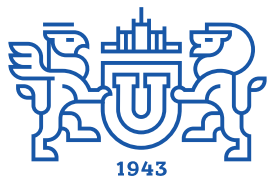


# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2018  
Т. 10, № 2**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

**СЕРИЯ**

## **«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»**

**Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий  
Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

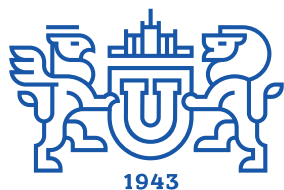
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### **Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

### **Редакционный совет**

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
профессор **Гвидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университета Невады, г. Рино, США)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, профессор Физики и Оптики **Зельдович Б.Я.** (КРЕОЛ, Университет Центральной Флориды, г. Орlando, США)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

2018  
Vol. 10, no. 2

SERIES

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

**S.A. Zagrebina**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**E.V. Golubev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.P. Beskachko**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.I. Zalyapin**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**Yu.M. Kovalev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

**A.V. Bogomolov**, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation  
**M.M. Brzhezinskaya**, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany  
**G.L. Brovko**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**D. Guidetti**, University of Bologna, Bologna, Italy  
**V.I. Zhukovsky**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**I.V. Zalyapin**, University of Nevada, Reno, United States of America  
**A.I. Korotkii**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**B.Ya. Zeldovich**, CREOL, University of Central Florida, Orlando, United States of America  
**Jaewan Kim**, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea  
**Kisik Kim**, INHA-University, Incheon, South Korea  
**N.D. Kundikova**, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**V.V. Menshikh**, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation  
**S.I. Pinchuk**, Indiana University, Bloomington, United States of America  
**Y.S. Puzyrev**, Vanderbilt University, Nashville, United States of America  
**N.K. Ravshanov**, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan  
**L.V. Utkin**, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg  
**I. Verpoest**, Catholic University, Leuven, Belgium  
**V.A. Strauss**, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- ЖУКОВСКИЙ В.И., КУДРЯВЦЕВ К.Н., САМСОНОВ С.П., ВЫСОКОС М.И.,  
БЕЛЬСКИХ Ю.А. Класс дифференциальных игр, в которых отсутствует равновесие по Нэ-  
шу, но существует равновесие угроз и контругроз ..... 5
- КАМОЗИНА О.В. Минимальный спутник  $\tau$ -замкнутого  $n$ -кратно  $\Omega$ -расслоенного класса  
Фиттинга ..... 22
- ПАНЮКОВ А.В., ЧАЛУБ Х.З., МЕЗАЛ Я.А. Аппроксимация матрицы с положительными  
элементами матрицей единичного ранга ..... 28
- RYATKOV S.G., VERZHBITSKII M.A. Inverse Problems of Recovering the Boundary Data with  
Integral Overdetermination Conditions ..... 37
- ТЫРСИН А.Н., АЗАРЯН А.А. Точное оценивание линейных регрессионных моделей мето-  
дом наименьших модулей на основе спуска по узловым прямым ..... 47

### Механика

- КОВАЛЕВ Ю.М. Определение выражения изобарического коэффициента объемного рас-  
ширения для некоторых молекулярных кристаллов нитросоединений ..... 57
- ПЕТРОВ А.А. Влияние режимов нагружения транспортных средств на долговечность  
элементов несущих систем ..... 68

### Физика

- LUPITSKAYA Yu.A., KALGANOV D.A., AFANAS'EV Yu.O. Formation of Compounds Based  
on Bismuth Ferrite with Partial Substitution of Bismuth Ions by Lanthanum and Praseodymium ..... 74

# CONTENTS

## Mathematics

ZHUKOVSKIY V.I., KUDRYAVTSEV K.N., SAMSONOV S.P., VYSOKOS M.I., BELSKIH Yu.A. Class of Differential Games with no Nash Equilibrium, but with Equilibrium of Objections and Counterobjections .....	5
KAMOZINA O.V. Minimum Satellite of $\tau$ -closed $n$ -fold $\Omega$ -foliated Fitting Class .....	22
PANYUKOV A.V., CHALOOB Kh.Z., MEZAL Ya.A. Approximation of the Matrix with Positive Elements by the Single Rank Matrix .....	28
PYATKOV S.G., VERZHBITSKII M.A. Inverse Problems of Recovering the Boundary Data with Integral Overdetermination Conditions .....	37
TYRSIN A.N., AZARYAN A.A. Exact Evaluation of Linear Regression Models by the Least Absolute Deviations Method Based on the Descent Through the Nodal Straight Lines .....	47

## Mechanics

KOVALEV Yu.M. Determining the Expression for Isobaric Coefficient of Volume Expansion for some Molecular Crystals of Nitro Compounds .....	57
PETROV A.A. Influence of Vehicle Loading Regimes on the Durability of Elements of Bearing Systems .....	68

## Physics

LUPITSKAYA Yu.A., KALGANOV D.A., AFANAS'EV Yu.O. Formation of Compounds Based on Bismuth Ferrite with Partial Substitution of Bismuth Ions by Lanthanum and Praseodymium .....	74
--	----

## КЛАСС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР, В КОТОРЫХ ОТСУТСТВУЕТ РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ, НО СУЩЕСТВУЕТ РАВНОВЕСИЕ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ

**В.И. Жуковский<sup>1</sup>, К.Н. Кудрявцев<sup>2</sup>, С.П. Самсонов<sup>1</sup>, М.И. Высококс<sup>3</sup>,  
Ю.А. Бельских<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>3</sup> Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация

E-mail: kudrkn@gmail.com

Исследованию позитивных и негативных свойств «царствующей» в экономике концепции равновесия по Нэшу (как решения бескоалиционной игры) посвящен непрекращающийся поток публикаций. В основном они связаны с неединственностью, и, как следствие, отсутствием эквивалентности, взаимозаменяемости, внешней устойчивости, а также неустойчивостью к одновременному отклонению от таких решений двух и более игроков. Игра «дилемма заключенных» выявила также свойство «улучшаемости». Подробному анализу таких «отрицательных» свойств для дифференциальных позиционных игр посвящена книга В.И. Жуковского и Т.Н. Тынянского «Равновесные управления многокритериальных динамических задач», 1984. Вывод, к которому приводят авторы этой книги: либо использовать те ситуации равновесия по Нэшу, которые одновременно свободны от некоторых из указанных недостатков, либо вводить новые решения бескоалиционной игры, которые, обладая достоинствами ситуации равновесия по Нэшу, позволяли бы избавиться от отдельных ее недостатков. Одной из таких возможностей для дифференциальных игр, связанной с концепцией угроз и контругроз, и посвящена настоящая статья. Используемые в ней понятия угроз и контругроз основываются на известной в классической теории игр концепции угроз и контругроз. Теоретическим основанием этой концепции стали работы Э.И. Вилкаса 1973 года. Термин «активное равновесие» предложил Э.Р. Смольяков в 1983 г., понятие равновесия угроз и контругроз в дифференциальных играх было использовано впервые, по-видимому, в 1974 г. Э.М. Вайсбордом, затем подхвачено первым автором настоящей статьи в упомянутой выше книге 1984 г., но применялась и применяется эта концепция в дифференциальных играх, по нашему мнению, недостаточно широко. Этот факт и «вызвал к жизни» настоящую работу. В ней выявляется класс дифференциальных игр двух лиц, в которых отсутствует привычная ситуация равновесия по Нэшу, но наличествует равновесие угроз и контругроз.

*Ключевые слова:* бескоалиционные игры; равновесие по Нэшу; активное равновесие; равновесие угроз и контругроз.

### 1. Введение

Рассматривается бескоалиционная линейно-квадратичная дифференциальная игра двух лиц в нормальной форме, заданная упорядоченной четверкой,

$$\Gamma = \left\langle \{1, 2\}, \Sigma, \{U_i\}_{i=1,2}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \right\rangle.$$

В  $\Gamma$  множество порядковых номеров игроков  $\{1, 2\}$ , управляемая динамическая система  $\Sigma$  описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Здесь фазовый  $n$ -вектор  $x \in R^n$ ; момент окончания игры  $\vartheta = \text{const} > 0$ , а само это время продолжительности игры  $t \in [0, \vartheta]$ ; управляющее взаимодействие  $i$ -го игрока  $u_i \in R^n$  ( $i=1,2$ );  $n \times n$ -матрица  $A(t)$ , будем предполагать непрерывность на  $[0, \vartheta]$  элементов матрицы  $A(t)$  и обозначать этот факт  $A(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]$ ; пара  $(t, x) \in [0, \vartheta] \times R^n$  – текущая позиция игры  $\Gamma$ ,  $(t_0, x_0)$  – начальная позиция.

Стратегию  $i$ -го игрока  $U_i$  будем отождествлять с  $n$ -вектор-функцией  $u_i(t, x)$  (обозначим  $U_i \div u_i(t, x)$ ), тогда множество стратегий  $i$ -го игрока

$$U_i = \{U_i \div u_i(t, x), u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]\};$$

таким образом, выбор своей стратегии  $i$ -м игроком сводится к выбору  $n \times n$ -матрицы  $Q_i(t)$  ( $i=1,2$ ).

Игра с течением времени разворачивается следующим образом. Игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают каждый свою стратегию  $U_i \div Q_i(t)x$ ; в результате образуется ситуация игры  $U = (U_1, U_2) \in U = U_1 \times U_2$ . Затем находят решение  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ , системы (1) при  $u_i = Q_i(t)x$  ( $i=1,2$ ), т. е.

$$\dot{x}(t) = [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t)]x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Система линейных однородных дифференциальных уравнений (2) с непрерывными на  $[t_0, \vartheta]$  коэффициентами имеет непрерывное продолжимое на  $[t_0, \vartheta]$  решение  $x(t)$ . Потом игроки строят реализации выбранных ими стратегий  $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$  ( $i=1,2$ ) и соответствующую реализацию ситуации  $u[t] = (u_1[t], u_2[t])$ , которую образуют два непрерывных на  $[t_0, \vartheta]$  вектора  $(u_1[t], u_2[t])$ .

Функцию выигрыша  $i$ -го игрока тогда образует определенный на непрерывных тройках  $(x(t), u_1[t], u_2[t] \mid t \in [t_0, \vartheta])$  квадратный функционал

$$J_i(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t])dt \quad (i=1,2), \quad (3)$$

где, не уменьшая общности, считаем постоянные  $n \times n$ -матрицы  $C_i, D_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) симметричными; штрих сверху означает операцию транспонирования ( $x'$  –  $n$ -вектор-строка), значение функционала (3) называется выигрышем  $i$ -го игрока. Полагаем, что игроки заинтересованы выбрать в игре  $\Gamma$  свою стратегию таким образом, чтобы увеличить свой выигрыш.

Цель настоящей статьи – выявить достаточно общий класс линейно-квадратичных дифференциальных позиционных игр двух лиц в нормальной форме вида  $\Gamma$ , в котором отсутствует равновесие по Нэшу, но одновременно существует равновесие угроз и контругроз.

Прежде всего приведем для игры  $\Gamma$  четыре базовых определения: максимума по Парето, равновесия по Нэшу, активного равновесия и равновесия угроз и контругроз.

Для этого игре  $\Gamma$  поставим в соответствие двухкритериальную динамическую задачу

$$\Gamma_v = \langle \Sigma, U, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \rangle.$$

Здесь динамическая система  $\Sigma$  совпадает с (1), множество альтернатив  $U$  совпадает с множеством ситуаций  $\{U\}$  игры  $\Gamma$ , два критерия  $J_i(U, t_0, x_0)$  ( $i=1,2$ ) определены в (3).

Цель ЛПР (лица, принимающего решения) в задаче  $\Gamma_v$  – выбор такой альтернативы (ситуации)  $U^P \in U$ , при которой оба векторных критерия (3) принимали бы одновременно возможно большие значения. Общепринятым здесь является понятие максимума по Парето.

**Определение 1.1.** Альтернатива (ситуация)  $U^P = (U_1^P, U_2^P) \in U$  называется максимальной по Парето в  $\Gamma_v$ , если при  $\forall U \in U$  и  $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times R^n$ ,  $x_0 \neq 0_n$  несовместна система неравенств

$$J_i(U, t_0, x_0) \geq J_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i=1,2),$$

из которых хотя бы одно строгое, при этом  $J^P = (J_1(U^P, t_0, x_0), J_2(U^P, t_0, x_0))$  называется *максимумом по Парето*.

Отметим здесь два обстоятельства, которые сразу следуют из определения 1.1.

**Свойство 1.1.** Справедлива импликация:

$$J_i(\hat{U}, t_0, x_0) > J_i(U^P, t_0, x_0) \Rightarrow J_j(\hat{U}, t_0, x_0) < J_j(U^P, t_0, x_0) \quad (i, j = 1, 2; j \neq i).$$

**Свойство 1.2.** Если для  $\alpha = \text{const} > 0$

$$\max_{U \in U} \{J_1(U, t_0, x_0) + \alpha J_2(U, t_0, x_0)\} = \text{Idem}\{U \rightarrow U^P\}, \quad (4)$$

то ситуация  $U^P$  – максимальна по Парето в  $\Gamma_v$ ; напомним, что  $\text{Idem}\{U \rightarrow U^P\}$  означает выражение в фигурных скобках из (4), где  $U$  заменено на  $U^P$ .

Перейдем к понятиям равновесных решений игры  $\Gamma$ , где  $J = (J_1, J_2)$ .

**Определение 1.2.** Пара  $(U^e, J^e = J(U^e, t_0, x_0)) \in U \times R^2$  называется равновесием по Нэшу игры  $\Gamma$ , если

$$\begin{cases} \max_{U_1 \in U_1} J_1(U_1, U_2^e, t_0, x_0) = J_1(U^e = (U_1^e, U_2^e), t_0, x_0) = J_1^e, \\ \max_{U_2 \in U_2} J_2(U_1^e, U_2, t_0, x_0) = J_2(U^e = (U_1^e, U_2^e), t_0, x_0) = J_2^e \end{cases}$$

при любых  $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times R^n$ ,  $x_0 \neq 0_n$  ( $0_n$  – нулевой  $n$ -вектор).

Более громоздко выглядит понятие равновесия угроз и контругроз.

Пусть  $U = (U_1, U_2)$  некоторая фиксированная ситуация игры  $\Gamma$ . Будем считать, что у первого игрока имеется *угроза на ситуацию  $U$* , если у него существует стратегия  $U_1^t \in U_1$ , что

$$J_1(U_1^t, U_2, t_0, x_0) > J_1(U_1, U_2, t_0, x_0). \quad (5)$$

Наличие угрозы не означает ее обязательное применение, а лишь «*animus denunciandi*»<sup>1</sup>. Применение угрозы «выгодно» первому игроку, так как при этом, согласно (5), его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации  $U$ .

В ответ на угрозу первого игрока  $U_1^t$  у второго имеется «*неполная*» контругроза, если у него существует стратегия  $U_2^c \in U_2$ , при которой

$$J_1(U_1^t, U_2^c, t_0, x_0) \leq J_1(U_1, U_2, t_0, x_0), \quad (6)$$

и у второго имеется «*полная*» контругроза, если существует такая стратегия  $U_2^c \in U_2$ , что одновременно с неравенством (6) выполняется

$$J_2(U_1^t, U_2^c, t_0, x_0) > J_2(U_1, U_2, t_0, x_0). \quad (7)$$

При наличии «неполной» контругрозы второй игрок за счет выбора своей стратегии  $U_2^c$  приводит, согласно (6), выигрыш первого (угрожающего) игрока к значению, не превосходящему его первоначальный выигрыш в ситуации  $U$  (но может и уменьшиться!). Все происходит как по девизу Наполеона I «*Order, contre-order, disorder*»<sup>2</sup>. Таким образом, наличие «неполной» контругрозы «сводит к нулю» применение угрозы. В дополнение к этому, «полная» контругроза «толкает» второго к применению  $U^c$ , ибо в (полученной в результате угрозы и контругрозы) ситуации  $(U_1^t, U_2^c)$  выигрыш второго увеличится по сравнению с выигрышем в ситуации  $(U_1^t, U_2)$ , сложившейся при реализации угрозы.

Аналогично определяется угроза второго игрока на ситуацию  $U$  и ответная контругроза («полная» или «неполная») первого.

Естественно, если в ответ на каждую угрозу на  $U$  любого игрока у другого имеется контругроза («полная» или «неполная»), то игроку не имеет смысла применять угрозу, ибо в результате

<sup>1</sup> Намерение пригрозить (лат.)

<sup>2</sup> Распоряжение – контрраспоряжение – беспорядок (фр.)

реакции (контругрозы) на эту угрозу другого игрока его выигрыш не увеличится (но может и уменьшиться!). Этим еще раз подтверждается знаменитый закон римского права «*Aequum est neminem cum alterius detrimento et injuria fieri locupletiores*»<sup>1</sup>.

**Определение 1.3.** Ситуация  $U^P = (U_1^P, U_2^P) \in U$  называется *активно равновесной* в игре  $\Gamma$ , если при любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times R^n$ ,  $x_0 \neq 0_n$

- 1)  $U^P$  максимальна по Парето в  $\Gamma_v$ ,
- 2) в ответ на каждую угрозу  $U_i^t \in U_i$  любого игрока у оставшегося имеется неполная контругроза.

**Определение 1.4.** Пара  $(U^P, J^P) \in U \times R^2$  называется *равновесием угроз и контругроз* в игре  $\Gamma$ , если при любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times R^n$ ,  $x_0 \neq 0_n$

- 1)  $U^P$  – максимальна по Парето в игре  $\Gamma$ ,
- 2) в ответ на каждую угрозу любого игрока у оставшегося имеется полная контругроза, здесь  $J^P = (J_1^P, J_2^P)$ ,  $J_i^P = J(U^P, t_0, x_0)$  ( $i = 1, 2$ ).

Из определений 1.3 и 1.4 следует, что любое равновесие угроз и контругроз является одновременно активным равновесием, а равновесие по Нэшу (в силу определения 1.2) не допускает угроз, причем только «самые хорошие» из них (одновременно максимальные по Парето) будут активно равновесными.

