Love, M.J. Tait, J.C. Wilson // *Journal of Fluids and Structures*. – 2013. – Vol. 43. – pp. 271–286.
8. Yeh, H.H. Free surface flow through screen / H.H. Yeh, M. Shrestha // *Journal of Hydraulic Engineering*. – 1989. – Vol. 115. – Issue 10. – P. 1371–1385.

Поступила в редакцию 9 марта 2017 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 3, pp. 27–33*

DOI: 10.14529/mmph170304

FLUID DYNAMICS IN MOBILE TANK WITH INCLINED SLAT SCREENS

M.B. Atmanskikh¹, A.Yu. Botalov², A.S. Gubkin^{1,2}, A.V. Pyatkova²

¹ Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation

² Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Tyumen, Russian Federation

E-mail: aybotalov@bk.ru

Forced oscillations of a rectangular tank partially filled with liquid are considered in this work. Two inclined screens are located in the tank as inserts. The system of Reynolds–averaged Navier–Stokes equations is solved numerically with the SST k - ω turbulence model. The volume of fluid (VOF) method is taken for simulation of gas–liquid interface. The problem is solved in two-dimensional statement. Unstructured triangular mesh converted to a fine structured rectangular mesh is used near the screens. A comparison of two turbulence models with experimental data is carried out, and the optimal model for the pressure loss coefficient calculation is chosen. The effect of the inserts inclination angle on the pressure loss coefficient is investigated at different values of the oscillation amplitude of the tank and different heights of the screen slats. It is obtained that the pressure loss coefficient dependence on the inclination angle at small Keulegan–Carpenter number has the local maximum depending on the oscillation amplitude and the geometric parameters of the screens. Comparison with the known analytical depend-

ence of the pressure loss coefficient dependence on the inclination angle that obtained for the stationary flow through the inclined screen is conducted. It is found that this dependence needs to be verified for the case of oscillation tank at big screen inclination angle and small Keulegan–Carpenter number.

Keywords: free surface; forced oscillations; inclined screens; pressure loss coefficient; TLD.

References

1. Fujii K., Tamura Y., Sato T., Wakahara T. Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 1990, Vol. 33, Issue 1-2, pp. 263–272. DOI: 10.1016/0167-6105(90)90042-B
2. Tait M.J., El Damatty A.A., Isyumov N., Siddique M.R. Numerical flow models to simulate tuned liquid dampers (TLD) with slat screen. *Journal of Fluids and Structures*, 2005, Vol. 20, Issue 8, pp. 1007–1023. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2005.04.004
3. Botalov A.Yu., Rodionov S.P. Forced oscillation of the rigid body partially filled with fluid. *Vestnik Tumenskogo gosudarstvennogo universiteta – UT Research Journal*, 2014, no. 7, pp. 120–126. (in Russ.).
4. Cassolato M.R., Love J.S., Tait M.J. Modeling of a tuned liquid damper with inclined damping screens. *Struct. Struct. Control Health Monit.*, 2011, Vol. 18, Issue 6, pp. 674–286. DOI: 10.1002/stc.397
5. Gopala V.R., Van Wachem B.G.M. Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows. *Chemical Engineering Journal*, 2008, Vol. 141, Issue 6, pp. 204–221. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cej.2007.12.035>
6. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. *The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM and Matlab*. Switzeland, Springer International Publishing, 2015, 791 p. DOI: 10.1007/978-3-319-16874-6
7. Hamelin J.A., Love J.S., Tait M.J., Wilson J.C. Tuned liquid dampers with a Keulegan-Carpenter number-depend screen drag coefficient. *Journal of Fluids and Structures*, 2013, Vol. 43, pp. 271–286. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2013.09.006
8. Yeh H.H., Shrestha M. Free surface flow through screen. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1989, Vol. 115, Issue 10, pp. 1371–1385. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1989)115:10(1371)

Received March 9, 2017

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО УЧАСТКА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

А.В. Рязских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

В рамках физической линеаризации уравнений Навье–Стокса об однонаправленном аксиальном ламинарном течении ньютоновской жидкости найдено аналитическое решение задачи идентификации поля скоростей во входной области кольцевого канала, что позволило получить в явном виде соотношение для расчета длины начального гидродинамического участка.

Ключевые слова: кольцевой канал; ньютоновская жидкость; длина начального гидродинамического участка.

Кольцевая геометрия, наряду с цилиндрическими трубами и плоскими каналами, наиболее часто используется в различных технических системах [1]. В [2] показано, что проведение процесса теплопередачи в режиме начального гидродинамического участка является одним из способов интенсификации теплообмена. Поэтому выявление закономерностей формирования структуры поля скоростей на начальном участке и определение его длины в направлении течения жидкости актуально.

Впервые такая задача для кольцевого канала была рассмотрена в [3] на основе погранслоино-го приближения с применением линеаризации Лангхаара [4]. Детальный обзор последующих теоретических и экспериментальных исследований этой проблемы [5] показал, что различие в определении характеристик начального гидродинамического участка существенно. Уточнение длины начального гидродинамического участка на основе численного интегрирования уравнений Навье–Стокса, например [6], вызывает вопросы корректности используемых вычислительных процедур, связанных с существованием и единственностью решения самих уравнений. Предпринимаются также дальнейшие попытки отыскания аналитических решений, например, использующих идеализацию о «ползущем» течении [7].

В связи с этим в данной работе с позиций физической линеаризации уравнения пограничного слоя на основе гипотезы однонаправленности течения формулируется и аналитически анализируется задача отыскания длины начального гидродинамического участка в горизонтальном кольцевом канале.

Постановка задачи. Математическая формулировка задачи в цилиндрической системе координат имеет вид [8]:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

$$v_r(r, z, 0) = v_z(r, z, 0) = 0, \quad v_r(r, 0, t) = 0, \quad v_z(r, 0, t) = v_0 = \text{const}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_r(r, l, t)}{\partial z} = \frac{\partial v_z(r, l, t)}{\partial z} = 0, \quad v_r(r_1, z, t) = v_z(r_1, z, t) = 0, \quad v_r(r_2, z, t) = v_z(r_2, z, t) = 0, \quad (5)$$

где v_r , v_z – радиальная и аксиальная компоненты вектора скорости жидкости; p – избыточное давление; ρ, η – плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости; t – время; r_1, r_2 – радиусы внутренней и внешней соосных цилиндрических труб, составляющих кольцевой канал; l – длина кольцевого канала ($l \gg r_2$).

Как правило, для замыкания системы (1)–(5) дополнительно рассматривается уравнение относительно давления [9]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\rho \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[v_z \frac{\partial (r v_r)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} + 2\eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^3 v_z}{\partial z^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[r \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

с краевыми условиями

$$p(r, 0, t) = p_0 = \text{const}, \quad \frac{\partial p(r, l, t)}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p(r_1, z, t)}{\partial r} = \frac{\partial p(r_2, z, t)}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Пусть течение по всей длине канала является однонаправленным, т. е. $v_r \equiv 0$, тогда из (3) следует, что $v_z = v_z(r, t)$, причем (1) вырождается в $\partial p / \partial r = 0$, а (2) трансформируется в

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (9)$$

с граничными условиями

$$v_z(r, 0) = v_0, \quad v_z(r_1, t) = v_z(r_2, t) = 0 \quad (10)$$

и выполнением балансового соотношения

$$\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r v_z(r, t) dr = v_0. \quad (11)$$

При этом из (6) следует постоянство аксиального градиента давления, т. е. $\partial p / \partial z = \text{const}$.

В безразмерном виде система (9)–(11) запишется

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = C + \frac{1}{Re} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right); \quad (12)$$

$$V(R, 0) = 1; \quad V(R_1, Z) = V(R_2, Z) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} R V(R, Z) dR = 1, \quad (14)$$

где $T = v_0 t / d = z / d = Z$; $R = r / d$; $V = v_z / v_0$; $P = p / (\rho v_0^2)$; $R_{1,2} = r_{1,2} / d$; $Re = v_0 d \rho / \eta$ – число Рейнольдса; $d = 2(r_2 - r_1)$ – гидравлический диаметр; $C = -dP / dZ$.

Решение. Применим к (12), (13) одностороннее интегральное преобразование Лапласа по переменной Z [10]:

$$\frac{d^2 V_L}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dV_L}{dR} - s Re V_L + \left(\frac{C}{s} + 1 \right) Re = 0; \quad (15)$$

$$V_L(R_1, s) = V_L(R_2, s) = 0, \quad (16)$$

где s, V_L – изображение Z и V соответственно. Решение (15), (16) есть

$$V_L(R, s) = (C + s) / s^2 + \varphi(R, s) / \psi(s), \quad (17)$$

где

$$\varphi(R, s) = (C + s) \left\{ \left[K_0(R_1 \sqrt{s Re}) - K_0(R_2 \sqrt{s Re}) \right] I_0(R \sqrt{s Re}) + \left[I_0(R_2 \sqrt{s Re}) - I_0(R_1 \sqrt{s Re}) \right] K_0(R \sqrt{s Re}) \right\};$$

$$\psi(s) = s^2 \gamma(s), \quad \gamma(s) = I_0(R_1 \sqrt{s Re}) K_0(R_2 \sqrt{s Re}) - I_0(R_2 \sqrt{s Re}) K_0(R_1 \sqrt{s Re}),$$

I_0, K_0 – функции Бесселя и Макдональда мнимого аргумента [11].

Оригинал первого слагаемого правой части (17) равен [12]

$$L^{-1}[(C+s)/s^2] = CZ + 1, \quad (18)$$

где L^{-1} – обратный оператор преобразования Лапласа.

Для нахождения оригинала второго слагаемого правой части (17) применим вторую теорему Ватченко–Захарченко [13]. Корни знаменателя $\psi(s) = 0$ таковы: 1) $s = 0$ – кратности два; 2) бесконечное счетное множество однократных корней s_n уравнения $\gamma(s_n) = 0$. Для корня $s = 0$

$$\frac{\varphi(R, 0)}{\psi'(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[Z \exp(sZ) \frac{\varphi(R, s)}{\gamma(s)} + \exp(sZ) \frac{\varphi'_s(R, s)}{\gamma(s)} - \exp(sZ) \frac{\varphi(R, s) \gamma'(s)}{\gamma^2(s)} \right].$$

Так как $I'_0(z) = I_1(z)$ и $K'_0(z) = -K_1(z)$, то

$$\begin{aligned} \varphi'_s(R, s) = & \left[K_0(R_1 \sqrt{sRe}) - K_0(R_2 \sqrt{sRe}) \right] I_0(R \sqrt{sRe}) + \left[I_0(R_2 \sqrt{sRe}) - I_0(R_1 \sqrt{sRe}) \right] K_0(R \sqrt{sRe}) + \\ & + (C+s) \sqrt{Re} \left\{ \left[R_2 K_1(R_2 \sqrt{sRe}) - R_1 K_1(R_1 \sqrt{sRe}) \right] I_0(R \sqrt{sRe}) + \right. \\ & + \left. \left[K_0(R_1 \sqrt{sRe}) - K_0(R_2 \sqrt{sRe}) \right] R I_1(R \sqrt{sRe}) + \left[R_2 I_1(R_2 \sqrt{sRe}) - R_1 I_1(R_1 \sqrt{sRe}) \right] K_0(R \sqrt{sRe}) + \right. \\ & \left. + \left[I_0(R_1 \sqrt{sRe}) - I_0(R_2 \sqrt{sRe}) \right] R K_1(R \sqrt{sRe}) \right\} / (2\sqrt{s}), \\ \gamma'(s) = & \sqrt{Re} \left[R_1 I_1(R_1 \sqrt{sRe}) K_0(R_2 \sqrt{sRe}) - R_2 I_0(R_1 \sqrt{sRe}) K_1(R_2 \sqrt{sRe}) - \right. \\ & \left. - R_2 I_1(R_2 \sqrt{sRe}) K_0(R_1 \sqrt{sRe}) + R_1 I_0(R_2 \sqrt{sRe}) K_1(R_1 \sqrt{sRe}) \right] / (2\sqrt{s}), \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\varphi(R, 0)}{\psi'(0)} = -1 - CZ + \frac{1}{4} CRe \left[-(R^2 - R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2) \ln(R/R_1) / \ln(R_2/R_1) \right]. \quad (19)$$

Для корней s_n имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(R, s_n)}{\psi'(s_n)} \exp(s_n Z), \quad (20)$$

откуда следует, что физическому смыслу задачи удовлетворяют чисто мнимые корни, поэтому $\sqrt{s_n Re} = \mu_n i$ или $s_n = -\mu_n^2 / Re$.

Так как $I_0(iz) = J_0(z)$; $K_0(iz) = i \frac{\pi}{2} N_0(z)$; $I_1(iz) = i J_1(z)$; $K_1(iz) = \frac{\pi}{2} N_1(z)$, где $J_0(z)$, $J_1(z)$ – функции Бесселя первого рода; $N_0(z)$, $N_1(z)$ – функции Неймана [14], то

$$\begin{aligned} \varphi \left(R, -\frac{\mu_n^2}{Re} \right) = & \left(C - \frac{\mu_n^2}{Re} \right) i \frac{\pi}{2} \left\{ \left[N_0(R_1 \mu_n) - N_0(R_2 \mu_n) \right] J_0(R \mu_n) + \left[J_0(R_2 \mu_n) - J_0(R_1 \mu_n) \right] N_0(R \mu_n) \right\}; \quad (21) \\ \psi' \left(-\frac{\mu_n^2}{Re} \right) = & -\frac{\mu_n^3}{Re} i \frac{\pi}{4} \left[-R_1 J_1(R_1 \mu_n) N_0(R_2 \mu_n) - R_2 J_0(R_1 \mu_n) N_1(R_2 \mu_n) + \right. \\ & \left. + R_2 J_1(R_2 \mu_n) N_0(R_1 \mu_n) + R_1 J_0(R_2 \mu_n) N_1(R_1 \mu_n) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Суммируя (18)–(20), с учетом (21) и (22), получим

$$\begin{aligned} V(R, Z) = & \frac{1}{4} CRe \left[-(R^2 - R_1^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R}{R_1} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (CRe - \mu_n^2) \left\{ \left[N_0(R_1 \mu_n) - N_0(R_2 \mu_n) \right] J_0(R \mu_n) + \right. \\ & \left. + \left[J_0(R_2 \mu_n) - J_0(R_1 \mu_n) \right] N_0(R \mu_n) \right\} \exp \left(-\frac{\mu_n^2}{Re} Z \right) / \\ & / \left\{ \mu_n^3 \left[-R_1 J_1(R_1 \mu_n) N_0(R_2 \mu_n) - R_2 J_0(R_1 \mu_n) N_1(R_2 \mu_n) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R_2 J_1(R_2 \mu_n) N_0(R_1 \mu_n) + R_1 J_0(R_2 \mu_n) N_1(R_1 \mu_n) \right] \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где μ_n – корни уравнения

$$J_0(R_1\mu_n)N_0(R_2\mu_n) - J_0(R_2\mu_n)N_0(R_1\mu_n) = 0,$$

$R_1 = \frac{1}{2}\bar{R}/(1-\bar{R}), R_2 = \frac{1}{2}/(1-\bar{R}), \bar{R} = r_1/r_2$; константа C определена из (14) при $Z \rightarrow \infty$

$$C = \frac{32}{Re}(1-\bar{R})^2 / \left[1 + \bar{R} + (1-\bar{R}^2)/\ln \bar{R} \right], \tag{24}$$

совпадающая с результатом в [15].

Анализ. Характерная структура гидродинамического поля безразмерных скоростей на входном участке (рис. 1) показывает, что при малых значениях \bar{R} наблюдается асимметрия профиля скорости со сдвинутым максимальным значением в сторону поверхности соосного цилиндра

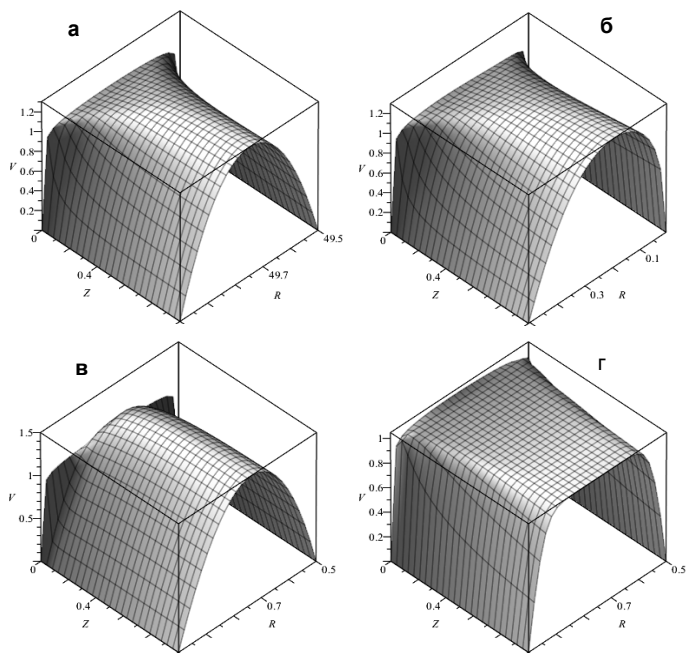


Рис. 1. Поля скоростей, примыкающих ко входному сечению кольцевого канала при различных числах Re и отношениях радиусов внутренней и внешней соосных цилиндрических труб \bar{R} : а) $Re = 100, \bar{R} = 0,99$; б) $Re = 100, \bar{R} = 0,01$; в) $Re = 10, \bar{R} = 0,5$; г) $Re = 1000, \bar{R} = 0,5$

меньшего радиуса, а увеличение числа Re практически линейно увеличивает длину гидродинамического начального участка.

