

**Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)**

**Редакционная коллегия серии:**

д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.**

*(отв. редактор),*

к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.**

*(отв. секретарь),*

д.т.н., профессор **Гуревич С.Ю.**,

к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.**,

д.ф.-м.н., профессор **Менихес Л.Д.**,

д.т.н., профессор **Садаков О.С.**,

д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.**,

д.т.н., профессор **Чернявский А.О.**

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-26455 выдано 13 декабря 2006 г. Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России».

Периодичность выхода – 2 номера в год.

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

АЛИЕВ Р.А. Об определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении .....	4
АСФАНДИЯРОВА Ю.С. Об одном способе обращения линейных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	12
БРЕДИХИНА А.Б. Об оптимальности метода М.М. Лаврентьева при решении уравнений с ошибкой в операторе .....	18
КАМАЛТДИНОВА Т.С. Об оценке погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации при условии кусочной гладкости решения.....	23
КАРАЧИК В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами II .....	27
КАРАЧИК В.В., АНТРОПОВА Н.А. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре .....	39
МЕГРАЛИЕВ Я.Т. Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием.....	51
МЕДВЕДЕВ С.В. Некоторые свойства пространства $h(X, k)$ .....	57
РАСУЛОВ К.М. О задаче типа Дирихле в классах квазигармонических функций в круге.....	62
ТАБАРИНЦЕВА Е.В. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом вспомогательных граничных условий .....	68

### Механика

ШАБЛОВСКИЙ О.Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости.....	77
ЩЕРБАКОВА А.О. Применение метода конечных элементов к расчету больших перемещений плоской линейно-упругой конструкции.....	83

### Физика

ЕРШОВ А.В., КУНДИКОВА Н.Д. Воздействие продольного магнитного поля на распространение когерентного излучения в волоконном световоде.....	92
МОРОЗОВ С.И., ЖЕРЕБЦОВ Д.А., ГРИБАЧЁВ А.С. Поверхностные фазы в сплавах на основе железа .....	98
ПЕСИН Л.А., ГРИБОВ И.В., МОСКВИНА Н.А., КУЗНЕЦОВ В.Л., ЕВСЮКОВ С.Е., БОГАТЫРЕВА М.Е., ХАНАНОВА А.В. Влияние термической обработки и ионной бомбардировки на электронную структуру предварительно карбонизованной поверхности поливинилиденфторида.....	103
РЫБАЛКА С.Б., ДОДОНОВА Е.В., СКОКОВ К.П. Кинетика роста новых фаз в ходе фазовых превращений, индуцированных водородом в магнитотвердом сплаве $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ .....	109
СОЗЫКИН С.А., БЕСКАЧКО В.П. Зависимость электрического сопротивления углеродной нанотрубки с металлическим типом проводимости от механического нагружения и интеркалирования серой .....	115

---

## CONTENTS

### Mathematics

ALIYEV R.A. About evaluation of unknown coefficients in a quasilinear elliptic equation.....	4
ASFANDIYAROVA Yu.S. The inversion procedure for ordinary differential equation's linear boundary problem .....	12
BREDIKHINA A.B. About optimality of the M.M. Lavrentiev method when solving equations with operator error .....	18
KAMALTDINOVA T.S. About error estimate of nonlinear projection regularization method under the condition of piece-wise smoothness of solution .....	23
KARACHIK V.V. Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients II	27
KARACHIK V.V., ANTROPOVA N.A. Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the biharmonic equation in a ball.....	39
MEHRALIYEV Ya.T. Inverse boundary problem for a partial differential equation of fourth order with integral condition .....	51
MEDVEDEV S.V. Some properties of the space $h(X, k)$ .....	57
RASULOV K.M. About the boundary value problem of Dirichlet type in the classes of quasiharmonic functions in a circle.....	62
TABARINTSEVA E.V. About solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation by means of subsidiary boundary conditions method.....	68

### Mechanics

SHABLOVSKY O.N. Trigonometrical profile of the velocity of the shear flow of the viscous fluid	77
SCHERBAKOVA A.O. The finite element method use for large displacements calculations of plane linear-elastic structures.....	83

### Physics

ERSHOV A.V., KUNDIKOVA N.D. Magnetic field influence coherent light propagation through an optical waveguide.....	92
MOROZOV S.I., ZHEREBTSOV D.A., GRIBACHEV A.S. Surface phases in iron-based alloys....	98
PESIN L.A., GRIBOV I.V., MOSKVINA N.A., KUZNETSOV V.L., EVSYUKOV S.E., BOGATYRYOVA M.E., KHANANOVA A.V. Heat treatment and ion bombardment effects on the electron structure of preliminary carbonized polyvinylidenefluoride surface .....	103
RYBALKA S.B., DODONOVA E.V., SKOKOV K.P. kinetics of growth of new phases during hydrogen-induced transformations in $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ hard magnetic alloy.....	109
SOZYKIN S.A., BESKACHKO V.P. Electrical resistance of carbon nanotube with a metallic type of conductivity during mechanical loading and intercalation by sulfur.....	115

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р.А. Алиев<sup>1</sup>

Обратные задачи по определению коэффициентов дифференциальных уравнений с частными производными представляют интерес во многих прикладных исследованиях. Эти задачи приводят к необходимости приближенного решения обратных задач математической физики, которые некорректны в классическом смысле. В работе рассматриваются обратные задачи в определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратных задач для квазилинейного уравнения эллиптического типа.

*Ключевые слова:* обратная задача, квазилинейное уравнение эллиптического типа.

### 1. Постановка задачи

Обратные задачи для дифференциальных уравнений состоят в отыскании коэффициентов и правых частей по некоторой дополнительной информации о решении [1, 2]. Единственность решения обратных задач для линейных и нелинейных уравнений эллиптического типа рассмотрены в работах [3–10]. В работе также рассмотрена некорректная обратная задача в определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении.

Пусть  $D$  – ограниченная область  $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – произвольная точка области  $D$ ,  $\Gamma$  – граница области  $D$ , предполагаемая достаточно гладкой и  $p_0, p_1$  – заданные числа,  $Q \equiv [p_0, p_1]$ . Пусть  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i_0 \in I$ .

Рассмотрим задачу об определении  $\{k_1(u), k_2(u), \dots, k_n(u), q(u), u(x, p)\}$  из следующих условий:

$$-\sum_{i=1}^n k_i(u) u_{x_i x_i} + q(u)u = h(x, p), \quad x \in D, p \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, p)|_{\Gamma} = f(\xi, p), \quad \xi \in \Gamma, p \in Q, \quad (2)$$

$$k_i(F_i)u_{\nu}(\xi_i, p) = g_i(p), \quad \xi_i \in \Gamma, i = 1, 2, \dots, n, p \in Q, \quad (3)$$

$$k_{i_0}(F_{n+1})u_{\nu}(\xi_{n+1}, p) = q(F_{n+1})\phi(p) + g_{n+1}(p), \quad \xi_{n+1} \in \Gamma, p \in Q, \quad (4)$$

где  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n+1$  – фиксированные точки границы  $\Gamma$ ,  $F_i \equiv F_i(p) = f(\xi_i, p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $h(x, p)$ ,  $\phi(p)$ ,  $f(\xi, p)$ ,  $g_i(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$  – заданные функции,  $g_i(p) \in Lip(Q)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $\phi(p) \in Lip(Q)$ ,  $h(x, p)$ ,  $f(\xi, p)$  при любом  $p \in Q$  принадлежат соответственно пространствам  $C^\alpha(\bar{D})$ ,  $C^{2+\alpha}(\Gamma)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\nu$  – направление внешней нормали к границе  $\Gamma$ , в точке  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $u_{\nu}(\xi_i, p) \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi_i, p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $Lip$  – пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица,  $R_1, R_2$  – некоторые числа.

Заметим, что условия (3) в теплофизических задачах являются выражением теплового потока через достаточно малую окрестность точки  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ . В этих же задачах условие (4) означает, что в окрестности точки  $\xi_{n+1}$  происходит теплообмен по закону Ньютона. По этой же

<sup>1</sup> Алиев Рамиз Аташ оглы – доцент, кафедра информатики, Азербайджанский университет кооперации, г. Баку.  
e-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

причине в уравнении (1) присутствует слагаемое  $q(u)u(x, p)$ . Если известны коэффициенты  $k_i(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то отпадает условие (3), в противном случае, при известном  $q(u)$ , условие (4).

При совпадении коэффициентов  $k_i(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  постановка задачи совпадает с постановкой задачи работы [3].

**Определение 1.** Функции  $\{k_1(u), k_2(u), \dots, k_n(u), q(u), u(x, p)\}$  назовем решением задачи (1)–(4), если  $0 < k_i(u) \in C[R_1, R_2]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 < q(u) \in C[R_1, R_2]$ ,  $u(x, p) \in C(\bar{D} \times Q)$ ,  $u(x, p)$  при любом  $p$  принадлежит  $C^2(D)$ , существуют пределы  $u_{x_i}(x, p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  при  $x \rightarrow \xi_i \in \Gamma$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $R_1 \leq u(x, p) \leq R_2$  и удовлетворяются соотношения (1)–(4).

Предположим, что  $f(\xi, p) = f_1(\xi)f_2(p)$ . Обозначим  $\min_{\xi \in \Gamma} f_1(\xi) = r_1$ ,  $\max_{\xi \in \Gamma} f_2(\xi) = r_2$ . Предположим, что функции  $F_i(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$  имеют обратную функции  $\Phi_i(F_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$  определенные на  $[r_1, r_2]$  области значения обозначенной  $Q$  и принадлежащие  $Lip(Q)$ . Предположим, что коэффициенты  $k_i(u) \in Lip[R_1, R_2]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $q(u) \in Lip[R_1, R_2]$  в области  $[R_1, R_2]/[r_1, r_2]$  являются заданными функциями, принадлежащими пространству Липшица.

Нетрудно проверить, что если решение задачи (1)–(4) существует, то при принятых предположениях о гладкости данных задачи  $k_i(u) \in Lip[R_1, R_2]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $q(u) \in Lip[R_1, R_2]$ ,  $u(x, p) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$  при  $\forall p \in Q$  и  $u(x, p)$  по  $p$  удовлетворяет условию Липшица. Действительно, при принятых предположениях из общей теории эллиптических уравнений следует, что  $u(x, p) \in W_{p_1}^2(D) \subset C^{1+\alpha}(\bar{D})$  при  $p_1 > n$ ,  $\forall p \in Q$ . Поэтому из дополнительных условий (3) и (4) следует, что  $k_i(u) \in Lip[R_1, R_2]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $q(u) \in Lip[R_1, R_2]$ . Тогда  $u(x, p) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$  при  $\forall p \in Q$  и удовлетворяет условию Липшица по  $p$  [11].

## 2. Единственность и устойчивость решения

Пусть, кроме задачи (1)–(4), задана еще задача  $(\bar{1})$ – $(\bar{4})$ , где все функции, входящие в (1)–(4) заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$\begin{aligned} Z(x, p) &= \bar{u}(x, p) - u(x, p), \lambda_i(\bar{u}, u) = \bar{k}_i(\bar{u}) - k_i(u), i = 1, 2, \dots, n, \mu(\bar{u}, u) = \bar{q}(\bar{u}) - q(u), \\ \delta_1(x, p) &= \bar{h}(x, p) - h(x, p), \delta_2(\xi, p) = \bar{f}(\xi, p) - f(\xi, p), \delta_3(p) = \bar{\phi}(p) - \phi(p), \delta_{i_i}(p) = \bar{g}_i(p) - g_i(p), \\ & i = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Через  $\tilde{\delta}_2(x, p)$  обозначим функцию на границе  $\Gamma$ , совпадающую соответственно с  $\delta_2(\xi, p)$  и при любом  $p$  принадлежащую  $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ . Функция  $\tilde{f}(x, p)$  на  $\Gamma$  совпадает соответственно с  $f(\xi, p)$  и принадлежит  $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ .

**Определение 2.** Если для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что при выполнении условий

$$\max_p \|\delta_1(x, p)\|_{C(\bar{D})} < \delta, \max_p \|\tilde{\delta}_2(x, p)\|_{C^2(\bar{D})} < \delta, \max_p |\delta_3(p)| < \delta, \max_p |\delta_{i_i}(p)| < \delta, i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (5)$$

выполняются неравенства  $|Z(x, p)| < \varepsilon$ ,  $|\lambda_i(\bar{u}, u)| < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|\mu(\bar{u}, u)| < \varepsilon$  при  $x \in \bar{D}$ ,  $p \in Q$ , тогда скажем, что решение задачи (1)–(4) устойчиво.

Единственность решения обратной задачи (1)–(4) в предположении его существования доказывает теорема 1.

**Теорема 1.** Пусть  $g_1(p) \neq 0$ ,  $\phi(p) \neq 0$ ,  $N \cdot \text{mes} D < 1$ . Тогда решение задачи (1)–(4) единственно и устойчиво.  $N$  – положительная постоянная, зависящая от данных и решений задачи.

Доказательство. Из  $(\bar{1})$ – $(\bar{4})$  соответственно вычтем (1)–(4) и положим  $Z_1(x, p) = Z(x, p) - \tilde{\delta}_2(x, p)$ . Тогда получим

$$-\sum_{i=1}^n \bar{k}_i(\bar{u})Z_{1x_i x_i} + \bar{q}(\bar{u})Z_1 = \delta_4(x, p) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x, p)\lambda_i(\bar{u}, u) + \beta(x, p)\mu(\bar{u}, u), \quad (6)$$

$$Z_1(x, p)|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_i(\bar{F}_i, F_i) = \delta_5(p) + \gamma_i(p)Z_{1v}(\xi_i, p), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$\mu(\bar{F}_{n+1}, F_{n+1}) = \delta_6(p) + \gamma_{n+1}(p)Z_{1v}(\xi_{n+1}, p) + \gamma_{n+2}(p)\lambda_{i_0}(\bar{F}_{n+1}, F_{n+1}), \quad (9)$$

где  $\alpha_i(x, p) = u_{x_i x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\beta(x, p) = -u$ ,  $\delta_4(x, p) = \delta_1(x, p) + \sum_{i=1}^n \bar{k}_i(\bar{u})\tilde{\delta}_{2x_i x_i}(x, p) - \bar{q}(\bar{u})\tilde{\delta}_2(x, p)$ ,

$$\gamma_i(p) = -\bar{k}_i(\bar{F}_i)[u_v(\xi_i, p)]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \delta_5(p) = [\delta_{1i}(p) - \bar{k}_i(\bar{F}_1)\tilde{\delta}_{2v}(\xi_i, p)] \times [u_v(\xi_i, p)]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\delta_6(p) = [-\delta_{1n+1}(p) - \bar{q}(\bar{F}_{n+1})\tilde{\delta}_3(p) + \bar{k}_{i_0}(\bar{F}_2)\tilde{\delta}_{2v}(\xi_{n+1}, p)] \times [\phi(p)]^{-1}, \quad \gamma_{n+1}(p) = -\bar{k}_{i_0}(\bar{F}_{n+1})[\phi(p)]^{-1},$$

$$\gamma_{n+2}(p) = u_v(\xi_{n+1}, p)[\phi(p)]^{-1}.$$

При помощи функции Грина [12] из (6)–(7) определим функцию  $Z_1(x, p)$  через правую часть равенства и это выражение подставим в условие (8) и (9). Тогда получим

$$\lambda_i(\bar{F}_i, F_i) = \delta_5(p) + \gamma_i(p) \int_D \frac{\partial}{\partial v} G(\xi_i, \theta) \{ \delta_4(\theta, p) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\theta, p)\lambda_i(\bar{u}, u) + \beta(\theta, p)\mu(\bar{u}, u) \} d\theta, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} \mu(\bar{F}_{n+1}, F_{n+1}) = & \delta_6(p) + \gamma_{n+1}(p) \int_D \frac{\partial}{\partial v} G(\xi_1, \theta) \{ \delta_4(\theta, p) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\theta, p)\lambda_i(\bar{u}, u) + \beta(\theta, p)\mu(\bar{u}, u) \} d\theta + \\ & + \gamma_{n+2}(p)\lambda_{i_0}(\bar{F}_{n+1}, F_{n+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь в системе (10) положим  $\chi = \max_u \sum_{i=1}^n |\lambda_i(\bar{u}, u)| + \max_u |\mu(\bar{u}, u)|$ .

Тогда из системы (10) следует, что

$$\begin{aligned} |\lambda_i(\bar{F}_i, F_i)| & \leq \delta_7(p) + \chi \int_D K_1(\xi_i, \theta) d\theta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ |\mu(\bar{F}_{n+1}, F_{n+1})| & \leq \delta_8(p) + \chi \int_D K_2(\xi_{n+1}, \theta) d\theta + |\gamma_2(p)| |\lambda_{i_0}(\bar{F}_{n+1}, F_{n+1})|. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\delta_i(p)$ ,  $i = 7, 8$  – функции, стремящиеся к нулю при условиях (5).

Функция Грина и полученные из оценок производных функций Грина функции  $K_i(\xi_i, \theta)$ ,  $i = 1, 2$  имеют следующую оценку [12]:

$$|G(x, \theta)| \leq M_1 |x - \theta|^{2-n}, \quad M_1 > 0, \quad |K_i(\xi_i, \theta)| \leq M_{i+1} |\xi_i - \theta|^{1-n} > 0, \quad M_{i+1} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

При достаточно малой мере  $D$  для указанных интегралов в (11) существуют оценки  $M[\text{mes}D]^{1/n}$ ,  $M > 0$ . Из системы (11) получим

$$\chi \leq \delta_9(p) + \chi N \text{mes}D.$$

По условию теоремы  $\beta = N \text{mes}D < 1$ . Тогда для  $\chi$  имеем

$$\chi \leq (1 - \beta)^{-1} \delta_9(p).$$

Следовательно,  $\chi$  стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$  в условиях (5). Теорема доказана.

### 3. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(4) применялся по следующей схеме:

$$-\sum_{i=1}^n k_i^{(S)}(u^{(S)})u_{x_i x_i}^{(S+1)} + q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)} = h(x, p), \quad x \in D, \quad p \in Q, \quad (13)$$

$$u^{(S+1)}(x, p)|_{\Gamma} = f(\xi, p), \quad \xi \in \Gamma, \quad p \in Q, \quad (14)$$

$$k_i^{(S+1)}(u^{(S+1)})u_v^{(S+1)}(\xi_i, \Phi_i(u^{(S+1)})) = g_i(\Phi_i(u^{(S+1)})), \xi_i \in \Gamma, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (15)$$

$$k_{i_0}^{(S+1)}(u^{(S+1)})u_v^{(S+1)}(\xi_{n+1}, \Phi_{n+1}(u^{(S+1)})) = q^{(S+1)}(u^{(S+1)})\phi(\Phi_{n+1}(u^{(S+1)})) + g_2(\Phi_{n+1}(u^{(S+1)})), \xi_{n+1} \in \Gamma, \quad (16)$$

где  $\Phi_i(F_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n+1$  являются обратными соответственно к функциям  $F_i(p) = f(\xi_i, p)$ ,  $i=1,2,\dots,n+1$ . По схеме (13)–(16) последовательные итерации проводятся следующим образом: сперва выбираются некоторые  $k_i^{(0)}(u^{(0)}) > 0, i=1,2,\dots,n, q^{(0)}(u^{(0)}) > 0$ , принадлежащие  $Lip[R_1, R_2]$ , и подставляются в уравнение (13). Далее решается задача (13)–(14) и находится  $u^{(1)}(x, p)$ . По функциям  $u_v^{(1)}(\xi_i, \Phi_i(u^{(1)}))$ ,  $i=1,2,\dots,n+1$  из условий (15), (16) находятся  $k_i^{(1)}(u^{(1)}), i=1,2,\dots,n, q^{(1)}(u^{(1)})$  и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

**Теорема 2.** Пусть решение задачи (1)–(4) существует и при всех  $s=0,1,\dots, u^{(s)}(x, p) \in C(\bar{D}xQ), u^{(s)}(x, p)$  при любом  $p$  принадлежит  $C^2(D)$ ,  $k_i^{(s)}(u^{(s)}) \in Lip[R_1, R_2]$ ,  $i=1,2,\dots,n, q^{(s)}(u^{(s)}) \in Lip[R_1, R_2]$ ,  $g_i(p)u_v^{(s)}(\xi_i, p) > 0, i=1,2,\dots,n, \phi(p)u_v^{(s)}(\xi_i, p) > 0, g_{n+1}(p)u_v^{(s)}(\xi_{n+1}, p) < 0, NmesD < 1$ , производные функции  $u^{(s)}(x, p)$  по  $x$  до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции  $\{k_1^{(s)}(u^{(s)}), k_2^{(s)}(u^{(s)}), \dots, k_n^{(s)}(u^{(s)}), q^{(s)}(u^{(s)}), u^{(s)}(x, p)\}$ , полученные методом последовательных приближений (13)–(16), при  $s \rightarrow +\infty$  равномерно сходятся к решению задачи (1)–(4) со скоростью геометрической прогрессии.  $N$  – положительное постоянное, зависящее от данных задачи.

**Доказательство.** Положим

$$Z^{(s)}(x, p) = u(x, p) - u^{(s)}(x, p),$$

$$\lambda_i^{(s)}(u, u^{(s)}) = k_i(u) - k_i^{(s)}(u^{(s)}), i=1,2,\dots,n, \mu^{(s)}(u, u^{(s)}) = q(u) - q^{(s)}(u^{(s)}).$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют системе

$$-\sum_{i=1}^n k_i(u)Z_{x_i x_i}^{(S+1)} + q(u)Z^{(S+1)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(s)}(x, p)\lambda_i^{(s)}(u, u^{(s)}) + \beta^{(s)}(x, p)\mu^{(s)}(u, u^{(s)}), \quad (17)$$

$$Z^{(S+1)}(x, p)|_{\Gamma} = 0, \quad (18)$$

$$\lambda^{(S+1)}(F_i, F_i^{(S)}) = \gamma_1^{(s)}(p)Z_v^{(S+1)}(\xi_i, p), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (19)$$

$$\mu^{(S+1)}(F_{n+1}, F_{n+1}^{(S+1)}) = \gamma_{n+1}(p)Z_v^{(S+1)}(\xi_{n+1}, p) + \gamma_{n+2}^{(s)}(p)\lambda^{(S+1)}(F_{n+1}, F_{n+1}^{(S+1)}), \quad (20)$$

где

$$\alpha_i^{(s)}(x, p) = u_{x_i x_i}^{(S+1)}, i=1,2,\dots,n, \beta^{(s)}(x, p) = -u^{(S+1)}, \gamma_i^{(s)}(p) = -\bar{k}_i(\bar{F}_i)[u_v^{(S+1)}(\xi_i, p)]^{-1},$$

$$\gamma_{n+1}(p) = -\bar{k}_{i_0}(\bar{F}_{n+1})[\phi(p)]^{-1}, \gamma_{n+2}^{(s)}(p) = u_v^{(S+1)}(\xi_{n+1}, p)[\phi(p)]^{-1}.$$

Функцией Грина из (17)–(18) определим  $Z^{(S+1)}(x, p)$  через правую часть равенства (17) и подставим это выражение в условия (19) и (20). Тогда получим

$$\lambda_i^{(S+1)}(F_i, F_i^{(S+1)}) = \gamma_1^{(s)}(p) \int_D G_v(\xi_i, \theta) \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(s)}(\theta, p)\lambda_i^{(s)}(u, u^{(s)}) + \beta^{(s)}(\theta, p)\mu^{(s)}(u, u^{(s)}) \right\} d\theta,$$

$$\begin{aligned} \mu^{(S+1)}(F_{n+1}, F_{n+1}^{(S+1)}) &= \gamma_{n+1}(p) \int_D G_v(\xi_2, \theta) \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(s)}(\theta, p)\lambda_i^{(s)}(u, u^{(s)}) + \beta^{(s)}(\theta, p)\mu^{(s)}(u, u^{(s)}) \right\} d\theta + \\ &+ \gamma_{n+2}^{(s)}(p)\lambda_{i_0}^{(S+1)}(F_{n+1}, F_{n+1}^{(S+1)}). \end{aligned} \quad (21)$$

Положим

$$\chi^{(s)} = \max_u \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(s)}(\bar{u}, u)| + \max_u |\mu^{(s)}(\bar{u}, u)|.$$

Прежним путем из системы (21) следует, что  $\chi^{(S+1)} \leq \chi^{(S)} NmesD$ . Таким образом теорема доказана.

**4. Существование решения**

Существование решения задачи (1)–(4) доказывается для частных случаев.

1. Пусть  $k_i(u) > 0, i = 1, 2, \dots, n$  – заданная функция, из условий (1)–(2), (4) требуется определить функции  $\{q(u), u(x, p)\}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $h(x, p) = 0, f(\xi, p) \geq 0, g_2(p) = 0, \phi(p) < 0, NmesD < 1$ . Тогда задача (1)–(2), (4) имеет хотя бы одно решение.  $N$  – положительная постоянная, зависящая от данных задачи.

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что при всех приближениях  $q(u)$  положительно. В силу принципа максимума [11] для решения задачи (12)–(13) справедлива оценка  $\|u^{(S+1)}\|_{C(\bar{D})} \leq \|f\|_{C(\Gamma)}$ , т.е. последовательность  $\{u^{(S)}(x, p)\}$  равномерно ограничена. Докажем равномерную ограниченность последовательности  $\{q^{(S)}(u^{(S)})\}$ . Переносим слагаемое  $q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}$  в правую часть уравнения (12) и с помощью функции Грина найдем выражение для  $u^{(S+1)}(x, p)$ :

$$u^{(S+1)}(x, p) = \int_D G(x, \theta) \left[ \sum_{i=1}^n k_i(u^{(S)}) \tilde{f}_{\theta_i}(\theta, p) - q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)} \right] d\theta + \tilde{f}(x, p).$$

Подставив это выражение в условие (16) при  $x = \xi_{n+1}$ , получим

$$q^{(S+1)}(F_{n+1}) = F^{(S)}(p) - \int_D K^{(S)}(\xi_{n+1}, \theta) q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}(\theta, p) d\theta, \tag{22}$$

где

$$F^{(S)}(p) = k_{i_0}(F_{n+1})[\phi(p)]^{-1} \left[ \tilde{f}_v(\xi_{n+1}, p) + \int_D G_v(\xi_{n+1}, \theta) \left[ \sum_{i=1}^n k_i(u^{(S)}) \tilde{f}_{\theta_i}(\theta, p) \right] d\theta \right]$$

$$K^{(S)}(\xi_{n+1}, \theta) = [\phi(p)]^{-1} k_{i_0}(F_{n+1}) G_v(\xi_{n+1}, \theta).$$

Для  $K^{(S)}(\xi_{n+1}, \theta)$  имеет место оценка (12). Положим

$$q_1^{(S)} = \max |q^{(S)}(u^{(S)})|, R_1 \leq u^{(S)} \leq R_2.$$

Тогда из (22) при достаточно малой мере  $D$  имеем

$$q_1^{(S+1)} \leq N_1 + NmesDq_1^{(S)}.$$

Здесь  $N_1 > 0$  и не зависит от  $s$ . Обозначим  $\beta = NmesD$ . Учитывая, что  $0 < \beta < 1$ , имеем

$$q_1^{(S+1)} \leq \frac{1}{1-\beta} N_1 + q_1^{(0)}.$$

Тогда из этого неравенства вытекает равномерная ограниченность последовательности  $\{q^{(S)}(u^{(S)})\}$ . Таким образом, при всех приближениях  $q^{(S)}(u^{(S)})$  – непрерывная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность  $\{u^{(S)}(x, p)\}$  равномерно ограничена по норме  $W_{p_1}^2(D)$ ,  $p_1 > n, \forall p \in Q$ . Поэтому  $u^{(S)}(x, p)$  компактна в  $C^1(\bar{D})$ . При этом из условия (16) следует, что последовательность  $\{q^{(S)}(u^{(S)})\}$  будет компактна в  $C[R_1, R_2]$ . Отсюда и из (13)–(14) вытекает компактность  $\{u^{(S)}(x, p)\}$  в  $C^2(\bar{D})$ . В системе (13)–(14), (16) переходя к пределу при  $s \rightarrow +\infty$  получим, что существует пара функций  $\{q(u), u(x, p)\}$ , удовлетворяющая условиям задачи (1)–(2), (4). Теорема доказана.

2. Пусть  $q(u)$  – заданная функция. Обозначая  $y = x_2$  из условий (1)–(3) при  $n = 2$  требуется определить функции  $\{k_1(u), k_2(u), u(x, y, p)\}$ . В частном случае рассмотрим определение функции  $\{k_1(u), k_2(u), u(x, y)\}$  в прямоугольной области:

$$-k_1(u)u_{xx} - k_2(u)u_{yy} + q(u)u = h(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (23)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u(x, l_2) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (24)$$

$$u(0, y) = \phi_1(y), u(l_1, y) = \phi_2(y), \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad (25)$$

$$k_1(\phi_1(y))u_x(0, y) = g_1(y), \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad (26)$$

$$k_2(\varphi_1(x))u_y(x, 0) = g_2(x), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (27)$$

удовлетворяющее условиям  $\varphi_1(0) = \phi_1(0), \varphi_1(l_1) = \phi_2(0), \varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2), \phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$ . Здесь

$$D = \{(x, y) | 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}.$$

Метод последовательных приближений к задаче (23)–(27) применяется аналогично схеме (13)–(16). Сперва докажем одну лемму.

**Лемма.** Пусть задача

$$-a(x, y)u_{xx} - b(x, y)u_{yy} + u = 0, \quad (x, y) \in D,$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u(x, l_2) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l_1,$$

$$u(0, y) = \phi_1(y), u(l_1, y) = \phi_2(y), \quad 0 \leq y \leq l_2,$$

удовлетворяющая условиям  $\varphi_1(0) = \phi_1(0), \varphi_1(l_1) = \phi_2(0), \varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2), \phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$  при заданном  $a(x, y) \geq \mu_0, b(x, y) \geq \mu_0, \mu_0 > 0$ , имеет решение, принадлежащее  $C^2(D) \cap C(\bar{D})$  и  $n(x) \leq \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \leq Ml_2, m(y) \leq \phi_1(y) - \phi_2(y) \leq Ml_1, \varphi_2(x) \geq 0, \phi_2(y) \geq 0, \varphi_1(0) \geq \varphi_1(x) + m(0)xl_1^{-1},$

$$\varphi_2(0) \geq \varphi_2(x) + m(l_2)xl_1^{-1}, \phi_1(0) \geq \phi_1(y) + n(0)yl_2^{-1}, \phi_2(0) - \phi_2(y) \geq n(l_1)yl_2^{-1}, \varphi_{ix}(x) \geq -M, i = 1, 2,$$

$$\phi_{iy}(y) \geq -M, i = 1, 2, \varphi_{ixx}(x) = 0, \phi_{iyy}(y) = 0,$$

тогда

$$-M - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1 \leq u_x(0, y) \leq -m(y)l_1^{-1}, \quad (28)$$

$$-M - \varphi_1(x)(2\mu_0)^{-1}l_2 \leq u_y(x, 0) \leq -n(x)l_2^{-1}, \quad (29)$$

где  $m(y) \in C^2[0, l_2], n(x) \in C^2[0, l_1], m''(y) \geq 0, n''(x) \geq 0, M = \max_{i=1,2} \{ \max_x |\varphi_{ix}(x)|, \max_y |\phi_{iy}(y)| \},$

$$\max_x l_2^{-1}[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)], \max_x l_1^{-1}[\phi_1(y) - \phi_2(y)] \}.$$

**Доказательство.** Положим

$$v(x, y) = u(x, y) + mxl_1^{-1} - \phi_1(y), V(x, y) = -u(x, y) + \phi_1(y) - Mx - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}x(l_1 - x),$$

$$v_1(x, y) = u(x, y) + nyl_2^{-1} - \phi_1(y), V_1(x, y) = -u(x, y) + \phi_1(x) - My - \phi_1(x)(2\mu_0)^{-1}y(l_2 - y).$$

Нетрудно проверить, что  $v(x, y)$  удовлетворяет условиям задачи

$$-a(x, y)v_{xx} - b(x, y)v_{yy} + v = -\phi_1(y) + xm(y)l_1^{-1},$$

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_1(0) + xm(0)l_1^{-1}, \quad v(x, l_2) = \varphi_2(x) - \varphi_2(0) + xm(l_2)l_1^{-1}, \quad v(0, y) = 0,$$

$$v(l_1, y) = -\phi_1(y) + m(y) + \phi_2(y).$$

Поэтому, по условию леммы, наибольшее положительное значение функции  $v(x, y)$  достигается при  $x = 0$ . Тогда  $v_x(0, y) \leq 0$ , другими словами

$$u_x(0, y) \leq -m(y)l_1^{-1}. \quad (30)$$

Аналогично прежнему, после подстановки  $V(x, y)$  и учитывая условия леммы, получаем, что наибольшее положительное значение функции  $V(x, y)$  достигается при  $x = 0$ . Поэтому  $V_x(0, y) \leq 0$  или

$$-M - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1 \leq u_x(0, y). \quad (31)$$

Объединяя оценки (30) и (31), получим оценку (28). Аналогично прежним путем получим (29). Лемма доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $\varphi_i(x) \in C^{2+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1], \varphi_i(y) \in C^{2+\alpha}(0, l_2) \cap C[0, l_2], i=1, 2,$   
 $h(x, p) = 0, q(u) = 1, n(x) \leq \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \leq Ml_2, m(y) \leq \varphi_1(y) - \varphi_2(y) \leq Ml_1, \varphi_2(x) \geq 0, \varphi_2(y) \geq 0,$   
 $\varphi_1(0) \geq \varphi_1(x) + m(0)xl_1^{-1}, \varphi_2(0) \geq \varphi_2(x) + m(l_2)xl_1^{-1}, \varphi_1(0) \geq \varphi_1(y) + n(0)yl_2^{-1}, \varphi_2(0) - \varphi_2(y) \geq$   
 $\geq n(l_1)yl_2^{-1}, \varphi_{ix}(0) < 0, \varphi_{iy}(y) < 0, i=1, 2, \varphi_{ix}(x) \geq -M, i=1, 2, \varphi_{iy}(y) \geq -M, i=1, 2, \varphi_{ixx}(x) = 0,$   
 $\varphi_{iyy}(y) = 0, g'_0 \leq -g_1(y) - \frac{1}{2}\varphi_1(y)l_1, g''_0 \leq -g_2(x) - \frac{1}{2}\varphi_1(x)l_2, g_1(y) < 0, g_2(x) < 0, n(x), m(y)$  – такие неотрицательные функции, что  $g_1(y)[m(y)]^{-1}$  и  $g_2(x)[n(x)]^{-1}$  – ограничены,  $g'_0, g''_0$  – положительные числа. Тогда задача (23)–(27) имеет хотя бы одно решение.

**Доказательство.** Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$\begin{aligned} -M[1 + \varphi_1(y)(2g'_0)^{-1}l_1] &\leq u_x^{(S+1)}(0, y) \leq -m(y) \cdot l_1^{-1}, & 0 < y < l_2, \\ -M[1 + \varphi_1(x)(2g''_0)^{-1}l_2] &\leq u_y^{(S+1)}(x, 0) \leq -n(x) \cdot l_2^{-1}, & 0 < x < l_1, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} g'_0 M^{-1} &\leq k_1^{(S+1)}(u^{(S+1)}) \leq \max_y \{[-g_1(y)] \cdot [m(y)]^{-1}\} \cdot l_1, \\ g''_0 M^{-1} &\leq k_2^{(S+1)}(u^{(S+1)}) \leq \max_x \{[-g_2(x)] \cdot [n(x)]^{-1}\} \cdot l_2. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех приближениях  $k_1^{(S)}(u^{(S)}), k_2^{(S)}(u^{(S)})$  – строго положительные, непрерывные и равномерно ограниченные функции. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность  $\{u^{(S)}(x, y)\}$  равномерно ограничена по норме  $W_{p_1}^2(D), \forall p_1 > 2$ . Поэтому  $\{u^{(S)}(x, y)\}$  компактна в  $C_1(\bar{D})$ . При этом из условий (15) следует, что для прямоугольной области последовательности  $\{k_1^{(S)}(u^{(S)}), k_2^{(S)}(u^{(S)})\}$  будет компактна в  $C^1[R_1, R_2]$ . Отсюда и из (13)–(14) вытекает компактность  $\{u^{(S)}(x, y)\}$  в  $C^2(\bar{D})$  для прямоугольной области. В системе (13)–(15) переходят к пределу, при  $s \rightarrow +\infty$  получим, что существует пара функции  $\{k_1(u), k_2(u), u(x, y)\}$ , удовлетворяющая условиям (23)–(27). Теорема доказана.

Для задачи (23)–(27)  $\tilde{f}(x, y)$  надо взять в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= \frac{l_1 - x}{l_1} \varphi_1(y) + \frac{l_2 - y}{l_2} [\varphi_1(x) - \varphi_1(0) + \frac{x}{l_1} \varphi_1(0)] + \frac{x}{l_1} [\varphi_2(y) - \varphi_2(0) + \frac{y}{l_2} \varphi_2(0)] + \\ &+ \frac{y}{l_2} [\varphi_2(x) - \varphi_2(0) + \frac{x}{l_1} \varphi_2(0)] - \frac{xy}{l_1 l_2} \varphi_2(l_2). \end{aligned}$$

## Литература

1. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – М.: Наука, 2009. – 458 с.
3. Искендеров, А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1978. – № 2. – С. 80–85.
4. Искендеров, А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Диф. уравнения. – 1979. – Т. 20, № 11. – С. 858–867.

5. Клибанов, М.В. Обратные задачи в целом и Карлемановские оценки / М.В. Клибанов // Диф. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 6. – С. 1035–1041.
6. Клибанов, М.В. Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений / М.В. Клибанов // Диф. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 11. – С. 1947–1953.
7. Хайдаров, А. Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений // Некорректные задачи математической физики и анализа / А. Хайдаров; под. ред. С.А. Алексева. – Новосибирск, 1984. – С. 245–249.
8. Вабищевич, П.Н. О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений / П.Н. Вабищевич // Диф. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2125–2129.
9. Соловьев, В.В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике / В.В. Соловьев // Журнал выч. мат. и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 8. – С. 1365–1377.
10. Вахитов, И.С. Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии–реакции / И.С. Вахитов // Дальневосточный матем. жур. – 2010. – Т. 10, № 2. – С. 93–105.
11. Лажыженская, О.Г. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.Г. Лажыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
12. Ивасишен, С.Д. Оценки матрицы Грина однородной параболической граничной задачи / С.Д. Ивасишен, С.В. Эйдельман // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172, № 6. – С. 1262–1265.

*Поступила в редакцию 17 февраля 2011 г.*

## ABOUT EVALUATION OF UNKNOWN COEFFICIENTS IN A QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION

**R.A. Aliyev<sup>1</sup>**

Inverse problems on restoration of coefficients of the partial differential equation are of interest in many applied researches. These problems lead to necessity of the approached decision of inverse problems for the equations of mathematical physics, which are incorrect in classical sense. Inverse problems in definition of unknown coefficients in a quasilinear elliptic equation are studied in the article. Theorems of existence, uniqueness and stability of inversion problems solution for the quasilinear elliptic equations are proved.

*Keywords: inverse problem, quasilinear elliptic equation.*

### References

1. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* (Incorrect problems of mathematical physics and analysis). Moscow, Nauka, 1980. 288 p. (in Russ.).
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and incorrect problems). Moscow, Nauka, 2009. 458 p. (in Russ.).
3. Iskenderov A.D. *Izv. AN. Az. SSR. Ser. fiz.-tehn. i mat. nauk.* 1978. no. 2. pp. 80–85. (in Russ.).
4. Iskenderov A.D. *Dif. uravneniya.* 1979. Vol. 20, no. 11. pp. 858–867. (in Russ.).
5. Klibanov M.V. *Dif. uravneniya.* 1984. Vol. 20, no. 6. pp. 1035–1041. (in Russ.).
6. Klibanov M.V. *Dif. uravneniya.* 1984. Vol. 20, no. 11. pp. 1947–1953. (in Russ.).
7. Khaidarov A. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza.* (Incorrect problems of mathematical physics and analysis). Novosibirsk, 1984. pp. 245–249. (in Russ.).
8. Vabishchevich P.N. *Dif. uravneniya.* 1988. Vol. 24, no. 12. pp. 2125–2129.
9. Solov'ev V.V. *Zhurnal vych. mat. i mat. fiziki.* 2007. Vol. 47, no. 8. pp. 1365–1377. (in Russ.).
10. Vakhitov I.S. *Dal'nevostochnyj matem.zhurn.* 2010. Vol. 10, no. 2. pp. 93–105. (in Russ.).
11. Lazhyzhenskaya O.G., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya jellipticheskogo tipa* (Linear and quasilinear equation of elliptic type). Moscow, Nauka, 1973. 576 p. (in Russ.).
12. Ivasishen S.D., Jejdel'man S.V. *DAN SSSR.* 1967. Vol. 172, no. 6. pp. 1262–1265. (in Russ.).

<sup>1</sup> Aliyev Ramiz Atash oqlu is Assistant Professor, Department of Computer Science, the Azerbaijan University of Cooperation, Baku.  
e-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

# ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОБРАЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.С. Асфандиярова<sup>1</sup>

Рассматривается обратная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с линейными граничными условиями. Исследована разрешимость такой задачи, указан способ обращения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, краевые задачи, нелокальные граничные условия, функция Грина.

## Постановка задачи

В приложениях (например, в теории динамических измерений [1]) возникают проблемы, приводящие к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями – многоточечные краевые задачи, задачи с распределенными данными и т.п.

Все подобные задачи могут быть сформулированы как задачи решения линейного дифференциального уравнения с линейными граничными условиями, задаваемыми системой функционалов:

$$L[x] = x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = f(t), U_j(x) = \alpha_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь  $p_i(t)$ ,  $f(t)$  – непрерывные на  $[a, b]$  функции,  $\alpha_j$  – числа,  $U_j(x)$  – линейные, линейно-независимые функционалы.

Задачу нахождения правой части  $f(t)$  по экспериментально измеренной функции  $\tilde{x}(t) \cong x(t)$  будем называть *обратной задачей*.

На первый взгляд, логичным представляется решение поставленной задачи подстановкой измеренной функции  $\tilde{x}(t)$  в левую часть уравнения (1). Однако хорошо известно (например, [2]), что наличие погрешностей измерения (даже малых) приводит к значительным ошибкам восстановления  $f(t)$ <sup>2</sup>.

В настоящей работе предлагается способ решения обратной задачи обращением дифференциального оператора задачи (1) с помощью функции Грина.

## Основные теоремы

Линейная краевая задача (1) может быть редуцирована к задаче с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} L[x] = \tilde{f}(t), \\ U_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Если  $\tilde{f}(t) = 0$ , то задача (2) называется однородной.

**Теорема 1.** *Линейная краевая задача (1) с линейно независимыми краевыми условиями  $U_j(x) = \alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) может быть сведена к краевой задаче (2) с однородными граничными условиями  $U_j(x) = 0$ .*

**Лемма 1.** *(Об общем виде линейного функционала в  $C^n[a, b]$ ). Пусть  $U(x)$  – линейный в  $C^n[a, b]$  функционал, тогда для любого набора точек  $\{t_i\}_{i=1}^n$  существует вектор  $c = (c_i)_{i=1, 2, \dots, n} \in R^n$  и функция ограниченной вариации  $\sigma(t)$  такие, что*

<sup>1</sup> Асфандиярова Юлия Сагитовна – аспирант, кафедра математического анализа, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: asfandiyarova@list.ru

<sup>2</sup> Легко понять, почему так происходит. Если полагать модель измерений аддитивной относительно ошибки  $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta(t)$ , то в случае, если ошибка измерений содержит высокочастотную составляющую, уже при нахождении первой производной она будет значительной. Тем более для производных, порядок которых выше первого.

$$U(x) = \sum_{i=1}^n c_i x(t_i) + \int_a^b x^{(n)}(t) d\sigma(t). \quad (3)$$

Доказательство, например, в [3].

**Лемма 2.** Для любых линейных линейно независимых функционалов  $U_j(x)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) и любого набора чисел  $\alpha_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) существует многочлен  $\hat{x}(t)$ , удовлетворяющий условиям  $U_j(x) = \alpha_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ).

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма из теории двойственности [4].

**Лемма 3.** Пусть  $\langle F, G \rangle$  – двойственность и  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) – линейно независимое подмножество  $G$ . Тогда существует  $n$  линейно независимых элементов  $x_i \in F$ , таких, что  $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$  ( $i, j=1,2,\dots,n$ ).

**Доказательство леммы 2.** Пусть  $P$  – пространство многочленов  $x(t), t \in [a, b]$ . Рассмотрим отображение  $A: P \rightarrow R^n$ , ставящее в соответствие многочлену  $x$  вектор  $U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)$ .  $A$  – линейный непрерывный оператор в силу линейности функционалов  $U_j$ . Ядро оператора  $A$  представляется в виде пересечения ядер функционалов  $U_j$ :

$$\text{Ker } A = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } U_j.$$

Рассмотрим двойственность  $\langle F, G \rangle$ , где  $F$  – пространство  $n$  раз непрерывно дифференцируемых функций, а  $G$  – множество линейных функционалов над ним:

$$F = C^n[a, b], \quad G = C^n[a, b]^*, \quad \langle F, G \rangle \text{ – двойственность.}$$

Функционалы  $U_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) образуют линейно независимое подмножество пространства  $G$ . Следовательно, выполнены условия леммы 3, т.е. существуют  $n$  линейно независимых элементов  $x_i \in F$  таких, что  $U_j(x_i) = \delta_{ij}$  ( $i, j=1,2,\dots,n$ ).

Любой элемент  $x \in C^n[a, b]$  представляется в виде суммы  $x = \sum_{j=1}^n U_j(x)x_j + y$ , где  $y \in \text{Ker } A$ ,

так как, применяя поочередно функционалы  $U_i$  к равенству  $y = x - \sum_{j=1}^n U_j(x)x_j$ , получаем

$$U_i(y) = U_i(x) - \sum_{j=1}^n U_j(x)U_i(x_j) = U_i(x) - U_i(x) = 0,$$

т.е.  $y \in \text{Ker } U_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), откуда  $y \in \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } U_j = \text{Ker } A$ . Таким образом, получаем,  $\text{codim}(\text{Ker } A) = n$ .

Следовательно, образ оператора  $\text{Im } A$ , изоморфный  $P / \text{Ker } A$ , имеет размерность  $n$ . Так как  $\text{Im } A \subset R^n$ , то  $\text{Im } A = R^n$ .

Таким образом, существует многочлен  $\hat{x}(t)$  такой, что  $U_j(\hat{x}) = \alpha_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ). •

**Доказательство теоремы 1.** Пусть функция  $x(t)$  является решением задачи (1), т.е.  $L[x] = f(t)$  и  $U_j(x) = \alpha_j, j=1,2,\dots,n$ . В силу леммы 3 существует многочлен  $\hat{x}(t)$  удовлетворяющий граничным условиям этой системы, т.е. такой, что  $U_j(\hat{x}) = \alpha_j, j=1,2,\dots,n$ .

Рассмотрим функцию  $y(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . В силу линейности интеграла функция  $y$  удовлетворяет нулевым граничным условиям и является решением линейного дифференциального уравнения  $L[y] = \hat{f}(t)$ , где

$$\hat{f}(t) = L[x - \hat{x}] = L[x] - L[\hat{x}] = f(t) - L[\hat{x}].$$

Таким образом, рассматриваемая функция  $y(t)$  является решением задачи (2) с правой частью  $\hat{f}(t) = f(t) - L[\hat{x}]$ . •

Известно [5], что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то задачи (1) и (2) однозначно разрешимы для любых правых частей  $\tilde{f}(t)$  и граничных данных  $\alpha_j$ , при этом справедливо следующее утверждение:

**Теорема 2.** Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то существует единственная функция Грина этой задачи и для любой функции  $\tilde{f}(t)$ , непрерывной на  $[a, b]$ , существует единственное решение задачи (2), и это решение задается формулой

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где  $G(t, \tau)$  – функция Грина задачи (2).

Доказательство, например, в [5].

Соотношение (6) является искомым обращением оператора (2), позволяющим по измеренному экспериментально решению найти правую часть уравнения (2).

Равенство (6) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма I-го рода относительно функции  $\tilde{f}(t)$ , устойчивые методы численного решения которого хорошо разработаны [2].

Для нахождения функции Грина основной задачи (2) воспользуемся аналогом теоремы [6], устанавливающей связь между функцией Грина основной задачи (2) и функцией Грина вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} x^{(n)} = \tilde{f}(t), \\ U_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (7)$$

**Теорема 3.** Пусть задача (2) однозначно разрешима для любой функции  $\tilde{f}(t)$ , тогда функция Грина этой задачи является единственным решением уравнения

$$G(t, s) - \tilde{G}(t, s) = \int_a^b G(t, \tau) V(\tau, s) d\tau, \quad (8)$$

где  $\tilde{G}(t, \tau)$  – функция Грина вспомогательной задачи (7) и

$$V(\tau, s) = - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(\tau, s)}{\partial \tau^k}.$$

**Лемма 4.** Функция  $\Gamma(t, s) = G(t, s) - \tilde{G}(t, s)$  на прямоугольнике  $K = \{(t, s) : a \leq t, s \leq b\}$  непрерывна по  $t$  и по  $s$  и имеет непрерывные производные по  $t$  до  $n$ -го порядка включительно.

**Доказательство.** Функции  $G(t, s)$  и  $\tilde{G}(t, s)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по  $t$  до  $(n-2)$ -го порядка включительно. Производные  $(n-1)$ -го порядка непрерывны для  $t \in [a, s) \cup (s, b]$ , а при  $t = s$  они имеют разрыв:

$$\left. \frac{\partial^{n-1} G(t, s)}{\partial t^{n-1}} \right|_{t=s^+} - \left. \frac{\partial^{n-1} G(t, s)}{\partial t^{n-1}} \right|_{t=s^-} = 1.$$

Следовательно,  $(n-1)$ -я производная функции  $\Gamma(t, s)$  непрерывна и при  $t = s$ .

Далее заметим, что для  $\forall t \in [a, s) \cup (s, b]$ :

$$L[\Gamma] = L[G] - L[\tilde{G}] = L[G] - \tilde{L}[\tilde{G}] - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(t, s)}{\partial t^k}.$$

Так как  $L[G] = \tilde{L}[\tilde{G}] = 0$ , получаем

$$L[\Gamma] = - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(t, s)}{\partial t^k}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^n \Gamma(t, s)}{\partial t^n} = - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \Gamma(t, s)}{\partial t^k} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(t, s)}{\partial t^k}.$$

Последнее равенство верно для всех  $t$ , следовательно,  $\frac{\partial^n \Gamma(t, s)}{\partial t^n}$  непрерывна для любого  $t \in [a, b]$ . Таким образом, лемма доказана. •

**Доказательство теоремы 3.** Из леммы 4 следует, что при фиксированном  $s$  функция  $\Gamma(t, s)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} L[\Gamma(t, s)] = - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \frac{\partial^k \tilde{G}(t, s)}{\partial t^k}, \\ U_j(\Gamma(t, s)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Следовательно, по определению функции Грина, функция  $\Gamma(t, s)$  может быть представлена следующим образом:

$$\Gamma(t, s) = \int_a^b G(t, \tau) v(\tau, s) d\tau.$$

Таким образом, функция Грина основной задачи (2) действительно является решением уравнения (8).

Пусть  $Q(t, s)$  – другое решение уравнения (8), тогда функция Грина задачи (2) может быть представлена в виде  $G(t, s) = Q(t, s) + r(t, s)$ , где  $r(t, s)$  удовлетворяет уравнению (из (7)):

$$\int_a^b r(t, \tau) v(\tau, s) d\tau = r(t, s).$$

Пусть  $f(t)$  – произвольная функция, непрерывная на  $[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b G(t, s) f(s) ds = \int_a^b Q(t, s) f(s) ds + \int_a^b r(t, s) f(s) ds = \int_a^b Q(t, s) f(s) ds + \int_a^b r(t, s) \int_a^b v(s, t) f(\tau) d\tau ds.$$

Последний интеграл может быть представлен в форме

$$\int_a^b r(t, s) \int_a^b v(s, t) f(\tau) d\tau ds = - \int_a^b r(t, s) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \int_a^b \frac{\partial^k \tilde{G}(s, \tau)}{\partial s^k} f(\tau) d\tau ds.$$

Пусть  $\tilde{x}(t)$  – решение вспомогательной задачи (6) с некоторой правой частью  $f(t)$ , тогда

$$\tilde{x}^{(k)}(s) = \int_a^b \frac{\partial^k \tilde{G}(s, \tau)}{\partial s^k} f(\tau) d\tau.$$

Решение основной задачи (2) может быть записано в виде

$$x(t) = \int_a^b Q(t, s) f(s) ds - \int_a^b r(t, s) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \tilde{x}^{(k)}(s) ds.$$

Заметим, что

$$L[\tilde{x}(s)] = f(s) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) \tilde{x}^{(k)}(s).$$

Учитывая представление  $r(t, s)$  через  $G(t, s)$  и  $Q(t, s)$  и предыдущее выражение  $x(t)$ , получаем:

$$\int_a^b r(t, s) L[\tilde{x}(s)] ds \equiv 0 \quad \text{для } \forall f(t) \in C[a, b].$$

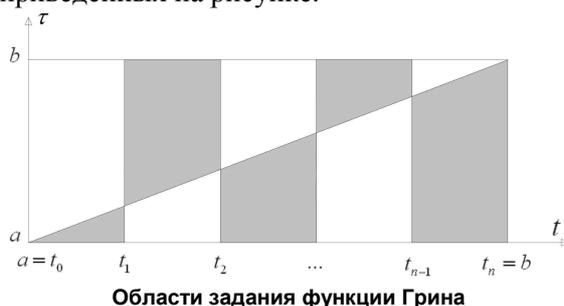
Из произвольности функции  $f(t)$  и единственности решения задачи (2) следует, что  $r(t, s) \equiv 0$ . Таким образом,  $G(t, s) \equiv Q(t, s)$ , т.е.  $G(t, s)$  является единственным решением уравнения (8). Теорема доказана. •

## Функция Грина

В случае, когда фундаментальная система решений исходного дифференциального уравнения известна, функция Грина задачи (2) может быть найдена методом, описанным в [5]. Определенную сложность представляет построение функции Грина в ситуации, когда фундаментальная система решений неизвестна.

В этом случае мы используем уравнение (8), где функция  $\tilde{G}(t, \tau)$  – функция Грина вспомогательной задачи (7). Фундаментальная система решений дифференциального уравнения вспомогательной задачи известна, поэтому функция Грина вспомогательной задачи  $\tilde{G}(t, \tau)$  может быть легко найдена.

В результате получаем функцию Грина на отрезке  $[a, b]$ , заданную различными формулами в каждой из  $(2n)$  областей, приведенных на рисунке.