Как уже упоминалось в аннотации, приведенные здесь понятия угроз и контругроз основываются на известной [1] в классической теории игр концепции угроз и контругроз. На ее основе в [1, с. 109] определяются устойчивые коалиционные структуры, впервые, по-видимому, рассмотренные для дифференциальных коалиционных игр в [2]. Концепция «угроз и контругроз» для дифференциальных игр введена Э.М. Вайсбордом в 1974 г. в статье [3], развита В.И. Жуковским в [4, 5]. Теоретическим аспектам посвящены работы Вилкаса [6, 7]. Свой способ классификации решений бескоалиционной игры, включающий как составную часть равновесие угроз и контругроз, предложил Э.Р. Смольяков [8] в 1983 г., им же был введен термин «активное равновесие»; развитие этого направления в [9, 10]. Понятие активного равновесия для позиционных, дифференциальных, бескоалиционных игр активно использовалось в [11]. Способ доказательства существования активной равновесности был предложен первым автором настоящей статьи в [11] и затем успешно применен при установлении факта существования такого решения в дифференциальных позиционных играх, описываемых уравнениями с частными производными [12, 13], стохастическими [14], в банаховом пространстве [15], уравнениями с постоянным запаздыванием [16], при использовании программных стратегий [9].

Активно равновесным ситуациям и равновесиям угроз и контругроз присущи все «положительные» свойства ситуации равновесия по Нэшу [17, с. 49]:

- во-первых, они устойчивы к отклонению отдельного игрока;
- во-вторых, удовлетворяют свойству индивидуальной рациональности;
- в-третьих, совпадают с седловой точкой в случае антагонистической игры.

Одновременно с тем эти неуплучшаемые равновесия свободны от следующих недостатков [17, с. 58]:

- существуют в ряде случаев, когда равновесие по Нэшу отсутствует (например, как в настоящей статье);
- в отличие от равновесия по Нэшу неуплучшаемы и внутренне устойчивы;
- наличие в игре равновесия по Нэшу влечет существование некоторых видов неуплучшаемых равновесий, выигрыши всех игроков при которых не меньше, чем при равновесии по Нэшу;
- наконец, лишь «самые хорошие» ситуации равновесия по Нэшу (которые одновременно максимальны по Парето) являются равновесиями угроз и контругроз. Однако лишь частные виды игр обладают такими «самыми хорошими» решениями.

Заметим, что указанные свойства имеют место и для позиционных дифференциальных бескоалиционных игр, а в [17] использована математическая формализация стратегий игроков и порожденных ими движений динамической системы, предложенная Н.Н. Красовским в [18].

<sup>1</sup> Справедливость требует, чтобы никто не обогащался незаконно и в ущерб другому лицу (*лат.*)



## 2. Максимальные по Парето ситуации и выигрыши

Далее  $D < 0$  ( $> 0$ ) означает, что квадратичная форма  $x'Dx$  определенно отрицательна (соответственно, положительна).

Прежде всего приведем вспомогательное утверждение (лемму 2.1)

Рассмотрим двухкритериальную статическую задачу

$$\Gamma_2^S = \left\langle X = R^{2n}, \left\{ f_i(u) = u_1' D_{i1} u_1 + u_2' D_{i2} u_2 \right\}_{i=1,2} \right\rangle,$$

в которой ЛППР (лицо, принимающее решение  $u = (u_1, u_2) \in R^{2n}$ ) выбирает альтернативу (ситуацию)  $u$  с целью достичь одновременно возможно больших значений обеих компонент векторного критерия  $f(u) = (f_1(u), f_2(u))$ . Аналогом определения 1.1 здесь будет:

альтернатива  $u^P$  максимальна по Парето в  $\Gamma_2^S$ , если при  $\forall u \in R^{2n}$  несовместна система неравенств  $f_i(u) \geq f_i(u^P)$  ( $i=1,2$ ), из которых хотя бы одно строгое.

Ниже используем аналог свойства 1.2.

**Лемма 2.1.** Если в задаче  $\Gamma$  симметричные матрицы  $D_{ij}$ ,  $C_i$  и числа  $\Lambda_{ii}$ ,  $\lambda_{ij}$  ( $i, j=1,2; i \neq j$ ) такие, что

$$\begin{aligned} D_{ii} > 0 \quad (i=1,2), \quad D_{12} < 0, \quad D_{21} < 0, \\ \Lambda_{11} \Lambda_{22} < \lambda_{12} \lambda_{21}, \end{aligned} \quad (8)$$

то существует  $\alpha = \text{const} > 0$ , при котором квадратичная форма

$$f(u, \alpha) = f_1(u) + \alpha f_2(u) = u_1' D_1(\alpha) u_1 + u_2' D_2(\alpha) u_2$$

становится определенно отрицательной; здесь  $D_1(\alpha) = D_{11} + \alpha D_{21}$ ,  $D_2(\alpha) = D_{12} + \alpha D_{22}$ , кроме того  $\Lambda_{ii}$  – наибольший корень характеристического уравнения  $\Delta(\Lambda) = \det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$  ( $i=1,2$ );  $-\lambda_{ij}$  ( $i \neq j$ ) так же наибольший (по абсолютной величине наименьший) корень  $\delta(\lambda) = \det \| D_{ij} - \lambda E_n \| = 0$ ,  $E_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица.

**Доказательство.** В силу симметричности всех четырех используемых в  $\Gamma_2^S$  матриц  $D_{ii}$ ,  $D_{ij}$  ( $i, j=1,2; i \neq j$ ) корни обоих характеристических уравнений  $\Delta(\Lambda) = 0$  и  $\delta(\lambda) = 0$  вещественны, причем корни  $\Delta(\Lambda) = 0$  положительны, а  $\delta(\lambda) = 0$  – отрицательны. Обозначим наибольший из  $n$  корней уравнения  $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$  через  $\Lambda_{ii}$ , а наибольший из корней уравнения  $\delta(\lambda) = 0$  через  $-\lambda_{ij}$ , тогда из [19, с. 281] следует, что при  $\forall u_i \in R^n$  будет

$$\begin{aligned} u_i' D_{ii} u_i &\leq \Lambda_{ii} u_i' u_i \quad (i=1,2), \\ u_2' D_{12} u_2 &\leq -\lambda_{12} u_2' u_2, \quad u_1' D_{21} u_1 \leq -\lambda_{21} u_1' u_1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(u, \alpha) = f_1(u) + \alpha f_2(u) &= u_1' D_1(\alpha) u_1 + u_2' D_2(\alpha) u_2 = u_1' [D_{11} + \alpha D_{21}] u_1 + u_2' [D_{12} + \alpha D_{22}] u_2 \leq \\ &(\Lambda_{11} - \alpha \lambda_{21}) u_1' u_1 + (-\lambda_{12} + \alpha \Lambda_{22}) u_2' u_2. \end{aligned}$$

Поэтому  $f(u, \alpha) \leq 0 \quad \forall u \in R^{2n}$ , если

$$\Lambda_{11} - \alpha \lambda_{21} < 0, \quad -\lambda_{12} + \alpha \Lambda_{22} < 0.$$

Таким образом, при

$$\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} < \alpha < \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \Rightarrow f(u, \alpha) \leq 0 \quad \forall u = (u_1, u_2) \in R^{2n}. \quad (9)$$

Заметим, что, во-первых, (9) имеет место, если  $\Lambda_{11} \Lambda_{22} < \lambda_{21} \lambda_{12}$ , во-вторых, можно считать  $\alpha = \frac{1}{2} [\Lambda_{11}/\lambda_{21} + \lambda_{12}/\Lambda_{22}]$ .

**Лемма 2.2.** Решениям  $x(t)$  системы  $\dot{x} = K(t)x$ ,  $x(t_0) = x_0$ , где  $K(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]$  присуще свойство

$$x_0 \neq 0_n \Rightarrow x(t) \neq 0_n \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Здесь  $0_n$  – ноль-вектор из  $R^n$ .

**Доказательство** от противного: пусть  $\exists t_1 \in [t_0, \vartheta]$  такой, что  $x(t_1) = 0_n$ . Тогда бы в момент  $t_1$  через позицию  $(t_1, 0_n)$  «проходило» бы два решения системы  $\dot{x} = K(t)x$ : именно тривиальное  $x^{(1)}(t) = 0_n$  и нетривиальное  $x^{(2)}(t_1)$ , «порожденное» ненулевым начальным условием  $x_0 \neq 0_n$ , что противоречит теореме единственности решения линейного дифференциального уравнения.

**Утверждение 2.1.** Если в дифференциальной игре  $\Gamma$

$$D_{11} > 0, D_{22} > 0, D_{12} < 0, D_{21} < 0, C_i < 0 \quad (i = 1, 2), \quad \Lambda_{11} \Lambda_{22} < \lambda_{12} \lambda_{21}, \quad (10)$$

то максимальная по Парето ситуация  $U^P = (U_1^P, U_2^P)$  в двухкритериальной задаче  $\Gamma_v$  будет

$$U^P = (U_1^P, U_2^P) \div (u_1^P(t, x), u_2(t, x)) = u^P(t, x) = (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x) = \\ (-D_1^{-1}(\alpha)\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}(\alpha)\Theta^P(t)x), \quad (11)$$

где симметричная непрерывная на  $[0, \vartheta]$   $n \times n$ -матрица:

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C^{-1}(\alpha) + \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) [D_1^{-1}(\alpha) + D_2^{-1}(\alpha)] [X^{-1}(\tau)]' d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t) \quad (12)$$

$$D_1(\alpha) = D_{11} + \alpha D_{21}, \quad D_2(\alpha) = D_{12} + \alpha D_{22}, \quad C(\alpha) = C_1 + \alpha C_2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right]; \quad (13)$$

$\Lambda_{ii}$  – наибольший корень характеристического уравнения  $\det[D_{ii} - \lambda E_n] = 0 \quad (i = 1, 2)\vartheta$ ,

$-\lambda_{ij} = I_1(U_1^t, U_2^P, t_0, x_0) - V_1(t_0, x_0)$  – наибольший корень характеристического уравнения  $\det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j)$ ;

$E_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица,  $X(t)$  – фундаментальная матрица решений векторного уравнения  $\dot{x} = A(t)x, \quad X(\vartheta) = E_n$ .

**Доказательство.** Найдем максимальную по Парето ситуацию  $U^P$ , применяя лемму 2.1 (конкретно, используя (4)) и метод динамического программирования (МДП) из [20, с. 112]. Сам МДП, с учетом свойства 1.2, здесь сведется к осуществлению *двух этапов*. Если для задачи  $\Gamma_v$  удалось найти число  $\alpha > 0$ , непрерывно дифференцируемую скалярную функцию  $V(t, x)$ , а также две  $n$ -вектор-функции  $u_i(t, x, V)$  ( $i = 1, 2$ ) такие, что

$$V(\vartheta, x) = x' C x \quad \forall x \in R^n \quad (C = C_1 + \alpha C_2). \quad (14)$$

**ЭТАП I.**

С помощью скалярной функции

$$W(t, x, u_1, u_2, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right]' (A(t)x + u_1 + u_2) + u_1' D_1(\alpha) u_1 + u_2' D_2(\alpha) u_2$$

найти две  $n$ -вектор функции  $u_i(t, x, V)$  ( $i = 1, 2$ ), исходя из  $\left( \frac{\partial V}{\partial x} = \text{grad}_x V \right)$

$$\max_{u_1, u_2} W(t, x, u_1, u_2, V) = \text{Idem}\{u_i \rightarrow u_i(t, x, V)\}, \quad (15)$$

при любых  $t \in [0, \vartheta], \quad x \in R^n, \quad V \in R$ . Достаточные условия существования  $u(t, x, V)$  в (15) сводятся к

$$\left( \frac{\partial W}{\partial u_i} \right)_{u(t, x, V)} = \frac{\partial V}{\partial x} + 2D_i(\alpha) u_i(t, x, V) = 0_n \quad (i = 1, 2), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2} = 2D_i(\alpha) < 0 \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

где, напомним,  $0_n$  – нулевой  $n$ -вектор-столбец из  $R^n$ , а  $D_i(\alpha) < 0$  в силу леммы 2.1.

Из (16) получаем

$$u_i(t, x, V) = -\frac{1}{2} D_i^{-1}(\alpha) \frac{\partial V}{\partial x} \quad (i=1, 2), \quad (18)$$

и тогда

$$W(t, x, u(t, x, V), V) = W[t, x, V] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right]' A(t)x - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)' [D_1^{-1}(\alpha) + D_2^{-1}(\alpha)] \frac{\partial V}{\partial x}.$$

ЭТАП II. Найдем решение вида  $V = V^P(t, x) = x' \Theta^P x$ ,  $\Theta^P = [\Theta^P(t)]'$  дифференциального уравнения с частными производными

$$W[t, x, V] = 0$$

и граничным условием ( $C = C_1 + \alpha C_2$ ),

$$V(\vartheta, x) = x' C x \quad \forall x \in R^n,$$

т. е. для  $\forall t \in [0, \vartheta]$ ,  $\forall x \in R^n$  имеет место

$$W[t, x, V(t, x)] = x' \Theta^P(t)x = 0, \quad V(\vartheta, x) = x' C x \quad \forall x \in R^n.$$

Оба эти требования выполнены, если  $n \times n$ -матрица  $\Theta^P(t)$  удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению типа Риккати ( $0_{n \times n}$  – нулевая  $n \times n$ -матрица)

$$\dot{\Theta}^P(t) + \Theta^P(t)A(t) + A'(t)\Theta^P(t) - \Theta^P(t)[D_1^{-1}(\alpha) + D_2^{-1}(\alpha)]\Theta^P(t) = 0_{n \times n},$$

$$\Theta^P(\vartheta) = C = C_1 + \alpha C_2.$$

Решение  $\Theta^P(t)$  полученного матричного уравнения типа Риккати имеет [20, с. 65] вид (12), здесь учтена импликация  $C_i < 0 \quad (i=1, 2) \Rightarrow C_1 + \alpha C_2 < 0$ . Наконец, из (18) и  $V(t, x) = x' \Theta^P(t)x \Rightarrow \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 2\Theta^P(t)x$  приходим к справедливости (11). Таким образом, максимальная по Парето ситуация  $U^P$  в задаче  $\Gamma_v$  имеет вид (11)–(13).

Перейдем к построению максимальных по Парето выигрышей  $J^P = (J_1(U^P, t_0, x_0), J_2(U^P, t_0, x_0)) = (J_1^P, J_2^P)$  опять-таки с помощью идей МДП.

**Утверждение 2.2.** Пусть выполнены требования (10) (из утверждения 2.1) и для дифференциальной игры  $\Gamma$  удалось найти две скалярные непрерывно дифференцируемые функции вида  $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t)x \quad (i=1, 2)$  и такие, что

$$1) V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \quad \forall x \in R^n; \quad (19)$$

2) система из двух уравнений с частными производными

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x} \right)' \left( N(t)x + x' \Theta^P(t) M_i(t) \Theta^P(t)x \right) = 0, \quad V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \quad \forall x \in R^n \quad (i=1, 2), \quad (20)$$

имеет решение вида  $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t)x$ ,  $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t) \quad (i=1, 2)$ .

Тогда при любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times R^n$ ,  $x_0 \neq 0_n$  имеет место

$$J_i^P = J_i(U^P, t_0, x_0) = x_0' \Theta_i^P(t_0) x_0 \quad (i=1, 2).$$

В (20) непрерывные  $n \times n$ -матрицы

$$N(t) = A(t) - (D_1^{-1}(\alpha) + D_2^{-1}(\alpha)) \Theta^P(t),$$

$$M_i(t) = \Theta^P(t) [D_1^{-1}(\alpha) D_{i1} D_1^{-1}(\alpha) + D_2^{-1}(\alpha) D_{i2} D_2^{-1}(\alpha)] \Theta^P(t) \quad (i=1, 2), \quad (21)$$

$n \times n$ -матрицы  $D_i(\alpha)$ ,  $\Theta^P(t)$  приведены в (12), (13), а симметричная  $n \times n$ -матрица

$$\Theta_i(t) = [Y^{-1}(t)]' \left\{ C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau) \Theta^P(\tau) M_i(\tau) \Theta^P(\tau) Y(\tau) d\tau \right\} Y^{-1}(t), \quad (i=1, 2). \quad (22)$$

Наконец,  $Y(t)$  – фундаментальная матрица решения однородной системы  $\dot{y} = N_i(t)y$ ,  $Y(\vartheta) = E_n$ .

**Доказательство.** Составим две скалярные функции

$$W_i[t, x, V_i] = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x} \right)' (N(t)x + [u_1^P(t, x)]' D_{i1} u_1^P(t, x) + [u_2^P(t, x)]' D_{i2} u_2^P(t, x)) a \quad (i=1, 2), \quad (23)$$

причем  $u_i^P(t, x)$  –  $n$ -вектор функции, определенные в (11).

Ищем решение  $V_i(t, x)$  ( $i=1, 2$ ) системы из двух уравнений с частными производными

$$W_i[t, x, V_i] = 0, \quad V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \quad \forall x \in R^n \quad (i=1, 2) \quad (24)$$

в виде квадратичной формы  $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t) x$ ,  $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t)$  ( $i=1, 2$ ).

Установим два факта.

*Во-первых.* Решению системы (23), (24) присуще свойство

$$V_i(t_0, x_0) = J_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i=1, 2), \quad (25)$$

где ситуация  $U^P = (U_1^P, U_2^P)$  имеет вид (11). В самом деле, если  $U^P$  – ситуация из (11)–(13), то, согласно (23) и (24), решение  $x^P(t)$  системы  $\dot{x} = N(t)x$ ,  $x(t_0) = x_0$ , с учетом (23) и (24) при  $x = x^P(t)$  будет

$$0 = W_i[t, x^P(t), V_i(t, x^P(t))] = \frac{\partial V_i(t, x^P(t))}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_i(t, x^P(t))}{\partial x} \right)' N(t)x^P(t) + \sum_{j=1}^2 [u_j^P(t, x^P(t))] D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) = \bar{W}_i[t] \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от  $t_0$  до  $\vartheta$ , с учетом граничных условий из (24), приходим к

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{\vartheta} \bar{W}_i[t] dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_i^P(t, x^P(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^2 [u_j^P(t, x^P(t))] D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt = V_i^P(\vartheta, x^P(\vartheta)) - V_i(t_0, x_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^2 [u_j^P(t, x^P(t))] D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt = x'(\vartheta) C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^2 [u_j^P(t, x^P(t))] D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt - V_i(t_0, x_0) = \\ &= J_i(U^P, t_0, x_0) - V_i(t_0, x_0) \quad (i=1, 2). \end{aligned}$$

Откуда сразу следует справедливость равенств (25).