Предполагая, что дрейфом радиальной координаты максимальной скорости на начальном гидродинамическом участке можно пренебречь и считать ее постоянной и равной

$$R^* = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\bar{R}+1}{\bar{R}-1}} / \ln \bar{R}, \text{ найденной из условия } 1 - V(R^*, Z) / V(R^*, \infty) = \varepsilon,$$

где относительная точность ε принимается, как правило, равной 0,02 [16], и ограничиваясь регулярным режимом (в решении (23) учитывается только первое слагаемое ряда), найдено выражение длины начального гидродинамического участка в кольцевом канале:

$$Z_L = f(\bar{R}) Re, \tag{25}$$

где $f(\bar{R}) = \ln \left\{ \varphi(\mu_1) / \left[\varepsilon V(R^*, \infty) \right] \right\};$

$$\varphi(\mu_1) = 2(CRe - \mu_1^2) \left\{ \left[N_0(R_1\mu_1) - N_0(R_2\mu_1) \right] J_0(R^*\mu_1) + \left[J_0(R_2\mu_1) - J_0(R_1\mu_1) \right] N_0(R^*\mu_1) \right\} / \left\{ \mu_1^3 \left[-R_1 J_1(R_1\mu_1) N_0(R_2\mu_1) - R_2 J_0(R_1\mu_1) N_1(R_2\mu_1) + R_2 J_1(R_2\mu_1) N_0(R_1\mu_1) + R_1 J_0(R_2\mu_1) N_1(R_1\mu_1) \right] \right\}.$$

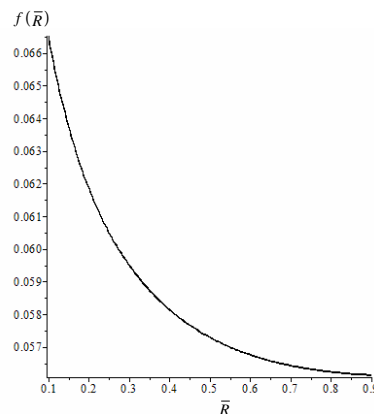


Рис. 2. Вид функции $f(\bar{R})$

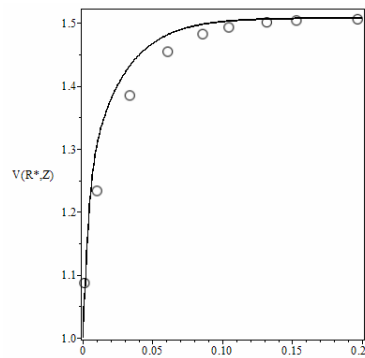


Рис. 3. Изменение максимальной безразмерной скорости вдоль кольцевого канала при $Re = 1$: \square – расчет; \circ – эксперимент

Как следует из (25), длина начального участка пропорциональна числу Re (константа C обратно пропорциональна Re), что согласуется с оценками [17]. Отметим, что при $\bar{R} \rightarrow 0$ и $\bar{R} \rightarrow \infty$ получаем частные случаи для круглой трубы и плоского канала соответственно (рис. 2). Количественное сравнение полученных результатов проведено с классическими экспериментальными данными [3] (рис. 3). Различие рассчитанных и экспериментальных значений скорости в области, примыкающей ко входному сечению, может быть объяснено тем, что в модели не учитывается расход кинетической энергии потока жидкости на нивелирование неоднородности давления по сечению канала. Тем не менее, это не оказывает существенного влияния на длину гидродинамического участка.

Заключение. Синтезированная модель гидродинамики во входной области кольцевого канала характеризуется качественной и количественной адекватностью и может быть применена для расчета длины начального гидродинамического участка при ламинарном течении вязких несжимаемых жидкостей.

Литература

1. Massoud, M. Engineering thermofluids: thermodynamics, fluid mechanics and heat transfer / M. Massoud. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 1120 p.
2. Jiji, Latif M. Heat convection / Latif M. Jiji. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 543 p.
3. Heaton, H.S. Heat transfer in annular passages-simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow / H.S. Heaton, W.C. Reynolds, W.M. Kays // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1964. – Vol. 7, № 7. – P. 763–781.
4. Кэйс, В.М. Конвективный тепло- и массообмен / В.М. Кэйс. – М.: Энергия, 1972. – 448 с.
5. The development lengths of laminar pipe and channel flows / F. Durst, S. Ray, B. Ünsal, O.A. Bayoumi // Journal of Fluids Engineering. – 2005. – Vol. 127, no. 6. – P. 1154–1160.
6. Shaker, A.A. A numerical study of low Reynolds number incompressible flow of entrance and disturbed regions of concentric circular pipes / A.A. Shaker // J. of Engineering and Development. – 2012. – Vol. 16, no. 2. – P. 16–33.
7. Ryazhskikh, A.V. Hydrodynamic entrance length for high-viscosity Newtonian fluid flow in an annular channel / A.V. Ryazhskikh, S.V. Ryabov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2013. – Vol. 86. – Issue 2. – P. 396–401.
8. Poole, R.J. Development length requirements for fully developed laminar flow in concentric annuli / R.J. Poole // Journal of Fluids Engineering. – 2010. – Vol. 132, № 6. – P. 501–504.
9. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
10. Дёч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Дёч. – М.: Физматгиз, 1971. – 288 с.
11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эйде, Ф. Лещ. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
12. Диткин, В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1965. – 465 с.
13. Беляев, Н.М. Методы теории теплопроводности. В 2 ч. Ч.1. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно – М.: Высшая школа, 1982. – 327 с.
14. Korenev, V.G. Bessel functions and their applications / V.G. Korenev. – NY: Taylor & Francis, 2002. – 288 p.
15. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
16. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 519 с.
17. McComas, S.T. Hydrodynamic entrance length for ducts of arbitrary cross section / S.T. McComas // J. Basic Eng. – 1967. – Vol. 89, no. 4. – P. 847–850.

Поступила в редакцию 26 февраля 2017 г.

ON THE IDENTIFICATION OF ENTRANCE HYDRODYNAMIC REGION IN CASE OF LAMINAR FLOW OF NEWTONIAN FLUID IN HORIZONTAL ANNULAR CHANNEL**A. V. Ryazhskikh**

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskihav@bk.ru

In the frameworks of physical linearization of the Navier-Stokes equations in a cylindrical coordinates system on the one-way axial force-feed laminar flow of Newtonian fluid, a mathematical model of the flow development in the entrance region of a horizontal annular channel is formulated. The unknown constant gradient of pressure along the channel is connected with the equation of continuity written in an integral form of stability of liquid flow in any cross section of a channel. Use of the one-way integral Laplace transformation along the longitudinal coordinate allowed to obtain an analytical expression of the local hydrodynamic field at the entrance region and determine pressure losses coincided with the classic data. Analysis of the characteristic structure of the hydrodynamic field of dimensionless velocities at the entrance region showed that for small values of the ratio of the radii of the inner and outer coaxial cylindrical tubes constituting the annular channel, asymmetry of the longitudinal velocity profile is observed with a shift of the maximum value towards the surface of a coaxial cylinder of smaller radius, and an increase in the Reynolds number practically linearly increases the length of the hydrodynamic entrance region. Assumption about the absence of drift of the radial coordinate of the maximum velocity in the entrance hydrodynamic region, limited to the so-called "regular" regime, made it possible to identify the length of the entrance hydrodynamic region in the annular channel by the completed expression in an explicit form that correlates with the classical estimates obtained as a result of computational experiments. It is noted that when the ratio of the radii of the inner and outer coaxial cylinders approaches zero or infinity (corresponding to particular cases of a circular tube and a flat channel), the known results for the lengths of the entrance hydrodynamic regions are obtained. Difference between velocity values calculated by the proposed model and experimental values in the region adjacent to the entry section is explained by the fact that kinetic energy of the liquid flow is not accounted for by leveling the pressure inhomogeneity along the channel cross-section. Nonetheless, it is shown that it does not have a significant influence on the length of hydrodynamic entrance region.

Keywords: annular channel; Newtonian fluid; length of the entrance hydrodynamic region.

References

1. Massoud M. *Engineering termofluids: thermodynamics, fluid mechanics and heat transfer*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, 1120 p. DOI: 10.1007/b138870
2. Jiji Latif M. *Heat convection*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 543 p. DOI: 10.1007/978-3-642-02971-4
3. Heaton H.S., Reynolds W.C., Kays W.M. Heat transfer in annular passages-simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1964, Vol. 7, no. 7, pp. 763–781. DOI: 10.1016/0017-9310(64)90006-7
4. Kays W.M. *Convective heat and mass transfer*. McGraw-Hill Science, 1993, 480 p.
5. Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *J. Fluids Eng.*, 2005, Vol. 127, no. 6, pp. 1154–1160. DOI: 10.1115/1.2063088
6. Shaker A.A. A numerical study of low Reynolds number incompressible flow of entrance and disturbed regions of concentric circular pipes. *J. of Engineering and Development*, 2012, Vol. 16, no. 2, pp. 16–33. (<http://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=67504>)

7. Ryazhskikh A.V., Ryabov S.V. Hydrodynamic entrance length for high-viscosity Newtonian fluid flow in an annular channel. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2013, Vol. 86, Issue 2, pp. 396–401. DOI: 10.1007/s10891-013-0847-6
8. Poole R.J. Development length requirements for fully developed laminar flow in concentric annuli. *J. Fluids Eng.*, 2010, Vol. 132, no. 6, pp. 501–504. DOI: 10.1115/1.4001694
9. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport phenomena*. New York, John Wiley, 2007, 928 p.
10. Doetsch, G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. München-Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1967, 256 p.
11. Janke E., Emde F., Lösch F. *Tafeln höherer Funktionen*. Stuttgart, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1960, 318 p.
12. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (Reference book on operational calculus). Moscow, Vysshaya shkola, 1965, 465 p. (in Russ.).
13. Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody teorii teploprovodnosti. V 2 ch. Ch.1.* (Heat conductivity theory techniques. In two parts. Part 2). Moscow, Vysshaya shkola, 1982, 327 p. (in Russ.).
14. Korenev B.G. *Bessel functions and their applications*. NY: Taylor & Francis, 2002, 288 p.
15. Idel'chik I.E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* (Reference book on hydraulic resistance). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 672 p. (in Russ.).
16. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* (Dynamics of viscous incompressible liquid). Moscow, GITTL publ., 1955, 519 p. (in Russ.).
17. McComas S.T. Hydrodynamic entrance length for ducts of arbitrary cross section. *J. Basic Eng.*, 1967, Vol. 89, no. 4, pp.847–850. DOI: 10.1115/1.3609713

Received February 26, 2017

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА НА ДВУХКОЛЕСНОМ ТРАНСПОРТНОМ СРЕДСТВЕ

**В.И. Рязжских¹, М.Е. Семенов², А.Г. Рукавицын³, О.И. Канищева⁴,
А.А. Демчук⁴, П.А. Мелешенко³**

¹ Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

² Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

³ Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

⁴ Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: ryazhskih_vi@mail.ru

Рассматривается механическая система, состоящая из двухколесной тележки, на оси которой располагается обратный маятник. Задача заключается в формировании такого управляющего воздействия, формируемого по принципу обратной связи, которое, с одной стороны, обеспечивало бы заданный закон движения механического средства, а с другой, стабилизировало бы неустойчивое положение маятника.

Ключевые слова: механическая система; двухколесное транспортное средство; обратный маятник; люфт; стабилизация; управление.

Введение

Возможность управления неустойчивыми техническими системами теоретически рассматривалась уже давно, однако практическая значимость такого управления отчетливо проявилась лишь в последнее время [1–5]. Оказалось, что неустойчивые объекты управления при подходящем управлении обладают рядом «полезных» качеств. Примерами таких объектов могут служить космический корабль на этапе взлета, термоядерный реактор и многие другие. В тоже время при выходе из строя автоматической системы управления неустойчивый объект может представлять собой существенную угрозу, опасность и для человека, и для окружающей среды. В качестве катастрофического примера результатов отключения автоматического управления можно привести аварию на Чернобыльской АЭС. По мере того, как системы управления становятся все более надежными, все более широкий круг технических неустойчивых в отсутствие управления объектов применяется на практике. Одним из самых простых примеров неустойчивых объектов является классический обратный маятник. С одной стороны, задача о его стабилизации сравнительно простая и наглядная, с другой, она может найти практическое применение при создании моделей двуногих существ, а также антропоморфных устройств (роботов, киберов и др.), перемещающихся на двух опорах. В последние годы появились работы, посвященные проблемам стабилизации обратного маятника, связанного с движущимся двухколесным транспортным средством [6–8]. Эти исследования имеют потенциальные перспективы применения во многих областях, таких как транспорт и разведка, в связи с компактной конструкцией, удобством эксплуатации, высокой маневренностью и низким расходом топлива таких устройств. Тем не менее, рассматриваемая задача еще далека от окончательного решения. Известно, что многие традиционные технические устройства имеют как устойчивые, так и не устойчивые состояния и режимы работы. Характерный пример – сегвей, изобретённый Дином Кейменом электрический самобалансирующийся самокат с двумя колёсами, расположенными по обе стороны от водителя. Два колеса скутера расположены соосно. Сегвей автоматически балансируется при изменении положения корпуса водителя; для этой цели используется система индикаторной стабилизации: сигналы с гироскопических и жидкостных датчиков наклона поступают на микропроцессоры, которые вырабатывают электрические сигналы, воздействующие на двигатели и управляющие их движениями. Каждое колесо сегвея приводится во вращение своим электродвигателем, реагирующим на изменения равновесия машины. При наклоне тела ездока вперёд сегвей начинает катиться вперёд, при увеличении же угла наклона тела ездока скорость сегвея увеличивается. При отклонении корпуса назад само-

кат замедляет движение, останавливается или катится задним ходом. Руление в первой модели происходит с помощью поворотной рукоятки, в новых моделях – качанием колонки влево-вправо. Задачи управления колебательными механическими системами имеют значительный теоретический интерес и большое практическое значение.

Известно, что в процессе функционирования механических систем вследствие старения и износа деталей неизбежно возникают люфты, упоры, поэтому для описания динамики таких систем необходимо принимать во внимание влияние гистерезисных эффектов. Математические модели таких нелинейностей в соответствии с классическими представлениями сводятся к операторам, которые рассматриваются как преобразователи на соответствующих функциональных пространствах. Динамика таких преобразователей описывается отношениями «вход–состояние» и «состояние–выход» [1].

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается механическая система, состоящая из двухколесной тележки, на оси которой располагается обратный маятник. Задача заключается в формировании такого управляющего воздействия, которое, с одной стороны, обеспечивало бы заданный закон движения механического средства, а с другой, стабилизировало бы неустойчивое положение маятника. При этом учитываются гистерезисные свойства в управляющем контуре изучаемой системы. Ниже графически представлены элементы, изучаемой механической системы – двухколесного транспортного средства с закрепленным на нем обратным маятником.

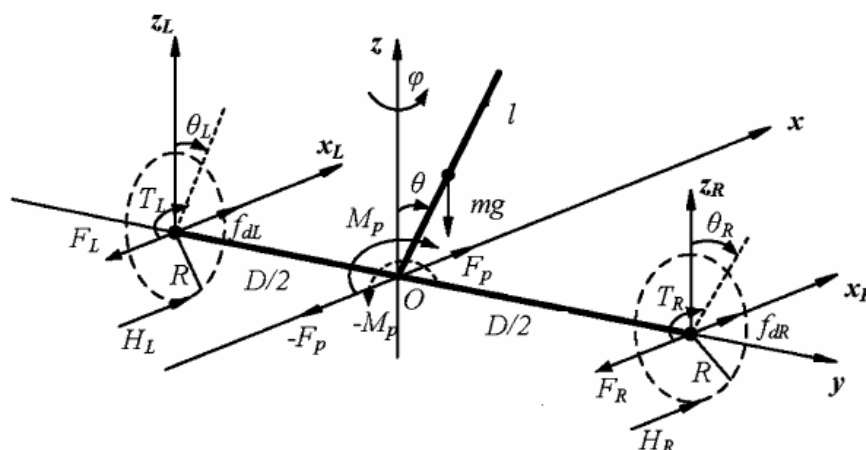


Рис. 1. Основные структурные элементы рассматриваемого механического устройства

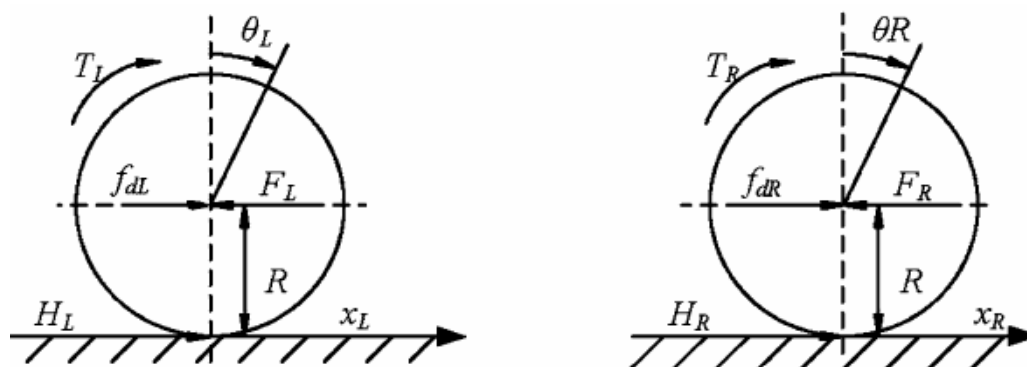


Рис. 2. Левое и правое колеса механического устройства с управляющим моментом

Параметры и переменные, которые описывают рассматриваемую систему: φ – угол поворота транспортного средства; D – расстояние между двумя колесами вдоль центра оси; R – радиус колес; J_φ – момент инерции; T_ω – разность крутящих моментов левого и правого колес; v – продольная скорость транспортного средства; θ – угол отклонения маятника от вертикального положения; m – масса перевернутого маятника; l – расстояние между центром тяжести тела и

осью колеса; T_v – сумма крутящих моментов левого и правого колес; x – перемещение транспортного средства по направлению продольной скорости; M – масса шасси; M_ω – масса колес; h – раствор люфта.

Динамика системы

Динамику системы описывают следующие уравнения:

$$\ddot{\varphi} = \frac{D}{2RJ_\varphi} T_\omega, \quad (1)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{\Omega} [J_\theta ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - m^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta] + \frac{J_\theta}{\Omega R} T_v, \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\Omega} [M_x mgl \sin \theta - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{ml \cos \theta}{\Omega R} T_v, \quad (3)$$

где $T_\omega = T_L - T_R$; $T_v = T_L + T_R$; $M_x = M + m + 2(M_\omega + \frac{J_\omega}{R^2})$; $J_\theta = ml^2 + J_c$; $\Omega = M_x J_\theta - m^2 l^2 \cos^2 \theta$;

$$J_\varphi = J_v + \frac{D^2}{2} (M_\omega + \frac{J_\omega}{R^2}).$$

Будем считать заданным желаемый закон изменения параметров системы:

$$\varphi_d = \varphi_d(t), \theta_d = \theta_d(t), X_d = X_d(t). \quad (4)$$

Модель, описывающую динамику изменения параметров системы, можно представить в виде двух независимых подсистем. Первая подсистема состоит из одного уравнения – φ -подсистемы, определяющего угловые движения транспортного средства:

$$\ddot{\varphi} = \frac{D}{2RJ_\varphi} T_\omega. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в виде системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{D}{2RJ_\varphi} T_\omega - \ddot{\varphi}_d \end{cases}, \quad (6)$$

где $e_1 = \varphi - \varphi_d$, $e_2 = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_d$.

Вторая подсистема, описывающая радиальные движения транспортного средства, а также колебания установленного на ней маятника, состоит из двух уравнений – $\{v, \theta\}$ -подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{\Omega} [J_\theta ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - m^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta] + \frac{J_\theta}{\Omega R} T_v \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{\Omega} [M_x mgl \sin \theta - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{ml \cos \theta}{\Omega R} T_v \end{cases}. \quad (7)$$

Систему (7) удобно представить в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = e_4, \\ \dot{e}_4 = \frac{1}{\Omega_0} [J_\theta ml (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 g \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] + \frac{J_\theta}{\Omega_0 R} T_v - \ddot{x}_d, \\ \dot{e}_5 = e_6, \\ \dot{e}_6 = \frac{1}{\Omega_0} [M_x mgl \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] - \frac{ml \cos(e_5 + \theta_d)}{\Omega_0 R} T_v - \ddot{\theta}_d, \end{cases} \quad (8)$$

где $\Omega_0 = M_x J_\theta - m^2 l^2 \cos^2(\theta_d + e_5)$, $e_3 = x - x_d$, $e_4 = v - v_d$, $e_5 = \theta - \theta_d$, $e_6 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$.