Функция Грина вспомогательной задачи дается соотношением:

$$\tilde{G}(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ik}(\tau) x_i(t), & \text{при } t_k \leq t < \tau \leq t_{k+1}, \\ \sum_{i=1}^n b_{ik}(\tau) x_i(t), & \text{при } t_k \leq \tau < t \leq t_{k+1}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $a_{ik}(\tau) = \frac{\Delta_{ik}(\tau)}{\Delta(\tau)} + \frac{W_i(\tau)}{W(\tau)}$  и  $b_{ik}(\tau) = \frac{\Delta_{ik}(\tau)}{\Delta(\tau)}$ , функции  $\Delta(\tau)$ ,  $\Delta_{ik}(\tau)$ ,  $W(\tau)$ ,  $W_i$  определяются следующим образом:

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} U_1(x_1) & U_1(x_2) & \dots & U_1(x_n) \\ U_2(x_1) & U_2(x_2) & \dots & U_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(x_1) & U_n(x_2) & \dots & U_n(x_n) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{ik}(\tau) = \begin{vmatrix} U_1(x_1) & \dots & U_1(x_{i-1}) & \sum_{s=1}^n c_s U_{1a}(x_s) & U_1(x_{i+1}) & \dots & U_1(x_n) \\ U_2(x_1) & \dots & U_2(x_{i-1}) & \sum_{s=1}^n c_s U_{2a}(x_s) & U_2(x_{i+1}) & \dots & U_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(x_1) & \dots & U_n(x_{i-1}) & \sum_{s=1}^n c_s U_{na}(x_s) & U_n(x_{i+1}) & \dots & U_n(x_n) \end{vmatrix},$$

$W(\tau)$  – определитель Вронского фундаментальной системы решений дифференциального уравнения задачи (7):

$$W(\tau) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$W_i(\tau)$  – алгебраическое дополнение в матрице  $W(\tau)$  к элементу  $n$ -й строки  $i$ -го столбца:

$$W_i(\tau) = (-1)^n \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_n \\ x'_1 & \dots & x'_{i-1} & x'_{i+1} & \dots & x'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & \dots & x_{i-1}^{(n-2)} & x_{i+1}^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

### Литература

1. Грановский, В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. Тихомиров, В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во Московского университета, 1976. – 304 с.
4. Шеффер, Х. Топологические векторные пространства / Х. Шеффер. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
5. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
6. Zalyapin, V.I. Inverse problem of the measurements theory / V.I. Zalyapin, H.V. Kharitonova, S.V. Ermakov // Inverse problems, Design and Optimization Symposium, Miami, Florida, USA. – April 16–18, 2007. – P. 91–96.

Поступила в редакцию 7 октября 2011 г.

## THE INVERSION PROCEDURE FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION'S LINEAR BOUNDARY PROBLEM

Yu.S. Asfandiyarova<sup>1</sup>

Differential equations with boundary conditions specified with linear functionals are considered. Solvability of this problem was analyzed. A new technique for computational procedure was described.

*Keywords:* differential equation, boundary problem, non-local boundary conditions, Green function.

### References

1. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniia: Osnovy metrologicheskogo obespecheniia* (Dynamic measurements: Principles of metrological support). Leningrad, Energoatomizdat, 1984. 224 p. (in Russ.).
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniia* (Theory of linear ill-posed problems and its applications). Moscow, Nauka, 1978. 206 p. (in Russ.).
3. Tikhomirov V.M. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii* (Some questions in approximation theory). Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1976. 304 p. (in Russ.).
4. Schaefer H. *Topological vector spaces*. Macmillan, 1966, 294 p. [Schaefer H. *Topologicheskie vektornye prostranstva* (Topological vector spaces). Moscow, Mir, 1971. 360 p. (in Russ.).]
5. Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear Differential Operators). Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russ.).
6. Zalyapin V.I., Kharitonova H.V., Ermakov S.V. Inverse problem of the measurements theory. *Inverse problems, Design and Optimization Symposium, Miami, Florida, USA. April 16–18, 2007.* pp. 91–96.

<sup>1</sup> Asfandiyarova Yuliya Sagitovna is Post-graduate Student, Mathematical Analysis Department, Faculty of Mechanics and Mathematics, South Ural State University. e-mail: asfandiyarova@list.ru

# ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ОШИБКОЙ В ОПЕРАТОРЕ

А.Б. Бредихина<sup>1</sup>

Исследован метод М.М. Лаврентьева для уравнений с приближенно заданным оператором на оптимальность. Получена точная оценка погрешности данного метода.

Ключевые слова: операторное уравнение, оптимальный метод, оценка погрешности.

## Введение

В работе [1] была доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева при точно заданном операторе и специально выбранном параметре регуляризации, и получены точные оценки погрешности этого метода. В настоящей статье этот результат обобщен на уравнения с приближенно заданным оператором.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство,  $B[H]$  – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство  $H$  в  $H$ ,  $B_1[H]$  – подмножество пространства  $B[H]$ , состоящее из инъективных операторов,  $\mathcal{A} \subset B[H]$ .

Рассмотрим операторное уравнение первого рода:

$$Au = f; \quad u, f \in H. \quad (1)$$

Предположим, что при  $f = f_0$  и  $A \in \mathcal{A}$  уравнение (1) имеет точное решение  $u_0$ , принадлежащее множеству  $M_r = B\bar{S}_r$ , где  $B \in B[H]$ , а  $\bar{S}_r = \{v: v \in H, \|v\| \leq r\}$ . Но точные значения правой части  $f_0$  уравнения (1) и оператора  $A$  нам неизвестны. Вместо них даны некоторые приближения  $f_\delta \in H$  и  $A_h \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$ , а также уровни их погрешности  $\delta, h \geq 0$  такие, что  $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$  и  $\|A_h - A\| \leq h$ .

Требуется, используя априорную информацию  $M_r, \mathcal{A}, f_\delta, A_h, \delta, h$ , определить приближенное решение  $u_{\delta h}$  уравнения (1) и оценить его отклонение от точного решения  $u_0$ .

## 2. Основные понятия и обозначения

В дальнейшем, если  $A \neq A^*$ , то, предположив, что множество значений  $R(A^*)$  всюду плотно в  $H$ , воспользуемся полярным представлением оператора  $A$ :

$$A = Q\bar{A}, \quad (2)$$

где  $Q$  – унитарный оператор, а  $\bar{A} = \sqrt{A^*A}$ .

Таким образом, используя равенство (2), уравнение (1) можно заменить эквивалентным

$$\bar{A}u = g, \quad (3)$$

где  $g = Q^*f$ , а  $Q^*$  – унитарный оператор, сопряженный с  $Q$ .

Класс операторов  $\mathcal{A}$  определим следующим образом:

$$\mathcal{A} = \left\{ \bar{A} : \bar{A} \in B[H], \bar{A} \geq 0, \bar{A}^* = \bar{A} \text{ и } A_h - \bar{A} = \varphi(A_h), \varphi \in \Phi \right\}, \quad (4)$$

где  $\Phi$  – множество кусочно-непрерывных на отрезке  $[0, \|A_h\|]$  функций,  $A_h \in B[H]$ ,  $A_h^* = A_h$  и  $A_h > 0$ .

Оператор  $B \in B[H]$  определим формулой  $B = G_h(A_h)$ , где  $G_h \in C^1[0, \|A_h\|]$  и для любого

<sup>1</sup> Бредихина Анна Борисовна – ассистент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.  
e-mail: bredihina@prima.susu.ac.ru

$\sigma \in (0, \|A_h\|)$   $G_h' > 0$ , а  $G_h(0) = 0$ .

Обозначим через  $g_0 = Q^* f_0$ , а  $g_\delta = Q^* f_\delta$ .

**Определение 1.** Семейство операторов  $\{T_{\delta h} : 0 < \delta \leq \delta_0, 0 < h \leq h_0\}$ , отображающих множество  $\mathcal{A} \times H$  в  $H$ , будем называть **методом приближенного решения** уравнения (3) на множестве  $M_r \times \mathcal{A}$ , если для любых  $\delta \in (0, \delta_0)$  и  $h \in (0, h_0)$ , и для любого  $A_h \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$ ,  $T_{\delta h}[A_h; \cdot] \in B[H]$  и  $T_{\delta h}[A_h; g_\delta] \rightarrow u_0$  при  $\delta, h \rightarrow 0$  равномерно на множестве  $M_r$  при условии, что  $\bar{A} \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$ ,  $\|A_h - \bar{A}\| \leq h$  и  $\|g_\delta - \bar{A}u\| \leq \delta$ .

Введем количественную характеристику точности этого метода при фиксированных  $A_h \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$  и  $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta_{\delta h}[T_{\delta h}] = \sup_{u, \bar{A}, g_\delta} \{\|u - T_{\delta h}[A_h; g_\delta]\| : u \in M_r, \bar{A} \in \mathcal{A}, \|A_h - \bar{A}\| \leq h, \|g_\delta - \bar{A}u\| \leq \delta\}, \quad (5)$$

и величину

$$\Delta_{\delta h}^{opt} = \inf \{\Delta_{\delta h}[P] : P \in B[H \times \{A_h\}, H]\}, \quad (6)$$

где  $B[H \times \{A_h\}, H]$  – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство  $H \times \{A_h\}$  в  $H$ , а

$$\Delta_{\delta h}[P] = \sup_{u, \bar{A}, g_\delta} \{\|u - P[A_h; g_\delta]\| : u \in M_r, \bar{A} \in \mathcal{A}, \|A_h - \bar{A}\| \leq h, \|g_\delta - \bar{A}u\| \leq \delta\}.$$

**Определение 2.** Метод  $\{T_{\delta h}^{opt} : 0 < \delta \leq \delta_0, 0 < h \leq h_0\}$  будем называть **оптимальным** на классе  $M_r \times \mathcal{A}$ , если для любых  $\delta \in (0, \delta_0]$  и  $h \in (0, h_0]$

$$\Delta_{\delta h}[T_{\delta h}^{opt}] = \Delta_{\delta h}^{opt}.$$

### 3. Оценка снизу для величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$

Рассмотрим уравнение, связывающее параметры  $\sigma, h$  и  $\delta$ ,

$$rG_h(\sigma)\sigma = rG_h(\sigma)h + \delta. \quad (7)$$

Из свойств функции  $G_h(\sigma)$  следует, что при выполнении условия

$$\|A_h\| > h + \frac{\delta}{rG_h(\|A_h\|)} \quad (8)$$

уравнение (7) имеет единственное решение  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\delta, h)$ .

**Теорема 1.** Если уравнение (7) имеет решение  $\bar{\sigma}(\delta, h)$ , то справедлива следующая оценка:

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \geq rG_h(\bar{\sigma}(\delta, h)).$$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon$  – достаточно маленькое положительное число. Тогда наряду с уравнением (7) рассмотрим уравнение

$$rG_h(\sigma)\sigma = h(1 - \varepsilon)[rG_h(\sigma) - \varepsilon] + \delta. \quad (9)$$

Из равенства (9) следует, что при достаточно малых значениях  $\delta$  и  $h$ , которые описываются условием аналогичным условию (8), уравнение (9) имеет единственное решение  $\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)$ .

Из непрерывности функции  $G_h(\sigma)$  следует, что

$$\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h) \rightarrow \bar{\sigma}(\delta, h) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Теперь, выбрав натуральное число  $n_0$  таким образом, чтобы

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

и

$$rG_h(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)) - rG_h\left(\frac{n_0 - 1}{n_0} \bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)\right) < \varepsilon, \quad (11)$$

рассмотрим подпространство  $H_0$ , определяемое формулой

$$H_0 = E_{\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)} H - E_{\frac{n_0-1}{n_0} \bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)} H, \quad (12)$$

где  $\{E_\sigma : 0 \leq \sigma \leq \|A_h\|\}$  – спектральное разложение единицы, порожденное оператором  $A_h$ .

Построим оператор  $\bar{A}_0$  следующим образом:

$$(A_h - \bar{A}_0)u = \begin{cases} h \frac{A_h u}{\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)}; & u \in H_0, \\ 0; & u \in H_0^\perp, \end{cases} \quad (13)$$

где  $H_0^\perp$  – ортогональное дополнение подпространства  $H_0$ .

Таким образом, из (12) и (13) следует, что

$$A_h - \bar{A}_0 = \varphi(A_h), \quad (14)$$

где  $\varphi \in \Phi$ .

Пусть  $v_0 \in H_0$  и  $\|v_0\| = r$ ,

$$\|Bv_0\| > rG_h(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)) - \varepsilon, \quad (15)$$

$$g_\delta = 0. \quad (16)$$

Тогда из (11), (12) и (15) получаем

$$rG_h(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)) - \varepsilon < \|u_0\| \leq rG_h(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)), \quad (17)$$

а из (12), (13), (17)

$$\|(A_h - \bar{A}_0)Bv_0\| \geq h \frac{n_0-1}{n_0} [rG_h(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)) - \varepsilon]. \quad (18)$$

Из (16)–(18) следует, что

$$\|\bar{A}_0 u_0 - g_\delta\| \leq \delta. \quad (19)$$

Таким образом, из (16) для любого  $P \in B[H]$

$$Pg_\delta = 0. \quad (20)$$

Из (6) и (16)–(20) следует, что

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \geq rG_h(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)) - \varepsilon, \quad (21)$$

а из произвольности  $\varepsilon$ , (10) и (21) получаем

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \geq rG_h(\bar{\sigma}(\delta, h)). \quad (22)$$

Тем самым теорема доказана.

#### 4. Оценка сверху для величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$

В качестве регуляризующего семейства операторов для уравнения (3) рассмотрим семейство

$$T_\alpha^h = B[A_h B + \alpha E]^{-1}, \quad \alpha \in (0, \|A_h\|]. \quad (23)$$

За приближенное решение  $u_{\delta h}^\alpha$  уравнения (3) примем элемент, определяемый формулой

$$u_{\delta h}^\alpha = T_\alpha^h g_\delta. \quad (24)$$

**Лемма 1.** Для любого  $\alpha > 0$  оператор  $T_\alpha^h$ , определяемый формулой (23), ограничен и

$$\|T_\alpha^h\| \leq \max_{0 \leq \sigma \leq \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}. \quad (25)$$

**Доказательство.** Так как  $\|T_\alpha^h\| = \sup\{\|T_\alpha^h g\| : g \in H, \|g\| \leq 1\}$ , тогда

$$\|T_\alpha^h g\|^2 = \sup_{\|g\| \leq 1} (T_\alpha^h g, T_\alpha^h g) = \sup_{\|g\| \leq 1} \left( (T_\alpha^h)^2 g, g \right) = \sup_{\|g\| \leq 1} (B^2 [A_h B + \alpha E]^{-2} g, g).$$

Пусть  $\{E_\sigma : 0 \leq \sigma \leq \|A_h\|\}$  – спектральное разложение единицы, порожденное оператором  $A_h$ , тогда

$$\begin{aligned} \|T_\alpha^h g\|^2 &= \sup_{\|g\| \leq 1} \left\{ \int_0^{\|A_h\|} \frac{G_h^2(\sigma)}{[\sigma G_h(\sigma) + \alpha]^2} d(E_\sigma g, g) \right\} \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq \sigma \leq \|A_h\|} \frac{G_h^2(\sigma)}{[\sigma G_h(\sigma) + \alpha]^2} \sup_{\|g\| \leq 1} \int_0^{\|A_h\|} d(E_\sigma g, g) = \sup_{0 \leq \sigma \leq \|A_h\|} \frac{G_h^2(\sigma)}{[\sigma G_h(\sigma) + \alpha]^2}. \end{aligned}$$

Так как функция  $\frac{G_h^2(\sigma)}{[\sigma G_h(\sigma) + \alpha]^2}$  непрерывна на отрезке  $[0, \|A_h\|]$ , тогда найдется  $\bar{\sigma} \in [0, \|A_h\|]$  такое, что  $\frac{G_h^2(\bar{\sigma})}{[\bar{\sigma} G_h(\bar{\sigma}) + \alpha]^2} = \sup_{\sigma \in [0, \|A_h\|]} \frac{G_h^2(\sigma)}{[\sigma G_h(\sigma) + \alpha]^2}$ . Тем самым лемма доказана.

**Лемма 2.** Для любых  $\alpha$  и  $r > 0$  справедливо соотношение

$$\sup_{\|v\| \leq r} \|T_\alpha^h A_h Bv - Bv\| \leq r\alpha \max_{0 \leq \sigma \leq \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}.$$

**Доказательство.**

$$T_\alpha^h A_h Bv - Bv = B[A_h B + \alpha E]^{-1} A_h Bv - Bv = B[A_h B + \alpha E]^{-1} A_h B - E v = -\alpha B[A_h B + \alpha E]^{-1} v.$$

Тогда  $\|T_\alpha^h A_h Bv - Bv\| = \alpha \|B[A_h B + \alpha E]^{-1} v\|$ . Если  $v \neq 0$ , то

$$\begin{aligned} \|T_\alpha^h A_h Bv - Bv\| &= \alpha \|v\| \left\| B[A_h B + \alpha E]^{-1} \frac{v}{\|v\|} \right\|. \text{ Так как } \sup_{\|v\| \leq r} \|T_\alpha^h A_h Bv - Bv\| = \sup_{0 < \|v\| \leq r} \|T_\alpha^h A_h Bv - Bv\|, \text{ тогда} \\ \sup_{\|v\| \leq r} \|T_\alpha^h A_h Bv - Bv\| &= r\alpha \sup_{\|w\| \leq 1} \|B[A_h B + \alpha E]^{-1} w\| = r\alpha \|T_\alpha^h\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда из леммы 1 и (26) следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь оценку уклонения  $\Delta(T_\alpha^h)$  приближенного решения  $u_{\delta h}^\alpha$  уравнения (3) от точного решения  $u_0$  на классе  $M_r$ :

$$\Delta(T_\alpha^h) = \sup_{u_0, A, g_\delta} \left\{ \|u_{\delta h}^\alpha - u_0\| : u_0 \in M_r, \bar{A} \in \mathcal{A}, \|\bar{A}u_0 - g_\delta\| \leq \delta, \|\bar{A} - A_h\| \leq h \right\}. \quad (27)$$

Введем обозначения:

$$\bar{\Delta}_1(\alpha) = \sup_{u_0} \left\{ \|T_\alpha^h A_h u_0 - u_0\| : u_0 \in M_r \right\}, \quad (28)$$

$$\bar{\Delta}_2(\alpha, h) = \sup_{u_0, A} \left\{ \|T_\alpha^h A_h u_0 - T_\alpha^h \bar{A} u_0\| : u_0 \in M_r, \|\bar{A} - A_h\| \leq h \right\}, \quad (29)$$

$$\bar{\Delta}_3(\alpha, \delta) = \sup_{u_0, A, g_\delta} \left\{ \|T_\alpha^h \bar{A} u_0 - T_\alpha^h g_\delta\| : u_0 \in M_r, \|g_\delta - g_0\| \leq \delta \right\}. \quad (30)$$

Тогда имеет место очевидное неравенство

$$\Delta(T_\alpha^h) \leq \bar{\Delta}_1(\alpha) + \bar{\Delta}_2(\alpha, h) + \bar{\Delta}_3(\alpha, \delta).$$

Рассмотрим оценку  $\bar{\Delta}_1(\alpha)$ . Так как  $u_0 = Bv_0$  и  $\|v_0\| \leq r$ , тогда согласно лемме 2

$$\|T_\alpha^h A_h u_0 - u_0\| = \|T_\alpha^h A_h Bv_0 - Bv_0\| \leq r \|B[A_h B + \alpha E]^{-1} A_h B - B\| = r\alpha \|T_\alpha^h\|.$$

Таким образом, для оценки  $\bar{\Delta}_1(\alpha)$ , определенной формулой (28), справедливо равенство

$$\bar{\Delta}_1(\alpha) = r\alpha \|T_\alpha^h\|. \quad (31)$$

А из того, что

$$\|T_\alpha^h A_h u_0 - T_\alpha^h \bar{A} u_0\| = \|T_\alpha^h (A_h - \bar{A}) u_0\| \leq h \|T_\alpha^h\| \cdot \|Bv_0\|,$$

а  $B = G_h(A_h)$ , следует

$$\bar{\Delta}_2(\alpha, h) = rhG_h(\alpha) \cdot \|T_\alpha^h\|. \quad (32)$$

И, наконец,

$$\bar{\Delta}_3(\alpha, \delta) = \delta \|T_\alpha^h\|, \quad (33)$$

так как  $\|T_\alpha^h \bar{A}u_0 - T_\alpha^h g_\delta\| = \|T_\alpha^h(\bar{A}u_0 - g_\delta)\| \leq \delta \|T_\alpha^h\|$ .

Тогда, учитывая равенства (31)–(33), получаем

$$\Delta(T_\alpha^h) \leq (r\alpha + rhG_h(\alpha) + \delta) \|T_\alpha^h\|. \quad (34)$$

**Теорема 2.** Пусть значение параметра  $\bar{\sigma}$  является решением уравнения (7), а

$$\bar{\alpha}(\delta, h) = \frac{G_h^2(\bar{\sigma})}{G_h'(\bar{\sigma})} - hG_h(\bar{\sigma}). \quad (35)$$

Тогда

$$\Delta(T_{\bar{\alpha}}^h) \leq rG_h(\bar{\sigma}). \quad (36)$$

**Доказательство.** В силу лемм 1 и 2, а также учитывая неравенство (34), получаем, что

$$\|u_{\delta h}^\alpha - u_0\| \leq (r\alpha + rhG_h(\alpha)h + \delta) \cdot \max_{0 < \sigma \leq \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}. \quad (37)$$

Рассмотрим функцию  $F(\sigma, \alpha) = (r\alpha + rhG_h(\alpha)h + \delta) \cdot \max_{0 < \sigma \leq \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}$ . Тогда при  $\sigma = \bar{\sigma}$

$$\frac{G_h(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}G_h(\bar{\sigma}) + \bar{\alpha}(\alpha, h)} = \max \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \bar{\alpha}(\alpha, h)}, \quad F(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) = rG_h(\bar{\sigma}).$$

А из (37) следует, что

$$\|u_{\delta h}^\alpha - u_0\| \leq rG_h(\bar{\sigma}). \quad (38)$$

Тем самым теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 следует, что  $\Delta(T_{\bar{\alpha}}^h) = rG_h(\bar{\sigma})$ . Таким образом, метод М.М. Лаврентьева является оптимальным и в случае приближенно заданного оператора.

## Литература

1. Страхов, В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве / В.Н. Страхов // Диф. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 8. – С. 1490–1495.
2. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981. – 156 с.

*Поступила в редакцию 21 марта 2011 г.*

## ABOUT OPTIMALITY OF THE M.M. LAVRENTIEV METHOD WHEN SOLVING EQUATIONS WITH OPERATOR ERROR

**A.B. Bredikhina<sup>1</sup>**

In the article the author analyses the optimality of Lavrentiev method for equations with approximate defined operator for optimality. The accurate error estimate for the solution of the method was obtained.

*Keywords: operator equation, optimal method, accuracy appraisal.*

## References

1. Strakhov V.N. *Dif. uravneniya*. 1970. Vol. 6, no. 8. pp. 1490–1495. (in Russ.).
2. Tanana V.P. *Metody resheniya operatornykh uravnenij* (Methods of solution of operator equations). Moscow, Nauka, 1981. 156 p. (in Russ.).

<sup>1</sup> Bredikhina Anna Borisovna is Assistant, Applied Mathematics Department, South Ural State University. e-mail: bredikhina@prima.susu.ac.ru

# ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ УСЛОВИИ КУСОЧНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ<sup>1</sup>

Т.С. Камалтдинова<sup>2</sup>

Нелинейным методом проекционной регуляризации, приведенном в [1], получено приближенное решение обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Получены оценки погрешности приближенного решения в классе кусочно-гладких функций. Эти оценки гораздо лучше, чем известные ранее оценки оптимальных и оптимальных по порядку методов решения данной задачи.

*Ключевые слова:* обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in (0, T], T > 1, \quad (1)$$

где  $u(x,t) \in C\{(-\infty, \infty) \times [0, T]\} \cap C^{2,1}\{(-\infty, \infty) \times (0, T)\}$ ,  $\forall t \in (0, T]$   $u(x,t)$ ,  $u''_{xx}(x,t) \in L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$  и существует функция  $\chi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$  такая, что

$$|u(x,t)| + \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right| \leq \chi(x); x \in (-\infty, \infty).$$

Пусть нам дано распределение температуры  $f(x) \in L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$  в момент времени  $T$

$$f(x) = u(x, T); \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

а начальное распределение

$$u_0(x) = u(x, 0) \quad (3)$$

требуется определить.

Предположим, что при  $f(x) = f_0(x)$  существует  $u_0(x)$  такое, что производная  $u'_0(x)$  является четной, кусочно-непрерывной функцией и  $u_0(x), u'_0(x) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$ , а также решение задачи (1), (3) при нем удовлетворяет условию  $u(x, T) = f_0(x)$ , но точное значение  $f_0(x)$  нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение  $f_\delta(x) \in L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$\|f_\delta(x) - f_0(x)\|_{L_2} \leq \delta. \quad (4)$$

Требуется, используя исходные данные  $(f_\delta, \delta)$  задачи (1), (2), (4), определить приближенное решение  $u_\delta(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  и оценить величину  $\|u_\delta(x) - u_0(x)\|_{L_2}$ .

Используя для решения задачи (1), (2), (4) преобразование Фурье  $F$ , получим

$$\hat{u}'_t(\lambda, t) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t); \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad t \in (0, T] \quad (5)$$

и

$$\hat{u}(\lambda, T) = \hat{f}(\lambda); \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (6)$$

где  $\hat{u}(\lambda, t) = F[u(x, t)]$ , а  $\hat{f}(\lambda) = F[f(x)]$ .

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96000\_р\_урал\_а

<sup>2</sup> Камалтдинова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru

Решая задачу (5), (6), сведем ее к операторному уравнению

$$A\hat{u}(\lambda) = e^{-\lambda^2 T} \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda); \quad \hat{u}(\lambda), \hat{f}(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty). \quad (7)$$

Из условий, которым удовлетворяет функция  $u_0(x)$ , будет следовать существование числа  $a > 0$  такого, что для любого достаточно малого числа  $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 + |\lambda|^{3(1-\varepsilon)}] |\hat{u}_0(\lambda)|^2 d\lambda \leq \frac{a}{\varepsilon}, \quad (8)$$

а из (4) и теоремы Планшереля [3, с. 411], что

$$\|A\hat{u}_0(\lambda) - \hat{f}_\delta(\lambda)\| \leq \delta, \quad (9)$$

где  $\hat{u}_0(\lambda) = F[u_0(x)]$ , а  $\hat{f}_\delta(\lambda) = F[f_\delta(x)]$ .

Применяя к решению задачи (7)–(9) метод проекционной регуляризации [1], введем регуляризующее семейство операторов  $\{P_\alpha : \alpha > 0\}$ , определяемых формулой

$$P_\alpha \hat{f}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda^2 T} \hat{f}(\lambda); & |\lambda| \leq \alpha \\ 0; & |\lambda| > \alpha \end{cases}. \quad (10)$$

Таким образом, приближенное решение  $\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda)$  в уравнении (7) определим формулой

$$\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) = P_\alpha \hat{f}_\delta(\lambda), \quad (11)$$

а для выбора параметра регуляризации  $\alpha = \alpha(\hat{f}_\delta, \delta)$  в формуле (11) используем уравнение

$$\|A\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) - \hat{f}_\delta(\lambda)\|_{L_2}^2 = 16\delta^2. \quad (12)$$

Из (11) и (12) определим приближенное решение  $\hat{u}_\delta(\lambda)$  уравнения (7) формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda) = \hat{u}_\delta^{\alpha(\hat{f}_\delta, \delta)}(\lambda).$$

Из теоремы, доказанной в [1], и формул (7), (8), (9) следует оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G[\bar{\alpha}(\delta)], \quad (13)$$

в которой функция  $G_\varepsilon(\sigma)$ , следуя (7) и (8), определяется параметрически

$$\begin{cases} \sigma = e^{-\lambda^2 T} & \lambda \in (-\infty, \infty) \\ G_\varepsilon(\sigma) = [1 + |\lambda|^{3(1-\varepsilon)}]^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}. \quad (14)$$

а  $\bar{\alpha}(\delta)$  – уравнением

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\alpha) \alpha = \delta. \quad (15)$$

Так как оценка (13) выполняется при любом  $\varepsilon \in (0, 1]$ , то выберем значение  $\varepsilon(\delta)$ , минимизирующее эту оценку. Ввиду непрерывности функции  $7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon))$  по  $\varepsilon$  на полуотрезке  $(0, 1]$  и стремление ее к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$  следует существование  $\varepsilon(\delta) \in (0, 1]$  такого, что

$$7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}} G_{\varepsilon(\delta)}(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))) = \min_{\varepsilon \in (0, 1]} 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)). \quad (16)$$

Тогда из (13)–(16) для  $\hat{u}_\delta(\lambda)$  будет справедлива оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq 7 \sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}} G_{\varepsilon(\delta)} [\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))]. \tag{17}$$

Применяя к  $\hat{u}_\delta(\lambda)$  обратное преобразование Фурье  $F^{-1}$  и беря действительную часть, получим приближенное решение  $u_\delta(x) = \text{Re} [F^{-1}(\hat{u}_\delta(\lambda))]$  обратной задачи (1), (2), (4). Для этого решения, ввиду теоремы Планшереля [3, с. 411], будет справедлива оценка (17).

Для сравнения (17) с известными, оценим правую часть соотношения (17) в элементарных функциях.

Из (14) следует, что при достаточно малых значениях  $\sigma$  справедливо соотношение

$$G_\varepsilon(\sigma) \leq T^4 \ln^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\sigma}, \tag{18}$$

а из (18) и того, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{G(\sigma)}{T^4 \ln^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\sigma}} = 1,$$

следует, что при достаточно малых значениях  $\sigma$

$$T^4 \ln^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \sigma^2 < \sigma G_\varepsilon(\sigma). \tag{19}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \alpha^2 = \delta. \tag{20}$$

Решение  $\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)$  уравнения (20) определяется формулой

$$\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon) = T^{\frac{3}{8}(1-\varepsilon)} \left[ \delta \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Из (15), (19) и (20) следует, что

$$\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon) \leq \hat{\alpha}(\delta, \varepsilon). \tag{22}$$

Таким образом, из (13), (18) и (22) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq 7 \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)}. \tag{23}$$

Из (21) и (23) окончательно получим

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq 7 \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} (2T)^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \left[ T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon\delta}} \right]. \tag{24}$$

В оценке (24) значение  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  определим формулой

$$\varepsilon(\delta) = \frac{2a}{\ln \ln \frac{1}{\delta}}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq \frac{7}{2} \sqrt{2} (2T)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left[ \frac{\sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}}}{\sqrt{2\delta}} \right]. \tag{26}$$

Если  $\ln \ln \frac{1}{\delta_0} \geq \sqrt{2}$ , то при  $\delta \in (0, \delta_0]$  из (26) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq \frac{7}{2} \sqrt{2} (2T)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (27)$$

Так как

$$\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left(\frac{1}{\delta}\right) = \ln^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot \ln^{\frac{3a}{2 \ln \ln \frac{1}{\delta}}} \left(\frac{1}{\delta}\right),$$

а

$$\ln \left[ \ln^{\frac{3a}{2 \ln \ln \frac{1}{\delta}}} \left(\frac{1}{\delta}\right) \right] = \frac{3a}{2 \ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln \ln \frac{1}{\delta} = \frac{3a}{2},$$

то из (27) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq \frac{7}{2} \sqrt{2} e^{\frac{3a}{2}} (2T)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\delta}\right) = 7 \sqrt{2} e^{\frac{3a}{2}} T^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \cdot \ln^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\delta}.$$

### Литература

1. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2006. – Т. 9, №. 4. – С. 353–368.
2. Колесникова, Н.Ю. О проблеме потери точности при преобразовании информации / Н.Ю. Колесникова, Т.Н. Рудакова, А.В. Танана // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 11. – № 2(178). – С. 56–62.
3. Колмогоров, А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1972. – 496 с.

Поступила в редакцию 23 июня 2010 г.

## ABOUT ERROR ESTIMATE OF NONLINEAR PROJECTION REGULARIZATION METHOD UNDER THE CONDITION OF PEECE-WISE SMOOTHNESS OF SOLUTION

*T.S. Kamaltdinova*<sup>1</sup>

An approximate solution for the inverse Cauchy problem for the heat conduction equation is obtained by means of nonlinear projection regularization method. Error estimates for the approximate solution are obtained in the class of piecewise smooth functions. These estimates are better then the known estimates for the optimal and the order- optimal methods of solving the problem.

*Keywords:* reverse problem, regularization, error estimate, ill-defined problem, direct Fourier transform.

### References

1. Tanana V.P., Yaparova N.M. *Sib. zhurn. vychisl. matem.* 2006. Vol. 9, no. 4. pp. 353–368. (in Russ.).
2. Kolesnikova N.Yu., Rudakova T.N., Tanana A.V. *Vestnik YuUrGU. Seriiia «Komp'iuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika».* 2010. Vol. 11, no. 2(178). pp. 56–62. (in Russ.).
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza (Elements of Function Theory and Functional Analysis).* Moscow, Nauka, 1972. 496 p. (in Russ.).

<sup>1</sup> Kamaltdinova Tatyana Sergeevna is a Senior Lecturer, Numerical Mathematics Department, South Ural State University.  
e-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru

# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ II

**В.В. Карачик<sup>1</sup>**

Предлагается метод построения полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида.

*Ключевые слова:* полиномиальные решения, линейные дифференциальные уравнения в частных производных.

## 1. Введение

Предлагаемая вашему вниманию статья является продолжением результатов автора, изложенных в работе [1] и посвящена построению полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида. Изучению полиномиальных решений конкретных уравнений в частных производных посвящено много работ. В основном это исследования полигармонических [2, 3], поливолновых [4], тепловых [5] и других полиномов [6]. В [7] исследуются базисные системы полиномиальных решений множества различных уравнений, однако при построении решений существенно используется структура дифференциального оператора уравнения. В [8] сделаны первые попытки общего подхода нахождения полиномиальных решений. В [9] построены полиномиальные решения неоднородного полигармонического уравнения и уравнения Гельмгольца. В настоящей работе не имеет значения ни структура оператора уравнения, ни тип дифференциального уравнения. Используя результаты, полученные в работе автора [1] и понятие  $f$ -нормированной системы функций [10], приводится метод построения полиномиальных решений дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами общего вида (2).

## 2. Полные системы полиномиальных решений

Пусть матрица  $L(x)$  в системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$L(D)u(x) = f(x) \quad (1)$$

квадратная и невырожденная. Выберем в теореме 4 из [1] в качестве векторов  $\vartheta^{(i)}(x)$  столбцы присоединенной (взаимной) к матрице  $L(x)$  матрицы  $L^v(x)$ . В этом случае  $\forall i, R^{(i)}(x) = \det L(x)$  и значит для того, чтобы, воспользовавшись теоремой 4 из [1], записать произвольное полиномиальное решение системы (1), мы должны найти полиномы  $P^{(i)}(x)$ , которые удовлетворяют уравнению  $\det L(D)P^{(i)}(x) = f_i(x)$ . Таким образом, решение системы (1) с квадратной, невырожденной матрицей, сводится к отысканию полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений вида

$$L(D)u \equiv \sum_{k \leq |\alpha| \leq q} a_\alpha D^\alpha u(x) = f(x), \quad (2)$$

где  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{P}$  – пространство полиномов и  $x \in \mathbb{R}^n$ . Следует отметить, что уравнение (2) является частным случаем системы (1) при  $s = t = 1$  и, следовательно, к нему применимы все результаты, полученные в [1]. Такой подход к построению полиномиальных решений системы уравнений (1) при  $s = t$  является универсальным, но увеличивает порядок дифференциального уравнения из (1), делая его равным степени полинома  $\det L(x)$ .

Исследуем способы построения полиномиальных решений уравнения (2). Для этой цели введем следующее необходимое понятие.

<sup>1</sup> Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и динамических систем, факультет вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: karachik@susu.ru

Пусть  $L_1, L_2$  – линейные операторы, действующие на функции  $f(x)$ , принадлежащие множеству  $X$  такому, что  $L_k X \subset X$  ( $k=1,2$ ) и определенные в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.** Упорядоченную систему функций  $\{f_k(x): k \in \mathbb{N}_0, f_k \in X\}$  назовем  $f$ -нормированной относительно  $(L_1, L_2)$  в области  $\Omega$  с основанием  $f_0(x)$ , если всюду в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x); \quad L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega.$$

Основное свойство  $f$ -нормированной системы функций относительно  $(L_1, L_2)$  в области  $\Omega$  состоит в том, что ряд  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  формально удовлетворяет в  $\Omega$  уравнению  $L_1 u(x) - L_2 u(x) = f(x)$ .

Важным частным случаем введенного понятия является  $L_2 = I$ , где  $I$  – единичный оператор. Тогда  $f$ -нормированную относительно  $(L, I)$  систему функций  $\{f_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$  будем называть  $f$ -нормированной относительно  $L$ . В этом случае в  $\Omega$  имеют место следующие равенства [10]:

$$L f_0(x) = f(x); \quad L f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega. \quad (*)$$

Более того, если  $\forall k, W L f_k(x) = L W f_k(x)$  в  $\Omega$ , тогда нетрудно установить, что система функций  $\{W^k f_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$  будет  $f$ -нормированной относительно  $(L, W)$  в  $\Omega$ .

**Пример 1.** Пусть  $L(D)$  линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$L(D) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где  $a_k(x)$  – аналитические в  $\Omega$  функции,  $\{\varphi_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$  – некоторая  $f$ -нормированная относительно  $L(D)$  в  $\Omega$  система функций и

$$W_f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_k(x) L^k(D).$$

Тогда, существует такая область  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ , что для любой аналитической в  $\Omega$  функции  $F(x)$  справедливы равенства:

$$L(D)W_1(D)F(x) = F(x), \quad L(D)W_0(D)F(x) = 0$$

для  $x \in \tilde{\Omega}$ . Оператор  $W_f(D)$  является обобщением известных рядов Ли.

Это утверждение сразу следует из соответствующих результатов по обобщенным рядам Ли [11], если заметить, что при  $\varphi_k(x) = \varphi^{k!}(x) \equiv \varphi^k(x)/k!$ , где  $L(D)\varphi(x) = 1$ , система функций  $\{\varphi_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$  будет 1-нормированной относительно  $L(D)$  в  $\Omega$ .

В дальнейшем будем предполагать, что  $X = \mathcal{P}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , и операторы  $L_j$  ( $j=1,2$ ) – дифференциальные операторы в частных произвольных с постоянными коэффициентами. Относительно существования  $f$ -нормированных относительно  $L_j(D)$  систем полиномов, в силу теоремы 1 из [1], можем утверждать, что они всегда существуют.

**Пример 2.** Пусть  $L(D) = D^\beta$ , где  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ . Уравнение (2) с таким оператором  $L(D)$  – простейшее из всех возможных. В соответствии с равенствами

$$D^\alpha x^{\beta, !} = \begin{cases} x^{\beta-\alpha, !}, & \alpha \leq \beta, \\ 0, & \beta \not\leq \alpha \end{cases}$$

система  $\{x^{k\beta+\alpha, !}: k \in \mathbb{N}_0\}$ , в которой  $\beta \not\leq \alpha$  является 0-нормированной относительно оператора  $D^\beta$  системой полиномов, имеющей основание  $x^{\alpha, !}$ :  $D^\beta x^{k\beta+\alpha, !} = x^{(k-1)\beta+\alpha, !}$  и  $D^\beta x^{\alpha, !} = 0$ . Кроме

того, система полиномов  $\{x^{\alpha_i} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \beta \not\leq \alpha\}$  составляет базис в  $\ker \mathcal{L}(D) \cap \mathcal{P}$ , поскольку если  $D^\beta x^\alpha = 0$ , то  $\beta \not\leq \alpha$ .

Вернемся к уравнению (2). Для построения его полиномиальных решений воспользуемся основным свойством  $f$ -нормированных систем функций, которое в данном случае выглядит так: предположим, что оператор  $L(D)$  как то разбит на сумму операторов  $L_1(D)$  и  $L_2(D)$  и  $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}_0\}$  –  $f$ -нормированная относительно оператора  $L_1(D)$  система полиномов, тогда формальное решение уравнения (2) может быть записано в форме

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_2^k(D) f_k(x). \tag{3}$$

Основная проблема, которую необходимо решить в дальнейшем, состоит в подборе операторов  $L_1(D)$  и  $L_2(D)$  таким образом, чтобы ряд из (3) был не формальным решением уравнения (2), а его полиномиальным решением и по возможности наиболее общим.

Необходимы некоторые приготовления. Рассмотрим  $\Gamma_0 = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : a_\alpha \neq 0, |\alpha| = k\}$  – множество индексов оператора  $L_k(D)$  младших производных из (2). Обозначим  $T_j = \Gamma_{j-1} \setminus \Gamma_j$  для  $j \in I_{n-1}$  и  $T_n = \Gamma_{n-1}$ , где множество  $\Gamma_j$  определяется рекуррентно по формуле  $\Gamma_j = \min_j \Gamma_{j-1}$ , а операция  $\min_j$  задана над множествами  $B \subset \mathbb{N}_0^n$  следующим образом:

$\min_j B = \{\beta \in B : \forall \alpha \in B, \beta_j \leq \alpha_j\}$ . Выберем последовательность натуральных чисел  $\{k_1, \dots, k_{s_0}\}$  так,

чтобы множества  $T_{k_i}$  были не пусты и  $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{s_0} T_{k_i}$ . Очевидно, что  $i \neq j \Rightarrow T_{k_i} \cap T_{k_j} = \emptyset$ . Из определения последовательности  $\{k_i\}$  видно, что  $k_{s_0} = n$ . Определим символ  $MinL_k$  как вектор  $\beta$  – единственный элемент множества  $T_n$ . Тогда, каждому множеству  $T_{k_i}$  ( $0 < i < s_0$ ) соответствует  $\beta_{k_i}$ -я компонента вектора  $\beta$  так, что  $\Gamma_{k_{i-1}} = \dots = \Gamma_{k_i-1}$  при условии, что  $k_0 = 0$ .

**Пример 3.** Пусть

$$L(D) = \frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3 \partial x_4} + \frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_3^2 \partial x_4} + \frac{\partial^6}{\partial x_4^6},$$

тогда

$$\Gamma_0 = \{(1, 2, 1, 1); (1, 2, 2, 0); (2, 0, 2, 1)\}, \Gamma_1 = \Gamma_2 = \{(1, 2, 1, 1); (1, 2, 2, 0)\}, \Gamma_3 = \{(1, 2, 1, 1)\}.$$

Поэтому  $T_1 = \Gamma_0 \setminus \Gamma_1 = \{(2, 0, 2, 1)\}$ ,  $T_2 = \Gamma_1 \setminus \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $T_3 = \Gamma_2 \setminus \Gamma_3 = \{(1, 2, 2, 0)\}$ ,  $T_4 = \Gamma_3 = \{(1, 2, 1, 1)\}$ . Поэтому в нашем случае  $\beta = (1, 2, 1, 1)$ ,  $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 4$  и  $\Gamma_0 = T_1 \cup T_3 \cup T_4$ , а, следовательно,  $s_0 = 3$ .

Пусть  $p \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим уравнение

$$K^p(D)u(x) \equiv (K_1(D) + K_2(D))^p u(x) = 0,$$

в котором  $K_1(x)$  и  $K_2(x)$  однородные полиномы степени  $k$  и кроме этого полином  $K_1(x)$  по отношению к  $x_l$  имеет минимальную степень большую чем  $\beta_l$ , а полином  $K_2(x)$  – однороден по  $x_l$  степени  $\beta_l$ . Определим множества полиномов  $\Lambda_{m,r}^s$  следующим рекуррентным соотношением:

$$\Lambda_{m,r}^s = (\ker K^r(D) \cap \mathcal{P}_s) \setminus \Lambda_{m,r-1}^s, r > 1; \quad \Lambda_{m,1}^s = \ker K(D) \cap \mathcal{P}_s,$$

в котором  $s = m + k(p-1)$ , а  $\mathcal{P}_s$  – множество однородных полиномов степени  $s$ .

**Лемма 1.** Всякий полином  $v_p^s(x) \in \Lambda_{m,p}^s$  может быть записан в форме

$$\vartheta_p(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+p-1}{p-1} K_1^i(D) u_{i+p-1}(x), \quad (4)$$

где  $\delta(m) = m + (p-1)\beta_1$ , а  $\{u_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  – некоторая 0-нормированная система полиномов относительно оператора  $K_2(D)$ , удовлетворяющая условию  $u_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$ .

*Доказательство.* Во-первых, необходимо отметить, что по теореме 1 из [1] для любого основания  $u_0(x) \in \ker K_2(D) \cap \mathcal{P}_m$  существует 0-нормированная относительно  $K_2(D)$  система полиномов такая, что  $u_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$ . Определим полином  $S_n^{(p)}(x)$  следующим равенством:

$$S_n^{(p)}(x) = \binom{n+p-1}{p-1} K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x).$$

Пусть полиномы  $\vartheta_r(x)$ ,  $1 \leq r \leq p$  определяются из равенства

$$\vartheta_r(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-1}(x). \quad (5)$$

Ясно, что  $\vartheta_p(x)$ , найденный по этой формуле, совпадает с (4). Тогда для  $r > 1$  можно записать

$$\begin{aligned} K(D)\vartheta_r(x) &= (K_1(D) + K_2(D)) \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-1}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^{i+1}(D) u_{i+r-1}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{\delta(m)+1} (-1)^{i-1} \binom{i+r-2}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) = \\ &= (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \left( \binom{i+r-1}{r-1} - \binom{i+r-2}{r-1} \right) K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) = \\ &= (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-2}{r-2} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) = (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(r)}(x) + \vartheta_{r-1}(x). \end{aligned}$$

Аналогично, при  $r = 1$  можно найти

$$\begin{aligned} K(D)\vartheta_1(x) &= (K_1(D) + K_2(D)) \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^i(D) u_i(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^{i+1}(D) u_i(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^i(D) u_{i-1}(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^{i+1}(D) u_i(x) - \sum_{i=0}^{\delta(m)-1} (-1)^i K_1^{i+1}(D) u_i(x) = \\ &= (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее следует заметить, что для  $r \leq p$  верны рассуждения

$$\begin{aligned} S_n^{(p)}(x) = 0 &\Rightarrow K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= K_2^{p-r}(D) K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x) = K_1^{n+1}(D) u_{n+r-1}(x) \Rightarrow S_n^{(r)}(x) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому для выполнения условий

$$K(D)\vartheta_r(x) = \vartheta_{r-1}(x), \quad 2 \leq r \leq p; \quad K(D)\vartheta_1(x) = 0,$$

необходимо, чтобы  $S_{\delta(m)}^{(p)}(x) = 0$ . Поскольку степень полинома  $u_{n+p-1}(x)$  по переменной  $x_l$  равна  $m + (n+p-1)\beta_1$ , а оператор  $K_1^{n+1}(D)$  снижает степень полинома по переменной  $x_l$  не меньше чем на  $\beta_1 + 1$ , то степень полинома  $K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x)$  по переменной  $x_l$  не больше, чем  $m + (n+p-1)\beta_1 - n(\beta_1 + 1) = m + (p-1)\beta_1 - n$ . Если  $n$  выбрано так, что  $m + (p-1)\beta_1 \leq n$ , то  $S_n^{(p)}(x) = 0$ . Поскольку  $\delta(m) = m + (p-1)\beta_1$ , то  $S_{\delta(m)}^{(p)}(x) = 0$ . Кроме этого, общая степень полино-

ма  $\vartheta_p(x)$  равна  $m+k(p-1)$ . Далее, так как  $K^i(D)\vartheta_p(x) = \vartheta_{p-i}(x) \neq 0$  для  $i=0,1,\dots,p-1$  (первый член в сумме (5), через которую представляется полином  $\vartheta_{p-i}(x)$ ) обладает наибольшей по  $x_i$  степенью и равен  $u_{p-i-1} \neq 0$ ) и  $K^p(D)\vartheta_p(x) = 0$ , то справедливо включение  $\vartheta_p(x) \in \Lambda_{m,p}^s$ .

Убедимся, что линейная независимость полиномов  $u_0^{(1)}(x)$  и  $u_0^{(2)}(x)$  (это основания соответствующих 0-нормированных систем) приводит к линейной независимости полиномов  $u_{p-1}^{(1)}(x)$  и  $u_{p-1}^{(2)}(x)$ . Действительно, если полиномы  $u_{p-1}^{(1)}(x)$  и  $u_{p-1}^{(2)}(x)$  линейно зависимы, то  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha u_{p-1}^{(1)}(x) + \beta u_{p-1}^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow K_2^{p-1}(D)(\alpha u_{p-1}^{(1)}(x) + \beta u_{p-1}^{(2)}(x)) = 0 \Rightarrow \alpha u_0^{(1)}(x) + \beta u_0^{(2)}(x) = 0$ , т.е. полиномы  $u_0^{(1)}(x)$  и  $u_0^{(2)}(x)$  линейно зависимы. Противоречие. Значит,  $u_{p-1}^{(1)}(x)$  и  $u_{p-1}^{(2)}(x)$  линейно независимы. Из этого, в свою очередь, следует линейная независимость полиномов  $\vartheta_p^{(1)}(x)$  и  $\vartheta_p^{(2)}(x)$ , поскольку в сумме (4) только первые слагаемые  $u_{p-1}^{(1)}(x)$  и  $u_{p-1}^{(2)}(x)$  имеют старшую степень по переменной  $x_i$ , и они линейно независимы. Следовательно,

$$\dim \Lambda_{m,p}^s \geq \dim(\ker K_2(D) \cap \mathcal{P}_m). \tag{7}$$

Если обозначить

$$l_\lambda = \dim\left(\left(\ker K_2^\lambda(D) \setminus \ker K_2^{\lambda-1}(D)\right) \cap \mathcal{P}_s\right),$$

где  $s = m+k(p-1)$ , тогда, используя предложение 1 из [1], нетрудно получить

$$l_\lambda = \binom{s-k(\lambda-1)+n-1}{n-1} - \binom{s-k\lambda+n-1}{n-1}.$$

Ясно, что  $l_p \equiv \Lambda_{m,p}^s$ . Так как подстановка  $\lambda = p$  в предыдущее равенство дает

$$l_p = \binom{s-k(p-1)+n-1}{n-1} - \binom{s-kp+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{n-1} - \binom{m-k+n-1}{n-1} = \dim(\ker K_2(D) \cap \mathcal{P}_m),$$

то неравенство (7) превращается в строгое равенство. Поэтому, если выбрать в (4) вместо  $u_0(x)$  базисные полиномы из  $\ker K_2(D) \cap \mathcal{P}_m$ , то полиномы  $\vartheta_p(x)$  будут базисом в  $\Lambda_{m,p}^s$ . Чтобы завершить доказательство остается заметить, что почленная линейная комбинация двух 0-нормированных относительно одного и того же оператора систем полиномов будет также 0-нормированной системой полиномов относительно этого же оператора. Лемма доказана.  $\square$

**Предложение 1.** Пусть операторы  $K_1(D)$ ,  $K_2(D)$  и  $K(D)$  такие, как описаны в лемме 1. Тогда для любой 0-нормированной относительно оператора  $K(D)$  системы полиномов  $\{\vartheta_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$ , удовлетворяющей условию  $\vartheta_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$ , и натурального числа  $n$  существует 0-нормированная относительно оператора  $K_2(D)$  система полиномов  $\{u_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  такая, что

$$\vartheta_s(x) = \sum_{i=0}^{m+s\beta_1} (-1)^i \binom{i+s}{s} K_1^i(D) u_{i+s}(x) \tag{8}$$

для  $s=0,1,\dots,n$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\vartheta_n(x) \in \mathcal{P}_{m+kn}$  и  $\vartheta_n(x)$  – элемент множества  $\{\vartheta_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$ , то по лемме 1 найдется 0-нормированная относительно оператора  $K_2(D)$  система полиномов  $\{u_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  такая, что выполнено равенство (8) при  $s=n$ . Принимая во внимание, что по лемме 1 верны равенства  $K(D)\vartheta_s(x) = \vartheta_{s-1}(x)$  для  $s > 1$  и  $K(D)\vartheta_0(x) = 0$  завершаем доказательство.  $\square$

**Предложение 2.** Пусть  $K(D) = K_1(D) + K_2(D)$ . Если оператор  $K_1(D)$  не однороден и наименьшая степень производных, входящих в него, больше  $\sigma$  – порядка однородного оператора

$K_2(D)$ , то всякое полиномиальное степени  $m$  решение уравнения  $K(D)v(x) = 0$  может быть записано в виде

$$v(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^i K_1^i(D)u_i(x), \quad (9)$$

где  $\{u_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  – некоторая 0-нормированная относительно оператора  $K_2(D)$  система полиномов такая, что  $u_i(x) \in \mathcal{P}_{m+i\sigma}$ .

*Доказательство.* Заметим, что формула (9) совпадает с формулой (3), записанной для уравнения  $K(D)v(x) = 0$  ( $L_1 = K_2, L_2 = K_1$ ), если  $K_1^l(D)u_l(x) = 0$  при  $l > m$ . Последнее же очевидно выполняется и значит (9) задает решение уравнения  $K(D)v(x) = 0$ . Согласно предложению 1 из [1] имеем равенство  $\dim(\ker K(D) \cap U_m) = \dim(\ker K_2(D) \cap U_m)$ , где  $U_m$  – пространство полиномов степени  $m$  [1]. Поскольку линейная независимость полиномов  $u_0^{(1)}(x)$  и  $u_0^{(2)}(x)$  (основания соответствующих 0-нормированных систем) ведет к линейной независимости по старшему члену полиномов  $v^{(1)}(x)$  и  $v^{(2)}(x)$  из (3), то базис в  $\ker K_2(D) \cap U_m$  порождает по формуле (9) базис в  $\ker K(D) \cap U_m$ . Разложим по этому базису  $v(x)$  – произвольное полиномиальное степени  $m$  решение уравнения  $K(D)v(x) = 0$ . Имеем  $v(x) = \sum_j \alpha_j v^{(j)}(x)$ . Тогда, если обозначить  $u_i(x) = \sum_j \alpha_j u_i^{(j)}(x)$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_j \alpha_j v^{(j)}(x) = \sum_j \alpha_j \sum_{i=0}^m (-1)^i K_1^i(D)u_i^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^i K_1^i(D) \sum_j \alpha_j u_i^{(j)}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i K_1^i(D)u_i(x), \end{aligned}$$

причем  $K_2(D)u_0(x) = K_2(D) \sum_j \alpha_j u_0^{(j)}(x) = 0$  и

$$K_2(D)u_i(x) = K_2(D) \sum_j \alpha_j u_i^{(j)}(x) = \sum_j \alpha_j u_{i-1}^{(j)}(x) = u_{i-1}(x).$$

Искомая 0-нормированная система  $\{u_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  полиномов относительно оператора  $K_2(D)$  построена. Доказательство завершено.  $\square$

Рассмотрим дифференциальные операторы  $I_s(D)$  и  $J_i(D)$ , определяемые равенствами

$$I_s(D) = \sum_{i=s}^{s_0} J_i(D), \quad J_i(D) = \sum_{\alpha \in I_{k_i}} a_\alpha D^\alpha.$$

Пусть  $\{\vartheta_i^{(j)}(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  при  $j = 1, \dots, N_m$  набор 0-нормированных относительно оператора  $I_s(D)$  систем полиномов, удовлетворяющих условию  $\vartheta_i^{(j)}(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$  с основаниями  $\vartheta_0^{(j)}(x)$ , образующими при  $j = 1, \dots, N_m$  базис среди полиномиальных степени  $m$  решений уравнения  $I_s(D)v(x) = 0$ . Очевидно, что по теореме 1 из [1] такие системы всегда существуют.