*Во-вторых,* установим, что решение  $V_i(t, x)$  ( $i=1, 2$ ) системы (24) имеет вид  $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t) x$ , где симметричная  $n \times n$ -матрица  $\Theta_i(t)$  представима в виде (22). В самом деле, подставив  $V_i = x' \Theta_i(t) x$  в (24), получаем справедливость (24), если только  $\Theta_i(t)$  ( $i=1, 2$ ) является решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\Theta_i + \Theta_i N + N \Theta_i + \Theta^P(t) M_i(t) \Theta^P(t) = 0_{n \times n}, \quad \Theta_i(\vartheta) = C_i \quad (i=1, 2). \quad (26)$$

Нетрудно подстановкой  $\Theta_i(t)$  из (22) убедиться, что симметричная  $n \times n$ -матрица  $\Theta_i(t)$  из (22) в самом деле является решением (26), что и завершает доказательство утверждения 2.2.

### 3. Леммы о мажорантах

Перейдем к утверждениям, которые,

– *во-первых,* позволяют сразу судить об отсутствии в дифференциальных играх вида  $\Gamma$  равновесия по Нэшу,

– *во-вторых,* реализуют для  $\Gamma$  концепцию равновесия угроз и контругроз.

Причем эти сведения получаются только на основании специальной *знакоопределенности* квадратичных форм, используемых в интегральных слагаемых функций выигрыша (3).

Не оговаривая особо, далее предполагаем выполненными ограничения (10), и поэтому существует максимальная по Парето в  $\Gamma_v$  ситуация

$$U^P = (U_1^P, U_2^P) \div u^P(t, x) = (u_1^P(t, x), u_2^P(t, x)) = (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x) = (-D_1^{-1} \Theta^P(t)x, -D_2^{-1} \Theta^P(t)x).$$

**Лемма 3.1.** Пусть в (3) при  $i=1$  матрица  $D_{11} > 0$ , тогда для максимальной по Парето в  $\Gamma_\nu$  ситуации  $U^P$  существует постоянная  $\beta^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$  такая, что при  $\forall \beta \geq \beta^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$  и стратегии первого игрока  $U_1^i \div \beta x$  будет

$$I_1(U_1^i, U_2^P, t_0, x_0) > I_1(U_1^P, U_2^P, t_0, x_0) \quad (27)$$

для любых начальных позиций  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times [R^n \setminus \{0_n\}]$ .

**Доказательство.** В утверждении 2.2 установлено существование функции Беллмана  $V_1(t, x) = x' \Theta_1(t) x$ , для которой

$$I_1(U^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0) = x_0' \Theta_1(t_0) x_0, \quad (28)$$

где непрерывная на  $[0, \vartheta]$  матрица  $\Theta_1(t)$  имеет вид (22) ( $i=1$ ).

Рассмотрим теперь стратегию первого игрока  $U_1^i \div u_1^i(t, x) = \beta x$ , а величину числового параметра  $\beta > 0$  определим ниже. Вследствие симметричности матрицы  $D_{11}$  и дополнительно  $D_{11} > 0$  имеет место

$$u_1' D_{11} u_1 \geq \lambda_1 \|u_1\|^2 = \lambda_1 u_1' u_1 \quad \forall u_1 \in R^n, \quad (29)$$

где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма и  $\lambda_1 > 0$  – наименьший корень характеристического уравнения  $\det [D_{11} - \lambda E_n] = 0$  [21, с. 89].

Далее будем использовать  $n \times n$ -матрицу  $\Theta^P(t)$ ,  $t \in [0, \vartheta]$  из (12) и (13), а из (11) стратегию  $U_2^P \div Q_2^P(t)x$  второго игрока и неравенство (29).

Рассмотрим теперь скалярную функцию

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1[t, x] &= W_1(t, x, u_1^i(t, x) = \beta x, u_2^P(t, x) = Q_2^P(t)x, V_1(t, x) = x' \Theta_1(t)x) = \\ &= \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x} \right]' [A(t)x + u_1^i(t, x) + u_2^P(t, x)] + \\ &\quad + [u_1^i(t, x)]' D_{11} u_1^i(t, x) + [u_2^P(t, x)]' D_{12} u_2^P(t, x) \geq \\ &= x' \frac{d\Theta_1(t)}{dt} x + 2x' \Theta_1(t) [A(t) + \beta E_n + Q_2^P(t)] x + x' \lambda_1 \beta^2 E_n x + x' [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) x = \\ &= x' \left\{ \frac{d\Theta_1(t)}{dt} + \Theta_1(t) [A(t) + \beta E_n + Q_2^P(t)] + [A'(t) + \beta E_n + [Q_2^P(t)]'] \Theta_1(t) + \lambda \beta^2 E_n + \right. \\ &\quad \left. + [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) \right\} x = x' M(t, \beta) x. \end{aligned}$$

Стоящая здесь в фигурных скобках  $n \times n$ -матрица  $M(t, \beta)$  симметрична и имеет следующий вид (с учетом  $e_n' e_n = n$ )

$$M_1(t, \beta) = \lambda_1 \beta^2 E_n + 2\beta \Theta_1(t) + K(t),$$

здесь  $n \times n$ -матрица

$$K(t) = \Theta_1(t) + 2\Theta_1(t) [A(t) + Q_2^P(t)] + [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t).$$

Элементы матрицы  $M(t, \beta)$  непрерывны по  $t \in [0, \vartheta]$  и, следовательно, равномерно ограничены на компакте  $[0, \vartheta]$ , множитель  $\beta^2$  входит только в диагональные элементы матрицы  $M(t, \beta)$ ; напомним, что  $\lambda_1 > 0$  является наименьшим корнем характеристического уравнения  $\det [D_{11} - \lambda E_n] = 0$ , а  $E_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица. Поэтому постоянную  $\beta = \beta^{(1)}(U_1^P, t_0, x_0) > 0$  можно выбрать настолько большой, чтобы все ведущие миноры матрицы  $M(t, \beta)$  стали положительными  $\forall t \in [0, \vartheta]$  и  $\forall \beta \geq \beta^{(1)}(U_1^P)$ . Согласно критерию Сильвестра и лемме 2.2 [5, с. 88] квадратичная форма  $x' M(t, \beta) x$  будет определено положительной для всех  $t \in [0, \vartheta]$  и постоянных

$\beta \geq \beta^{(1)}(U_1^P, t_0, x_0)$  (так как знак  $x'M(t, \beta)x$  определяется знаком квадратичной формы  $\beta^2 \lambda_1 n x'x$ ).

Фиксируем постоянную  $\beta^{(1)} \geq \beta^{(1)}(U_1^P, t_0, x_0)$  и тогда

$$\tilde{W}_1[t, x] = x'M_1(t, \beta^{(1)})x > 0 \quad \forall x \in [0, \vartheta], \quad \forall x \in R^n \setminus \{0_n\}.$$

Обозначим через  $\tilde{x}(t)$  решение (при  $t \in [0, \vartheta]$ ) векторного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + \beta^{(1)}x + Q_2^P(t)x, \quad x_0 = x(t_0).$$

Так как  $[x_0 \neq 0_n] \Rightarrow [\tilde{x}(t) \neq 0_n \quad \forall t \in [t_0, \vartheta]]$ , то, согласно (29), будет

$$\tilde{W}[t, \tilde{x}(t)] > 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Отсюда, интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от  $t_0$  до  $\vartheta$  и учитывая граничное условие  $\Theta_1(\vartheta) = C_i$ ,  $u_1^t[t] = \beta^{(1)}x(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 < \int_{t_0}^{\vartheta} \tilde{W}_1[t, \tilde{x}(t)] dt &= \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x} \right]' [A(t)x + \beta^{(1)}E_n x + Q_2^P(t)x] \right\}_{x=\tilde{x}(t)} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ x' \beta^{(1)} D_{11} \beta^{(1)} x + [Q_2^P(t)x]' D_{12} Q_2^P(t)x \right\}_{x=\tilde{x}(t)} dt = \\ &= \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V_1(t, \tilde{x}(t))}{\partial t} \right\} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ [u_1^t[t]]' D_{11} u_1^t[t] + [u_2^P[t]]' D_{12} u_2^P[t] \right\} dt = \\ &= \tilde{x}'(\vartheta) C_1 \tilde{x}(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ [u_1^t[t]]' D_{11} u_1^t[t] + [u_2^P[t]]' D_{12} u_2^P[t] \right\} dt - V_1(t_0, x_0) = \\ &= I_1(U_1^t, U_2^P, t_0, x_0) - V_1(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Отсюда и из  $I_1(U_1^P, U_2^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0)$  сразу следует справедливость леммы 3.1.

**Замечание 3.1.** Рассмотрим внутреннюю оптимизационную задачу в игре  $\Gamma$ : найти  $\max_{U_1 \in U_1} I_1(U_1, U_2^P, t_0, x_0)$  при ограничении (1), фиксированной стратегии  $U_2^P \in U_2$  второго игрока и

любых  $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times [R^n \setminus \{0_n\}]$ . Фактически лемма 3.1 утверждает, что при  $D_{11} > 0$  и  $x_0 \neq 0_n$  эта задача максимизации не имеет решения. В самом деле, какую бы стратегию  $U_1 \in U_1$  первый игрок не выбрал, всегда существует стратегия  $\tilde{U}_1 \in U_1$  этого игрока такая, что

$$I_1(\tilde{U}_1, U_2^P) > I_1(U_1, U_2^P) \quad \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times [R^n \setminus \{0_n\}].$$

Такой результат позволяет сразу «отметать» (при выборе решения игры  $\Gamma$ ) те концепции принятия равновесных решений игровых задач вида  $\Gamma$ , в условиях которых фигурирует максимизация функции выигрыша первого игрока (например, не применять при  $D_{11} > 0$  концепцию равновесия по Нэшу в качестве принципа выбора решения в игре  $\Gamma$ ).

Таким образом, в дифференциальной игре  $\Gamma$  ситуация равновесия по Нэшу  $U^e \in U$  не существует. Одновременно с тем, стратегия первого игрока  $U_1^t \div \beta x$ ,  $\forall \beta \geq \beta^{(1)} = \beta^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$  реализует, согласно (5), угрозу первого игрока на максимальную по Парето ситуацию  $U^P$ . В следующих леммах считаем начальную позицию  $(t_0, x_0)$  «замороженной» и совпадающей с той, которая фигурирует в лемме 3.1, а в «угрожающей» стратегии первого игрока  $U_1^t \div \beta x$  также считаем скалярную постоянную  $\beta = \beta^{(1)}$ . Напомним, что, не оговаривая особо, считаем выполненными ограничения (10).

**Лемма 3.2.** Справедлива импликация

$$D_{12} < 0 \Rightarrow \exists \beta^{(2)} = \beta^{(2)}(U^P, U_1^t) : \forall \beta \geq \beta^{(2)}, \quad (30)$$

$$I_1(U_1^t, U_2^\beta, t_0, x_0) < I_1(U^P, t_0, x_0), \quad (31)$$

т. е. стратегия  $U_2^\beta \div \beta x$  реализует в игре  $\Gamma$  неполную контругрозу на ситуацию  $U^P \in U$ .

**Доказательство** проведем, как и в лемме 3.1, в два этапа. На первом построим функцию Беллмана  $\bar{V}_1(t, x) = x' \Theta_1(t)x$ , такую, что

$$I_1(U_1^t, U_2^P, t_0, x_0) = \bar{V}_1(t_0, x_0, \beta), \quad (32)$$

на втором установим, что  $\exists \beta^{(2)} = \beta^{(2)}(U_1^t, U_2^P) = \text{const}$  такая, что имеет место импликация (30), (31).

ЭТАП I. Рассмотрим скалярную функцию («диктуемую» МДП)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1[t, x, \bar{V}_1] &= W_1(t, x, u_1^t(t, x)) = \beta^{(1)} x, u_2^P(t, x) = -D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t)x, \bar{V}_1 = \\ &= \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} \right]' [A(t) + \beta^{(1)} E_n - D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t)]x + [u_1^t(t, x)]' D_{11} u_1^t(t, x) + \\ &+ [u_2^P(t, x)]' D_{12} u_2^P(t, x) = \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} \right]' [A(t) + \beta^{(1)} E_n - D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t)]x + \\ &+ x' [(\beta^{(1)})^2 D_{11} + \Theta^P(t) D_2^{-1}(\alpha) D_{12} D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t)]' x. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда  $\tilde{W}_1[t, x, V_1(t, x)] = x' \Theta_1^y(t)x = 0$ , если  $\Theta_1^y(t)$  будет решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \Theta_1^y + \Theta_1^y [A(t) + \beta^{(1)} E_n - D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t)] + [A'(t) + \beta^{(1)} E_n - \Theta^P(t) D_2^{-1}(\alpha)] \Theta_1^y + \\ + (\beta^{(1)})^2 D_{11} + \Theta^P(t) D_2^{-1}(\alpha) D_{12} D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t) = 0_{n \times n}, \quad \Theta_1^y(t_0) = C_1. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения  $\Theta_1^y(t)$  существует, единственно и продолжимо на  $[t_0, \vartheta]$ . Пусть  $n$ -вектор  $x^y(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$  является решением однородного линейного дифференциального векторного уравнения

$$\dot{x} = [A(t) + \beta^{(1)} E_n - D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t)]x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Тогда с учетом (33)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1[t, x^y(t), \bar{V}_1(t, x^y(t))] &= (x^y(t))' \Theta_1(t) x^y(t) = \\ &= \frac{\partial \bar{V}_1(t, x^y(t))}{\partial t} + [u_1^y(t, x^y(t))] D_{11} u_1^y(t, x^y(t)) + [u_2^P(t, x^y(t))] D_{12} u_2^P(t, x^y(t)) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от  $t_0$  до  $\vartheta$ , получаем (с учетом  $U_1^y = U_1^t$ )

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(\vartheta, x^y(\vartheta)) - \bar{V}_1(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{\vartheta} [(u_1^y[t])' D_{11} u_1^y[t] + [u_2^P[t]]' D_{12} u_2^P[t]] dt = \\ = I_1(U_1^y, U_2^P, t_0, x_0) - \bar{V}_1(t_0, x_0) = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость (32).

ЭТАП II. Здесь учтем, что из симметричности  $D_{12} < 0 \Rightarrow \exists \Lambda_{12} = \text{const} > 0$  такого, что

$$u_2 D_{12} u_2 \leq -\Lambda_{12} u_2' u_2 = -\Lambda_{12} \|u_2\|^2 \quad \forall u_2 \in R^n, \quad (34)$$

где  $-\Lambda_{12}$  наибольший корень характеристического уравнения  $\det [D_{12} - \lambda E_n] = 0$ .

С учетом (33) вернемся к скалярной функции  $\tilde{W}_1(t, x, \bar{V}_1)$ , где учтем (34) и  $\bar{V}_1(t, x) = x' \Theta_1^y(t)x$ :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1[t, x] &= \tilde{W}_1[t, x, u_1^t(t, x), u_2 = \beta x, \bar{V}_1 = x' \Theta_1^y(t)x] = \\ &= \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t} + \left( \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} \right)' (A(t) + \beta^{(1)} E_n + \beta E_n)x + (\beta^{(1)})^2 x' D_{11} x + \\ &+ \beta^2 x' D_{12} x \leq -\Lambda_{12} \beta^2 x' x + 2x' \Theta_1^y(t) [A(t) + \beta^{(1)} E_n + \beta E_n] x + \end{aligned}$$

$$+(\beta^{(1)})^2 x' D_{11} x = x' L(t, \beta) x, \quad L(t, \beta) = L'(t, \beta),$$

где  $L(t, \beta) = -\Lambda_{12} \beta^2 E_n + 2\beta \Theta_1^y(t) + \Xi_1(t)$ .

Элементы матрицы  $L(t, \beta)$  непрерывны на компакте  $[0, \vartheta]$  и, следовательно, равномерно ограничены, множитель  $\beta^2$  входит только в диагональные элементы матрицы  $L(t, \beta)$ . Тогда существует достаточно большое положительное число  $\beta^{(2)}$ , такое, чтобы при  $\beta \geq \beta^{(2)}$  все ведущие миноры матрицы  $L(t, \beta)$  нечетного порядка были отрицательны и четного – положительны. Согласно [22, с. 88], при  $\beta \geq \beta^{(2)}$  квадратичная форма  $x' L(t, \beta) x$  становится определенно отрицательной.

Воспользуемся снова уже введенной выше скалярной функцией  $\bar{W}_1[t, x]$ , где заменим  $x$  на  $x^c(t)$  – решение однородного векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x}^c = [A(t) + \beta^{(1)} + \beta] x^c, \quad x^c(t_0) = x_0.$$

В силу леммы 2.2  $x^c(t) \neq 0_n$  при  $\forall t \in [t_0, \vartheta]$ , и поэтому для  $\beta \geq \beta^{(2)}$  будет

$$\bar{W}_1[t, x^c(t)] = (x^c(t))' L(t, \beta) x^c(t) < 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Интегрируем в пределах от  $t_0$  до  $\vartheta$  обе части полученного строгого неравенства, с учетом  $u_1^t(t, x) = \beta^{(1)} x$ ,  $V_1(\vartheta, x) = x' C_1 x$ ,  $x = x^c(t)$  приходим к

$$\begin{aligned} 0 < \int_{t_0}^{\vartheta} \bar{W}_1[t, x^c(t)] dt &= \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V_1(t, x^c(t))}{\partial t} + \left[ \frac{\partial V_1(t, x^c(t))}{\partial x} \right]' [A(t) + (\beta^{(1)} + \beta) E_n] x^c(t) + \right. \\ &\quad \left. + [u_1^t(t, (x^c(t)))]' D_{11} u_1^t(t, (x^c(t))) + \beta^2 (x^c(t))' D_{12} x^c(t) \right\} dt = \\ &= \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_1(t, x^c(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} [(u_1^t[t])' D_{11} u_1^t[t] + \beta^2 (x^c(t))' D_{12} x^c(t)] dt = \\ &= V_1(\vartheta, x^c(\vartheta)) - V_1(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{\vartheta} [(u_1^t[t])' D_{11} u_1^t[t] + \beta^2 (x^c(t))' D_{12} x^c(t)] dt = \\ &= I_1(U_1^t, U_2^c, t_0, x_0) - \bar{V}_1(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Отсюда и из (32) сразу получаем справедливость (31).

Аналогично доказательству лемм 3.1 и 3.2 устанавливается справедливость следующих утверждений (леммы 3.3 и 3.4). В них, напомним, считаем «замороженными» начальную позицию  $(t_0, x_0)$ ,  $n \times n$ -непрерывную матрицу  $\Theta_1^P(t)$ , стратегию  $U_2^c \div \beta^{(2)} x$  неполной угрозы, фигурирующих в леммах 3.1 и 3.2 и выполнены ограничения (10).