Механика

Рассмотрим подсистему (6), управлять которой будем по принципу обратной связи. Для этого введем новую переменную и определим поверхность переключения в фазовом пространстве системы как $s_1 = 0$.

$$s_1 = \dot{e}_1 + c_1 e_1, \quad (9)$$

где c_1 – положительный параметр. Непосредственно из определения вытекает:

$$\dot{s}_1 = \ddot{e}_1 + c_1 \dot{e}_1 = \frac{D}{2RJ_\varphi} T_w - \ddot{\varphi}_d + c_1 \dot{e}_1. \quad (10)$$

Для стабилизации вращательного движения определим управляющий момент следующим образом:

$$T_w = \frac{2RJ_\varphi}{D} [\ddot{\varphi}_d - c_1 \dot{e}_1 - k_1 \operatorname{sgn}(s_1) - k_2 s_1], \quad (11)$$

где k_1, k_2 – положительно заданные параметры.

Аналогично будем строить управление второй подсистемой (8), управлять которой, будем также по принципу обратной связи. Для этого введем новую переменную и определим поверхность переключения в фазовом пространстве системы, как $s_2 = 0$.

$$s_2 = \dot{e}_3 + c_2 e_3, \quad (12)$$

где c_2 – положительный параметр, тогда

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 = \ddot{e}_3 + c_2 \dot{e}_3 = & \frac{1}{\Omega_0} [J_\theta m l (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 g \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] + \\ & + \frac{J_\theta}{\Omega_0 R} T_v - \dot{v}_d + c_2 \dot{e}_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Для стабилизации радиального движения определим управляющий момент:

$$T_v = -R m l (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) + \frac{m^2 l^2 g}{J_\theta} \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d) - \frac{\Omega_0 R}{J_\theta} [c_2 \dot{e}_3 - \dot{v}_d + k_3 \operatorname{sgn}(s_2) + k_4 s_2], \quad (14)$$

где k_3, k_4 – положительно заданные параметры.

Для того, чтобы одновременно управлять обеими подсистемами системы, введем дополнительное управляющее воздействие:

$$\dot{s}_3 = g \tan \theta - \frac{J_\theta}{m l \cos \theta} [\ddot{\theta}_d + c_3 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - k_5 \operatorname{sgn}(s_3) - k_6 s_3], \quad (15)$$

где g – ускорение свободного падения; c_3, k_5, k_6 – положительные параметры; s_3 – поверхность переключения, определяемая соотношением:

$$s_3 = e_6 + c_3 e_5.$$

Сформулируем основные результаты работы, заключающиеся в принципиальной возможности стабилизации обеих подсистем, в сделанных предположениях относительно управляющих воздействий, в окрестности нулевого положения равновесия.

Теорема 1. Система (6) с управляющим воздействием (11) абсолютно асимптотически устойчива:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_1\| & \rightarrow 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_2\| & \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство: определим функцию Ляпунова как

$$V_1 = \frac{1}{2} \alpha s_1^2, \quad (17)$$

где $\alpha = D/2RJ_\varphi$.

Очевидно, что функция $V \geq 0$, тогда

$$\dot{V}_1 = \alpha s_1 \dot{s}_1 = s_1 [T_w - \alpha(\ddot{\varphi}_d - c_1 \dot{e}_1)]. \quad (18)$$

Подставив (14) в \dot{V} , получим

$$\dot{V} = -(k_1 \operatorname{sgn}(s_1) + k_2(s_1))s_1. \quad (19)$$

Очевидно, что $\dot{V}_1 \leq \wp V_1$, где \wp – положительный параметр, что в силу теоремы Ляпунова означает асимптотическую устойчивость.

Теорема 2. Рассмотрим подсистему (8) с управляющим воздействием (14). В сделанных предположениях эта система абсолютно асимптотически устойчива, т. е. при любых начальных условиях выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_3\| &\rightarrow 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_4\| &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство: определим функцию Ляпунова для системы (8) посредством соотношения

$$V_2 = \frac{1}{2} \beta_3 s_2^2, \quad (21)$$

где $\beta_3 = \Omega_0 R / J_\theta$.

Очевидно, что функция $V_2 \geq 0$, и

$$\dot{V}_2 = \beta_3 s_2 \dot{s}_2 = s_2 [\beta_1 (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) - \beta_2 \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d) + T_v], \quad (22)$$

где $\beta_1 = Rml$, $\beta_2 = \frac{m^2 gl}{J_\theta}$.

Подставив (14) в (20), получим

$$\dot{V}_2 = -(k_3 \operatorname{sgn}(s_2) + k_4(s_2))s_2. \quad (23)$$

Очевидно, что $\dot{V}_2 \leq \wp V_2$, где \wp – положительный параметр, что в силу теоремы Ляпунова означает асимптотическую устойчивость.

Динамика системы с гистерезисным управлением

Люфты и упоры возникают благодаря старению и износу механических параметров, поэтому представляет интерес изучение динамики рассматриваемой системы в ситуации, когда управляющее воздействие (T_v и T_w) воздействует на систему опосредованно, т. е. они являются входом на гистерезисный преобразователь – люфт, а его выход является управляющим воздействием на систему. Величина люфта определяет степень поворота элемента управления, которая не приводит к изменениям в управляемой системе. Наличие люфта в управляющем воздействии в общем случае осложняет задачу управления [9–13], так как возникают зоны нечувствительности по отношению к управляющему воздействию. Приведем краткое описание используемого в дальнейшем гистерезисного преобразователя – люфта, основанное на операторной трактовке.

Выход преобразователя – люфта на монотонных входах описывается соотношением:

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0) & \text{при тех } t, \text{ при которых } x(t_0) - h \leq u(t) \leq x(t_0), \\ u(t) & \text{при тех } t, \text{ при которых } u(t) \geq x(t_0), \\ u(t) + h & \text{при тех } t, \text{ при которых } u(t) \leq x(t_0) - h, \end{cases} \quad (24)$$

которое иллюстрирует рис. 3.

С помощью полугруппового тождества действие оператора распространяется на все кусочно-монотонные входы:

$$\Gamma[u(t_1, h)x(t)] = \Gamma[\Gamma[u_0, h]x(t_1), h]x(t) \quad (25)$$

и с помощью специальной предельной конструкции на все непрерывные. Так как выход этого оператора не является дифференцируемым, то в дальнейшем используется аппроксимация люфта моделью Боука–Вена [7]. Эта известная полуфизическая модель широко используется для феноменологического описания гистерезисных эффектов. Популярность модели Боука–Вена обу-

Механика

славливается ее способностью охватывать в аналитическом виде различные формы гистерезисных циклов. Формальное описание модели сводится к системе следующих уравнений:

$$F_{bw}(x, t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)Dkz(t), \quad \dot{z} = D^{-1}(A\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n). \quad (26)$$

$F_{bw}(x, t)$ трактуется как выход гистерезисного преобразователя, а $x(t)$ – как вход. Здесь $n \geq 1$, $D > 0$, $k > 0$ и $0 < \alpha < 1$.

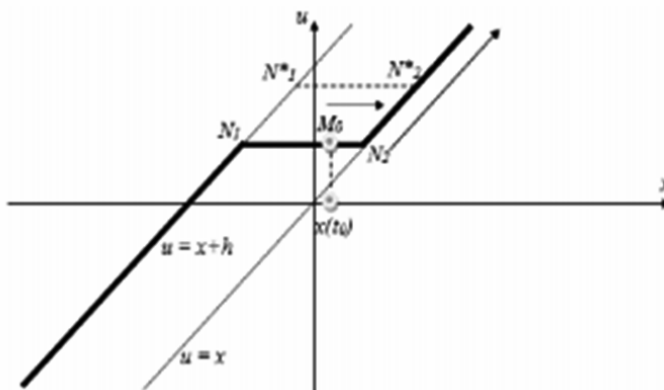


Рис. 3. Динамика входно-выходных соответствий люфта

Рассмотрим обобщение систем (6) и (8), в которых управляющее воздействие поступает на вход гистерезисного преобразователя, а выход является управляющим воздействием на систему:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{D}{2RJ_\varphi} F_{bw} - \ddot{\varphi}_d \\ F_{bw}(x, t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)Dkz(t), \\ \dot{z} = D^{-1}(A\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n). \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = e_4, \\ \dot{e}_4 = \frac{1}{\Omega_0} [J_\theta ml(\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 g \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] + \frac{J_\theta}{\Omega_0 R} F_{bw} - \ddot{x}_d, \\ \dot{e}_5 = e_6, \\ \dot{e}_6 = \frac{1}{\Omega_0} [M_x mgl \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] - \frac{ml \cos(e_5 + \theta_d)}{\Omega_0 R} F_{bw} - \ddot{\theta}_d, \\ F_{bw}(x, t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)Dkz(t), \\ \dot{z} = D^{-1}(A\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n). \end{cases} \quad (28)$$

Как и ранее в рассматриваемой системе, основным являлся вопрос о стабилизации, т. е. асимптотическом поведении ее фазовых переменных. Ниже приводятся графики при одних и тех же физических параметрах системы с люфтом и без люфта. Эта система исследовалась посредством численных экспериментов. Данная задача была решена в среде программирования Wolfram Mathematica.

Значения констант и начальные условия приведены ниже:

$$m = 3; M = 5; M_\omega = 1; D = 1,5; R = 0,25; l = 0,2; J_\omega = 1,5; J_c = 5;$$

$$J_\varphi = 1,5; \varphi(0) = 0; x(0) = 0; \theta(0) = 0,2; v(0) = [\dot{\varphi}(0) \dot{x}(0) \dot{\theta}(0)]^T = [0,0,0,002]^T;$$

$$k_1 = k_3 = 0,5; k_2 = k_4 = 0,2; k_5 = 3; k_6 = 5; c_1 = c_2 = c_3 = 0,5.$$

На рис. 8–11 приведены результаты численного моделирования исследуемой системы.

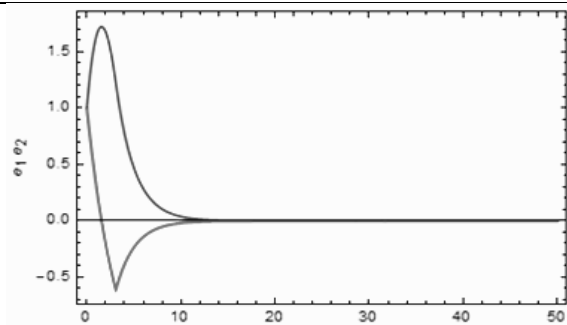


Рис. 4. Зависимость e_1, e_2 от времени $t = 50$

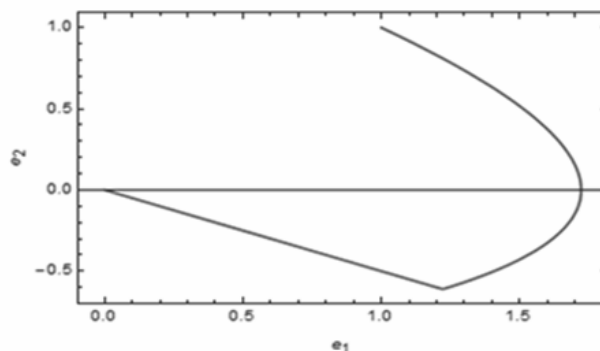


Рис. 5. Зависимость e_1 от e_2 , при $t = 50$

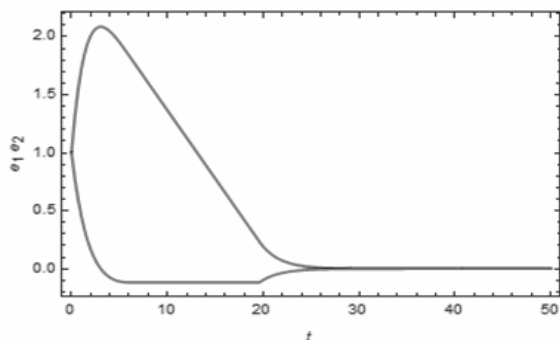


Рис. 6. Зависимость e_1, e_2 от времени t с наличием люфта в обратной связи, при $\alpha = 0,5$

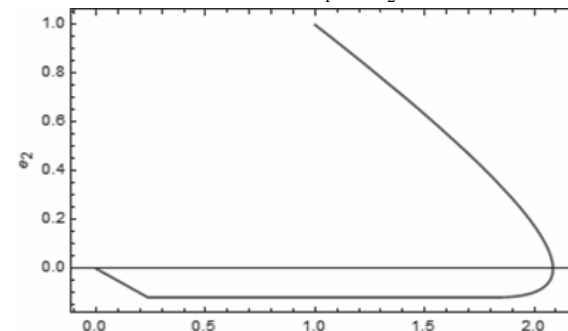


Рис. 7. Зависимость e_1 от e_2 с наличием люфта в обратной связи, при $\alpha = 0,5, t = 50$

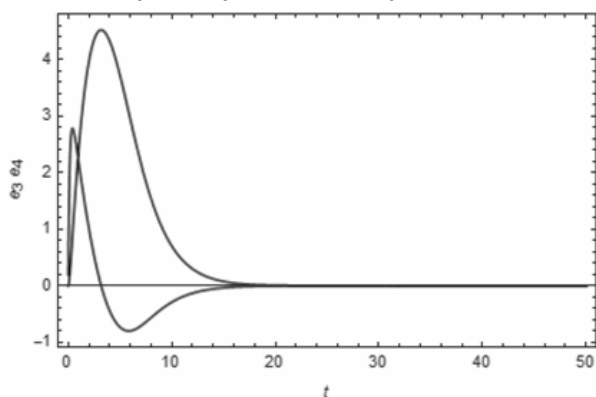


Рис. 8. Зависимость e_3, e_4 от времени t

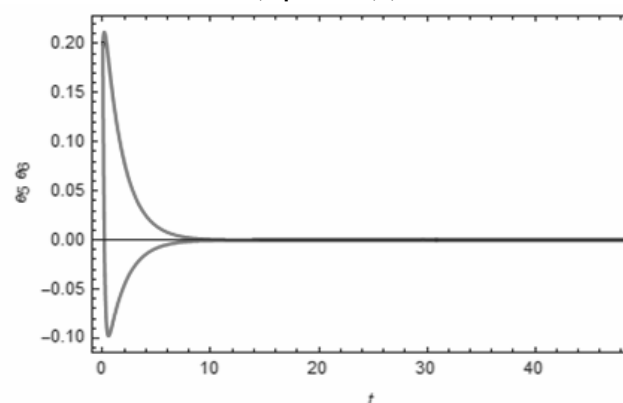


Рис. 9. Зависимость e_5, e_6 от времени t

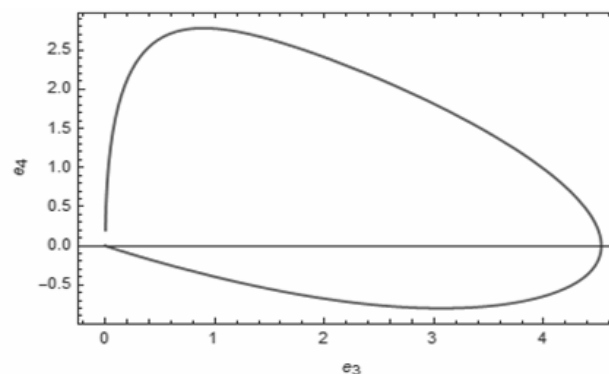


Рис. 10. Зависимость e_3, e_4 , при $t = 50$

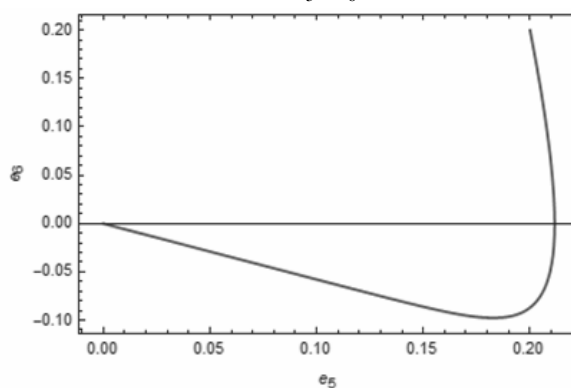


Рис. 11. Зависимость e_5 от e_6 при $t = 50$

Численные результаты показывают, что релейное управление, формируемое по принципу обратной связи, позволяет удерживать фазовые координаты в окрестности положения равновесия, при этом асимптотическая устойчивость не имеет места, что обусловлено наличием люфтов в контурах обратной связи исследуемых систем.

Заключение

Исследована стабилизация перевернутого маятника на двухколесной тележке в процессе ее движения по заданной траектории. Предложен алгоритм управления, обеспечивающий устойчивость системы и диссипативность при наличии гистерезисных звеньев в контуре обратной связи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 16-08-003.

Литература

1. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом // М.А. Красносельский, А.В. Покровский. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
2. Стабилизация перевернутого маятника вертикальными осцилляциями с помощью гистерезисного управления / М.Е. Семенов, Д.В. Шевлякова, О.И. Канищева, Д.В. Грачиков // Научные технологии. – 2012. – Т. 13, № 3. – С. 027–034.
3. Семенов, М.Е. Адаптивное управление неустойчивым объектом с гистерезисными свойствами / М.Е. Семенов, А.Г. Рукавицын, О.И. Канищева, А.Е. Пигарев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 1. – С. 40–44.
4. Капица, П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом / П.Л. Капица // УФН. – 1951. – Т. 44, № 3. – С. 7–20.
5. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы // И.В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.
6. Черноусько, Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
7. Öztürk, İ. A novel method for producing pseudo random numbers from differential equation-based chaotic systems / İ. Öztürk, R. Kılıç // Nonlinear Dynamics, 2015, Vol. 80, Issue 3, pp. 1147–1157.
8. Решмин, С.А. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза / С.А. Решмин, Ф.Л. Черноусько // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 51–62.
9. Robust stabilization of fractional-order chaotic systems with linear controllers: LMI-based sufficient conditions / M.R. Faieghi, S. Kuntanapreeda, H. Delavari, D. Baleanu // Journal of Vibration and Control. – 2014. – Vol. 20. – Issue 7. – pp. 1042–1051.
10. Semenov, M.E. Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions / M.E. Semenov, D.V. Shevlyakova, P.A. Meleshenko // Nonlinear Dynamics. – 2014. – Vol. 75. – Issue 1-2. – P. 247–256.
11. On the state feedback control of inverted pendulum with hysteretic nonlinearity / M.E. Semenov, D.V. Grachikov, A.G. Rukavitsyn, P.A. Meleshenko // MATEC Web of Conferences. – 2014. – Vol. 16. – P. 05009.
12. Stephenson, A. On an induced stability / A. Stephenson // Philosophical Magazine. – 1908. – Vol. 15. – Issue 86. – P. 233–236.
13. Неймарк, Ю.И. Динамические модели теории управления / Ю.И. Неймарк, Н.Я. Коган, В.П. Савельев. – М.: Наука, 1985. – 400 с.