Введем полиномы  $u_j(x)$ , определяемые из равенства

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(m)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i \vartheta_i^{(j)}(x), \quad (10)$$

где  $\alpha(m) = m + \delta_1(m) + \dots + \delta_{s-1}(m)$  и  $\delta_j(i)$  определяются рекуррентно:  $\delta_j(i) = m + \beta_{k_j}(i + \delta_1(i) + \dots + \delta_{j-1}(i))$  для  $j > 1$ , а  $\delta_1(i) = m + \beta_{k_1} i$ . Ясно, что  $\alpha(m) = \alpha(m)_{|m=1} m$ , поскольку  $\delta_1(m) = m + \beta_{k_1} m = (1 + \beta_{k_1})m = \delta_1(m)_{|m=1} m$  и по индукции  $\delta_j(m) = m + \beta_{k_j}(m + \delta_1(m) + \dots + \delta_{j-1}(m)) = \delta_j(m)_{|m=1} m$ .

**Теорема 1.** Максимальная система линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени  $m$  решений однородного уравнения (2) ( $f(x)=0$ ) может быть определена в виде  $\{u_j(x) : j=1, \dots, N_m\}$ , где  $u_j(x)$  находятся из (10).

*Доказательство.* Пусть  $J_0(D) = L(D) - L_k(D)$ . Разложим оператор  $L(D)$  в следующую сумму операторов:

$$L(D) = \sum_{i=0}^{s-1} J_i(D) + I_s(D).$$

Обозначим

$$K_1(D) = J_l(D), \quad K_2(D) = J_{l+1}(D) + \dots + J_{s-1}(D) + I_s(D),$$

где  $s > l \geq 1$  и  $s > 1$ . Заметим, что полиномы  $K_1(x)$  и  $K_2(x)$  удовлетворяют всем требованиям леммы 1 и поэтому мы вправе использовать предложение 1. Воспользовавшись равенством (8)  $s-1$  раз при  $l=1, \dots, s-1$  устанавливаем, что для произвольной 0-нормированной относительно оператора  $J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D) + I_s(D)$  системы полиномов  $\{w_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$ , удовлетворяющих условию  $w_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$  и натурального  $n$  найдется 0-нормированная относительно оператора  $I_s(D)$  система полиномов  $\{\vartheta_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  такая, что

$$w_i(x) = \sum_{i_1, \dots, i_{s-1}} (-1)^{|i|_{s-1}} \binom{|i|_1}{i_1} \dots \binom{|i|_{s-1}}{i_{s-1}} J_1^{i_1}(D) \dots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D) \vartheta_{|i|_{s-1}}(x),$$

где  $i = 0, \dots, n$ ,  $|i|_j = i + i_1 + \dots + i_j$ , причем  $|i|_0 = i$ , а суммирование ведется по всем  $i_1, \dots, i_{s-1}$  из  $\mathbb{N}_0$ , удовлетворяющим неравенствам  $i_j \leq m + |i|_{j-1} \beta_{k_j}$ ,  $j \in I_{s-1}$ . Отсюда нетрудно получить, что

$$w_i(x) = \sum_{k=0}^{\gamma_i(m)} (-1)^k \sum_{|i|_{s-1}=k} \binom{|i|_1}{i_1} \dots \binom{|i|_{s-1}}{i_{s-1}} J_1^{i_1}(D) \dots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D) \vartheta_{i+k}(x),$$

где  $\gamma_i(m) = \delta_1(m) + \dots + \delta_{s-1}(m)$  и, следовательно, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{|i|_{s-1}=k} \binom{|i|_1}{i_1} \dots \binom{|i|_{s-1}}{i_{s-1}} J_1^{i_1}(D) \dots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D) &= \sum_{i_1 + \dots + i_{s-1} = k} \frac{(i+i_1)! \dots (i+i_1 + \dots + i_{s-1})!}{i! i_1! \dots (i+i_1 + \dots + i_{s-2})! i_{s-1}!} J_1^{i_1}(D) \dots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D) = \\ &= \sum_{i_1 + \dots + i_{s-1} = k} \frac{(i+i_1 + \dots + i_{s-1})!}{i! i_1! \dots i_{s-1}!} J_1^{i_1}(D) \dots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D) = \frac{(i+k)!}{i! k!} \sum_{i_1 + \dots + i_{s-1} = k} \frac{k!}{i_1! \dots i_{s-1}!} J_1^{i_1}(D) \dots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D) = \\ &= \binom{i+k}{i} (J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D))^k, \end{aligned}$$

будем иметь

$$w_i(x) = \sum_{k=0}^{\gamma_i(m)} (-1)^k \binom{i+k}{k} (J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D))^k \vartheta_{i+k}(x). \tag{11}$$

Если  $L(D) = L_k(D)$ , то вычисляя

$$u(x) = w_0(x) = \sum_{k=0}^{\gamma_0(m)} (-1)^k (J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D))^k \vartheta_k(x),$$

можно перейти к доказательству после формулы (13). Если же оператор  $L(D)$  имеет степень больше  $k$ , то воспользуемся предложением 2, а именно формулой (9), при

$$K_1(D) = J_0(D), \quad K_2(D) = J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D) + I_s(D).$$

По этой формуле для любого  $u(x)$  – полиномиального решения однородного уравнения (2) найдется соответствующая 0-нормированная относительно оператора  $L(D) - J_0(D)$  система полиномов  $\{w_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$ , которая в свою очередь может быть задана системой  $\{\vartheta_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$ , такая, что

$$u(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j J_0^j(D) w_j(x). \tag{12}$$

Подставляя сюда  $w_j(x)$  из (11) и учитывая при этом, что  $\gamma_i(m) \leq \gamma_m(m)$  для  $i \leq m$  (увеличивая верхний предел в сумме из (11) мы добавляем в сумму лишь нулевые члены) и  $\alpha(m) = m + \gamma_m(m)$ , получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=0}^m (-1)^j J_0^j(D) \sum_{k=0}^{\gamma_m(m)} (-1)^k \binom{j+k}{k} (J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D))^k \vartheta_{j+k}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha(m)} (-1)^i \sum_{j+k=i} \binom{j+k}{k} J_0^j(D) (J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D))^k \vartheta_i(x). \end{aligned}$$

Отсюда сразу находим

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(m)} (-1)^i (J_0(D) + J_1(D) + \dots + J_{s-1}(D))^i \vartheta_i(x). \tag{13}$$

В силу леммы 1 линейная независимость полиномов  $\vartheta_0^{(1)}(x)$  и  $\vartheta_0^{(2)}(x)$  – оснований соответствующих 0-нормированных систем влечет за собой линейную независимость полиномов  $w_0^{(1)}(x)$  и  $w_0^{(2)}(x)$  из формулы (11), а из этого следует линейная независимость полиномов  $u^{(1)}(x)$  и  $u^{(2)}(x)$ , находимых по формуле (12), поскольку в сумме (12) первые слагаемые  $w_0^{(1)}(x)$  и  $w_0^{(2)}(x)$  имеют наибольшую степень, а они линейно независимы. Поэтому, учитывая что в соответствии с предложением 1 из [1]  $N_m(n, k)$  – максимальное число линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени  $m$  решений однородного уравнения (2) равно числу базисных полиномиальных степени  $m$  решений уравнения  $I_s(D)v(x) = 0$ , т.е.  $N_m(n, k) = N_m$ , то система полиномов  $\{u_j(x) : j = 1, \dots, N_m\}$  является максимальной системой линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени  $m$  решений однородного уравнения (2). Доказательство теоремы завершено.  $\square$

**Замечание 1.** Значение  $\alpha(m)$ , вычисленное для некоторых конкретных примеров оказывается довольно завышенным, поскольку в теореме оно служит лишь для доказательства того, что  $u_j(x)$  – полином.

**Пример 4.** Пусть  $L(D) = L_2(D) = \Delta$ . Используя теорему 1, найдем связь между гармоническими полиномами от  $n$  переменных и гармоническими полиномами от  $n-1$  переменной. В соответствии с определением вектора  $\beta = \text{Min}L_2$  найдем  $\beta = (0, \dots, 0, 2)$ ,  $k_i = i$  и поэтому  $\beta_{k_i} = 0$ ,  $\delta_1(m) = m$ . Выберем  $s = 2$  и поэтому  $I_2(D) = \tilde{\Delta} \equiv \Delta - \partial^2 / \partial x_1^2$ ,  $\alpha(m) = 2m$ . Чтобы использовать теорему 1 мы должны найти такие 0-нормированные относительно  $\tilde{\Delta}$  системы полиномов, чтобы их основания образовывали базис в  $\ker \tilde{\Delta} \cap \mathcal{P}_m$ .

По формуле (11) из [1] находим максимальное число линейно независимых однородных степени  $m$  гармонических полиномов от  $n$  переменных  $N_m(n, 2) = \binom{m+n-1}{n-1} - \binom{m-2+n-1}{n-1}$  ( $s = t = 1$ ,  $V_m^1 = \{0\}$ ). Проверим, что системы полиномов  $\{h_{i,j}^s(\tilde{x}) x_1^{m-s,i} : i \in \mathbb{N}_0\}$ , где  $j = 1, \dots, N_s(n-1, 2)$ ,  $s = 0, \dots, m$ ,  $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$  и

$$h_{i,j}^s(\tilde{x}) = \frac{\|\tilde{x}\|^{2i}}{(2, 2)_i (n-1+2s, 2)_i} H_s^j(\tilde{x}),$$

$(a, b)_k = a(a+b)(a+kb-b)$  – обобщенный символ Похгаммера (при соглашении  $(a, b)_0 = 1$ ), а система полиномов  $\{H_s^j(\tilde{x}) : j = 1, \dots, N_s(n-1, 2), s = 0, \dots, m\}$  образует базис в однородных гармо-

нических полиномах степени  $s$  от  $n-1$  переменной являются 0-нормированными относительно  $\tilde{\Delta}$ . Действительно, поскольку  $\Delta \|x\|^m H_s(x) = m(m+2s+n-2) \|x\|^{m-2} H_s(x)$ , где  $H_s(x)$  – однородный гармонический полином степени  $s$ , то вычисления показывают что

$$\tilde{\Delta} h_{i,j}^s(\tilde{x}) = \frac{2i(2i+2s+n-3)}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i} \|\tilde{x}\|^{2i-2} H_s^j(\tilde{x}) = \frac{\|\tilde{x}\|^{2i-2}}{(2,2)_{i-1}(n-1+2s,2)_{i-1}} H_s^j(\tilde{x}) = \tilde{\Delta} h_{i-1,j}^s(\tilde{x}).$$

Кроме этого,  $\tilde{\Delta} h_{0,j}^s(\tilde{x}) = 0$ . Значит, системы полиномов  $\{h_{i,j}^s(\tilde{x}) x_1^{m-s,i} : i \in \mathbb{N}_0\}$  являются 0-нормированными относительно оператора  $\tilde{\Delta}$ . Рассмотрим основания этих систем  $h_{0,j}^s(\tilde{x}) x_1^{m-s,i} = x_1^{m-s,i} H_s^j(\tilde{x})$  при  $j=1, \dots, N_s(n-1,2)$  и  $s=0, \dots, m$ . Поскольку

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\Delta} P(x) &\equiv \tilde{\Delta} \sum_{s=0}^m x_1^{m-s} P_s(\tilde{x}) = \sum_{s=0}^m x_1^{m-s} \tilde{\Delta} P_s(\tilde{x}) \Rightarrow \tilde{\Delta} P_s(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow P_s(\tilde{x}) = \sum_j c_{s,j} H_s^j(\tilde{x}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(x) = \sum_{s=0}^m x_1^{m-s} P_s(\tilde{x}) = \sum_{s=0}^m x_1^{m-s} \sum_j c_{s,j} H_s^j(\tilde{x}) = \sum_{s,j} (m-s)! c_{s,j} x_1^{m-s,i} H_s^j(\tilde{x}), \end{aligned}$$

то основания систем  $h_{0,j}^s(\tilde{x}) x_1^{m-s,i}$  образуют базис в  $\ker \tilde{\Delta} \cap \mathcal{P}_m$ . Поэтому по теореме 1 произвольный однородный гармонический полином от  $n$  переменных степени  $m$  может быть представлен как линейная комбинация полиномов вида (10)

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{\alpha(m)} (-1)^i (\Delta - \tilde{\Delta})^i \vartheta_i(x) = \sum_{i=0}^{[(m-s)/2]} (-1)^i D_{x_1}^{2i} \frac{\|\tilde{x}\|^{2i} x_1^{m-s,i}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i} H_s(\tilde{x}) = \\ &= \sum_{i=0}^{[(m-s)/2]} (-1)^i \frac{\|\tilde{x}\|^{2i} x_1^{m-s-2i,i}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i} H_s(\tilde{x}) = G_{m-s}^s(x) H_s(\tilde{x}), \end{aligned}$$

где обозначено

$$G_k^s(x) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \frac{\|\tilde{x}\|^{2i} x_1^{k-2i,i}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}, \quad (14)$$

а  $H_s(\tilde{x})$  – произвольный гармонический полином от  $n-1$  переменной.

Итак, для того чтобы из однородного гармонического полинома от  $n-1$  переменной  $H_s(\tilde{x})$  получить однородный гармонический полином от  $n$  переменных  $H_m(x)$  необходимо его умножить на полином  $G_{m-s}^s(x)$  из (14). Если взять базисные гармонические полиномы  $\{H_s^j(\tilde{x}) : 0 \leq s \leq m\}$  степени  $m$  от  $n-1$  переменной, то система полиномов  $\{G_{m-s}^s(x) H_s^j(\tilde{x}) : 0 \leq s \leq m\}$  будет базисом в однородных степени  $m$  гармонических полиномах от  $n$  переменных. Это соответствует замечанию 1 из [1].

Рассмотрим неоднородное уравнение (2), в котором  $f(x)$  – однородный полином степени  $l$ .

**Теорема 2.** Любое полиномиальное степени  $l+k$  решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i \vartheta_i(x), \quad (15)$$

где система полиномов  $\{\vartheta_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  – некоторая  $f$ -нормированная система полиномов относительно оператора  $I_s(D)$ , удовлетворяющая условию  $\vartheta_i(x) \in \mathcal{P}_{l+k(i+1)}$ .

*Доказательство.* Заметим, что если иметь в виду формулу (13) из теоремы 1 при  $m=k+l$ , то достаточно доказать представление хотя бы одного частного решения уравнения (2) в виде (15). Действительно, если  $\{w_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  – некоторая 0-нормированная система полиномов, задающая по теореме 1 произвольный полином  $u_0(x) \in \ker L(D) \cap \mathcal{P}_{l+k}$  по формуле (13), то система

$\{w_i(x) + v_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  такая, что  $w_i(x) + v_i(x) \in \mathcal{P}_{l+k(i+1)}$  будет  $f$ -нормированной системой полиномов относительно оператора  $I_s(D)$ , т.е.

$$I_s(D)(w_i(x) + v_i(x)) = w_{i-1}(x) + v_{i-1}(x); I_s(D)(w_0(x) + v_0(x)) = I_s(D)v_0(x) = f$$

и, значит, будет верно представление вида (15)

$$\begin{aligned} u_0(x) + u(x) &= \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i w_i(x) + \\ &+ \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i v_i(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i (w_i(x) + v_i(x)). \end{aligned}$$

Пусть  $\{v_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  – система полиномов  $f$ -нормированная относительно оператора  $I_s(D)$ , удовлетворяющая условию  $v_i(x) \in \mathcal{P}_{l+k(i+1)}$ . Очевидно, что такая система существует. Тогда для полинома  $u(x)$ , определяемого по формуле (15), аналогично (6) будем иметь

$$\begin{aligned} L(D)u(x) &= (L(D) - I_s(D) + I_s(D)) \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i v_i(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^{i+1} v_i(x) + \sum_{i=1}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^i v_{i-1}(x) + f(x) = \\ &= f(x) + \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^{i+1} v_i(x) - \sum_{i=0}^{\alpha(k+l)-1} (-1)^i (L(D) - I_s(D))^{i+1} v_i(x) = \\ &= f(x) + (-1)^{\alpha(k+l)} (L(D) - I_s(D))^{\alpha(k+l)+1} v_{\alpha(k+l)}(x). \end{aligned}$$

Поэтому, если выполнено равенство

$$(L(D) - I_s(D))^{\alpha(k+l)+1} v_{\alpha(k+l)}(x) = 0, \tag{16}$$

то формула (15) будет задавать полиномиальное решение уравнения (2). Равенство же (16) легко следует из определения величины  $\alpha(m)$ , так как для того, чтобы было выполнено равенство

$$(L(D) - I_s(D))^{\alpha(m)+1} v_{\alpha(m)}(x) = 0,$$

не имеет значения является ли система  $\{v_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$  0-нормированной или нет, а важно лишь включение  $v_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$  (см. лемму 1 и теорему 1). Доказательство завершено.  $\square$

Приведем более простой способ построения решения неоднородного уравнения (2) с полиномиальной правой частью  $f(x)$ , вытекающий из теоремы 2. Пусть полином  $f(x)$  представляется в форме  $f(x) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha,!}$ , а полиномы  $v_{\sigma}(x)$  при  $\sigma \in \mathbb{N}_0^n$  имеют вид

$$v_{\sigma}(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(|\sigma|)} (-1)^i \tilde{L}(D) x^{\beta i + \sigma,!},$$

где  $\beta \in \Lambda \equiv \left\{ \min_{\pi(1)} \dots \min_{\pi(n-1)} \Gamma_0 : \pi \in S_n \right\}$ ,  $\Gamma_0 = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}_0^n : a_{\alpha} \neq 0, |\alpha| = k \right\}$ ,  $a_{\alpha}$  – коэффициенты оператора

$L(D)$ ,  $S_n$  – симметрическая группа, а оператор  $\tilde{L}(D)$  определяется равенством

$$\tilde{L}(D) = \sum_{\alpha \neq \beta} (a_{\alpha}/a_{\beta}) D^{\alpha}.$$

Базисность системы полиномов  $\{v_{\sigma}(x) : \beta \not\equiv \sigma, \sigma \in \mathbb{N}_0^n\}$  устанавливает следующее утверждение.

**Предложение 3.** Пусть  $u(x)$  – некоторое полиномиальное решение уравнения (2), тогда найдутся такие числа  $C_{\sigma}$ , что имеет место равенство

$$u(x) = \sum_{\alpha} (f_{\alpha}/a_{\beta}) v_{\alpha+\beta}(x) + \sum_{\beta \not\equiv \sigma} C_{\sigma} v_{\sigma}(x). \tag{17}$$

*Доказательство.* Пусть  $\beta \in \Lambda$ . Разделим обе части уравнения (2) на коэффициент  $a_\beta$ , поскольку  $a_\beta \neq 0$ . Очевидно, что перенумерацией переменных можно добиться того, чтобы  $\beta = \text{Min}L_k$ . Согласно определению  $s_o$  имеем  $J_{s_o}(D) = D^\beta$ . Воспользуемся примером 2. По нему система полиномов  $\{x^{k\beta+\alpha,!} : k \in \mathbb{N}_0, \beta \not\leq \alpha\}$  является 0-нормированной относительно оператора  $D^\beta$ , т.е.  $D^\beta x^{k\beta+\alpha,!} = x^{(k-1)\beta+\alpha,!}$  и  $D^\beta x^{\alpha,!} = 0$ , и имеющей основание  $x^{\alpha,!}$ . Эти основания составляют базис в  $\ker L(D) \cap \mathcal{P}$ . Поэтому на основании теоремы 1 система полиномов  $\{\vartheta_\sigma(x) : |\sigma| = m, \beta \not\leq \sigma\}$ , находимых по формуле, являющейся частным случаем формулы (10), образует максимальную систему линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени  $m$  решений однородного ( $f(x) = 0$ ) уравнения (2). Далее, так как система полиномов  $\{x^{(k+1)\beta+\alpha,!} : k \in \mathbb{N}_0\}$  является  $x^{\alpha,!}$ -нормированной относительно оператора  $D^\beta$ , то по теореме 2 полином  $\vartheta_{\alpha+\beta}(x)$  является решением уравнения

$$\sum_{k \leq |\alpha| \leq q} (a_\alpha/a_\beta) D^\alpha u(x) = x^{\alpha,!},$$

а, значит, уравнения (2) при  $f(x) = a_\beta x^{\alpha,!}$ . Поэтому полином следующего вида  $\sum_\alpha (f_\alpha/a_\beta) \vartheta_{\alpha+\beta}(x)$  является частным решением уравнения (2) для заданного  $f(x)$ . Доказательство завершено.  $\square$

**Пример 5.** Множество  $\Lambda$  для двух основных операторов математической физики  $D_t^2 - \Delta$  и  $\Delta$  совпадает с множеством индексов  $\Gamma(L) \equiv \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : a_\alpha \neq 0\}$  их ненулевых коэффициентов. Если  $L(D) = D_t^2 - \Delta$ , тогда можно положить  $\beta = (2, 0, \dots, 0)$  и поэтому  $\tilde{L}(D) = -\Delta$ . В этом случае решение (17) при  $f(x) = 0$  может быть преобразовано к известной форме [12]

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k,!} \Delta^k P(x) + \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1,!} \Delta^k Q(x),$$

где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – некоторые полиномы от  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Литература

1. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.
2. Zweiling, K. Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome / K. Zweiling. – Verlag Technik, Berlin, 1952. – 128 p.
3. Бицадзе, А.В. К теории гармонических функций / А.В. Бицадзе // Труды Тбилисского университета. – 1962. – Вып. 84. – С. 35–37.
4. Miles, E.P. Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations / E.P. Miles, E. Williams // Duke Math. Journ. – 1959. – V. 26, № 1. – P. 35–40.
5. Watzlawek, W. Wärmepolynome-Modell für besondere Lösungssysteme bei linearen partiellen Differentialgleichungen / W. Watzlawek // Berichte Math.-Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz. – 1983. – V. 211. – P. 1–34.
6. Hile, G.N. Polynomial solutions to Cauchy problems for complex Bessel operators / G.N. Hile, A. Stanoyevitch // Complex Variables. – 2005. – V. 50, № 7–11. – P. 547–574.
7. Bondarenko, В.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных / В.А. Bondarenko. – Ташкент: ФАН, 1987. – 127 с.
8. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 3. – С. 534–535.

9. Карачик, В.В. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 384–395.

10. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – V. 287, № 2. – P. 577–592.

11. Филатов, А.Н. Обобщенные ряды Ли и их приложения / А.Н. Филатов. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963. – 108 с.

12. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе // М.: Наука, 1982. – 336 с.

*Поступила в редакцию 10 декабря 2010 г.*

### POLYNOMIAL SOLUTIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS II

V.V. Karachik<sup>1</sup>

A construction method of polynomial solutions to systems of linear partial differential equations with constant coefficients of general form is offered in the article.

*Keywords: polynomial solutions, linear partial differential equations.*

#### References

1. Karachik V.V. Polinomial'nye reshenija differencial'nyh uravnenij v chastnyh proiz-vodnyh s postojannymi koeficientami I (Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I). *Vestnik JuUrGU. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2011. Vol. 4, no. 10(227). pp. 4–17. (in Russ.)

2. Zweiling K. *Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome*. Verlag Technik, Berlin, 1952. 128 p.

3. Bicadze A.V. *Trudy Tbilisskogo universiteta*. 1962. Vol. 84. pp. 35–37. (in Russ.)

4. Miles E.P., Williams E. Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations *Duke Math. Journ.* 1959. Vol. 26, no. 1. pp. 35–40.

5. Watzlawek W. Wärmepolynome-Modell für besondere Lösungssysteme bei linearen partiellen Differentialgleichungen. *Berichte Math.-Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz*. 1983. Vol. 211. pp. 1–34.

6. Hile G.N., Stanoyevitch A. Polynomial solutions to Cauchy problems for complex Bessel operators. *Complex Variables*. 2005. Vol. 50, no. 7–11. pp. 547–574.

7. Bondarenko, B.A. *Bazisnye sistemy polinomial'nyh i kvazipolinomial'nyh reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh* (The basic system of polynomial and quasipolynomial solutions of partial differential equations). Tashkent: FAN, 1987. 127 p. (in Russ.)

8. Karachik V.V. *Dif. uravnenija*. 1991. Vol. 27, no. 3. pp. 534–535. (in Russ.)

9. Karachik V.V., Antropova N.A. On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation. *Differential Equations*. 2010. Vol. 46, no. 3. pp. 387–399.

10. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. Vol. 287, no. 2. pp. 577–592.

11. Filatov A.N. *Obobwennye rjady Li i ih prilozhenija* (Generalized Lie series and their applications). Tashkent, AN UzSSR. 1963. 108 p. (in Russ.)

12. Bicadze A.V. *Uravnenija matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka, 1982. 336 p. (in Russ.)

---

<sup>1</sup> Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Differential equations and Dynamical Systems Department, South Ural State University. e-mail: karachik@susu.ru

# ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

**В.В. Карачик<sup>1</sup>, Н.А. Антропова<sup>2</sup>**

Найдено полиномиальное решение задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения с полиномиальной правой частью и полиномиальными граничными данными в единичном шаре. Использовалось явное представление гармонических функций в формуле Альманси.

*Ключевые слова:* бигармоническое уравнение, полиномиальные решения, задача Дирихле, формула Альманси.

## 1. Введение

Хорошо известно классическое представление Альманси для полигармонической функции  $Q(x)$ :

$$Q(x) = H_0(x) + |x|^2 H_1(x) + \dots + |x|^{2s} H_s(x), \quad (1)$$

где  $H_k(x)$  – некоторые гармонические функции, которые успешно применяются при построении решений модельных задач для гармонического, бигармонического и полигармонического уравнений. На основании результатов по построению нормированных систем функций для оператора Лапласа [1] в работах автора [2, 3] конечное представление Альманси распространено на аналитические функции действительных переменных. Имеются также многочисленные работы, посвященные обобщению представления Альманси на дифференциальные операторы, отличные от оператора Лапласа, например [4, 5].

В настоящей работе представления Альманси сначала применяются для построения решения однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения (раздел 2), а затем и для построения решения общей задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре (раздел 3). В [6] с помощью формулы Альманси были построены полиномиальные решения уравнения Пуассона  $\Delta u(x) = Q(x)$  и полигармонического уравнения  $\Delta^m u(x) = Q(x)$ , где  $Q(x)$  – произвольный полином. Найденные решения отличаются от полиномиальных решений дифференциальных уравнений в частных производных общего вида [7,8]. В работе [9] было построено полиномиальное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, а также третьей краевой задачи. Настоящая работа является продолжением этих исследований на задачу Дирихле для бигармонического уравнения.

В разделе 2 настоящей работы, с помощью исследования свойств представлений Альманси, описанных в леммах 1–5 и теореме 1, в теоремах 2 и 3 будут даны формулы (17) и (20), позволяющие легко вычислять полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения. В разделе 3, в теореме 6, на основании теорем 4 и 5 получена формула (30) для представления полиномиального решения общей задачи Дирихле для бигармонического уравнения с полиномиальными данными. К сожалению, полученные полиномиальные решения для записи их в обычном виде требуют вычисления степеней оператора Лапласа от некоторых многочленов, определяемых данными краевой задачи. Этот недостаток легко устраняется с помощью применения пакета *Mathematica* (см. примеры 1 и 6).

## 2. Полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения

Сначала рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ :

<sup>1</sup> Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и динамических систем, факультет вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: karachik@susu.ru

<sup>2</sup> Антропова Наталия Александровна – аспирант, преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений и динамических систем, факультет Вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет.

$$\Delta^2 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

с полиномиальной правой частью  $Q(x)$  и при  $n > 2$ . В работе [6] установлено, что некоторое полиномиальное решение бигармонического уравнения (2) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{|x|^4}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+4)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^{k+1} \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k Q(\alpha x) d\alpha. \tag{4}$$

Предположим сначала, что  $Q(x) = Q_m(x)$  – однородный полином степени  $m$ . В [6] показано, что в этом случае решение (4) может быть записано также в виде

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+1) |x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+2} (2m-2s+n,2)_{s+2}}. \tag{5}$$

Здесь  $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+(k-1)b)$  – обобщенный символ Похгаммера с соглашением  $(a,b)_0 = 1$ . Например,  $(2,2)_k = (2k)!!$ . Заметим, что в знаменателе дроби под знаком суммы стоит выражение  $(2m-2s+n,2)_{s+2} = (2m-2s+n)\cdots(2m+n+2)$ , которое не обращается в нуль, поскольку  $2s \leq m$ . В [6] установлено, что некоторое полиномиальное решение уравнение Пуассона  $\Delta v = Q(x)$  имеет вид

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k Q(\alpha x) d\alpha. \tag{6}$$

Кроме этого показано [6], что при  $Q(x) = Q_m(x)$  решение (6) может быть записано в ином виде

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+1} (2m-2s+n,2)_{s+1}}. \tag{7}$$

Установим связь между формулами (7) и (5).

**Лемма 1.** Пусть полином  $v(x)$  определяется из (7), а полином  $u(x)$  определяется тоже по формуле (7), но при  $Q_{m+2}(x) = v(x)$ , тогда полином  $u(x)$  имеет вид (5).

*Доказательство.* По условию леммы

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+1} (2m-2s+n,2)_{s+1}}$$

и поскольку  $\deg v(x) = m+2$ , то

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s v(x)}{(2,2)_{s+1} (2m+2-2s+n,2)_{s+1}}$$

Преобразуем полином  $u(x)$ . Имеем

$$u(x) = \frac{|x|^2 v(x)}{2(2m+n+2)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s v(x)}{(2,2)_{s+1} (2m+2-2s+n,2)_{s+1}}.$$

Подставим в первый член значение  $v(x)$ , а во второй сумме учтем, что  $\Delta v = Q_m(x)$ . Кроме этого при преобразовании первого члена заметим, что  $(2m+n+2)(2m-2s+n,2)_{s+1} = (2m-2s+n,2)_{s+2}$  и  $(2s+4)(2,2)_{s+1} = (2,2)_{s+2}$ . Имеем

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+2) |x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+2} (2m-2s+n,2)_{s+2}} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^{s-1} Q_m(x)}{(2,2)_{s+1} (2m+2-2s+n,2)_{s+1}}.$$

Сдвинем индекс суммирования во второй сумме  $s \rightarrow s+1$  и тогда области суммирования обеих сумм будут одинаковы. Объединим эти суммы

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+2} (2m-2s+n,2)_{s+2}} ((s+2)-1).$$

Отсюда сразу следует формула (5).

Рассмотрим бигармоническое уравнение со специальной правой частью

$$\Delta^2 u = |x|^{2m} \cdot P_s(x), x \in D, \quad (8)$$

где  $P_s(x)$  – однородный гармонический полином степени  $s$ , а  $D \subset \mathbb{R}^n$  – звездная область с центром в начале координат. Из результатов работы [6] следует, что решение уравнения  $\Delta v = |x|^{2m} \cdot P_s(x)$ , записанное в форме (7), имеет вид

$$u(x) = \frac{|x|^{2m+2} \cdot P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)}. \quad (9)$$

Установим аналогичный результат и для бигармонического уравнения.

**Теорема 1.** Решение уравнения (8), записанное в форме (4) или (5), имеет вид

$$u(x) = C_{m,s} |x|^{2m+4} \cdot P_s(x), \quad (10)$$

где  $1/C_{m,s} = (2m+2)(2m+4)(2m+2s+n)(2m+2s+n+2)$ .

*Доказательство.* Обозначим  $v(x) = \Delta u$ . Тогда  $\Delta v = |x|^{2m} P_s(x)$ . Будем последовательно применять формулу (7) для нахождения сначала полинома  $v(x)$  при  $Q_{2m+s}(x) = |x|^{2m} P_s(x)$ , а затем и  $u(x)$  при  $Q_{2m+s+2}(x) = v(x)$ . Согласно лемме 1 мы должны получить при этом формулу (5). С другой стороны, полином  $v(x)$  будет записан в виде (9)

$$v(x) = |x|^{2m+2} \frac{P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)} \equiv |x|^{2m+2} P'_s(x).$$

А, значит, опять используя этот результат, получим, что полином  $u(x)$  будет записан в виде

$$u(x) = |x|^{2m+4} \frac{P'_s(x)}{(2m+4)(2m+2s+n+2)}.$$

Подставляя сюда значение  $P'_s(x)$ , получим (10). Таким образом, формула (5) при  $Q_{2m+s}(x) = |x|^{2m} P_s(x)$  имеет вид (10). Согласно [6] формула (5) может быть переписана в виде (4) и значит (4) при  $Q(x) = |x|^{2m} P_s(x)$  имеет вид (10).

Разложим  $Q_m(x)$  с помощью формулы Альманси (1) на слагаемые вида  $|x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ :

$$Q_m(x) = R_m(x) + |x|^2 R_{m-2}(x) + \dots + |x|^{2s} R_{m-2s}(x), m-2s \geq 0. \quad (11)$$

Применим к обеим частям формулу (5). Тогда по теореме 1 решение уравнения  $\Delta^2 v(x) = Q_m(x)$ , задаваемое формулой (5) имеет вид

$$v(x) = \sum_{s=0}^{[m/2]} \frac{|x|^{2s+4} R_{m-2s}(x)}{(2s+2)(2s+4)(2m-2s+n)(2m-2s+n+2)}, \quad (12)$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ , а однородные гармонические полиномы  $R_k(x)$  определяются формулой Альманси (11). Из явного вида полиномов  $R_k(x)$ , найденного в [2], аналогично формуле (7), верно утверждение.

**Лемма 2** [9]. Гармонические полиномы  $R_{m-2k}(x)$  в разложении однородного полинома  $Q_m(x)$  по формуле Альманси (11) имеют вид

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s} \Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2,2)_s (2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}.$$

Рассмотрим задачу Дирихле (2)–(3) при  $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ .

**Лемма 3.** Решение  $v_s(x)$  однородной задачи Дирихле (2)–(3) при  $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$  имеет вид

$$v_s(x) = C'_{m,s} \left( |x|^{2s+4} + (s+1) - (s+2) |x|^2 \right) R_{m-2s}(x), \quad (13)$$

где  $1/C'_{m,s} = (2s+2)(2s+4)(2m-2s+n)(2m-2s+n+2)$ .

*Доказательство.* Пусть полином  $u_s(x)$  определяется формулой

$$v_s(x) = C'_{m,s} \left( |x|^{2s+4} R_{m-2s}(x) + H_{m-2s}^1(x) - |x|^2 H_{m-2s}^2(x) \right),$$

где  $H_{m-2s}^1(x)$  и  $H_{m-2s}^2(x)$  – однородные гармонические полиномы степени  $m-2s$ . Легко видеть, что  $C'_{m,s} = C_{s,m-2s}$ , где  $C_{m,s}$  определен в теореме 1. Используя теорему 1, получим равенство  $\Delta^2 v_s(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ . Будем подбирать полиномы  $H_{m-2s}^1(x)$  и  $H_{m-2s}^2(x)$  так, чтобы выполнялись однородные граничные условия (3). Тогда будем иметь

$$R_{m-2s}(x) - H_{m-2s}^1(x) - H_{m-2s}^2(x) = 0 \Rightarrow v_s|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$(m+4)R_{m-2s}(x) - (m-2s)H_{m-2s}^1(x) - (m-2s+2)H_{m-2s}^2(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

и поэтому необходимо решить систему уравнений

$$H_{m-2s}^1(x) + H_{m-2s}^2(x) = R_{m-2s}(x),$$

$$(m-2s)H_{m-2s}^1(x) + (m-2s+2)H_{m-2s}^2(x) = (m+4)R_{m-2s}(x).$$

Решение этой системы относительно  $H_{m-2s}^1(x)$  и  $H_{m-2s}^2(x)$  методом Крамера имеет вид

$$H_{m-2s}^1(x) = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+4 & m-2s+2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-2s & m-2s+2 \end{vmatrix} = -(s+1)R_{m-2s}(x),$$

$$H_{m-2s}^2(x) = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-2s & m+4 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-2s & m-2s+2 \end{vmatrix} = (s+2)R_{m-2s}(x).$$

Подставляя полученные значения в формулу для  $v_s(x)$ , получим (13).

Теперь можно построить полином  $u_0(x)$  – решение задачи Дирихле (2)–(3) при  $Q(x) = Q_m(x)$ . Раскладывая однородный полином  $Q_m(x)$  по формуле (11), а затем применяя к каждому слагаемому лемму 3 ( $s$  заменяется на  $k$ ), получим решение нашей задачи в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} v_k(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} C'_{m,k} (|x|^{2k+4} + (k+1) - (k+2)|x|^2) R_{m-2k}(x),$$

где  $C'_{m,k}$  определены как и в лемме 3. Как было доказано выше полином

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} C'_{m,k} |x|^{2k+4} R_{m-2k}(x)$$

равный полиному из (12), записывается в виде (5). Поэтому

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)|x|^{2k+4} \Delta^k Q_m(x)}{(2,2)_{k+2} (2m-2k+n,2)_{k+2}} + \sum_{k=0}^{[m/2]} C'_{m,k} ((k+1) - (k+2)|x|^2) R_{m-2k}(x). \quad (14)$$

Преобразуем решение  $u_0(x)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $A = m + n/2$  и

$$A_{s,k} = k(A-2s+2k-3)(A-s+k+1) + (s-k+1)(A-2s+2k-1)(A-2s+k-2),$$

тогда справедливо равенство

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}} \sum_{k=0}^{s+2} \frac{(-1)^k A_{s,k} |x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+4}}, \quad (15)$$

где  $(a)_s = a(a+1) \cdots (a+s-1)$ .

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 2 для преобразования многочлена  $u_0(x)$  из (14).

Учитывая что  $1/C'_{m,s} = (2s+2)(2s+4)(2m-2s+n)(2m-2s+n+2)$ , а также  $(2,2)_{k+2} = (2k+2)(2k+4)(2,2)_k$  и

$$(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+3} = (2m-2k+n)(2m-2k+n+2)(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+1},$$

перепишем это решение в виде

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+1) |x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2, 2)_{s+2} (2m-2s+n, 2)_{s+2}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(k+1) - (k+2) |x|^2}{(2, 2)_{k+2}} \sum_{2s+2k \leq m} \frac{(-1)^s (2m+n-4k-2) |x|^{2s} \Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2, 2)_s (2m+n-4k-2s-2, 2)_{s+k+3}}.$$

Обозначим  $s+k = \alpha$  и учтем при этом, что  $(2, 2)_{k+2} (2, 2)_s = 2^{\alpha+2} (\alpha-s+2)! s!$  и  $(2m+n-4k-2s-2, 2)_{s+k+3} = 2^{\alpha+3} (A-2\alpha+s-1)_{\alpha+3}$ , где  $A = m+n/2$ . Тогда повторное суммирование преобразуется к виду

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+1) |x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2} (s+2)! (A-s)_{s+2}} +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\Delta^{\alpha} Q_m(x)}{4^{\alpha+2}} \sum_{s=0}^{\alpha} (-1)^s (A-2\alpha+2s-1) \frac{(\alpha-s+1) |x|^{2s} - (\alpha-s+2) |x|^{2s+2}}{(\alpha-s+2)! s! (A-2\alpha+s-1)_{\alpha+3}}.$$

Заменим в двукратной сумме  $\alpha$  на  $s$ ,  $s$  на  $\alpha$  и разделим эту сумму на два слагаемых

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}} \left( (-1)^s \frac{(s+1) |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s)_{s+2}} + \sum_{\alpha=0}^s (-1)^{\alpha} \times \right.$$

$$\left. \frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1) |x|^{2\alpha}}{(s-\alpha+2)! \alpha! (A-2s+\alpha-1)_{s+3}} - \sum_{\alpha=0}^s (-1)^{\alpha} \frac{(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1) |x|^{2\alpha+2}}{(s-\alpha+2)! \alpha! (A-2s+\alpha-1)_{s+3}} \right). \quad (16)$$

Преобразуем выражение в больших круглых скобках, которое обозначим  $J_1$ . Если в последней сумме сдвинуть индекс суммирования  $\alpha \rightarrow \alpha-1$  и выделить отдельно первый член (при  $\alpha=0$ ) у второй суммы, то получим

$$J_1 = (-1)^s \frac{(s+1) |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s)_{s+2}} + \sum_{\alpha=1}^{s+1} (-1)^{\alpha} |x|^{2\alpha} \left[ \frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{(s-\alpha+2)! \alpha! (A-2s+\alpha-1)_{s+3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(s-\alpha+3)(A-2s+2\alpha-3)}{(s-\alpha+3)! (\alpha-1)! (A-2s+\alpha-2)_{s+3}} \right] + \frac{(s+1)(A-2s-1)}{(s+2)! (A-2s-1)_{s+3}}$$

или

$$J_1 = \frac{(-1)^s (s+1) |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s)_{s+2}} + \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{(-1)^{\alpha} |x|^{2\alpha}}{\alpha! (s-\alpha+2)! (A-2s+\alpha-1)_{s+2}} \times$$

$$\times \left[ \frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{A-s+\alpha+1} + \frac{\alpha(A-2s+2\alpha-3)}{A-2s+\alpha-2} \right] + \frac{(s+1)(A-2s-1)}{(s+2)! (A-2s-1)_{s+3}}.$$

Суммирование во внутренней сумме можно продолжить и на значение  $\alpha=0$  и при этом под знаком суммы мы получим значение выражения, равное последнему члену в формуле. Поэтому можно записать

$$J_1 = \frac{(-1)^{s+2} (s+1) |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s)_{s+2}} + \sum_{\alpha=0}^{s+1} \frac{(-1)^{\alpha} |x|^{2\alpha}}{\alpha! (s-\alpha+2)! (A-2s+\alpha-1)_{s+2}} \times$$

$$\times \left[ \frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{A-s+\alpha+1} + \frac{\alpha(A-2s+2\alpha-3)}{A-2s+\alpha-2} \right].$$

Вычислим значение выражения под знаком суммы при  $\alpha = s+2$ . Имеем

$$\frac{(-1)^{s+2} |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s+1)_{s+2}} \left[ -1 + \frac{(s+2)(A+1)}{A-s} \right] = \frac{(-1)^{s+2} |x|^{2s+4} (sA+2s+A+2)}{(s+2)! (A-s)_{s+3}} =$$

$$= \frac{(-1)^{s+2} (s+1) |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s)_{s+3}} = \frac{(-1)^{s+2} (s+1) |x|^{2s+4}}{(s+2)! (A-s)_{s+2}}.$$

Поэтому можно записать

$$J_1 = \sum_{\alpha=0}^{s+2} \frac{(-1)^{\alpha} |x|^{2\alpha}}{\alpha! (s-\alpha+2)! (A-2s+\alpha-1)_{s+2}} \left[ \frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{A-s+\alpha+1} + \frac{\alpha(A-2s+2\alpha-3)}{A-2s+\alpha-2} \right].$$

Если привести дроби к общему знаменателю и учесть значение  $A_{s,\alpha}$ , то получим

$$J_1 = \sum_{\alpha=0}^{s+2} \frac{(-1)^\alpha A_{s,\alpha} |x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+2)!(A-2s+\alpha-2)_{s+4}}.$$

Подставляя вычисленное значение  $J_1$  в (16), получим (15).

Из полученной формулы (15) сразу не видно, что полином  $u_0(x)$ , находимый из (15), удовлетворяет однородным условиям (3)  $u_0(x)|_{|x|=1} = 0$ ,  $\frac{\partial u_0(x)}{\partial n}|_{|x|=1} = 0$ .

**Теорема 2.** Решение  $u_0(x)$  задачи (2)–(3) при  $Q(x) = Q_m(x)$  можно записать в виде

$$u_0(x) = (|x|^2 - 1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)!} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(A-2s+k)_{s+2}}, \quad (17)$$

где, как и в лемме 4, для краткости обозначено  $A = m + n/2$ .

*Доказательство.* Обозначим полином из (17) через  $v(x)$  и разобьем внутреннюю сумму на три слагаемых. Заменяя  $k \rightarrow k-1$  во второй сумме и  $k \rightarrow k-2$  в третьей сумме, получим

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)} \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{|x|^{2k} - 2|x|^{2k+2} + |x|^{2k+4}}{k!(s-k)!(A-2s+k)_{s+2}} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)} \left( \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k |x|^{2k}}{k!(s-k)!(A-2s+k)_{s+2}} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{2(-1)^k |x|^{2k}}{(k-1)!(s-k+1)!(A-2s+k-1)_{s+2}} + \sum_{k=2}^{s+2} \frac{(-1)^k |x|^{2k}}{(k+2)!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+2}} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)} \left( \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k (s-k+2)(s-k+1) |x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k)_{s+2}} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{2(-1)^k k(s-k+2) |x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-1)_{s+2}} + \sum_{k=2}^{s+2} \frac{(-1)^k k(k-1) |x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+2}} \right). \end{aligned}$$

Учитывая специфику членов у трех рассматриваемых сумм в круглых скобках, суммирование можно взять в общих пределах от 0 до  $s+2$ :

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)} \sum_{k=0}^{s+2} \frac{(-1)^k |x|^{2k}}{k!(s-k+2)!} \times \\ &\left( \frac{(s-k+2)(s-k+1)}{(A-2s+k)_{s+2}} + \frac{2k(s-k+2)}{(A-2s+k-1)_{s+2}} + \frac{k(k-1)}{(A-2s+k-2)_{s+2}} \right). \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} B_{s,k} &= (s-k+2)(s-k+1)(A-2s+k-2)(A-2s+k-1) + \\ &+ 2k(s-k+2)(A-2s+k-2)(A-s+k+1) + k(k-1)(A-s+k)(A-s+k+1), \end{aligned}$$

то получим

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)} \sum_{k=0}^{s+2} \frac{(-1)^k B_{s,k} |x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+4}}. \quad (18)$$

Разложим коэффициент  $B_{s,k}$  по степеням  $s+2$ . Для этого можно воспользоваться пакетом *Mathematica*. Имеем

$$\begin{aligned} B_{s,k} &= (-6-10k-2k^2-5A-4kA-A^2)(s+2) + \\ &+ (16+16k+4k^2+9A+4kA+A^2)(s+2)^2 + (-14-8k-4A)(s+2)^3 + 4(s+2)^4. \end{aligned}$$

Если же разложить коэффициент  $A_{s,k}$  по степеням  $s+2$ , то получим

$$A_{s,k} = -6 - 10k - 2k^2 - 5A - 4kA - A^2 + \\ + (16 + 16k + 4k^2 + 9A + 4kA + A^2)(s+2) + (-14 - 8k - 4A)(s+2)^2 + 4(s+2)^3.$$

Видно, что  $B_{s,k} = A_{s,k}(s+2)$ . Подставляя это значение в (18) и сокращая на  $(s+2)$  получаем (15). Значит  $v(x) = u_0(x)$ .

Теперь легко непосредственно видеть, что многочлен  $u_0(x)$ , удовлетворяющий неоднородному бигармоническому уравнению (2) с  $Q(x) = Q_m(x)$ , удовлетворяет и однородным условиям Дирихле (3).

**Замечание 1.** Формулы, задающие решение однородной задачи Дирихле для гармонического уравнения  $u_1(x)$  [9] и бигармонического уравнения  $u_2(x)$  (17), очень похожи:

$$u_1(x) = (|x|^2 - 1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+1}(s+1)!} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+1}}$$

и

$$u_2(x) = (|x|^2 - 1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)!} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+2}}.$$

**Пример 1.** Решение задачи Дирихле (2)–(3) при  $Q_6(x) = x_1^3 x_2 x_3^2$ , записанное в виде (17), легко вычисляется с помощью пакета *Mathematica* и имеет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)^2}{12252240} (-255 + 245x_1^4 - 63x_2^4 - 1190x_3^2 + 861x_3^4 + \\ + 14x_1^2(-17 + 13x_2^2 - 350x_3^2) + 14x_2^2(17 + 57x_3^2)).$$

Еще немного преобразуем многочлен  $u_0(x)$ , являющийся решением задачи Дирихле (2)–(3) при  $Q(x) = Q_m(x)$ , чтобы затем иметь возможность получить формулу для произвольного  $Q(x)$ .

**Лемма 5.** Имеет место равенство

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-t|x|^2)^s (1-t)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \Delta^s Q_m(tx) t^{n/2-1} dt. \quad (19)$$

*Доказательство.* Пользуясь формулой (17), запишем

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{2^s(2s+4)!!} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(A-2s+k)_{s+2}},$$

где  $A = m + n/2$ . Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя определение символа Похгаммера  $(a)_k$ , свойство гамма функции  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  и связь гамма  $\Gamma(x)$  и бета  $B(x)$  функций Эйлера, можем записать

$$\frac{1}{(A-2s+k)_{s+2}} = \frac{1}{(A-2s+k) \cdots (A-s+k+1)} = \frac{\Gamma(m+n/2-2s+k)}{\Gamma(m+n/2-s+k+2)} = \\ = \frac{B(s+2, m+n/2-2s+k)}{\Gamma(s+2)} = \frac{1}{(s+1)!} \int_0^1 (1-t)^{s+1} t^{m+n/2+k-2s-1} dt.$$

Используя это равенство, внутреннюю сумму, умноженную на  $s+1$ , запишем в виде

$$\frac{1}{s!} \int_0^1 (1-t)^{s+1} t^{m+n/2-2s-1} \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} |x|^{2k} t^k dt = \frac{1}{s!} \int_0^1 (1-t)^{s+1} (1-t|x|^2)^s t^{m-2s} t^{n/2-1} dt.$$

Следовательно, многочлен  $u_0(x)$  можно записать в форме

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^{s+1} (1-t|x|^2)^s}{(2s+4)!!(2s)!!} \Delta^s Q_m(tx) t^{n/2-1} dt,$$

что совпадает с формулой (19).

Получим решение задачи Дирихле (2)–(3) с неоднородным многочленом  $Q(x)$ .

**Теорема 3.** Решение задачи Дирихле (2)–(3) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha |x|^2)^s (1 - \alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \Delta^s Q(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \quad (20)$$

*Доказательство.* Пусть  $Q(x)$  – произвольный полином. Представим его в виде суммы однородных слагаемых  $Q(x) = \sum_m Q_m(x)$ . Обозначим через  $u_m(x)$  полиномиальное решение задачи Дирихле (2)–(3) с правой частью  $Q(x) = Q_m(x)$ . Тогда очевидно, что искомое решение имеет вид  $u(x) = \sum_m u_m(x)$ . Из формулы (19) следует, что

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_m u_m(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1 - \alpha |x|^2)^s (1 - \alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \alpha^{n/2-1} \Delta^s \sum_m Q_m(\alpha x) d\alpha = \\ &= \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha |x|^2)^s (1 - \alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \Delta^s Q(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле (2)–(3) в единичном шаре в случае полиномиальных функций  $Q(x)$  можно записать в виде

$$G(x; \alpha) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha |x|^2)^s (1 - \alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \alpha^{n/2-1} (\Delta^s \cdot)(\alpha x)$$

и тогда решение (20) имеет вид

$$u(x) = \int_0^1 G(x; \alpha) Q(x) d\alpha.$$

**Пример 2.** Пусть в задаче Дирихле (2)–(3)  $Q(x) = x_i$ , а значит  $m = 1$ . Тогда в сумме из формулы (20) будет только один член при  $s = 0$ . Получаем

$$u(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 (1 - \alpha) \alpha x_i \frac{\alpha^{n/2-1}}{2 \cdot 4} d\alpha = x_i \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8(n+2)(n+4)}.$$

Можно воспользоваться формулой (15). Тогда так как  $A_{s,k} = k(A - 2s + 2k - 3)(A - s + k + 1) + (s - k + 1)(A - 2s + 2k - 1)(A - 2s + k - 2)$  и  $s = 0, m = 1$ , то  $A_{0,0} = (A - 1)(A - 2), A_{0,1} = (A - 1)(A + 2), A_{0,2} = 2(A + 1)(A + 3) - (A + 3)A = (A + 3)(A + 2), A = (n + 2)/2$  и то же решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x_i}{4^2} \left( \frac{A_{0,0}}{2(A-2)_4} - \frac{A_{0,1}|x|^2}{(A-1)_4} + \frac{A_{0,2}|x|^4}{2(A)_4} \right) = \\ &= \frac{x_i}{4^2} \left( \frac{1}{2A(A+1)} - \frac{|x|^2}{A(A+1)} + \frac{|x|^4}{2A(A+1)} \right) = \frac{x_i(|x|^2 - 1)^2}{8 \cdot 2A(2A+2)} = x_i \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8(n+2)(n+4)}. \end{aligned}$$

### 3. Полиномиальное решение неоднородной задачи Дирихле для однородного бигармонического уравнения

Рассмотрим теперь следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре  $\Omega$

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (21)$$

$$u|_{\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (22)$$

с полиномиальным граничным значением  $P(x)$  и при  $n > 2$ .

Сформулируем утверждение, дополняющее утверждение теоремы 3.

Рассмотрим оператор  $\Lambda u = \sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}$ . Он обладает легко проверяемыми свойствами:

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \Lambda u|_{\partial\Omega}$ ; если функция  $u$  – гармоническая в  $\Omega$ , то функция  $\Lambda u$  тоже гармоническая в  $\Omega$ ;

верно равенство  $\Lambda(uv) = v\Lambda u + u\Lambda v$ ;  $\Lambda P_m(x) = mP_m(x)$ .

**Теорема 4.** Решение задачи (21)–(22) можно записать в виде

$$v(x) = P(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Delta P(x) + \frac{(|x|^2-1)^2}{4} \times$$

$$\times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^{s+1} \left( \Delta P - \frac{1-\alpha}{2s+4} \Delta P \right) (\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \quad (23)$$

*Доказательство.* С помощью формулы (20) найдем решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta^2 u(x) = \Delta^2 P(x), x \in \Omega; \quad u|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{|x|=1} = 0.$$

Имеем

$$u(x) = \frac{(|x|^2-1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \Delta^{s+2} P(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha.$$

Пусть гармонический полином  $u_0(x)$  удовлетворяет условию  $u_0(x)|_{|x|=1} = \Delta P(x)|_{|x|=1}$ . Тогда следующий полином  $v(x) = P(x) + u_0(x)(1-|x|^2)/2 - u(x)$  является бигармоническим, поскольку  $\Delta^2 v(x) = \Delta^2 P(x) - \Delta^2 u(x) = 0$  и в силу свойств оператора  $\Delta$  и функции  $u(x)$  удовлетворяет граничным условиям  $v(x)|_{|x|=1} = P(x)|_{|x|=1}$  и

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{|x|=1} = \Delta \left( P(x) + \frac{1-|x|^2}{2} u_0(x) \right)|_{|x|=1} =$$

$$= \left( \Delta P(x) - |x|^2 u_0(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Delta u_0(x) \right)|_{|x|=1} = (\Delta P(x) - u_0(x))|_{|x|=1} = 0.$$

Преобразуем решение  $v(x)$ . Полином  $u_0(x)$  запишется в виде

$$u_0(x) = \Delta P(x) - \frac{|x|^2-1}{2} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^{s+1} \Delta P(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha.$$

Поэтому искомое решение  $v(x)$  запишется в виде

$$v(x) = P(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Delta P(x) +$$

$$+ \frac{(|x|^2-1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^{s+1} \left( \Delta P - \frac{1-\alpha}{2s+4} \Delta P \right) (\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha.$$

Решение задачи (21)–(22) найдено и оно имеет вид (23).