**Лемма 3.3.** Имеет место импликация  $D_{22} > 0 \Rightarrow \exists \beta^{(3)} = \beta^{(3)}(U^P, U_1^t, t_0, x) = \text{const} > 0$  такая, что при  $\forall \beta \geq \beta^{(3)}$ , и стратегии  $U_2^c \div \beta x$  будет

$$I_2(U_1^t, \bar{U}_2^c, t_0, x_0) > I_2(U_1^t, U_2^P, t_0, x_0), \quad (35)$$

т. е. стратегия второго игрока  $U_2^c \div (\beta = \max\{\beta^{(2)}, \beta^{(3)}\}) x$  завершает полную контругрозу (совместно с  $U_2^c \div \beta^{(2)} x$ ) на угрозу первого на  $U^P$ .

**Доказательство** начнем с применения неполной контругрозы  $U_1^c$  первого игрока на  $U^P$ , такой, что

$$I_1(U_1^c, U_2^P, t_0, x_0) > I_1(U_1^P, U_2^P, t_0, x_0).$$

На основании максимальности по Парето  $U^P$ , а также свойства 1.1 (из раздела 1 настоящей статьи) получаем

$$I_2(U_1^y, U_2^P, t_0, x_0) < I_2(U_1^P, U_2^P, t_0, x_0).$$



Затем, также как в доказательстве леммы 3.1, во-первых, установим существование функции Беллмана  $V_2(t, x) = x' \Theta_2(t) x$ , для которой

$$I_2(U_1^y, U_2^p, t_0, x_0) = V_2(t_0, x_0) = x_0' \Theta_2(t_0) x_0, \quad (36)$$

во-вторых, с учетом  $D_{22} = D_{22}'$  и  $D_{22} > 0$  и учетом неравенства

$$u_2 D_{22} u_2 \geq \lambda_2 \|u_2\|^2 = \lambda_2 u_2' u_2 \quad \forall u_2 \in R^n,$$

где  $\lambda_2 > 0$  – наименьший корень характеристического уравнения  $\det [D_{22} - \lambda E_n] = 0$ , составим

$$\begin{aligned} \bar{W}_2[t, x] &= W_2[t, x, u_1^y(t, x) = \beta^{(1)} x, u_2 = \beta x, V_2 = x' \Theta_2(t) x] = \\ &= \frac{\partial V_2(t, x)}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} \right)' (A(t)x + u_1^y(t, x) + u_2) + [u_1^y(t, x)]' D_{21} u_1^y(t, x) + \beta^2 x' D_{22} x \geq \\ &= x' \left\{ \frac{d\Theta_2(t)}{dt} + \Theta_2(t)[A(t) + \beta^{(1)} E_n + \beta E_n] + [A'(t) + \beta^{(1)} E_n + \beta E_n] \Theta_2(t) + (\beta^{(1)})^2 D_{21} + \lambda_2 \beta^2 E_n \right\} x = \\ &= x' M_2(t, \beta) x. \end{aligned}$$

При достаточно больших  $\beta \geq \beta^{(3)}$ , квадратичная форма  $M_2(t, \beta) > 0$  (согласно критерию Сильвестра), кроме того, решение  $x(t)$  системы

$$\dot{x} = [A(t) + \beta^{(1)} E_n + \beta E_n] x, \quad x(t_0) = x_0.$$

При  $x_0 \neq 0 \Rightarrow x(t) \neq 0_n$  (лемма 2.2), поэтому  $x'(t) M_2(t, \beta) x(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta]$ . Интегрируя обе части этого неравенства, получаем

$$\begin{aligned} 0 < \int_{t_0}^{\vartheta} x'(t) M_2(t, \beta) x(t) dt &= \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_2(t, x(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ u_1^t[t] D_{21} u_1^t[t] + \bar{u}_2^c[t] D_{22} u_2^c[t] \right\} dt = \\ &= I_2(U_1^t, \bar{U}_2^c, t_0, x_0) - V_2(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Отсюда и из (36) сразу следует справедливость (35).

Аналогично лемме 3.2 доказывается

**Лемма 3.4.** Пусть  $U_2^t$  – угроза второго игрока на максимальную по Парето в  $\Gamma_v$  ситуацию  $U^P = (U_1^P, U_2^P)$ , т. е. нашлась стратегия  $U_2^t \div \beta x \quad \beta \geq \bar{\beta} > 0$  такая, что

$$I_2(U_1^t, U_2^t, t_0, x_0) > I_2(U_1^P, U_2^P, t_0, x_0)$$

(такая стратегия  $U_2^t$  существует вследствие  $D_{22} > 0$ ).

Тогда справедлива импликация

$$D_{21} < 0 \Rightarrow \exists \beta^{(4)} = \text{const} > 0 : \forall \beta = \text{const} \geq \beta^{(4)}$$

$$I_2(U_1^\beta, U_2^t, t_0, x_0) < I_2(U^P, t_0, x_0)$$

для стратегии  $U_1^\beta \div \beta x$ , т. е.  $U_1^\beta$  реализует в игре  $\Gamma$  неполную контругрозу на ситуацию  $U^P$ .

#### 4. Доказательство существования

**Теорема 4.1.** Предположим, что для игры  $\Gamma$  выполнены ограничения (10). Тогда тройка

$$\begin{aligned} (U^P, I_1^P, I_2^P) &= ((U_1^P, U_2^P), I_1(U^P, t_0, x_0), I_2(U^P, t_0, x_0)) = \\ &= ((-D_1^{-1}(\alpha) \Theta^P(t) x, -D_2^{-1}(\alpha) \Theta^P(t) x, x_0' \Theta_1(t_0) x_0, x_0' \Theta_2(t_0) x_0) \end{aligned}$$

является равновесием угроз и контругроз для дифференциальной игры

$$\Gamma = \left\langle \{1, 2\}, \sum \div (1.1), \{U_i\}_{i=1,2}, \{I_i(U_1, U_2, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \right\rangle,$$

здесь матрица

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C^{-1}(\alpha) + \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) [D_1^{-1}(\alpha) + D_2^{-1}(\alpha)] [X^{-1}(\tau)]' d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t),$$

$$D_i(\alpha) = D_{1i} + \alpha D_{2i}, \quad C(\alpha) = C_1 + \alpha C_2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right],$$

где  $\Lambda_{ii}$  – наибольший корень уравнения  $\det [D_{ii} - \lambda E_n] = 0$ ,  $-\lambda_{ij}$  – наибольший корень уравнения  $\det [D_{ij} - \lambda E_n] = 0$ ,  $X(t)$  – фундаментальная матрица системы  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $X(t^0) = E_n$  ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ), а симметричные матрицы  $\Theta_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) определены в (22).

**Доказательство.** Во-первых, из  $D_{11} > 0$  следует сразу два вывода: отсутствие в  $\Gamma$  ситуации равновесия по Нэшу и наличие угрозы  $U_1^t$  со стороны первого игрока на максимальную по Парето ситуацию  $U^P$  в двухкритериальной задаче  $\Gamma_v$  (замечание 3.1). Существование максимальной по Парето ситуации и максимальных по Парето выигрышей в  $\Gamma_v$  (а также их явный вид при этом) получены в утверждениях 2.1 и 2.2 соответственно. Условие  $D_{21} < 0$  позволяет построить неполную контругрозу  $U_2^\beta$  второго игрока в ответ на угрозу первого (лемма 3.2), а  $D_{22} > 0$  и лемма 3.3 дают возможность довести второму игроку неполную контругрозу  $U_2^c$  до полной  $\bar{U}_2^c$ . Одновременно требование  $D_{22} > 0$  влечет отсутствие ситуации равновесия по Нэшу (не существует  $\max_{U_2} I_2(U_1, U_2, t_0, x_0)$  при  $\forall U_1 \in U_1$ ) и возможность аналитически сконструировать второму игроку угрозу  $U_2^t \in U_2$  на  $U^P$  в игре  $\Gamma$ :

$$I_2(U_1^c, U_2^t, t_0, x_0) \leq I_2(U^P, t_0, x_0).$$

Условие  $D_{21} < 0$  и лемма 3.4 обеспечивают существование неполной контругрозы  $U_1^c \in U_1$  первого игрока на угрозу  $U_2^t$  второго:

$$I_2(U_1^\beta, U_2^t, t_0, x_0) < I_2(U^P, t_0, x_0).$$

Наконец, из максимальной по Парето  $U^P$  и свойства 1.1 будет следовать

$$I_1(U_1^P, U_2^t, t_0, x_0) < I_1(U^P, t_0, x_0),$$

а из  $D_{11} > 0$  и леммы 3.1. получаем существование  $\bar{U}_1^c \in U_1$ , такого, что

$$I_1(\bar{U}_1^c, U_2^t, t_0, x_0) > I_1(U_1^P, U_2^t, t_0, x_0).$$

Таким образом, мы установили, что в игре  $\Gamma$  в ответ на угрозу на максимальную по Парето ситуацию  $U^P$  любого игрока, у оставшегося имеется полная контругроза, что доказывает теорему 4.1.

### **Заключение**

Итак, в предлагаемой читателю статье установлено, что в линейно-квадратичной позиционной дифференциальной игре  $\Gamma$  при выполнении ограничений (10) не существует ситуации равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз. Этот факт показывает настоятельную необходимость дополнительных исследований свойств этого равновесия, вопросов существования, нахождения других классов игр (и не дифференциальных тоже!), обладающих выявленным теоремой 4.1 свойством (отсутствием ситуации равновесия по Нэшу и одновременного существования равновесия угроз и контругроз). Интерес представляют и вопросы устойчивости коалиционных структур [23]. Этому вопросу авторы надеются посвятить дальнейшие исследования.

### **Литература**

1. Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. – М.: Изд-во ЛКИ/URSS, 2010. – 216 с.
2. Жуковский, В.И. Равновесные управления многокритериальных динамических задач / В.И. Жуковский, Н.Т. Тынянский. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 224 с.
3. Вайсборд, Э.М. О коалиционных дифференциальных играх / Э.М. Вайсборд // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 613–623.

4. Вайсборд, Э.М. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Э.М. Вайсборд, В.И. Жуковский. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.
5. Zhukovskii, V.I. The Vector-Valued Maximin / V.I. Zhukovskii, M.E. Salukvadze. – N.Y. etc.: Academic Press, 1994. – 404 p.
6. Вилкас, Э.И. Формализация проблемы выбора теоретико-игрового критерия оптимальности / Э.И. Вилкас // Математические методы в социальных науках: Сб. статей. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР, 1972. – Вып. 2. – С. 9–55.
7. Вилкас, Э.И. Решения: теория, информация, моделирование / Э.И. Вилкас, Е.З. Майминас. – М.: Радио и связь, 1981. – 328 с.
8. Смольяков, Э.Р. Теория конфликтных равновесий / Э.Р. Смольяков. – М.: УРСС, 2005. – 301 с.
9. Смольяков, Э.Р. Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи / Э.Р. Смольяков. – М.: МАКС Пресс, 1983. – 232 с.
10. Смольяков, Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников / Э.Р. Смольяков. – М.: Наука, 1986. – 223 с.
11. Zhukovskii, V.I. Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games / V.I. Zhukovskii // Mathematical Method in Operation Research: сб. науч. тр. – Bulgaria, Sofia: Academy of Sciences, 1985. – P. 103–195.
12. Biltchev, S.J.  $\varepsilon$ - Z- Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System / S.J. Biltchev // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984. – P. 47–52.
13. Tersian, St.A. On the Z-Equilibrium Points in a Differential Game / St.A. Tersian // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984. – P. 106–111.
14. Gaidov, S.D. Z-Equilibrium in Stochastic Differential Game / S.D. Gaidov // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984. – P. 53–63.
15. Rashkov, P.I. Sufficient Conditions for Z-Equilibrium in a Differential Game in Banach Spase / P.I. Rashkov // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984. – P. 91–99.
16. Dochev, D.T. Existence of Z-Equilibrium in a Differential Game with Delay / D.T. Dochev, N.V. Stojanov // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984. – P. 64–72.
17. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз / В.И. Жуковский. – М.: КРАСАНД, 2010. – 192 с.
18. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1984. – 456 с.
19. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
20. Жуковский, В.И. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Учебное пособие для ВУЗов / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – М.: Юрайт, 2017. – 322 с.
21. Жуковский, В.И. Равновесие по Нэшу и по Бержу в одной линейно-квадратичной игре / В.И. Жуковский, А.С. Горбатов, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2017. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 62–94.
22. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
23. Zhukovskiy, V.I. Coalition equilibrium in a three-person game / V.I. Zhukovskiy, K.N. Kudryavtsev // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA). – St. Petersburg, 22–27 May 2017. – pp. 1–4.

*Поступила в редакцию 27 февраля 2018 г.*

**CLASS OF DIFFERENTIAL GAMES WITH NO NASH EQUILIBRIUM,  
BUT WITH EQUILIBRIUM OF OBJECTIONS AND COUNTEROBJECTIONS****V.I. Zhukovskiy<sup>1</sup>, K.N. Kudryavtsev<sup>2</sup>, S.P. Samsonov<sup>1</sup>, M.I. Vysokos<sup>3</sup>, Yu.A. Belskii<sup>3</sup>**<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*<sup>2</sup> *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*<sup>3</sup> *State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuyevo, Russian Federation*

A nonstop stream of publications is devoted to the investigation of positive and negative properties of Nash equilibrium concept prevailing in economics (as solution of noncooperative game). Mostly they are related to non-uniqueness and, as a consequence, to the lack of equivalence, interchangeability, external stability as well as instability to simultaneous deviation of such solutions of two and more players. The game "dilemma of prisoners" also revealed the property of "ability to improve".

The book *Equilibrium Control of Multi-criteria Dynamic Problems* (V.I. Zhukovskiy and N.T. Tynyanskiy, M.: MSU, 1984) is devoted to detailed analysis of such "negative" properties for differential positional games.

The authors of this book com to the following conclusion: either make use of those situations of Nash equilibrium that are simultaneously free from some of the stated disadvantages, or introduce new solutions of noncooperative game. Such solutions having the merits of Nash equilibrium situation would allow to get rid of its certain disadvantages. The present article is devoted to one of such possibilities for differential games related to concepts of objections and counterobjections. The concepts of objections and counterobjections used in it are based on the concepts of objections and counterobjections well-known classical game theory. The papers of E.I. Wilkas [1973] are devoted to theoretical questions of this concept. The term "active equilibrium" suggested R.E. Smolyakov in 1983, the notion of equilibrium of objections and counterobjections in differential games was first used apparently by E.M. Vaisbord in 1974, and then it was picked up by the first author of the present article in the above mentioned book [1984], but this concept was applied and is being applied in differential games, in our opinion, insufficiently widely. This fact "called to life" the present paper. In it the class of differential games of two persons is revealed, where the usual Nash equilibrium situation is absent, but the equilibrium of objections and counterobjections is present.

*Keywords: noncooperative games; Nash equilibrium; active equilibrium; equilibrium of objections and counterobjections.*

**References**

1. Owen G. *Game theory*. New York: Academic Press, 1995, 447 p.
2. Zhukovskiy V.I., Tynyanskiy N.T. *Ravnovesnye upravleniya mnogokriterial'nykh dinamicheskikh zadach* (Equilibrium control of multicriteria dynamic problems), Moscow: Izdatel'stvo MGU Publ., 1984, 224 p. (in Russ.).
3. Vaisbord E.M. O koalicionnyh differencial'nyh igrakh (Coalition differential games). *Differ. Uravn.*, 1974, Vol. 10, no. 4, pp. 613–623. (in Russ.).
4. Vaisbord E.M., Zhukovskii V.I. *Introduction to Multi Player Differential Game and Their Application*. New York etc., Gordon and Breach, 1988, 581 p.
5. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin*. N.Y. etc.: Academic Press, 1994, 404 p. DOI: 10.1016/s0076-5392(08)x6114-4
6. Vilkas E.I. Formalizatsiya problemy vybora teoretiko-igrovogo kriteriya optimal'nosti (Formalization of the problem of choosing a game-theoretic criterion of optimality). *Matematicheskie metody v sotsial'nykh naukakh: sb. statey*. (Mathematical Methods in Social Sciences: a collection of articles). Vil'nyus, Institut matematiki i kibernetiki AN Lit. SSR Publ., 1972, Issue. 2, pp. 9–55. (in Russ.).

7. Vilkas E.I., Maуminas E.Z. *Resheniya: teoriya, informatsiya, modelirovanie* (Solutions: theory, information, modeling). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1981, 328 p. (in Russ.).
8. Smol'yakov E.R. *Teoriya konfliktnykh ravnovesiy* (Theory of Conflict Equilibria). Moscow, URSS Publ, 2005, 301 p. (in Russ.).
9. Smol'yakov E.R. *Obobshchennoe optimal'noe upravlenie i dinamicheskie konfliktnye zadachi* (Generalized optimal control and dynamic conflict problems). Moscow, MAKS Press Publ., 1983, 232 p. (in Russ.).
10. Smol'yakov E.R. *Ravnovesnye modeli pri nesovpadayushchikh interesakh uchastnikov* (Equilibrium models with non-coinciding interests of participants). Moscow, Nauka Publ., 1986, 223 p. (in Russ.).
11. Zhukovskii V.I. Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. *Mathematical Method in Operation Research*. Bulgaria, Sofia, Academy of Sciences, 1985, pp. 103–195.
12. Biltchev S.J.  $\varepsilon$ - Z- Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984, pp. 47–52.
13. Tersian St.A. On the Z-Equilibrium Points in a Differential Game. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984, pp. 106–111.
14. Gaidov S.D. Z-Equilibrium in Stochastic Differential Game. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984, pp. 53–63.
15. Rashkov P.I. Sufficient Conditions for Z-Equilibrium in a Differential Game in Banach Spase. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984, pp. 91–99.
16. Dochev D.T., Stojanov N.V. Existence of Z-Equilibrium in a Differential Game with Delay. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rouse: Technical Univ., 1984, pp. 64–72.
17. Zhukovskiy V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie ugroz i kontrugroz* (Introduction to differential games under uncertainty. The equilibrium of objections and counterobjections). Moscow, KRASAND Publ., 2010, 192 p. (in Russ.).
18. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional-differential games). Moscow, Nauka Publ., 1984, 456 p. (in Russ.) [Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988. 517 p.]
19. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* (Theory of matrices). Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 560 p. (in Russ.).
20. Zhukovskiy V.I., Chikriy A.A. *Differentsial'nye uravneniya. Lineyno-kvadratichnye differentsial'nye igry* (Differential equations. Linear-quadratic differential games). Moscow, Yurayt Publ., 2017, 322 p. (in Russ.).
21. Zhukovskiy V.I., Gorbatov A.S., Kudryavtsev K.N. *Ravnovesie po Neshu i po Berzhu v odnoy lineyno-kvadratichnoy igre* (Berge and Nash equilibrium in a linear-quadratic differential game), *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2017, Vol. 9, no. 1, pp. 62–94. (in Russ.).
22. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i vychisleniya* (Matrices and calculations). Moscow, Nauka Publ., 1984, 320 p. (in Russ.).
23. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Coalition equilibrium in a three-person game. *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA)*, St. Petersburg, 22–27 May 2017, pp. 1–4. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974037.