Поступила в редакцию 31 августа 2016 г.

STABILIZATION OF INVERTED PENDULUM ON A TWO-WHEELED VEHICLE

V.I. Ryazhskiy¹, M.E. Semenov², A.G. Rukavicin³, O.I. Kanishcheva⁴, A.A. Demchuk⁴,
P.A. Meleshenko³

¹ Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

² Voronezh State Architecture and Engineering University, Voronezh, Russian Federation

³ Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

⁴ Military Educational and Scientific Center of the Air Force "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskiy_vi@mail.ru

A mechanical system consisting of a two-wheeled vehicle with a fixed inverted pendulum is considered. The objective lies in forming such control action which, on the one hand, would provide movement of the system on the specified trajectory, and on the other hand would provide stabilization of the inverted pendulum in a neighborhood of unstable equilibrium position. Characteristic feature of the set objective is the fact that the control action is performed with the use of a hysteretic connection formalized by equations of the Bouc-Wen model. Equations of the researched system's model are divided into two independent subsystems of the second and the fourth order, which describe rotational and longitudinal modes of motion correspondingly. Control action on each of the subsystems, formed on the basis of the feedback principle, is constructed according to the relay law; at that in the phase space of each subsystem linear manifolds which determine switching surfaces are constructed. Theorems that ascertain the presence of errors in the assumptions made, which determine the discrepancy between the desired and simulated laws of the vehicle motion, as well as the deviation of the pendulum from the unstable equilibrium position asymptotically tend to zero, are formulated and proved in the article. In proving the theorems, the apparatus of Lyapunov functions was used. As it is shown in the article, the presence of the hysteresis component in the feedback loop makes manageability of the system more difficult, and as a result, in this case we can only talk about limitation of errors of the discrepancy and the dissipative motion of the pendulum. Results of computational simulation of dynamics of the system under study both under conditions of hysteresis connections and without them, which illustrate the proved theorems, are given in the article.

Keywords: mechanical system; two-wheeled vehicle; inverted pendulum; stabilization; control.

References

1. Krasnosel'skiy M.A., Pokrovskiy A.V. *Sistemy s gisterezisom* (Systems with hysteresis), Moscow, Nauka Publ., 1983, 272 p. (in Russ.).
2. Semenov M.E., Shevlyakova D.V., Kanishcheva O.I., Grachikov D.V. Inverted pendulum stabilization by vertical oscillations with hysteresis control. *Naukoemkie tekhnologii* (Science Intensive Technologies). 2012, Vol. 13, no. 3, pp. 027–034. (in Russ.).
3. Semenov M.E., Rukavicin A.G., Kanishcheva O.I., Pigarev A.E. Adaptive control of unstable objects with hysteresis properties. *Vestnik VGU. Seriya: Sistemyy analiz i informatsionnye tekhnologii*, 2014, no. 1, pp. 40–44. (in Russ.).
4. Kapitsa P.L. *Mayatnik s vibriruyushchim podvesom* (The pendulum with vibrating suspension). *UFN (Phys. Usp.)*, 1951, Vol. 44, no. 3, pp. 7–20. (in Russ.).
5. Miroshnik I.V. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Nelineynye i optimal'nye sistemy* (The theory of automatic control. Non-linear and optimal systems). St. Petersburg, Piter Publ., 2006, 272 p. (in Russ.).
6. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B N. *Upravlenie kolebaniyami* (Vibration control). Moscow, Nauka Publ., 1980, 383 p. (in Russ.).

7. Öztürk İ., Kılıç R. A novel method for producing pseudo random numbers from differential equation-based chaotic systems. *Nonlinear Dynamics*, 2015, Vol. 80, Issue 3, pp. 1147–1157. DOI: 10.1007/s11071-015-1932-5
8. Reshmin S.A., Chernous'ko F.L. Time-optimal control of an inverted pendulum in the feedback form. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2006, Vol. 45, no. 3, pp. 383–394. DOI: 10.1134/S1064230706030063
9. Faieghi M.R., Kuntanapreeda S., Delavari H., Baleanu D. Robust stabilization of fractional-order chaotic systems with linear controllers: LMI-based sufficient conditions. *Journal of Vibration and Control*, 2014, Vol. 20, Issue 7, pp. 1042–1051. DOI: 10.1177/1077546312475151
10. Semenov M.E., Shevlyakova D.V., Meleshenko P.A. Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2014, Vol. 75, Issue 1-2, pp. 247–256. DOI: 10.1007/s11071-013-1062-x
11. Semenov M.E., Grachikov D.V., Rukavitsyn A.G., Meleshenko P.A. On the state feedback control of inverted pendulum with hysteretic nonlinearity. *MATEC Web of Conferences*, 2014, Vol. 16, p. 05009. DOI: 10.1051/mateconf/20141605009
12. Stephenson A. On an induced stability. *Philosophical Magazine*, 1908, Vol. 15, Issue 86, pp. 233–236.
13. Neumark Y., Kogan N., Saveliev V.P. *Dinamicheskie modeli teorii upravleniya* (Dynamic models of control theory). Moscow, Nauka Publ., 1985, 400 p. (in Russ.).

Received August 31, 2016

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ТЕТРАГОНАЛЬНОГО ГРАФЕНА L_{4-8} В ПОЛИМОРФНУЮ РАЗНОВИДНОСТЬ АЛМАЗА LA7

Е.А. Беленков, В.А. Грешняков

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: belenkov@csu.ru

Проведено исследование фазового перехода тетрагонального графена L_{4-8} в базоцентрированную орторомбическую полиморфную разновидность алмаза LA7 методом теории функционала плотности. Анализ возможных способов формирования фазы LA7 показал, что ее структура может быть получена в результате сильного одноосного сжатия тетрагонального графита с упаковкой АВ при давлении 42,5 ГПа. Расчеты также показали, что процесс этого структурного преобразования должен сопровождаться выделением энергии $\sim 0,52$ эВ/атом. Полиморфная разновидность алмаза LA7 может устойчиво существовать при нормальных условиях, так как величина потенциального барьера, разделяющего состояния, соответствующие графиту L_{4-8} и фазе LA7, составляет 0,34 эВ/атом. Для экспериментальной идентификации фазы LA7 были рассчитаны теоретические рентгенограммы фазового перехода «графит L_{4-8} –LA7».

Ключевые слова: алмаз; графен; полиморфизм; структурообразование; компьютерное моделирование.

Введение

Углеродные материалы с алмазоподобной структурой должны обладать высокими механическими характеристиками, так как они состоят из углеродных атомов в состояниях sp^3 -гибридизации, связанных прочными ковалентными связями, и имеют трехмерную жесткосвязанную структуру [1–2]. К настоящему времени теоретически предсказана возможность существования нескольких десятков полиморфных разновидностей алмаза [2–9], из которых экспериментально получены только несколько фаз [2]. Поэтому необходим поиск путей экспериментального получения новых, теоретически предсказанных полиморфов алмаза. Одним из возможных способов синтеза может быть воздействие высокими давлениями на углеродные материалы с графитоподобной структурой. Такими исходными материалами могут быть фуллереновые конденсаты, жгуты углеродных нанотрубок и кристаллы графита [1, 2, 8]. Из разнообразных полиморфных разновидностей алмаза, согласно теоретическим оценкам, одной из наиболее устойчивых фаз должна быть фаза LA7, в которой все атомы находятся в кристаллографически эквивалентных позициях [2, 6]. Для исследования фазовых превращений в углеродных материалах разработана методика, позволяющая теоретически исследовать эти процессы [10]. В данной работе выполнены расчеты фазового превращения тетрагонального графита L_{4-8} в полиморфную разновидность алмаза LA7.

Методика расчетов

Геометрически оптимизированные структуры и энергетические характеристики углеродных соединений были рассчитаны в программном пакете Quantum ESPRESSO [11] в рамках метода теории функционала плотности (ТФП). Расчеты были выполнены при использовании приближения локальной плотности (ПЛП) с функционалом обменно-корреляционной энергии Педью-Зангера [12]. Влияние ионных остовов учитывалось через сохраняющие норму псевдопотенциалы. В расчетах использовалась сетка $12 \times 12 \times 12$ из k -точек. Разложение волновых функций по усеченному базисному набору плоских волн. Размерность набора базисных функций была ограничена значением отсечки кинетической энергии, равным 800 эВ.

Для теоретического исследования фазовых переходов кристаллов гексагонального графена L_6 и тетрагонального графена L_{4-8} в полиморф алмаза LA7 с базоцентрированной орторомбической кристаллической решеткой ($Cmcm$) были использованы простые орторомбические элементарные ячейки, каждая из которых содержала по шестнадцать углеродных атомов (рис. 1, $a-v$). Моделирование фазовых переходов заключалось в расчетах геометрически оптимизированной структуры ряда переходных элементарных ячеек, у которых постепенно изменялся один из параметров (a , b или c). Для определения высоты потенциального барьера, разделяющего различные структурные состояния, и минимального давления фазового перехода были рассчитаны энергетические характеристики графитов и фазы LA7 при одноосном сжатии или растяжении их кристаллических решеток. Давление фазового перехода рассчитывалось по методике, описанной в работе [10]. Для сопоставительного анализа модельного фазового перехода графита в полиморф алмаза LA7 было исследовано преобразование кристалла гексагональной разновидности графена в 2H политип алмаза. Для расчетов использовалась орторомбическая элементарная ячейка 2H политипа алмаза, значения параметров которой были близки к соответствующим значениям параметров ячейки фазы LA7 (рис. 1, z).

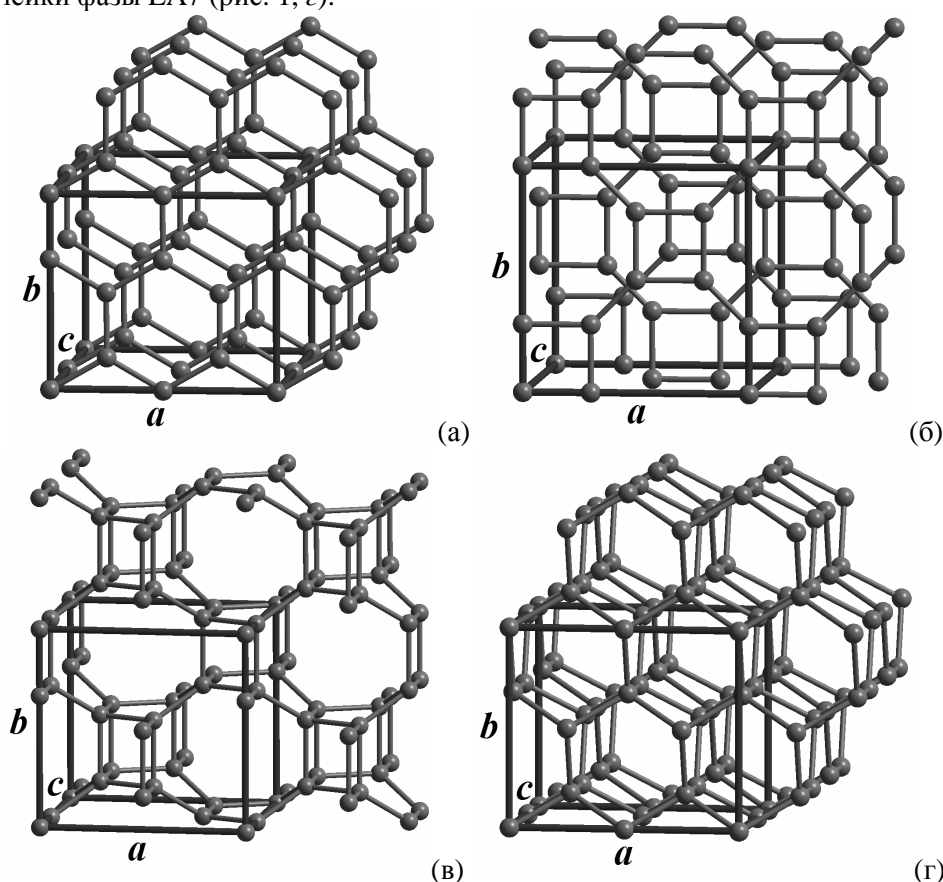


Рис. 1. Кристаллические структуры с выделенными элементарными ячейками для гексагональной разновидности графена L_6 (а), тетрагонального графена L_{4-8} (б), полиморфа алмаза LA7 (в) и 2H политипа алмаза (г)

Порошковые рентгенограммы углеродных фаз в процессе сжатия и декомпрессии были рассчитаны при использовании стандартной методики из работы [13] для характеристического излучения $Cu-K\alpha_1$ ($\lambda = 1,5405 \text{ \AA}$), средних размерах кристаллитов в 500 \AA и значениях координат атомов и параметров элементарных ячеек, вычисленных с помощью метода ТФП-ПЛП.

Результаты и обсуждение

В результате анализа возможных способов формирования орторомбической фазы LA7 установлено, что ее структура может быть получена из графита L_6 (пространственная группа $P6/mmm$) при сжатии по оси $[001]$. Другой возможный способ получения фазы LA7 заключается в сжатии кристалла из графена L_{4-8} по оси $[001]$. Структура гексагонального политипа алмаза может быть сформирована при сильном сжатии $P6/mmm$ графита L_6 по оси $[001]$.

Далее методом ТФП-ППП были выполнены расчеты значений равновесных параметров элементарных ячеек гексагональной разновидности графита L_6 ($a = 4,927 \text{ \AA}$, $b = 4,265 \text{ \AA}$ и $c = 6,746 \text{ \AA}$), тетрагонального графита L_{4-8} ($a = 4,867 \text{ \AA}$ и $c = 6,163 \text{ \AA}$), фазы LA7 ($a = 4,944 \text{ \AA}$, $b = 4,807 \text{ \AA}$ и $c = 4,391 \text{ \AA}$) и 2Н политипа алмаза ($a = 4,998 \text{ \AA}$, $b = 4,329 \text{ \AA}$ и $c = 4,155 \text{ \AA}$) при нормальном давлении. При моделировании структурных переходов «графит L_6 –полиморфы алмаза» изменялись параметры a , b и c элементарных ячеек графита, фазы LA7 и гексагонального политипа алмаза в диапазонах от 4,463 до 7,081 \AA , от 4,278 до 5,167 \AA и от 3,822 до 4,791 \AA соответственно. При исследовании фазового перехода «графит L_{4-8} –фаза LA7» параметр c тетрагонального графита варьировался от 4,827 до 6,163 \AA , тогда как параметр a полиморфа алмаза LA7 изменялся от 4,548 до 5,783 \AA .

График зависимости разностной полной энергии (ΔE) от атомарного объема (V_{at}) для гексагональной разновидности графита $P6/mmm$, полиморфной разновидности алмаза LA7, 2Н политипа алмаза и промежуточных структурных состояний приведены на рис. 2, а. По этому графику можно оценить величину энергетического барьера, который необходимо преодолеть для структурного преобразования фазы из трехкоординированных атомов в фазу из четырехкоординированных атомов. Для фазового перехода графита $P6/mmm$ в 2Н политип алмаза величина этого барьера составляет 0,36 эВ/атом (рис. 2, а) при давлении 57,1 ГПа. В свою очередь, фазовый переход гексагональной разновидности графита L_6 в полиморф алмаза LA7 возможен только в случае преодоления энергетического барьера, значительно превышающего 0,61 эВ/атом (рис. 2, а). Для инициирования такого фазового перехода необходимо давление $P > 160$ ГПа. По этой причине в первую очередь из графита $P6/mmm$ будет формироваться гексагональный политип алмаза, а не фаза LA7.

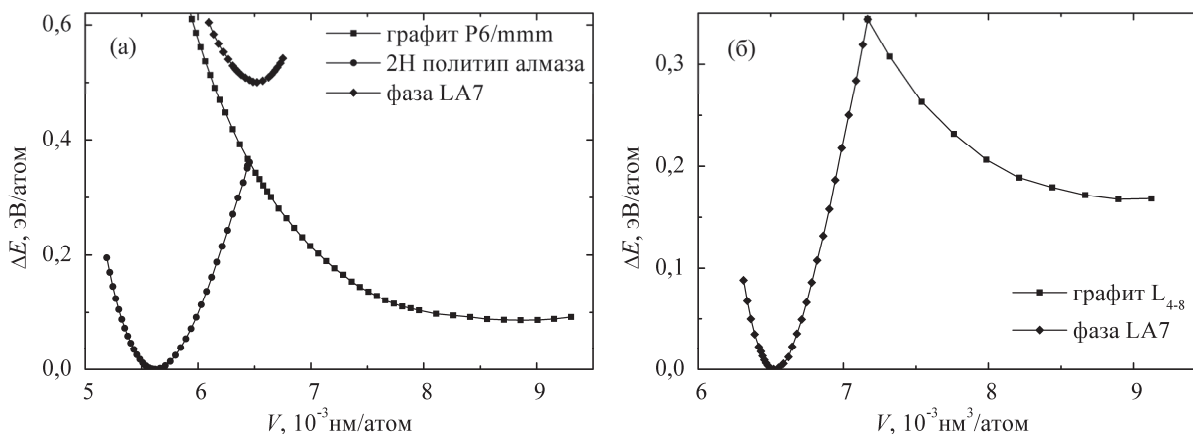


Рис. 2. Графики зависимости разностной полной энергии (ΔE) от атомарного объема (V_{at}) для фазовых переходов «гексагональная разновидность графита L_6 –полиморфы алмаза» (а) и «тетрагональный графит L_{4-8} –фаза LA7» (б)

Результаты расчета структурных и энергетических характеристик для фазового превращения тетрагонального графита L_{4-8} в полиморф алмаза LA7 представлены на рис. 2, б и 3, а. Для получения фазы LA7 в процессе сжатия графита необходимо преодолеть потенциальный барьер 0,18 эВ/атом, тогда как обратное преобразование этой фазы в графит будет происходить после преодоления потенциального барьера 0,34 эВ/атом. Атомный объем графита L_{4-8} в области фазового перехода составляет 7,17 $\text{\AA}^3/\text{атом}$ (рис. 2, б). По этому значению V_{at} можно найти давление, при котором происходит фазовый переход. На рис. 3, а изображены зависимости изменения плотности углеродных соединений от давления. В диапазоне давлений от 0 до 42 ГПа происходит рост плотности графита пропорционально \sqrt{P} . Структурный переход тетрагонального графита L_{4-8} в орторомбическую фазу LA7 происходит при давлении 42,5 ГПа и представляет собой фазовый переход первого рода, при котором происходит скачкообразное увеличение плотности системы на 9,9%. При давлениях, превышающих 43 ГПа, плотность сформировавшейся фазы LA7 линейно изменяется в зависимости от величины P .

Для определения теплового эффекта фазового перехода тетрагонального графита L_{4-8} в полиморфную разновидность алмаза LA7 была вычислена разность их энтальпий в области фазового перехода ($\Delta H = H_{LA7} - H_{\text{graphite-}L_{4-8}}$). Зависимости энтальпии этих углеродных соединений от давления приведены на рис. 3, б. В ходе расчетов установлено, что фазовый переход тетраго-

нального графита L_{4-8} в полиморф алмаза LA7 будет сопровождаться выделением энергии, величина которой составляет 0,52 эВ/атом.