**Пример 3.** Пусть в задаче (21)–(22)  $P(x) = x_j^2$ . Тогда в сумме из формулы (23) будет только один член  $s = 0$ . Ясно, что  $\Delta x_j^2 = 2$ ,  $\Delta x_j^2 = 2x_j^2$  и поэтому

$$v(x) = x_j^2 + (1-|x|^2)x_j^2 + \frac{(|x|^2-1)^2}{4} \int_0^1 \frac{1}{2} 4\alpha^{n/2-1} d\alpha =$$

$$= x_j^2 + (1-|x|^2)x_j^2 + \frac{1}{n} (|x|^2-1)^2 = 2x_j^2 - x_j^2|x|^2 + \frac{|x|^4 - 2|x|^2 + 1}{n}.$$

Проверим, что найденное  $v(x)$  действительно является решением задачи (21)–(22) с  $P(x) = x_j^2$ . Воспользуемся простым равенством [6]

$$\Delta(|x|^k P_m(x)) = k(2m+k+n-2)|x|^{k-2} P_m(x) + |x|^k \Delta P_m(x).$$

Тогда легко получить

$$\Delta v(x) = 4 - 2(n+4)x_j^2 - 2|x|^2 + (4(n+2)|x|^2 - 4n)/n$$

и значит полином  $v(x)$  бигармонический

$$\Delta^2 v(x) = -4(n+4) - 4n + \frac{8n(n+2)}{n} = 0. \quad (24)$$

Кроме этого  $v(x)$  удовлетворяет условиям  $v|_{|x|=1} = (x_j^2)|_{|x|=1}$  и

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{|x|=1} = \Lambda v|_{|x|=1} = \left(4x_j^2 - 4x_j^2|x|^2 + \frac{4|x|^4 - 4|x|^2}{n}\right)|_{|x|=1} = 0.$$

Рассмотрим другую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре  $\Omega$ :

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{25}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = R(x) \tag{26}$$

с полиномиальным граничным значением  $R(x)$  и при  $n > 2$ .

**Теорема 5.** Решение задачи (25)–(26) можно записать в виде

$$v(x) = \frac{|x|^2 - 1}{2} R(x) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1 - \alpha)^s}{(2s)!!(2s + 2)!!} \Delta^{s+1} R(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \tag{27}$$

*Доказательство.* Пусть гармонический полином  $u_1(x)$  удовлетворяет условию  $u_1(x)|_{|x|=1} = R(x)|_{|x|=1}$ . Тогда следующий полином  $v(x) = u_1(x)(|x|^2 - 1)/2$  является бигармоническим и удовлетворяет условиям  $v|_{|x|=1} = 0$  и

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{|x|=1} = \Lambda v|_{|x|=1} = \left(u_1(x)\Lambda \frac{|x|^2 - 1}{2} + \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda u_1(x)\right)|_{|x|=1} = (R(x)|x|^2)|_{|x|=1} = R(x)|_{|x|=1}.$$

Полином  $u_1(x)$  можно записать в виде

$$u_1(x) = R(x) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1 - \alpha)^s}{(2s)!!(2s + 2)!!} \Delta^{s+1} R(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha$$

и поэтому

$$v(x) = \frac{|x|^2 - 1}{2} R(x) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1 - \alpha)^s}{(2s)!!(2s + 2)!!} \Delta^{s+1} R(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha.$$

Что и утверждалось.

**Пример 4.** Пусть в задаче (25)–(26)  $P(x) = x_k^2$ . Тогда в сумме из формулы (27) будет только один член  $s = 0$ . Поэтому

$$v(x) = \frac{|x|^2 - 1}{2} x_k^2 - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 2\alpha^{n/2-1} d\alpha = \frac{|x|^2 - 1}{2} x_k^2 - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{2n}.$$

Аналогично формуле (24) из примера 3 полином  $v(x)$  бигармонический

$$\Delta^2 v(x) = 2(n + 4) + 2n - 8n(n + 2)/(2n) = 0.$$

Кроме этого  $v(x)$  удовлетворяет условиям  $v|_{|x|=1} = 0$  и

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{|x|=1} = \Lambda v|_{|x|=1} = \left(2x_k^2|x|^2 - x_k^2 - \frac{4|x|^4 - 4|x|^2}{2n}\right)|_{|x|=1} = (x_k^2)|_{|x|=1}.$$

Объединяя теоремы 4 и 5 получим следующее общее утверждение.

**Теорема 6.** Решение задачи Дирихле

$$\Delta^2 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{28}$$

$$u|_{\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = R(x) \tag{29}$$

в единичном шаре  $\Omega$  с полиномиальными данными  $Q(x)$ ,  $P(x)$  и  $R(x)$  имеет вид

$$u(x) = P(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2} (R(x) - \Lambda P(x)) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1 - \alpha)^s}{(2s)!!(2s + 2)!!} \Delta^s \left( \Delta(\Lambda P - R) + \frac{1 - \alpha}{2s + 4} (Q - \Delta^2 P) \right) (\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \tag{30}$$

*Доказательство.* Как нетрудно заметить решение задачи (28)–(29) можно разложить на сумму решений трех задач (2)–(3), (21)–(22) и (25)–(26). Сумма этих решений, находимых из формул (20), (23) и (27), и дает искомое решение (30).

**Пример 5.** Найдем решение задачи

$$\Delta^2 u(x) = x_i, x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = x_j^2|_{\partial\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = x_k^2|_{\partial\Omega}.$$

В соответствии с примерами 2, 3 и 4 будем иметь

$$\begin{aligned} u(x) &= x_i \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8(n+2)(n+4)} + 2x_j^2 - x_j^2 |x|^2 + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{n} + \frac{|x|^2 - 1}{2} x_k^2 - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{2n} = \\ &= x_j^2 + (|x|^2 - 1)(x_k^2/2 - x_j^2) + (|x|^2 - 1)^2 \left( \frac{x_i}{8(n+2)(n+4)} + \frac{1}{2n} \right). \end{aligned}$$

**Пример 6.** С помощью пакета *Mathematica* вычислим решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x) &= x_1^2 - 2x_3^2, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3; \\ u|_{\partial\Omega} &= (x_1^4 x_2^2 + x_2 x_3^5)|_{\partial\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = (x_1^6 + x_2^4 x_3^2)|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

по формуле (30). Обозначая  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , запишем

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= x_1^4 x_2^2 + x_2 x_3^5 + \frac{|x|^2 - 1}{2} (x_1^6 - 6x_1^4 x_2^2 + x_2^4 x_3^2 - 6x_2 x_3^5) - \\ &- \frac{(|x|^2 - 1)^2}{83160} (30240x_1^4 - 7x_1^2(-1727 + 19260x_2^2 - 5400x_2 x_3 + 720x_3^2) + 2(2409 + 4410x_2^4 + \\ &+ 18900x_2^3 x_3 + 352x_3^2 - 630x_3^4 - 900x_2 x_3(22 + 105x_3^2) + x_2^2(-2783 + 13230x_3^2))). \end{aligned}$$

### Литература

1. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. V. 287, № 2. – pp. 577–592.
2. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими / В.В. Карачик // Математические труды. – 2007. – V. 10, № 2. – pp. 142–162.
3. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2008. – V. 83, № 3. – pp. 370–380.
4. Nicolescu, N. Problème de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire / N. Nicolescu // Studia Math. – 1958. – V. 16. – pp. 353–363.
5. Карачик, В.В. Разложения Альманси для невырожденных операторов второго порядка / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 3. – № 30(206). – С. 4–12.
6. Карачик, В.В. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 384–395.
7. Бондаренко Б.А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях / Б.А. Бондаренко – Ташкент: Фан, 1984. – 183 с.
8. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.
9. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // ЖВМиМФ. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

Поступила в редакцию 1 октября 2011 г.

### CONSTRUCTION OF POLYNOMIAL SOLUTIONS TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

V.V. Karachik<sup>1</sup>, N.A. Antropova<sup>2</sup>

Polynomial solution to the Dirichlet problem for the nonhomogeneous biharmonic equation with polynomial right hand side and polynomial boundary data in a ball is constructed. Explicit representation of harmonic functions in the Almansi representation is used.

*Keywords: biharmonic equation, polynomial solutions, Dirichlet problem, Almansi equation.*

#### References

1. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. Vol. 287, no. 2. pp. 577–592.
2. Karachik V.V. On one representation of analytic functions by harmonic functions. *Siberian Advances in Mathematics*. 2008. Vol. 18, no. 2, pp. 103–117.
3. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes*. 2008. Vol. 83, no. 3–4. pp. 335–344.
4. Nicolescu N. Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire. *Studia Math.* 1958. Vol. 16. pp. 353–363.
5. Karachik V.V. Razlozheniia Al'mansi dlia nevyrozhdennykh operatorov vtorogo poriadka (Almansi decompositions for non-singular second order partial differential operators). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2010. Vol. 3, no. 30(206). pp. 4–12. (in Russ.).
6. Karachik V.V., Antropova N.A. On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation. *Differential Equations*. 2010, Vol. 46, no. 3. pp. 387–399.
7. Bondarenko B.A. *Operatornye algoritmy v differentsial'nykh uravneniiakh* (Operator algorithms in differential equations). Fan, Tashkent, 1984. 183 p.
8. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniia differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh s postoiannymi koeffitsientami I (Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2011. Vol. 4, no. 10(227). pp. 4–17. (in Russ.).
9. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011. Vol. 51, no. 9. pp. 1567–1587.

---

<sup>1</sup> Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Differential equations and Dynamical Systems Department, South Ural State University. e-mail: karachik@susu.ru

<sup>2</sup> Antropova Natalia Aleksandrovna is Post-graduate student, Teacher, Differential equations and Dynamical Systems Department, South Ural State University.

# ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Я.Т. Меграниев<sup>1</sup>

Исследована одна обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным граничным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

*Ключевые слова:* обратная задача, дифференциальные уравнения, существование, единственность, классическое решение.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2, 3], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями были ранее рассмотрены в работах [5–6].

Рассмотрим уравнение

$$u_t(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области  $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  и поставим для него обратную краевую задачу с начальными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

нелокальными условиями:

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, \quad \int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$  – заданное число,  $f(x,t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $h(t)$  – заданные функции, а  $u(x,t)$  и  $a(t)$  – искомые функции.

**Определение.** Классическим решением задачи (1)–(4) назовём пару  $\{u(x,t), a(t)\}$  функций  $u(x,t)$  и  $a(t)$ , обладающих следующими свойствами:

- 1)  $u(x,t)$  непрерывна в  $D_T$  вместе со всеми своими производными, входящими в (1);
- 2)  $a(t)$  непрерывна на  $[0, T]$ ;
- 3) все условия (1)–(4) удовлетворяются в обычном смысле.

**Лемма 1.** Пусть

$$\varphi(x) \in C[0,1], \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \psi(x) \in C[0,1], \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad f(x,t) \in C(D_T),$$

<sup>1</sup> Меграниев Яшар Топуш – доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, механико-математический факультет, Бакинский государственный университет. e-mail: yashar\_aze@mail.ru

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad h(t) \in C^2[0,T], \quad h(t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций  $u(x,t)$  и  $a(t)$ , обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (1)–(4), из (1), (2):

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(0,t) = 0, u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

$$h''(t) - \alpha u_{ttx}(0,t) + u_{xxx}(0,t) = a(t)h(t) + f(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (6)$$

**Доказательство.** Пусть  $\{u(x,t), a(t)\}$  является классическим решением задачи (1)–(4). Интегрируем уравнение (1) от 0 до 1 по  $x$ , имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t)dx - \alpha(u_{tx}(1,t) - u_{tx}(0,t)) + u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t) = a(t) \int_0^1 u(x,t)dx + \int_0^1 f(x,t)dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Отсюда с учётом  $\int_0^1 f(x,t)dx = 0$  и (3), легко приходим к выполнению (5).

Далее, так как  $h(t) \in C^2[0,T]$ , дифференцируем (4) два раза по  $t$ , получаем:

$$u_{tt}(0,t) = h''(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (8)$$

В уравнение (1) подставим  $x = 0$ , находим:

$$u_{tt}(0,t) - \alpha u_{ttx}(0,t) + u_{xxx}(0,t) = a(t)u(0,t) + f(0,t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (9)$$

Отсюда с учетом (4) и (8), легко приходим к выполнению (6).

Теперь предположим, что  $\{u(x,t), a(t)\}$  является решением задачи (1), (2), (5), (6). Тогда из (7), с учетом (5), имеем:

$$y''(t) - a(t)y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (10)$$

где

$$y(t) = \int_0^1 u(x,t)dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (11)$$

В силу условий леммы 1 очевидно, что

$$y(0) = \int_0^1 u(x,0)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad y'(0) = \int_0^1 u_t(x,0)dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0. \quad (12)$$

Из (10), с учетом (12) очевидно, что  $y(t) \equiv 0 \quad (0 \leq t \leq T)$ . Отсюда, в силу (11), легко приходим к выполнению (3).

Далее, из (6) и (9) имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(0,t) - h(t)) = a(t)(u(0,t) - h(t)), \quad (0 \leq t \leq T). \quad (13)$$

В силу  $\varphi(0) = h(0)$ ,  $\psi(0) = h'(0)$  находим:

$$u(0,0) - h(0) = \varphi(0) - h(0) = 0, \quad u_t(0,0) - h'(0) = \psi(0) - h'(0) = 0. \quad (14)$$

Из (13) с учетом (14) ясно, что выполняется и условие (4). Лемма доказана.

С целью исследования задачи (1), (2), (5), (6) рассмотрим следующие пространства. Обозначим через  $B_{2,T}^\alpha$  [7] совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) непрерывна на  $[0, T]$  и

$$J(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^\alpha \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

причем  $\alpha \geq 0$ . Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^\alpha} = J(u).$$

Через  $E_T^\alpha$  обозначим пространство  $B_{2,T}^\alpha \times C[0,T]$  вектор-функций  $z(x,t) = \{u(x,t), a(t)\}$  с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E_T^\alpha} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что  $B_{2,T}^\alpha$  и  $E_T^\alpha$  являются банаховыми пространствами.

Первую компоненту  $u(x,t)$  решения  $\{u(x,t), a(t)\}$  задачи (1),(2),(5),(6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \tag{15}$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) получаем:

$$(1 + \alpha \lambda_k^2) u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T; k = 0, 1, \dots), \tag{16}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0, 1, \dots), \tag{17}$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t), \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Решая задачу (16), (17), находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau; u, a)d\tau, \tag{18}$$

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{19}$$

где  $\beta_k = \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1+\alpha\lambda_k^2}}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

После подстановки выражения  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) в (15) для определения компоненты  $u(x,t)$  решения задачи (1), (2), (5) и (6) получаем:

$$u(x,t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau; u, a)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \tag{20}$$

Теперь из (6) с учетом (15) имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_k^2 u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t)) \right\}. \tag{21}$$

Далее из (16) с учетом (19) получаем:

$$\vartheta_k(t) \equiv \alpha \lambda_k^2 u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t; u, a) - u_k''(t) = \frac{\lambda_k^4}{1 + \alpha \lambda_k^2} u_k(t) + \frac{\alpha \lambda_k^2}{1 + \alpha \lambda_k^2} F_k(t; u, a) = \beta_k^2 \left\{ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \alpha \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right\} + \frac{\alpha \lambda_k^2}{1 + \alpha \lambda_k^2} F_k(t; u, a) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{22}$$

Тогда из (21) с учетом (22) находим:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \right\} \equiv h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\alpha \lambda_k^2}{1 + \alpha \lambda_k^2} F_k(t; u, a) + \beta_k^2 \varphi_k \cos \beta_k t + \beta_k \psi_k \sin \beta_k t + \frac{\beta_k}{1 + \alpha \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right] \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2), (5), (6) свелось к решению системы (20), (23) относительно неизвестных функций  $u(x,t)$  и  $a(t)$ .

Справедлива следующая

**Лемма 2.** Если  $\{u(x,t), a(t)\}$  – любое решение задачи (1), (2), (5), (6), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (18), (19).

**Замечание.** Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1), (2), (5), (6) достаточно доказать единственность решения системы (20), (23).

Теперь рассмотрим в пространстве  $E_T^5$  оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где  $\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x$ ,  $\Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t)$ , а  $\tilde{u}_0(t)$ ,  $\tilde{u}_k(t)$  и  $\tilde{a}(t)$  – равны соответственно правым частям (18), (19) и (23).

Очевидно, что

$$\alpha \lambda_k^2 < 1 + \alpha \lambda_k^2 < (1 + \alpha) \lambda_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}} \lambda_k < \beta_k < \alpha^{-\frac{1}{2}} \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Учитывая эти соотношения, имеем:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + T\sqrt{T} \left( \int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]}, \quad (24)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{1+\alpha}T}{\alpha} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\alpha} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha\sqrt{6}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 |\varphi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6\alpha}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\psi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}} \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (26)$$

Предположим, что данные задачи (1), (2), (5), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1.  $\varphi(x) \in C^4[0,1]$ ,  $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \varphi'''(0) = \varphi'''(1) = 0$ ,
2.  $\psi(x) \in C^3[0,1]$ ,  $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\psi'(0) = \psi'(1) = \psi'''(0) = \psi'''(1) = 0$ ,

3.  $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T), f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T), f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ),

4.  $h(t) \in C^2[0,T], h(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Тогда из (16)–(18) имеем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} \leq A_1(T) + B_1(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \tag{27}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \tag{28}$$

где  $A_1(T) = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}\|f(x,t)x\|_{L_2(D_T)} + 2\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{2\sqrt{(1+\alpha)T}}{\alpha}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}$ ;  $A_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\{\|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{6}}\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\alpha\sqrt{6}}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{6\alpha}}\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}}\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}\}$ ;  $B_1(T) = T^2 + \frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\alpha}T$ ;  $B_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}}T + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .

Из неравенств (27), (28) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \tag{29}$$

где  $A(T) = A_1(T) + A_2(T)$ ,  $B(T) = B_1(T) + B_2(T)$ .

Итак, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1–4 и

$$(A(T) + 2)^2 B(T) < 1. \tag{30}$$

Тогда задача (1), (2), (5), (6) имеет в шаре  $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$  пространства  $E_T^5$  единственное решение.

**Доказательство.** В пространстве  $E_T^5$  рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{31}$$

где  $z = \{u, a\}$ , компоненты  $\Phi_i(u, a)$  ( $i = 1, 2$ ) оператора  $\Phi(u, a)$  определены правыми частями уравнений (20) и (23).

Рассмотрим оператор  $\Phi(u, a)$  в шаре  $K = K_R$  из  $E_T^5$ . Аналогично (29) получаем, что для любых  $z, z_1, z_2 \in K_R$  справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^5} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \tag{32}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^5} \leq B(T)R\left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\right). \tag{33}$$

Тогда, из оценок (32), (33) с учетом (30) следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому в шаре  $K = K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a\}$ , которая является в шаре  $K = K_R$  единственным решением уравнения (31), т.е.  $\{u, a\}$  является в шаре  $K = K_R$  единственным решением системы (20), (23).

Функция  $u(x,t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^5$ , имеет непрерывные производные  $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$  в  $D_T$ .

Из (8) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha} \|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что  $u_{tt}(x,t), u_{ttt}(x,t)$  непрерывны в  $D_T$ .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (5) и (6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно,  $\{u(x, t), a(t)\}$  является решением задачи (1), (2), (5), (6), причем в силу леммы 2 оно единственное в шаре  $K = K_R$ . Теорема доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

**Теорема 2.** Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача (1)–(4) имеет в шаре  $K = K_R (\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$  из  $E_T^5$  единственное классическое решение.

### Литература

1. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Диф. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – Р. 1925–1935.
2. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math.. – 1963. – Vol. 5, № 21. – Р. 155–160.
3. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Диф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – Р. 294–304.
4. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.
5. Гордезиани, Д.Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили // Мат. моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.
6. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Диф. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 887–892.
7. Худавердиев, К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев, А.А. Велиев. – Баку: Чашыоглы, 2010. – 168 с.

*Поступила в редакцию 13 мая 2011 г.*

## INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FOURTH ORDER WITH INTEGRAL CONDITION

Ya.T. Mehraliyev<sup>1</sup>

In the article the author analyses one inverse boundary problem for a partial differential equation of fourth order with integral condition. First, an original problem is reduced to the equivalent problem, the theorem of existence and uniqueness of solution is proved for the latter. Then, using these facts the author proves existence and uniqueness of classical solution of the original problem.

*Keywords: inverse problem, differential equations, existence, uniqueness, classical solution.*

### References

1. Samarskii A.A. *Dif. uravneniia*. 1980. Vol. 16, no 11. pp. 1925–1935.
2. Cannon J.R. *Quart. Appl. Math.* 1963. Vol. 5, no. 21. pp. 155–160.
3. Ionkin N.I. *Dif. uravneniia*. 1977. Vol. 13, no. 2. pp. 294–304.
4. Nakhushev A.M. *Dif. uravneniia*. 1982. Vol. 18, no. 1. pp. 72–81.
5. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Mat. modelirovanie*. 2000. Vol. 12, no. 1. pp. 94–103.
6. Pul'kina L.S. *Dif. uravneniia*. 2004. Vol. 40, no. 7. pp. 887–892.
7. Khudaverdiev K.I., Veliev A.A. *Issledovanie odnomernoi smeshannoi zadachi dlia odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravnenii tret'ego poriadka s nelineinoi operatornoi pravoi chast'iu* (Investigation of one-dimensional mixed problems for a class of third-order pseudohyperbolic equations with nonlinear right-hand side of the operator). Baku: Chashyogly, 2010. 168 p.

<sup>1</sup> Mehraliyev Yashar Topush is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate professor, Differential and Integral Equations Department, Baku State University. e-mail: yashar\_aze@mail.ru

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА $h(X, k)$

С.В. Медведев<sup>1</sup>

**Пространство  $h(X, k)$  – это наименьшее  $h$ -однородное пространство первой категории, которое содержит метрическое пространство  $X$  в качестве замкнутого подмножества. В заметке доказывается одна внутренняя характеристика пространства  $h(X, k)$ .**

*Ключевые слова:*  $h$ -однородное пространство, пространство первой категории, вложение.

В статье рассматриваются только нульмерные (в смысле Ind) метрические пространства.

В заметке продолжают исследования, начатые в работах [1] и [2]. В [2] доказано, что для любого пространства  $X$  веса  $\leq k$  можно построить единственное с точностью до гомеоморфизма  $h$ -однородное пространство  $h(X, k)$  первой категории и веса  $k$ , которое в некотором смысле является наименьшим среди всех  $h$ -однородных пространств, содержащих  $X$  в качестве замкнутого подмножества. Для пространства  $h(X, k)$  выполняются следующие условия:  $h(X, k) \in \sigma LF(X)$  и  $h(X, k) \in u(X)$  (расшифровка обозначений дана ниже). Мы покажем, что *любое* однородное по весу пространство  $Y$  первой категории, удовлетворяющее условиям  $w(Y) = k$ ,  $Y \in u(X)$  и  $Y \in \sigma LF(X)$ , будет гомеоморфно пространству  $h(X, k)$ .

Основные результаты заметки: теоремы 2, 7 и 9.

**Определения и обозначения.** Запись  $X \approx Y$  означает, что пространства  $X$  и  $Y$  – гомеоморфные.  $w(X)$  – вес пространства  $X$ . Для системы множеств  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$  через  $|\mathcal{U}|$  обозначается мощность семейства  $\mathcal{U}$ ,  $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ,  $\text{mesh}(\mathcal{U})$  – мелкость семейства  $\mathcal{U}$  (верхняя грань диаметров множеств из  $\mathcal{U}$ ). Для отображения  $f : X \rightarrow Y$  положим  $f(\mathcal{U}) = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$ .

Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой  $\omega$ ; также  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Для пространства  $X$  через  $\mathfrak{Z}(X)$  обозначим семейство всех непустых открыто-замкнутых множеств из  $X$ . Пусть  $F(X) = \{Y - \text{пространство} : Y \text{ гомеоморфно некоторому непустому замкнутому множеству из } X\}$ . Положим  $LF(X) = \{Y - \text{пространство} : \text{для любой точки } u \in Y \text{ найдется такая окрестность } V \in \mathfrak{Z}(Y), \text{ что } V \in F(X)\}$ . Далее, введем класс  $\sigma LF(X) = \{Y : \text{пространство } Y \text{ представимо в виде } Y = \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}, \text{ где каждое множество } Y_n \text{ замкнуто в } Y \text{ и } Y_n \in LF(X)\}$ . Аналогично, пусть  $H_0(X)$  – семейство всех непустых замкнутых нигде не плотных множеств из  $X$ . Положим  $H(X) = \{Y : Y \approx Z, \text{ если } Z \in H_0(X)\}$  и  $LH(X) = \{Y : \forall u \in Y \exists V \in \mathfrak{Z}(Y) (u \in V \text{ и } V \in H(X))\}$ . Мы пишем  $Y \in \sigma LH(X)$ , если пространство  $Y$  можно представить в виде счетного объединения замкнутых подмножеств, каждое из которых принадлежит семейству  $LH(X)$ . Очевидно, что всегда  $\sigma LH(X) \subseteq \sigma LF(X)$ . Заметим (см. лемма 1 в [2]), что если  $\text{Ind} X = 0$  и  $Y \in \sigma LF(X)$ , то  $\text{Ind} Y = 0$ .

Пространство  $X$  называется *пространством первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Пространство  $Y$  называется  *$u$ -однородным* относительно пространства  $X$ , если любое непустое открыто-замкнутое множество из  $Y$  содержит замкнутую копию пространства  $X$ ; запись  $Y \in u(X)$ . Другими словами,  $Y \in u(X)$ , если  $X \in F(V)$  для любого  $V \in \mathfrak{Z}(Y)$ . Мы пишем  $Y \in \text{un}(X)$ , если  $X \in H(V)$  для любого  $V \in \mathfrak{Z}(Y)$ . Если  $X \in u(X)$ , то  $X$  называется  *$u$ -однородным* пространством.  $X$  называется  *$h$ -однородным* пространством, если каждое открыто-замкнутое множество из  $X$  гомеоморфно всему пространству  $X$ . Очевидно, что каждое  $h$ -однородное пространство будет и  $u$ -однородным пространством.

**Замечание.** Возьмем пространство  $X$ . Так как в этой статье мы рассматриваем только нульмерные (в смысле Ind) метрические пространства, то можно считать, что  $X \subseteq B(k)$ , где  $k = w(X)$ . Пусть  $\rho$  – стандартная метрика на пространстве Бэра  $B(k)$ . В дальнейшем мы будем считать, что топология на произвольном пространстве  $X$  всегда порождена сужением метрики  $\rho$  на  $X$ .

<sup>1</sup> Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.  
e-mail: medv@math.susu.ac.ru

Пусть  $F_i$  – замкнутое нигде не плотное подмножество из пространства  $X_i$ , где  $i \in \{1; 2\}$ . Пусть дан гомеоморфизм  $f: F_1 \rightarrow F_2$ . Тогда в пространстве  $X_i$  можно построить семейства множеств  $\mathcal{U}_n^i = \{U_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n\}$ , удовлетворяющие следующим условиям для любых  $n \in \omega$  и  $i \in \{1; 2\}$ :

- s1) семейство  $\mathcal{U}_n^i$  дискретно в  $X_i$  и состоит из открыто-замкнутых множеств пространства  $X_i$ ;
- s2)  $\text{mesh}(\mathcal{U}_n^i) \leq (n+1)^{-1}$  в метрике  $\rho$ ;
- s3) для любого  $U \in \mathcal{U}_{n+1}^i$  существует такое  $W \in \mathcal{U}_n^i$ , что  $U \subseteq W$ ;
- s4)  $\cup \mathcal{U}_n^i$  – открыто-замкнутая окрестность множества  $F_i$  и  $\cap \{\cup \mathcal{U}_n^i : n \in \omega\} = F_i$ ;
- s5)  $V_{\alpha,n}^i = U_{\alpha,n}^i \setminus (\cup \mathcal{U}_{n+1}^i)$  – непустое открыто-замкнутое множество в  $X_i$  для любого  $\alpha \in A_n$ ;
- s6)  $\cup \{V_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n, n \in \omega\} = X_i \setminus F_i$  и  $V_{\alpha,n}^i \cap V_{\beta,m}^i = \emptyset$ , если  $(\alpha, n) \neq (\beta, m)$ ;
- s7)  $f(F_1 \cap U_{\alpha,n}^1) = F_2 \cap U_{\alpha,n}^2$  для любого  $\alpha \in A_n$ .

Семейство множеств  $\{F_i \cap U_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n, n \in \omega\}$  образует базу для  $F_i$ ,  $i \in \{1; 2\}$ . Семейство  $\{U_n^i : n \in \omega\}$  называется *внешней базой* множества  $F_i$ , а семейство  $\mathcal{V}_i = \{V_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n, n \in \omega\}$  – *системой остаточных множеств* для множества  $F_i$  в пространстве  $X_i$ ,  $i \in \{1; 2\}$ . Используя свойство (s7), определим биекцию  $\chi: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  по правилу  $\chi(U_{\alpha,n}^1) = U_{\alpha,n}^2$  и биекцию  $\psi: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  по правилу  $\psi(V_{\alpha,n}^1) = V_{\alpha,n}^2$  для любых  $\alpha \in A_n$ ,  $n \in \omega$ . В этом случае будем говорить, что  $\mathcal{V}_1$  и  $\mathcal{V}_2$  – *изоморфные системы остаточных множеств* в пространствах  $X_1$  и  $X_2$  соответственно, связанные биекцией  $\psi$  и согласованные с гомеоморфизмом  $f: F_1 \rightarrow F_2$ .

Отметим важное свойство изоморфных систем остаточных множеств (см. [1], [3]).

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{V}_1$  и  $\mathcal{V}_2$  – изоморфные системы остаточных множеств в пространствах  $X_1$  и  $X_2$  соответственно, связанные биекцией  $\psi$  и согласованные с гомеоморфизмом  $f: F_1 \rightarrow F_2$ . Для любой последовательности множеств  $\{U_i : i \in \omega\}$  из  $\mathcal{V}_1$  выберем произвольно точки  $x_i \in U_i$  и точки  $y_i \in \psi(U_i)$ , где  $i \in \omega$ . Пусть точка  $x \in F_1$  и  $y = f(x) \in F_2$ . Тогда последовательность точек  $\{x_i : i \in \omega\}$  сходится к точке  $x$  в пространстве  $X_1$  тогда и только тогда, когда последовательность точек  $\{y_i : i \in \omega\}$  сходится к точке  $y$  в пространстве  $X_2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $X$  и  $Y$  – пространства первой категории, причем  $X = \cup \{X_i : i \in \omega\}$ , где каждое множество  $X_i$  замкнуто в  $X$ , и  $Y \in \text{in}(X_i)$  для любого  $i \in \omega$ . Тогда  $Y \in \text{in}(X)$ .

*Доказательство.* Так как пространство  $X$  первой категории, то без ограничения общности можно дополнительно считать, что каждое  $X_i$  нигде не плотно в  $X$ . Так как  $Y$  – пространство первой категории, то  $Y = \cup \{Y_j : j \in \omega\}$ , где каждое  $Y_j \in H_0(Y)$ .

Зафиксируем открыто-замкнутое множество  $W \subseteq Y$ . Так как множество  $Y_0$  нигде не плотно в  $W$ , то существует такое непустое открыто-замкнутое множество  $D_0 \subset W$ , что  $D_0 \cup Y_0 = \emptyset$  и  $W \setminus D_0 \neq \emptyset$ . Пусть  $\mathcal{D}_0 = \{D_0\}$ . Положим  $T_0 = X_0$ . Так как  $W \in \text{in}(X_i)$  для любого  $i \in \omega$ , то существует гомеоморфизм  $f_0: T_0 \rightarrow Z_0$  для некоторого множества  $Z_0 \in H_0(D_0)$ . Построим изоморфные системы остаточных множеств  $\mathcal{U}_0$  и  $\mathcal{V}_0$  в пространствах  $X$  и  $D_0$  соответственно, согласованные с  $f_0$  и связанные биекцией  $\psi_0: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$ , причем  $\cup \mathcal{U}_0 = X \setminus T_0$  и  $\cup \mathcal{V}_0 = D_0 \setminus Z_0$ . Так как  $Y_1$  нигде не плотно в  $Y$ , то для каждого  $U \in \mathcal{U}_0$  можно найти такое непустое открыто-замкнутое множество  $D_U \subset \psi_0(U)$ , что  $D_U \cap Y_1 = \emptyset$  и множество  $\psi_0(U) \setminus D_U$  не пусто. Обозначим  $D_U = \varphi_0(U)$ . Тогда для семейства  $\mathcal{D}_1 = \{D_U : U \in \mathcal{U}_0\}$  определена биекция  $\varphi_0: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{D}_1$ . Очевидно, что  $\varphi_0(U) \subset \psi_0(U)$  для любого  $U \in \mathcal{U}_0$ . По построению, замыкание  $\text{cl}(\cup \mathcal{D}_1) = Z_0 \cap (\cup \mathcal{D}_1)$  и  $Z_0 \cup (\cup \mathcal{D}_1) = \emptyset$ .

Зафиксируем  $U \in \mathcal{U}_0$ . Найдем наименьшее число  $j$  такое, что пересечение  $X_U = X_j \cap U$  не пусто. Так как  $\varphi_0(U) \in \text{un}(X_j)$ , то существует гомеоморфизм  $f_{1U} : X_U \rightarrow Z_U$  для некоторого множества  $Z_U \in H_0(\varphi_0(U))$ . Возьмем изоморфные системы остаточных множеств  $\mathcal{U}_{1U}$  и  $\mathcal{V}_{1U}$  в пространствах  $X$  и  $\varphi_0(U)$  соответственно, согласованные с  $f_{1U}$  и связанные биекцией  $\psi_{1U} : \mathcal{U}_{1U} \rightarrow \mathcal{V}_{1U}$ , причем  $\bigcup \mathcal{U}_{1U} = U \setminus X_U$  и  $\bigcup \mathcal{V}_{1U} = \varphi_0(U) \setminus Z_U$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\text{mesh}(\mathcal{U}_{1U}) \leq 2^{-1}$  и  $\text{mesh}(\mathcal{V}_{1U}) \leq 2^{-1}$ . Определим множества  $T_1 = T_0 \cup (\cup \{X_U : U \in \mathcal{U}_0\})$  и  $Z_1 = Z_0 \cup (\cup \{Z_U : U \in \mathcal{U}_0\})$ . По построению  $X_1 \subset T_1$ ,  $T_1 \in H_0(X)$  и  $Z_1 \in H_0(W)$ . Зададим отображение  $f_1 : T_1 \rightarrow Z_1$  по правилу:  $f_1(x) = f_0(x)$ , если  $x \in T_0$ , и  $f_1(x) = f_{1U}(x)$ , если  $x \in X_U$ . Используя лемму 1, несложно проверить, что  $f_1$  – гомеоморфизм. Положим  $\mathcal{U}_1 = \{U^* : U^* \in \mathcal{U}_{1U}, U \in \mathcal{U}_0\}$  и  $\mathcal{V}_1 = \{V^* : V^* \in \mathcal{V}_{1U}, U \in \mathcal{U}_0\}$ . Определим биекцию  $\psi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$  по правилу  $\psi_1(U^*) = \psi_{1U}(U^*)$ , если  $U^* \in \mathcal{U}_{1U}$ . Затем зафиксируем  $U \in \mathcal{U}_1$ . Внутри множества  $\psi_1(U)$  найдем множество  $D_U = \varphi_1(U)$ , не пересекающееся с  $Z_2$ , и повторим указанную выше процедуру. В результате, по индукции мы построим множества  $T_n \in H_0(X)$  и  $Z_n \in H_0(W)$ ; семейства  $\mathcal{U}_n$  и  $\mathcal{V}_n$ , состоящие из непересекающихся открыто-замкнутых множеств в пространствах  $X$  и  $W$  соответственно; семейство  $\mathcal{D}_n$ , состоящее из непустых открыто-замкнутых подмножеств  $W$ ; биекции  $\varphi_n : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{D}_{n+1}$ ; биекции  $\psi_n : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$  и гомеоморфизмы  $f_n : T_n \rightarrow Z_n$ , удовлетворяющие при любом  $n \in \omega$  следующим соотношениям:

- a1)  $T_0 = X_0, X_{n+1} \cap T_n \subset T_{n+1}$  и  $\bigcup \mathcal{U}_n = X \setminus T_n$ ,
- a2) для любого  $U \in \mathcal{U}_{n+1}$  существует единственное множество  $U^* \in \mathcal{U}_n$ , для которого  $U \subset U^*$ ,
- a3)  $\bigcup \mathcal{D}_{n+1} \subset \bigcup \mathcal{V}_n$ , причем  $\varphi_n(U) \subset \psi_n(U)$  и  $\psi_n(U) \setminus \varphi_n(U) \neq \emptyset$  для любого  $U \in \mathcal{U}_n$ ,
- a4)  $(Z_{n+1} \setminus Z_n) \subset \bigcup \mathcal{V}_n$  и  $\bigcup \mathcal{V}_n = \bigcup \mathcal{D}_n \setminus Z_n$ ,
- a5) замыкание  $\text{cl}(\bigcup \mathcal{D}_{n+1}) = (\bigcup \mathcal{D}_{n+1}) \cup Z_n$ , причем  $(\bigcup \mathcal{D}_{n+1}) \cap Z_n = \emptyset$ ,
- a6)  $(\bigcup \mathcal{D}_n) \cup (\cap \{Y_i : i \leq n\}) = \emptyset$ ,
- a7)  $\text{mesh}(\mathcal{U}_n) \leq (n+1)^{-1}$  и  $\text{mesh}(\mathcal{V}_n) \leq (n+1)^{-1}$ ,
- a8)  $f_{n+1}(U \cap T_{n+1}) = \varphi_n(U) \cap Z_{n+1}$  для любого  $U \in \mathcal{U}_n$ ,
- a9) сужение  $f_{n+1}$  на  $T_n$  совпадает с  $f_n$ .

Из a1 следует, что  $X = \cup \{T_n : n \in \omega\}$ . Положим  $Z^* = \cup \{Z_n : n \in \omega\}$ . Определим отображение  $f : X \rightarrow Z^*$  по правилу:  $f(x) = f_n(x)$ , если  $x \in T_n$ . Из a9 вытекает корректность этого определения. Ясно, что  $f$  – биекция. Из леммы 1 вытекает, что  $f$  – гомеоморфизм.

Проверим, что  $Z^*$  – замкнутое множество в  $Y$ . Допустим, что существует точка  $y \in \text{cl}(Z^*) \setminus Z^*$ . Тогда  $y \in Y_n$  для некоторого  $n$ . Из a4 и a3 следует, что  $\bigcup \mathcal{D}_m \subset \bigcup \mathcal{D}_n$  для любого  $m \geq n$ . Значит, множество  $A_n = \cap \{Z_m : m \geq n\} \subset \bigcup \mathcal{D}_n$ . Но  $\text{cl}(A_n) \subset (\bigcup \mathcal{D}_n) \cup Z_{n-1}$  согласно a5. Учитывая, что  $\text{cl}(Z^*) = \text{cl}(A_n) \cap Z_{n-1}$ , заключаем, что  $y \in \text{cl}(A_n) \cap Z_{n-1}$ . Так как  $y \notin Z^*$ , то  $y \notin Z_{n-1}$ . Поэтому  $y \in \bigcup \mathcal{D}_n$ . С другой стороны,  $y \notin \bigcup \mathcal{D}_n$  согласно a6. Получили противоречие. Итак,  $\text{cl}(Z^*) = Z^*$ .

Остается проверить, что множество  $Z^*$  нигде не плотно в  $Y$ . Возьмем произвольное открытое множество  $O$  из  $Y$  и точку  $y \in O \cap Z^*$ . Тогда  $O$  содержит окрестность  $V^*$  точки  $y$  радиуса  $j^{-1}$  для некоторого  $j$ . По построению каждое множество  $Z_n$  нигде не плотно в  $Z^*$ . Тогда множество индексов  $\{n : Z_n \cup V^* \neq \emptyset\}$  бесконечно. Поэтому найдется такое  $m > j$ , что  $Z_m \cup V^* \neq \emptyset$ . Пусть  $z \in Z_m \cup V^*$ . Из свойств s2, s3 и s4 системы остаточных множеств вытекает, что найдется множество  $V \in \mathcal{V}_m$ , лежащее в окрестности точки  $z$  радиуса  $(m+1)^{-1}$ . Тогда  $V \subset V^* \subset O$ , ведь  $m > j$ . Пусть  $V = \psi_m(U)$  для некоторого  $U \in \mathcal{U}_m$ . Из a3 следует, что множество  $V$  (следовательно, и  $O$ ) содержит непустое открытое подмножество  $\psi_m(U) \setminus \varphi_m(U)$ , которое не пересекается с  $Z^*$ . Поэтому  $Z^*$  нигде не плотно в  $Y$ . Таким образом,  $W \in \text{un}(X)$ . Следовательно,  $Y \in \text{un}(X)$ .  $\square$

**Следствие 3.** Пусть  $X$  и  $Y$  – пространства первой категории, причем  $Y \in \text{un}(X)$ . Тогда  $Y \in \text{un}(X)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $Y \in \mathcal{U}(X)$  и  $Y$  – пространство первой категории. Тогда  $Y \in \text{un}(X)$ .

*Доказательство.* Если  $X$  – пространство первой категории, то применяем следствие 3.

Пусть  $X$  не является пространством первой категории. Положим  $X^* = \cap \{U : U \text{ – открытое множество в } X \text{ первой категории}\}$ . По теореме Банаха  $X^*$  – пространство первой категории. Тогда замкнутое в  $X$  множество  $X^0 = X \setminus X^*$  нигде не локально первой категории. При этом  $B = X^0 \cap \text{cl}(X^*)$  – замкнутое нигде не плотное множество в  $X$ ; допускается случай  $B = \emptyset$ .

Возьмем  $W \in \mathcal{F}(Y)$ . По условию леммы существует гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Z$  для некоторого замкнутого множества  $Z \subset W$ . Так как  $X^0$  нигде не локально первой категории, то  $f(X^0) \in H_0(W)$ .

Первый случай. Пусть  $B = \emptyset$ . Тогда  $f(X^*)$  и  $f(X^0)$  – непересекающиеся замкнутые множества в  $W$ . Любое метрическое пространство нормально, поэтому у множеств  $f(X^*)$  и  $f(X^0)$  в  $W$  существуют непересекающиеся открыто-замкнутые окрестности  $W^*$  и  $W^0$  соответственно. Так как  $Y \in \mathcal{U}(X)$ , то  $Y \in \mathcal{U}(X^*)$ . Следовательно, по следствию 3 найдется множество  $Z^* \in H_0(W^*)$ , которое гомеоморфно  $X^*$ . Тогда  $Z^* \cup f(X^0) \approx X$  и  $Z^* \cup f(X^0) \in H_0(W)$ . В этом случае все доказано.

Второй случай. Пусть  $B \neq \emptyset$ . Так как  $B \in H_0(X^*)$ , то можно построить изоморфные системы остаточных множеств  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$  в пространствах  $X^*$  и  $W$  соответственно, согласованные с  $f$  и связанные биекцией  $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , причем  $\cup \mathcal{U} = X^* \setminus B$  и  $\cup \mathcal{V} = W \setminus f(B)$ . Для любого  $U \in \mathcal{U}$  множество  $U \cup X^*$  первой категории, поэтому по следствию 3 множество  $\psi(U \cap X^*)$  содержит замкнутое нигде не плотное множество  $W_U$ , которое гомеоморфно  $U \cap X^*$ ; пусть  $f_U: U \cap X^* \rightarrow W_U$  – некоторый гомеоморфизм. Так как  $f(X^0) \in H_0(W)$ , то без ограничения общности можно считать, что множества  $W_U$  и  $f(X^0)$  не пересекаются. Определим отображение  $g: X \rightarrow W$  по правилу  $g(x) = f(x)$ , если  $x \in X^0$ , или  $g(x) = f_U(x)$ , если  $x \in U$  для некоторого  $U \in \mathcal{U}$ . Несложно проверить, что  $g$  – биекция. Множества  $X^*$  и  $X^0$  замкнуты в  $X$ , сужения  $g$  на  $X^*$  и  $X^0$  – гомеоморфизмы, причем по построению  $g(X^* \cap X^0) = g(X^*) \cap g(X^0) = f(B)$ , поэтому  $g$  – гомеоморфизм. По построению  $g(X) \in H_0(W)$ . Второй случай разобран.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $X$  – пространство первой категории и  $Y \in \mathcal{U}(X)$ . Тогда  $Y \in \text{un}(X)$ .

*Доказательство.* Если  $Y$  – пространство первой категории, то применяем следствие 3.

Пусть  $Y$  не является пространством первой категории. Как в доказательстве леммы 4, представим пространство  $Y$  в виде  $Y = Y^* \cap Y^0$ , где  $Y^*$  – наибольшее открытое множество первой категории в  $Y$ , а  $Y^0$  – замкнутое множество, которое нигде не локально первой категории. Возьмем произвольное открыто-замкнутое множество  $W \subset Y$ . Если  $W \cup Y^*$  не пусто, то  $W \cup Y^* \in \text{un}(X)$  по следствию 3. Если  $W \cup Y^* = \emptyset$ , то  $\text{int} Y^0 \neq \emptyset$  и по условию леммы пересечение  $W \cup (\text{int} Y^0)$  содержит замкнутую копию  $Z$  пространства  $X$ . Так как  $Y^0$  нигде не локально первой категории, то  $Z$  нигде не плотно в  $Y^0$  (следовательно, нигде не плотно в  $Y$ ). В любом случае  $Y \in \text{un}(X)$ .  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $X$  – пространство первой категории и  $Y \in \sigma LF(X)$ . Тогда  $Y \in \sigma LH(X)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай  $Y \in F(X)$ . То есть  $Y$  гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству  $D$  из пространства  $X$ . По определению пространства первой категории  $X = \cup \{X_i : i \in \omega\}$ , где каждое  $X_i$  – замкнутое нигде не плотное подмножество  $X$ . Тогда каждое множество  $D \cap X_i \in H_0(X)$ . Следовательно,  $Y$  является счетным объединением замкнутых подмножеств, каждое из которых принадлежит семейству  $H(X)$ .

Рассмотрим общий случай  $Y \in \sigma LF(X)$ . По определению  $Y = \cup \{Y_n : n \in \omega\}$ , где каждое множество  $Y_n$  замкнуто в  $Y$  и каждое  $Y_n \in \sigma LF(X)$ . Так как  $\text{Ind} Y = 0$ , то  $\text{Ind} Y_n = 0$  для любого  $n \in \omega$ . Тогда  $Y_n \approx \oplus \{Y_{n,\alpha} : \alpha \in A_n\}$ , где каждое множество  $Y_{n,\alpha} \in F(X)$ . По первой части доказательства леммы каждое множество  $Y_{n,\alpha}$  имеет вид  $Y_{n,\alpha} = \cup \{Y_{n,\alpha,j} : \alpha \in A_n, j \in \omega\}$ , где любое  $Y_{n,\alpha,j} \in H(X)$ . Множества  $Y_{n,j} = \cup \{Y_{n,\alpha,j} : \alpha \in A_n\}$  замкнуты в  $Y$  и принадлежат семейству  $LH(X)$ . Итак,  $Y = \cup \{Y_{n,j} : n \in \omega, j \in \omega\} \in \sigma LH(X)$ .  $\square$

**Теорема 7.** Пусть  $Z \in \sigma LF(X)$  и  $Y \in \mathcal{U}(X)$  для пространства  $X$ , причем  $w(Z) \leq k$ ,  $Y$  – пространство первой категории и  $Y$  нигде не локально веса  $< k$ . Тогда  $Y \in \text{un}(Z)$ .

*Доказательство.* По определению  $Z = \cup\{Z_n: n \in \omega\}$ , где каждое множество  $Z_n$  замкнуто в  $Z$  и  $Z_n \in LF(X)$ . Более того, так как  $\text{Ind}Z = 0$ , то каждое  $Z_n = \bigoplus\{Z_{n,\alpha}: \alpha \in A_n\}$ , где  $Z_{n,\alpha} \in F(X)$  и мощность  $|A_n| \leq k$  для любого  $n \in \omega$ . Возьмем произвольное непустое открыто-замкнутое множество  $W \subset Y$ . Так как  $Y$  нигде не локально веса  $< k$ , то для любого  $n \in \omega$  существует дискретное покрытие  $\{W_\alpha: \alpha \in A_n\}$  множества  $W$  непустыми открыто-замкнутыми множествами. Согласно лемме 4,  $Y \in \text{un}(X)$ . Тогда каждое  $W_\alpha \in \text{un}(Z_{n,\alpha})$ . Следовательно,  $W \in \text{un}(Z_n)$  для любого  $n \in \omega$ .

Рассмотрим вспомогательное пространство  $Q \times Z$  первой категории, где  $Q$  – пространство рациональных чисел. Как известно,  $Q$  является объединением счетного числа точек  $\{q_m: m \in \omega\}$ . Очевидно, что всегда  $\{q_m\} \times Z_n \approx Z_n$ . Следовательно,  $W \in \text{un}(\{q_m\} \times Z_n)$  для любых  $m \in \omega$  и  $n \in \omega$ . По теореме 2 получаем, что  $W \in \text{un}(Q \times Z)$ . Так как  $Z \in F(Q \times Z)$ , то  $W \in \text{un}(Z)$ .

Множество  $W \in \mathfrak{S}(Y)$  было выбрано произвольно, поэтому  $Y \in \text{un}(Z)$ .  $\square$

**Следствие 8.** Пусть пространство первой категории  $Y$  нигде не локально веса  $< k$  и  $Y \in u(X)$  для некоторого пространства  $X$ . Тогда  $Y \in \text{un}(h(X, k))$ .

*Доказательство.* Как указано во введении,  $h$ -однородное расширение  $h(X, k)$  веса  $k$  пространства  $X$  принадлежит семейству  $\sigma LF(X)$ . Остается применить теорему 7.  $\square$

Следующая теорема является основным результатом статьи.

**Теорема 9.** Пусть дано однородное по весу пространство  $Y$  первой категории,  $w(Y) = k$ ,  $Y \in \sigma LF(X)$  и  $Y \in u(X)$  для некоторого пространства  $X$ . Тогда  $Y$  гомеоморфно пространству  $h(X, k)$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что  $w(X) \leq k$ .

По следствию 8,  $Y \in \text{un}(h(X, k))$ . С другой стороны, из условий  $h(X, k) \in u(X)$  и  $Y \in \sigma LF(X)$  вытекает, что  $Y \in \sigma LF(h(X, k))$ . Тогда  $h(X, k) \in \text{un}(Y)$  по теореме 7. Значит,  $Y$  является  $u$ -однородным пространством, т.е.  $Y \in u(Y)$ . По теореме Островского [3]  $Y$  будет  $h$ -однородным пространством. Тогда  $Y \approx h(X, k)$  по теореме 8 из [3] (или по теореме 4 из [2]).  $\square$

### Литература

1. Медведев, С.В. О замкнутых подмножествах в  $u$ -однородных пространствах первой категории / С.В. Медведев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2007. – Вып. 9. – № 19(91). – С. 37–41.
2. Medvedev, S.V. On properties of  $h$ -homogeneous spaces of first category / S.V. Medvedev // Topol. Applic. – 2010. – V. 157. – P. 2819–2828.
3. Островский, А.В. К вопросу Л.В. Келдыш о структуре борелевских множеств / А.В. Островский // Матем. Сборник. – 1986. – Т. 131, № 3. – С. 323–346.

Поступила в редакцию 1 апреля 2011 г.

## SOME PROPERTIES OF THE SPACE $h(X, k)$

S.V. Medvedev<sup>1</sup>

The space  $h(X, k)$  is the smallest  $h$ -homogeneous space of first category that contains the metric space  $X$  as a closed subset. In the paper we obtain one inner characterization of the space  $h(X, k)$ .

*Keywords:*  $h$ -homogeneous space, space of first category, embedding.

### References

1. Medvedev S.V. Vestnik YuUrGU, Serii «Matematika, fizika, khimii». 2007. Vol. 9, no. 19(91). pp. 37–41. (in Russ.).
2. Medvedev S.V. On properties of  $h$ -homogeneous spaces of first category. Topol. Applic. 2010. Vol. 157. pp. 2819–2828.
3. Ostrovskii A.V. Matem. Sbornik. 1986. Vol. 131, no. 3. pp. 323–346. (in Russ.).

<sup>1</sup> Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Analysis Department, Faculty of Mechanics and Mathematics, South Ural State University. e-mail: medv@math.susu.ac.ru

# О ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

К.М. Расулов<sup>1</sup>

Рассматривается краевая задача типа Дирихле в классах квазигармонических функций. Получены условия разрешимости и конструктивный алгоритм решения классической задачи Дирихле в классе квазигармонических функций второго рода в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность.

*Ключевые слова:* краевая задача, видоизмененная задача типа Дирихле, квазигармоническая функция, дифференциальное уравнение, единичная окружность.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым гладким замкнутым контуром  $L$ . Область, дополняющую  $T^+ \cup L$  до полной плоскости, обозначим через  $T^-$  и будем считать, что начало координат находится в  $T^+$ .

Многие физические задачи, связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях приводятся к дифференциальным уравнениям вида (см., например, [1, 2])

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число,  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

Качественные свойства решений дифференциальных уравнений вида (1) были подробно изучены в работах [3, 4]. Следуя [4], некоторые авторы уравнения вида (1) называют *дифференциальными уравнениями Бауэра–Пешля*.

В дальнейшем под *регулярным решением* дифференциального уравнения (1) в некоторой области  $T^+$  будем понимать всякую функцию  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  класса  $C^2(T^+)$  и удовлетворяющую уравнению (1) в рассматриваемой области.

Известно [3–5], что всякое регулярное решение дифференциального уравнения (1) в области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где  $A_k^n := (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  – аналитическая (голоморфная) в области  $T^+$  функция.

Ясно, что если в (1) положить  $n = 0$ , то регулярные решения этого уравнения в области  $T^+$  представляют собой класс *гармонических в  $T^+$  функций*.

Всюду в дальнейшем при  $n \geq 1$  регулярные в области  $T^+$  решения уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$* , а функцию  $\varphi^+(z)$  из представления (2) назовем *аналитической компонентой* соответствующей квазигармонической функции  $W(z)$ .

<sup>1</sup> Расулов Карим Магомедович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра математического анализа, физико-математический факультет, Смоленский государственный университет.  
e-mail: spgu@yandex.ru (с пометкой «Расулову»)

**Определение.** Будем говорить, квазигармоническая функция  $W(z)$  принадлежит классу  $C^m(T^+ + L)$ , если в представлении (2) аналитическая компонента  $\varphi^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

**Задача D.** Требуется найти все квазигармонические функции рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $C^n(T^+ + L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию:

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \tag{3}$$

где  $W(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} W(z)$ , а  $G(t)$  и  $g(t)$  – заданные на контуре  $L$  функции класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющие на контуре  $L$  условию Гельдера).

В дальнейшем задачу **D** будем называть *видоизменной задачей типа Дирихле для квазигармонических функций рода  $n$* . Если же в (3)  $g(t) \equiv 0$ , то соответствующую задачу называем однородной видоизменной задачей типа Дирихле (короче, задачей **D**<sup>0</sup>).

Ясно, что если  $G(t) \equiv 0$ , то задача **D** представляет собой обычную (классическую) краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций.

Отметим, что в классе квазигармонических функций рода  $n = 1$  задача **D** была изучена в работе автора [5]. Основной целью настоящей заметки является построение конструктивного метода решения краевой задачи **D** в случае, когда  $n = 2$ ,  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $G(t) \equiv 0$ .