Received February 27, 2018

## МИНИМАЛЬНЫЙ СПУТНИК $\tau$ -ЗАМКНУТОГО $n$ -КРАТНО $\Omega$ -РАССЛОЕННОГО КЛАССА ФИТТИНГА

**О.В. Камозина**

Брянский государственный инженерно-технологический университет, г. Брянск, Российская Федерация

E-mail: ovkamozina@yandex.ru

Множество групп, содержащее вместе с каждой группой и ей изоморфные, называется классом групп. Среди классов конечных групп особо выделены формации, классы Фиттинга и классы Шунка. Изучение классов конечных групп в нашей стране было начато в работах Л.А. Шеметкова, где была показана роль функции в исследованиях формации, определены различные типы формаций. В последние годы А.Н. Скибой, С.Ф. Каморниковым и М.В. Селькиным рассмотрены подгрупповые функторы, установлена связь между ними и классами групп, введено понятие замкнутости класса групп относительно подгруппового функтора. Можно проследить успешное изучение формаций, замкнутых относительно подгрупповых функторов. Однако классы Фиттинга в этом направлении изучены очень мало. Поэтому исследования классов Фиттинга, замкнутых относительно подгрупповых функторов, весьма актуальны. В данной работе введено понятие корегулярного и корадикального подгруппового функтора и получено описание строения единственного минимального спутника кратно расслоенного класса Фиттинга, замкнутого относительно подгруппового функтора. При доказательстве основных теорем использовался метод встречных включений. Также в работе получен ряд свойств кратно расслоенных классов Фиттинга, замкнутых относительно подгруппового функтора, а именно свойство кратности, пересечения, зависимости между самим классом Фиттинга и его спутником.

*Ключевые слова:* конечная группа; класс Фиттинга; подгрупповой функтор;  $\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга; минимальный спутник.

Рассматриваются только конечные группы. Для удобства чтения статьи приведем необходимые определения и обозначения из работ [1–5]. В частности,  $\mathbf{G}$  – класс всех конечных групп;  $\Omega$  – непустой подкласс класса всех конечных простых групп  $\mathbf{I}$ ;  $\mathbf{U}$  – класс всех конечных абелевых групп;  $\Omega' = \mathbf{I} \setminus \Omega$ ;  $K(G)$  – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы  $G$ ;  $K(\mathbf{X})$  – объединение классов  $K(G)$  для всех  $G \in \mathbf{X}$ , где  $\mathbf{X}$  – класс конечных групп;  $(G)$  – класс всех групп, изоморфных группе  $G$ ;  $\mathbf{G}_\Omega$  – класс всех конечных  $\Omega$ -групп, т. е. таких групп  $G$ , для которых  $K(G) \subseteq \Omega$ , причем  $1 \in \mathbf{G}_\Omega$ ; для  $A \in \mathbf{I}$  полагают  $\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_{(A)}$ ,  $A' = \mathbf{I} \setminus (A)$ .

Класс групп  $\mathbf{F}$  называется формацией Фиттинга, если  $\mathbf{F}$  является формацией и классом Фиттинга одновременно. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах из их области определения. Функция  $f$ , отображающая множество  $\Omega \cup \{\Omega'\}$  в множество классов Фиттинга, называется  $\Omega R$ -функцией; функция  $\varphi$ , отображающая множество  $\mathbf{I}$  в множество непустых формаций Фиттинга, называется  $FR$ -функцией. Через  $O^\Omega(G)$  обозначается  $\mathbf{G}_\Omega$ -корадикал группы  $G$ ,  $G^{\varphi(A)}$  –  $\varphi(A)$ -корадикал группы  $G$ . Класс Фиттинга  $\mathbf{F} = \Omega R(f, \varphi) = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для любой } A \in \Omega \cap K(G))$  называется  $\Omega$ -расслоенным с  $\Omega$ -спутником  $f$  и направлением  $\varphi$ . Направление  $\varphi$  является  $r$ -направлением, если  $\varphi(A) = \varphi(A)\mathbf{G}_{A'}$  для любой  $A \in \mathbf{I}$ . Класс Фиттинга  $\mathbf{F} = \Omega R(f, \varphi)$  называется  $\Omega$ -свободным ( $\mathbf{F} = \Omega FrR(f)$ ), если  $\varphi(A) = \mathbf{G}_{A'}$  для любой  $A \in \mathbf{I}$ ;  $\Omega$ -биканоническим ( $\mathbf{F} = \Omega BR(f)$ ), если  $\varphi(A) = \mathbf{G}_{A'}$  для любой неабелевой  $A \in \mathbf{I}$  и  $\varphi(A) = \mathbf{G}_A \mathbf{G}_{A'}$  для любой абелевой  $A \in \mathbf{I}$ ;  $\Omega$ -каноническим ( $\mathbf{F} = \Omega KR(f)$ ), если  $\varphi(A) = \mathbf{G}_A \mathbf{G}_{A'}$  для любой  $A \in \mathbf{I}$ . Направления  $\Omega$ -

свободного,  $\Omega$ -биканонического и  $\Omega$ -канонического классов Фиттинга обозначаются через  $\varphi_0$ ,  $\psi_2$  и  $\psi'_2$  соответственно.

Пусть  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}$  – множество всех натуральных чисел. При  $n \geq 1$  класс Фиттинга  $\mathbf{F}$  называется  $n$ -кратно  $\Omega$ -расслоенным с направлением  $\varphi$  ( $\Omega\varphi^n$ -расслоенным классом Фиттинга), если  $\mathbf{F}$  имеет хотя бы один  $\Omega$ -спутник, все непустые значения которого являются  $(n-1)$ -кратно  $\Omega$ -расслоенными классами Фиттинга с тем же направлением  $\varphi$  ( $\Omega\varphi^{n-1}$ -спутник); произвольный класс Фиттинга считается 0-кратно  $\Omega$ -расслоенным с направлением  $\varphi$ .

Через  $\tau$  обозначается отображение, сопоставляющее каждой группе  $G$  некоторую систему ее подгрупп  $\tau(G)$ . Если  $\tau(G)^\varphi = \tau(G^\varphi)$  для любого изоморфизма  $\varphi$  группы  $G$ , то  $\tau$  называется подгрупповым функтором. Если  $K(N) \subseteq K(G)$  для любой подгруппы  $N \in \tau(G)$ , то говорят, что подгрупповой функтор  $\tau$  замкнут относительно композиционных факторов. Класс групп  $\mathbf{F}$  называется  $\tau$ -замкнутым, если  $\tau(G) \in \mathbf{F}$  для любой группы  $G \in \mathbf{F}$ .

Перейдем к изложению полученных результатов.

В леммах 1, 2 изучаются свойства кратности и пересечения  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\Omega$ -расслоенных классов Фиттинга.

**Лемма 1.** Если  $\mathbf{F}$  является  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^n$ -расслоенным классом Фиттинга, то  $\mathbf{F}$  является  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^{n-1}$ -расслоенным классом Фиттинга,  $n \in \mathbf{N}$ .

**Доказательство.**

Покажем, что  $\mathbf{F}$  является  $\Omega\varphi^{n-1}$ -расслоенным классом Фиттинга.

Используем метод математической индукции.

Пусть  $n = 1$ . Тогда  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга с направлением  $\varphi$ , а значит  $\mathbf{F}$  – класс Фиттинга. В этом случае по определению кратности  $\mathbf{F}$  является 0-кратно  $\Omega$ -расслоенным с направлением  $\varphi$ .

Предположим, что утверждение леммы верно при  $n = k$ .

Докажем справедливость утверждения леммы при  $n = k + 1$ . Пусть  $\mathbf{F}$  –  $\Omega\varphi^{(k+1)}$ -расслоенный класс Фиттинга. Тогда по определению кратности  $\mathbf{F}$  имеет  $\Omega$ -спутник  $f$ , все непустые значения которого являются  $\Omega\varphi^k$ -расслоенными классами Фиттинга. Используя предположение индукции, получаем, что все непустые значения  $f$  являются  $\Omega\varphi^{(k-1)}$ -расслоенными классами Фиттинга, т. е.  $f$  является  $\Omega\varphi^{(k-1)}$ -спутником. Следовательно, по определению кратности  $\mathbf{F}$  является  $\Omega\varphi^k$ -расслоенным классом Фиттинга.

Таким образом, утверждение леммы выполняется для любого  $n \in \mathbf{N}$ .

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi$  –  $\Omega R$ -функция,  $\tau$  – подгрупповой функтор. Тогда пересечение любой совокупности  $\tau$ -замкнутых  $\Omega\varphi^n$ -расслоенных классов Фиттинга является  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^n$ -расслоенным классом Фиттинга,  $n \in \mathbf{N}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{F} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i$ , где  $\mathbf{F}_i$  –  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^n$ -расслоенный класс Фиттинга,  $i \in I$ . Покажем, что  $\mathbf{F}$  –  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^n$ -расслоенный класс Фиттинга.

1. Докажем, что  $\mathbf{F}$  является  $\tau$ -замкнутым классом Фиттинга.

Пусть  $G \in \mathbf{F} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i$ . Тогда  $G \in \mathbf{F}_i$  для всех  $i \in I$ . Так как  $\mathbf{F}_i$  –  $\tau$ -замкнутый класс Фиттинга, то из  $N \in \tau(G)$  следует  $N \in \mathbf{F}_i$  для всех  $i \in I$ . Следовательно,  $N \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}$  –  $\tau$ -замкнутый класс Фиттинга.

2. По лемме 1 [6]  $\mathbf{F}$  является  $\Omega\varphi^n$ -расслоенным классом Фиттинга.

Лемма доказана.

По аналогии с определениями работы [7] введем следующие определения.

Подгрупповой функтор  $\tau$  назовем корегулярным, если из  $N \triangleleft G$ ,  $M \in \tau(G)$  следует  $N \cap M \in \tau(N)$ .

Подгрупповой функтор  $\tau$  назовем  $\Omega$ -корадикальным, если для любой группы  $G$  и для любой  $N \in \tau(G)$  выполняется равенство  $O^\Omega(G) \cap N = O^\Omega(N)$ ;  $\varphi$ -корадикальным, если для любой группы  $G$  и для любой  $N \in \tau(G)$  выполняется равенство  $G^{\varphi(A)} \cap N = N^{\varphi(A)}$  для всех  $A \in \mathbf{I}$ ;  $\Omega\varphi$ -корадикальным, если  $\tau$  является  $\Omega$ -корадикальным и  $\varphi$ -корадикальным.

В лемме 3 устанавливается связь между  $\tau$ -замкнутостью  $n$ -кратно  $\Omega$ -расслоенного класса Фиттинга с направлением  $\varphi$  и  $\tau$ -замкнутостью его  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутника.

**Лемма 3.** Пусть  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга с направлением  $\varphi$ ,  $\tau$  – корегулярный  $\Omega\varphi$ -корадикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{F}$  обладает хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутником, то  $\mathbf{F}$  является  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^n$ -расслоенным классом Фиттинга.

**Доказательство.**

Пусть  $f$  –  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутник класса Фиттинга  $\mathbf{F}$ ,  $G \in \mathbf{F}$ ,  $N \in \tau(G)$ . Покажем, что  $N \in \mathbf{F}$ .

Из  $G \in \mathbf{F} = \Omega R(f, \varphi)$  следует, что  $O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ . В силу корегулярности подгруппового функтора  $\tau$  из  $O^\Omega(G) \triangleleft G$ ,  $N \in \tau(G)$  имеем  $O^\Omega(G) \cap N \in \tau(O^\Omega(G))$ . Так как  $f(\Omega')$  –  $\tau$ -замкнутый класс Фиттинга, то  $O^\Omega(G) \cap N \in f(\Omega')$ . Так как  $\tau$  –  $\Omega$ -корадикальный подгрупповой функтор, то  $O^\Omega(G) \cap N = O^\Omega(N)$ . Тогда  $O^\Omega(N) \in f(\Omega')$ .

Кроме того, из  $G \in \mathbf{F} = \Omega R(f, \varphi)$  следует, что  $G^{\varphi(A)} \in f(A)$  для любой  $A \in \Omega \cap K(G)$ . Так как  $N \in \tau(G)$  и  $\tau$  – подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, то  $K(N) \subseteq K(G)$ , а следовательно,  $G^{\varphi(A)} \in f(A)$  для любой  $A \in \Omega \cap K(N)$ . Пусть  $A \in \Omega \cap K(N)$ . В силу корегулярности подгруппового функтора  $\tau$  из  $G^{\varphi(A)} \triangleleft G$ ,  $N \in \tau(G)$  получаем  $G^{\varphi(A)} \cap N \in \tau(G^{\varphi(A)})$ . Так как  $f(A)$  –  $\tau$ -замкнутый класс Фиттинга, то  $G^{\varphi(A)} \cap N \in f(A)$ . Так как  $\tau$  –  $\varphi$ -корадикальный подгрупповой функтор, то  $G^{\varphi(A)} \cap N = N^{\varphi(A)}$ . Тогда  $N^{\varphi(A)} \in f(A)$ .

Следовательно,  $N \in \Omega R(f, \varphi) = \mathbf{F}$  и класс Фиттинга  $\mathbf{F}$  является  $\tau$ -замкнутым.

Учитывая определение кратности, получаем, что  $\mathbf{F}$  –  $\Omega\varphi^n$ -расслоенный класс Фиттинга.

Лемма доказана.

**Пример.** Согласно лемме 1 [6] класс всех конечных групп  $\mathbf{G} \in \Omega\varphi^n$  для любого  $\Omega \subseteq \mathbf{G}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , причем  $\mathbf{G} = \Omega R(m, \varphi)$ , где  $m(A) = \mathbf{G}$  для всех  $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ,  $\varphi$  – произвольное направление.

Так как  $G$  и система подгрупп  $\tau(G)$  являются конечными группами, то  $\mathbf{G}$  является  $\tau$ -замкнутым классом Фиттинга.

Через  $\tau\Omega^n R(\mathbf{X}, \varphi)$  обозначим пересечение всех  $\tau$ -замкнутых  $\Omega\varphi^n$ -расслоенных классов Фиттинга, содержащих класс групп  $\mathbf{X}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{X}$  – непустой класс групп,  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга с направлением  $\varphi$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi$ , обладающий хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутником,  $\tau$  – корегулярный  $\Omega\varphi$ -корадикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{F} = \tau\Omega^n R(\mathbf{X}, \varphi)$ , то  $\mathbf{F}$  имеет единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутник  $f$  вида

$$f(\Omega') = \tau\Omega^{(n-1)} R((O^\Omega(G) | G \in \mathbf{X}), \varphi),$$



$$f(A) = \tau\Omega^{(n-1)}R((G^{\varphi(A)}|G \in \mathbf{X}), \varphi) \text{ для любой } A \in \Omega \cap K(\mathbf{X}),$$

$$f(A) = \emptyset \text{ для любой } A \in \Omega \setminus K(\mathbf{X}).$$

**Доказательство.** Поскольку  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{G}$ , то ввиду рассмотренного выше примера класс Фиттинга  $\tau\Omega^n R(\mathbf{X}, \varphi)$  существует. Так как  $\mathbf{F}$  обладает хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутником, то множество  $L$  всех  $\tau$ -замкнутых  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутников класса Фиттинга  $\mathbf{F}$  не является пустым. Обозначим через  $f_1$  пересечение всех элементов из  $L$ . По лемме 12 [4]  $f_1$  является  $\Omega$ -спутником класса Фиттинга  $\mathbf{F}$ , по лемме 2 все значения  $f_1$  –  $\tau$ -замкнутые  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -расслоенные классы Фиттинга. Кроме того, из  $f_1 \leq f_i$  для любого  $f_i \in L$  следует, что  $f_1$  – единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутник класса Фиттинга  $\mathbf{F}$ .

Пусть  $f$  –  $\Omega R$ -функция, описание которой приведено в заключении теоремы.

Покажем, что  $\mathbf{F} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$ . Если  $M \in \mathbf{X}$ , то из строения  $f$  получаем  $O^\Omega(M) \in f(\Omega')$  и  $M^{\varphi(A)} \in f(A)$  для всех  $A \in \Omega \cap K(M) \subseteq \Omega \cap K(\mathbf{X})$ . Следовательно,  $M \in \Omega R(f, \varphi)$  и  $\mathbf{X} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$ . Поскольку все значения  $f$  являются  $\tau$ -замкнутыми  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -классами Фиттинга, то по лемме 3 класс Фиттинга  $\Omega R(f, \varphi)$  является  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^n$ -расслоенным классом Фиттинга, и значит  $\mathbf{F} = \tau\Omega^n R(\mathbf{X}, \varphi) \subseteq \Omega R(f, \varphi)$ .

Покажем, что  $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \mathbf{F}$ . Пусть  $G \in \mathbf{X}$ . Так как  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ , то  $O^\Omega(G) \in f_1(\Omega')$ . В силу того, что  $f_1$  –  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутник, получаем

$$f(\Omega') = \tau\Omega^{(n-1)}R((O^\Omega(G)|G \in \mathbf{X}), \varphi) \subseteq f_1(\Omega').$$

Пусть  $A \in \Omega \cap K(\mathbf{X})$ . Тогда существует такая группа  $H \in \mathbf{X}$ , что  $A \in \Omega \cap K(H)$ . Так как  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ , то  $H^{\varphi(A)} \in f_1(A)$  и  $f_1(A) \neq \emptyset$ . Пусть  $G \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}$ . Если  $A \in \Omega \cap K(G)$ , то из  $\mathbf{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$  получаем  $G^{\varphi(A)} \in f_1(A)$ . Пусть  $A \in (\Omega \cap K(\mathbf{X})) \setminus K(G)$ . Тогда  $G \in \mathbf{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ , а следовательно,  $G^{\varphi(A)} = 1 \in f_1(A)$ . Таким образом,

$$f(A) = \tau\Omega^{(n-1)}R((G^{\varphi(A)}|G \in \mathbf{X}), \varphi) \subseteq f_1(A).$$

Пусть  $A \in \Omega \setminus K(\mathbf{X})$ . Тогда из строения  $f$  следует

$$f(A) = \emptyset \subseteq f_1(A).$$

Получаем  $f \leq f_1$  и  $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \mathbf{F}$ . Следовательно,  $\mathbf{F} = \Omega R(f, \varphi)$ , и значит  $f \in L$ . Так как  $f_1$  – единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутник класса Фиттинга  $\mathbf{F}$ , то из  $f \leq f_1$  получаем, что  $f = f_1$ .