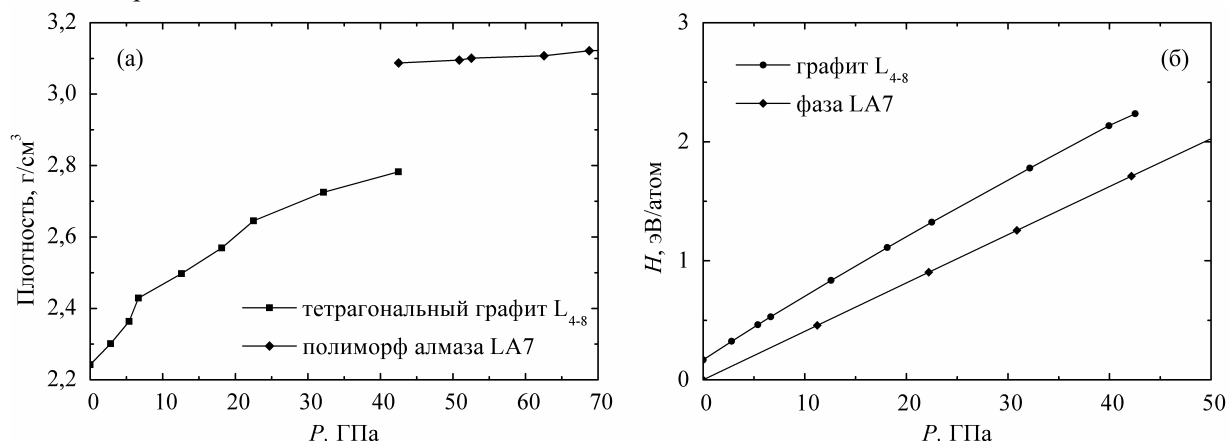


Рис. 3. Зависимости плотности от давления (а) и энтальпии от давления (б) для тетрагонального графита L_{4-8} и фазы LA7

На заключительном этапе работы были выполнены теоретические расчеты рентгенограмм поликристаллических материалов в процессе структурного превращения тетрагонального графита в полиморфную разновидность алмаза LA7 при одноосном сжатии. На рис. 4 приведены результаты этих расчетов. При сжатии графита по оси c до давления 42 ГПа его наиболее интенсивный максимум 002 сильно смещается в область больших углов (с $24,6$ до $37,2^\circ$), тогда как второй интенсивный максимум 101 смещается только на $2,2^\circ$, но при этом его относительная интенсивность увеличивается в несколько раз. При фазовом переходе ($P = 42,5$ ГПа) происходит значительное изменение дифракционной картины, сопровождающееся исчезновением исходных максимумов низкой интенсивности и появлением множества новых максимумов. В процессе декомпрессии полученной фазы LA7 интенсивности и угловые позиции большей части максимумов на дифракционной картине почти не изменяются. Расчетная порошковая рентгенограмма орторомбического полиморфа алмаза достаточно сильно отличается от рентгенограмм графита и поли типов алмаза 2H и 3C.

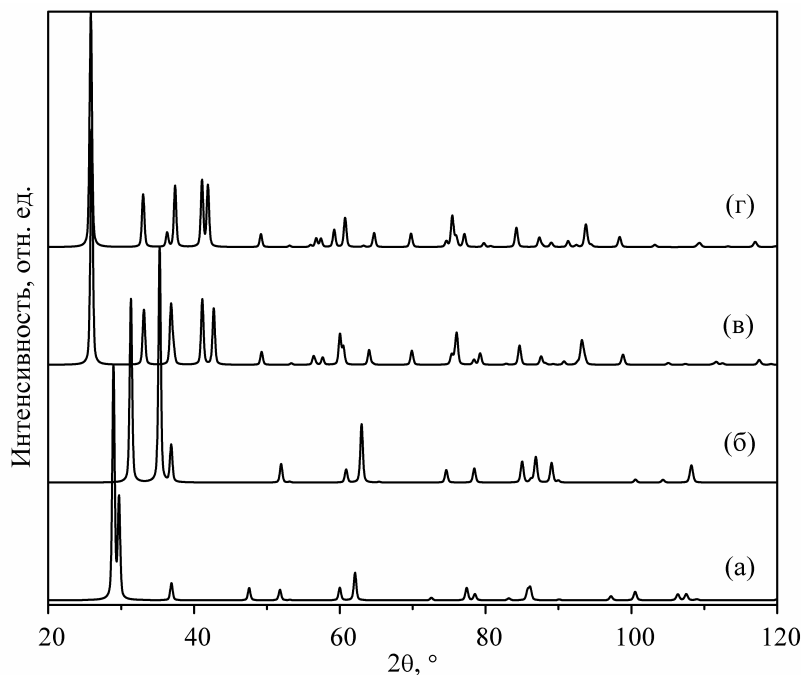


Рис. 4. Расчетные порошковые рентгенограммы углеродного материала, испытывающего структурное превращение из графита L_{4-8} в полиморф алмаза LA7: (а) графит L_{4-8} при нормальном давлении; (б) графит L_{4-8} при 28 ГПа; (в) фаза LA7 при 42,5 ГПа; (г) фаза LA7 при нормальном давлении

Заключение

Таким образом, в работе методом ТФП-ППП выполнены теоретические расчеты фазового перехода тетрагонального графена L_{4-8} в полиморфную разновидность алмаза LA7. В результате установлено, что фаза LA7 может быть получена из гексагонального графита L_6 при давлении, превышающем 160 ГПа. Однако из тетрагонального графита L_{4-8} фазу LA7 возможно синтезировать при значительно более низком давлении ~ 42 ГПа. Очевидно, это связано с тем, что структура графеновых слоев L_{4-8} находится в более напряженном состоянии по сравнению со структурой гексагонального графена. Поэтому фазовый переход графита L_{4-8} в полиморф алмаза LA7 происходит при более низких давлениях по сравнению с давлениями фазового превращения из гексагонального графена. Следовательно, наиболее вероятный способ синтеза фазы LA7 заключается в сильном одноосном сжатии тетрагональной разновидности графита L_{4-8} с упаковкой слоев АВ при давлении ~ 42 ГПа. При таком фазовом переходе должно происходить изменение энтальпии $\Delta H = -0,52$ эВ/атом и скачок плотности на 10 %. Давление, при котором может быть синтезирована фаза LA7, самое низкое по сравнению с давлениями, при которых возможно получение других алмазоподобных фаз [10, 14].

Авторы благодарят Фонд перспективных научных исследований ЧелГУ за финансовую поддержку исследования. Грешняков В.А. благодарит РФФИ за финансовую поддержку проведенного исследования (проект № 16-33-00030 мол_а).

Литература

1. Беленков, Е.А. Классификация структурных разновидностей углерода / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ФТТ. – 2013. – Т. 55, № 8. – С. 1640–1650.
2. Беленков, Е.А. Структура, свойства и возможные механизмы формирования алмазоподобных фаз / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ФТТ. – 2016. – Т. 58, № 10. – С. 2069–2078.
3. New candidate for the simple cubic carbon sample shock-synthesized by compression of the mixture of carbon black and tetracyanoethylene / С. He, С.Х. Zhang, Н. Xiao *et al.* // Carbon. – 2017. – Vol. 112. – P. 91–96.
4. Belenkov, E.A. Crystalline structure and properties of diamond-like materials / E.A. Belenkov, M.M. Brzhezinskaya, V.A. Greshnyakov // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2017. – Vol. 8, no. 1. – P. 127–136.
5. Грешняков, В.А. Структура и свойства алмазоподобной фазы, получаемой из тетрагональных графеновых слоев / В.А. Грешняков, Е.А. Беленков // Письма о материалах. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 159–162.
6. Belenkov, E.A. Novel carbon diamond-like phases LA5, LA7 and LA8 / E.A. Belenkov, M.M. Brzhezinskaya, V.A. Greshnyakov // Diamond and Related Materials. – 2014. – Vol. 50. – P. 9–14.
7. Computational prediction of body-centered cubic carbon in an all-sp³ six-member ring configuration / Z.-Z. Li, C.-S. Lian, J. Xu *et al.* // Phys. Rev. B. – 2015. – Vol. 91. – P. 214106.
8. Беленков, Е.А. Новые структурные модификации алмаза: LA9, LA10, CA12 / Е.А. Беленков, В.А. Грешняков // ЖЭТФ. – 2014. – Т. 146, № 1. – С. 116–122.
9. Systematic prediction of crystal structures: an application to sp³-hybridized carbon polymorphs / R.T. Strong, C.J. Pickard, V. Milman *et al.* // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70. – P. 045101.
10. Грешняков, В.А. Моделирование фазового перехода графита в алмазоподобную фазу LA3 / В.А. Грешняков, Е.А. Беленков // ЖТФ. – 2016. – Т. 86, № 10. – С. 20–24.
11. QUANTUM ESPRESSO: a modular and open-source software project for quantum simulations of materials / P. Giannozzi, S. Baroni, N. Bonini *et al.* // J. Phys.: Condens. Matter. – 2009. – Vol. 21, no. 39. – P. 395502.
12. Perdew, J.P. Self-interaction correction to density-functional approximations for many-electron systems / J.P. Perdew, A. Zunger // Phys. Rev. B. – 1981. – Vol. 23, no. 10. – P. 5048–5079.
13. Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия / Я.С. Уманский, Ю.А. Скаков, А.Н. Иванов, Л.Н. Расторгуев. – М.: Металлургия, 1982. – 632 с.
14. Грешняков, В.А. Исследование формирования лонсдейлита из графита / В.А. Грешняков, Е.А. Беленков // ЖЭТФ. – 2017. – Т. 151, № 2. – С. 310–321.

Поступила в редакцию 23 мая 2017 г.

THEORETICAL INVESTIGATION OF PHASE TRANSITION OF TETRAGONAL L₄₋₈ GRAPHENE INTO LA7 DIAMOND POLYMORPH**E.A. Belenkov, V.A. Greshnyakov***Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation**E-mail: belenkov@csu.ru*

In this paper, the study of phase transition of tetragonal L₄₋₈ graphene into base-centered orthorhombic LA7 diamond polymorph is carried out using the density functional theory method. Analysis of the possible formation methods of LA7 phase showed that its structure can be obtained as a result of strong uniaxial compression of tetragonal graphite with packing of AB at a pressure of 42,5 GPa. The pressure at which LA7 phase can be synthesized is the lowest in comparison with the pressures at which other diamond polymorphs can be obtained. The calculations also showed that the process of this structural transformation should be accompanied by energy release of 0,52 eV/atom. The polymorphic modification of the diamond can stably exist under normal conditions, since the potential barrier separating states corresponding to graphite L₄₋₈ and LA7 phase is 0,34 eV/atom. The theoretical X-ray diffraction patterns of the "graphite L₄₋₈ – LA7" phase transition were calculated for the experimental identification of LA7 phase. The calculated powder X-ray diffraction pattern of the orthorhombic polymorph of diamond differs greatly from the X-ray diffraction patterns of graphite or cubic and hexagonal diamond polytypes.

Keywords: diamond; grapheme; polymorphism; structure formation; computer simulation.

References

1. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Classification of structural modifications of carbon. *Physics of the Solid State*, 2013, Vol. 55, no. 8, pp. 1754–1764. DOI: 10.1134/S1063783413080039
2. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. Structure, properties, and possible mechanisms of formation of diamond-like phases. *Physics of the Solid State*, 2016, Vol. 58, no. 10, pp. 2145–2154. DOI: 10.1134/S1063783416100073
3. He C., Zhang C.X., Xiao H., Meng L., Zhong J.X. New candidate for the simple cubic carbon sample shock-synthesized by compression of the mixture of carbon black and tetracyanoethylene. *Carbon*, 2017, Vol. 112, pp. 91–96. DOI: 10.1016/j.carbon.2016.11.008
4. Belenkov E.A., Brzhezinskaya M.M., Greshnyakov V.A. Crystalline structure and properties of diamond-like materials. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2017, Vol. 8, no. 1, pp. 127–136. DOI: 10.17586/2220-8054-2017-8-1-127-136
5. Greshnyakov V.A., Belenkov E.A. Structure and properties of diamond-like phase obtained from tetragonal graphene layers. *Letters on Materials*, 2016, Vol. 6, no. 3, pp. 159–162. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-3-159-162
6. Belenkov E.A., Brzhezinskaya M.M., Greshnyakov V.A. Novel carbon diamond-like phases LA5, LA7 and LA8. *Diam. Relat. Mater.*, 2014, Vol. 50, pp. 9–14. DOI: 10.1016/j.diamond.2014.08.012
7. Li Z.-Z., Lian C.-S., Xu J., Xu Li-F., Wang J.-T., Chen C. Computational prediction of body-centered cubic carbon in an all-sp³ six-member ring configuration. *Phys. Rev. B*, 2015, Vol. 91, pp. 214106. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.214106
8. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. New structural modifications of diamond: LA9, LA10, and CA12. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2014, Vol. 119, no. 1, pp. 101–106. DOI: 10.1134/S1063776114060090
9. Strong R.T., Pickard C.J., Milman V., Thimm G., Winkler B. Systematic prediction of crystal structures: an application to sp³-hybridized carbon polymorphs. *Phys. Rev. B*, 2004, Vol. 70, pp. 045101. DOI: 10.1103/PhysRevB.70.045101

10. Greshnyakov V.A., Belenkov E.A. Simulation of the phase transition of graphite to the diamond-like LA3 phase. *Technical Physics*, 2016, Vol. 61, no. 10, pp. 1462–1466. DOI: 10.1134/S1063784216100133

11. Giannozzi, P. *et al.* QUANTUM ESPRESSO: a modular and open-source software project for quantum simulations of materials. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2009, Vol. 21, no. 39, pp. 395502. DOI: 10.1088/0953-8984/21/39/395502

12. Perdew J.P., Zunger A. Self-interaction correction to density-functional approximations for many-electron systems. *Phys. Rev. B*, 1981, Vol. 23, no. 10, pp. 5048–5079. DOI: 10.1103/Bathysphere.23.5048

13. Umanskiy Ya.S., Skakov Yu.A., Ivanov A.N., Rastorguev L.N. *Kristallografiya, rentgenografiya i elektronnaya mikroskopiya* (Crystallography, x-ray diffraction and electron microscopy), Moscow, Metallurgiya, 1982, 632 p. (in Russ.).

14. Greshnyakov V.A., Belenkov E.A. Investigation on the formation of lonsdaleite from graphite. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2017, Vol. 124, no. 2, pp. 265–274. DOI: 10.1134/S1063776117010125

Received May 23, 2017

СОВМЕСТНАЯ ПОВЕРХНОСТНАЯ СЕГРЕГАЦИЯ СЕРЕБРА И ОЛОВА В ТРОЙНЫХ СПЛАВАХ Cu–Ag–Sn

А.В. Гусев, С.И. Морозов, А.Е. Чудаков

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: gusevav@susu.ru

Выполнено исследование сплавов Cu–Ag–Sn методами ТПД и статистического моделирования. Представлены результаты ТПД эксперимента по совместной поверхностной сегрегации атомов Ag и Sn в разбавленных растворах серебра и олова в меди в поликристаллическом и жидком состояниях. Приведены также данные компьютерного моделирования поверхности этих сплавов методом Монте-Карло в сочетании с методом погруженного атома.

Ключевые слова: температурно-программируемая десорбция (ТПД); метод Монте-Карло; метод погруженного атома; медь; серебро; олово.

Экспериментальное исследование поверхности сплавов Cu–Ag–Sn методом ТПД

Исследуемые сплавы выплавлены в индукционной печи в атмосфере гелия марки ВЧ из бескислородной меди (99,99 % Cu) и чистых металлов Ag (99,999 %) и Sn (99,999 %). С целью гомогенизации металла делали 10 мин выдержку расплава при 1500 К и последующий отжиг в течение двух часов при 1100 К. Очистка исследуемой поверхности перед регистрацией ТПД спектров достигалась путем неоднократных нагревов образца в вакуумной камере масс-спектрометра до температуры 1300 К, а также при первом плавлении металла [1]. В методе ТПД измеряли потоки термодесорбции различных компонентов с поверхности металла, как при его нагреве с постоянной скоростью ~ 7 К/с, так и при последующем охлаждении. Измеряли потоки частиц для следующих линий масс спектра: 63 и 65 а.е.м. (Cu); 53,5 и 54,5 (Ag^{2+}); 107 и 109 (Ag^+); 120 (Sn) и 152 (SnO_2).

Результаты эксперимента представлены в виде ТПД спектров – зависимостей потока десорбции I частиц определенного вида от температуры. Для определения величин энергии активации термодесорбции E и поверхностной концентрации Θ компонентов сплава ТПД спектры строили в координатах $\ln(I\sqrt{T}) - 1/T$ (рис. 1), в которых каждый линейный участок спектра соответствует постоянной поверхностной концентрации всех компонентов в данном температурном интервале.

Низкотемпературные участки ТПД спектров (1070...1170 К) соответствуют малой скорости термодесорбции атомов, что не приводит к заметному уменьшению их поверхностных концентраций. В этом первом состоянии поверхности поликристалла энергия активации десорбции ато-

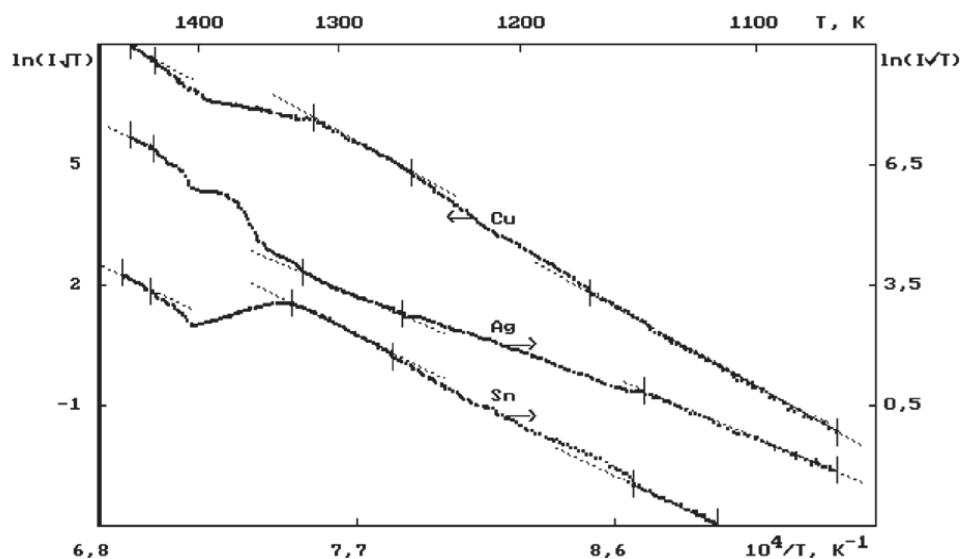


Рис. 1. ТПД спектры компонентов сплава $\text{Cu}_{98}\text{Ag}_1\text{Sn}_1$; температура ликвидус $T_L = 1350$ К, температура солидус $T_C \approx 1300$ К

мов – компонентов сплава составляет $E_{Cu}=(3,4\pm 0,1)$ эВ, $E_{Sn}=(3,3\pm 0,2)$ эВ, $E_{Ag}=(2,6\pm 0,2)$ эВ. Полученные значения оказались близкими к соответствующим величинам E для чистых металлов [1, 2]. Это позволяет сделать вывод о ближайшем атомном окружении десорбирующихся частиц: их десорбция происходит из областей поверхности сплава, обогащенных данным компонентом, т.е. из обособленной поверхностной фазы.