**2. О решении задачи D в случае  $n = 2$ ,  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  и  $G(t) \equiv 0$ .**

Рассмотрим сначала *однородную краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций* при  $n = 2$  и  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ , т.е. задачу, состоящую в отыскании *всех квазигармонических функций первого рода  $W(z)$ , принадлежащих классу  $C^2(T^+ + L)$  и удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{6}{(1 + z\bar{z})^2} W = 0, & z \in T^+, \\ W(t) = 0, & t \in L. \end{cases} \tag{4}$$

Сразу отметим, что поскольку решения задачи **D** ищутся в классе  $C^n(T^+ + L)$ , то в случае  $n = 2$  представление (3) принимает вид

$$W(z) = \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - 6 \left( \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12 \left( \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)^2 \varphi^+(z), \tag{5}$$

где  $\varphi^+(z)$  – аналитическая в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  функция, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающаяся на контур  $L$  вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Далее, с учетом представления (5), нетрудно установить следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Общее решение однородной задачи Дирихле (4) можно задавать в виде*

$$W_0(z) = C_1 \frac{\bar{z}(1 - z\bar{z})}{(1 + z\bar{z})^2} + C_2 \frac{z(1 - z\bar{z})}{(1 + z\bar{z})^2}, \tag{6}$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные.

**Доказательство.** В силу представления (5) и так как в точках окружности  $L = \{t : |t| = 1\}$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ , краевое условие  $W(t) = 0$ ,  $t \in L$  в рассматриваемом случае можно переписать так:

$$\frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2} \varphi^+(t) = 0, \quad t \in L. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную мероморфную в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  функцию

$$\Phi^+(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{3}{z} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{3}{z^2} \varphi^+(z), \quad (8)$$

где  $\varphi^+(z)$  – аналитическая компонента искомой квазигармонической функции  $W(z)$ . Поскольку решения задачи Дирихле (4) ищутся в классе  $C^2(T^+ + L)$ , то равенство (7) относительно мероморфной функции  $\Phi(z)$  означает, что она всюду на окружности  $L$  имеет нулевые граничные значения. Следовательно, в силу граничной теоремы единственности для мероморфных функций (см., например, [6, с. 292]), имеем:  $\Phi^+(z) \equiv 0, z \in T^+$ , т.е.

$$\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{3}{z} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{3}{z^2} \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T^+. \quad (9)$$

Нетрудно проверить (например, методом степенных рядов), что все аналитические в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  решения линейного дифференциального уравнения (9) задаются в виде

$$\varphi^+(z) = C_1^* z + C_2^* z^3, \quad (10)$$

где  $C_1^*, C_2^*$  – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, подставив в правую часть формулы (5) вместо  $\varphi^+(z)$  ее значения из (10), получим формулу (6), где приняты обозначения  $C_1 = -6C_1^*, C_1 = 6C_1^*$ . Лемма доказана.

Рассмотрим теперь неоднородную краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций при  $n = 2$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ , т.е. задачу, состоящую в отыскании всех квазигармонических функций второго рода  $W(z)$ , принадлежащих классу  $C^2(T^+ + L)$  и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{6}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, & z \in T^+, \\ W(t) = g(t), & t \in L. \end{cases} \quad (11)$$

В силу (5) краевое условие  $W(t) = g(t), t \in L$ , можно записать в виде:

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2} \varphi^+(t) = g(t), \quad t \in L. \quad (12)$$

Умножив обе части равенства (12) на  $t^2$ , получим

$$t^2 \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - 3t \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + 3\varphi^+(t) = t^2 g(t), \quad t \in L. \quad (13)$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую (голоморфную) в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  функцию

$$\Psi^+(z) = z^2 \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - 3z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 3\varphi^+(z), \quad z \in T^+,$$

равенство (13) перепишем так:

$$\Psi^+(t) = t^2 g(t), \quad t \in L. \quad (14)$$

Но равенство (14) есть краевое условие задачи об аналитическом продолжении (см., например, [7, с. 40]) относительно аналитической функции  $\Psi^+(z)$  класса  $A(T^+) \cap H(L)$ , т.е. функция  $t^2 g(t)$  должна быть граничным значением аналитической в круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  функции, непрерывной (в смысле Гельдера) в замкнутом круге  $\overline{T^+} = T^+ \cup L$ . Отсюда следует (см., например, [6, с. 100]), что функция  $t^2 g(t)$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_L g(t) \cdot t^{k+2} dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Пусть выполняются равенства (15). Тогда в силу (13) в любой точке  $z \in T^+$  имеет место равенство

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - 3z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 3\varphi^+(z) = g_1(z), \quad z \in T^+, \quad (16)$$

где

$$g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 g(t)}{t-z} dt. \quad (17)$$

Равенство (16) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции  $\varphi^+(z)$ .

Учитывая, что формулой (10) задается общее решение соответствующего *однородного дифференциального уравнения* (9), найдем одно из частных решений *неоднородного дифференциального уравнения* (16), например, *методом вариации произвольных постоянных*, т.е. в виде

$$\varphi_1(z) = C_1(z)z + C_2(z)z^3, \quad (18)$$

где  $C_1(z), C_2(z)$  – некоторые мероморфные в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  функции комплексной переменной  $z$ , для которых выражение  $C_1(z)z + C_2(z)z^3$  есть аналитическое решение дифференциального уравнения (16) в этом круге, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающееся на контур  $L$  вместе со своими производными до второго порядка включительно. Для нахождения функций  $C_1(z), C_2(z)$  составим соответствующую систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} zC_1'(z) + z^3C_2'(z) = 0, \\ z^2C_1'(z) + 3z^4C_2'(z) = g_1(z). \end{cases} \quad (19)$$

Решая систему (19), будем иметь:

$$C_1'(z) = -\frac{g_1(z)}{2z^2}, \quad C_2'(z) = \frac{g_1(z)}{2z^4}. \quad (20)$$

Из (20) видно, что для того чтобы функции  $C_1(z)$  и  $C_2(z)$  были мероморфными в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  необходимо и достаточно выполнение следующих условий:  $g_1'(0) = 0$  и  $g_1'''(0) = 0$ . Последние условия (с учетом (17)) можно записать в виде

$$\int_L g(t) \cdot t^{-k} dt = 0, \quad k = 0, 2. \quad (21)$$

При выполнении условий (21) с помощью интегрирования из (20) получаем

$$C_1(z) = -\frac{1}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz, \quad C_2(z) = \frac{1}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz. \quad (22)$$

Таким образом, в силу (18) и (22), частное решение неоднородного дифференциального уравнения (16) можно задавать в виде

$$\varphi_1^+(z) = -\frac{z}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz + \frac{z^3}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz. \quad (23)$$

Поскольку мы ищем решения задачи (11) в классе  $C^2(T^+ + L)$  (см. определение), то функция (23) должна быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур  $L$  вместе со своими производными до второго порядка включительно. Но, согласно известной теореме Харди и Литтльвуда (см., например, [8, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$  выполнялись неравенства:

$$\left| \frac{3z^2}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz - \frac{1}{2} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz \right| \leq \frac{M_1}{(1-r)^{1-\alpha_1}},$$

$$\left| \frac{g_1(z)}{z^2} + 3z \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz \right| \leq \frac{M_2}{(1-r)^{1-\alpha_2}}, \quad (24)$$

$$\left| \frac{zg_1'(z) + g_1(z)}{z^3} + 3 \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz \right| \leq \frac{M_3}{(1-r)^{1-\alpha_3}},$$

где  $r = |z|$ ;  $M_k, \alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \alpha_k \leq 1$ .

Наконец, подставив в правую часть (5) вместо  $\varphi^+(z)$  ее значение, найденное по формуле (23), получим частное решение неоднородной задачи (11) в виде

$$W(z) = \frac{g_1(z)}{z^2} + \frac{3\bar{z}(1-z\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2} \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz + \frac{3z(1-z\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2} \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz, \quad (25)$$

где  $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 g(t)}{t-z} dt$ ,  $a \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz$  и  $\int \frac{g_1(z)}{z^4} dz$  – фиксированные первообразные функций

$\frac{g_1(z)}{z^2}$  и  $\frac{g_1(z)}{z^4}$  соответственно в круге  $T^+$ .

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** Если  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ , то неоднородная задача Дирихле (11) в классе  $C^2(T^+ + L)$  разрешима тогда и только тогда, когда функция  $g(t)$  удовлетворяет условиям

$$\int_L g(t) \cdot t^{m-2} dt = 0, \quad m = 0, 2, 4, 5, \dots, \quad (26)$$

а также условиям (24). При выполнении этих условий частное решение задачи (11) можно задавать в виде (25).

Из лемм 1 и 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** Если  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ , то неоднородная задача Дирихле (11) в классе  $C^2(T^+ + L)$  разрешима тогда и только тогда, когда функция  $g(t)$  удовлетворяет условиям (24) и (26). При выполнении условий (24) и (26) общее решение задачи (11) можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{g_1(z)}{z^2} + \frac{3\bar{z}(1-z\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2} \left( C_1 + 3 \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz \right) + \frac{3z(1-z\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2} \left( C_2 + 3 \int \frac{g_1(z)}{z^4} dz \right), \quad (27)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные,  $g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 g(t)}{t-z} dt$ ,  $a \int \frac{g_1(z)}{z^2} dz$  и

$\int \frac{g_1(z)}{z^4} dz$  – фиксированные первообразные функций  $\frac{g_1(z)}{z^2}$  и  $\frac{g_1(z)}{z^4}$  соответственно в круге  $T^+$ .

**Замечание.** Известно (см., например, [9, с. 79]), что в случае классической (внутренней) задачи Дирихле для уравнения Лапласа справедлива следующая теорема единственности: любые два решения  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  этой задачи в рассматриваемой области совпадают, т.е.  $W_1(z) \equiv W_2(z)$ . Как видно из теоремы, для задачи Дирихле **D** в классе квазигармонических функций рода  $n = 2$  не имеет место теорема единственности.

### Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. – М., 1957. – 442 с.
3. Bauer, K.W. Über eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie / K.W. Bauer // Bonner math. – 1965. – Schriften 23. – pp. 98.
4. Heersink, R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen / R. Heersink // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, 1986, Bericht № 268.

5. Расулов, К.М. О решении краевой задачи типа Дирихле для уравнения Бауэра-Пешля первой степени / К.М. Расулов // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: сб. науч. тр. – Смоленск. гос. ун-т, 2007. – Вып. 8. – С. 62–70.

6. Привалов, И.И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. – М.; Л., 1950. – 337 с.

7. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

8. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 630 с.

9. Агошков, В.И. Методы решения задач математической физики / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

Поступила в редакцию 27 мая 2011 г.

## ABOUT THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DIRICHLET TYPE IN THE CLASSES OF QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN A CIRCLE

**K.M. Rasulov<sup>1</sup>**

In this article the modified boundary value problem of the Dirichlet type in classes of quasi-harmonic functions is considered. Solvability conditions and constructive algorithms for solving the classical Dirichlet boundary value problem in the classes of quasi-harmonic functions of the genus 2 are obtained. The boundary conditions are on the unit circle.

*Keywords:* boundary value problem, modified Dirichlet boundary value problem, quasi-harmonic functions, differential equations, unit circle.

### References

1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Uravnjenja matematicheskoj fiziki* (The equations of mathematical physics). Moscow, Nauka, 1972. 735 p. (in Russ.).

2. Tricomi F. *Lekcii po uravnenijam v chastnyh proizvodnyh* (Lectures on partial differential equations). Moscow, 1957. 442 p. (in Russ.).

3. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung  $(1 + \bar{z}z)^2 W_{\bar{z}\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner math.* 1965. Schriften 23. pp. 98.

4. Heersink, R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen. *Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum.* 1986. Bericht № 268.

5. Rasulov K.M. О решении краевой задачи типа Дирихле для уравнения Бауэра-Пешля первой степени. *Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: сб. науч. тр.* Смоленск. гос. университет, 2007. Vol. 8. pp. 62–70. (in Russ.).

6. Privalov I.I. *Granichnye svojstva analiticheskikh funkcij* (Boundary properties of analytic functions). Moscow, Leningrad, 1950. 337 p. (in Russ.).

7. Gahov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russ.).

8. Goluzin G.M. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of complex variable). Moscow, Nauka, 1966. 630 p. (in Russ.).

9. Agoshkov V.I., Dubovskij P.B., Shutjaev V.P. *Metody reshenija zadach matematicheskoj fiziki* (Methods for solving problems of mathematical physics). Moscow, Fizmatlit, 2002. 320 p. (in Russ.).

<sup>1</sup> Rasulov Karim Magomedovich is Dr. Sc (Physics and Mathematics), Professor, The Head of the Mathematical Analysis Department, Smolensk State University.

e-mail: spgu@yandex.ru (with note «for Rasulov»)

# О РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ<sup>1</sup>

*Е.В. Табаринцева<sup>2</sup>*

Рассматривается задача восстановления граничного условия по дополнительной информации о решении параболического уравнения. Приближенное решение поставленной задачи строится методом вспомогательных граничных условий с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева [1] и с использованием одной из схем апостериорного выбора параметра регуляризации. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов равномерной регуляризации.

*Ключевые слова:* обратная задача, метод приближенного решения, оценка погрешности.

## Постановка задачи

Рассматривается задача восстановления функции  $v(t) = u(1, t)$ ,  $z(t) \in L_2[0, \infty)$  (граничного условия), где функция  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u \quad (0 < x < 1; t > 0), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; u(0, t) = 0$$

и дополнительному условию

$$u(x_0, t) = p(t), \quad x_0 \in (0, 1), t > 0. \quad (2)$$

Здесь  $a(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $a(x) \geq 0$ ,  $h_0, h_1$  – заданные постоянные,  $u(\cdot, t) \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ ;  $u(x, \cdot) \in W_2^1(0, \infty)$ .

Рассмотрим вспомогательную «прямую» задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0; u(0, t) = 0; u(x_0, t) = p(t),$$

где  $a(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $x \in (0, x_0)$ ,  $t > 0$ ,  $u(\cdot, t) \in C^2(0, x_0) \cap C([0, x_0])$ ;  $u(x, \cdot) \in W_2^1(0, \infty)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $p(t), p'(t) \in L_2[0, \infty)$ . Тогда задача (3) имеет решение  $u(\cdot, t) \in C^2(0; x_0) \cap C([0; x_0])$ ;  $u(x, \cdot) \in W_2^1(0, \infty)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим формальное решение задачи (3), которое может быть найдено методом Фурье:

$$u(x, t) = -\frac{x}{x_0} p(t) + \int_0^t \int_0^{x_0} G(x, \xi, t - \tau) f(\zeta, \tau) d\zeta d\tau, \quad (4)$$

где

$$f(x, t) = -\frac{x}{x_0} (p'(t) + a(x)p(t));$$

$$G(x, \zeta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} X_n(\zeta) X_n(x)$$

<sup>1</sup> Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00063.

<sup>2</sup> Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра функционального анализа, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.  
e-mail: eltab@rambler.ru

– функция Грина первой краевой задачи;  $X_n(x)$  – собственные функции, образующие полную ортонормированную систему в  $L_2[0; x_0]$ ;  $-\lambda_n^2$  – собственные значения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Рассмотрим следующие функциональные ряды, сходящиеся равномерно на  $[0; x_0]$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X'_n(x))^2}{\lambda_n^4}$$

[6, с. 500]. Для произвольных  $x, \zeta \in [0, 1], t > t_0 > 0$  с учетом неравенства Коши–Буняковского имеем оценки:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} X_n(\zeta) X_n(x) \right| \leq \sup_{\lambda_n} \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(\zeta))^2}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \leq \frac{c_0}{t}, \quad (5)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} X_n(\zeta) X'_n(x) \right| \leq \sup_{\lambda_n} \lambda_n^4 e^{-\lambda_n^2 t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X'_n(x))^2}{\lambda_n^4} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(\zeta))^2}{\lambda_n^4} \right)^{1/2} \leq \frac{c_1}{t^2}, \quad (6)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} X_n(\zeta) X''_n(x) \right| \leq \sup_{\lambda_n} \lambda_n^4 e^{-\lambda_n^2 t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(\zeta))^2}{\lambda_n^4} \right)^{1/2} \leq \frac{c_2}{t^2}, \quad (7)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\lambda_n^2 t} \right)_t X_n(\zeta) X_n(x) \right| \leq \sup_{\lambda_n} \lambda_n^4 e^{-\lambda_n^2 t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n(\zeta))^2}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \leq \frac{c_3}{t^2}. \quad (8)$$

Из неравенств (5)–(8) следует, что функция  $G(x, \zeta, t)$  имеет непрерывные производные  $G_x(x, \zeta, t), G_{xx}(x, \zeta, t), G_t(x, \zeta, t)$  при всех  $x, \zeta \in [0, 1], t > t_0 > 0$ .

Рассмотрим произвольное число  $t > 0$  и зафиксируем  $t_0, 0 < t_0 < t$ . Очевидно, при  $0 \leq \tau \leq t_0$  функции  $G(x, \zeta, t - \tau), G_x(x, \zeta, t - \tau), G_{xx}(x, \zeta, t - \tau), G_t(x, \zeta, t - \tau)$  непрерывны. Рассмотрим ряд

$$P(x, \zeta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} |X_n(\zeta)| |X_n(x)| \quad (9)$$

и ряд, полученный почленным интегрированием (9):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau |X_n(\zeta)| |X_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}}{\lambda_n^2} |X_n(\zeta)| |X_n(x)|. \quad (10)$$

Из оценки, аналогичной (5), следует сходимость ряда (10) при всех  $x, \zeta \in [0, 1]$ . По следствию из теоремы Б. Леви [7] ряд (9) сходится почти всюду на отрезке  $0 \leq \tau \leq t$  и функция  $P(x, \zeta, \tau)$  (а, следовательно,  $G(x, \zeta, t - \tau)$ ) суммируема на отрезке  $0 \leq \tau \leq t$ .

Используя свойство абсолютной непрерывности интеграла, по заданному числу  $\varepsilon > 0$  выберем  $t_0 > 0$  такое, что

$$\left| \int_{t_0}^t G(x, \xi, t - \tau) f(\zeta, \tau) d\tau \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left| \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\zeta, \tau) d\tau \right| < \left| \int_0^{t_0} G(x, \xi, t - \tau) f(\zeta, \tau) d\tau \right| + \varepsilon \leq C \left| \int_0^{t_0} f(\zeta, \tau) d\tau \right| + \varepsilon \leq C \max_{x \in [0, 1]} |g(x, t_0)|.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x, t) = \int_0^{x_0} \int_0^{t_0} (G(x, \xi, t - \tau) (a(\zeta) \zeta p(\tau))) d\tau d\zeta.$$

Так как  $G(x, \zeta, t) \in L_2[0, \infty); p(t) \in L_2[0, \infty)$ , то  $g(x, t) \in L_2[0, \infty)$  при всех  $x \in [0, x_0]$ . Действительно, так как  $G(x, \zeta, t) \in L_2[0, T); p(t) \in L_2[0, T)$ , то  $g(x, t) \in L_2[0, T]$  при любом  $T > 0$  в силу не-

равенства  $\int_0^T \left( \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) p(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq \int_0^T \int_0^t G^2(x, \xi, t-\tau) d\tau dt \int_0^T p^2(\tau) d\tau$ . Далее выполняется нера-

венство

$$\int_0^T \left( \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) p(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq 2 \int_0^{T-1} \int_0^t G^2(x, \xi, t-\tau) d\tau dt \int_0^\infty p^2(\tau) d\tau + 2 \int_0^T \int_{T-t}^t G^2(x, \xi, t-\tau) p^2(\tau) d\tau dt.$$

Оценим интегралы в правой части последнего неравенства:

$$\int_0^{T-1} \int_0^t G^2(x, \xi, t-\tau) d\tau dt \leq \int_0^{T-1} \int_0^t \frac{d\tau dt}{(t-\tau)^2} \leq \ln \frac{T}{T-1};$$

$$\int_0^T \int_{T-t}^t G^2(x, \xi, t-\tau) p^2(\tau) d\tau dt = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi^2(x, \xi, t-\tau) p^2(\tau) d\tau dt,$$

где функция

$$\Phi(x, \xi, s) = \begin{cases} G(x, \xi, s), & s \in (0, 1], \\ 0, & s \notin (0, 1] \end{cases}$$

интегрируема на  $[0, \infty)$ .

Из (5) следует оценка

$$|u(x, t)| \leq C \max_{x \in [0, 1]} |g(x, t)|.$$

Рассмотрим ряд

$$S(x, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} X_n(x), \tag{11}$$

где  $f_n(t) = \int_{x_0}^1 f(\xi, t) X_n(\xi) d\xi = \frac{v'(t) - p'(t)}{1-x_0} \int_{x_0}^1 \xi X_n(\xi) d\xi + \frac{p'(t) - x_0 v'(t)}{1-x_0} \int_{x_0}^1 X_n(\xi) d\xi$  – коэффициенты

Фурье функции  $f(x, t)$ . Воспользуемся следующим утверждением [10, с. 414]:

**Утверждение 1.** Существует такая постоянная  $C$ , что для каждого  $n$  и в каждой точке  $x \in [x_0, 1]$

$$\left| X_n(x) - \sqrt{\frac{2}{1-x_0}} \sin \lambda_n x \right| \leq \frac{C}{n}.$$

Из утверждения 1 следует, что

$$\left| \int_{x_0}^1 X_n(\xi) d\xi \right| \leq \sqrt{\frac{2}{(1-x_0)}} \frac{2}{\lambda_n} + \frac{C(1-x_0)}{n}; \tag{12}$$

$$\left| \int_{x_0}^1 \xi X_n(\xi) d\xi \right| \leq \sqrt{\frac{2}{(1-x_0)}} \left| \int_{x_0}^1 \xi \sin \lambda_n \xi d\xi \right| + \frac{c}{n} \int_{x_0}^1 \xi d\xi \leq \frac{c_1}{\lambda_n} + \frac{c_2}{n}. \tag{13}$$

Так как существует такая константа  $c$ , что при каждом  $n$

$$\left| \lambda_n^2 - \frac{\pi^2 n^2}{(1-x_0)^2} \right| \leq c$$

[10, с. 414], то из оценок (12) и (13) следует существование такой постоянной  $D$ , что

$$\left| \int_{x_0}^1 X_n(\xi) d\xi \right| \leq \frac{D}{\lambda_n}, \tag{14}$$

$$\left| \int_{x_0}^1 \xi X_n(\xi) d\xi \right| \leq \frac{D}{\lambda_n} \tag{15}$$

при всех  $n$ . С учетом (14) и (15) из неравенства (12) следует

$$|S(x, t, \tau)| \leq D_1 \frac{|v'(t)| + |p'(t)|}{1 - x_0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} X_n(x) \right| \leq \max_{\lambda} \lambda^{3/2} e^{-\lambda^2(t-\tau)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|. \quad (16)$$

Так как в силу утверждения 1 ряд в правой части (16) сходится при каждом  $x \in [x_0; 1]$ , то оценка (16) принимает вид

$$|S(x, t, \tau)| \leq \frac{r(x)}{\sqrt{t - \tau}}.$$

Следовательно, функция  $S(x, t, \tau)$  суммируема на отрезке  $\tau \in [0, t]$  при каждом  $x$ .

Далее, используя неравенство (5)

$$\begin{aligned} |u_x(x, t)| &\leq C_1 |p(t)|; \\ |u_{xx}(x, t)| &\leq C_2 |p(t)|; \\ |u_t(x, t)| &\leq C_3 (|p(t)| + |p'(t)|). \end{aligned} \quad (17)$$

Из полученных оценок следует, что  $u_{xx}(x, t), u_t(x, t) \in L_2(0, \infty)$  при любом  $x \in [0, x_0]$ .

Таким образом, функция  $u(x, t)$  является решением задачи (3).

Решая задачу (3), определим функцию  $q(t) = u_x(x_0, t)$ . Из оценки (17) следует неравенство

$$\|q(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq C_1 \|p(t)\|_{L_2[0, \infty)}.$$

Следовательно, исходная задача сведется к задаче восстановления функции  $v(t) = u(1, t)$ , где  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \\ u(x, 0) &= 0; u(x_0, t) = p(t); u_x(x_0, t) = q(t), \end{aligned} \quad (18)$$

$x \in (x_0, 1), t > 0$ .

**Замечание.** Так как задачу (18) можно разбить на две задачи с однородными начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \\ u(x, 0) &= 0; u(x_0, t) = p(t); u_x(x_0, t) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \\ u(x, 0) &= 0; u(x_0, t) = 0; u_x(x_0, t) = q(t), \end{aligned} \quad (20)$$

то далее для определенности рассматривается задача (20).

**Сведение задачи (20) к задаче вычисления значений неограниченного оператора**

Пусть функции  $q(t), p(t)$  в задаче (20) принадлежат  $L_2(0, \infty)$ . Рассмотрим вспомогательную прямую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \\ u(x, 0) &= 0; u(x_0, t) = 0; u(1, t) = v(t), \end{aligned} \quad (21)$$

$x \in (x_0, 1), t > 0$ .

Как и при исследовании вспомогательной задачи (3), убедимся, что задача (21) имеет решение

$u(x, t): u(\cdot, t) \in C^2(x_0; 1) \cap C([x_0; 1]); u(x, \cdot) \in W_2^1(0, \infty)$ . Из оценки  $|S(x, t, \tau)| \leq \frac{r(x)}{\sqrt{t - \tau}}$  следует также,

что функция

$$u_{xx}(x, t) = \int_0^t \int_0^{x_0} G_{xx}(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

интегрируема на любом отрезке  $t \in [0, T]$ , а из принадлежности функций  $G_{xx}(x, \xi, t)$  и  $f(x, t)$  пространству  $L_2(0, \infty)$  при всех  $x, \xi \in [x_0; 1]$  следует, что  $u_{xx}(x, t)$  суммируема на  $[0, \infty)$  при всех  $x \in [x_0; 1]$ . Следовательно, интеграл  $\int_0^\infty u_{xx}(x, t) e^{-\lambda t} dt$  сходится равномерно по  $x \in [x_0; 1]$ ,  $\lambda \in [0, \infty)$ .

Таким образом, к задаче (20) применимо преобразование Фурье на полупрямой  $t \in (0, \infty)$ .

Применяя к задаче (20) преобразование Фурье, имеем следующую задачу для линейного обыкновенного уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} U_{xx}(x, \lambda) &= i\lambda U(x, \lambda) - a(x)U(x, \lambda); \\ U(x_0, \lambda) &= 0; U_x(x_0, \lambda) = Q(\lambda). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $U(x, \lambda) = Fu = \int_0^\infty e^{-i\lambda t} u(x, t) dt$  – образ Фурье функции  $u(x, t)$ .

Обозначим через  $\varphi(x, t)$  решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям  $\varphi(x_0, t) = 0$ ;  $\varphi_x(x_0, t) = 1$ .

**Теорема 1.** Существуют постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4, \tau$  такие, что

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda}(x - x_0)}{\sqrt{\lambda}} &\leq |\varphi(x, \lambda)| \leq C_2 \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda}(x - x_0)}{\sqrt{\lambda}}; \\ C_3 \text{ch} \sqrt{\lambda}(x - x_0) &\leq |\varphi_x(x, \lambda)| \leq C_4 \text{ch} \sqrt{\lambda}(x - x_0) \end{aligned}$$

при  $\lambda > \tau$ .

Доказательство теоремы аналогично проведенному в [2].

Решение задачи (22) имеет вид

$$V(\lambda) = Q(\lambda)\varphi(1, \lambda).$$

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства:  $X = L_2(0, \infty)$  – пространство функций, суммируемых с квадратом, определенных при  $t \in [0, \infty)$  (принимая действительные значения),  $\Phi$  – пространство функций, допускающих аналитическое продолжение в полуплоскость  $\text{Im } z < 0$  и таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s + i\sigma)|^2 ds < C$$

при всех  $\sigma < 0$ . Выполняется следующая теорема (см., напр., [9])

**Теорема 2.** Класс функций  $\Phi$  совпадает с классом функций, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda t} f(t) dt,$$

где интеграл сходится в среднем и  $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty$ .

Рассмотрим равенство Парсеваля (см. [8]):

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Так как, очевидно, для функции  $f(t)$  с действительными значениями выполняется равенство  $F(-\lambda) = \bar{F}(\lambda)$ , то из равенства Парсеваля следует

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = 4\pi \int_0^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Следовательно, линейный оператор  $F_0 : L_2[0,1] \rightarrow \Phi$ , действующий по правилу

$$F_0(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt,$$

является изометрией. Следовательно, пространства  $X$  и  $Y$  также изометричны.

Таким образом, задача (20) сводится к задаче вычисления элемента  $V(\lambda) \in \Phi$  такого, что

$$V(\lambda) = \varphi(1, \lambda) Q(\lambda) = A Q(\lambda), \quad (23)$$

где  $A : \Phi \rightarrow \Phi$  – неограниченный линейный оператор.

### Метод вспомогательных граничных условий

Пусть вместо точного начального условия  $q(t)$  в задаче (20) известны  $\delta$ -приближение  $q_\delta(t)$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что  $\|q - q_\delta\| \leq \delta$ . Пусть известно также, что при точно заданном начальном условии  $q(t)$  задача (20) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$M_r = \{v \in X; v' \in X, \|v\|_X^2 + \|v'\|_X^2 \leq r^2\}.$$

Используя метрическую эквивалентность задач (20) и (23), построим предварительно приближенное решение задачи (23). Известно, что при заданном условии  $Q$  задача (23) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации:

$$\tilde{M}_r = \{G \in Y; \lambda G \in Y, \|\lambda G\|_Y \leq r\}.$$

Требуется построить устойчивое приближенное решение задачи (23) и оценить его отклонение от точного решения.

Вместо некорректно поставленной задачи (20) рассмотрим вспомогательную задачу с малым параметром  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \\ u(x, 0) &= 0; u(x_0, t) = 0; u_x(x_0, t) + \varepsilon u(1, t) = q_\delta(t), \end{aligned} \quad (24)$$

В качестве приближенного решения задачи (20) будем рассматривать элемент

$$v_\delta^\varepsilon(t) = u_\delta^\varepsilon(1, t), \quad (25)$$

где  $u_\delta^\varepsilon(x, t)$  – решение задачи (24). Применяя к задаче (24) преобразование Фурье, находим, что в качестве приближенного решения задачи (23) рассматривается элемент

$$V_\delta^\varepsilon = \frac{\varphi(1, \lambda)}{1 + \varepsilon \varphi(1, \lambda)}. \quad (26)$$

### Оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий

Рассмотрим приближенное решение (26) задачи (23). В качестве характеристики точности приближенного решения (26) рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon, \delta) = \sup \left\{ \|V_\delta^\varepsilon - V\| : V \in \tilde{M}_r; \|V - V_\delta\| \leq \delta \right\}.$$

Воспользуемся очевидной оценкой

$$\Delta(\varepsilon, \delta) \leq \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon, \delta),$$

где

$$\Delta_1(\varepsilon) = \sup \left\{ \|V^\varepsilon - V\| : V \in \tilde{M}_r \right\},$$

$V^\varepsilon = U_\varepsilon(1, \lambda)$ , где  $u^\varepsilon(x, t)$  – решение задачи (24) с точно заданным условием  $q(t)$ ;

$$\Delta_2(\varepsilon, \delta) = \sup \left\{ \|V_\delta^\varepsilon - V^\varepsilon\| : \|Q - Q_\delta\| \leq \delta \right\}.$$

Оценим величины  $\Delta_1(\varepsilon)$ ,  $\Delta_2(\varepsilon, \delta)$ .

Для величины  $\Delta_2(\varepsilon, \delta)$  имеем очевидную оценку

$$\Delta_2(\varepsilon, \delta) \leq \delta \sup_{\lambda \geq 0} \frac{|\varphi(1, \lambda)|}{|1 + \varepsilon \varphi(1, \lambda)|} \leq \delta \sup_{\operatorname{Re} z \geq 0} \frac{|z|}{|1 + \varepsilon z|} \leq \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Далее,

$$\Delta_1(\varepsilon) \leq r \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\varepsilon |\varphi(1, \lambda)|}{\sqrt{1 + \lambda^2} |1 + \varepsilon \varphi(1, \lambda)|}.$$

Рассмотрим значение  $\lambda_\varepsilon$ , выбранное из условия  $\varepsilon |\varphi(1, \lambda_\varepsilon)| = 1$ . С учетом теоремы 1 имеем следующее неравенство:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_\varepsilon} \frac{\varepsilon |\varphi(1, \lambda)|}{\sqrt{1 + \lambda^2} |1 + \varepsilon \varphi(1, \lambda)|} \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_\varepsilon} \frac{\varepsilon e^{\sqrt{2}\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \leq \frac{C}{(\ln \varepsilon)^2}.$$

Далее, очевидно,

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_\varepsilon} \frac{\varepsilon |\varphi(1, \lambda)|}{\sqrt{1 + \lambda^2} |1 + \varepsilon \varphi(1, \lambda)|} \leq \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \leq \frac{C}{(\ln \varepsilon)^2}.$$

Следовательно,  $\Delta_1(\varepsilon) \leq \frac{C_r}{(\ln \varepsilon)^2}$ .

Выбирая зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  из условия

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{C_r}{(\ln \varepsilon)^2}$$

(квазиоптимальный выбор параметра регуляризации, [4]), получаем, что оценка погрешности приближенного решения (26) на множестве  $\tilde{M}_r$  имеет вид

$$\Delta(\varepsilon(\delta), \delta) \leq \frac{C_5}{\ln^2 \delta}. \quad (27)$$

В силу изометричности преобразования Фурье из оценки (27) следует

**Теорема 3.** При сформулированных выше условиях существуют постоянные  $\delta_0, C_6$  такие, что для любого  $\delta \in (0, \delta_0)$  справедливы оценки погрешности метода вспомогательных граничных условий на множестве  $M_r$ ,

$$\Delta(\varepsilon(\delta), \delta) \leq \frac{C_6}{\ln^2 \delta}.$$

**Замечание.** Из оценки (27) и оценки погрешности оптимального метода решения задачи (20) (см., напр., [2]) следует, что метод вспомогательных граничных условий является оптимальным по порядку.

### Апостериорный выбор параметра регуляризации

Для выбора параметра регуляризации на практике может быть использована следующая схема, не использующая явно априорную информацию о точном решении поставленной обратной задачи (ср. [7]).

Пусть параметр регуляризации выбирается из конечного множества

$$\Lambda_N = \{\varepsilon_i : 0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_N\}.$$

Обозначим через  $V_{\varepsilon_i}^\delta = R_{\varepsilon_i} Q_\delta$  соответствующие приближенные решения. Пусть  $V$  – точное решение задачи (17),  $V \in \tilde{M}_r$ . Обозначим через  $\varepsilon_{opt}$  квазиоптимальное значение параметра регуляризации, полученное по схеме М.М. Лаврентьева. Обозначим через  $\varepsilon^*$  оптимальное значение параметра регуляризации, выбираемое из множества  $\Lambda_N$ , т.е.

$$\varepsilon^* = \max \{\varepsilon_i : \varepsilon_i \in M(\Lambda_N)\},$$

где

$$M(\Lambda_N) = \left\{ \varepsilon_i \in \Lambda_N : \frac{C_r}{\ln^2 \varepsilon_i} \leq \frac{\delta}{\varepsilon_i} \right\}.$$

Пусть  $M(\Lambda_N) \neq \emptyset$ ;  $\Lambda_N \setminus M(\Lambda_N) \neq \emptyset$ .

Наряду с  $M(\Lambda_N)$ , рассмотрим множество

$$M^+(\Lambda_N) = \left\{ \varepsilon_i \in \Lambda_N : \|V_{\varepsilon_i}^\delta - V_{\varepsilon_j}^\delta\| \leq 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_j}} \quad (j=0,1,\dots,i) \right\}.$$

**Лемма 2.**  $M(\Lambda_N) \subseteq M^+(\Lambda_N)$

**Доказательство.** Рассмотрим значения параметра регуляризации  $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in \Lambda_N$ ;  $\varepsilon_i \in M(\Lambda_N)$ ,  $j < i$ . Имеем неравенство

$$\|V_{\varepsilon_i}^\delta - V_{\varepsilon_j}^\delta\| \leq \|V_{\varepsilon_i}^\delta - V\| + \|V - V_{\varepsilon_j}^\delta\| + \|V_{\varepsilon_j}^\delta - V_{\varepsilon_i}^\delta\| \leq \frac{C_r}{\ln^2 \varepsilon_i} + \frac{\delta}{\varepsilon_i} + \frac{C_r}{\ln^2 \varepsilon_j} + \frac{\delta}{\varepsilon_j} \leq 4 \frac{\delta}{\varepsilon_j}.$$

Следовательно,  $\varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N)$ .

Обоснование одного из правил апостериорного выбора параметра регуляризации дает следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть параметр регуляризации выбран из условия

$$\varepsilon^+ = \max \{ \varepsilon_i : \varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N) \}.$$

Тогда

$$\Delta(\varepsilon^+(\delta), \delta) = \sup \left\{ \|V_\delta^\varepsilon - V\| : G \in \tilde{M}_r; \|Q - Q_\delta\| \leq \delta \right\} \leq \frac{6C_5}{\ln^2 \delta}.$$

**Доказательство.** Из определения  $\varepsilon^* = \varepsilon_l$  следует, что для  $\varepsilon_{l+1}$  выполняется неравенство

$$\frac{r\varepsilon_{l+1}}{e^{2\varepsilon_{l+1}}} \geq \delta = \frac{r\varepsilon_{opt}}{e^{2\varepsilon_{opt}}}.$$

Следовательно, в силу монотонности функции  $s(x) = \frac{rx}{e^{2x}}$  на промежутке  $x \in (0, \infty)$ ,

$\varepsilon_{l+1} \geq \varepsilon_{opt}$  и

$$\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_{l+1}}} \leq \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_{opt}}}.$$

В силу леммы 2, так как  $M(\Lambda_N) \subseteq M^+(\Lambda_N)$ ,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_l = \max \{ \varepsilon_i : \varepsilon_i \in M(\Lambda_N) \} \leq \varepsilon^+ = \max \{ \varepsilon_i : \varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N) \}.$$

Из определения  $M^+(\Lambda_N)$  следует

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon^+(\delta), \delta) &= \sup \left\{ \|G_\delta^{\varepsilon^+} - G\| : G \in \tilde{M}_r; \|Z - Z_\delta\| \leq \delta \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \|G_\delta^{\varepsilon^+} - G_\delta^{\varepsilon^*}\| : Z \in \tilde{M}_r; \|Z - Z_\delta\| \leq \delta \right\} + \sup \left\{ \|G_\delta^{\varepsilon^*} - G\| : G \in \tilde{M}_r; \|Z - Z_\delta\| \leq \delta \right\} \leq \\ &\leq 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_l}} + \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon^*}} + r\varepsilon^* \leq 6\Delta(\varepsilon_{opt}(\delta), \delta) \leq \frac{6C_5}{\ln(1/\delta)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### Литература

1. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики // М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407, № 3. – С. 316–318.

3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – Челябинск, Издательский центр ЧелГУ, 2005. – 171 с.
4. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995. – 176 с.
5. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 129–142.
6. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
7. Pereverzev, S. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems / S. Pereverzev, E. Schock // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – V. 43, № 5. – P. 2060–2076.
8. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
9. Виленкин, Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1965. – 588 с.
10. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964. – 430 с.

*Поступила в редакцию 15 февраля 2011 г.*

### ABOUT SOLUTION OF THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION BY MEANS OF SUBSIDIARY BOUNDARY CONDITIONS METHOD

*E.V. Tabarintseva*<sup>1</sup>

The author analyses the problem of recovery of boundary condition using additional information about parabolic equation solution. An approximate solution of the posed problem is done by the subsidiary boundary conditions method with choice of the regularization parameter by the Lavrentiev scheme [1] and one of the schemes of posteriori choice regularization parameter. The author obtains an order precise error evaluation of the built approximate solution at one of the uniform regularization classes.

*Keywords: inverse problem, approximate method, error evaluation.*

#### References

1. Lavrent'ev M.M. *O nekotoryh nekorrektnykh zadachah matematicheskoy fiziki* (About some ill-defined problems of mathematical physics). Novosibirsk, Sibirskoe otdelenie AN SSSR, 1962. 92 p.
2. Tanana V.P. *Dokl. RAN*. 2006. Vol. 407, no. 3. pp. 316–318. (in Russ.).
3. Il'in A.M. *Uravenija matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics). Chelyabinsk, Izdatel'skij centr ChelGU, 2005. 171 p. (in Russ.).
4. Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. *Differencial'no-operatornye uravnenija i nekorrektnye zadachi* (Differential-operator equations and ill-defined problems). Moscow, Nauka, 1995. 176 p. (in Russ.).
5. Tanana V.P., Tabarintseva E.V. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*. 2005. Vol. 8, no 1(21). pp. 129–142. (in Russ.).
6. Vladimirov V.S. *Uravenija matematicheskoy fiziki* (The equations of mathematical physics) Moscow, Nauka, 1971. 512 p. (in Russ.).
7. Pereverzev S., Schock E. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 2005. Vol. 43, no 5. pp. 2060–2076.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis). Moscow, Nauka, 1989. 623 p. (in Russ.).
9. Vilenkin N.Ja. *Special'nye funkcii i teorija predstavlenij grupp* (Special functions and group representation theory). Moscow, Nauka, 1965. 588 p. (in Russ.).
10. Dieudonné J. *Osnovy sovremennogo analiza (Foundations of Modern Analysis)* Moscow, Mir, 1964. 430 p. (in Russ.). [Dieudonné J. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960. 361 p.]

---

<sup>1</sup> Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Functional Analysis Department, South Ural State University. e-mail: eltab@rambler.ru

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О.Н. Шабловский<sup>1</sup>

Дано новое точное аналитическое решение стационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости с учетом нелинейной внешней силы сопротивления течению. Основные элементы исследования: процессы релаксации в сдвиговом потоке; завихренность при малых и больших градиентах скорости; диффузионная скорость движения вихря.

Ключевые слова: сила трения, течение Куэтта, диффузия вихря, индикаторная функция, релаксация напряжений.

### Введение

Плоское двумерное стационарное течение сплошной среды определяется уравнениями [1]:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0; \quad i, k = 1, 2; \quad \rho \equiv \text{const}. \quad (1)$$

Реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Максвелла [2] возьмем в следующей форме записи:

$$\tau_{ij} + \gamma \left[ v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + m(\tau_{ik} \omega_{kj} - \omega_{ik} \tau_{kj}) \right] = 2\mu e_{ij}, \quad 2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 2\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Здесь  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  – декартовы прямоугольные координаты;  $\mathbf{v}(v_1, v_2)$  – вектор скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $\mathbf{F}(F_1, F_2)$  – вектор массовой силы;  $\tau_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений;  $e_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформации;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\gamma$  – время релаксации вязких напряжений. Дважды повторяющийся индекс  $k$  означает суммирование. Дифференциальный оператор в (2) при  $m=1$  есть конвективная производная Яуманна, при  $m=0$  – обычная субстанциональная производная. При  $\gamma=0$  формула (2) описывает свойства вязкой ньютоновской жидкости. Релаксационная модель Максвелла (2) имеет своим «метагидродинамическим» аналогом уравнение Хинце–Лойцянского в релаксационной теории турбулентных сдвиговых течений [3, 4].

Внешняя сила трения Рэлея  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^R$ ,  $F_i^R = -\zeta v_i$ , где  $\zeta > 0$  – коэффициент сопротивления, позволяет моделировать периодические течения в тонких слоях жидкости, изучать крупномасштабные океанические процессы [5–8]. Еще одной областью применения модели  $\mathbf{F}^R = -\zeta \mathbf{v}$  являются задачи кластерообразования в расплавах в условиях микрогравитации [9]; при таком подходе гидродинамическое описание расплава в окрестности фронта кристаллизации учитывает присутствие частиц твердой фазы, оказывающих сопротивление потоку. В работах [6–9] применялся линейный вариант силы трения:  $\zeta \equiv \text{const}$ . В рамках приближения  $\zeta \sim |\mathbf{v}|$  в [5, гл. 4] построены многоярусные гидродинамические системы, описывающие процесс преобразования энергии в развитом турбулентном потоке. Далее полагаем  $\zeta = \zeta(v^2)$  и рассматриваем течения, для которых коэффициент сопротивления – монотонно возрастающая функция модуля скорости,  $\partial \zeta / \partial (v^2) > 0$ . Будем изучать движение вида

$$v_1 \equiv u = u(y), \quad v_2 \equiv 0, \quad p = p(y), \quad (3)$$

применяя следующий математический результат. Автономная динамическая система с одной степенью свободы

$$d^2 \tau / d\xi^2 = Q(\tau), \quad Q(\tau) = 2\tau(k^2 + \tau^2) \quad (4)$$

<sup>1</sup> Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра технической механики, машиностроительный факультет, Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого.  
e-mail: shablovsky-on@yandex.ru, shabl@gstu.by

имеет точное решение [10]:

$$\tau = k[\sin(2k\xi)]/[1 + \cos(2k\xi)], \quad (5)$$

где  $k$  – произвольная постоянная; функция  $\tau(\xi)$  – ограниченная на конечном интервале  $\xi \in [0, \xi_2] \subset [0, \pi/(2k))$ . Покажем, что это решение допускает интересную гидродинамическую интерпретацию.

Цель работы: дать аналитическое описание стационарных вихревых процессов в сдвиговом потоке вязкой жидкости при воздействии нелинейной внешней силы трения.

**Жидкость Максвелла.** В классе решений (3) рассмотрим изотермическое течение жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями ( $\gamma > 0, m = 1$ ). Из уравнений (1), (2) находим:

$$\tau_{11} = \gamma m \tau_{12} du/dy, \quad \tau_{11} + \tau_{22} = 0, \quad p - p_0 = \tau_{22}, \quad (6)$$

$$\tau_{12} = \mu(du/dy)/[1 + (\gamma m du/dy)^2], \quad \tau_{12} = \tau_{21}, \quad (7)$$

$$du/dy = 2\omega_{12} = -2\omega, \quad d\tau_{12}/dy = \rho\zeta u,$$

где  $p_0 \equiv \text{const}$  – равновесное (отсчетное) значение давления. Вихрь скорости  $\omega = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$  имеет одну ненулевую составляющую  $\omega_z \equiv \omega = -(du/dy)/2$ , направленную перпендикулярно плоскости  $(x, y)$ . Здесь и в дальнейшей записи сохраняем  $m = 1$ . Это дает возможность подчеркнуть роль производной Яуманна, для которой реологическое уравнение состояния удовлетворяет принципу объективности поведения материала [2]; в случае  $m = 0$  этот принцип не выполняется. Воспользуемся решением (4), (5) и возьмем  $\tau = u$ ,  $\xi = y/(y_1 u_1)$ ,  $k = u_1$ ,  $d^2 u/dy^2 = Q/(y_1 u_1)^2$ ,  $Q = 2u(u_1^2 + u^2) = (y_1 u_1)^2 \zeta u/\nu$ . Отсюда вычисляем скорость движения жидкости и коэффициент сопротивления:

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{u_1} = \frac{\sin(2\bar{y})}{1 + \cos(2\bar{y})}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y_1}, \quad y \in [0, y_2]; \quad (8)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \zeta y_1^2/\nu = 2(1 + \bar{u}^2) \frac{[1 - \bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u}/d\bar{y})^2]}{[1 + \bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u}/d\bar{y})^2]^2}; \quad (9)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma u_1/y_1; \quad \bar{\omega} = \omega y_1/u_1, \quad d\bar{u}/d\bar{y} = -2\bar{\omega}, \quad \nu = \mu/\rho.$$

Здесь  $y_1, u_1$  – положительные константы, имеющие размерности длины и скорости соответственно; линейный масштаб релаксации равен  $L_1 = \gamma u_1$ ; безразмерные величины отмечены чертой сверху. Ясно, что  $d\bar{u}/d\bar{y} = 1 + \bar{u}^2$ , поэтому коэффициент внешнего сопротивления (9) есть четная функция скорости. Форма записи

$$\bar{\zeta} = 4\bar{\omega}(4\Gamma - 1)/(4\Gamma + 1)^2, \quad \Gamma = (\bar{\gamma} m \bar{\omega})^2$$

демонстрирует то обстоятельство, что сила внешнего трения проявляет себя на фоне релаксирующей завихренности; переменный параметр  $\Gamma(y)$  характеризует неравновесные свойства вихревого поля. Решение (8) представляет течение Куэтта:

$$y = 0, \quad u = 0; \quad y = y_2, \quad u = u(y_2),$$

где  $y_2$  – расстояние между параллельными плоскими непроницаемыми стенками; одна стенка неподвижна, а другая перемещается в своей плоскости с конечной скоростью  $u_2 = u(y_2) > 0$ .

Условия  $\zeta > 0$ ,  $d\zeta/d(u^2) > 0$  приводят к неравенству  $(\gamma m du/dy)^2 \leq 1/3$ , которое дает такие ограничения:

$$0 < \bar{\gamma} m \leq 1/(2\sqrt{3}), \quad (10)$$

$$1 + \cos(2y_2/y_1) \geq 2\bar{\gamma} m \sqrt{3}. \quad (11)$$

Неравенство (11) исключает из структуры решения координату  $2\bar{y} = \pi$ . Далее оценки (10), (11) будут уточнены для отдельных интервалов значений  $u_2$ . Давление жидкости вычисляется по формуле:

$$\frac{p_0 - p}{\rho u_1^2} \equiv \bar{p}_1 = \frac{\bar{\nu} \bar{\gamma} m (d\bar{u}/d\bar{y})^2}{1 + \bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u}/d\bar{y})^2}, \quad \bar{\nu} = \mu/(\rho u_1 y_1).$$

Перепад давления  $p_0 - p$  положителен во всей области решения; константу  $p_0$  выбираем так, чтобы обеспечить условие  $p(y) > 0$ . Зависимость давления от времени релаксации монотонно убывающая:  $dp/d\gamma < 0$ . Функциональная связь завихренности и давления имеет вид:

$$4\bar{\omega}^2 = \bar{p}_1 / [\bar{\gamma}m(\bar{V} - \bar{\gamma}m\bar{p}_1)],$$

где выполнено условие  $0 < \bar{p}_1 < [\bar{V}/(\bar{\gamma}m)]$ . В релаксирующем потоке ( $\gamma > 0$ ) завихренность обусловлена отклонением давления от равновесного значения: если  $p = p_0$ , то  $\omega = 0$ . По мере удаления от неподвижной стенки модуль завихренности растет  $d(\omega^2)/dy > 0$ , а давление падает:  $p(y=0) > p(y=y_2)$ ; следовательно,  $\partial(\omega^2)/\partial p < 0$ .

Проанализируем физическое содержание данного решения. На неподвижной и подвижной границах безразмерный градиент скорости равен:

$$y=0, \quad d\bar{u}/d\bar{y}=1; \quad y=y_2, \quad d\bar{u}/d\bar{y}=U > 1, \quad U=1+(u_2^2/u_1^2).$$

Значит, параметр  $U$  характеризует градиент скорости, обусловленный величиной  $u_2$  скорости подвижной стенки. Другими словами, величина  $U^2 = \omega^2(y=y_2)/\omega^2(y=0)$  определяет степень неоднородности завихренности потока. Некоторые градиентные свойства завихренности двумерного течения вязкой релаксирующей жидкости изучены в [11]. Примем обозначения:  $\zeta_1 = \zeta(y=0)$ ,  $\zeta_2 = \zeta(y=y_2)$ ,  $\delta^2 = \bar{\gamma}^2 m^2 U^2$ ,  $U_* = 1/U$ , где  $\cos(2y_2/y_1) = 2U_* - 1$ . Расчеты показывают: условие  $\zeta_2 > \zeta_1$  будет выполнено, если при  $0 < \delta^2 < 1$  выполнено неравенство  $(1 - \delta^2)/(1 + \delta^2)^2 \geq U_*$ . Отсюда следует оценка параметра  $\delta^2$ :

$$0 < \delta^2 \leq [-1 - 2U_* + (1 + 8U_*)^{1/2}] / (2U_*) < 1. \quad (12)$$

Учитывая (10) получаем, что должно быть  $\delta^2 U_*^2 \leq 1/12$ ; тогда, применяя (12), находим два интервала, которым может принадлежать  $U_*$ . Область «больших» градиентов скорости:

$$0 < U_* \leq a_*, \quad a_* = (3 - \sqrt{6})/6, \quad (13)$$

в этом случае  $U > 10$ . Область «малых» градиентов скорости:

$$a_{**} \leq U_* < 1, \quad a_{**} = (3 + \sqrt{6})/6, \quad (14)$$

в этом случае  $U$  находится в правой конечной окрестности единицы, причем  $u_1$  есть верхняя граница значений скорости течения;  $u(y) < u_1$ ,  $0 < u_2^2 < u_1^2$ ,  $\cos(2\bar{y}) > 0$ ,  $y \in [0, y_2]$ ,  $(2a_{**} - 1) \leq \cos(2y_2/y_1) < 1$ . Для «малых» градиентов на обеих стенках (неподвижной и подвижной) поведение завихренности определяется неравенством  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial U > 0$ ,  $y=0$ ,  $y=y_2$ .

В области «больших» градиентов (13) верхняя граница скоростей равна  $u_2: u_2 > u_1$ ,  $y \in [0, y_2]$ ,  $2y_2/y_1 = \pi - \delta_1$ ,  $0 < \delta_1 < \pi/2$ ,  $U = 2/(1 - \cos \delta_1)$ . Из (11) следует  $(2/3)^{1/2} \leq \cos \delta_1 < (1 - 2\bar{\gamma}m\sqrt{3})$ . Значит, исходная оценка (10) принимает вид

$$\bar{\gamma}^2 m^2 < [1 - (2/3)^{1/2}]^2 / 12.$$

Расчеты показали, что в интервале (13) на неподвижной стенке  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial U < 0$ ,  $y=0$ . В этом заключается существенное различие в поведении при  $y=0$  функции  $\bar{\omega}^2(U)$  в областях с «малыми» и «большими» градиентами. На подвижной стенке для обеих областей  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial U > 0$ . В области «больших» градиентов производная  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial U$  является знакопеременной: при  $y=0$  она отрицательная, при  $y=y_2$  – положительная.

Схема расчета констант, входящих в данное решение, состоит в следующем. Задаем скорость  $u_2$  и время релаксации  $\gamma$ ; параметр  $U_*$  берем из интервала (13) либо (14); подсчитываем константу  $u_1 = u_2/(U-1)^{1/2}$ ; выбираем  $\delta^2$  из интервала (12) и вычисляем  $\bar{\gamma}^2 m^2 = \delta^2/U^2$ ; находим  $y_1 = \gamma u_1/\bar{\gamma}$ ,  $2y_2/y_1 = \arccos(2U_* - 1)$ . Профили скорости и давления монотонные, перегибов не имеют:  $du/dy > 0$ ,  $d^2u/dy^2 > 0$ ,  $dp/dy < 0$ ,  $d^2p/dy^2 < 0$ ; выпуклость функции  $\tau_{12}(y)$  обращена

вверх,  $d^2(\tau_{12})/dy^2 < 0$ . Поведение разности первых нормальных напряжений  $\tau_{11} - \tau_{22}$  коррелирует со свойствами давления, подчиняясь формуле  $\tau_{11} - \tau_{22} = 2(p_0 - p)$ .