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{X}$  – непустой класс групп,  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -расслоенный класс Фиттинга с  $r$ -направлением  $\varphi$ , обладающий хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутником,  $\tau$  – корегулярный  $\Omega\varphi$ -корадикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{F} = \tau\Omega^n R(\mathbf{X}, \varphi)$ , то  $\mathbf{F}$  имеет единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega\varphi^{(n-1)}$ -спутник  $f$  вида

$$f(\Omega') = \tau\Omega^{(n-1)}R((O^\Omega(G)|G \in \mathbf{X}), \varphi),$$

$$f(A) = \tau\Omega^{(n-1)}R((G^{\varphi(A)}|G \in \mathbf{X}), \varphi) \text{ для любой } A \in \Omega \cap K(\mathbf{X}),$$

$$f(A) = \emptyset \text{ для любой } A \in \Omega \setminus K(\mathbf{X}).$$

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 2 с учетом того, что если  $A \in (\Omega \cap K(\mathbf{X})) \setminus K(G)$ , то  $G \in \mathbf{G}_{A'} \subseteq \varphi(A)\mathbf{G}_{A'} = \varphi(A)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\mathbf{X}$  – непустой класс групп,  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -свободный класс Фиттинга, обладающий хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega Fr^{(n-1)}$ -спутником,  $\tau$  – корегулярный  $\Omega Fr$ -

корадикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{F} = \tau\Omega^n FrR(\mathbf{X})$ , то  $\mathbf{F}$  имеет единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega Fr^{(n-1)}$ -спутник  $f$  вида

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \tau\Omega^{(n-1)} FrR(O^\Omega(G)|G \in \mathbf{X}), \\ f(A) &= \tau\Omega^{(n-1)} FrR(O^{A'}(G)|G \in \mathbf{X}) \text{ для любой } A \in \Omega \cap K(\mathbf{X}), \\ f(A) &= \emptyset \text{ для любой } A \in \Omega \setminus K(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

**Следствие 2.** Пусть  $\mathbf{X}$  – непустой класс групп,  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -биканонический класс Фиттинга, обладающий хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega B^{(n-1)}$ -спутником,  $\tau$  – корегулярный  $\Omega B$ -корадикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{F} = \tau\Omega^n BR(\mathbf{X})$ , то  $\mathbf{F}$  имеет единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega B^{(n-1)}$ -спутник  $f$  вида

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \tau\Omega^{(n-1)} BR(O^\Omega(G)|G \in \mathbf{X}), \\ f(A) &= \tau\Omega^{(n-1)} BR(O^{A'}(G)|G \in \mathbf{X}) \text{ для любой } A \in (\Omega \setminus \mathbf{U}) \cap K(\mathbf{X}), \\ f(A) &= \tau\Omega^{(n-1)} BR(O^{A, A'}(G)|G \in \mathbf{X}) \text{ для любой } A \in \Omega \cap \mathbf{U} \cap K(\mathbf{X}), \\ f(A) &= \emptyset \text{ для любой } A \in \Omega \setminus K(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

**Следствие 3.** Пусть  $\mathbf{X}$  – непустой класс групп,  $\mathbf{F}$  –  $\Omega$ -канонический класс Фиттинга, обладающий хотя бы одним  $\tau$ -замкнутым  $\Omega K^{(n-1)}$ -спутником,  $\tau$  – корегулярный  $\Omega K$ -корадикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,  $n \in \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{F} = \tau\Omega^n KR(\mathbf{X})$ , то  $\mathbf{F}$  имеет единственный минимальный  $\tau$ -замкнутый  $\Omega K^{(n-1)}$ -спутник  $f$  вида

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \tau\Omega^{(n-1)} KR(O^\Omega(G)|G \in \mathbf{X}), \\ f(A) &= \tau\Omega^{(n-1)} KR(O^{A, A'}(G)|G \in \mathbf{X}) \text{ для любой } A \in \Omega \cap K(\mathbf{X}), \\ f(A) &= \emptyset \text{ для любой } A \in \Omega \setminus K(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Поскольку  $\varphi_0 = \varphi_0$ ,  $\varphi_0 \leq \psi_2$ ,  $\varphi_0 \leq \psi'_2$  и  $\varphi_0$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi'_2$  являются  $r$ -направлениями, то следствия 1, 2, 3 получаются непосредственно из теоремы 1 или теоремы 2. Учитывая определения указанных направлений, получаем строение минимального  $\tau$ -замкнутого спутника  $\tau$ -замкнутого  $n$ -кратно  $\Omega$ -свободного ( $\Omega$ -биканонического,  $\Omega$ -канонического) класса Фиттинга.

Следствия доказаны.

### Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 254 с.
4. Ведерников, В.А.  $\Omega$ -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 125–144.
5. Ведерников, В.А. Максимальные спутники  $\Omega$ -расслоенных формаций и классов Фиттинга / В.А. Ведерников // Алгебра. Топология, Сборник статей, Труды института математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 55–71.
6. Камозина, О.В. Алгебраические решетки кратно  $\Omega$ -расслоенных классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2006. – Т. 18, № 2. – С. 139–145.
7. Корпачева, М.А. Критические  $\Omega$ -расслоенные  $\tau$ -замкнутые формации конечных групп / М.А. Корпачева, М.М. Сорокина // Вестник БГУ. Серия «Точные и естественные науки». – 2012. – № 4(2). – С. 75–79.

Поступила в редакцию 15 ноября 2017 г.

MINIMUM SATELLITE OF  $\tau$ -CLOSED  $n$ -FOLD  $\Omega$ -FOLIATED FITTING CLASS

O.V. Kamozina

Bryansk State engineering-technological University, Bryansk, Russian Federation

E-mail: ovkamozina@yandex.ru

A multitude of groups containing isomorphic ones to each group is called a class of groups. Among the classes of finite groups formations, Fitting classes, and Schunk classes are distinguished. The study of classes of finite groups in our country was begun in the works of L.A. Shemetkov, where the role of the function in the study of formation was shown, different types of formations were defined. In recent years, A.N. Skiba, S.F. Kamornikov and M.V. Selkin considered subgroup functors, established a connection between them and classes of groups, introduced the notion of closedness of a class of groups with respect to a subgroup functor. You can trace the successful study of formations, closed respective of subgroup functors. However, Fitting classes in this field have been studied very little. Therefore research on the Fitting classes closed respective of subgroup functors is highly relevant. In this work, we introduced the concept of coregular and coradical subgroup functor, and the description was obtained of the structure of the only minimum satellite of an  $n$ -fold foliated Fitting class closed respective of subgroup functor. To prove the fundamental theorems a method of colliding particles was used. The work also resulted in obtaining a number of properties of  $n$ -fold foliated Fitting classes closed respective of subgroup functor, and namely, the property of multiplicity, crossing, dependency between a Fitting class and its satellite.

*Keywords:* finite group; Fitting class; subgroup functor;  $\Omega$ -foliated Fitting class; minimum satellite.

## References

1. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* (Formations of Finite Groups). Moscow, Nauka Publ., 1978, 271 p. (in Russ.).
2. Skiba A.N. *Algebra formatsiy* (Algebra of Formations). Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 1997, 240 p. (in Russ.).
3. Kamornikov S.F., Sel'kin M.V. *Podgruppovye funkory i klassy konechnykh grupp* (Subgroup functors and classes of finite groups). Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2003, 254 p. (in Russ.).
4. Vedernikov V.A., Sorokina M.M.  $\Omega$ -foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*, 2001, Vol. 11, no. 5, pp. 507–527. DOI: 10.1515/dma.2001.11.5.507
5. Vedernikov V.A. Maximal satellites of  $\Omega$ -foliated formations and Fitting classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2001, Suppl. 2, S217–S233. DOI: 10.1515/dma.2001.11.5.507
6. Kamozina O.V. Algebraic lattices of multiply  $\Omega$ -foliated Fitting classes. *Discrete Mathematics and Applications*, 2006, Vol. 16, no. 3, pp. 299–305. DOI: 10.1515/156939206777970453
7. Korpacheva M.A., Sorokina M.M. *Vestnik BGU. Seriya "Tochnye i estestvennyye nauki"*, 2012, no. 4(2), pp. 75–79. (in Russ.).

Received November 15, 2017

## АППРОКСИМАЦИЯ МАТРИЦЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ МАТРИЦЕЙ ЕДИНИЧНОГО РАНГА

**А.В. Панюков, Х.З. Чалуб, Я.А. Мезал**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*

*E-mail: paniukovav@susu.ru*

Большинство современных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики требуют решения линейных задач большой размерности. Для понижения вычислительной сложности используется специальная структура матриц, соответствующих этим задачам. Блочно-малоранговые матрицы представляют из себя приближение с хорошей точностью плотных матриц в малопараметрическом формате. Блоки малого ранга представляются в виде произведения матриц меньшего размера. Это позволяет значительно экономить машинную память. Методы приближенной факторизации блочно-малоранговых матриц могут быть применены для приближенного решения и предобуславливания систем с плотными матрицами в задачах аэро-, гидро- и электродинамики, а также в прикладной статистике и логистике. Для построения малопараметрических представлений матриц, основанных на малоранговых аппроксимациях отдельных блоков, широко используются алгебраические методы. В данной работе рассмотрен эффективный способ аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку. Решение задачи ищется среди допустимых представлений, минимизирующих среднее значение модулей логарифмов отношения приближенного представления элемента к точному значению. Аппроксимирующая задача сведена к задаче линейного программирования, для которой двойственная задача является задачей построения циркуляции минимальной стоимости в полном двудольном графе с пропускными способностями всех дуг равными единице. Для решения полученной задачи предложен алгоритм, имеющий вычислительную сложность не более  $O(I \cdot J \cdot \log(I \cdot J))$ , где  $I$  – множество строк в блоке,  $J$  – множество столбцов в блоке.

*Ключевые слова: матрица; малоранговая аппроксимация; линейное программирование; алгоритм; вычислительная сложность.*

### Введение

Большинство современных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики требуют решения линейных задач большой размерности. Для понижения вычислительной сложности используется специальная структура матриц, соответствующих этим задачам. За данной структурой лежит следующий общий физический смысл: (1) строки и столбцы таких матриц ассоциированы с некоторыми элементами в пространстве, (2) задана некоторая функция взаимодействия этих элементов, (3) если функция взаимодействия асимптотически гладкая, то взаимодействие разнесенных в пространстве групп элементов можно приблизить малым числом параметров [1] (критерий разделения). Таким образом, блоки, ассоциированные с хорошо разделёнными в пространстве группами элементов, обладают малым рангом.

Другой известный пример блочно-малоранговых матриц связан с матрицами, полученными при дискретизации дифференциальных уравнений. Известно [2, 3], что если матрица  $A$  получена при конечно-элементной дискретизации дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым ограничениям [2–4], то обратная к ней приближается блочно-малоранговой матрицей.

Блочно-малоранговые матрицы представляют из себя приближение с хорошей точностью плотных матриц в малопараметрическом формате. Блоки малого ранга представляются в виде произведения матриц меньшего размера. Это позволяет значительно экономить машинную память. Например, в отличие от плотной  $(m \times n)$  матрицы, для представления которой требует  $m \cdot n$  элементов, матрица единичного ранга требует  $m + n$  элементов. Другой характерной особенно-

стью малопараметрического представления является быстрая процедура умножения такой матрицы на вектор ( $O(m+n)$  операций вместо  $O(mn)$ ). Быстрая процедура умножения матрицы на вектор позволяет эффективно применять итерационные методы к решению систем с малопараметрическими матрицами.

Методы приближенной факторизации блочно-малоранговых матриц могут быть применены для приближенного решения и преобуславливания систем с плотными матрицами [5–14] в задачах аэро-, гидро- и электродинамики, а также в прикладной статистике и логистике.

Известны алгебраические методы построения малопараметрических представлений матриц, основанные на малоранговых аппроксимациях отдельных блоков [1, 2]. В данной работе рассмотрен эффективный способ аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку.

В первом разделе дана постановка аппроксимирующей задачи. Во втором разделе предложен способ сведения аппроксимирующей задачи к транспортной задаче в матричной постановке. В третьем разделе предложен алгоритм решения аппроксимирующей задачи и доказано, что его вычислительная сложность равна  $O(mn \log(mn))$ .

### Постановка аппроксимирующей задачи

Пусть дана матрица  $\Lambda = \{\lambda_{ij} > 0 : i \in I, j \in J\}$ . Рассматриваемая задача состоит в нахождении таких матриц  $A = \{\alpha_i > 0 : i \in I\}$  и  $B = \{\beta_j > 0 : j \in J\}$ , что  $\Lambda = A \cdot B^T$ , т. е. разложения матрицы в произведение столбца и строки. Данная задача эквивалентна нахождению решения системы алгебраических уравнений  $\lambda_{ij} = \alpha_i \beta_j, i \in I, j \in J$ . Понятно, что при произвольных положительных значениях  $\lambda_{ij}$  данная система уравнений может оказаться несовместной.

Для построения аппроксимирующей задачи воспользуемся методом наименьших модулей [15–17]. Введем функцию

$$F_{\Lambda}(\alpha, \beta) = \frac{1}{|I| \cdot |J|} \sum_{i \in I, j \in J} \left| \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} \right|,$$

значение которой равно среднему значению модулей логарифмов отношения приближенного значения элемента матрицы к точному значению этого элемента.

Очевидно, что  $\inf F_{\Lambda} = 0$  тогда и только тогда, когда система уравнений совместна. Из неотрицательности функции  $F_{\Lambda}$  следует, что значение  $\inf F_{\Lambda}$  можно рассматривать как степень несовместности системы. При  $\lambda > 0$  функция  $F(\lambda)$  является непрерывной в окрестности любого минимума, поэтому инфимум достигается, а оптимальным приближенным решением системы с минимальной степенью несовместности можно считать

$$(\alpha^o, \beta^o) \in \text{Arg} \min_{\substack{\{\beta_j > 0 : j \in J\} \\ \{\alpha_i > 0 : i \in I\}}} \left[ \sum_{i \in I, j \in J} \left| \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} \right| \right].$$

Легко заметить, что из оптимальности решения  $(\alpha^o, \beta^o)$  следует оптимальность множества решений  $D = \{(\alpha^o \cdot c, \beta^o / c) : c > 0\}$ . Мы будем считать решением аппроксимирующей задачи

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{(\alpha, \beta) \in D} \|(\alpha, \beta)\|_{\infty}$$

Заметим, что если  $(\alpha, \beta) \in D$ , то

$$\alpha^* = \left\{ \frac{a_k \sqrt{\max_{i \in I} \alpha_i \cdot \max_{j \in J} \beta_j}}{\max_{i \in I} \alpha_i} : k \in I \right\}, \quad \beta^* = \left\{ \frac{\beta_k \sqrt{\max_{i \in I} \alpha_i \cdot \max_{j \in J} \beta_j}}{\max_{j \in J} \beta_j} : k \in J \right\}.$$

Таким образом, корректная постановка аппроксимирующей задачи является двухуровневой, но для ее решения достаточно найти любое решение задачи (1) нижнего уровня.

## Сведение аппроксимирующей задачи к транспортной задаче в матричной постановке

Поскольку логарифмическая функция монотонна и

$$\left( \log \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda_{ij}} = 0 \right) \Leftrightarrow (-\log \lambda_{ij} + \log \alpha_i + \log \beta_j = 0)$$

$$\Leftrightarrow (-a_{ij} + x_i - y_j = 0, l_{ij} = \log \lambda_{ij}, x_i = \log \alpha_i, y_j = \log \beta_j), \quad i \in I, j \in J,$$

то далее рассматриваем задачу аппроксимации в терминах  $x, y$ :

$$(x^o, y^o) = \arg \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^{|I|} \\ y \in \mathbf{R}^{|J|}}} \sum_{i \in I, j \in J} |-l_{ij} + x_i - y_j|.$$

Данная задача эквивалентна задаче линейного программирования

$$\sum_{i \in I, j \in J} w_{ij} \rightarrow \min_{x, y, w}, \quad (1)$$

$$-w_{ij} \leq -l_{ij} + x_i + y_j \leq w_{ij}, w_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J, \quad (2)$$

которая в стандартной форме имеет вид

$$\sum_{i \in I, j \in J} w_{ij} \rightarrow \min_{x, y, w}, \quad (3)$$

$$x_i + y_j + w_{ij} \geq l_{ij}, -x_i - y_j + w_{ij} \geq -l_{ij}, w_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J. \quad (4)$$

Построим задачу, двойственную задаче (18)–(19):

$$\sum_{i \in I, j \in J} l_{ij} (f_{ij} - f_{ji}) \rightarrow \max_f, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} (f_{ij} - f_{ji}) = 0, \quad i \in I, \quad (6)$$

$$\sum_{i \in I} (f_{ij} - f_{ji}) = 0, \quad j \in J, \quad (7)$$

$$f_{ij} + f_{ji} \leq 1, f_{ij}, f_{ji} \geq 0, \quad i \in I, j \in J. \quad (8)$$

Сделаем в задаче (5)–(7) замену переменных

$$g_{ij} = f_{ij} - f_{ji}, \quad i \in I, j \in J,$$

получим задачу линейного программирования транспортного типа в матричной постановке

$$\sum_{i \in I, j \in J} l_{ij} g_{ij} \rightarrow \max_g, \quad (9)$$

$$\sum_{j \in J} g_{ij} = 0, i \in I, \quad \sum_{i \in I} g_{ij} = 0, j \in J, \quad -1 \leq g_{ij} \leq 1, \quad i \in I, j \in J.$$

Для решения подобных задач большой размерности известно программное обеспечение, которое легко инкапсулируется в систему MS Office. Данное программное обеспечение вместе с решением прямой задачи находит решение соответствующей двойственной задачи:

$$T_{\Lambda}(r, s, t) = \sum_{i \in I, j \in J} (t_{ij} + t_{ji}) \rightarrow \min_{r, s, t}, \quad (10)$$

$$r_i + s_j + t_{ij} - t_{ji} = l_{ij}, \quad t_{ij}, t_{ji} \geq 0, \quad i \in I, j \in J.$$

Сравнивая систему ограничений задачи (1)–(2) с системой ограничений задачи (9), легко заметить, что из допустимости базисного решения  $(r, s, t)$  задачи (9) следует допустимость решения

$$R = \left( x = r, y = s, w = \{w_{ij} = t_{ij} + t_{ji} : i \in I, j \in J\} \right)$$

задачи (1)–(2). Более того, если  $(r, s, t)$  – оптимальное решения задачи (10), то  $R$  – оптимальное решение задачи (1)–(2), так как двойственные им задачи (5)–(8) и (9) имеют соответствующие оптимальные решения.