В предликвидусной области температур (1270...1330 К) реализуется второе поверхностное состояние. При переходе к нему значительно снижается рост потока термодесорбции (ТД) атомов Ag (наклон участка ТПД спектра) при одновременном дополнительном росте потоков десорбции I_{Cu} и I_{Sn} . Причиной этого является уменьшение поверхностной концентрации N_{Ag} ; по-видимому, атомы серебра образуют преимущественно немногослойные островки, в отличие от поверхностной фазы на основе олова.

При плавлении металла наблюдаются значительные изменения потоков десорбции серебра и олова противоположного характера: рост I_{Ag} в 2,5 раза и снижение I_{Sn} в 4 раза. Это свидетельствует о том, что при переходе к жидкому состоянию сплава резко изменяется степень поверхностной сегрегации Ag и Sn в разбавленных растворах на основе меди. При этом островки поверхностной фазы, содержащей олово, по-видимому, растворяются в объеме расплава.

Объемный фазовый переход кристаллизации металла сопровождается ростом потоков десорбции атомов Ag и Sn, но он проявляется различно. Так, для атомов Ag наблюдается узкий пик скорости десорбции, который, по-видимому, вызван стимулированием поверхностной сегрегации серебра протеканием объемного фазового перехода [1]; при этом скачкообразно увеличивается степень заполнения поверхности атомами серебра: Θ_{Ag} . Стимулирование процесса десорбции атомов Ag осуществляется благодаря дополнительному возбуждению атомов теплотой сегрегации – энергией, которая выделяется при интенсивной поверхностной сегрегации серебра [1]. А для олова при кристаллизации металла происходит плавный рост потока десорбции I_{Sn} , вследствие восстановления степени заполнения поверхности Θ_{Sn} до значения, соответствующего поликристаллу.

Третье состояние поверхности расплава ограничено надликвидусной областью температур: интервал 1430...1450 К. В ТПД эксперименте эта область выбрана достаточно малой, чтобы при высокой скорости десорбции атомов Ag и Sn для разбавленных растворов этих компонентов сохранить объемный состав образца, с целью получения воспроизводимых результатов в серии ТПД спектров.

По ТПД спектрам оценили степени заполнения поверхности Θ_i как относительные мольные концентрации компонентов, определяемые формулой:

$$\Theta_i = N_i / (N_{Cu} + N_{Ag} + N_{Sn}), \quad (1)$$

где N_i – число атомов i -го компонента в первом атомном слое.

Для оценки Θ_i необходимы следующие величины: $a_i^{(j,k)}$ – отношения интенсивностей потоков десорбции в j - и k -состояниях поверхности, порядки десорбции частиц x_i и эффективные площади σ_i , занятые атомом каждого компонента в поверхностном слое [3]. Значения $x = 1$ для всех атомов: Cu, Ag и Sn; несмотря на то, что серебро и олово в поверхностном слое сплава образуют островковые структуры [4], энергетически выгодной является десорбция атомов Ag и Sn с поверхности островков, а не с их периметра.

Для определения отношений эффективных площадей атомов в поверхностном слое использовали соотношения радиусов атомов, найденные по параметрам кристаллической решетки монокристаллов, соответственно:

$$\sigma_2/\sigma_1 = 1,2, \quad \sigma_3/\sigma_1 = 1,2, \quad \sigma_3/\sigma_2 = 1,0, \quad (2)$$

где индекс 1 – для атомов Cu, 2 – атомов Ag, 3 – атомов Sn.

Параметры ТПД спектров $a_i^{(j,k)}$, определяемые равенствами (3):

$$a_i^{(1,2)} = I_i^{(1)} / I_i^{(2)} = N_i^{(1)} / N_i^{(2)}, \quad a_i^{(2,3)} = I_i^{(2)} / I_i^{(3)} = N_i^{(2)} / N_i^{(3)}, \quad (3)$$

атомов Cu, Ag и Sn находили, экстраполируя линейные участки ТПД спектров к одной температуре. Совместный анализ этих ТПД спектров выявляет три состояния поверхности сплавов, каждому из которых соответствует линейный участок спектра с постоянной поверхностной концентрацией всех компонентов в данном температурном интервале. Для расчета по результатам эксперимента степени заполнения Θ_i поверхности металла использовали отношения потоков термо-

Физика

десорбции атомов Cu, Ag и Sn, найденные из ТПД спектров при температурах $T_1 = 1200$ К ($a_i^{(1,2)}$) и $T_2 = 1400$ К ($a_i^{(2,3)}$), для двух последовательных состояний поверхности (табл. 1).

Таблица 1
Отношения потоков термодесорбции частиц $a_i^{(j,k)}$ для различных состояний поверхности сплава $\text{Cu}_{98}\text{Ag}_1\text{Sn}_1$

Коэффициенты $a_i^{(j,k)}$ для расчета степеней заполнения поверхности компонентами сплава					
Cu		Ag		Sn	
$a_1^{(1,2)}$	$a_1^{(2,3)}$	$a_2^{(1,2)}$	$a_2^{(2,3)}$	$a_3^{(1,2)}$	$a_3^{(2,3)}$
0,80±0,05	1,10±0,05	2,60±0,10	0,40±0,05	0,70±0,05	4,10±0,10

С использованием этих данных по формулам проведен расчет величин Θ_i – степени заполнения поверхности компонентами сплава Cu–Ag–Sn, содержащего в объеме по 1,0 ат.% Ag и Sn, в трех поверхностных состояниях: первое и второе из них относятся к поликристаллу, а третье – к жидкому металлу. Результаты расчетов величин Θ_i для этого сплава приведены в табл. 2.

Этот расчет показал, что заполнение поверхности фазой серебра снижается при нагреве металла от $\Theta_1 = 0,26$ до $\Theta_2 = 0,10$, а в жидком состоянии вновь достигает $\Theta_3 = 0,24$. По-видимому, во втором состоянии поверхностная фаза серебра находится в равновесии с приповерхностным слоем сплава, обедненным серебром вследствие его интенсивной сегрегации при непрерывной десорбции атомов Ag. В связи с этим для оценки доли поверхностных фаз провели второй расчет на основе параметров ТПД спектров для двух состояний поверхности: низкотемпературного поликристаллического (1) и жидкого (3). Результаты этих двух расчетов практически совпадают.

Таблица 2
Состав поверхности сплава $\text{Cu}_{98}\text{Ag}_1\text{Sn}_1$ в различных температурных интервалах

Температурный интервал поверхностного состояния, К	Степень заполнения Θ_i поверхности компонентами сплава		
	Ag	Sn	Cu
1070...1170, поликристалл	0,26±0,03	0,10±0,02	0,62±0,07
1270...1330, поликристалл	0,10±0,02	0,14±0,02	0,78±0,07
1430...1450, расплав	0,24±0,05	0,03±0,01	0,70±0,10

В поликристаллическом состоянии сплава $\text{Cu}_{98}\text{Ag}_1\text{Sn}_1$ примерно третья часть его поверхности заполнена атомами Ag и Sn ($\Theta_{\text{Ag}} = 0,26$; $\Theta_{\text{Sn}} = 0,10$), в жидком состоянии преобладает поверхностная фаза серебра ($\Theta_{\text{Ag}} = 0,24$), а заполнение оловом снижается до $\Theta_{\text{Sn}} = 0,03$ (рис. 2).

Статистическое моделирование поверхностного слоя сплавов Cu–Ag–Sn

Компьютерное моделирование поверхностного слоя сплавов, выполненное методом Монте-Карло в сочетании с методом погруженного атома (МПА), предпринято с целью подтверждения предложенных в результате ТПД эксперимента структурных моделей поверхности сплавов в твердом и жидком состояниях.

Метод МПА выбран в качестве основного средства описания энергии межатомного взаимодействия, исходя из анализа особенностей поверхностного слоя. С одной стороны, он позволяет рассчитывать многие поверхностные свойства: поверхностное натяжение, релаксацию и реконструкцию поверхностей, поверхностную сегрегацию и структуру поверхностных фаз. С другой стороны, метод позволяет вычислять и ряд объемных свойств: структуру жидких металлов и сплавов, а также структуру границ зёрен и межфазных границ, диффузию, температурное расширение и др. Моделирование этих объемных свойств можно проводить в равновесии с поверхностью, в одном вычислительном эксперименте. Привлекательной стороной метода является тот факт, что входными параметрами моделирования поверхностного слоя являются только объемные свойства монокристаллов. Выбранный метод достаточно универсален: с его помощью моделировали *s*-, *p*-, *d*-элементы, металлы и неметаллы, чистые и в химических соединениях. МПА успешно работает в рамках и метода Монте-Карло, и молекулярной динамики. МПА вычислительно эффективен, по затратам времени он сравним с подходом парных модельных потенциалов.

В алгоритме моделирования Монте-Карло МПА служит одной из процедур: средством вычисления энергии межатомного взаимодействия ансамбля. Она является суммой энергии притя-

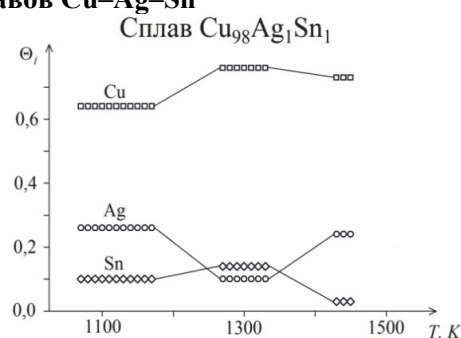


Рис. 2. Степень заполнения Θ_i поверхности компонентами сплава

жения данного атома к остальным и энергии отталкивания, равной полусумме парных взаимодействий кулоновского отталкивания положительных ионов. Энергию притяжения представляют в виде характеристической для каждого элемента функции электронной плотности: $F_i(\rho_i)$, создаваемой соседними атомами в точке, где находится данный атом. В результате энергия межатомного взаимодействия представляется в виде:

$$E = \sum_i F_i(\rho_i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \phi_{ij}(R_{ij}). \quad (4)$$

Здесь первое слагаемое есть энергия притяжения данного атома к остальным – энергия внедрения, её аргумент ρ_i – это суммарная электронная плотность, создаваемая в точке, где находится данный атом; второе слагаемое – энергия кулоновского отталкивания.

Конкретный вид вычислительного алгоритма зависит от используемого термодинамического ансамбля. В настоящей работе моделирование проведено в каноническом ансамбле (N,V,T). Изменения атомных конфигураций осуществляли не только малыми смещениями атомов в ячейке моделирования, но и обменами атомов, что значительно ускоряет достижение состояния равновесия. Для каждой рассмотренной объемной концентрации и температуры перед усреднением было проведено от 1,0 до 2,5 млн атомных конфигураций, хотя равновесие наблюдалось уже примерно на 500-тысячном шаге. Температуры для моделирования твердого и жидкого металла были выбраны $T_1 = 750$ К и $T_2 = 1500$ К, чтобы можно было сравнивать результаты с полученными ранее для двойных сплавов [5].

С учётом масштаба взаимодействий, присущего методу МПА, определены минимально допустимые размеры вычислительной ячейки. Они были выбраны таким образом, чтобы в поверхности формировалась структура (111)Cu, обладающая минимальной поверхностной энергией и максимальной упаковкой: 9 ближайших соседей для поверхностного атома против 12 для атома в объеме. Размер вычислительной ячейки составлял $6 \times 6 \times 6(7)$. Фактически в ячейке было 7 слоев, но энергия атомов нижнего слоя не включалась в расчеты, поскольку, в противном случае, в ячейке было бы две поверхности, а моделируемая структура представляла бы собой пленку, а не верхние слои металла. Две другие пары граней вычислительной ячейки были связаны периодическими условиями. При таких условиях поверхностная концентрация, в среднем по многим конфигурациям, получалась с точностью до целых значений (в атомных процентах), что вполне приемлемо, с учетом больших значений поверхностных концентраций.

Набор параметров, описывающих в МПА отталкивательное взаимодействие атомов, определен, в основном, в процессе моделирования упругих свойств монокристаллов. Для этого в предварительных расчётах было достаточно воспроизвести упругие и вакансионные свойства чистых элементов или их сплавов с получением набора параметров, описывающих эти элементы в рамках метода МПА. Эти параметры данного элемента не изменяются при переходе от расчета объемных свойств к поверхности, а также при переходе от чистого вещества к сплавам. Для атомов Cu и Ag параметры заимствованы из работы [6], а для Sn определены по упругим постоянным чистого Ag и сплава Ag – 3,18 ат.% Sn [5].

В целом реализованная методика моделирования Монте-Карло с вычислением энергии по методу МПА позволяет проводить расчёты разнообразных свойств металла. Для сплавов она позволила оценить степень поверхностной сегрегации компонентов, получить характеристики поверхностных структур и профили концентрации компонентов сплава.

Достаточно информативной характеристикой исследованных сплавов является энергия связи поверхностных атомов $E_{св}$, – именно эта величина равна энергии активации термодесорбции E , измеряемой в ТПД эксперименте. Результаты моделирования и экспериментальные значения представлены в табл. 3.

Отметим, что для жидкого состояния сплава Cu–Ag–Sn, содержащего по 1 ат.% Ag и Sn, значения связи поверхностных атомов меди и серебра близки к соответствующим значениям энергии активации десорбции. Для атомов олова последняя больше, чем энергия связи; причиной этого может быть различие поверхностных фаз на основе олова при моделировании и в ТПД эксперименте.

Эволюция структуры поверхности по мере моделирования сопровождалась выходами атомов в адсорбционный слой и поэтому значение поверхностной концентрации представляет собой сумму концентраций в первом слое поверхности и в адсорбционном слое, расположенном над

ней. Послойные концентрации в объемных слоях были не одинаковы, но охарактеризовать их как монотонные или осциллирующие однозначно нельзя, поэтому отметим только, что их величины значительно отличаются от поверхностных концентраций.

Таблица 3
Энергия связи поверхностных атомов $E_{св}$ и энергия активации термодесорбции E компонентов сплавов Cu–Ag–Sn в различных температурных интервалах

Состав сплава	Температурный интервал	Метод определения	Энергия $E_{св}$ и E компонентов сплава, эВ		
			Cu	Ag	Sn
Cu ₉₈ Ag ₁ Sn ₁ В моделировании: (0,9±0,2) ат.% Ag (0,9±0,1) ат.% Sn	750 К, кристалл	модель	3,7±0,3	3,2±0,3	2,4±0,2
	1070...1170 К, поликристалл	ТПД эксперимент	3,4±0,1	2,6±0,2	3,3±0,2
	1500 К, расплав	модель	3,1±0,3	2,7±0,3	2,5±0,2
	1430...1450 К, расплав	ТПД эксперимент	3,4±0,5	2,6±0,5	3,3±0,5
Cu ₉₁ Ag _{4,5} Sn _{4,5}	750 К, кристалл	модель	3,7±0,3	3,2±0,3	2,5±0,2
	1500 К, расплав		3,5±0,3	2,9±0,3	3,1±0,3

Таблица 4
Состав поверхности сплавов Cu–Ag–Sn в различных температурных интервалах

Состав сплава	Температурный интервал	Метод определения	Степень заполнения Θ_i поверхности		
			Ag	Sn	Cu
Cu ₉₈ Ag ₁ Sn ₁ В моделировании: (0,9±0,2) ат.% Ag (0,9±0,1) ат.% Sn	750 К, кристалл	модель	0,27±0,05	0,31±0,05	0,40±0,07
	1070...1170 К, поликристалл	ТПД эксперимент	0,26±0,03	0,10±0,02	0,62±0,07
	1500 К, расплав	модель	0,08±0,02	0,14±0,03	0,80±0,10
	1430...1450 К, расплав	ТПД эксперимент	0,24±0,05	0,03±0,01	0,70±0,08
Cu ₉₁ Ag _{4,5} Sn _{4,5}	750 К, кристалл	модель	0,32±0,05	0,33±0,05	0,31±0,05
	1500 К, расплав		0,26±0,05	0,30±0,05	0,50±0,10

В моделировании для твердого состояния сплава Cu₉₈Ag₁Sn₁ поверхностные концентрации серебра и олова составляют ≈30 ат.%, что для атомов Ag близко к результатам ТПД эксперимента; для жидкого состояния этого сплава вычисление дает снижение поверхностных концентраций в 2–3 раза: до 8 ат.% Ag и 14 ат.% Sn. Таким образом, и ТПД эксперимент, и моделирование показывают превышение в 10–30 раз поверхностных концентраций Ag и Sn над объемными величинами, как в твердом, так и в жидком состоянии сплава.

Моделирование позволило получить микроскопические картины поверхности сплавов. В результате можно выделить структуры, специфичные для твердого и жидкого состояния металла.

В поверхности кристалла (111)Cu(Ag) (рис. 3) атомы меди и серебра группируются в отдельных поверхностных фазах. Атомы Ag образуют структуры p(1x1), а также наблюдается вытеснение отдельных атомов Ag в адсорбционные состояния над поверхностью. Для расплава характерна поверхность на основе меди, более гладкая, без четко выраженного адслоя; значительная доля атомов Ag пребывает отдельно от других атомов серебра, т.е. в окружении атомов меди.

Для поверхности кристалла (100) Cu (Sn) (рис. 4) выявлено, что наиболее устойчива структура c(2x2)Sn, а в поверхности (100) и в жидком состоянии – структура p(1x2)Sn. Обе поверхност-

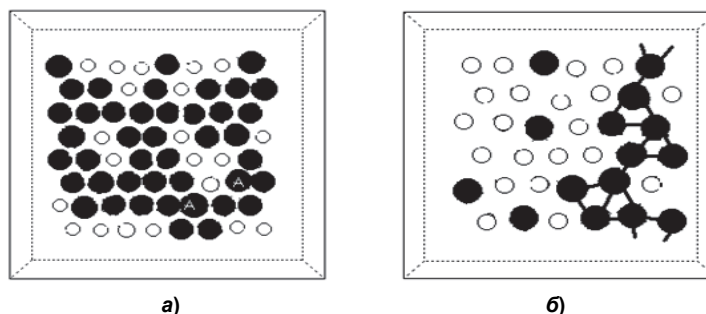


Рис. 3. Структура поверхности сплава Cu-3 ат.% Ag: а) поверхность (111)Cu(Ag) при $T_1 = 750$ К, "А" – атомы Ag; б) расплав при $T_2 = 1500$ К

ные структуры примерно эквивалентны, поскольку отражают одновременную выгодность образования связей Sn–Sn и чередования атомов Cu и Sn; возможно сочетание этих структур.