Построенное решение можно применить на более широком отрезке  $y \in [0, y_3]$ ,  $y_3 > y_2$ , полагая, что  $\zeta(u^2)$  является немонотонной функцией. Нетрудно видеть, что  $\zeta = 0$  при  $du/dy = 1/(\gamma m)$ . Именно при этом значении градиента скорости касательное напряжение  $\tau_{12}$  имеет максимум. Этот максимум достигается при  $y = y_3$ :

$$\begin{aligned} \cos(2y_3/y_1) &= (1 - \bar{u}_3^2)/(1 + \bar{u}_3^2), \quad \bar{u}_3 = u_3/u_1, \\ 1 + \bar{u}_3^2 &= 1/(\bar{\gamma}m) = U/\delta > U, \quad u_3 = u(y = y_3). \end{aligned}$$

Верхняя граница скоростей равна  $u_3$ ; в области «больших» градиентов  $u_3 > u_2$ ; в области «малых» градиентов  $u_3 > u_1$ . Функция  $\zeta(u^2)$  немонотонная при  $u \in [0, u_3]$ ; в левой окрестности значения  $u = u_3$  коэффициент сопротивления резко уменьшается до нуля.

Следуя аналогии между вязкоупругими и турбулентными сдвиговыми течениями [3, 4], введем в рассмотрение принятую в теории турбулентности динамическую скорость  $u_\tau = (\tau_{12}/\rho)^{1/2}$ . Решение (7) дает

$$\frac{u_\tau^2}{w^2} = \frac{\gamma du/dy}{1 + (\gamma m du/dy)^2} < 1,$$

где  $w^2 = \nu/\gamma$  – квадрат скорости распространения волны сдвига. Таким образом, динамическая скорость «дозвуковая» во всей области решения. При экспериментальном изучении турбулентных течений жидкости в плоском канале применяют так называемые индикаторные функции [12]:

$$\varphi_1 = \bar{y} d\bar{u}/d\bar{y}, \quad \varphi_2 = (\bar{y}/\bar{u})(d\bar{u}/d\bar{y}).$$

Физический смысл индикаторов в том, что если  $\varphi_1 = \text{const}$ , то профиль скорости логарифмический; если  $\varphi_2 = \text{const}$ , то профиль скорости степенной. Для тригонометрического профиля (8) индикаторная функция есть

$$\varphi_3 = (d\bar{u}/d\bar{y})/(1 + \bar{u}^2) = 1.$$

Результаты вычислений говорят о том, что в данном классе решений отсутствуют конечные отрезки значений координаты  $\bar{y}$ , на которых  $\varphi_1$  либо  $\varphi_2$  постоянны. Это значит, что профиль скорости (8), формирующийся под воздействием нелинейной внешней силы трения, существенным образом отличается во всех своих точках и от логарифмического и от степенного законов.

**Ньютоновская жидкость.** В ньютоновском изобарическом варианте ( $\gamma = 0, p = p_0 \equiv \text{const}$ ) свойства движения (8) не являются формальным следствием результатов, полученных при  $\gamma > 0$ . Дело в том, что при  $\gamma = 0$  изменяется структура формулы (9): теперь  $\bar{\zeta} = 2(1 + \bar{u}^2)$ , и автоматически выполнены требования  $\zeta > 0, d\zeta/d(u^2) > 0$ . Расчет констант, входящих в формулы решения, выполняем по следующей схеме.

Коэффициент сопротивления конечен и изменяется в интервале  $\zeta \in [\zeta_1, \zeta_2]$ , где  $\zeta_1 = \zeta(u = 0) > 0, \zeta_2 = \zeta(u = u_2) = U\zeta_1$ . Из физических соображений полагаем, что  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  различаются не слишком сильно:  $\zeta_2 - \zeta_1 = (U - 1)\zeta_1, 1 < U \leq 2$ . Это означает, что данное решение описывает течение, для которого знаменатель дроби в (8) не только положителен, но и не меньше единицы. Коэффициенты  $\zeta_1, \zeta_2$  могут зависеть от кинематической вязкости  $\nu$  и от других параметров, определяющих силу трения. Коэффициент сопротивления имеет вид

$$\zeta = \zeta_1 \left[ 1 + \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1 \right) \frac{u^2}{u_2^2} \right].$$

Следовательно, в нашем распоряжении четыре исходные константы  $\nu, \zeta_1, \zeta_2, u_2$ , которые позволяют вычислить остальные параметры решения:

$$y_1^2 = 2\nu/\zeta_1, u_1^2 = u_2^2/(U-1), 0 < 2y_2/y_1 = \arccos[(2-U)/U] \leq \pi/2.$$

В решении (8) параметры  $u_1$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  несут (посредством  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ) информацию о внешнем сопротивлении и вязкостных свойствах системы «жидкость – граничные стенки».

В статье [13] показано, что для двумерных течений несжимаемой ньютоновской жидкости выполнено равенство

$$\nu \Delta \mathbf{v} = 2 \mathbf{v}_d \times \boldsymbol{\omega}, \quad (15)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\mathbf{v}_d$  – диффузионная скорость движения вихря,  $\mathbf{v}_d = \nu(\text{rot } \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})/\boldsymbol{\omega}^2$ . Для течения (8) свойство (15) выполнено, а диффузионная скорость параллельна оси  $y$  и ее алгебраическая величина равна

$$v_d = -2\nu u/(y_1 u_1) = -u[2\nu \partial \zeta / \partial (u^2)]^{1/2} \leq 0. \quad (16)$$

Значит, вектор  $\mathbf{v}_d$  направлен от подвижной стенки к неподвижной. Очевидно, что для течения чистого сдвига ( $u \sim y$ ,  $p \equiv \text{const}$ ,  $\omega_z \equiv \text{const}$ ,  $\zeta \equiv 0$ ) имеем  $v_d = -(\nu/\omega_z)(d\omega_z/dy) \equiv 0$ . Таким образом, диффузионная скорость (16) генерируется внешним сопротивлением течению.

**Заключение.** Отличительная черта рассмотренных процессов – наличие нелинейной внешней силы трения. Дано аналитическое описание течения Куэтта с тригонометрическим профилем скорости (8). Обсуждены реологические модели Максвелла и Ньютона. Для жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями коэффициент сопротивления проявляет себя на фоне неравновесной завихренности, для которой линейный масштаб релаксации равен  $L_1 = \gamma u_1$ . Взаимное влияние неоднородности и неравновесности вихревого поля – причина нетривиального поведения производной  $\partial(\omega^2)/\partial U$  на подвижной и неподвижной стенках, см. (13), (14). Представленный пример движения ньютоновской жидкости принципиально отличается от обычного течения чистого сдвига существованием ненулевой скорости диффузии вихря, направленной от подвижной стенки к неподвижной.

#### Литература

1. Седов, Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
2. Астарита, Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марруччи. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
3. Лойцянский, Л.Г. Наследственные явления в турбулентных движениях/ Л.Г. Лойцянский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1982. – № 2. – С. 5–19.
4. Корнилов, В.И. Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях / В.И. Корнилов. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 399 с.
5. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
6. Обухов, А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование/ А.М. Обухов // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38, Вып. 4. – С. 101–111.
7. Должанский, Ф.В. Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений / Ф.В. Должанский, В.А. Крымов, Д.Ю. Манин // Успехи физических наук. – 1990. – Т. 160. – Вып. 7. – С. 1–47.
8. Должанский, Ф.В. О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий/ Ф.В. Должанский // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175, № 12. – С. 1257–1288.
9. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / А.В. Картавых, М.Г. Мильвидский, В.П. Гинкин и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2004. – № 6. – С. 91–98.
10. Шабловский, О.Н. Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах / О.Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сб. науч. тр. – М.: Янус-К., 2010. – Вып. 13. – С. 78–89.

11. Шабловский, О.Н. Динамика вихрей и теплоперенос в потоке вязкой жидкости / О.Н. Шабловский. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2001. – 142 с.
12. Wosnik, M. A theory for turbulent pipe and channel flows / M. Wosnik, L. Castillo, W.K. George // *J. Fluid Mech.* – 2000. – V. 421. – P. 115–145.
13. Дынникова, Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости / Г.Я. Дынникова // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2003. – № 5. – С. 11–19.

Поступила в редакцию 10 февраля 2011 г.

## TRIGONOMETRICAL PROFILE OF THE VELOCITY OF THE SHEAR FLOW OF THE VISCOUS FLUID

O.N. Shablovsky<sup>1</sup>

A new exact analytical solution for stationary hydrodynamics equations are given with account of external resistance force. Basic elements of the research: relaxation properties in the shear flow; vorticity at small and large velocity gradients; diffusive rate of movement of vortex.

*Keywords:* resistance force, Couette flow, vorticity diffusion, indicator function, stress relaxation.

### References

1. Sedov L.I. *Mehanika sploshnoj sredy* (Continuum mechanics). Moscow, Nauka, 1973. Vol. 1. p. 536. (in Russ.).
2. Astarita G., Marrucci G. *Osnovy gidromehaniki nen'jutonovskih zhidkostej* (Principles of non-Newtonian fluid mechanics). Moscow, Mir, 1978. 309 p. (in Russ.) [Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*. McGraw-Hill, 1974.].
3. Lojczanskij L.G. *Izv. AN SSSR. Mehanika zhidkosti i gaza.* 1982. no. 2. pp. 5–19. (in Russ.).
4. Kornilov V.I. *Prostranstvennye pristennye turbulentnye techenija v uglovyh konfi-guracijah* (Spatial wall turbulence flow in a corner configurations). Novosibirsk: Nauka. Sibirskaja izdatel'skaja firma RAN, 2000. 399 p. (in Russ.).
5. Gledzer E.B., Dolzhanskij F.V., Obukhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ih primeneniye* (Systems of hydrodynamic type and their application). Moscow, Nauka, 1981. p. 368. (in Russ.).
6. Obukhov A.M. *Russian Mathematical Surveys.* 1983. Vol. 38, no. 4, pp. 113–126. [Obukhov A.M. *Techenie Kolmogorova i ego laboratornoe modelirovanie* (Kolmogorov flow and laboratory simulation of it). *Uspehi Matematicheskikh Nauk.* 1983. Vol. 38, no. 4. pp. 101–111. (in Russ.).]
7. Dolzhanskii F.V., Krymov V.A., Manin D.Yu. Stability and vortex structures of quasi-two-dimensional shear flows. *Sov. Phys. Usp.* 1990. Vol. 33, no. 7. pp. 495–520. DOI: 10.1070/PU1990v033n07ABEH002605. [Dolzhanskij F.V., Krymov V.A., Manin D.Ju. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 1990. Vol. 160, no. 7. pp. 1–47. DOI: 10.3367/UFNr.0160.199007a.0001 (in Russ.).]
8. Dolzhanskii F.V. On the mechanical prototypes of fundamental hydrodynamic invariants and slow manifolds. *Phys. Usp.* Vol. 48. pp.1205–1234. [Dolzhanskij F.V. *Uspehi fizicheskikh nauk.* 2005. Vol. 175, no. 12. pp. 1257–1288. DOI: 10.3367/UFNr.0175.200512a.1257 (in Russ.).]
9. Kartavyh A.V., Mil'vidskij M.G., Ginkin V.P., Zabud'ko M.A., Naumenko O.M. *Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya.* 2004. no. 6. pp. 91–98.
10. Shablovskij O.N. Nelinejnye volnovye uravneniya i konkurencija istochnikov jenerгии v dvuhkomponentnyh sistemah (Nonlinear wave equations and sources of energy competition in two-component systems) *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tehniko-tehnologicheskikh sistem: sb. nauch. tr.* (The fundamental physical and mathematical problems and modeling of technical and technological systems: Proceedings). Moscow, Janus-K., 2010. no. 13. pp. 78–89.
11. Shablovskij O.N. *Dinamika vihrej i teploperenos v potoke vjazkoj zhidkosti* (Vortex dynamics and heat transfer in a viscous fluid). Gornel': GGTU im. P.O. Sukhogo, 2001. 142 p.
12. Wosnik M., Castillo L., George W.K. A theory for turbulent pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.* 2000. Vol. 421. pp. 115–145.
13. Dynnikova G.Ja. *Izv. RAN. Mehanika zhidkosti i gaza.* 2003. no. 5. pp. 11–19.

<sup>1</sup> Shablovsky Oleg Nikiphorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Technical Mechanics Department, Machine Building Faculty, Gomel State Technical University. e-mail: shablovsky-on@yandex.ru, shabl@gstu.by

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ

А.О. Щербакова<sup>1</sup>

Предложенный вариант метода конечных элементов позволяет находить большие перемещения плоской линейно-упругой конструкции при заданных узловых нагрузках и, наоборот, нагрузки при заданных перемещениях. Расчетная модель включает в себя геометрические, статические и физические соотношения (закон Гука). Расчет показал, что одним и тем же нагрузкам могут соответствовать несколько разных деформированных положений конструкции. С целью верификации представленной модели в работе выполнен расчет чистого изгиба балки при больших перемещениях. Анализ полученных результатов показал адекватность предложенной модели, при этом результат заметно отличается от решения в пакете ANSYS.

*Ключевые слова:* геометрическая нелинейность, большие перемещения, конечные деформации, чистый изгиб, плоское напряженно-деформированное состояние.

## Введение

Современная механика сплошной среды отличается большим разнообразием подходов к решению задачи о расчете больших перемещений конструкций, разнообразен также и используемый тензорный арсенал. Для описания напряженного состояния материала наиболее широко используется тензор напряжений Коши [1–3], наследуемый практически без изменения из геометрически линейного подхода, а также тензоры Пиолы–Кирхгофа первого и второго рода [2, 3]. Еще большее количество тензоров описывает деформированное состояние материала, например [1–5]. Сюда относятся тензоры конечных деформаций Коши–Грина, Грина–Лагранжа, Альманси и др. Кроме того в литературе, а также в некоторых пакетах вычислительных программ (в частности, в пакете ANSYS), для расчета конечных деформаций используют тензор логарифмической деформации (тензор Генки) [5, 6], что делается, как показано в работе [7], не всегда корректно. Подобное обилие мер напряжений и деформаций существенно усложняет решение, причем даже для линейно-упругих конструкций. Поэтому целью данной работы является создание такой модели расчета конечных деформаций плоской конструкции, которая основывается на тензорах, наиболее понятных с точки зрения физического смысла их координат.

В данной работе статическая сторона задачи решается на основе тензора напряжений Коши. Модель деформационных свойств линейно-упругого материала наследуется из геометрически линейного подхода и описывается законом Гука. Для описания геометрической стороны задачи использован тензор деформации, представляющий разность тензора растяжения и единичного тензора, где тензор растяжения определяется с помощью полярного разложения [8, 9] тензора дисторсии.

## Описание расчетной модели

Предложенная расчетная модель дает возможность решать прямую и обратную задачи: зная нагрузки, приложенные к конструкции, модель позволяет определить смещения ее точек и, наоборот, по заданным смещениям найти приложенные к конструкции силы. Промежуточным результатом является метод расчета соответствующих напряжений и деформаций. Модель расчета основывается на методе конечных элементов, где элементы представляют собой треугольные симплексы. В пределах одного элемента поле смещений считается однородным и линейным (зависящим только от смещений его вершин). Отсюда следует постоянство полей деформаций и напряжений элемента. Это значительно упрощает решение задачи: стороны треугольного элемента прямые до деформации остаются прямыми и при деформировании тела.

<sup>1</sup> Щербакова Алла Олеговна – кандидат технических наук, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: AllaScherbakova@list.ru

*Геометрические соотношения модели.* Для рассматриваемой геометрически нелинейной задачи одним из ключевых моментов является задание линейной связи между дисторсией и смещениями узлов конструкции. Однородность деформированного состояния элемента означает наличие линейной связи между начальными векторами волокон  $l_0$  этого элемента и векторами его волокон  $l$  в деформированном состоянии:

$$l = F \cdot l_0. \quad (1)$$

Оператором этой связи является двухвалентный тензор дисторсии  $F$ . В плоской задаче он представляет сумму четырех диад

$$F = F_1 e_1 e_1 + F_2 e_1 e_2 + F_3 e_2 e_1 + F_4 e_2 e_2,$$

где числа  $F_1, F_2, F_3, F_4$  – координаты тензора дисторсии в декартовом базисе  $\{e_1, e_2\}$ .

Тензор дисторсии конечного элемента определяется векторами смещений его вершин (рис. 1). Здесь штриховыми линиями показан элемент  $ABC$  (заданный векторами  $a$  и  $b$ ) в начальном состоянии, сплошными – в деформированном состоянии. Смещения его вершин  $A, B$  и  $C$  определяют векторы  $q^A, q^B$  и  $q^C$  соответственно. Тензор дисторсии этого элемента определяется с помощью выражения (1), записанного для векторов  $a$  и  $b$ :

$$F \cdot a = a + q^B - q^A, \quad F \cdot b = b + q^C - q^A.$$

Данная система двух векторных уравнений равносильна системе четырех скалярных уравнений, которую удобно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = [L_1] \begin{bmatrix} q_1^A \\ q_2^A \\ q_1^B \\ q_2^B \\ q_1^C \\ q_2^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [L_1] = \frac{1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \begin{bmatrix} b_2 - a_2 & 0 & -b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ a_1 - b_1 & 0 & b_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & b_2 - a_2 & 0 & -b_2 & 0 & a_2 \\ 0 & a_1 - b_1 & 0 & b_1 & 0 & -a_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В случае если какое-либо перемещение узла конечного элемента запрещено, мы его исключаем из столбца  $[q]$  в выражении (2), удаляя при этом соответствующий столбец матрицы  $[L_1]$ . Например, если для элемента на рис.1 запретить горизонтальное смещение узла  $B$  ( $q_1^B = 0$ ) и вертикальное смещение узла  $C$  ( $q_2^C = 0$ ), то его степень свободы, вместо шести, станет равна четырем. Столбец перемещений при этом примет вид  $[q_1^A \ q_2^A \ q_2^B \ q_1^C]^T$ , а матрица  $[L_1]$  будет равна

$$[L_1] = \frac{1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \begin{bmatrix} b_2 - a_2 & 0 & 0 & a_2 \\ a_1 - b_1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & b_2 - a_2 & -b_2 & 0 \\ 0 & a_1 - b_1 & b_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для конструкции, состоящей из нескольких элементов (их число обозначим  $k$ ), тензор дисторсии удобно записывать в матричной форме в виде столбца  $[F]$ , в котором последовательно в виде блоков перечислены координаты тензоров дисторсии каждого элемента:

$$[F] = [[F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4]_1 \ [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4]_2 \ \dots \ [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4]_k]^T.$$

Для конструкции выражение (2) принимает вид

$$[F] = [L] [q] + [I_1]. \quad (3)$$

Здесь матрица  $[q]$  представляет столбец чисел, содержащий смещения узлов конструкции  $[q] = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m]^T$ , где число  $m$  представляет степень свободы конструкции. Матрица  $[I_1]$  – это столбец, содержащий блоки координат единичного тензора:

$$[I_1] = \begin{bmatrix} [1 \ 0 \ 0 \ 1] & [1 \ 0 \ 0 \ 1] & \dots & [1 \ 0 \ 0 \ 1] \end{bmatrix}^T.$$

Количество этих блоков, естественно, должно быть равно числу  $k$  элементов конструкции. Матрица  $[L]$  размерностью  $4k \times m$  определяет связь между смещениями  $[q]$  и дисторсией  $[F]$ . Она со-

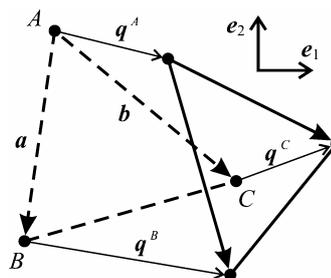


Рис. 1. Дисторсия конечного элемента

стоит из блоков  $[L_1]$ , расположенных по главной диагонали, остальные координаты матрицы равны нулю. Отметим, что для каждой конструкции матрица  $[L]$  постоянна и ее координаты не зависят от нагрузок или смещений.

*Полярное разложение дисторсии.* Тензор дисторсии представляет скалярное произведение симметричного тензора  $V$  и ортогонального  $R$ :

$$F = V \cdot R \quad (4)$$

или наоборот, ортогонального тензора  $R$  и симметричного  $U = R^T \cdot V \cdot R$ . Тензор  $R$  – это тензор жесткого поворота тела на угол  $\varphi$  против часовой стрелки в плоскости  $\{e_1, e_2\}$ :

$$R = (e_1 e_1 + e_2 e_2) \cos \varphi + (e_2 e_1 - e_1 e_2) \sin \varphi, \quad (5)$$

а  $V$  – левый тензор растяжения, который определяется тремя координатами  $V_1, V_2$  и  $V_3$ :

$$V = V_1 e_1 e_1 + V_2 e_1 e_2 + V_2 e_2 e_1 + V_3 e_2 e_2.$$

Он равен сумме единичного тензора  $I$  и симметричного тензора деформации  $\varepsilon$  в элементе, предварительно повернутом как жесткое целое на угол  $\varphi$ . Тензор  $U$  является правым тензором растяжения, он равен сумме единичного тензора и тензора деформации в элементе до его жесткого поворота. В данной работе используется левый тензор растяжения  $V$ , с помощью которого проще определить деформации в элементе после его жесткого поворота:

$$\varepsilon = V - I = F \cdot R^T - I. \quad (6)$$

Такой тензор понадобится позже для расчета напряжений и усилий, приложенных к узлам конструкции.

Выражение (4) представляет двухвалентное тензорное уравнение. Для плоской задачи при известных четырех координатах тензора дисторсии оно содержит четыре неизвестных параметра:  $\varphi$  – угол поворота как жесткого целого, однозначно определяющий ортогональный тензор  $R$ , согласно выражению (5), а также три координаты симметричного тензора растяжения. В работе [10] показано, что тангенс, косинус, а также синус угла  $\varphi$  вычисляются следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = (F_3 - F_2)/(F_1 + F_4), \quad \cos \varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-1/2}, \quad \sin \varphi = \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi. \quad (7)$$

Три координаты тензора деформации конечного элемента определяются с использованием выражений (6) и (7):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = [R_1] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [R_1] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi / 2 & \cos \varphi / 2 & \cos \varphi / 2 & -\sin \varphi / 2 \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[R_1]$  связывает координаты тензора дисторсии элемента с координатами тензора деформации.

Для конструкции тензор деформации записывается, как и тензор дисторсии, в виде столбца, состоящего из  $k$  одинаковых блоков:

$$[\varepsilon] = \left[ [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]_1 \ [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]_2 \ \dots \ [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]_k \right]^T,$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$  – продольные деформации, а  $\varepsilon_2$  – сдвиговая. Выражение, определяющее деформации конструкции, имеет следующий вид:

$$[\varepsilon] = [R(q)] [F] - [I_2], \quad (8)$$

где матрица  $[R(q)]$ , размерностью  $3k \times 4k$  и состоящая из блоков  $[R_1]$ , определяет связь между дисторсией и деформациями конструкции, а столбец  $[I_2]$  содержит координаты единичного тензора и имеет размерность  $3k$ :

$$[I_2] = \left[ [1 \ 0 \ 1] \ [1 \ 0 \ 1] \ \dots \ [1 \ 0 \ 1] \right]^T.$$

*Физическое соотношение модели.* В качестве физического соотношения используется закон Гука:  $\sigma = C \cdot \varepsilon$ , где четырехвалентный тензор  $C$  является тензором констант упругости. Для конструкции это выражение приобретает матричный вид

$$[\sigma] = [C] [\varepsilon], \quad (9)$$

где столбец  $[\sigma]$  размерностью  $3k$  содержит компоненты тензоров напряжений Коши ( $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  – нормальные напряжения,  $\sigma_2$  – касательное) элементов конструкции:

$$[\sigma] = \left[ [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]_1 \ [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]_2 \ \dots \ [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]_k \right]^T,$$

## Механика

а симметричная матрица  $[C]$  размерностью  $3k \times 3k$  содержит константы упругости материала. Например, для конечного элемента конструкции из изотропного материала при плоском напряженном состоянии матрица  $[C]$  имеет вид:

$$[C] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $E$  – модуль упругости, а  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

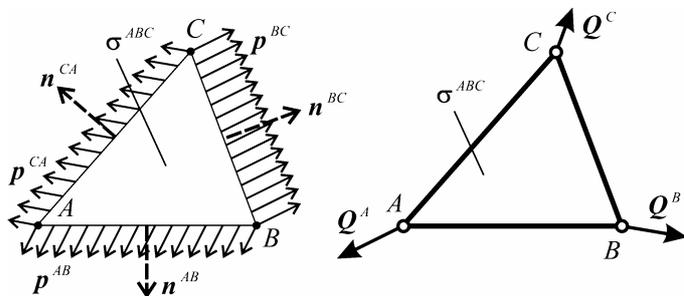
*Статические соотношения модели.* Представление плоской конструкции в виде набора треугольных элементов, находящихся в однородном напряженно-деформированном состоянии, можно сравнить с наложением на нее некоего корсета в виде фермы, состоящей из стержней – сторон треугольников, шарнирно связанных в узлах – вершинах треугольников, которые определяют сетку конечных элементов. Жесткость корсета на изгиб считается бесконечно большой, а на растяжение-сжатие бесконечно малой. Поэтому при деформировании конструкции с наложенным на нее корсетом каждый из стержней может растягиваться или сжиматься, но не изгибаться, что обеспечивает однородность напряженно-деформированного состояния элементов. В связи с этим внешние силы логично прикладывать к узлам корсета.

При известном тензоре напряжений  $\sigma^{ABC}$  конечного элемента  $ABC$ , изображенного на рис. 2, с помощью граничных условий определяются распределенные силы  $p$ , действующие на его сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , заданных единичными нормальными  $n$  в деформированном состоянии (рис. 2, а):

$$p^{AB} = \sigma^{ABC} \cdot n^{AB}, \quad p^{BC} = \sigma^{ABC} \cdot n^{BC}, \quad p^{CA} = \sigma^{ABC} \cdot n^{CA}. \quad (10)$$

Система этих распределенных сил, действующих на элемент, эквивалентна системе сосредоточенных сил  $Q^A$ ,  $Q^B$  и  $Q^C$ , приложенных к узлам корсета (рис. 2, б). Узловые силы  $Q$  определяются с учетом равновесия элемента под действием распределенных сил ( $AB p^{AB} + BC p^{BC} + CA p^{CA} = 0$ ) и граничных условий (10):

$$Q^A = -\frac{BC}{2} \sigma^{ABC} \cdot n^{BC}, \quad Q^B = -\frac{CA}{2} \sigma^{ABC} \cdot n^{CA}, \quad Q^C = -\frac{AB}{2} \sigma^{ABC} \cdot n^{AB}.$$



а) конечный элемент без корсета

б) конечный элемент с корсетом

Рис. 2. Силы, действующие на конечный элемент

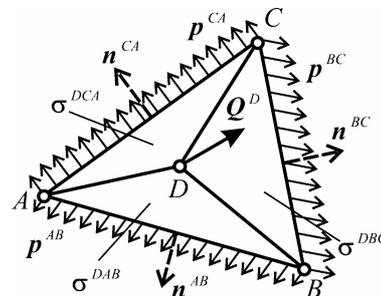


Рис. 3. Схема приведения сил к узлу конструкции

Один узел может принадлежать сразу нескольким элементам конструкции, например, узел  $D$ , изображенный на рис. 3. Следовательно, сила, приложенная к этому узлу, представляет сумму сил, действующих на сторонах, не содержащих этого узла. Например, поскольку узел  $D$  принадлежит трем конечным элементам  $DAB$ ,  $DCA$  и  $DBC$  (рис. 3), сила  $Q^D$ , действующая на него, рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^D &= -\frac{1}{2}(AB * p^{AB} + CA * p^{CA} + BC * p^{BC}) = \\ &= -\frac{1}{2}(AB * \sigma^{DAB} \cdot n^{AB} + CA * \sigma^{DCA} \cdot n^{CA} + BC * \sigma^{DBC} \cdot n^{BC}). \end{aligned}$$

Для произвольной плоской конструкции это выражение принимает матричный вид:

$$[Q] = [H(q)] [\sigma], \quad (11)$$

где столбец  $[Q]$  содержит координаты сил, приложенных к узлам конструкции:  $[Q] = [Q_1 Q_2 \dots Q_m]^T$  (по аналогии со смещениями  $[q]$ ), а матрица  $[H(q)]$  связывает координаты тензоров напряжений элементов конструкции с координатами сил, приложенных к узлам конст-

рукции в ее деформированном состоянии, причем эта связь линейна. Матрица  $[H(q)]$  зависит от смещений, так как равновесие элемента рассматривается в деформированном состоянии.

*Расчет конструкции при кинематическом нагружении.* Результирующее выражение для расчета конструкции следует из решения системы уравнений (3), (8), (9) и (11) относительно нагрузок  $[Q]$ :

$$[Q] = [K(q)] [q] + [b(q)], \quad (12)$$

где

$$[K(q)] = [H(q)] [C] [R(q)] [L], \quad [b(q)] = [H(q)] [C] ([R(q)] [I_1] - [I_2]).$$

При расчете приложенных к конструкции сил по заданным смещениям история деформирования конструкции не имеет значения.

*Расчет конструкции при силовом нагружении.* Расчет конструкции при силовом нагружении качественно отличается от расчета при кинематическом нагружении. Во-первых, найти смещения из выражения (12) в явном виде невозможно, так как от смещений зависят матрицы  $[K(q)]$  и  $[b(q)]$ :

$$[q] = [K(q)]^{-1} ([Q] - [b(q)]). \quad (13)$$

Поэтому уравнение (13) приходится решать с использованием численных методов, например, метода итераций. Кроме того, нелинейность задачи обуславливает неоднозначность решения, следовательно, приобретает значение история изменения нагрузок, и расчет приходится вести шагами по времени. Численный метод поиска смещений требует проверки адекватности решения. В качестве такой проверки удобно использовать расчет при кинематическом нагружении, задавая конструкции перемещения, найденные из расчета при силовом нагружении. Полученные нагрузки при этом должны совпадать с нагрузками, заданными в расчете конструкции при силовом нагружении.

#### Алгоритм расчета

Шаг № 1:

- 1) задаем силы  $[Q_1]$ ;
- 2) принимаем начальное приближение смещений  $[q_{нач1}] = [0]$ ;
- 3) с помощью уравнения (13) уточняем смещения  $[q_1]$  на первом шаге.

Шаг № 2:

- 1) задаем силы  $[Q_2] = [Q_1] + [dQ]$ , где  $[dQ]$  – приращение сил;
- 2) задаем начальное приближение смещений  $[q_{нач2}] = [q_1]$ ;
- 3) решаем уравнение (13), уточняя смещения  $[q_2]$  на втором шаге.

Расчет последующих шагов выполняется аналогично.

#### Примеры расчетов

*Кинематическое нагружение балки при чистом изгибе.* В работе выполнены расчеты изгиба балки (рис. 4) при кинематическом нагружении. Этот и все дальнейшие расчеты с применением предложенной расчетной модели выполнены в пакете MATLAB. В расчетах использовали следующие исходные данные: материал балки является изотропным и линейно-упругим (модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0$ ). Длина балки  $l = 15$  м, высота  $h = 8$  м, толщина 1 м, взаимный угол поворота торцов  $\alpha = \pi/2$ , напряженное состояние является плоским. На рис. 4 приведена схема балки в начальном (с разбивкой на конечные элементы) и в конечном состояниях, число конечных элементов – 240. Координаты узлов сетки вычисляли, исходя из следующих соображений:

- а) горизонтальные слои балки деформируются по дугам концентрических окружностей, радиус кривизны нейтрального слоя (вдоль которого проведена ось  $x$  на рис. 4)  $\rho = l / \alpha$ ;
- б) вследствие принятого равным нулю коэффициента Пуассона расстояния между слоями балки после деформации сохраняются теми же, что и в начальном состоянии;
- в) длина нейтрального слоя в деформированном состоянии равна начальной длине балки  $l$ ;
- г) поперечные сечения остаются плоскими (гипотеза Бернулли).

Для примера координаты узла  $A_0$  в деформированном состоянии балки (точка  $A$  на рис. 4) равны:

$$x = (\rho - y_0) \sin \varphi, \quad y = \rho - (\rho - y_0) \cos \varphi,$$

где угол  $\varphi$ , равный  $x_0 / \rho$ , представляет угол поворота поперечного сечения, содержащего точку  $A$ .

В расчете получено распределение сил, приложенных к узлам балки, вполне соответствующее чистому изгибу. На рис. 5 показаны силы, действующие в узлах сетки на правом торце балки, прерывистая линия соответствует известному из курса сопротивления материалов распределению нормальных напряжений по высоте поперечного сечения. На левом торце распределение узловых сил является аналогичным, а в остальных узлах величины внешних сил оказались примерно на два порядка меньшими, чем максимальные, что говорит об относительной корректности решения. Система сил, изображенных на рис. 5, эквивалентна моменту пары сил  $M$ , представляющему сумму произведений этих сил на соответствующие расстояния до точки  $C$ . В нашем случае моменты на торцах балки составили  $M = 9,39 \cdot 10^{11}$  Н·м.

В работе выполнено сравнение полученного решения с точным решением, известным из курса сопротивления материалов  $M = Eh^3\alpha/(12l)$ . Это выражение соответствует решению задачи о чистом изгибе балки при больших перемещениях в случае равенства нулю коэффициента Пуассона. Вычисленные моменты были сопоставлены с величинами моментов, полученными из расчетов с применением пакета прикладных программ ANSYS. В пакете ANSYS были выполнены два расчета: в первом использованы треугольные конечные элементы (разбивка на элементы совпадает с показанной на рис. 4), во втором – квадратные той же высоты. В расчетах применяли элементы типа plane182. Результаты сравнения моментов, вычисленных различными методами, и соответствующих погрешностей  $\delta$  по сравнению с точным решением приведены в таблице. Расчеты показали хорошую адекватность предложенной нами расчетной модели: при выбранном размере элементов погрешность по сравнению с точным решением составляет 5,13 %, что в 4–6 раз меньше, чем в расчетах с применением пакета ANSYS. При уменьшении угла  $\alpha$  погрешность предложенного решения остается примерно на том же уровне (около 5 %), а с ростом числа элементов величина  $\delta$  падает. Например, при уменьшении размера элемента вдвое погрешность в расчете с помощью предложенной модели составила 1,2 %, а в расчете с применением пакета ANSYS величина  $\delta$  не изменилась (при увеличении размера элемента вдвое погрешность расчета с применением пакета ANSYS возросла до 23,6 %).

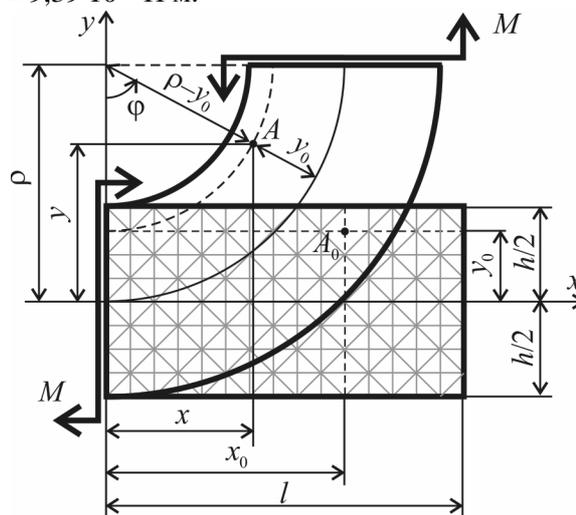


Рис. 4. Схема чистого изгиба балки

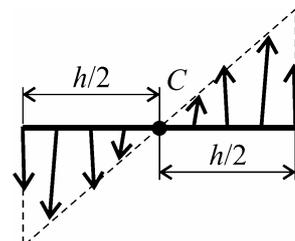


Рис. 5. Узловые силы на правом торце балки

Таблица

	Точное решение	Полученное решение	Решение с применением пакета ANSYS	
			Треугольные элементы	Прямоугольные элементы
Значение момента, $M \cdot 10^{-11}$ Н·м	8,94	9,39	11,4	10,8
Погрешность по сравнению с точным решением, $\delta$ %	–	5,13	28,0	20,6

*Силовое нагружение балки при чистом изгибе.* С использованием предложенной модели в работе выполнен расчет конструкции при силовом нагружении. Объект расчета – консольная балка размерами  $l \times h$ , исходные данные – те же, что и в предыдущем расчете за исключением высоты балки  $h$ , которая была уменьшена вдвое. Для решения системы нелинейных уравнений (16) использовали *trust region dogleg method*, встроенный в функцию *fsolve* пакета MATLAB. На рис. 6

изображена схема нагружения и закрепления конструкции, разбитой на конечные элементы, а также результаты расчета. Точки на графике соответствуют прогибам  $v$  в зависимости от приложенной силы  $Q$ , а штриховой линией показано решение, найденное по линейной теории  $v = 4Q^3/(Eh^3)$ . Расчет показал заметную нелинейность зависимости прогиба от нагрузки. Например, в случае, когда величина максимального прогиба  $v$  оказывается равной высоте балки  $h$ , разница между найденным прогибом и прогибом, вычисленным по линейной теории, составляет около 30 %.

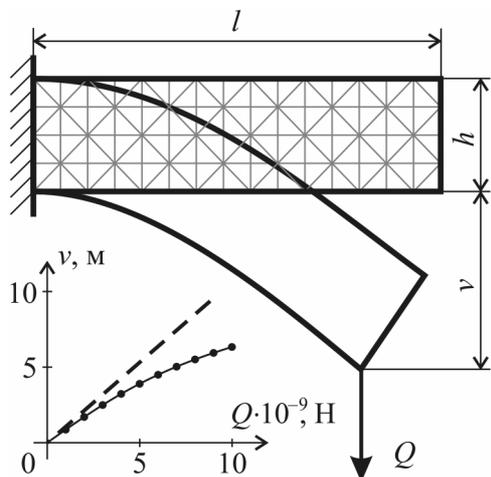


Рис. 6. Силовое нагружение консольной балки

**Неоднозначность решения.** Геометрическая нелинейность задачи в некоторых случаях приводит к неоднозначности решения: одним и тем же нагрузкам  $[Q]$ , приложенным к конструкции, в зависимости от истории изменения нагрузок могут отвечать различные перемещения  $[q]$ . Например, для элемента  $ABC$  ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0$ , толщина 1 м), изображенного на рис. 7, а и б (начальное положение элемента показано сплошной линией), одним и тем же нагрузкам  $Q_A^{max} = 1,78 \cdot 10^{11}$  Н и  $Q_B^{max} = 2,42 \cdot 10^{11}$  Н отвечают два его различных положения, показанные пунктирными линиями. В первое положение ( $q_A = 4$  м,  $q_B = 0$ ) элемент попадает в случае, когда история изменения нагрузок  $Q_A$  и  $Q_B$  описывается функциями, графики которых изображены на рис. 7, в. Если история нагружения соответствует графикам, изображенным на рис. 7, г, тогда элемент из начального положения попадает в другое положение ( $q_A^* = 1,37$  м,  $q_B^* = 1,99$  м). В первом расчете (рис. 7, в) пропорционально изменяли смещения, а во втором (рис. 7, г) – силы.

рис. 7, г, тогда элемент из начального положения попадает в другое положение ( $q_A^* = 1,37$  м,  $q_B^* = 1,99$  м). В первом расчете (рис. 7, в) пропорционально изменяли смещения, а во втором (рис. 7, г) – силы.

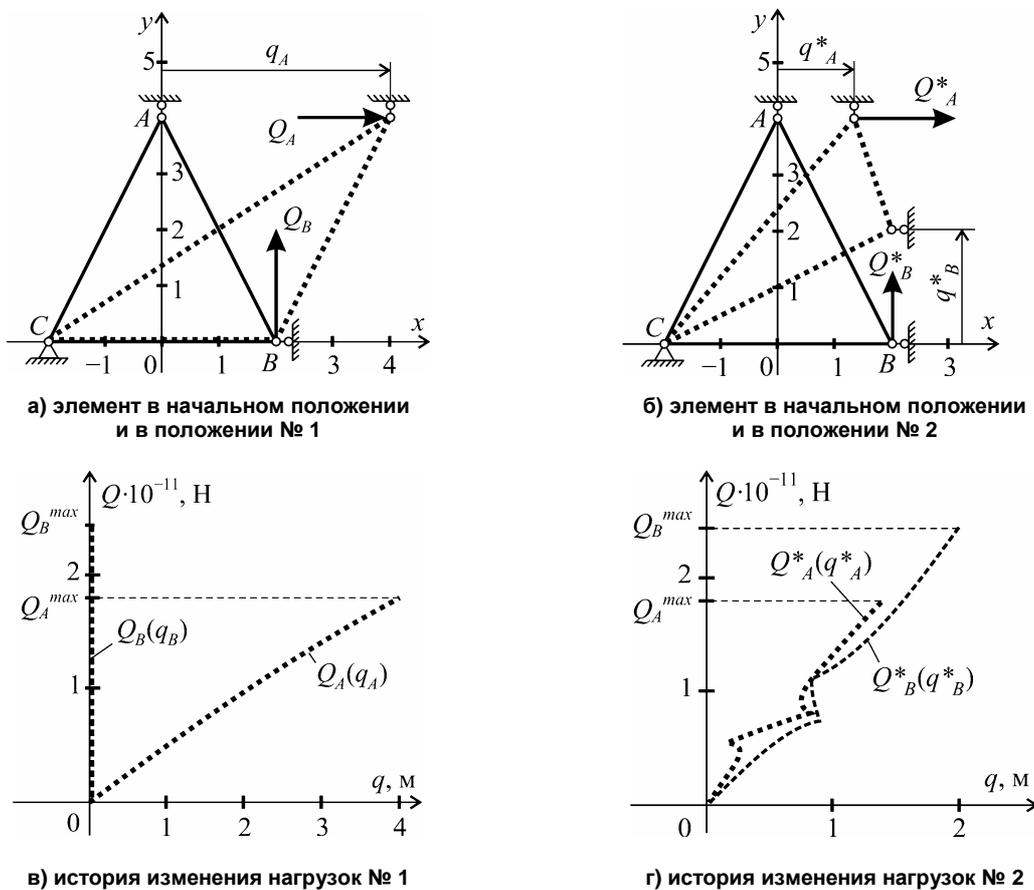


Рис. 7. Два варианта истории изменения нагрузок элемента ABC

### Заключение

При кинематическом нагружении конструкции расчет по предложенной модели не требует итераций, а история смещений не влияет на результат. Расчет с использованием выражения (12) не требует разбиения времени на шаги. Разрешающие уравнения (12) и (13) записываются в конечном виде, а не в приращениях, что позволяет избежать накопления ошибки в вычислениях. Задача о силовом нагружении конструкции имеет неоднозначное решение: одним и тем же нагрузкам могут соответствовать несколько разных деформированных положений конструкции.

Сопоставление с точным решением задачи о чистом изгибе балки при больших перемещениях показывает, что при относительно небольшом количестве конечных элементов ошибка расчета по сравнению с точным решением не превышает 5 %, причем при уменьшении размера элементов ошибка уменьшается. Для сравнения: ошибка расчета в пакете ANSYS при том же размере элементов составляет 28 % для треугольных конечных элементов и около 20 % для квадратных.

Предложенная расчетная модель, ограниченная рамками закона Гука, может быть распространена на область неупругих материалов. В последнем случае изменится только часть, связанная с полярным разложением тензора дисторсии, а остальные соотношения сохранятся. При кинематическом нагружении (как и при силовом) расчет нельзя будет провести за один шаг, поскольку на результат будет оказывать влияние история накопления неупругих деформаций. Накопленную к данному шагу пластику необходимо будет уточнять в итерациях.

### Литература

1. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды / К. Трусделл. – М: Мир, 1975. – 592 с.
2. Chadwick, P. Continuum mechanics: concise theory and problems / P. Chadwick. – 2 ed. – Dover publications, 1998. – 193 p.
3. Belytschko, T. Nonlinear finite elements for continua and structures / T. Belytschko, W.K. Lin, B. Moran. New York: John Wiley and sons, 2000. – 660 p.
4. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
5. An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent rate-dependent elastic-plastic constitutive equations / G.G. Weber, A.M. Lush, T.A. Zavalangos, L. Anand // International journal of plasticity. – 1990. – V. 6. – P. 701–744.
6. ANSYS – a general purpose finite element program. Rev. 5.0. – Houston (PA): Swanson analysis system inc., 1996. – 510 p.
7. Садаков О.С. Конечные деформации в механике деформируемого твердого тела // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – №6(46). – С. 114–121.
8. Douglas, R.G. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space / R.G. Douglas // Proc. Amer. math. Soc. – 1966. – № 17. – P. 413–415.
9. Sobczyk, G. Hyperbolic number plane / G. Sobczyk // College mathematics journal. – 1995. – № 26. – P. 268–280.
10. Щербакова, А.О. Использование круга Мора для решения задачи полярной декомпозиции при плоском напряженном состоянии / А.О. Щербакова, О.С. Садаков, С.И. Шульженко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 2. – № 9(185). – С. 21–26.

*Поступила в редакцию 2 мая 2011 г.*

**THE FINITE ELEMENT METHOD USE FOR LARGE DISPLACEMENTS  
CALCULATIONS OF PLANE LINEAR-ELASTIC STRUCTURES****A.O. Scherbakova<sup>1</sup>**

A proposed version of the finite element method can find large displacements of a plane linear-elastic structure with given nodal loads, and conversely, nodal loads at the given displacements. A calculation model includes geometrical, static and physical relations (Hooke's law). The calculation showed that several different deformed positions of the structure may correspond to the same loads. To verify the proposed model, the pure bending of a beam was calculated with large displacements taken into account. Analysis of the results showed the adequacy of the proposed model. At that the results differ markedly from the ANSYS solution.

*Keywords: geometric nonlinearity, large displacements, finite deformations, pure bending, plane stress-strain state.*

**References**

1. Truesdell C.A. *A first course in rational continuum mechanics*. Baltimore, The Johns Hopkins University, 1972.
2. Chadwick P. *Continuum mechanics: concise theory and problems (2nd ed.)*. Dover publications, 1998. 193 p.
3. Belytschko T., Lin W.K., Moran B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. New York, John Wiley and sons, 2000. ISBN 0-471-98773-5. 660 p.
4. Mase G.E. *Theory and problems of continuum mechanics: Schaum's Outline Series*. New-York: McGraw-hill Book Company, 1970. 221 p.
5. Weber G.G., Lush A.M., Zavaliangos T.A., Anand L. An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent rate-dependent elastic-plastic constitutive equations. *International journal of plasticity*. 1990. Vol. 6. pp. 701–744.
6. ANSYS – a general purpose finite element program. Rev. 5.0. Houston (PA): Swanson analysis system inc., 1996. 510 p.
7. Sadakov O.S. *Vestnik YuUrGU, serija «Matematika, fizika, khimija»*. 2005. Vol. 6, no. 6(46). pp. 114–121. (in Russ.).
8. Douglas R.G. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space. *Proc. Amer. math. Soc.* 1966. no 17. pp. 413–415.
9. Sobczyk G. Hyperbolic number plane. *College mathematics journal*. 1995. no. 26. pp. 268–280.
10. Scherbakova A.O., Sadakov O.S., Shul'zhenko S.I. Ispol'zovanie kruga Mora dlja reshenija zadachi poljarnoj dekompozicii pri ploskom naprjazhennom sostojanii (Application of the Mohr circles for solving the problem of polar decomposition under plane stress). *Vestnik YuUrGU. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2010. Vol. 2, no. 9(185). pp. 21–26. (in Russ.).

<sup>1</sup> Scherbakova Alla Olegovna is Cand. Sc. (Engineering), Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University. e-mail: AllaScherbakova@list.ru

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВОЛОКОННОМ СВЕТОВОДЕ<sup>1</sup>

А.В. Ершов<sup>2</sup>, Н.Д. Кундикова<sup>3</sup>

Получены аналитические выражения, позволяющие определить влияние продольного магнитного поля на вид спекл-картины света, распространяющегося в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления.

Ключевые слова: эффект Фарадея, магнитное поле, оптическое волокно, ступенчатый профиль показателя преломления.

Хорошо известный эффект Фарадея [1] наблюдается при прохождении линейно поляризованного света через прозрачный диэлектрик, помещенный в магнитное поле. Угол поворота плоскости поляризации  $\vartheta$  определяется магнитооптическими свойствами прозрачного диэлектрика, через который проходит свет, величиной магнитного поля  $H$  и длиной диэлектрика в магнитном поле  $L$ :

$$\vartheta = VHL \cos \varphi. \quad (1)$$

Здесь  $V$  – постоянная Верде,  $\varphi$  – угол между направлением распространения света и направлением магнитного поля [1].

В одномодовом волокне, помещенном в продольное магнитное поле, также наблюдается поворот плоскости линейной поляризации, пропорциональный величине магнитного поля [2]. В многомодовом оптическом волокне поляризация прошедшего через волокно света, как правило, не сохраняется, поэтому эффект Фарадея в классическом варианте не наблюдается. Однако индуцированное магнитным полем циркулярное двулучепреломление в оптическом волокне приводит к возникновению иного эффекта, а именно, поворота спекл-картины излучения, прошедшего через маломодовое оптическое волокно, помещенное в магнитное поле, при смене направления магнитного поля [3, 4]. В работе [3] теоретический анализ эффекта проводился в рамках простейшей модели, в которой рассматривалось распространение света в аксиально симметричном оптическом волноводе, который удерживает в скалярном приближении только три моды. Точное рассмотрение позволило предсказать эффект «магнитного» поворота спекл-картины, который был обнаружен экспериментально [4], однако результаты, полученные в работе [3], не позволяют провести детальное исследование влияния магнитного поля на распространение когерентного света в оптическом волокне.

Цель настоящей работы – аналитическое решение задачи о распространении когерентного излучения в волоконном световоде со ступенчатым профилем показателя преломления под воздействием продольного магнитного поля.

Рассмотрим распространение когерентного света в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления, который в цилиндрической системе координат ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ ) описывается функцией:

$$\begin{cases} n(r) = n_{co}, & r < a, \\ n(r) = n_{cl}, & r > a, \end{cases} \quad (2)$$

где  $n_{co}$ ,  $n_{cl}$  – показатели преломления сердцевины и оболочки волокна соответственно,  $r$  – пространственная координата,  $a$  – радиус сердцевины волокна.

Распространение когерентного излучения в немагнитной среде описывается системой уравнений Максвелла [5]:

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 г. (Государственный контракт № П1572 от 17 мая 2010 г.).

<sup>2</sup> Ершов Александр Викторович – аспирант, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет.

<sup>3</sup> Кундикова Наталия Дмитриевна – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: knd@susu.ac.ru

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \vec{E}, \quad (3)$$

где  $\vec{E}$  – вектор электрического поля,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\vec{D}$  – вектор электрического смещения,  $\vec{H}$  – вектор магнитного поля,  $\hat{\varepsilon}$  – тензор диэлектрической проницаемости.

Под воздействием магнитного поля тензор диэлектрической проницаемости принимает следующий вид [6]:

$$\varepsilon_0 \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\gamma & 0 \\ -i\gamma & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\gamma = (\vartheta n \lambda / \pi) \varepsilon_0$ ,  $\vartheta$  – угол фарадеевского вращения, определяемый выражением (1),  $\lambda$  – длина волны света в вакууме.

С учетом трансляционной симметрии волокна решения ищутся в виде  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y) e^{-i(\omega t - \beta z)}$ ,  $\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(x, y) e^{-i(\omega t - \beta z)}$ , где  $\omega$  – угловая частота,  $\beta$  – постоянная распространения.

Подставляя тензор (4) в систему уравнений (3), получаем уравнения Максвелла в декартовой системе координат:

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y \right) = i\omega \mu H_x, \quad (5)$$

$$\left( i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = i\omega \mu H_y, \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = i\omega \mu H_z, \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y \right) = -i\omega (\varepsilon E_x + i\gamma E_y) = -i\omega \varepsilon E_x + \omega \gamma E_y, \quad (8)$$

$$\left( i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -i\omega (-i\gamma E_x + \varepsilon E_y) = -\omega \gamma E_x - i\omega \varepsilon E_y, \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = -i\omega \varepsilon E_z. \quad (10)$$

Из уравнений (5), (6), (8) и (9) легко получить выражения для компонент магнитного поля  $H_x$ ,  $H_y$  и компонент электрического поля  $E_x$ ,  $E_y$ , которые зависят только от продольных компонент  $E_z$  и  $H_z$ :

$$H_x = \frac{1}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2} \begin{pmatrix} -\beta^2 \omega \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - i\omega (\omega^2 \mu \gamma^2 - \varepsilon (k^2 - \beta^2)) \frac{\partial E_z}{\partial y} - \\ -\beta \omega^2 \mu \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta (k^2 - \beta^2) \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$H_y = \frac{1}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2} \begin{pmatrix} i\omega (\omega^2 \mu \gamma^2 - \varepsilon (k^2 - \beta^2)) \frac{\partial E_z}{\partial x} - \beta^2 \omega \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - \\ -i\beta (k^2 - \beta^2) \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta \omega^2 \mu \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$E_x = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\omega \mu}{\beta} H_y, \quad E_y = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\omega \mu}{\beta} H_x, \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon.$$

После подстановки выражения (11) в уравнения (7) и (10) система уравнений для  $E_z$  и  $H_z$  принимает вид:

$$\begin{cases} i\left(\omega^2\mu\gamma^2 - \varepsilon(k^2 - \beta^2)\right)\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right) + i\varepsilon\left(\omega^4\mu^2\gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2\right)E_z + \beta\omega\mu\gamma\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}\right) = 0, \\ -\beta\omega\gamma\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right) - i(k^2 - \beta^2)\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}\right) + i\left(\omega^4\mu^2\gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2\right)H_z = 0. \end{cases} \quad (12)$$

После умножения первого уравнение системы (12) на мнимую единицу  $i$  и сложения со вторым уравнением можно разделить мнимую и действительную части и получить уравнение для каждой из компонент  $E_z$  и  $H_z$ :

$$\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right) + \frac{\varepsilon\left(\omega^4\mu^2\gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2\right)}{\omega^2\mu\gamma^2 - \varepsilon(k^2 - \beta^2) + \beta\omega\gamma}E_z = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}\right) + \frac{\omega^4\mu^2\gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2}{\beta\omega\mu\gamma - (k^2 - \beta^2)}H_z = 0. \quad (13)$$

В связи с тем, что оптическое волокно обладает аксиальной симметрией, запишем уравнения (13) в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\varepsilon\left(\omega^4\mu^2\gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2\right)}{\omega^2\mu\gamma^2 - \varepsilon(k^2 - \beta^2) + \beta\omega\gamma}E_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^4\mu^2\gamma^2 - (k^2 - \beta^2)^2}{\beta\omega\mu\gamma - (k^2 - \beta^2)}H_z &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Предполагая, что можно разделить переменные, и считая, что поле описывается произвольными функциями, зависящими только от  $\varphi$  и  $r$ , ищем решение в следующем виде:

$$E_z = F_E(r)e^{im\varphi}, \quad H_z = F_H(r)e^{im\varphi}. \quad (15)$$

После подстановки выражений (15) в (14) уравнения (14) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 F_E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_E}{\partial r} + \left(u_1^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)F_E = 0, \quad \frac{\partial^2 F_H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_H}{\partial r} + \left(u_2^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)F_H = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} u_1^2 = k_{1co}^2 - \beta_{1co}^2, \quad k_{1co}^2 = \frac{\varepsilon_{co}\omega^4\mu^2\gamma^2}{\omega^2\mu\gamma^2 - \varepsilon_{co}(k_{co}^2 - \beta^2) + \beta\omega\gamma}, \quad \beta_{1co}^2 = \frac{\varepsilon_{co}(k_{co}^2 - \beta^2)^2}{\omega^2\mu\gamma^2 - \varepsilon_{co}(k_{co}^2 - \beta^2) + \beta\omega\gamma}, \\ u_2^2 = k_{2co}^2 - \beta_{2co}^2, \quad k_{2co}^2 = \frac{\omega^4\mu^2\gamma^2}{\beta\omega\mu\gamma - (k_{co}^2 - \beta^2)}, \quad \beta_{2co}^2 = \frac{(k_{co}^2 - \beta^2)^2}{\beta\omega\mu\gamma - (k_{co}^2 - \beta^2)}. \end{aligned}$$

Действительными решениями уравнений (16) являются функции Бесселя и Макдональда. При  $r \rightarrow 0$  только функции Бесселя ограничены, поэтому целесообразно их выбрать для описания поля в сердцевине волокна. Функции Макдональда ограничены при  $r \rightarrow \infty$ , поэтому их можно выбрать для описания поля в оболочке волокна.