### Алгоритм решения аппроксимирующей задачи

Изложенное выше позволяет предложить алгоритм аппроксимации матрицы  $\Lambda$  в виде произведения  $A \cdot B^T$ . Как отмечалось ранее, задача (9) является транспортной задачей в матричной постановке. По ее решению легко найти решение задачи (10), являющейся двойственной к ней. Это позволяет предложить следующий алгоритм решения аппроксимирующей задачи.

#### Алгоритм Reduction

Вход:  $I, J, \Lambda = \{\lambda_{ij} : i \in I, j \in J\}$ ;

Выход:  $\mathbf{A} = \{\alpha_i : i \in I\}$ ,  $\mathbf{B} = \{\beta_j : j \in J\}$ ,  $F_\Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;

**Шаг 1.** По матрице  $\Lambda = \{\lambda_{ij} : i \in I, j \in J\}$  вычислить матрицу  $L = \{l_{ij} = \ln \lambda_{ij} : i \in I, j \in J\}$ .

**Шаг 2.** Найти решения  $(r, s, t)$  и  $g$  пары взаимно двойственных задач (9) и (10).

**Шаг 3.** Положить  $R = (x = r, y = s, w = \{w_{ij} = t_{ij} + t_{ji} : i \in I, j \in J\})$ .

**Шаг 4.** Вернуть  $\mathbf{a} = \{\alpha_i = \exp(r_i) : i \in I\}$ ,  $\mathbf{b} = \{\beta_j = \exp(s_j) : j \in J\}$ ,  $F_\Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = T_\Lambda(r, s, t)$ ;

#### Конец описания алгоритма Reduction

Для решения на Шаге 2 пары взаимно двойственных задач (8) и (9) транспортного типа известно множество эффективных алгоритмов на основе симплекс-метода [18]. Однако специальный вид ограничений позволяет предложить более эффективный алгоритм. Приведем его описание.

#### Алгоритм LD\_Finder

Вход:  $I, J, L = \{l_{ij} : i \in I, j \in J\}$ ;

Выход:  $\mathbf{r} = \{r_i : i \in I\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_j : j \in J\}$ ,  $\mathbf{t} = \{(t_{ij}, t_{ji}) : i \in I, j \in J\}$ ,  $T_\Lambda(r, s, t)$ .

**Шаг 1.** (Построение матрицы  $\hat{L}$ ). Для каждой строки  $i \in I$  матрицы  $L$  выполнить шаги 1.1, 1.2 и 1.3, затем перейти на шаг 2.

**Шаг 1.1.** Построить отсортированную строку

$$L[i] = \{l_{ij^{(k)}}^{(k)} : k = 1, 2, \dots, |J|, j^{(k)} \in J, l_{ij^{(1)}}^{(1)} \leq l_{ij^{(2)}}^{(2)} \leq \dots \leq l_{ij^{(|J|)}}^{(|J|)}\}.$$

**Шаг 1.2.** Положить  $k_- = \left\lfloor \frac{|J|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|J|+1}{2} \right\rceil$ ,  $r_i = \frac{l_{ij^{(k_+)}}^{(k_+)} + l_{ij^{(k_-)}}^{(k_-)}}{2}$ .

**Шаг 1.3.** Для  $k = 1, 2, \dots, |J|$  положить  $\hat{l}_{ij^{(k)}}^{(k)} = l_{ij^{(k)}}^{(k)} - r_i$ .

**Шаг 2.** (Построение матрицы  $\tilde{L}$ ). Для каждого столбца  $j \in J$  матрицы  $\hat{L}$  выполнить шаги 2.1, 2.2 и 2.3, затем перейти на шаг 3.

**Шаг 2.1.** Построить отсортированный столбец

$$\hat{L}[*][j] = \{\hat{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} : k = 1, 2, \dots, |J|, i^{(k)} \in I, \hat{l}_{i^{(1)}j}^{(1)} \leq \hat{l}_{i^{(2)}j}^{(2)} \leq \dots \leq \hat{l}_{i^{(|J|)j}}^{(|J|)}\}.$$

**Шаг 2.2.** Положить  $k_- = \left\lfloor \frac{|I|+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k_+ = \left\lceil \frac{|I|+1}{2} \right\rceil$ ,  $s_j = \frac{\hat{l}_{i^{(k_+)j}^{(k_+)}} + \hat{l}_{i^{(k_-)j}^{(k_-)}}}{2}$ .

**Шаг 2.3.** Для  $k = 1, 2, \dots, |J|$  положить  $\tilde{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} = \hat{l}_{i^{(k)}j}^{(k)} - s_j$ .

**Шаг 3.** (Построение матрицы  $T$ ). Для всех  $i \in I, j \in J$  выполнить шаг 3.1, затем перейти на шаг 4.

**Шаг 3.1.** Если  $\tilde{l}_{ij} > 0$ , то положить  $\{t_{ij} = \tilde{l}_{ij}, t_{ji} = 0\}$ , иначе положить  $\{t_{ji} = -\tilde{l}_{ij}, t_{ij} = 0\}$ .

**Шаг 4.** (Нормирование). Выполнить шаги 4.1, 4.2 и 4.3, затем перейти на шаг 5.

**Шаг 4.1.** Вычислить  $c = \frac{\max_{i \in I} r_i - \max_{j \in J} s_j}{2}$ .

**Шаг 4.2.** Для всех  $k \in I$  положить  $r_i = r_i - c$ .

**Шаг 4.3.** Для всех  $j \in J$  положить  $s_j = s_j + c$ .

**Шаг 5.** Вычислить  $T_\Lambda(r, s, t) = \sum_{i \in I, j \in J} (t_{ij} + t_{ji})$ .

**Конец описания алгоритма LD\_Finder.**

**Теорема.** Алгоритм **LD\_Finder** строит оптимальное решение задачи (10). Его вычислительная сложность не превосходит величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$ .

**Доказательство.** Очевидно, что решение  $(r, s, t)$ , построенное алгоритмом **LD\_Finder**, удовлетворяет всем ограничениям задачи (10). С другой стороны, задача (9) имеет целочисленное оптимальное решение [18], т. е. в оптимальном решении для всех  $i \in I, j \in J$  имеет место включение  $g_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ . Будем строить решение  $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$  задачи (9) используя условия комплиментарности (дополняющей нежесткости) относительно решения  $(r, s, t)$ , т. е. положим

(1)  $g_{ij} = -1$  для всех  $i \in I, j \in J$  таких, что  $t_{ij} = 0, t_{ji} > 0$ ;

(2)  $g_{ij} = 1$  для всех  $i \in I, j \in J$  таких, что  $t_{ji} = 0, t_{ij} > 0$ ;

(3)  $g_{ij} = 0$  для всех  $i \in I, j \in J$  таких, что  $t_{ij} = t_{ji} = 0$ .

Легко заметить, что построенное решение  $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$  является допустимым решением задачи (9). Из второй теоремы двойственности в линейном программировании следует, что  $(r, s, t)$  и  $\{g_{ij} : i \in I, j \in J\}$  являются оптимальными решениями задач (10) и (9) соответственно.

Перейдем к оценке вычислительной сложности. Тело Шага 1 содержит сортировку элементов строки (вычислительная сложность  $O(|J| \cdot \log |J|)$ ) и пересчет ее элементов (вычислительная сложность  $O(|J|)$ ). Следовательно, вычислительная сложность Шага 1 не будет превосходить величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|J|))$ . Аналогичные рассуждения относительно Шага 2 приводят к справедливости утверждения, что вычислительная сложность Шага 2 не будет превосходить величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I|))$ . Поэтому суммарная вычислительная сложность Шагов 1 и 2 не будет превосходить величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$ . Шаг 3 состоит в вычислении значений элементов матрицы  $T_A$ , его вычислительная сложность не превосходит величины  $O(|I| \cdot |J|)$ . Шаг 4 состоит в пересчете элементов столбца  $r$  и строки  $s^T$ . Его вычислительная сложность  $O(|I| + |J|)$ . Шаг 5 состоит в суммировании элементов матрицы  $T_\Lambda$ , его вычислительная сложность также не превосходит величины  $O(|I| \cdot |J|)$ . Таким образом, вычислительная сложность алгоритма не превосходит величины  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$ .

Теорема доказана.

Рассмотрим пример выполнения алгоритма **LD\_Finder**.

В следующей далее табл. 1 приведена исходная матрица  $L$ . Рядом со значением каждого элемента в скобках указан его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов соответствующей строки. В последнем столбце приведены значения элементов вектора  $r$ .



Таблица 1

Матрица $L$						$r$
1(1)	4(4)	3(3)	2(2)	5(5)	6(6)	$(4+3)/2 = 3,5$
7(5)	3(2)	5(4)	9(6)	1(1)	3(3)	$(5+3)/2 = 4$
11(5)	13(6)	9(4)	7(3)	5(2)	1(1)	$(9+7)/2 = 8$
13(4)	15(5)	11(3)	17(6)	9(2)	7(1)	$(13+11)/2 = 12$
19(5)	21(6)	17(4)	13(3)	11(2)	9(1)	$(13+17)/2 = 15$

В табл. 2 приведены значения элементов матрицы  $\hat{L}$ , вычисленные на шаге 1. Рядом со значением каждого элемента в скобках указан его порядковый номер в отсортированном в порядке возрастания списке элементов соответствующего столбца. В последней строке приведены значения элементов вектора  $s$ .

Таблица 2

Матрица $\hat{L}$						
-2,5(1)	0,5(2)	-0,5(2)	-1,5(2)	1,5(5)	2,5(5)	
3(3)	-1(1)	1(3)	5(4)	-3(4)	-1(4)	
3(4)	5(4)	1(4)	-1(3)	-3(3)	-7(1)	
1(2)	3(3)	-1(1)	5(5)	-3(2)	-5(3)	
4(5)	6(5)	2(5)	-2(1)	-4(1)	-6(2)	
3	3	1	-1	-3	-5	$s^T$

В табл. 3 приведены значения элементов матрицы  $\tilde{L}$ , вычисленные на шаге 2. Величины данных элементов равны невязкам в представлении соответствующих элементов матрицы  $L$ . Значение  $c$ , вычисленное на шаге 4, равно  $c = \frac{r_5 - s_1}{2} = \frac{15 - 3}{2} = 6$ . Последние столбец и строка табл. 3 содержат модифицированные на шаге 4 векторы  $r$  и  $s^T$  соответственно

Таблица 3

Матрица $\tilde{L}$						$r$
-5,5	-2,5	-1,5	-0,5	4,5	7,5	-2,5
0	-4	0	6	0	-4	-2
0	2	0	0	0	-2	2
-2	0	-2	6	0	0	6
1	3	1	-1	-1	-1	9
9	9	7	5	3	4	$s^T$

В табл. 4 приведены значения элементов матрицы  $r \oplus s^T$ , являющейся образом матрицы  $A \cdot B^T$ , в ней операции перемножения элементов столбца  $A$  и строки  $B^T$  соответствует операция сложения логарифмов элементов (т. е. матриц  $r$  и  $s^T$ ). Легко проверить, что  $L - (r \oplus s^T) = \tilde{L}$ .

Таблица 4

Матрица $r \oplus s^T$						
6,5	6,5	4,5	2,5	0,5	-1,5	
7	7	5	3	1	-1	
11	11	9	7	5	3	
15	15	13	11	9	7	
18	18	16	14	12	10	

### Заключение

Рассмотренный в данной работе алгоритм решает задачу аппроксимации блоков матрицы с положительными элементами матрицей единичного ранга, т. е. в виде произведения столбца на строку. Алгоритм имеет алгебраическую вычислительную сложность не более  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$ , где  $|I|, |J|$  – размеры матрицы.

## Литература

1. Tyrtysnikov, E.E. Mosaic-skeleton approximations / E.E. Tyrtysnikov // *Calcolo*. – 1996. – Vol. 33, no. 1. – P. 47–57.
2. Oseledets, I.V. Representation of quasi separable matrices using excluded sums and equivalent charges / I.V. Oseledets, A.Yu. Mikhalev // *Linear Algebra Appl.* – 2012. – Vol. 436. – Issue 3. – P. 699–708.
3. Bebendorf, M. Why finite element discretizations can be factored by triangular hierarchical matrices / M. Bebendorf // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2007. – Vol. 45, no. 4. – P. 1472–1494.
4. Börm, S. Approximation of solution operators of elliptic partial differential equations by-and-matrices / S. Börm // *Numerische Mathematik*. – 2010. – Vol. 115, no. 2. – P. 165–193.
5. Bebendorf, M. Existence of  $H$ -matrix approximants to the inverse FE-matrix of elliptic operators with  $L_\infty$ -coefficients / M. Bebendorf, W. Hackbusch // *Numer. Math.* – 2003. – Vol. 95, no. 1. – P. 1–28
6. Sushnikova, D.A. Preconditioners for hierarchical matrices based on their extended sparse form / D.A. Sushnikova, I.V. Oseledets // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. – 2016. – Т. 31. – С. 29–40.
7. Numerical solution of diffraction problems using large matrix compression / G.V. Ryzhakov, A.Y. Mikhalev, D.A. Sushnikova, I.V. Oseledets // 9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2015. – С. 1–3.
8. Ford, J.M. Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids / J.M. Ford, I.V. Oseledets, E.E. Tyrtysnikov // *Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling*. – 2004. – Vol. 19(2). – С. 185–204.
9. Оселедец, И.В. Применение нелинейных методов аппроксимации для быстрого решения задачи о распространении звука в мелком море / И.В. Оселедец, Д.В. Савостьянов, С.Л. Ставцев // *Методы и технологии решения больших задач: сб. науч. тр. – ИВМ РАН, 2004. – С. 171–192.*
10. Башуров, В.В. Моделирование задач высокоскоростного проникания в лагранжевых координатах / В.В. Башуров, С.К. Бурученко // *Матем. моделирование*. – Т. 4, № 9. – 1992. – С. 37–42.
11. Ушаков, А.Л. Быстрое решение модельной задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 36–42.
12. Сушникова, Д.А. Приложение блочно-малоранговых матриц для задачи регрессии на основе гауссовских процессов / Д.А. Сушникова // *Вычислительные методы и программирование*. – 2017. – Т. 18. – С. 214–220.
13. Panyukov, A.V. Forming of Discrete Mechanical Assembly Production Program / A.V. Panyukov, V.A. Teleghin // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2015. – № 2. – С. 57–64.
14. Panyukov, A.V. The Spectral Statistical Method for Determining the Location Parameters of a Dipole Source of Electromagnetic Radiation / A.V. Panyukov, A.K. Bogushov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. – 2016. – Vol. 59. – P. 278–288.
15. Панюков, А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков, А.Н. Тырсин // *Известия Челябинского научного центра*. – 2007. – № 1(35). – С. 6–11.
16. Panyukov, A.V. Linkage between wlad and glad and its applications for autoregressive analysis / A.V. Panyukov, I.A. Tetin, Ya.A. Mezal // *Proceedings of the 4th International Conference “Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS'2016)”*. – 2016. – С. 224–227.
17. Лакеев, А.В. Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации / А.В. Лакеев, С.И. Носков // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. – 2012. – № 2. – С. 48–50.
18. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 341 с.

*Поступила в редакцию 5 января 2018 г.*

## APPROXIMATION OF THE MATRIX WITH POSITIVE ELEMENTS BY THE SINGLE RANK MATRIX

**A.V. Panyukov, Kh.Z. Chaloob, Ya.A. Mezal**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: paniukovav@susu.ru*

Most of the modern mathematical methods for solving problems of science, technology, and economics require the solution of linear problems of large dimension. To reduce the computational complexity, a special structure of matrices corresponding to these problems is used. Block-low-rank matrices represent the approximation with good accuracy of dense matrices in a low-parametric format. Blocks of small rank are represented as a product of matrices of smaller sizes. This allows you to significantly save computer memory. Approximate factorization methods for block-low-rank matrices can be used for approximate solution and preconditioning of systems with dense matrices in aero-, hydro- and electro-dynamics problems, as well as in applied statistics and logistics. To build low-parametric representations of matrices based on small-rank approximations of individual blocks, algebraic methods are widely used. In this paper we consider an effective method for approximating blocks of a matrix with positive elements by a single rank matrix, i.e. in the form of a product of a column per line. The solution of the problem is sought among the admissible representations that minimize the average modulus of the logarithms of the ratio of an approximate representation of an element to the exact value. The approximating problem is reduced to the problem of linear programming, for which the dual problem is the task of building a circulation of the minimum value in a complete bipartite graph with the throughputs of all arcs equal to one. To solve this problem, we propose an algorithm that has a computational complexity of at most of  $O(|I| \cdot |J| \cdot \log(|I| \cdot |J|))$ , where  $I$  is the set of rows in the block, and  $J$  is the set of columns to the block.

*Keywords: matrix; low-rank approximation; linear programming; algorithm; computational complexity.*

### References

1. Tyrtysnikov E.E. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*, 1996, Vol. 33, Issue 1–2, pp. 47–57. DOI: 10.1007/BF02575706
2. Oseledets I.V., Mikhalev A.Yu. Representation of quasi separable matrices using excluded sums and equivalent charges. *Linear Algebra Appl.*, 2012, Vol. 436, Issue 3, pp. 699–708. DOI: 10.1016/j.laa.2011.07.041
3. Bebendorf M. Why finite element discretizations can be factored by triangular hierarchical matrices. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2007, Vol. 45, no. 4, pp. 1472–1494. DOI: 10.1137/060669747
4. Börm S. Approximation of solution operators of elliptic partial differential equations by-and-matrices. *Numerische Mathematik*, 2010, Vol. 115, Issue 2, pp. 165–193. DOI: 10.1007/s00211-009-0278-7
5. Bebendorf M., Hackbusch W. Existence of  $H$ -matrix approximants to the inverse  $FE$ -matrix of elliptic operators with  $L_\infty$ -coefficients. *Numer. Math.*, 2003, Vol. 95, Issue. 1, pp. 1–28. DOI: 10.1007/s00211-002-0445-6
6. Sushnikova D.A., Oseledets I.V. Preconditioners for hierarchical matrices based on their extended sparse form. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2016, Vol. 31, pp. 29–40. DOI: 10.1515/rnam-2016-0003
7. Ryzhakov G.V., Mikhalev A.Y., Sushnikova D.A., Oseledets I.V. Numerical solution of diffraction problems using large matrix compression. *9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, 2015, pp. 1–3.