Полученные в ходе моделирования профили концентрации (рис. 5) дополняют сведения о поверхностной сегрегации. Для атомов Sn, в отличие от Ag, не наблюдаются адсорбционные состояния над первым монослоем, но во 2-м, 3-м и даже в 4-м слоях имеется избыток атомов олова по сравнению с объемной концентрацией. Сопоставление микроструктур поверхностного слоя и профилей подтверждает двухслойное размещение атомов Sn в кристаллическом состоянии сплавов Cu–Sn.

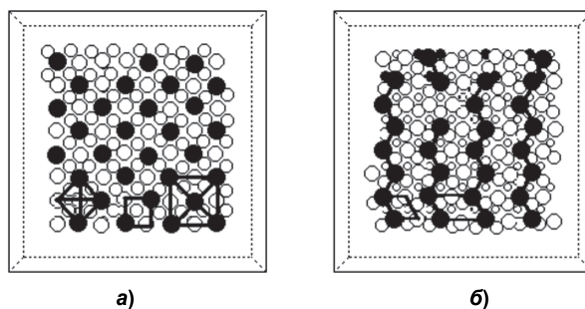


Рис. 4. Структура поверхностных фаз в сплавах Cu–Sn: а) фаза $c(2 \times 2)$; б) фаза $p(1 \times 2)$. На рис. 4. а) показаны следующие элементарные ячейки: 1 – поверхностного слоя; 2 – ячейка ГЦК; 3 – поверхностной фазы олова

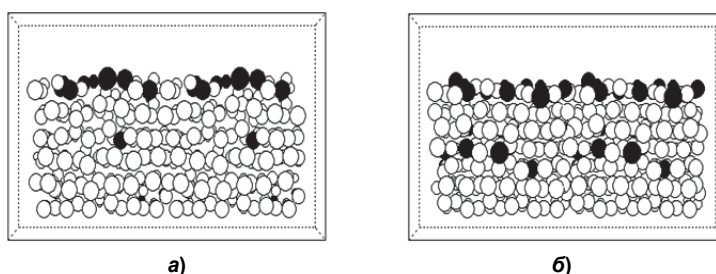


Рис. 5. Микроскопический профиль концентрации Sn в расплавах Cu–Sn при $T=1500$ К: а) 3,0 ат.% Sn; б) 0,5 ат.% Sn; атомы Sn – чёрного цвета

Таким образом, в поверхности двойных сплавов образуются островковые структуры с соразмерными подложке (т.е. поверхности меди) двумерными решетками. Для сплавов Cu–Sn выделяются зигзагообразные двумерные цепочки. В поверхности тройных сплавов Cu–Ag–Sn также наблюдается образование цепочек, но с шахматным порядком, где атомы Sn «сшивают» атомы Ag. Даже по значениям концентраций можно заметить, что эти цепочки занимают до $2/3$ поверхности. На микрокартинах видно, что цепочки на поверхности кристалла разветвленные, а на поверхности расплава – короткие, состоящие обычно из трех атомов.

Для сплава $\text{Cu}_{98}\text{Ag}_1\text{Sn}_1$ в поверхности практически отсутствуют связи Sn–Sn, а для $\text{Cu}_{91}\text{Ag}_{4,5}\text{Sn}_{4,5}$ – связи Ag–Ag. Цепочки из 2–3 атомов Ag и Sn наблюдаются и в объеме – в твердом состоянии, а в жидкости преобладают изолированные атомы. Кроме того, в объеме жидких сплавов наблюдаются вакансии. Вследствие этого координационное число ближайших соседей снижается с 12 до 10.

В поверхности твердых трехкомпонентных сплавов обнаружен интересный эффект уплотнения атомов Cu в плоскости поверхности, сопровождающийся увеличением промежутка между цепочками Sn–Ag–...–Sn и атомами меди. В двойных системах наблюдалось сжатие первого межслойного промежутка. По сути, это одинаковые явления по компенсации уменьшения числа ближайших соседей в поверхности.

В целом, модельные результаты, полученные в этой системе, находятся в количественном согласии с расчётами поверхностной концентрации на основе данных ТПД эксперимента, и дополняют их новой информацией о структуре. В частности, высокое значение концентрации олова во втором слое модели подтверждает гипотезу о двухслойном характере сегрегации олова.

Информацию о структуре поверхностных фаз дает совокупность следующих экспериментальных данных: величин Θ для Ag и Sn, значения порядков десорбции $x = 1$, а также характер изменений Θ при переходе от первого состояния поверхности ко второму и затем – к расплаву. Анализ этих результатов приводит к следующему заключению.

Поверхностная фаза на основе Ag и в поликристаллическом состоянии, и в жидком представляет собой плоские, практически монослойные островки, по-видимому, со структурой $p(1 \times 1)$, как и в двойных растворах Cu(Ag) [5]. При кристаллизации металла наблюдаются пики стимулированной десорбции, при этом скачкообразно увеличивается заполнение поверхности Θ_{Ag} , в том числе, происходит заполнение адсорбционных надповерхностных состояний.

Атомы олова образуют трехмерную поверхностную фазу, для которой степень заполнения поверхности поликристалла $\Theta_1 \approx \Theta_2 = 0,10$ остается неизменной в широком температурном интервале (1070...1330 К). Эта поверхностная фаза на основе олова становится неустойчивой на поверхности расплава и вновь образуется при кристаллизации металла: при этом восстанавливается величина Θ_{Sn} до значения, соответствующего поликристаллу при его нагреве. Дальнейшее охлаждение металла, как и его нагрев в этом температурном интервале, практически не изменяет Θ_{Sn} , что возможно в случае многослойных островков фазы, содержащей олово.

Выводы

1. ТПД эксперимент для сплава $Cu_{98}Ag_1Sn_1$ выявил следующее. Во-первых, по измеренным значениям энергии активации термодесорбции E сделан вывод о ближайшем атомном окружении десорбирующихся частиц: их десорбция происходит из областей поверхности сплава, обогащенных данным компонентом. Во-вторых, изменения потоков десорбции атомов Ag и Sn при нагреве металла и плавлении – кристаллизации приводит к заключению, что атомы Ag образуют, в основном, немногослойные островки.

2. Разработана и реализована методика моделирования поверхности тройных разбавленных растворов Cu(Ag,Sn) методом Монте-Карло с вычислением энергии межатомного взаимодействия по МПА. Использование метода МПА позволило избежать априорных предположений о составе и структуре поверхности сплавов.

3. Основные результаты компьютерного моделирования поверхности сплавов $Cu_{100-2x}Ag_xSn_x$ (1,0 и 5,0 ат.%) заключаются в следующем. Энергия связи поверхностных атомов $E_{св}$ близка к экспериментальным энергиям активации термодесорбции E для атомов Cu и Ag, но существенно отличается для атомов олова; причиной этого является различие поверхностных фаз олова при моделировании (Sn) и в ТПД эксперименте. Во-вторых, в моделировании для твердого состояния сплава $Cu_{98}Ag_1Sn_1$ поверхностные концентрации $\Theta_{Ag} \approx \Theta_{Sn} = 30$ ат.%, что для атомов Ag близко к результатам ТПД эксперимента; в расплаве степень поверхностной сегрегации снижается до 8 ат.% Ag и 14 ат.% Sn. И ТПД эксперимент, и моделирование дают превышение в 10 – 30 раз поверхностных концентраций Ag и Sn над объемными величинами, как в твердом, так и в жидком состоянии сплава. В-третьих, в компьютерных моделях выявлены поверхностные структуры в виде зигзагообразных цепочек атомов Sn, которые чередуются с цепочками атомов Ag. Профили концентрации олова в сплавах подтверждают гипотезу о двухслойном характере сегрегации олова.

Литература

1. Вяткин, Г.П. Поверхностная сегрегация и десорбция при фазовых переходах в металлах / Г.П. Вяткин, Т.П. Привалова. – Челябинск: ЧГТУ, 1996. – 273 с.
2. Алексеева, Т.О. Поверхностная сегрегация при фазовых превращениях в бинарных металлических сплавах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Т.О. Алексеева. – Челябинск, 1995. – 102 с.
3. Морозов, С.И. Высокотемпературные поверхностные фазы и фазовые переходы в сплавах Fe–Mn–C и Fe–C–S: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.И. Морозов. – Челябинск, 1997. – 106 с.
4. Гусев, А.В. Особенности поверхностной сегрегации атомов Ag и Sn в поверхности (111) сплавов Cu–Ag–Sn / А.В. Гусев, С.И. Морозов, Т.П. Привалова, А.Е. Чудаков // Известия ЧНЦ УрО РАН. – 2003. – Вып. 2. – С. 15–18.
5. Чудаков, А.Е. Статистические модели поверхностного слоя сплавов Cu–Ag, Cu–Sn и Fe–Sn: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Е. Чудаков. – Челябинск, 1998. – 101 с.
6. Foiles, S.M. Embedded-atom-method function for the FCC metals Cu, Ag, Au, Ni, Pd, Pt and their alloys / S.M. Foiles, M.I. Baskes, M.S. Daw // Physical Review B. – 1986. – Vol. 33, no. 12. – P. 7983–7991.

Поступила в редакцию 16 июля 2017 г.

COMBINED SEGREGATION OF SILVER AND TIN FROM THE SURFACE OF Cu–Ag–Sn TERNARY ALLOYS

A.V. Gusev, S.I. Morozov, A.E. Chudakov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: gusevav@susu.ru

The study of Cu–Ag–Sn ternary alloys by the methods of temperature-programmed desorption (TPD) and statistical modeling is carried out. The results of the TPD experiment on the combined surface segregation of Ag and Sn atoms in dilute solutions of silver and tin in copper in polycrystalline and liquid states are presented. It was found out that the desorption of particles from the surface of the alloy occurs from regions enriched with this component. In addition, the silver atoms form, in the main, slightly layered islets. Data are also provided for computer simulation of the surface of these alloys by the Monte Carlo method in combination with the embedded atom method (EAM). Using the EAM method, it was possible to avoid a priori assumptions about the composition and structure of the alloy surface. Simulation showed that the binding energy of surface atoms is close to the experimental activation energies of thermal desorption for Cu and Ag atoms. But there is a significant difference for tin atoms. Secondly, in the modeling for the solid state of the Cu₉₈Ag₁Sn₁ alloy, the surface concentrations of $\Theta_{Ag} \approx \Theta_{Sn} = 30$ at.%, which for Ag atoms are close to the results of the TPD experiment. In the melt, the degree of surface segregation is reduced to 8 at.% Ag and 14 at.% Sn. Both the TPD experiment and the simulation give an excess of 10 to 30 times the surface concentrations of Ag and Sn over bulk values, both in the solid and in the liquid state of the alloy. Third, computer models reveal surface structures in the form of zigzag chains of Sn atoms, which alternate with chains of Ag atoms. The profiles of tin concentrations in alloys confirm the hypothesis of a two-layered character of segregation of tin.

Keywords: temperature-programmed desorption (TPD); Monte Carlo method; embedded atom method; copper; silver; tin.

References

1. Vyatkin G.P., Privalova T.P. *Poverkhnostnaya segregatsiya i desorbtsiya pri fazovykh perekhodakh v metallakh* (Surface segregation and desorption during phase transitions in metals). Chelyabinsk, ChGTU Publ., 1996, 273 p. (in Russ.).
2. Alekseeva T.O. *Poverkhnostnaya segregatsiya pri fazovykh prevrashcheniyakh v binarnykh metallicheskiykh splavakh: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* (Surface segregation in phase transformations in binary metal alloys: cand. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 1995, 102 p. (in Russ.).
3. Morozov S.I. *Vysokotemperaturnye poverkhnostnye fazy i fazovye perekhody v splavakh Fe–Mn–C i Fe–C–S: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* (High-temperature surface phases and phase transitions in Fe–Mn–C and Fe–C–S alloys: cand. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 1997, 106 p. (in Russ.).
4. Gusev A.V., Morozov S.I., Privalova T.P., Chudakov A.E. *Izvestiya ChNTs UrO RAN Publ.*, 2003, Issue 2, pp. 15–18. (in Russ.).
5. Chudakov A.E. *Statisticheskie modeli poverkhnostnogo sloya splavov Cu–Ag, Cu–Sn i Fe–Sn: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* (Statistical models of the surface layer of Cu–Ag, Cu–Sn, and Fe–Sn alloys: cand. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 1998, 101 p. (in Russ.).
6. Foiles S.M., Baskes M.I., Daw M.S. Embedded-atom-method function for the fcc metals Cu, Ag, Au, Ni, Pd, Pt and their alloys. *Physical Review B*, 1986, Vol. 33, no. 12, pp. 7983–7991. DOI: 10.1103/PhysRevB.33.7983

Received July 16, 2017

ДИЛАТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК СТАЛИ 13X11H2B2MФ

Д.А. Мирзаев, А.А. Мирзоев, С.А. Созыкин, А.С. Воробьева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: mizaevda@susu.ru

При скоростях нагрева и охлаждения до 30 °С/мин записаны дилатogramмы для различных режимов термической обработки высокопрочной мартенситной стали 13X11H2B2MФ и определены её важнейшие критические точки. При малых скоростях нагрева температура образования аустенита A_{C1} составляет 750 °С, однако её положение зависит от скорости нагрева и однородности состава образцов по объёму и может достигать 810 °С. Показано, что существенное влияние на мартенситную точку исследуемой стали оказывает температура начала охлаждения, длительность выдержки и наличие температурных остановок, если они сопровождаются выделением из аустенита карбидных частиц. Вторым использованным в исследовании методом измерения A_{C1} основан на анализе графика зависимости твёрдости образцов закалённой стали от температуры отпуска при фиксированной длительности отпуска (2 ч). Пока температура выдержки не превысит A_{C1} , в образцах проходят процессы, приводящие к снижению твердости. Однако как только повышаемая температура переходит через критическую точку, наряду с отпуском сохранившегося мартенсита начинается образование кристаллов аустенита, что после резкого охлаждения в воде вновь приводит к повышению твёрдости. Поэтому минимум твёрдости соответствует температуре A_{C1} . Этот метод дал такой же результат, что и дилатометрия, $A_{C1} = 750$ °С.

Ключевые слова: мартенситное превращение; дилатометрическое исследование; механические свойства; сталь 13X11H2B2MФ.

Введение

Сталь 13X11H2B2MФ разработана как высоколегированная хромистая жаропрочная сталь мартенситного класса для температур эксплуатации до 600 °С [1]. Однако конструкторы, обратив внимание на повышенное сопротивление коррозии, хладостойкость и значительную ударную вязкость при отрицательных температурах, начали применять эту сталь для ответственных деталей нефтяных насосов, вентилях и других запорных устройств нефтепроводов. Эти детали имеют разную массу, поэтому для них скорость охлаждения после обычно применяемого после закалки высокого отпуска изменяется в довольно широких пределах. При замедленном охлаждении массивных деталей может возникнуть обратимая отпускная хрупкость [2, 3], усиленная выделениями карбидной фазы. С этим явлением столкнулась, по-видимому, фирма «Конор», производящая подобную продукцию. В этом случае необходимо разработать специальный режим термической обработки стали 13X11H2B2MФ. Но уже на первых шагах исследования в этом направлении возникли проблемы, обусловленные отсутствием в литературе [4] полной информации о критических точках этой стали. Поэтому в данной работе методом дилатометрии исследованы критические точки и их смещение при изменении скоростей охлаждения и нагрева в относительно больших пределах. Существенное влияние на мартенситную точку оказывает температура начала охлаждения, длительность выдержки и наличие температурных остановок, если они сопровождаются выделением из аустенита карбидных частиц.

Материал и методика эксперимента

Дилатометрические образцы длиной 25 мм и диаметром 4 мм были выточены из заготовок, отрезанных от поковки, которая находилась в состоянии закалки от 1000 °С на воздухе. Химический состав стали приведен в табл. 1.

Содержание легирующих элементов в стали 13X11H2B2MФ (масс. %)

C	Si	Mn	S	P	Cr	Ni	Mo	V	W	Cu
0,144	0,60	0,23	0,005	0,005	10,8	1,50	0,37	0,29	1,86	0,13

Эксперименты проводились в лаборатории физических исследований Южно-Уральского государственного университета на дилатометре L76/1600 фирмы «Linseis», обеспечивающем нагрев и охлаждение со скоростью до 30 °С/мин. Были опробованы несколько режимов нагрева и охлаждения стали 13X11H2B2MФ (табл. 2) для того, чтобы установить положение основных критических точек: A_{C1} – температуры начала образования аустенита (γ -фазы) при нагреве, A_{r1} – температуры начала выделения α -фазы при охлаждении, B_s – температуры начала превращения аустенита в бейнит; M_s – температуры начала превращения аустенита в мартенсит.

Таблица 2

Критические точки стали 13X11H2B2MФ для некоторых режимов термообработки (°С)

№	Режимы термической обработки	A_{C1}	A_{r1}	B_s	M_s
1	Нагрев до 980 °С ($V_{нагр} = 20$ °С/мин), выдержка 30 мин и охлаждение ($V_{охл} = 10$ °С/мин).	810	–	–	326
2	Повторный нагрев образца №8 до 950 °С ($V_{нагр} = 30$ °С/мин), выдержка 30 мин., и охлаждение ($V_{охл} = 5$ °С/мин).	760	720	–	430
3	Нагрев до 850 °С ($V_{нагр} = 20$ °С/мин), выдержка 1 час, охлаждение ($V_{охл} = 10$ °С/ мин)	755	–	–	337
4	Нагрев до 850 °С ($V_{нагр} = 5$ °С/мин), выдержка 30 мин., охлаждение ($V_{охл} = 30$ °С/ мин).	750	740	470	400
5	Нагрев до 820 °С ($V_{нагр} = 5$ °С/мин), выдержка 2 час, охлаждение ($V_{охл} = 5$ °С/ мин.).	750	746	–	440
6	Нагрев до 820 °С ($V_{нагр} = 20$ °С/мин), охлаждение на 720 °С, выдержка 1 час и последующее охлаждение, ($V_{охл} = 5$ °С/ мин)	748	–	–	403
7	Нагрев до 820 °С ($V_{нагр} = 20$ °С/мин), охлаждение на 720 °С ($V_{охл} = 5$ °С/ мин), выдержка 2 час, охлаждение ($V_{охл} = 10$ °С/ мин)	743	610		400
8	Нагрев до 820 °С ($V_{нагр} = 20$ °С/мин), выдержка 30 мин, охлаждение на 720 ($V_{охл} = 5$ °С/ мин), выдержка 1 час и последующее охлаждение ($V_{охл} = 10$ °С/ мин)	750	–		406

Результаты

Дилатограммы образцов, термообработанных по различным режимам, приведенным в табл. 2, представлены на рис. 1. Рассмотрим в качестве примера одну из них, соответствующую режиму № 1. Восходящая почти прямая линия в основном отражает тепловое расширение образца с исходной мартенситной структурой и слабо тетрагональной объемноцентрированной атомной решёткой (α -фаза). Начиная с 810 °С, наблюдается изгиб этой линии вниз, что обусловлено образованием новой фазы – аустенита, которая имеет более плотноупакованную, чем α -фаза, гранецентрированную кубическую атомную решётку, а потому и меньший удельный объем. Образование α -фазы отражается на дилатограмме уменьшением длины образца между 810 и 860 °С. При дальнейшем повышении температуры удлинение вновь возрастает почти по прямой, но её наклон заметно больше, чем для исходной, поскольку коэффициент теплового расширения аустенита выше, чем у α -фазы. Тридцатиминутная выдержка при 980 °С неожиданно вызвала небольшое удлинение образца, т. е. смещение точки вверх. Поскольку на образец не действуют растягивающие усилия и, следовательно, проявление ползучести невозможно, то причиной удлинения, видимо, является увеличение объема образца вследствие растворения в нем азота и кислорода из атмосферы при выдержке. Для этого же режима термообработки наблюдалось самое высокое значение температуры A_{C1} , что обусловлено иными причинами.