Воспользуемся граничными условиями на границе сердцевина–оболочка. Непрерывность угловых и тангенциальных компонент на границе  $r = a$  между сердцевинной и оболочкой описывается системой уравнений:

$$E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)}, \quad E_z^{(1)} = E_z^{(2)}, \quad H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)}, \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)}, \quad (17)$$

где  $E_\varphi^{(1)}, E_z^{(1)}, H_\varphi^{(1)}, H_z^{(1)}$  – угловые и тангенциальные компоненты электромагнитного поля в сердцевине,  $E_\varphi^{(2)}, E_z^{(2)}, H_\varphi^{(2)}, H_z^{(2)}$  – угловые и тангенциальные компоненты электромагнитного поля в оболочке.

В соответствии с выбранными решениями уравнений (16) тангенциальные компоненты электромагнитного поля примут вид:

$$E_z^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_m(u_1 r) \cos m\varphi e^{-i(\omega t - \beta z)}, \quad H_z^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m J_m(u_2 r) \cos(m\varphi + \varphi_m) e^{-i(\omega t - \beta z)},$$

$$E_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m K_m(v_1 r) \cos m\varphi e^{-i(\omega t - \beta z)}, \quad H_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m K_m(v_2 r) \cos(m\varphi + \varphi_m) e^{-i(\omega t - \beta z)},$$
(18)

где  $v_1^2 = -k_{1cl}^2 + \beta_{1cl}^2$ ,  $k_{1cl}^2 = \frac{\varepsilon_{cl} \omega^4 \mu^2 \gamma^2}{\omega^2 \mu \gamma^2 - \varepsilon_{cl} (k_{cl}^2 - \beta^2) + \beta \omega \gamma}$ ,  $\beta_{1cl}^2 = \frac{\varepsilon (k_{cl}^2 - \beta^2)^2}{\omega^2 \mu \gamma^2 - \varepsilon (k_{cl}^2 - \beta^2) + \beta \omega \gamma}$ ,

$$v_2^2 = -k_{2cl}^2 + \beta_{2cl}^2, \quad k_{2cl}^2 = \frac{\omega^4 \mu^2 \gamma^2}{\beta \omega \mu \gamma - (k_{cl}^2 - \beta^2)}, \quad \beta_{2cl}^2 = \frac{(k_{cl}^2 - \beta^2)^2}{\beta \omega \mu \gamma - (k_{cl}^2 - \beta^2)}.$$

Следует отметить, что в рамках рассматриваемой модели величина  $\gamma$  полагается одинаковой в сердцевине и оболочке.

Используя выражения (11) и (17), угловые компоненты электромагнитного поля можно выразить в следующем виде:

$$E_\varphi^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \left( L_1 u_1 J'_m(u_1 a) \cos m\varphi - i L_3 \frac{1}{a} m J_m(u_1 a) \sin m\varphi \right) e^{-i(\omega t - \beta z)} -$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \left( L_2 \frac{1}{a} m J_m(u_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m) - i L_4 u_2 J'_m(u_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m) \right) e^{-i(\omega t - \beta z)},$$

$$E_\varphi^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left( L_5 v_1 K'_m(v_1 a) \cos m\varphi - i L_7 \frac{1}{a} m K_m(v_1 a) \sin m\varphi \right) e^{-i(\omega t - \beta z)} -$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \left( L_6 \frac{1}{a} m K_m(v_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m) - i L_8 v_2 K'_m(v_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m) \right) e^{-i(\omega t - \beta z)},$$

$$H_\varphi^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \left( L_1 \frac{1}{a} m J_m(u_1 a) \sin m\varphi + i L_9 u_1 J'_m(u_1 a) \cos m\varphi \right) e^{-i(\omega t - \beta z)} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \left( L_2 u_2 J'_m(u_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m) + i L_4 \frac{1}{a} m J_m(u_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m) \right) e^{-i(\omega t - \beta z)},$$

$$H_\varphi^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left( L_5 \frac{1}{a} m K_m(v_1 a) \sin m\varphi + i L_{10} v_1 K'_m(v_1 a) \cos m\varphi \right) e^{-i(\omega t - \beta z)} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \left( L_6 v_2 K'_m(v_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m) + i L_8 \frac{1}{a} m K_m(v_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m) \right) e^{-i(\omega t - \beta z)},$$
(19)

где  $L_1 = \frac{\beta^2 \omega \gamma}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{co}^2 - \beta^2)^2}$ ,  $L_2 = \frac{\beta \omega^2 \mu \gamma}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{co}^2 - \beta^2)^2}$ ,  $L_3 = \frac{(k_{co}^2 - \beta^2)^2 - \varepsilon_{co} \omega^2 \mu (k_{co}^2 - \beta^2)}{\omega \mu}$ ,

$$L_4 = \frac{\beta (k_{co}^2 - \beta^2)}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{co}^2 - \beta^2)^2}, \quad L_5 = \frac{\beta^2 \omega \gamma}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{cl}^2 - \beta^2)^2}, \quad L_6 = \frac{\beta \omega^2 \mu \gamma}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{cl}^2 - \beta^2)^2},$$

$$L_7 = \frac{(k_{cl}^2 - \beta^2)^2 - \varepsilon_{cl} \omega^2 \mu (k_{cl}^2 - \beta^2)}{\omega \mu (\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{cl}^2 - \beta^2)^2)}, \quad L_8 = \frac{\beta (k_{cl}^2 - \beta^2)}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{cl}^2 - \beta^2)^2}, \quad L_9 = \frac{\omega^3 \mu \gamma^2 - \varepsilon_{co} \omega (k_{co}^2 - \beta^2)}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{co}^2 - \beta^2)^2},$$

$$L_{10} = \frac{\omega^3 \mu \gamma^2 - \varepsilon_{cl} \omega (k_{cl}^2 - \beta^2)}{\omega^4 \mu^2 \gamma^2 - (k_{cl}^2 - \beta^2)^2}.$$

Подставляя выражения (18) и (19) в граничные условия (17), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}A_m + a_{12}B_m + a_{13}C_m + a_{14}D_m = 0, \\ a_{21}A_m + a_{23}C_m = 0, \\ a_{31}A_m + a_{32}B_m + a_{33}C_m + a_{34}D_m = 0, \\ a_{42}B_m + a_{44}D_m = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= L_1 u_1 J'_m(u_1 a) \cos m\varphi - i L_3 \frac{1}{a} m J_m(u_1 a) \sin m\varphi, \\ a_{12} &= -L_2 \frac{1}{a} m J_m(u_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m) + i L_4 u_2 J'_m(u_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m), \\ a_{13} &= -L_5 v_1 K'_m(v_1 a) \cos m\varphi + i L_7 \frac{1}{a} m K_m(v_1 a) \sin m\varphi, \\ a_{14} &= L_6 \frac{1}{a} m K_m(v_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m) - i L_8 v_2 K'_m(v_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m), \\ a_{21} &= J_m(u_1 a), \quad a_{23} = -K_m(v_1 a), \\ a_{31} &= L_1 \frac{1}{a} m J_m(u_1 a) \sin m\varphi + i L_9 u_1 J'_m(u_1 a) \cos m\varphi, \\ a_{32} &= L_2 u_2 J'_m(u_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m) + i L_4 \frac{1}{a} m J_m(u_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m), \\ a_{33} &= -L_5 \frac{1}{a} m K_m(v_1 a) \sin m\varphi - i L_{10} v_1 K'_m(v_1 a) \cos m\varphi, \\ a_{34} &= -L_6 v_2 K'_m(v_2 a) \cos(m\varphi + \varphi_m) - i L_8 \frac{1}{a} m K_m(v_2 a) \sin(m\varphi + \varphi_m), \\ a_{42} &= J_m(u_2 a), \quad a_{44} = -K_m(v_2 a). \end{aligned}$$

Система уравнений (20) имеет множество решений, когда

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

После выделения мнимой и действительной частей уравнение (21) примет вид системы характеристических уравнений:

$$\begin{cases} \left( L_3 L_8 m^2 - L_7 L_8 m^2 - L_5 L_6 m^2 + L_1 L_6 m^2 - L_3 L_4 m^2 + L_2 L_5 m^2 - L_1 L_2 m^2 + L_4 L_7 m^2 \right) = \\ = - \left( L_1 L_6 f_m(u_1 a) g_m(v_2 a) - L_5 L_6 g_m(v_1 a) g_m(v_2 a) - L_8 L_{10} g_m(v_1 a) g_m(v_2 a) + L_8 L_9 f_m(u_1 a) g_m(v_2 a) - \right. \\ \left. - L_1 L_2 f_m(u_1 a) f_m(u_2 a) + L_4 L_{10} f_m(u_2 a) g_m(v_1 a) - L_4 L_9 f_m(u_1 a) f_m(u_2 a) + L_2 L_5 f_m(u_2 a) g_m(v_1 a) \right), \\ \left( L_6 L_7 g_m(v_2 a) - L_3 L_6 g_m(v_2 a) + L_5 L_8 g_m(v_2 a) - L_1 L_8 g_m(v_2 a) + \right. \\ \left. + L_2 L_3 f_m(u_2 a) - L_4 L_5 f_m(u_2 a) + L_1 L_4 f_m(u_2 a) - L_2 L_7 f_m(u_2 a) \right) = \\ = - \left( L_1 L_8 f_m(u_1 a) - L_5 L_8 g_m(v_1 a) - L_6 L_{10} g_m(v_1 a) + L_6 L_9 f_m(u_1 a) - \right. \\ \left. - L_1 L_4 f_m(u_1 a) + L_2 L_{10} g_m(v_1 a) - L_2 L_9 f_m(u_1 a) + L_4 L_5 g_m(v_1 a) \right), \end{cases} \quad (22)$$

где

$$f_m(u_i a) = \frac{u_i a J'_m(u_i a)}{J_m(u_i a)}, \quad g_m(v_i a) = \frac{v_i a K'_m(v_i a)}{K_m(v_i a)}, \quad i = 1, 2.$$

Решив систему характеристических уравнений (22), можно найти постоянные распространения  $\beta_m$  для любого количества мод когерентного излучения, которые могут распространяться в

волоконном световоде, помещенном в продольное магнитное поле. Для каждого значения  $m$  можно с помощью выражения (15) определить продольные компоненты электромагнитного поля, и через них найти с помощью выражений (11) поперечные компоненты электромагнитного поля. Распределение интенсивности  $I(r, \varphi, z)$  в поперечном сечении волокна на расстоянии  $z$  от входного торца волокна можно найти по известным выражениям из поперечных компонент электрического поля.

Таким образом, получены аналитические выражения, которые позволяют рассчитать при разных величинах магнитного поля распределение интенсивности  $I(r, \varphi, z)$  в поперечном сечении волокна на расстоянии  $z$  от входного торца волокна и определить влияние магнитного поля на спекл-картину когерентного света, распространяющегося в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления.

#### Литература

1. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
2. Smith, A.M. Polarization and magneto-optic properties of single-mode optical fiber / A.M. Smith // *Applied Optics*. – 1978. – V. 17, № 1. – P. 52–56.
3. Baranova, N.B. Rotation of a ray by a magnetic field / N.B. Baranova, B.Ya. Zel'dovich // *JEPT Lett.* – 1994. – V. 59. – P. 648–650.
4. Наблюдение «магнитного» поворота спекл-картины света, прошедшего через оптическое волокно / М.Я. Даршт, Б.Я. Зельдович, И.В. Жиргалова, Н.Д. Кундикова // *Письма в ЖЭТФ*. – 1994. – Т. 59. – С. 734–736.
5. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1973. – 721 с.
6. Zhuromskyy, O. Magneto-optical Waveguides with Polarization-Independent Nonreciprocal PhaseShift / O. Zhuromskyy, H. Dötsch, M. Lohmeyer, L. Wilkens, P. Hertel // *IEEE Journal of Lightwave Technology*. – 2001. – V. 19, № 2. – P. 214–221.

Поступила в редакцию 20 июля 2011 г.

## MAGNETIC FIELD INFLUENCE COHERENT LIGHT PROPAGATION THROUGH AN OPTICAL WAVEGUIDE

A.V. Ershov<sup>1</sup>, N.D. Kundikova<sup>2</sup>

Exact expressions for determination of the magnetic field influence speckle pattern of the coherent light transmitted through optical fiber with step like index profile have been obtained.

*Keywords:* Faraday effect, magnetic field, optical fiber, step like index profile.

#### References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* (Electrodynamics of Continuous Media). Moscow, Nauka, 1982. 620 p.
2. Smith A.M. Polarization and magneto-optic properties of single-mode optical fiber. *Applied Optics*. 1978. Vol. 17, no. 1. pp. 52–56.
3. Baranova N.B., Zel'dovich B.Ya. Rotation of a ray by a magnetic field. *JEPT Lett.* 1994. Vol. 59. pp. 648–650.
4. Darsht M.Ya., Zel'dovich B.Ya., Zhirgalova I.V., Kundikova N.D. *Pis'ma v ZhETF*. 1994. Vol. 59. pp. 734–736.
5. Born M., Wolf E. *Osnovy optiki* (Principles of Optics). Moscow, Nauka, 1973. 721 p.
6. Zhuromskyy O., Dötsch H., Lohmeyer M., Wilkens L., Hertel P. Magneto-optical Waveguides with Polarization-Independent Nonreciprocal PhaseShift // *IEEE Journal of Lightwave Technology*. – 2001. Vol. 19, no. 2. pp. 214–221.

<sup>1</sup> Ershov Alexander Viktorovich is Postgraduate student, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University.

<sup>2</sup> Kundikova Nataliya Dmitrievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University. e-mail: knd@susu.ac.ru

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ФАЗЫ В СПЛАВАХ НА ОСНОВЕ ЖЕЛЕЗА

С.И. Морозов<sup>1</sup>, Д.А. Жеребцов<sup>2</sup>, А.С. Грибачёв<sup>3</sup>

Рассмотрены состояния свободной поверхности трехкомпонентных сплавов Fe–C–S по изображениям, полученным с помощью растрового электронного микроскопа. Подтверждена гипотеза о формах поверхностных фаз углерода и железа при комнатных температурах, предложенная в работах по изучению термической десорбции исследуемых сплавов в твердом и жидком состояниях.

*Ключевые слова:* температурно-программируемая десорбция, масс-спектрометрия, поверхность, поверхностные фазы, трехкомпонентные сплавы Fe–C–S, растровый электронный микроскоп.

### Введение

Исследование поверхности различных металлов и сплавов в твердом и жидком состояниях привлекает в настоящее время особое внимание. Это вызвано важностью и уникальностью процессов, протекающих на поверхности, возможностью их широкого использования для создания принципиально новых материалов, обладающих заданными свойствами, такими как: повышенная прочность, сверхпроводимость, сопротивляемость коррозии [1]. Новые технологии позволяют достигать значительного прогресса как в развитии информационной вычислительной техники (создание новых емких устройств хранения информации, более мощных процессоров, высокоскоростных устройств передачи информации), так и в совершенствовании производственных процессов в металлургии и машиностроении (сокращение потребляемых материалов и энергоресурсов).

### Метод

В данной работе исследовались свободные поверхности трехкомпонентных эвтектических сплавов  $\text{Fe}_{82,7-x}\text{C}_{17,3}\text{S}_x$  ( $x = 0; 0,10$  и  $0,20$  ат. %), которые изучались ранее методом температурно-программируемой десорбции ТПД в интервале температур от 700 до 1400 К как в твердом, так и жидком состояниях [2].

Данные сплавы выплавлены в корундовом тигле в атмосфере инертного газа из железа марки В–3 (99,99 %), спектрально чистого графита и сульфида FeS. Расплавы вакуумированы при температуре 1200 °С и закристаллизованы в вакууме.

В связи с особенностями физической реализации метод ТПД [3] не позволяет получать надежную и точную информацию о состоянии поверхности сплавов при комнатной температуре. Однако данные о модели поверхностного слоя можно извлечь опосредованно, экстраполировав ТПД спектры. Для проверки и уточнения этой модели было проведено исследование морфологии поверхности закристаллизованных расплавов на растровом электронном микроскопе фирмы JEOL JSM7001F с термополевой пушкой с радиусом острия катода 350 нм, при токе электронного пучка 335 пА, с разрешением 7 нм, при вакууме в камере образца  $10^{-5}$  Па, при увеличении от 200 до 20 000 крат. Количественный анализ проводился при помощи рентгенофлуоресцентного анализатора Oxford INCA X-max 80 с кремний-дрейфовым детектором площадью 80 мм<sup>2</sup>, охлаждаемым элементами Пельтье до –60 °С.

### Результаты

С помощью электронного микроскопа получены изображения поверхности исследуемых тройных сплавов Fe–C–S с содержанием серы в объеме 0; 0,10; 0,20 ат. % (рис. 1).

Как видно из рис. 1, характер заполнения поверхности углеродом значительно меняется даже при добавлении малых количеств серы.

<sup>1</sup> Морозов Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: morozov@physics.susu.ac.ru

<sup>2</sup> Жеребцов Дмитрий Анатольевич – инженер, кандидат химических наук, кафедра физической химии, Южно-Уральский государственный университет.

<sup>3</sup> Грибачёв Антон Сергеевич – аспирант, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.

Так на рис. 1, а, в образце без серы, отчетливо видны графитовые образования (темные области) в форме «островков» размером от 0,2 до 10 мкм. Эти островки при большем увеличении (рис. 2, а) представляют собой пластинчатый графит [4], тогда как светлые участки на рис. 1 представляют собой железо, частично покрытое слоями графита толщиной несколько нанометров (рис. 2, б).

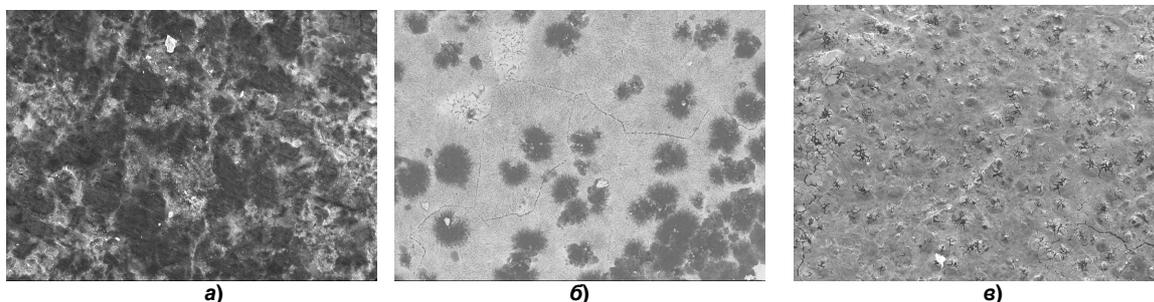


Рис. 1. Свободная поверхность трехкомпонентных сплавов Fe–C–S (увеличение 200)  
а) эвтектический Fe–C, б) Fe–C–S содержание серы 0,1 ат. %, в) Fe–C, содержание серы 0,2 ат. %

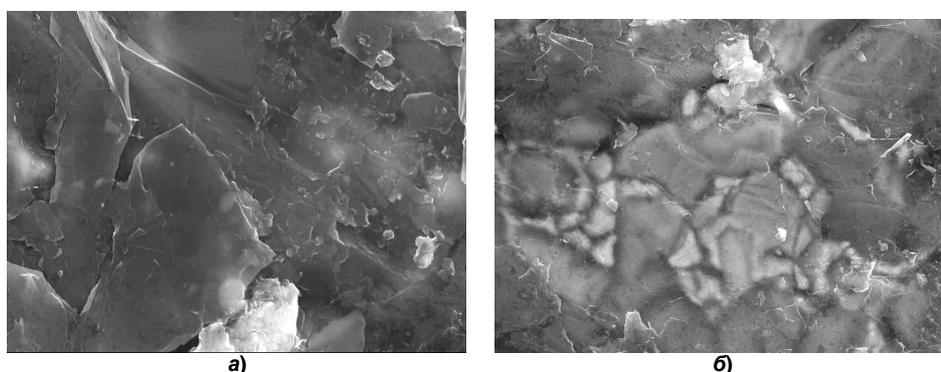


Рис. 2. Области покрытия пластинчатым углеродом (увеличение 10 000)  
а) многослойные объемные графитовые образования; б) тонкослойное графитовое покрытие

С помощью элементного анализатора были получены распределения элементов сплава Fe и C на данных участках рис. 3 и рис. 4 (белые точки на изображениях – наличие соответствующих атомов на поверхности, чем их больше, тем белый участок насыщеннее). Количество атомов S на этих участках недостаточно для надежного определения. Отдельно рассматривался кислород, который адсорбируется почти равномерно по поверхности.

При концентрации серы 0,1 ат. % количество «объемных» островков уменьшается (рис. 1, б), они становятся меньше по площади (шаровидный графит, форма К [4]), начинают образовываться «червеобразные» островки.

Особый интерес вызывает участок поверхности сплава в виде «червеобразного» графита (рис. 2, а), который отдельно представлен на рис. 5. На картах распределения элементов сплава отчетливо видно место расположения атомов серы на краях графитовых островков. При этом количество атомов серы на поверхности достигает 0,2 вес. %. Этот факт подтверждает предположение о возможном месте адсорбции атомов S на поверхности [5].

При концентрации 0,2 ат. % S (рис. 1, в) уже вся поверхность заполнена «червеобразными» островками углерода (шаровидный графит формы N [4]).

Как показывает расчет концентрации компонентов сплава, выполненный элементным анализатором, состав поверхности образцов (см. таблицу) обогащен углеродом, что согласуется с предложенными оценками поверхностного покрытия [5] в области низкотемпературного состояния.

Концентрация компонентов сплава в поверхностных слоях, вес. %		
Сплав	Углерод	Железо
Fe <sub>82,7</sub> C <sub>17,3</sub>	77,8	20,3
Fe <sub>82,6</sub> C <sub>17,3</sub> S <sub>0,1</sub>	65,0	33,0
Fe <sub>82,5</sub> C <sub>17,3</sub> S <sub>0,2</sub>	64,3	33,3

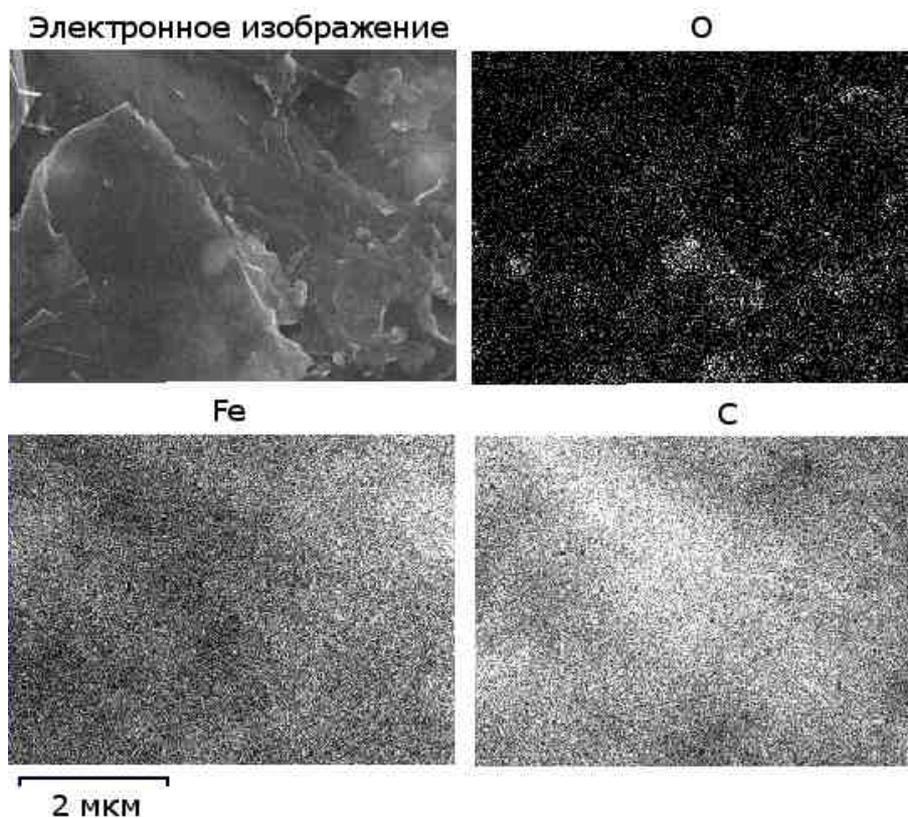


Рис. 3. Распределение элементов сплава в области трехмерных углеродных образований (пластинчатый графит, увеличение 20 000)

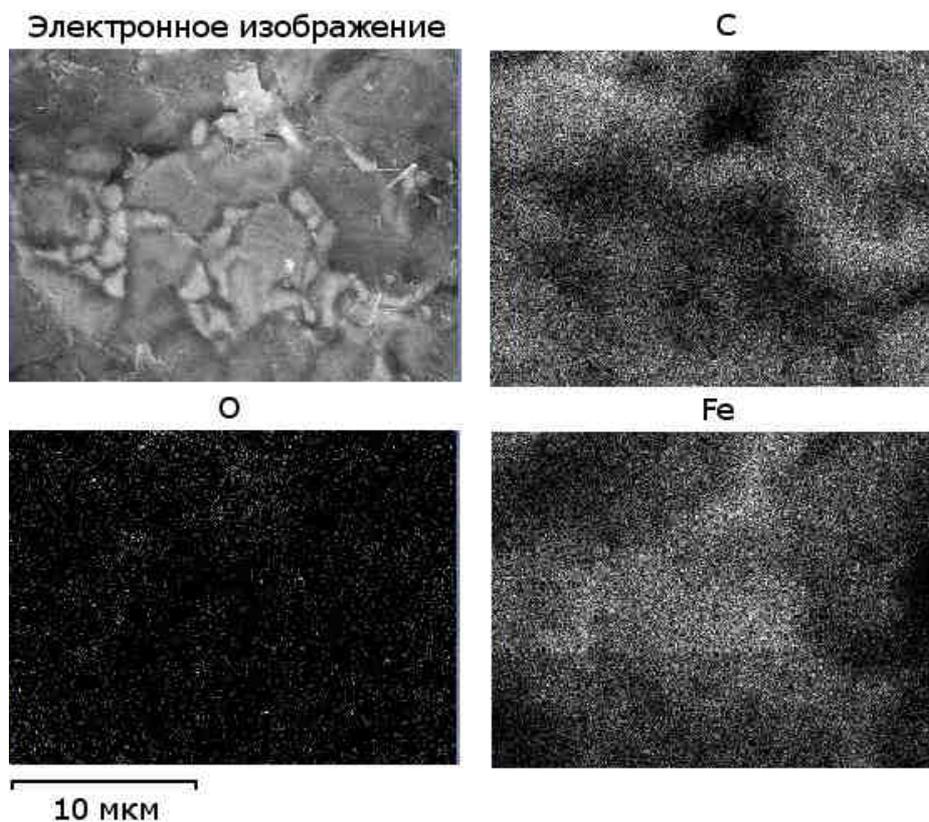


Рис. 4. Распределение элементов сплава в области покрытия железа тонким слоем графита

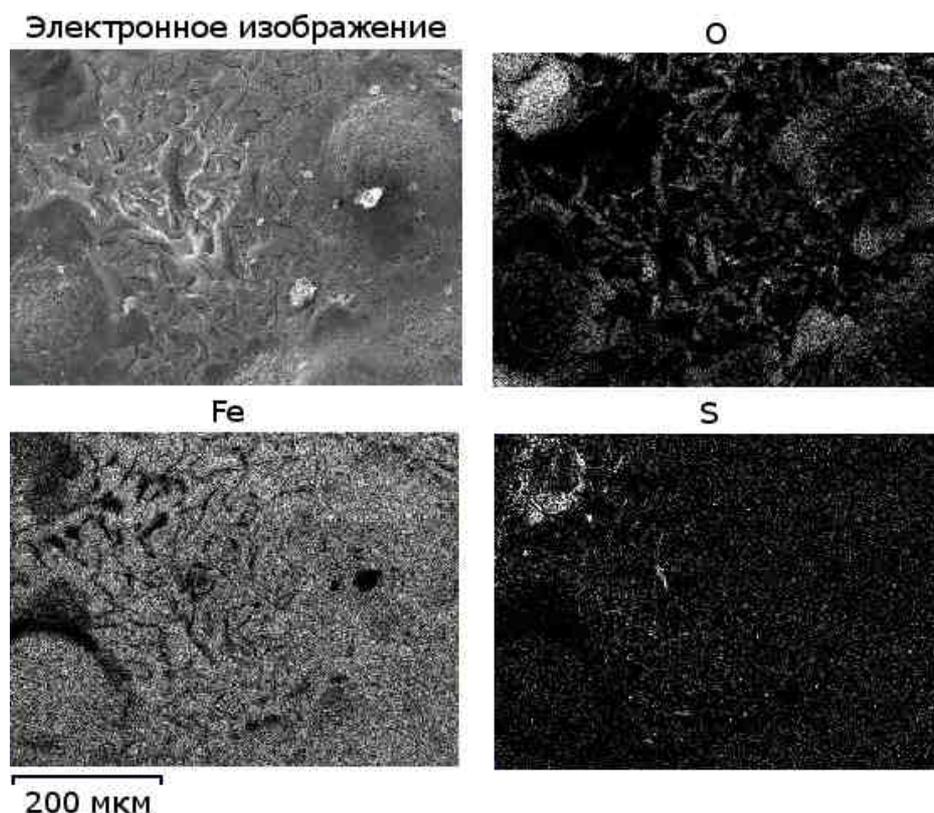


Рис. 5. Распределение элементов сплава в области «червеобразного» графита (увеличение 100)

### Выводы

Таким образом, поверхность сплавов Fe–C–S при комнатной температуре на 60–70 % покрыта углеродом. При этом форма заполнения поверхности углеродом существенно зависит от малых содержаний серы в объеме.

Подтверждена модель расположения атомов углерода, серы и железа на поверхности при комнатных температурах, предложенная в работах по изучению термической десорбции исследуемых сплавов в твердом и жидком состояниях.

### Литература

1. Пат. 59061. Устройство для непрерывного термического оксидирования стальных изделий // Г.П. Вяткин, Ю.Н. Тепляков, С.И. Морозов; приоритет 10 июля 2006 г.; дата выдачи 10 декабря 2006 г.
2. Поверхностная сегрегация и десорбция при фазовых превращениях в сплавах Fe–C–S / Г.П. Вяткин, Т.П. Привалова, Д.В. Пастухов, С.И. Морозов // Высокотемпературные расплавы. – 1995. – № 1. – С. 25–29.
3. Вяткин, Г.П. Поверхностная сегрегация и десорбция при фазовых переходах в металлах // Г.П. Вяткин, Т.П. Привалова. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996. – 276 с.
4. Горшков, А.А. Справочник по изготовлению отливок из высокопрочного чугуна // А.А. Горшков, М.В. Волощенко; под ред. А.А. Горшкова. – М.: Машгиз, 1961. – 300 с.
5. Морозов, С.И. Высокотемпературные поверхностные фазы и фазовые переходы в сплавах Fe–Mn–C и Fe–C–S: дис. ... канд. физ.-мат. наук // С.И. Морозов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 101 с.

Поступила в редакцию 10 октября 2011 г.

## SURFACE PHASES IN IRON-BASED ALLOYS

S.I. Morozov<sup>1</sup>, D.A. Zhrebtsov<sup>2</sup>, A.S. Gribachev<sup>3</sup>

This paper considers the conditions of the ternary alloys Fe–C–S free surfaces judging by the images obtained by means of a scanning electron microscope. The hypothesis on the forms of carbon and iron surface phases at room temperature suggested in works on thermal desorption of solid and liquid alloys is confirmed.

*Keywords: temperature-programmed desorption, mass spectrometry, surface, surface phases, ternary alloys Fe–C–S, scanning electron microscope.*

### References

1. Vyatkin G.P., Teplyakov Yu.N., Morozov S.I. *Patent no. 59061.* (in Russ.).
2. Vyatkin G.P., Privalova T.P., Pastukhov D.V., Morozov S.I. *Vysokotemperaturnye rasplavy.* 1995. no. 1. pp. 25–29. (in Russ.).
3. Viatkin G.P., Privalova T.P. *Poverkhnostnaia segregatsiia i desorbtsiia pri fazovykh perekhodakh v metallakh* (Surface segregation and desorption under phase transitions in metals). – Chelyabinsk, Izd-vo ChGTU, 1996. 276 p. (in Russ.).
4. Gorshkov A.A., Voloshchenko M.V. *Spravochnik po izgotovleniiu otlivok iz vysokoprochnogo chuguna* (Handbook for the production of castings of ductile iron). Moscow, Mashgiz, 1961. 300 p. (in Russ.).
5. Morozov S.I. *Vysokotemperaturnye poverkhnostnye fazy i fazovye perekhody v splavakh Fe–Mn–C i Fe–C–S* (High surface phases and phase transitions in alloys of Fe–Mn–C and Fe–C–S). Dissertation. Chelyabinsk, Izd-vo YuUrGU, 1998. 101 p. (in Russ.).

---

<sup>1</sup> Morozov Sergey Ivanovich is a Cand. Sc.(Physics and Mathematics), associate professor of the General and Theoretical Physics Department, South Ural State University. e-mail: morozov@physics.susu.ac.ru

<sup>2</sup> Zhrebtsov Dmitry Anatolievich is a Cand. Sc.(Chemistry), engineer of the Physical Chemistry Department, South Ural State University.

<sup>3</sup> Gribachev Anton Sergeevich is a postgraduate student, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

# ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ И ИОННОЙ БОМБАРДИРОВКИ НА ЭЛЕКТРОННУЮ СТРУКТУРУ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО КАРБОНИЗОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛИВИНИЛИДЕНФТОРИДА<sup>1</sup>

Л.А. Песин<sup>2</sup>, И.В. Грибов<sup>3</sup>, Н.А. Москвина<sup>4</sup>, В.Л. Кузнецов<sup>5</sup>, С.Е. Евсюков<sup>6</sup>, М.Е. Богатырева<sup>7</sup>, А.В. Хананова<sup>8</sup>

Методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии изучена модификация поверхности поливинилиденфторида в процессе радиационной карбонизации, а также последующих отжига и ионной бомбардировки. При радиационной карбонизации синтезированы углеродные структуры, тип внутриатомной гибридизации валентных электронов которых отличается и от  $sp^2$ , и от  $sp^3$ . Термическая обработка в вакууме инициирует их трансформацию к алмазоподобному, а ионная бомбардировка – к графитоподобному типам гибридизации.

*Ключевые слова:* ПВДФ, радиационная карбонизация, отжиг, ионная бомбардировка, гибридизация.

## Введение

При воздействии излучений и потоков частиц различной природы во многих полимерах наблюдается явление радиационной деградации. Исследования данного явления для поливинилиденфторида проведены в работах [1–3]. В [2, 3] показано, что при радиационной деградации поливинилиденфторида (ПВДФ) происходит карбонизация его поверхности вследствие дегидрофторирования. Равные количества водорода и фтора при атомах углерода в элементарном звене исходного ПВДФ выделяют этот материал среди прочих фторсодержащих полимеров и дают надежду успешного синтеза цепочечных углеродных структур в полииновой и/или кумуленовой формах при глубокой карбонизации этого материала путем исчерпывающего дегидрофторирования. Углеродные вещества, содержащие такие одномерные структуры, получили название карбиноидных материалов или карбиноидов [4]. Карбиноиды могут найти применение в твердотельной и эмиссионной электронике [5, 6], оптике, медицине [7–9] и других областях современной техники. При радиационной карбонизации, а тем более при последующей термической обработке и/или ионной бомбардировке карбонизованной поверхности полимера возможен синтез и других аллотропных форм углерода, в том числе наноструктурных. Многообразие форм углерода и сложность модельного описания процесса карбонизации не позволяют в настоящее время прогнозировать результаты радиационной деградации ПВДФ и ставят задачу поиска методов идентификации электронной и атомной структуры модифицированного слоя поверхности. В [10, 11] показана индивидуальность формы спектров электронной эмиссии углерода образцов, отличающихся типом атомного упорядочения, поэтому особенности спектров продуктов радиационной карбонизации ПВДФ весьма полезны для решения этой задачи [12].

## Образцы и методика эксперимента

Радиационной карбонизации подвергались пленки ПВДФ марки Кунар (тип 720, толщина 50 мкм), произведенные фирмой Atofina (Франция) методом выдувной экструзии. Исходная пленка содержит около 50 % кристаллической фазы, равномерно распределенной в аморфной

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ и Правительства Челябинской области (проекты РФФИ-Урал 04-02-96052 и 07-02-96008), а также ректората ГОУ ВПО «Челябинский государственный педагогический университет».

<sup>2</sup> Песин Леонид Абрамович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Челябинский государственный педагогический университет. e-mail: pesin@cspu.ru

<sup>3</sup> Грибов Игорь Васильевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория электрических явлений, Институт физики металлов УрО РАН. e-mail: gri@imp.uran.ru

<sup>4</sup> Москвина Наталья Анатольевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, лаборатория электрических явлений, Институт физики металлов УрО РАН.

<sup>5</sup> Кузнецов Вадим Львович – доктор технических наук, лаборатория электрических явлений, институт физики металлов УрО РАН.

<sup>6</sup> Евсюков Сергей Евгеньевич – кандидат химических наук, лаборатория синтеза, Evonik Technochemie GmbH, Dossenheim, Germany.

<sup>7</sup> Богатырева Мария Евгеньевна – студентка, Челябинский государственный педагогический университет.

<sup>8</sup> Хананова Александра Викторовна – студентка, Южно-Уральский государственный университет.

фазе. Доминирующий тип конформации цепей и той, и другой фазы – альфа [13]. Кристаллическая часть материала состоит из пластинчатых кристаллов толщиной порядка  $10^{-6}$  см и длиной  $10^{-5}$  см. Измерения проводились с помощью спектрометра ЭС ИФМ-4 [14]. Спектры электронной эмиссии возбуждались немонахроматическим рентгеновским излучением алюминиевого анода, отфильтрованного алюминиевой фольгой. Энергия фотонов  $AlK_{\alpha 1,2}$ , доминирующих в этом излучении, составляет 1486,6 эВ. Давление остаточных газов в камере спектрометра не превышало  $10^{-7}$  Па. Образцы представляли собой прямоугольные пленки ПВДФ размером  $10 \times 8$  мм, при этом через энергоанализатор спектрометра проходят электроны, рожденные в области  $8 \times 2$  мм. Для достаточного статистического усреднения данных в течение коротких промежутков времени измерения спектров использовалась энергия пропускания магнитного анализатора спектрометра 320 эВ. Это было важно для мониторинга быстрых изменений химического состава поверхности пленки при облучении фотонами  $AlK_{\alpha}$ . Как показала оценка по ширине F1s линии на половине ее высоты, энергетическое разрешение при этих условиях оказывается порядка 3 эВ. В спектрометре ЭС ИФМ-4 входная диафрагма анализатора и фильтрующая фольга заземлены, в то время как тормозящий или ускоряющий потенциал прикладывается к держателю образца. При положительном потенциале электростатическое поле, будучи задерживающим для эмитированных электронов, ускоряет вторичные электроны, рождающиеся в фольге вследствие частичного поглощения ею рентгеновского излучения источника. Таким образом, во время измерений РФЭС образец подвергается одновременному комбинированному воздействию мягкого рентгеновского излучения и потока вторичных электронов, в результате чего его поверхность дефторируется.

Для изучения возможности модифицирования карбонизованной таким образом поверхности ПВДФ проведены две серии экспериментов. В первой из них (в дальнейшем – серия 1) после радиационной карбонизации в течение 9 000 мин была достигнута атомная концентрация остаточного фтора относительно углерода  $F/C = 0,04$ . Затем с помощью специальной печки, расположенной непосредственно в вакуумной камере спектрометра, производился ступенчатый отжиг образцов. Печка представляет собой экранированную вольфрамовую спираль диаметром 0,3 мм, расположенную рядом с держателем образца и питаемую постоянным током. Экран из танталовой фольги позволяет направить тепловое излучение спирали преимущественно на держатель. При градуировке печки в держатель помещался имитатор образца, и производилось несколько циклов измерений для каждой задаваемой начальной величины тока накала. Это позволило разработать режим нагрева и остывания, при котором желаемую температуру можно было достичь приблизительно через 10 мин после выставления требуемой величины накала и стабилизировать с точностью  $15-20^\circ$  в течение последней, самой продолжительной (30 мин) ступени отжига. Продолжительность всех предыдущих составляла 10 мин с момента включения печки. Максимальные температуры в каждой ступени отжига составляли около 70, 130, 180, 190, 200, 240, 250, 260 и  $300^\circ\text{C}$ . По окончании всех термических воздействий для исследования стабильности поверхности к воздействию атмосферных газов образец дважды извлекался из СВВ камеры спектрометра на воздух, где пребывал соответственно в течение 5 и 60 мин. В течение предварительной радиационной карбонизации, после каждой ступени отжига и каждого пребывания пленки на воздухе проводились измерения спектров электронной эмиссии, включающие регистрацию обзорных, C1s, F1s, SKVV спектров и спектров валентных электронов.

Другая серия РФЭС экспериментов (серия 2) проведена для исследования модификации предварительно карбонизованной поверхности ПВДФ расфокусированным пучком ионов аргона с энергией 600 эВ со ступенчатым нарастанием кумулятивной дозы в интервале  $4 \cdot 10^{13} - 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>. Предварительная карбонизация осуществлялась, как и в серии 1, фотонами и вторичными электронами, но в течение меньшего промежутка времени (4240 мин, концентрация остаточного фтора  $F/C = 0,17$ ).

### Экспериментальные результаты и их обсуждение

**Серия 1.** На рис. 1 представлена зависимость содержания остаточного фтора от продолжительности радиационного воздействия в интервале 5500–13 500 мин. Здесь и далее указана общая продолжительность дефторирования пленки ПВДФ. В процессе ступенчатого отжига (9000–12 500 мин) параметр  $F/C$  изменяется немонотонно. Наиболее существенно концентрация фтора начинает уменьшаться, когда температура, достигаемая при отжиге, превышает температуру плавления полимера ( $180^\circ\text{C}$ ). При температуре отжига  $200^\circ\text{C}$  параметр  $F/C$  достигает минимума

(0,008), при дальнейшем повышении температуры возрастает до 0,014 и увеличивается после экспозиции в воздухе до 0,018. Наиболее вероятно, увеличение скорости дефторирования выше 180 °С объясняется термической деградацией оставшихся после длительной радиационной карбонизации немногочисленных фторсодержащих фрагментов полимерных цепей. Последующее увеличение F/C в анализируемом методом РФЭС поверхностном слое может быть следствием диффузии фторсодержащих фрагментов макромолекул ПВДФ из более глубоких слоев вещества, карбонизованных излучением в меньшей степени. При повышенных температурах, особенно выше точки плавления полимера, такая диффузия может протекать с заметной скоростью.

Следующим этапом было выявление доминирующих типов гибридизации атомов углерода на различных этапах эксперимента. Такой анализ, как правило, затруднен рядом обстоятельств. Во-первых, форма  $C1s$  спектров позволяет надежно идентифицировать лишь  $sp^2$  форму углерода при достаточно большом содержании атомов в этом гибридном состоянии [12]. Форма спектров остовных электронов углерода в производных ПВДФ, карбонизованных  $AlK_{\alpha}$  фотонами, искажена химическими сдвигами тем сильнее, чем больше содержание в образце остаточного фтора, в то время как остальные параметры формы линии и сателлита практически идентичны таковым, характерным для  $sp^3$  гибридных углеродных структур (алмаз, полиэтилен). Поэтому, хотя в наших опытах форма  $C1s$  спектров исследуемого образца до и после отжига была совершенно одинакова (рис. 2) и не содержала особенностей, характерных для  $sp^2$  структур, вывод о том, что отжиг не приводит к изменению атомного упорядочения в карбонизованном слое вещества, представляется недостаточно обоснованным. Во-вторых, форма спектров валентных электронов углерода наших образцов, как правило, искажена вкладом  $F2p$  фотоэлектронов, что также затрудняет идентификацию гибридного состояния углеродных атомов.

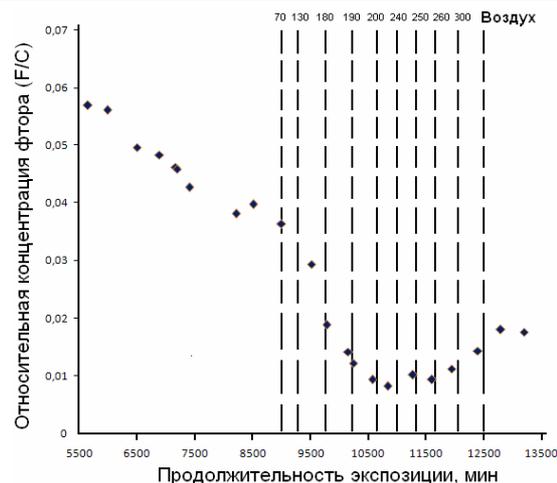


Рис. 1. Зависимость относительной атомной концентрации остаточного фтора (F/C) от продолжительности воздействия  $AlK_{\alpha}$  фотонов в интервале 5500–13 200 мин. Вертикальными штриховыми линиями отмечены промежутки времени, в которые рентгеновский источник отключался и проводился отжиг, а над линиями указаны максимальные температуры (в градусах Цельсия), достигнутые на каждой ступени отжига. Точка, расположенная справа от вертикальной штриховой линии при 12 500 мин, соответствует данным РФЭС, полученным после 5 мин пребывания образца в воздухе, крайняя правая точка графика получена после часовой выдержки образца в воздухе

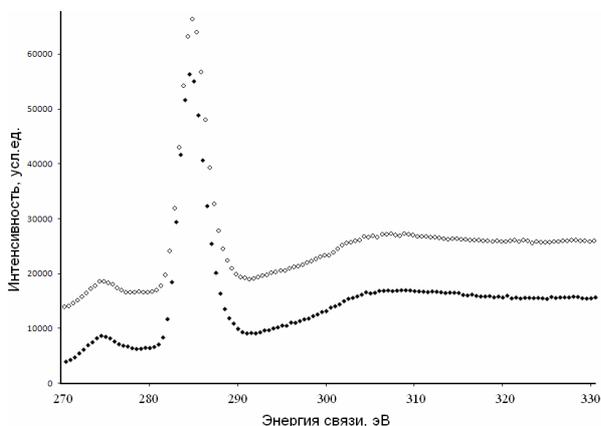


Рис. 2. Спектры остовных электронов углерода после 9 000 мин радиационной карбонизации исходного образца  $AlK_{\alpha}$  фотонами (♦) и после максимального термического воздействия (◊)

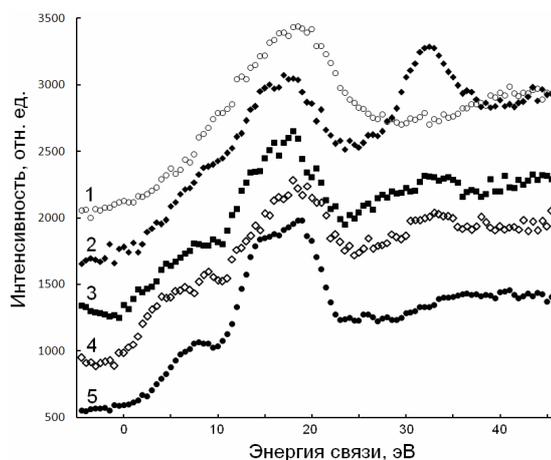


Рис. 3. Спектры валентных электронов сильно ориентированного пиролитического графита (1), исследуемого образца после 9 000 мин радиационной карбонизации (2), его же после максимальной термической обработки (3), его же после часовой выдержки на воздухе (4) и полиэтилена (5)

Эту последнюю трудность нам удалось преодолеть, благодаря достигнутой нами рекордно малой концентрации остаточного фтора. На рис. 3 представлены спектры валентных электронов графита (1), исследуемого образца после 9 000 мин радиационной карбонизации (2), его же после максимальной термической обработки (3), его же после часовой выдержки на воздухе (4) и полиэтилена (5). Из рисунка видно, что до отжига форма спектра исследуемого образца имеет качественное сходство с таковой графита, несмотря на то, что, как отмечалось выше, спектры  $C1s$  фотоэлектронов свидетельствуют об отсутствии заметного вклада  $sp^2$  структур. Наплыв при 9 эВ обусловлен вкладом  $F2p$  состояний. В результате отжига и последующей выдержки на воздухе форма спектров в интервале энергий связи до 10 эВ отчетливо приобретает черты и особенности, характерные для полиэтилена, то есть для  $sp^3$  гибридного состояния углеродных атомов. Уменьшение содержания фтора при отжиге (см. рис. 1) и отсутствие заметного вклада  $O2s$  состояний (25 эВ) даже после часовой выдержки образца на воздухе позволяет исключить предположение, что наблюдаемые особенности обусловлены вкладом  $F2p$  и  $O2p$  (8–9 эВ) фотоэлектронов. С другой стороны, именно отсутствие вклада  $O2s$  состояний демонстрирует стабильность химического состояния карбонизованного слоя поверхности полимерной пленки после термической обработки.

**Серия 2.** Для идентификации характера модификации электронной структуры карбонизованного слоя ПВДФ при бомбардировке ионами применялись описанные в [12] алгоритмы параметризации формы спектров электронной эмиссии: разность энергетических положений главных экстремумов первой производной  $SKVV$  полосы  $\Delta$  (критерий Галуски [10]) и асимметрия  $C1s$  линии  $\Delta E$ . Оба параметра в целом возрастают при увеличении кумулятивной дозы ионной бомбардировки, что характерно для увеличения содержания  $sp^2$  гибридных связей в образце. Совокупность данных свидетельствует, что, как и в случае серии 1, длительное облучение  $AlK_{\alpha}$  фотонами и вторичными электронами приводит к формированию на поверхности ПВДФ углеродных образований, тип внутриатомной гибридизации которых отличается от  $sp^2$ . Бомбардировка карбонизованного слоя пучком ионов аргона с кинетической энергией 600 эВ вызывает трансформацию углеродного вещества в структуры с доминированием  $sp^2$  гибридных связей. В качестве подтверждения этого вывода на панелях *a*, *б* и *в* рис. 4 приведены дозовые зависимости, соответственно, параметров формы  $SKVV$  ( $\Delta$ ) и  $C1s$  ( $\Delta E$ ) спектров и относительной атомной концентрации остаточного фтора ( $F/C$ ).

Первая зависимость (рис. 4*a*) демонстрирует изменение параметра формы  $SKVV$  спектра от присущего углеродным структурам, получаемым при карбонизации фотонами, к характерным для карбонизации под влиянием ионной бомбардировки [12]. Вполне вероятно, что разброс точек в обсуждаемой зависимости не связан лишь с погрешностью эксперимента, а отражает некоторую немонотонность процесса модификации атомного упорядочения углерода под действием ионов.

Дозовая зависимость параметра асимметрии  $C1s$  линии  $\Delta E$  (рис. 4*б*) имеет более сложный характер, который объясняется конкурирующим влиянием уменьшения содержания остаточного фтора и изменением типа гибридизации углерода. Первоначальный рост, скорее всего, связан с увеличением  $sp^2$  гибридных атомов углерода за счет сшивок карбиноидных цепей под воздействием ионной бомбардировки. Последующее резкое уменьшение мы объясняем более длительным воздействием (370 мин), чем для других доз (около 200 мин)  $AlK_{\alpha}$  фотонов. В результате этого произошло уменьшение концентрации остаточного фтора при дозе  $1,5 \cdot 10^{15}$  ион/см<sup>2</sup> (ступенька на рис. 4*в*) и, соответственно, вызываемых им химических сдвигов, а количество  $sp^2$  гибридных атомов не изменилось. При дальнейшем увеличении дозы содержание фтора уменьшается зна-

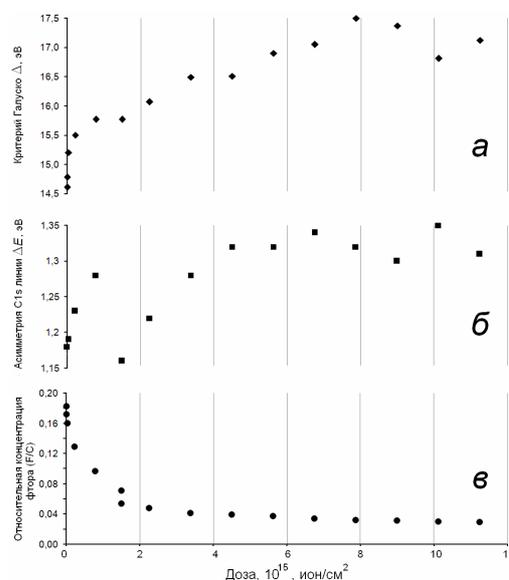


Рис. 4. Дозовые зависимости параметра  $\Delta$  (♦); две нижние точки получены до ионной бомбардировки (а), параметра асимметрии  $C1s$  линии  $\Delta E$  (■); крайняя левая точка получена до ионной бомбардировки (б), относительной атомной концентрации остаточного фтора  $F/C$  (●); две верхние точки получены до ионной бомбардировки (в)

чительно слабее, поэтому параметр асимметрии в целом растет за счет роста содержания атомов углерода в  $sp^2$  состоянии. Данный факт связан с тем, что асимметрия формы  $C1s$  линии усиливается вследствие появления особенности, характерной для атомов углерода в состоянии  $sp^2$ -гибридизации и связанной с изменением структуры межзонных переходов при уменьшении ширины запрещенной зоны и модификации комбинированной плотности состояний. При этом возникает возможность электронного перехода  $\pi \rightarrow \pi^*$ , что свойственно  $sp^2$ -гибридным углеродным структурам.

Таким образом, обобщая представленные результаты, можно утверждать, что при радиационной карбонизации поверхности ПВДФ  $AlK_{\alpha}$  фотонами и сопутствующими вторичными электронами нам удалось синтезировать углеродные структуры, тип внутриатомной гибридизации валентных электронов которых отличается и от  $sp^2$ , и от  $sp^3$ . Термическая обработка в вакууме инициирует их трансформацию к алмазоподобному ( $sp^3$ ), а ионная бомбардировка данных структур – к графитоподобному ( $sp^2$ ) типам гибридизации.