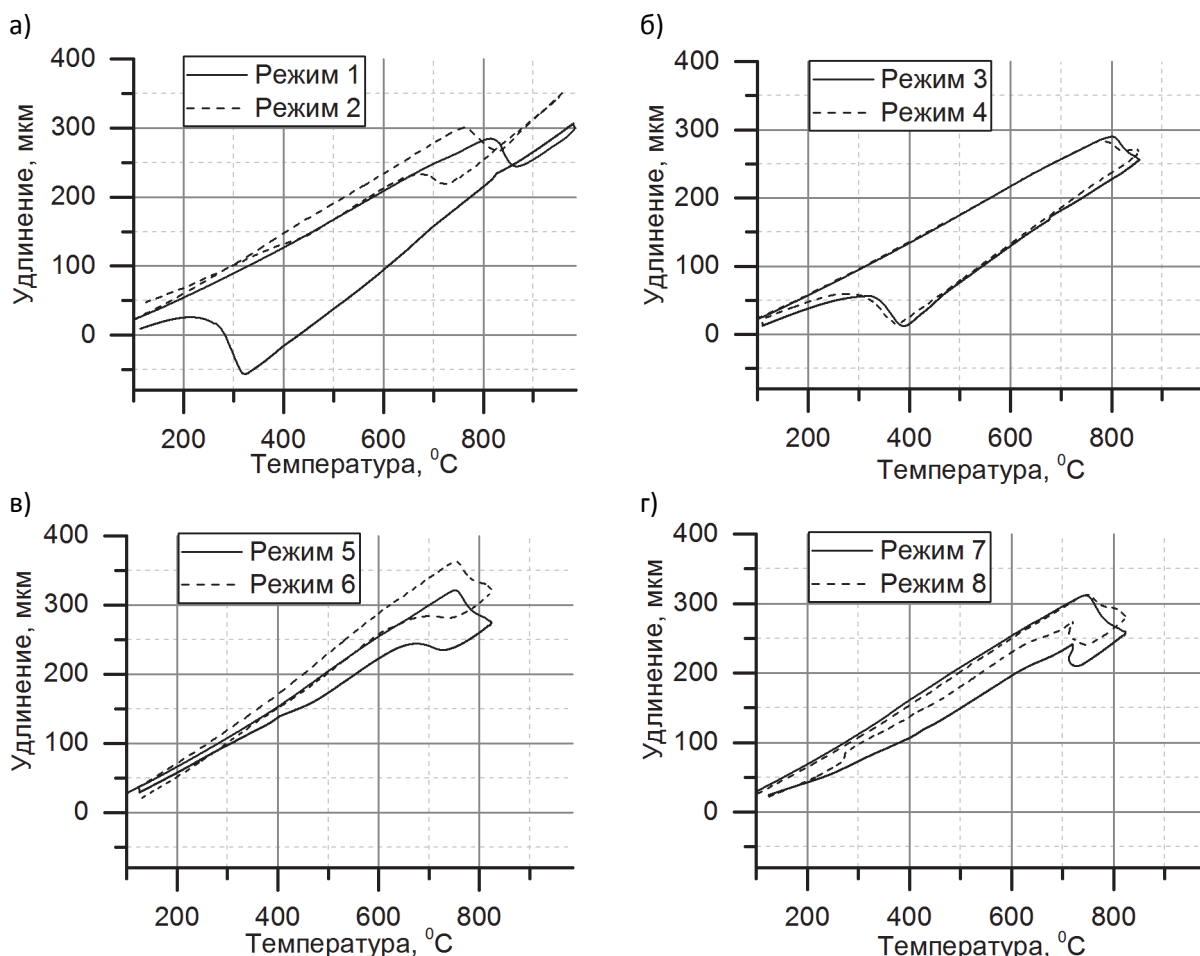


Рис. 1. Дилатогаммы, соответствующие режимам термической обработки в табл. 2: а) режимы 1 и 2; б) режимы 3 и 4; в) режимы 5 и 6; г) режимы 7 и 8

В двухфазной области ($\gamma+\alpha$) диаграммы состояний равновесная концентрация хрома в аустените меньше, чем в α -фазе, поэтому для зарождения аустенита необходимы не только флуктуации энергии для образования межфазной границы, но и флуктуации состава. Поэтому скорость образования аустенита уменьшается при увеличении степени гомогенности по составу сплава. Режим 1, по которому отсутствуют выдержки, приводящие к выделению карбидов хрома и железа, создающих в стали химическую неоднородность, должен приводить к невысокой скорости образования γ -фазы и, как следствие, к значительному повышению точки A_{C1} при использованных относительно высоких скоростях нагрева ($20\text{ }^\circ\text{C}/\text{мин}$). Но если сначала (см. режим 2) провести нагрев образца до $750\text{ }^\circ\text{C}$ и выдержку с последующим охлаждением, а затем осуществить высокотемпературный нагрев, то A_{C1} снижается до $760\text{ }^\circ\text{C}$, и даже появляется точка A_{r1} , что свидетельствует о малой прокаливаемости стали после термообработки по этому режиму. Мартенситная точка повысилась до $420\text{ }^\circ\text{C}$, что также косвенно указывает на низкую концентрацию углерода в γ -фазе. Дилатогаммы обработок по другим режимам, указанным в табл. 2, показали, что точки A_{C1} находятся при $750\text{ }^\circ\text{C}$ или вблизи этой температуры. После нагрева на $820\text{ }^\circ\text{C}$ и выдержки 30 мин (режим 4) или 2 ч (режим 5) образовавшийся аустенит не обладает заметной устойчивостью. При его охлаждении со скоростью $5\text{ }^\circ\text{C}/\text{мин}$ проявляются критические точки начала образования феррита A_{r1} ($740\text{--}746\text{ }^\circ\text{C}$), а M_s составляют $400\text{--}440\text{ }^\circ\text{C}$, и в этих случаях можно констатировать очень низкое содержание углерода в аустените, особенно для режима 5. Интересные результаты были получены для режимов № 6 и 7, когда образцы нагревали до $820\text{ }^\circ\text{C}$, а затем охлаждали, переходя на изотерму $720\text{ }^\circ\text{C}$, выдерживали 1 или 2 часа соответственно и окончательно охлаждали (рис. 1, г). Участок выдержки при $720\text{ }^\circ\text{C}$ на дилатогамме не вертикальный, а имеет серпообразный вид. Это означает, что при рассматриваемой температуре развивается ус-

коряющееся во времени γ - α превращение, которое сопровождается интенсивным выделением тепла. Переход к охлаждению по завершении выдержки сначала останавливает превращение, из-за чего на дилатограмме появляется острый угол, но затем оно возобновляется и продолжается примерно до 600 °С. Определить критическую точку A_{C1} можно иначе, используя зависимость твердости закаленной стали от температуры при фиксированной длительности отпуска (2 часа). Охлаждение образцов после отпуска производилось в воде. На рис. 2 представлен график такой зависимости для довольно широкого интервала температур отпуска. Важно понимать, что, пока температура выдержки не превысит критическую точку A_{C1} , в образцах будет происходить именно отпуск закаленной стали: выделение из мартенсита частиц карбида Fe_3C при низких температурах или $(Fe,Cr)_{23}C_6$ выше 500 °С, их коагуляция, аннигиляция дислокаций, образование субзерненной структуры и другие процессы [5], приводящие к снижению твердости. Однако как только повышаемая температура переходит через критическую точку, наряду с отпуском сохранившегося мартенсита начинается образование кристаллов аустенита, которое растягивается на широкий интервал температур, захватывающий двухфазную (α + γ) или трехфазную (α + γ +карбид) области диаграммы фазового состояния. Образовавшиеся первыми участки аустенита имеют, как правило, повышенную по сравнению с марочной концентрацию углерода, но пониженное содержание хрома. Последующее быстрое охлаждение образца в воде приводит к превращению возникших участков γ -фазы в мартенсит, что резко увеличивает их твердость и среднюю твердость стали. Поэтому появление аустенита изменит характер хода кривой твердости: от убывания по мере возрастания температуры отпуска к возрастанию. Именно такой характер изменения твердости и наблюдается на рис. 2.

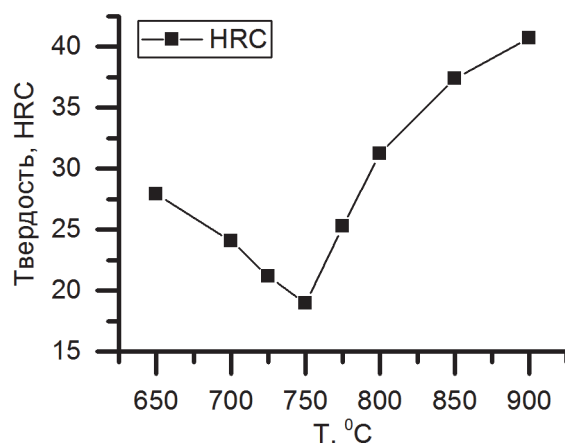


Рис. 2. Изменение твердости стали в зависимости от температуры отпуска

Минимум кривой должен располагаться вблизи A_{C1} , точнее чуть выше этой точки. Данные, представленные на рис. 2, также свидетельствуют о том, что точка A_{C1} близка к 750 °С.

Если партию ещё холодных образцов поместить на подину разогретой до 750 °С печи и выдержать различное время, а затем по завершению выдержки для каждого образца охладить их в воде, то можно установить изменение твердости в ходе изотермической выдержки (рис. 3). В начальный период выдержки (10–15 мин) наблюдается резкое снижение твердости от уровня твердости закаленной стали (~ 43 HRC) до 27 HRC. Затем темп снижения уменьшается (на рис. 3 не показано), а после часовой выдержке наблюдается минимум твердости (18,1 HRC). В ходе дальнейшей изотермической выдержки при температуре 750 °С наблюдается небольшое, но непрерывное во времени повышение твердости, которое несомненно обусловлено образованием «изотермического аустенита», количество которого возрастает во времени. Собственно, этот процесс отражает и дилатограмма режима № 8, на которой отчетливо видно сокращение длины образца в ходе изотермической выдержке при 750 °С, так как аустенит имеет меньший удельный объем, нежели α -фаза. Наличие изотермического процесса образования γ -фазы должно приводить к повышению температуры образования аустенита по мере увеличения скорости нагрева. Следует отметить, что у высокохромистых сталей распад аустенита при температурах ниже A_{T1} также обладает изотермической кинетикой [6].

А. Кульмбург [7] для коррозионно-стойких сталей, содержащих более 11 % хрома, углерод, никель, молибден и марганец, предложил эмпирическую формулу:

$$A_{C1} = 765 - 30,2[C] - 19,5[Mn] + 134[Si] - 67[Ni] + 20,5[Mo] - 64[V], \quad (1)$$

где прямые скобки обозначают содержание соответствующего элемента в % по массе. Автор не привел данных о воздействии добавок вольфрама на A_{C1} , поэтому мы приближенно приняли, что действие молибдена и вольфрама одинаково. Тогда для исследуемой стали, состав которой приведен в табл. 1, расчет по (1) дает $A_{C1} \approx 740$ °С, что близко к полученному нами значению $A_{C1}=750$ °С. Для определения мартенситной точки высокохромистых сталей А. Кульмбург приводит другую формулу:

$$M_S = 492 - 12,5[C] - 65,5[Mn] - 10[Cr] - 29[Ni], \quad (2)$$

согласно которой значение M_S для рассматриваемой стали равно 307 °С при условии, что все легирующие элементы находятся в растворе. В действительности, молибден и хром образуют труднорастворимые карбиды, которые не полностью переходят в раствор даже при температуре 980 °С. Вероятно, поэтому минимальное значение $M_S = 326$ °С среди наблюдавшихся после различных обработок (табл. 2) несколько отличается от рассчитанного по (2).

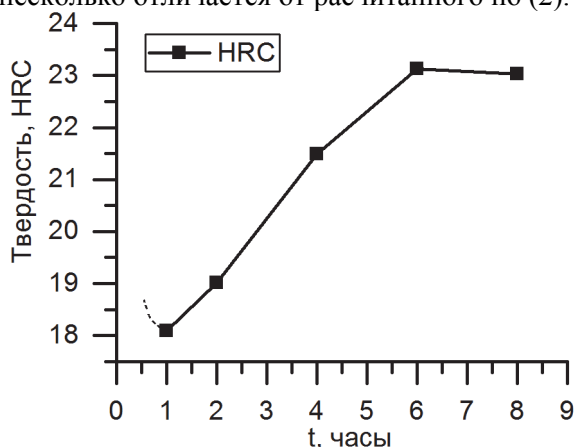


Рис. 3. Изменение твёрдости закаленных от 1000 °С образцов стали в зависимости от длительности отпуска при 750 °С

Заключение

Подводя итоги настоящей работы, отметим основные полученные результаты:

1. Критическая точка A_{C1} стали 13X11H2B2MФ в условиях медленного нагрева составляет 750 °С.

2. При температуре 750 °С и выше обнаружено развивающееся во времени (изотермическое) образование аустенита, что является кинетической причиной повышения A_{C1} при увеличении скорости нагрева.

3. Особенно значительное повышение наблюдается в том случае, если перед её измерением устранить неоднородности распределения концентраций растворённых элементов: провести гомогенизирующий нагрев и выдержку при 950–1000 °С, закалку, а потом в эксперименте нагревать образец выше A_{C1} без промежуточных остановок со скоростями 20–30 °С/мин и выше.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 16-19-10252.

Литература

1. Масленков, С.Б. Жаропрочные стали и сплавы. Справочник. / С.Б. Масленков – М.: Металлургия. – 1983. – 192 с.
2. Химушин, Ф.Ф. Нержавеющие стали / Ф.Ф. Химушин – М: Metallurgizdat, 1967. – 798 с.
3. Снижение порога хладноломкости реакторной высокохромистой стали MANET-II / И.И. Косицина, В.В. Сагарадзе, Ю.Н. Зуев, А. Перуха // ФММ. – 1998. – Т. 86. – Вып. 2. – С. 132–138.
4. Марочник сталей и сплавов / В.Г.Сорокин, А.В. Волосникова, С.А.Вяткин и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 639 с.
5. Бернштейн, М.Л. Отпуск стали / М. Л. Бернштейн, Л. М. Капуткина, С. Д. Прокошкин. – М.: МИСИС, 1997. – 335 с.

6. Кинетика образования бейнита и пакетного мартенсита. III. Бейнитное превращение в сплаве Fe-9% Cr / Д.А. Мирзаев, К. Ю. Окишев, В. М. Счастливец, И. Л. Яковлева // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 90, № 6. – С. 72–82.

7. Kulmburg A. Contribution to the calculation of the transformation behaviour of steel / A. Kulmburg // Computers in Materials Technology: Proceedings of an International Conference. – Pergamon, 1981. – P. 61–67.

Поступила в редакцию 24 мая 2017 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2017, vol. 9, no. 3, pp. 66–71

DOI: 10.14529/mmph170309

DILATOMETRIC STUDY OF CRITICAL POINTS OF 13KH11N2V2MF STEEL

D.A. Mirzaev, A.A. Mirzoev, S.A. Sozykin, A.S. Vorob'eva
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: mizaevda@susu.ru

At the heating and cooling rates up to 30 °C/min, dilatograms for different heat treatment regimes for high-strength martensitic 13X11N2V2MF steel are recorded, and its critical points are determined. At low heating rates, the temperature of formation of austenite A_{C1} is 750 °C, but its position depends on the heating rate and uniformity of the sample composition in volume, and can reach 810 °C. It is shown that the temperature of the beginning of cooling, the duration of soaking and the presence of temperature stops, if they are accompanied by the release of carbide particles from the austenite, have a significant effect on the martensitic point of the steel under study. The second method of measurement A_{C1} used in the study is based on the analysis of the dependence of the hardness of hardened steel samples on the tempering temperature for a fixed duration of tempering (2 hours). As long as the holding temperature does not exceed A_{C1} , processes lead to a decrease in hardness in the samples. However, once the elevated temperature passes through the critical point, along with the tempering of the preserved martensite, the formation of austenite crystals begins, which, after abrupt cooling in water, again leads to an increase in hardness. Therefore, the minimum hardness corresponds to the temperature of A_{C1} . This method gave the same result: $A_{C1} = 750$ °C, which is the same as dilatometry.

Keywords: martensitic transition; dilatometric study; mechanical properties; 13X11N2V2MF steel.

References

1. Maslennikov, S.B. *Zharoprochnye stali i splavy. Spravochnik*. (Heat-resistant steels and alloys. Handbook). Moscow, Metallurgiya Publ., 1983, 192 p. (in Russ.).
2. Khimushin F.F. *Nerzhavayushchie stali* (Stainless steels). Moscow, Metallurgizdat Publ., 1967, 798 p. (in Russ.).
3. Kositsina I.I., Sagaradze V.V., Zuev Yu.N., Perukha A. *The Physics of Metals and Metallography*, 1998, Vol. 86, Issue 2, pp. 132–138. (in Russ.).
4. Sorokin V.G., Volosnikova A.V., Vyatkin S.A. *et al. Marochnik staley i splavov* (Database of steels and alloys). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 639 p. (In Russ.).
5. Bernshteyn M.L., Kaputkina L.M., Prokoshkin S.D. *Otpusk stali* (Steels tempering). Moscow, MISIS Publ., 1997, 335 p. (in Russ.).
6. Mirzaev D.A., Okishev K.Yu., Schastlivtsev V.M., Yakovleva I.L. Kinetics of the formation of bainite and packet martensite: III. Bainitic transformation in the Fe-9% Cr alloy. *The Physics of Metals and Metallography*, 2000, Vol. 90, no. 6, pp. 593–603.
7. Kulmburg A. Contribution to the calculation of the transformation behaviour of steel. *Computers in Materials Technology: Proceedings of an International Conference*, Pergamon, 1981, pp. 61–67. DOI: 10.1016/B978-0-08-027570-3.50013-5. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080275703500135>

Received May 24, 2017

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям наук и группам специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 01.04.00 – физика.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям “Ulrich’s Periodicals Directory”, “Zentralblatt MATH”.

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, ответственному редактору профессору Загребинной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.yourgpu.rf/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редакторы *О.И. Шаханская, А.С. Полякова*

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 26.07.2017. Дата выхода в свет 31.07.2017.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,37.

Тираж 500 экз. Заказ 262/443. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.