### Литература

1. Duca, M.D. Effect of X-rays on poly(vinylidene fluoride) in X-ray photoelectron spectroscopy. / M.D. Duca, T.L. Plosceanu, T. Pop // J. Appl. Polym. Sci. – 1998. – V. 67, № 13. – P. 2125–2129.
2. Morikawa, E. Photoemission study of direct photomicro machining in poly(vinylidene fluoride). / E. Morikawa, J. Choi, N.M. Manohara *et al.* // J. Appl. Phys. – 2000. – V. 87, № 8. – P. 4010–4016.
3. Chebotaryov, S.S. Modification of X-ray excited photoelectron and C KVV Auger spectra during radiative carbonization of poly(vinylidene fluoride) / S.S. Chebotaryov, A.A. Volegov, L.A. Pesin *et al.* // Physica E: Low dimensional systems and nanostructures. – 2007. – V. 36, № 2. – P. 184–189.
4. Хайманн, Р.Б. Аллотропия углерода / Р.Б. Хайманн, С.Е. Евсюков // Природа. – 2003. – № 8. – С. 66–72.
5. Эмиссионные характеристики волокон на основе линейно-цепочечного углерода / Ю.Г. Коробова, В.Г. Бабаев, В.В. Хвостов, М.Б. Гусева // Вестник Московского университета, Серия 3. Физика. Астрономия. – 2008. – № 1. – С. 33–39.
6. Высокоэффективный холодный катод на основе углеродного волокна / В.Г. Бабаев, В.В. Хвостов, М.Б. Гусева и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2007. – № 5. – С. 89–96.
7. Способ получения тромборезистентного материала / В.В. Коршак, Н.Б. Доброва, Ю.П. Кудрявцев и др. // Авт.свид. СССР № 1526308. – 1989.
8. Использование нового синтетического материала «Карбилан» при поражении мочевых путей (экспериментальная работа) / В.И. Кирпатовский, И.С. Мудрая, Ю.В. Кудрявцев и др. // Урология. – 2001. – № 3. – С. 12–18.
9. Экспериментальное обоснование применения новых поливинилиденфторидных эндопротезов с карбиновым покрытием для герниопластики / А.И. Бежин, А.А. Должиков, В.А. Жуковский и др. // Вестник новых медицинских технологий. – 2007. – Т. 14, № 1. – С. 99–101.
10. Galuska, A.A. Electron spectroscopy of graphite, graphite oxide and amorphous carbon / A.A. Galuska, H.H. Madden, R.E. Allred // Applied Surface Science. – 1988. – V. 32, № 3. – P. 253–272.
11. Вяткин, Г.П. Определение характера гибридизации валентных состояний углерода спектроскопическими методами / Г.П. Вяткин, Е.М. Байтингер, Л.А. Песин. – Челябинск: ЧГТУ, 1996. – 103 с.
12. Особенности спектров электронной эмиссии продуктов радиационной карбонизации поливинилиденфторида. / А.В. Вязовцев, Н.С. Кравец, С.С. Чеботарев и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2009. – Вып. 1. – № 22(155). – С. 45–51.
13. Влияние одноосного растяжения на фазовые превращения пленок из поливинилиденфторида. / П.С. Семочкин, В.П. Андрейчук, Л.А. Песин и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2009. – Вып. 12. – № 10(143). – С. 80–84.
14. Соколов, О.Б. Развитие экспериментальных возможностей метода электронной спектроскопии с использованием магнитного энергоанализатора / О.Б. Соколов, В.Л. Кузнецов. – Челябинск: ЧПИ, 1990. – 60 с.

Поступила в редакцию 16 марта 2011 г.

HEAT TREATMENT AND ION BOMBARDMENT EFFECTS ON THE ELECTRON STRUCTURE OF PRELIMINARY CARBONIZED POLYVINYLIDENFLUORIDE SURFACE

L.A. Pesin<sup>1</sup>, I.V. Gribov<sup>2</sup>, N.A. Moskvina<sup>3</sup>, V.L. Kuznetsov<sup>4</sup>, S.E. Evsyukov<sup>5</sup>, M.E. Bogatyryova<sup>6</sup>, A.V. Khananova<sup>7</sup>

Polyvinylidenfluoride surface modification in the course of preliminary radiative carbonization and consequent thermal annealing and ion bombardment was studied using XPS technique. Radiative carbonization allows to create carbon species with interatomic hybridization mode distinct from  $sp^2$  and  $sp^3$ . Heat treatment and ion bombardment in vacuum initiate their transformation into diamond-like and graphite-like structures accordingly.

*Keywords: PVDF, radiative carbonization, annealing, ion bombardment, hybridization.*

References

1. Duca M.D., Plosceanu T.L., Pop T. *J. Appl. Polym. Sci.* 1998. Vol. 67, no 13. pp. 2125–2129.
2. Morikawa E., Choi J., Manohara H.M., Ishii H., Seki K., Okudaira K.K., Ueno N. *J. Appl. Phys.* 2000. Vol. 87, no. 8. pp. 4010–4016.
3. Chebotaryov S.S., Volegov A.A., Pesin L.A., Evsyukov S.E., Moskvina N.A., Gribov I.V., Kuznetsov V.L. *Physica E: Low dimensional systems and nanostructures.* 2007. Vol. 36, no 2. pp. 184–189. DOI: 10.1016/j.physe.2006.10.011.
4. Hajmann R.B., Evsjukov S.E. *Priroda.* 2003. no. 8. pp. 66–72. (in Russ.).
5. Korobova Yu.G., Babaev V.G., Khvostov V.V., Guseva M.B. Emission characteristics of linear-chain carbon fibers. *Moscow University Physics Bulletin.* 2008. Vol. 63, no. 1. pp. 33–38.
6. Babaev V.G., Hvostov V.V., Guseva M.B., Savchenko N.F., Belokoneva Ju.G. *Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovanija.* 2007. no. 5. pp. 89–96. (in Russ.).
7. Korshak V.V., Dobrova N.B., Kudrjavcev Yu.P., Korshak Yu.V., Evsyukov S.E., Il'ina M.B., Sidorenko E.S. *Avt. svid. SSSR* no. 1526308. 1989.
8. Kirpatovskij V.I., Mudraja I.S., Kudrjavcev Yu.V., Kudrjavcev Yu.P., Evsyukov S.E. *Urologija.* 2001. no. 3. pp. 12–18. (in Russ.).
9. Bezhin A.I., Dolzhikov A.A., Zhukovskij V.A., Netjaga A.A., Plotnikov R.V. *Vestnik novyh medicinskih tehnologij.* 2007. Vol. 14, no. 1. pp. 99–101. (in Russ.).
10. Galuska A.A., Madden H.H., Allred R.E. Electron spectroscopy of graphite, graphite oxide and amorphous carbon. *Applied Surface Science.* 1988. Vol. 32, no. 3. pp. 253–272.
11. Vjatkin G.P., Bajtinger E.M., Pesin L.A. *Opredelenie haraktera gibridizacii valentnyh sostojanij ugljeroda spektroskopicheskimi metodami* (Defining the nature of hybridization of valence states of carbon by spectroscopic methods). Chelyabinsk: ChGTU, 1996. 103 p. (in Russ.).
12. Vyazovtsev A.V., Kravets N.S., Chebotarev S.S., Bepal I.I., Kuvshinov A.M., Evsyukov S.E., Gribov I.V., Moskvina N.A., Kuznetsov V.L., Pesin L.A. *Vestnik YuUrGU. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika».* 2009. Vol. 1, no. 22(155). pp. 45–51. (in Russ.).
13. Semochkin P.S., Andreychuk V.P., Pesin L.A., Evsyukov S.E., Koryakova O.V., Belenkov E.A., Shakhova I.V. *Vestnik YuUrGU. Serija «Matematika, fizika, himija».* 2009. Vol. 12, no. 10(143). pp. 80–84. (in Russ.).
14. Sokolov O.B., Kuznecov V.L. *Razvitie jeksperimental'nyh vozmozhnostej metoda jelektronnoj spektroskopii s ispol'zovaniem magnitnogo jenergoanalizatora* (The development of the experimental capabilities of the method of electron spectroscopy using a magnetic energy analyzer). Chelyabinsk: ChPI, 1990. 60 p. (in Russ.).

<sup>1</sup> Pesin Leonid Abramovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics department, Chelyabinsk State Pedagogical University. e-mail: pesin@cspu.ru

<sup>2</sup> Gribov Igor Vasilievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Electric Phenomena Laboratory, Physics of Metals Institute of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences. e-mail: gri@imp.uran.ru

<sup>3</sup> Moskvina Natalia Anatolievna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), scientific associate, Electric Phenomena Laboratory, Physics of Metals Institute of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences.

<sup>4</sup> Kuznetsov Vadim Lvovich is Dr. Sc. (Engineering), Electric Phenomena Laboratory, Physics of Metals Institute of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences.

<sup>5</sup> Evsyukov Sergey Evgenievich is Cand. Sc. (Chemistry), Synthesis Laboratory, Evonik Technochemie GmbH, Dossenheim, Germany.

<sup>6</sup> Bogatyryova Mariya Evgenievna is student of Chelyabinsk State Pedagogical University.

<sup>7</sup> Khananova Aleksandra Viktorovna is student of South Ural State University.

## КИНЕТИКА РОСТА НОВЫХ ФАЗ В ХОДЕ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ВОДОРОДОМ В МАГНИТОТВЕРДОМ СПЛАВЕ $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$

С.Б. Рыбалка<sup>1</sup>, Е.В. Додонова<sup>2</sup>, К.П. Скоков<sup>3</sup>

Исследована кинетика роста новых фаз в ходе индуцированного водородом прямого фазового превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ . Показано, что развитие прямого фазового превращения замедляется с понижением температуры превращения. Анализ кинетики роста новых фаз в ходе индуцированных водородом прямого фазового превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  позволил установить, что процесс роста новых фаз в исследованном интервале температур контролируется диффузией больших атомов (Fe, Sm) компонентов сплава.

*Ключевые слова:* кинетика, фазовые превращения, магнитотвердые сплавы.

### Введение

Исследование фазовых превращений всегда было одним из основных направлений физики твердого тела, физики металлов, теоретического и практического металловедения [1–3].

Например, разработанная впервые Такешитой и Накаямой новая технология, известная как HDDR-процесс (Hydrogenation-Decomposition-Desorption-Recombination), является новым перспективным подходом для улучшения свойств постоянных магнитов посредством индуцированных водородом фазовых превращений в сплавах RE-TM (RE – редкоземельный металл, TM – переходной металл) [4–6]. Применение HDDR-процесса позволяет получить нанокристаллические порошки из магнитотвердых сплавов типа RE-TM с мелкозернистой структурой  $\sim 0,1\text{--}0,3\ \mu\text{m}$  [5, 6]. Как результат, практическое использование прямых и обратных индуцированных водородом фазовых превращений в магнитотвердых сплавах типа RE-TM, таких как, например,  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  и  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , позволяет улучшить их структуру и магнитные свойства, а также дает возможность миниатюризации новых технических устройств, изготовленных из  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  и  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  постоянных магнитов, которые широко используются в DVD-ROM, акустических системах и других современных устройствах [6].

Совершенно очевидно, что знание кинетики роста фаз в ходе индуцированных водородом фазовых превращений позволит контролировать микроструктуру и магнитные свойств этих материалов.

На первом этапе при взаимодействии с водородом при температурах  $\sim 300\text{--}400\ ^\circ\text{C}$  в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  развивается прямое индуцированное водородом фазовое превращение по следующей схеме [7]:



В результате формируются частицы фазы  $\text{SmH}_2$  с размерами до 50 нм в диаметре, расположенные в матрице  $\alpha\text{-Fe}$  фазы.

Далее при эвакуации водорода в вакууме до  $\sim 1$  Па сплав претерпевает обратное фазовое превращение, ведущее к рекомбинации распавшихся фаз в исходную фазу  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , по следующей фазовой схеме [7]:



В результате проведения прямого и обратного фазовых превращений в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  формируется реформированная микроструктура сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  с размерами зерен  $\sim 0,1\text{--}0,3\ \mu\text{m}$ , приводящая к улучшению магнитных свойств постоянных магнитов, изготовленных из обработанных сплавов [7].

<sup>1</sup> Рыбалка Сергей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физики, физико-металлургический факультет, Донецкий национальный технический университет. e-mail: rybalka@rambler.ru

<sup>2</sup> Додонова Елена Викторовна – магистр, аспирант, кафедра физики, физико-металлургический факультет, Донецкий национальный технический университет.

<sup>3</sup> Скоков Константин Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра магнетизма, физико-технический факультет, Тверской государственный университет.

Однако, как правило, условия HDDR-обработки (температура, длительность выдержки, давление) выбираются без учета кинетических особенностей данного рода превращений, что в некоторых случаях приводит к росту зерен основной ферромагнитной фазы и вследствие этого к уменьшению коэрцитивной силы магнитотвердого сплава [8]. Очевидно, что понимание кинетических особенностей индуцированных водородом фазовых превращений в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  позволит в дальнейшем контролировать получаемую микроструктуру, а также магнитные свойства данного магнитотвердого сплава.

В настоящей работе исследовали кинетику роста новых фаз в ходе прямых индуцированных водородом фазовых превращений в магнитотвердом сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  при температурах 320–750 °С и давлении водорода 0,1 МПа.

### Материалы и методика эксперимента

Исследование кинетики роста новых фаз в ходе прямых фазовых превращений проводили на специальной водородно-вакуумной установке, используя магнитометрический метод Садикова [9]. Данная установка позволяет изучать кинетику индуцированных водородом фазовых превращений при температурах до 1000 °С и в интервале рабочих давлений водорода от 0,1 до 1,4 МПа, а также в вакууме до ~1 Па. В основе регистрации выделяющихся в ходе фазовых превращений новых фаз лежит тот факт, что в исследуемом температурном интервале (320–750 °С) исходный сплав  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  является парамагнитным ( $T_c = 254$  °С), а образующаяся фаза  $\alpha\text{-Fe}$  является ферромагнитной. Таким образом, по увеличению или уменьшению количества ферромагнитной фазы регистрировали развитие фазовых превращений данным методом.

Исследуемый сплав  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  был изготовлен в лаборатории кафедры магнетизма физико-технического факультета ТверГУ путем сплавления чистых компонентов в электропечи. После этого производилось дробление слитков сплава в шаровой мельнице до размеров частиц ~50–600  $\mu\text{m}$ .

Порошок исследуемого сплава массой 1,25 г помещали в рабочую камеру, а затем вакуумировали ее до давления ~1 Па. Далее сплав нагревали в вакууме со скоростью 80 °С/мин до температур в интервале 320–750 °С, после установления изотермических условий в камеру подавали водород под давлением 0,1 МПа. В процессе изотермической выдержки в водороде исследовали развитие прямого фазового превращения при помощи вышеописанного магнитометрического метода. Данные, полученные в ходе эксперимента, использовали далее для построения кинетических кривых. Рентгеноструктурный анализ исходного и обработанного в водороде сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  проводили на дифрактометре ДРОН-3М в излучении  $\text{FeK}\alpha$ .

### Результаты и обсуждение

В наших экспериментах исследовалась кинетика роста новых фаз на первом этапе HDDR-процесса в соответствии с уравнением (1). Напомним, что нагрев сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  в атмосфере водорода приводит к развитию прямого фазового превращения, ведущего к распаду сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  с образованием новых фаз – фазы гидрида  $\text{SmH}_2$  и  $\alpha$ -фазы  $\text{Fe}$ .

Результаты исследования кинетики роста новых фаз в ходе прямого фазового превращения, индуцированного водородом в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , обобщены на рис. 1 в виде изотермической кинетической диаграммы в координатах «температура–время–превращение». Как видно из рис. 1, при температурах 750, 690 и 650 °С прямое индуцированное водородом фазовое превращение полностью завершается за 120, 230 и 300 мин соответственно. При более низких температурах прямое фазовое превращение не завершается полностью за время эксперимента, достигая при 610 °С 87 % завершенности, постепенно замедляясь до 10 % завершенности при 330 °С. Таким образом, с понижением температуры от 750 °С до 330 °С исследуемое прямое фазовое превращение сильно замедляется, и при 320 °С оно не развивается за время эксперимента. При этом необходимо также отметить, что в ходе превращения обнаружен инкубационный период превращения и с уменьшением температуры обработки имеет место увеличение продолжительности инкубационного периода превращения. Так, например, для температур 750, 690 и 650 °С его продолжительность составляла 4–8 с, а с понижением температуры до 400–330 °С инкубационный период увеличился до 10–30 мин.

Рентгенофазовые исследования показали, что после завершения прямого фазового превращения исходный сплав  $Sm_2Fe_{17}$  распадается на фазу гидрида  $SmH_2$  и  $\alpha$ -фазу Fe. В дополнение к этому, исследования, выполненные после проведения прямого превращения при 320 °С, подтвердили результаты магнитометрического метода, что действительно при данной температуре обработки прямое фазовое превращение не развивается за время эксперимента, и фазовый состав сплава не изменяется по сравнению с исходным.

Индукцированные водородом прямые фазовые превращения протекают в соответствии со схемой (1), из которой видно, что для таких фазовых переходов необходима диффузионная транспортировка атомов компонент сплава (Sm, Fe). Известно, что диффузионные фазовые превращения могут быть двух типов: спиновальный распад, а также превращения, протекающие по механизму зарождения и роста. В частности, фазовые превращения, протекающие по механизму зарождения и роста, требуют диффузии на большие (по сравнению с межатомными) расстояния, поэтому они обычно протекают при относительно высоких температурах и требуют более длительного периода времени для их завершения. Для фазовых превращений такого типа характерно также наличие инкубационного периода, предшествующего началу развития превращений. Таким образом, можно высказать предположение, что исследуемые фазовые переходы развиваются по механизму зарождения и роста.

Для дальнейшего анализа используем теорию фазовых превращений Джонсона–Мэла–Аврами механизма превращения [1–2], согласно которой степень завершенности фазового превращения  $\xi$  может описываться следующим выражением:

$$\xi = 1 - \exp(-kt^n), \quad (3)$$

где  $t$  – время превращения, а  $k$  и  $n$  – кинетические коэффициенты.

Известно, что если экспериментальные результаты перестроить в координатах  $\ln[-\ln(1-\xi)]$  от  $\ln t$ , то можно установить значения кинетической константы  $n$ , которые в первом приближении дают некоторую важную качественную информацию о наиболее вероятных механизмах превращения [2]. На рис. 2 представлены такие зависимости для индуцированного водородом прямого фазового превращения в сплаве  $Sm_2Fe_{17}$ .

Полученные значения  $n$  представлены в таблице для различных температур (где  $n_1$  – тангенс угла наклона зависимости, описывающей степени превращения от 10 до 60 % превращения,  $n_2$  – тангенс угла наклона зависимости, описывающей степени превращения от 60 до 90 % превращения).

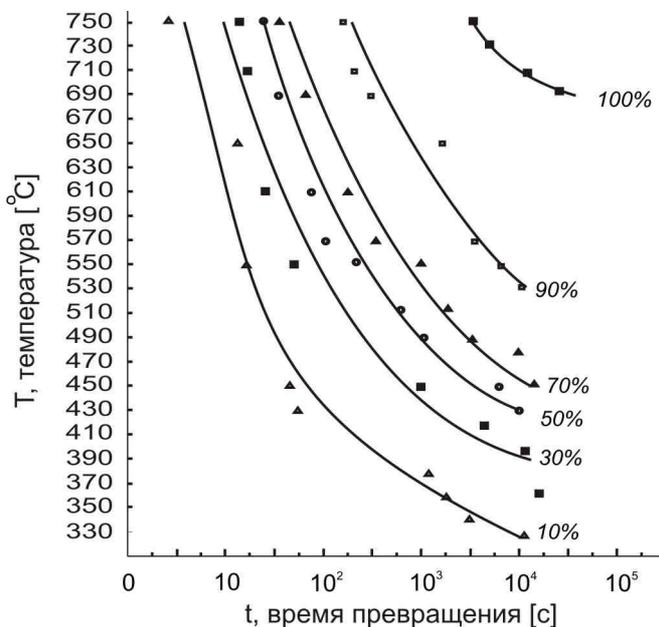


Рис. 1. Кинетика индуцированных водородом прямых фазовых превращений в сплаве  $Sm_2Fe_{17}$

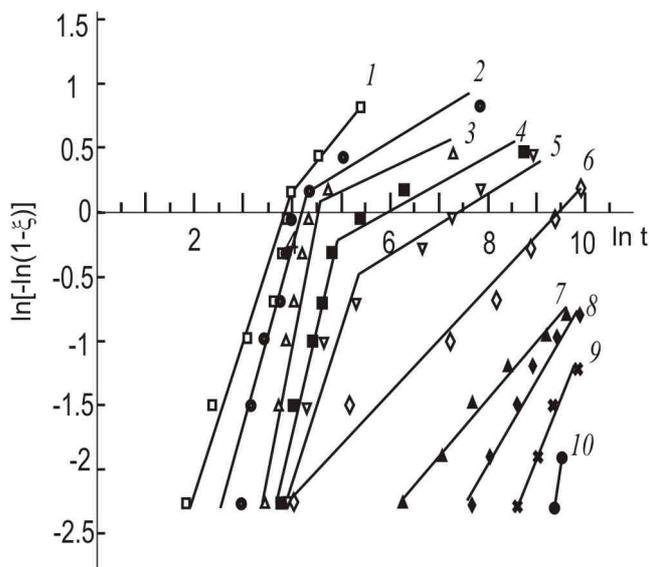


Рис. 2. Зависимость  $\ln[-\ln(1-\xi)]$  от  $\ln t$  для индуцированных водородом прямых фазовых превращений в сплаве  $Sm_2Fe_{17}$  при температурах превращения: 1 – 750; 2 – 650; 3 – 610; 4 – 570; 5 – 510; 6 – 450; 7 – 400; 8 – 360; 9 – 340; 10 – 330 °С

превращения). В соответствии с классификацией Дж. Кристиана [2] полученные значения  $n$  характерны для превращений с диффузионно-контролируемой скоростью роста центров новой фазы. Таким образом, это подтверждает наше предположение о диффузионно-контролируемом характере изучаемых фазовых превращений. Интересно, что при этом, как видно из рис. 2, для температур 750–510 °С наблюдается излом прямых, обусловленный сменой значений  $n$ . В соответствии с теорией Кана [2] наблюдаемое явление связано с исчерпанием мест зарождения. До исчерпания мест зарождения (в нашем случае до 60 % превращения) кинетический коэффициент  $k$  в уравнении (3) пропорционален скоростям зарождения и роста, а после исчерпания – только скорости роста. Следовательно, наше высказанное ранее предположение о том, что данного типа превращение реализуются по механизму зарождения и роста, получило еще одно подтверждение. При температурах 450–330 °С излома прямых не наблюдается, что по-видимому обусловлено тем фактом, что при данных температурах еще не произошло исчерпание мест зарождения.

Значения коэффициента  $n$  при различных температурах для индуцированных водородом прямых фазовых превращений в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$

$T, \text{C}$	750	650	610	570	510	450	400	360	340	330
$n_1$	1,06	1,23	2,02	2,00	2,4	0,77	0,69	0,74	0,89	0,95
$n_2$	0,39	0,11	0,29	0,11	0,34					

Таким образом, анализ, проведенный в рамках кинетической теории фазовых превращений, показал, что индуцированные водородом прямые фазовые превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  развиваются по механизму зарождения и роста.

Для дальнейшего выяснения контролирующей стадии превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  был дополнительно проведен расчет процесса диффузии атомов водорода в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ .

Как правило, HDDR-процесс используется для обработки порошков из сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  имеющих форму сферы с последующим изготовлением из обработанных порошков прессованных или связанных на полимерной основе постоянных магнитов [6, 7]. Учитывая это, нестационарное уравнение диффузии для атомов водорода в сплав  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  было записано в сферических координатах:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_H \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (4)$$

где  $c$  – концентрация атомов водорода в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ ,  $r$  – радиус сферической частицы сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ ,  $D_H$  – коэффициент диффузии атомов водорода в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ .

Расчет диффузии атомов водорода был проведен для частиц сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , имеющих форму сферы радиусом  $R = 1$  мм. Начальные и граничные условия для уравнения (4): концентрация водорода внутри частицы  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  в начальный момент времени  $c(r, 0) = 0$ ; на поверхности частицы в любой момент времени поддерживается концентрация водорода  $c(1, t) = 1$ . Коэффициент диффузии атомов водорода в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  при расчетах принимался  $D_H = 11 \cdot 10^{-3}$  мм/с<sup>2</sup> при  $T = 750$  °С согласно данным работы [10]. Уравнение диффузии атомов водорода (4) в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  при заданных выше начальных и граничных условиях решалось численными методами в среде MAPLE 8.0. На рис. 3 показаны концентрационные профили относительной концентрации  $c/c_0$  атомов водорода в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , полученные для моментов времени  $t = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 24$  с.

Как следует из рис. 3, при температуре 750 °С атомы водорода достигают центра сферической частицы  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  через 5 с, а через 24 с относительная концентрация атомов водорода в сплаве достигает ~0,5, что действительно примерно соответствует времени инкубационного периода, наблюдавшемуся в ходе нашего эксперимента. Таким образом, наблюдающийся в ходе эксперимента инкубационный период превращения обусловлен временем, необходимым для диффузии атомов водорода в частицы сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ .

С другой стороны, авторы исследования [11, 12] полагали, что контролирующей стадией для превращений такого типа в сплаве  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  является именно диффузия атомов водорода. Однако, согласно нашим экспериментальным данным (см. рис. 1), для завершения индуцированного водородом прямого фазового превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  при температуре 750 °С требуется  $7,2 \cdot 10^3$  с, т.е. приблизительно на три порядка величин больше, чем необходимо для диффузии атомов водорода в сплав  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  в соответствии с проведенными выше расчетами.

Таким образом, анализ и проведенные расчеты позволяют заключить, что диффузия атомов водорода в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  является наиболее быстрой стадией и процесс дальнейшего роста новых фаз в ходе развития индуцированного водородом прямого фазового превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , контролируется наиболее медленной стадией превращения, т.е. диффузией больших атомов замещения (в нашем случае – атомов Fe и Sm).

### Выводы

1. Установлено экспериментально, что с уменьшением температуры развитие прямого фазового превращения сильно замедляется, а при низких температурах (320 °С) фазовое превращение не развивается за время эксперимента.

2. Анализ, проведенный в рамках кинетической теории фазовых превращений, показал, что индуцированные водородом прямые фазовые превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  развиваются по механизму зарождения и роста.

3. Показано, что кинетика роста новых фаз в ходе превращения в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  лимитируется наиболее медленной стадией превращения, т.е. диффузией больших атомов замещения, в данном случае, атомами компонентов сплава  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$  – атомами Fe и Sm.

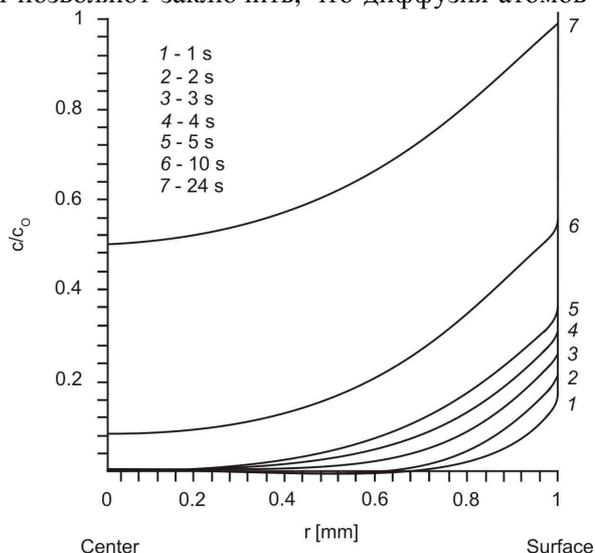


Рис. 3. Концентрационные профили  $c/c_0$  в сплаве  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}$ , полученные для моментов времени  $t = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 24$  с ( $T = 750$  °С)

### Литература

1. Хачатурян, А.Г. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов / А.Г. Хачатурян. – М.: Наука, 1974. – 384 с.
2. Christian, J.W. The Theory Transformations in Metals and Alloys / J.W. Christian. – Oxford: Pergamon Press, 2002. – 1216 p.
3. Попова, Л.Е. Диаграммы превращения аустенита в сталях и  $\beta$ -раствора в сплавах титана / Л.Е. Попова, А.А. Попов. – М.: Металлургия, 1991. – 502 с.
4. Takeshita, T. Present status of the hydrogenation-decomposition-desorption-recombination process as applied to the production of magnets / T. Takeshita // J. Alloys Compounds. – 1993. – V. 193. – P. 231–234.
5. Dependence of anisotropy and coercivity on microstructure in HDDR Nd–Fe–B magnet / M. Liu, Y. Sun, G.B. Han *et al.* // J. Alloys Compounds. – 2009. – V. 478. – P. 303–307.
6. Sugimoto, S. Current status and recent topics of rare-earth permanent magnets / S. Sugimoto // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2011. – V. 44. – P. 064001.
7. Microstructural evolutions during HDDR phenomena in  $\text{Sm}_2\text{Fe}_{17}\text{N}_x$  compounds / M. Okada, K. Saito, H. Nakamura *et al.* // J. Alloys Compounds. – 1995. – V. 231. – P. 60–65.
8. Detailed TEM analysis of Solid-HDDR  $\text{Nd}_{16}\text{Fe}_{76}\text{B}_8$  magnetic materials / M. Matzinger, J. Fidler, O. Gutfliesch, I.R. Harris // IEEE Trans. Magn. – 1995. – V. 31(6). – P. 3635–3637.
9. Fundamentals of the HDDR treatment of  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  type alloys / S.B. Rybalka, V.A. Goltsov, V.A. Didus, D. Fruchart // J. Alloys Compounds. – 2003. – V. 356–357. – P. 390–394.
10. Coey, J.M.D. Gas phase interstitial modification of rare-earth intermetallics / J.M.D. Coey, R. Skomski, S. Wirth // IEEE Trans. Magn. – 1992. – V. 28. – P. 2332–2337.
11. Liesert, S. Analyse physico-chimique des parametres du developpement d'une microstructure coercitive et anisotrope dans des poudres pour aimants lies puissants par application du procede H.D.D.R. au neodyme-fer-bore. These docteur de physique / S. Liesert. – Grenoble, 1998. – 256 p.
12. Liesert, S. The hydrogenation-disproportionation-desorption-recombination process of  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  studied by in-situ neutron diffraction and thermomagnetic measurements / S. Liesert, D. Fruchart, P. de Rango, J.L. Soubeyrou // J. Alloys Compounds. – 1997. – V. 253–254. – P. 140–143.

Поступила в редакцию 1 апреля 2011 г.

**KINETICS OF GROWTH OF NEW PHASES DURING HYDROGEN-INDUCED TRANSFORMATIONS IN Sm<sub>2</sub>Fe<sub>17</sub> HARD MAGNETIC ALLOY****S.B. Rybalka<sup>1</sup>, E.V. Dodonova<sup>2</sup>, K.P. Skokov<sup>3</sup>**

There kinetics of growth of new phases during hydrogen-induced direct phase transformation in Sm<sub>2</sub>Fe<sub>17</sub> alloy was analysed. It is shown that evolution of direct phase transformation decreases with temperature transformation decreasing. Analysis of kinetics of growth of new phases during hydrogen-induced direct phase transformations in Sm<sub>2</sub>Fe<sub>17</sub> alloy allowed to establish that the process of new phases growth in analysed temperature interval is controlled by diffusion of big atoms of alloy's components (Fe, Sm).

*Keywords: kinetics, phase transformations, hard magnetic alloys.*

**References**

1. Khachaturian A.G. *Teoriia fazovykh prevrashchenii i struktura tverdykh rastvorov* (The theory of phase transitions and the structure of solid solutions). Moscow: Nauka, 1974. 384 p. (in Russ.).
2. Christian J.W. *The Theory Transformations in Metals and Alloys*. Oxford, Pergamon Press, 2002. 1216 p.
3. Popova L.E., Popov A.A. *Diagrammy prevrashcheniia austenita v staliakh i β-rastvora v splavakh titana* (Charts austenite transformation in steels and β-solution alloys of titanium). Moscow, Metallurgiya, 1991. 502 p. (in Russ.).
4. Takeshita T. Present status of the hydrogenation-decomposition-desorption-recombination process as applied to the production of magnets. *J. Alloys Compounds*. 1993. Vol. 193. pp. 231–234.
5. Liu M., Sun Y., Han G.B., Yang W., Gao R.W. Dependence of anisotropy and coercivity on microstructure in HDDR Nd–Fe–B magnet. *J. Alloys Compounds*. 2009. Vol. 478. pp. 303–307.
6. Sugimoto S. Current status and recent topics of rare-earth permanent magnets. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2011. Vol. 44. p. 064001.
7. Okada M., Saito K., Nakamura H., Sugimoto S., Homma M. Microstructural evolutions during HDDR phenomena in Sm<sub>2</sub>Fe<sub>17</sub>N<sub>x</sub> compounds. *J. Alloys Compounds*. 1995. Vol. 231. pp. 60–65.
8. Matzinger M., Fidler J., Gutfliesch O., Harris I.R. Detailed TEM analysis of Solid-HDDR Nd<sub>16</sub>Fe<sub>76</sub>B<sub>8</sub> magnetic materials. *IEEE Trans. Magn.* 1995. Vol. 31, no. 6. pp. 3635–3637.
9. Rybalka S.B., Goltsov V.A., Didus V.A., Fruchart D. Fundamentals of the HDDR treatment of Nd<sub>2</sub>Fe<sub>14</sub>B type alloys. *J. Alloys Compounds*. 2003. Vol. 356–357. pp. 390–394.
10. Coey J.M.D., Skomski R., Wirth S. Gas phase interstitial modification of rare-earth intermetallics. *IEEE Trans. Magn.* 1992. Vol. 28. pp. 2332–2337.
11. Liesert S. Analyse physico-chimique des parametres du developpement d'une microstructure coercitive et anisotrope dans des poudres pour aimants lies puissants par application du procede H.D.D.R. au neodyme-fer-bore. These docteur de physique. Grenoble, 1998. 256 p.
12. Liesert S., Fruchart D., de Rango P., Soubeyroux J.L. The hydrogenation-disproportionation-desorption-recombination process of Nd<sub>2</sub>Fe<sub>14</sub>B studied by in-situ neutron diffraction and thermomagnetic measurements. *J. Alloys Compounds*. 1997. Vol. 253–254. pp. 140–143.

<sup>1</sup> Rybalka Sergey Borisovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Physics Department, Donetsk National Technical University. e-mail: rybalka@rambler.ru

<sup>2</sup> Dodonova Elena Victorovna is a master student, Post-graduate Student, Physics Department, Physics and Metallurgic Faculty, Donetsk National Technical University.

<sup>3</sup> Skokov Konstantin Petrovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Magnetism Department, Physics and Technical Faculty, Tver State University.

# ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ТИПОМ ПРОВОДИМОСТИ ОТ МЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ И ИНТЕРКАЛИРОВАНИЯ СЕРОЙ<sup>1</sup>

С.А. Созыкин<sup>2</sup>, В.П. Бескачко<sup>3</sup>

Приводятся результаты расчетов электрического сопротивления углеродных нанотрубок (5,5) и (7,7) при механическом нагружении и интеркалировании серой. При моделировании использовался формализм неравновесных функций Грина, совмещенный с теорией функционала плотности, реализованный в квантово-механическом пакете *TranSiesta*.

*Ключевые слова:* углеродные нанотрубки, внедренные атомы, электрическое сопротивление.

## Введение

Электронные и механические свойства углеродных нанотрубок (УНТ) являются предметом интенсивных исследований в связи с перспективой их использования в микроэлектронике, сенсорике, микроэлектромеханических системах (МЕМС) и т.п. В связи с приложениями все больший интерес привлекают вопросы, касающиеся влияния на эти и другие свойства УНТ их взаимодействия с окружением. Поскольку трубки полые, то инородные атомы могут располагаться как снаружи, так и внутри них (интеркаляция). С последней возможностью связаны надежды на управление свойствами трубок.

По сравнению с индивидуальными нанотрубками механические и электронные свойства интеркалированных нанотрубок изучены гораздо хуже, несмотря на то, возможность интеркаляции экспериментально была обнаружена вскоре после открытия самих нанотрубок [1]. В частности, УНТ, заполненные халькогенами, стали изучаться еще в начале 90-х годов прошлого века в связи с капиллярными явлениями [2]. Однако, несмотря на прогресс в синтезе интеркалированных УНТ, до настоящего времени отсутствует целостное понимание влияния заполнения на их структурные и электрические свойства, не говоря уже о зависимости этих свойств от механического состояния (деформации) трубок, про которую по нашим данным неизвестно пока ничего. В то же время связь между электрическими свойствами УНТ и их механическим состоянием представляет большой интерес в связи с нуждами наносенсорики.

В связи со сказанным выше представляет интерес теоретическая оценка электрических свойств деформированных УНТ как «пустых», так и заполненных. В данной работе с помощью неэмпирического квантовомеханического моделирования изучается зависимость электрического сопротивления однослойной углеродной нанотрубки с металлическим типом проводимости от ее деформации-растяжения вдоль оси и сжатия в направлении, перпендикулярном оси нанотрубки. Рассматривается также влияние на эту зависимость интеркаляции УНТ серой.

## Модель

При изучении влияния растяжения на электрическую проводимость УНТ в качестве объекта моделирования выбирался фрагмент УНТ (7,7) длиной 1 нм (112 атомов углерода). При моделировании процесса сжатия УНТ в направлении, перпендикулярном оси, необходимо рассматривать нанотрубки большей длины, поэтому здесь рассматривался фрагмент УНТ (5,5) длиной 1,7 нм (140 атомов углерода).

Моделирование проводилось с использованием метода неравновесных функций Грина, реализованного в квантово-механическом пакете *TranSiesta* [3], базирующемся на формализме псевдопотенциала для уменьшения вычислительной сложности задачи. На сегодняшний день этот

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

<sup>2</sup> Созыкин Сергей Анатольевич – аспирант, кафедра общей и теоретической физики, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: sergey.sozykin@gmail.com

<sup>3</sup> Бескачко Валерий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

программный пакет наиболее зарекомендовал себя при изучении электрической проводимости молекулярных комплексов и нанотрубок в том числе. В вычислениях использовались обменно-корреляционный функционал Каперлея–Алдера (*Ceperley and Alder*) (приближение локальной плотности – *LDA*) и базисный набор дубль-зета (*DZ*). В работе применялись псевдопотенциалы, полученные с использованием упомянутого функционала Каперлея–Алдера по методике Н. Троуллиера и Ж.Л. Мартинса [4]. Валентные конфигурации для атомов углерода и серы выбирались как  $2s^2 2p^2 3d^0 4f^0$  и  $3s^2 3p^4 3d^0 4f^0$  соответственно.

В упомянутом методе рассматриваемый фрагмент сочленяется с двумя полубесконечными электродами (рис. 1). Для исключения контактных явлений в качестве электродов использовались УНТ с теми же индексами хиральности, что и у исследуемого фрагмента. При моделировании сжатия УНТ в направлении, перпендикулярном ее оси, этот фрагмент разбивался на 3 области (рис. 2): с замороженными степенями свободы атомов углерода (обеспечивает контакт с электродами), область «свободных» атомов углерода и деформируемую область. Вторая область вводится для связи фиксированных концевых областей с центральной областью, где фиксированными являются  $y$ -компоненты сдвинутых в процессе деформации атомов ( $z$  направление оси нанотрубки).

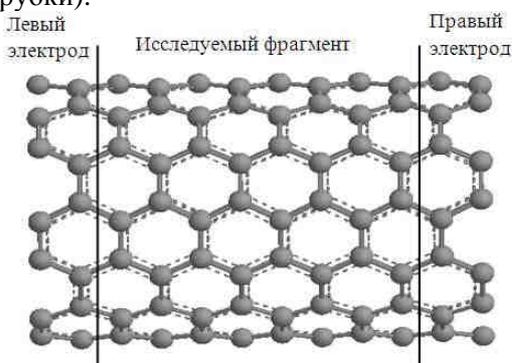


Рис. 1. Модель пустой нанотрубки (7,7) с электродами

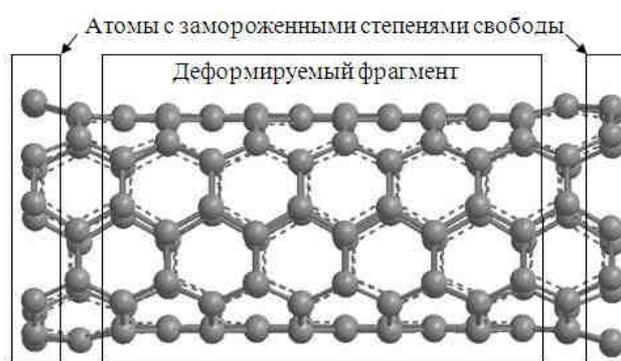


Рис. 2. Схема деформирования фрагмента УНТ (5,5), использованная при моделировании поперечного сжатия

### Методика расчета

Моделирование проводилось в несколько этапов.

1. Определение равновесной конфигурации пустой нанотрубки посредством оптимизации ее геометрии в пакете *Siesta*. При изучении свойств УНТ, содержащих интеркалированные атомы, на данном этапе в полость оптимизированных пустых нанотрубок вводятся кластеры серы, после чего проводится оптимизация геометрии возникшего комплекса.

2. Моделирование деформированных состояний УНТ.

При осевом растяжении нанотрубок (пустых или заполненных)  $z$ -координаты атомов в конфигурации, полученной на этапе 1, увеличивались на 1–3 %, после чего координаты крайних атомов фиксировались и проводилась оптимизация геометрии напряженной структуры.

Сжатие УНТ в направлении, перпендикулярном оси, производилось следующим образом. Трубка помещалась между двумя параллельными плоскостями (перпендикулярными оси  $Y$ ), касающимися ее поверхности. Затем эти плоскости симметрично сближались на величину  $d$ , малую в сравнении с диаметром  $D$  трубки ( $d/D = \varepsilon \approx 0,015$ ), и определялись атомы, оказавшиеся при таком перемещении плоскостей снаружи.  $y$ -координаты этих атомов в новой конфигурации принимались равными координате соответствующей плоскости (верхней или нижней). После этого проводилась оптимизация геометрии деформированной трубки (в пакете *Siesta*), при которой все степени свободы концевых атомов модели и  $y$ -координаты смещенных атомов считались замороженными. Расчеты повторялись для ряда возрастающих значений  $\varepsilon$  (0,030, 0,045, 0,060 и 0,075).

3. Для каждого состояния УНТ, полученного на этапе 1 или 2, производился расчет вольтамперной ( $VAX$ ) характеристики в пакете *TranSiesta*.

### Результаты и обсуждение

Согласно теоретическим предсказаниям и результатам наиболее точных экспериментов [5], в бездефектных УНТ с металлическим типом проводимости механизм последней должен быть

баллистическим. Это означает, что сопротивление однослойной УНТ должно составлять 6,47 кОм независимо от ее длины и диаметра. По нашим расчетам сопротивление недеформированной УНТ составляет  $6,65 \pm 0,01$  кОм, что согласуется с упомянутым ранее значением в пределах 3 %.

Результаты расчета ВАХ, полученные при растяжении, например, нанотрубки (7,7) в направлении ее оси, представлены в табл. 1. Вольт-амперные характеристики  $I(U)$  для всех рассмотренных степеней деформации оказываются практически линейными. В этом примере производная  $dU/dI = R$  увеличивается примерно на 10 % на краях исследованного интервала 0,02–0,50 В. Из табл. 1 видно, что в исследованной области сопротивление слабо зависит от деформации. В работе [6] такое поведение предсказывалось для всех пустых кресловидных нанотрубок.

Таблица 1

Сопротивление пустой УНТ (7,7) при различных степенях растяжения  $\epsilon$

$\epsilon$ , %	0	1	2	3
$R$ , кОм	$6,65 \pm 0,01$	$7,27 \pm 0,01$	$7,20 \pm 0,01$	$7,12 \pm 0,01$

Результаты расчета ВАХ нанотрубок, деформированных в направлении, перпендикулярном к их оси, представлены на рис. 3. В исследованном интервале напряжений  $U$  для всех рассмотренных степеней деформации  $\epsilon$  вольт-амперные характеристики оказались практически линейными. Это позволяет оценить сопротивления деформированных УНТ, которые в сравнении с таковым для недеформированной трубки составили 92, 88, 88, 90 и 87 % для  $\epsilon$ , равных 0,015, 0,030, 0,045, 0,060 и 0,075 соответственно.

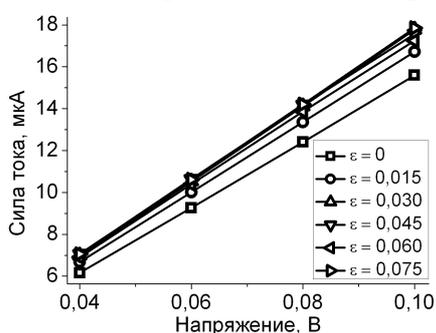


Рис. 3. ВАХ образца УНТ (5,5) при различных степенях поперечного сжатия

Перед рассмотрением вопроса о влиянии интеркаляции серой на ВАХ УНТ (7,7) было необходимо определить стабильные конфигурации, которые образуют атомы  $S$  во внутреннем канале УНТ (7,7). В случае внедрения одного атома серы устойчивым оказывалось внеосевое расположение этого атома. При внедрении 2 и более атомов серы во внутреннюю полость УНТ (7,7) нам не удалось обнаружить равновесные конфигурации, содержащие внедренные атомы, взаимодействующие с уже имеющимися. При попытке создать такую конфигурацию из некоторой стартовой, в которой внедряемые атомы располагались на возможно больших расстояниях друг от друга, процесс оптимизации всегда приводил к конфигурациям с сильным взаимодействием внедренных атомов – кластерам. Структура этих кластеров такова, что внедренные атомы стремятся расположиться ближе к стенке, насколько это позволяет их большой атомный радиус. Для дальнейшего изучения влияния осевого растяжения на ВАХ интеркалированной УНТ были выбраны фрагменты УНТ (7,7), содержащей во внутренней полости 3 и 5 атомов серы ( $S_3@УНТ$ ,  $S_5@УНТ$ ). Их равновесные конфигурации изображены на рис. 4. Видно, что атомы серы образуют вытянутые структуры. В группировке из 3 атомов  $S$  межатомное расстояние равно 0,20 нм, а в случае внедрения 5 атомов  $S$  расстояние между ними варьируется от 0,20 до 0,21 нм.

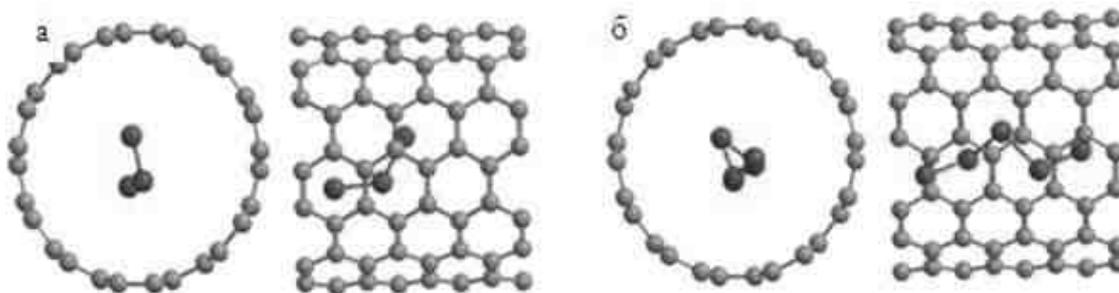


Рис. 4. Равновесные конфигурации кластеров серы в УНТ (7,7), состоящих из 3 (а) и 5 (б) атомов

На рис. 5 показаны вольт-амперные характеристики пустой УНТ и  $S_3@УНТ$  в недеформированном состоянии. ВАХ для  $S_5@УНТ$  мало отличается от ВАХ  $S_3@УНТ$ . Электрическое сопротивление нерастянутого фрагмента УНТ (7,7) при внедрении кластеров серы увеличилось на ~ 1,3 кОм.

Линейный характер ВАХ сохраняется и при растяжении трубок. В табл. 2 приведено сопротивление заполненных трубок в зависимости от их деформации. Видно, что сильнее всего (примерно на 10 %) сопротивление изменяется при малых деформациях (порядка 1 %). Такое поведение сопротивления возможно связано с изменением конфигурации внедренных атомов серы, также наблюдаемом при малых растяжениях трубки. В недеформированном состоянии кластер из 3 атомов серы почти лежит в плоскости, содержащей ось трубки (см. рис. 4), а при ее растяжении разворачивается в плоскость, почти перпендикулярную этой оси. Протяженный же в направлении оси кластер из 5 атомов серы при растяжении УНТ смещается ближе к ее стенке.

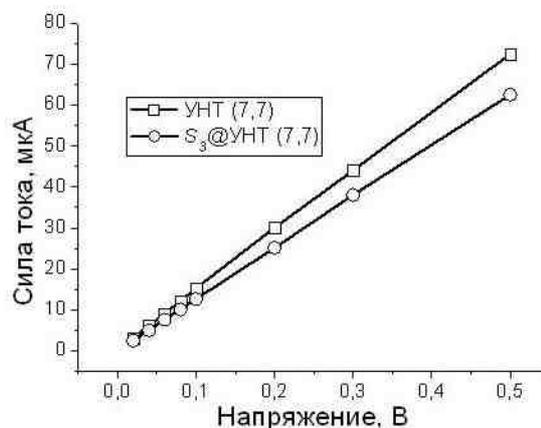


Рис. 5. ВАХ пустой УНТ и комплекса  $S_3@УНТ$

Таблица 2  
Сопротивление УНТ (7,7), содержащей серу, при различных степенях растяжения  $\epsilon$

$\epsilon$ , %	$S_3@УНТ$ (7,7)				$S_5@УНТ$ (7,7)			
	0	1	2	3	0	1	2	3
$R$ , кОм	7,97±	8,45±	8,41±	8,49±	8,00±	8,13±	8,86±	8,43±
	0,03	0,04	0,06	0,03	0,02	0,06	0,31	0,07

Так, кластер из 3 атомов серы, изначально расположенный в плоскости, параллельной оси трубки, в результате оптимизации геометрии при растяжении фрагмента оказывается расположенным в плоскости, перпендикулярной оси трубки. Кластер из 5 атомов серы при растяжении УНТ смещается ближе к ее стенке.

### Заключение

Таким образом, согласно выполненным в настоящей работе расчетам, можно ожидать, что:

- 1) электрическое сопротивление пустых кресловидных нанотрубок если и изменяется при их осевом растяжении, то слабо – на несколько процентов;
- 2) сопротивление УНТ, интеркалированной атомами-акцепторами (серой), увеличивается на 15 % по сравнению с пустой трубкой и заметно увеличивается (на 6–10 %) при малом растяжении (до 1–2 %), сопровождаемом изменением положения кластеров серы в трубке;
- 3) при поперечном сжатии отклик сопротивления пустых УНТ по величине занимает промежуточное положение между откликом при осевом растяжении (слабый или отсутствует) и откликом при изгибе (большой и положительный).

### Литература

1. Ajayan P.M. Capillarity-induced filling of carbon nanotubes / P.M. Ajayan, S. Lijima // Nature. – 1993. – Vol. 361. – pp. 333–334.
2. Dujardin E. Capillarity and wetting of carbon nanotubes / E. Dujardin, T.W. Ebbesen, H. Hiura, K. Tanigaki // Science. – 1994. – Vol. 265. – pp. 1850–1852.
3. Soler, J.M. The SIESTA for ab-initio order-N materials simulations/ J.M. Soler, E. Artacho, J.D. Gale, A. Garcia, J. Junquera, P. Ordejyn, D. Sanchez-Portal // J. Phys: Condens. Matt. – 2002. – Vol. 14. – pp. 2745–2779.
4. Troullier, N. Efficient pseudopotentials for plane-wave calculations/ N. Troullier, J.L. Martins // Physical review B. – 1991. – Vol. 43. – С. 1993–2006.
5. Елецкий, А.В. Транспортные свойства углеродных нанотрубок / А.В. Елецкий // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 3. – С. 226–242.

6. Cullinan, M.A. Carbon nanotubes as piezoresistive microelectromechanical sensors: Theory and experiment / M.A. Cullinan, M.L. Culpepper // *Physical review B*. – 2010. – Vol. 82. – pp. 115428.

7. Postma, H.W.Ch. Electrical transport through carbon nanotube junctions created by mechanical manipulation / H.W.Ch. Postma, M. de Jonge, Z. Yao, C. Dekker // *Physical review B*. – 2000. – Vol. 62. – pp. R10653.

Поступила в редакцию 4 октября 2011 г.

## ELECTRICAL RESISTANCE OF CARBON NANOTUBE WITH A METALLIC TYPE OF CONDUCTIVITY DURING MECHANICAL LOADING AND INTERCALATION BY SULFUR

S.A. Sozykin<sup>1</sup>, V.P. Beskachko<sup>2</sup>

The paper presents the results of calculations of the electrical resistance of carbon nanotubes (5,5) and (7,7) under mechanical loading and the intercalation by sulfur. Current-voltage characteristics of ideal single wall carbon nanotubes have been calculated using the software package Transiesta, which incorporates first principle calculations based on density functional theory and non-equilibrium Green's function method.

*Keywords: carbon nanotubes, embedded atoms, electrical resistance.*

### References

1. Ajayan P.M., Lijima S. Capillarity-induced filling of carbon nanotubes. *Nature*. 1993. Vol. 361. pp. 333–334.

2. Dujardin E., Ebbesen T.W., Hiura H., Tanigaki K. Capillarity and wetting of carbon nanotubes. *Science*. 1994. Vol. 265. pp. 1850–1852.

3. Soler J.M., Artacho E., Gale J.D., García A., Junquera J., Ordejón P., Sánchez-Portal D. The SIESTA for ab-initio order-N materials simulations. *J. Phys: Condens. Matt*. 2002. Vol. 14. pp. 2745–2779.

4. Troullier N., Martins J.L. Efficient pseudopotentials for plane-wave calculations. *Physical review B*. 1991. Vol. 43. pp. 1993–2006.

5. Eletsii A.V. Transport properties of carbon nanotubes. *Physics-Uspeski*. 2009. Vol. 52. pp. 209–224. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200903a.0225 [Eletsii A.V. *Uspeski fizicheskikh nauk*. 2009. Vol. 179, № 3. pp. 226–242. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200903a.0225 (in Russ.)].

6. Cullinan M.A., Culpepper M.L. Carbon nanotubes as piezoresistive microelectromechanical sensors: Theory and experiment. *Physical review B*. 2010. Vol. 82. pp. 115428.

7. Postma H.W.Ch., de Jonge M., Yao Z., Dekker C. Electrical transport through carbon nanotube junctions created by mechanical manipulation. *Physical review B*. 2000. Vol. 62. pp. R10653.

<sup>1</sup> Sozykin Sergey Anatolevich is postgraduate student, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.  
e-mail: sergey.sozykin@gmail.com

<sup>2</sup> Beskachko Valeriy Petrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (не более 500 знаков с пробелами), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, аннотация (или реферат статьи объемом до 1800 знаков с пробелами), список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стилль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»: Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, физический факультет, кафедра ОиТФ, ответственному редактору профессору Бескачко Валерию Петровичу. [Prof. Beskachko Valeriy Petrovich, General and Theoretical Physics Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [vestnik@physics.susu.ac.ru](mailto:vestnik@physics.susu.ac.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>) следуя ссылкам: «Научные деятельности», «Вестник ЮУрГУ», «Серии».

10. Журнал распространяется по подписке. Подписной индекс журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Математика. Механика. Физика»: 29211, каталог «Пресса России». Интернет-каталог агентства «Книга-Сервис», подписной индекс: E29211. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru).

### ВЕСТНИК ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 32 (249) 2011

Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Выпуск 5

Редактор Н.М. Лезина

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

---

Подписано в печать 12.10.2011. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.  
Усл. печ. л. 13,95. Тираж 500 экз. Заказ 333/601.

---

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.