8. Ford J.M., Oseledets I.V., Tyrtysnikov E.E., Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids. *Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling*, 2004, Vol. 19(2), pp. 185–204. DOI: 10.1515/156939804323089334
9. Oseledets I.V., Savost'yanov D.V., Stavtsev S.L. Primenenie nelineynykh metodov approksimatsii dlya bystrogo resheniya zadachi o rasprostranenii zvuka v melkom more (The use of non-linear approximation method to quickly solve the problem of sound propagation in shallow water). *Metody i tekhnologii resheniya bol'shikh zadach: sb. nauch. tr.* (Methods and technologies for solving large problems: a collection of scientific papers), IVM RAN Publ., 2004, pp. 171–192. (in Russ.).
10. Bashurov V.V., Buruchenko S.K. Modelirovanie zadach vysokoskorostnogo pronikaniya v lagranzhevyykh koordinatakh (Lagrangian computation of high velocity deep penetration). *Matem. Mod.*, 1992, Vol. 4, no. 9, pp. 37–42. (in Russ.).
11. Ushakov A.L. Fast Solution of the Model Problem for Poisson's Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2017, Vol. 9, no. 4, pp. 36–42. (in Russ.).
12. Sushnikova D.A. Prilozhenie blochno-malorangovykh matrits dlya zadachi regressii na osnove gaussovskikh protsessov (Application of block low-rank matrices in Gaussian processes for regression). *Vychisl. Metody Programm.*, 2017, Vol. 18, Issue 3, pp. 214–220. (in Russ.).
13. Panyukov A.V., Teleghin V.A. Forming of Discrete Mechanical Assembly Production Program. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 57–64.
14. Panyukov A.V., Bogushov A.K. The Spectral Statistical Method for Determining the Location Parameters of a Dipole Source of Electromagnetic Radiation. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2016, Vol. 59, pp. 278–288. DOI: 10.1007/s11141-016-9696-4
15. Panyukov A.V., Tyrsin A.N. Vzaimosvyaz' vzheshennogo i obobshchennogo variantov metoda naimen'shikh moduley (Interrelation of weighted and generalized variants of the method of least moduli). *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*, 2007, no. 1(35), pp. 6–11. (in Russ.).
16. Panyukov A.V., Tetin I.A., Mezal Ya.A. Linkage between wlad and glad and its applications for autoregressive analysis. *Proc. 4th Int. Conf. "Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS'2016)"*, 2016, C. 224–227. (in Russ.).
17. Lakeyev A.V., Noskov S.I. The Least Modulus Method for the Linear Regression: the Number of Zero Approximation. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye* (Modern Technologies System Analysis Modeling), 2012, no. 2, pp. 48–50. (in Russ.).
18. Yemelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtsov M.K., Lawden G. *Polytopes, graphs and optimization*. Cambridge University Press, NY, USA, 1986, 344 p.

*Received January 5, 2018*

# INVERSE PROBLEMS OF RECOVERING THE BOUNDARY DATA WITH INTEGRAL OVERDETERMINATION CONDITIONS

**S.G. Pyatkov, M.A. Verzhbitskii**

*Yugra State University, Khanty-Mansyisk, Russian Federation*

*E-mail: s\_pyatkov@ugrasu.ru*

In the present article we examine an inverse problem of recovering unknown functions being part of the Dirichlet boundary condition together solving an initial boundary problem for a parabolic second order equation. Such problems on recovering the boundary data arise in various tasks of mathematical physics: control of heat exchange processes and design of thermal protection systems, diagnostics and identification of heat transfer in supersonic heterogeneous flows, identification and modeling of heat transfer in heat-shielding materials and coatings, modeling of properties and heat regimes of reusable heat protection of spacecrafts, study of composite materials, etc. As the overdetermination conditions we take the integrals of a solution over the spatial domain with weights. The problem is reduced to an operator equation of the Volterra-type. The existence and uniqueness theorem for solutions to this inverse problem is established in Sobolev spaces. A solution is regular, i. e., all generalized derivatives occurring into the equation exists and are summable to some power. The proof relies on the fixed point theorem and bootstrap arguments. Stability estimates for solutions are also given. The solvability conditions are close to necessary conditions.

*Keywords: inverse problem; parabolic equation; boundary and initial condition; Sobolev space; existence and uniqueness theorem; solvability.*

## Introduction

We consider the parabolic equation

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x) u_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i} + a_0(t,x) u = f, \quad (1)$$

where  $x \in G \subset \mathbb{R}^n$  is a bounded domain with boundary  $\Gamma$  of the class  $C^2$  (see the definition, for instance, in [1, Sect. 1]),  $t \in (0, T)$ . Put  $Q = (0, T) \times G$  and  $S = (0, T) \times \Gamma$ . The equation (1) is furnished with the following initial and boundary conditions:

$$u|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2)$$

Put  $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_j}(t,x) \nu_i$ , where  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  is the outward unit normal to  $S$ . The inverse problem is to find a solution  $u$  to the problem (1)–(2) and a function  $g$  of the form  $g = \sum_{i=1}^m q_i(t) \Phi_i(t,x)$ , where the vector  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  is unknown, with the use of the overdetermination conditions

$$\int_G u(x,t) \varphi_k(x) dx = \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Inverse problems of recovering boundary regimes, in particular, the convective heat exchange problems are conventional (see, for instance, [2–11]). They arise in different problems of mathematical physics such as the problems of control of heat exchange processes and design of thermal protection systems, diagnostics and identification of heat transfer in supersonic heterogeneous flows, identification and modeling of heat transfer in heat-shielding materials and coverings, modeling of properties and heat regimes of reusable heat protection of spacecrafts, the study of composite materials, etc. Mathematical models describing these processes and the corresponding inverse problems in both one-dimensional and multidimensional cases are described, for example, in [2]. The essential attention here is paid to numerical methods of solving inverse problems in question and some uniqueness theorems together stability estimates for solutions. We refer also to the monograph [3] mainly devoted to numerical

methods of determining a solution, where in the one-dimensional case different inverse problems for parabolic equations and problems of recovering the boundary regimes as well are studied. The overdetermination conditions are the values of a solution at some points lying inside the spatial domain. These problems are studied in different settings in dependence on the type of the overdetermination conditions. It is often the case when these problems are ill-posed in the Hadamard sense. In particular, it is true in the case of the overdetermination conditions in the form of values of a solution at separate points or on some surfaces lying in the spatial domain (see [2]). At the present article we examine the problems with overdetermination conditions in the form of some integrals with weights of a solution over a spatial domain. Note that these conditions arise in applications and they are often used in literature. Inverse problems of recovering the right-hand side or coefficients of an equation with integral overdetermination conditions are studied in the articles [12–18], the monographs [19, 20], and some other articles. In particular, the existence and uniqueness theorem of a generalized solution to the problem (1)–(3) (from the class  $u \in W_2^{0,1}(Q)$ ) in the case of  $m = 1$  and the Neumann boundary condition was obtained in [9] and a similar result for a heat-and-mass transfer system including the Navier–Stokes system and a parabolic equation for the concentration of an admixture was obtained in [10]. The article [11] is devoted to a regular solvability ( $u \in W_2^{1,2}(Q)$ ) in the case of  $m = 1$  and the Robin boundary conditions. The case of the Dirichlet boundary condition happens to be more complicated than the case of the Neumann (Robin) boundary conditions and was not studied before. The present article is devoted to this case. Under some conditions on the data we prove well-posedness of this problem. The article in some sense is an extension of [21], where the Robin boundary conditions are treated. Some of our auxiliary statements are taken from this article.

## Preliminaries

Let  $E$  be a Banach space. Denote by  $L_p(G; E)$  ( $G$  is a domain in  $\mathbb{R}^n$ ) the space of strongly measurable functions defined on  $G$  with values in  $E$  and the finite norm  $\| \| u(x) \|_E \|_{L_p(G)}$  [1]. We also employ the Holder spaces (see the definition for instance, in [22])  $C^{\alpha,\beta}(\bar{Q}), C^{\alpha,\beta}(\bar{S}), C^k(\bar{G})$  and the Sobolev spaces  $W_p^s(G; E), W_p^s(Q; E)$  (see [21, 23]). If  $E = \mathbb{R}$  or  $E = \mathbb{R}^n$  then the latter space is denoted by  $W_p^s(Q)$ . Given an interval  $J = (0, T)$ , put  $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$ . Respectively,  $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$ . All spaces and the coefficients of the equation (1) are assumed to be real. Let  $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$ ,  $Q^\gamma = (0, \gamma) \times G$  and  $S^\gamma = (0, \gamma) \times \Gamma$ .

We endow the space  $W_p^s(0, \tau; E)$  ( $s \in (0, 1)$ ,  $E$  is a Banach space, with the norm  $\| q(t) \|_{W_p^s(0, \tau; E)} = (\| q \|_{L_p(0, \tau; E)}^p + \langle q \rangle_{s, \tau}^p)^{1/p}$ ,  $\langle q \rangle_{s, \tau}^p = \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{\| q(t_1) - q(t_2) \|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2$ . If  $E = \mathbb{R}$  then we obtain the conventional Sobolev space  $W_p^s(0, \tau)$ . For  $s \in (1/p, 1]$ , we put  $\tilde{W}_p^s(0, \tau) = \{q \in W_p^s(0, \tau) : q(0) = 0\}$ . This class is a Banach space with the norm  $\| \cdot \|_{W_p^s(0, \tau)}$ . We can define also the equivalent norm  $\| q(t) \|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)}^p = \frac{q}{t^s} \|_{L_p(0, \tau)}^p + \langle q \rangle_{s, \tau}^p$ . The equivalence results from Lemma 1 of the subsection 3.2.6 [1]. Similarly, we can define the spaces  $\tilde{W}_p^s(0, \tau; L_p(G)), \tilde{W}_p^{s, 2s}(Q^\tau)$  comprising the functions  $v(t, x)$  in  $W_p^s(0, \tau; L_p(G))$  and  $W_p^{s, 2s}(Q^\tau)$ , respectively, such that  $v(0, x) = 0$ . The new norms  $\| \cdot \|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau; L_p(G))}, \| \cdot \|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(Q^\tau)}$  are defined naturally with the use of the above norm  $\tilde{W}_p^s(0, \tau)$ .

**Lemma 1.** *Let  $s \in (1/p, 1)$  and  $p \in (1, \infty)$ . Then the following statements are valid.*

1) Let  $q(t) \in W_p^s(0, \tau)$  ( $\tau \in (0, T]$ ). Then  $q \in C([0, \tau])$  after a possible change on a set of zero measure. If  $q(0) = 0$  and  $\tilde{q}$  is an extension by zero of  $q$  for  $t \leq 0$  then

$$\|q\|_{W_p^s(-T+\tau, \tau)} \leq c_1 \|q\|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)}, \quad (4)$$

where the constant  $c_1$  is independent of  $\tau \in (0, T]$  and  $q$ .

2) The product  $q \cdot v$  of functions in  $W_p^s(0, \tau)$  ( $\tau \in (0, T]$ ) belongs to  $W_p^s(0, \tau)$  and if  $q \in \tilde{W}_p^s(0, \tau)$  and  $v \in W_p^s(0, \tau)$  then  $qv \in \tilde{W}_p^s(0, \tau)$ . Moreover, the following estimate holds:

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)} \leq c_2 \|q\|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)} (\langle v \rangle_{s, \tau} + \|v\|_{L_\infty(0, \tau)}), \quad (5)$$

where the constant  $c_2$  is independent of  $q, v$ , and  $\tau \in (0, T]$ .

3) If a function  $v$  is strictly bounded from zero on  $[0, \tau]$ , i. e.  $\delta_0 = \inf_{t \in [0, \tau]} |v(t)| > 0$  then the ratio  $q/v$  of functions in  $W_p^s(0, \tau)$  ( $\tau \in (0, T]$ ) belongs to  $W_p^s(0, \tau)$  again and

$$\|q/v\|_{W_p^s(0, \tau)} \leq c_3 \|q\|_{W_p^s(0, \tau)} \|v\|_{W_p^s(0, \tau)}, \quad (6)$$

where the constant  $c_3$  is independent of  $q$  but it depends on  $\delta_0$  and tends to  $\infty$  as  $\delta_0 \rightarrow 0$ .

4) Assume that  $q(t) \in \tilde{W}_p^s(0, \tau)$  ( $\tau \in (0, T]$ ),  $v(t) \in W_p^s(0, T)$ , and  $\Phi(t, x) \in W_p^{s, 2s}(S)$ . Then  $qv \in \tilde{W}_p^s(0, \tau)$ ,  $q\Phi \in \tilde{W}_p^{s, 2s}(S^\tau)$ , and

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)} \leq c \|q\|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)} \|v\|_{W_p^s(0, T)}, \quad (7)$$

$$\|q\Phi\|_{\tilde{W}_p^{s, 2s}(S^\tau)} \leq c_4 \|q\|_{\tilde{W}_p^s(0, \tau)} \|\Phi\|_{W_p^{s, 2s}(S)}, \quad (8)$$

where the constant  $c$  is independent of  $\tau \in (0, T]$ .

**The proof** can be found in [21].

We describe now the conditions on the data used below. Fix a number  $s = 1 - 1/2p$  and assume that  $p > 3/2$ .

**The conditions on the coefficients**

$$a_{ij} \in C([0, T]; W_\infty^1(G)) \cap L_q(G; W_p^s(0, T)), \nabla_x a_{ij} \in L_q(G; W_p^s(0, T)), \quad (9)$$

where  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $1/p + 1/q = 1$ .

$$a_i \in L_q(G; W_p^s(0, T)), (i = 0, 1, \dots, n), \nabla_x a_i \in L_q(G; W_p^s(0, T)) (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Suppose also that there exists a constant  $\delta_0 > 0$  such that

$$\sum_{i, j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2, \quad \forall (t, x) \in Q, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

**The conditions on the data of the problem**

$$f \in L_p(Q), u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad (12)$$

$$g \in W_p^{s, 2s}(S), g(0, x) = u_0|_\Gamma, \quad (13)$$

$$\varphi_k \in W_\infty^2(G), \Phi_k \in W_p^{s, 2s}(S), \psi_k \in W_p^{s+1}(0, T), (f, \varphi_k) \in W_p^s(0, T), k = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

As a consequence of Theorem 9.1 in [22, Ch. 4] (see also Theorem 10.4 in [22, Ch. 7]) we have the following theorem.

**Theorem 1.** Assume that  $G$  is a bounded domain with boundary of the class  $C^2$  and the conditions (9)–(13) hold. Then there exists a unique solution  $u$  to the problem (1)–(2) such that  $u \in W_p^{1, 2}(Q)$ . A solution meets the estimate

$$\|u\|_{W_p^{1, 2}(Q)} \leq C(\|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|g\|_{W_p^{s, 2s}(S)}).$$

As a consequence of Theorem 1 we have that

**Theorem 2.** Assume that  $G$  be a bounded domain with boundary of the class  $C^2$  and the conditions (9)–(13) hold, where  $f \equiv 0$  and  $u_0 \equiv 0$ . Let  $\gamma \in (0, T]$ . Then there exists a unique solution  $u$  to the problem (1)–(2) such that  $u \in W_p^{1,2}(Q^\gamma)$ . A solution meets the estimate  $\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c \|g\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(S^\gamma)}$ , where the constant  $c$  is independent of  $\gamma \in (0, T]$  and  $g$ .

**Proof.** Extend the function  $g$  by zero for  $t < 0$  and put  $\tilde{g} = \begin{cases} g(t, x), t \in (-T + \gamma, \gamma) \\ g(2\gamma - t, x), t \in [\gamma, T + \gamma] \end{cases}$ . Obviously,  $\tilde{g} \in W_p^{s,2s}(S)$ . By Theorem 1, we can construct a solution to the problem (1)–(2), where  $u_0 \equiv 0$ ,  $f \equiv 0$ , and  $g = \tilde{g}$  such that  $u \in W_p^{1,2}(Q)$ . Theorem 1 yields the estimate  $\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}(S)}$ . Estimate the right-hand side. Lemma 1 implies that

$$\|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}(S)} \leq \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((-T+\gamma, T+\gamma) \times \Gamma)} \leq c(\|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((-T+\gamma, \gamma) \times \Gamma)} + \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}([\gamma, T+\gamma] \times \Gamma)}) \leq c_1 \|g\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(S^\gamma)}.$$

We employ the additivity of the Sobolev space with respect to the partition of a domain (see Remark 3 of Subsect. 4.4.1 in [1]) and the definition of the corresponding norm.

**Basic results**

In addition to the above conditions we require that

$$|\det B(t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall t \in [0, T], \tag{15}$$

where  $B(t)$  is the matrix with entries  $b_{ij} = \int_\Gamma \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial N} \Phi_j(t, x) d\Gamma$ ,  $\varphi_k|_\Gamma = 0$  ( $k = 1, \dots, m$ );

$$\int_G u_0(x) \varphi_k(x) dx = \psi_k(0), \psi_{kt}(0) = (u_0, L_0^* \varphi_k) - \int_\Gamma u_0(x) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial N} d\Gamma + (f, \varphi_k)|_{t=0}, \tag{16}$$

where  $k = 1, \dots, m$  and  $L_0^*$  is a formally adjoint to the operator  $L_0$ ,  $L_0 \omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \omega_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i \omega_{x_i} - a_0 \omega$ ;

(A) the functions  $\Phi_1(0, x), \dots, \Phi_m(0, x)$  are linearly independent on  $\Gamma$  and  $u_0(x)|_\Gamma$  belongs to the span of these functions.

We can note that (16) is a necessary solvability condition of the inverse problem.

**Theorem 3.** Assume that  $G$  is a bounded domain with boundary of the class  $C^2$  and the conditions (9)–(12), (14)–(16), and (A) hold. Then there exists a unique solution  $(u, \vec{q})$  ( $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ) to the problem (1)–(3) such that  $u \in W_p^{1,2}(Q)$ ,  $\vec{q} \in W_p^s(0, T)$ . A solution satisfies the estimate

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|\vec{q}\|_{W_p^s(0, T)} \leq C(\|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{i=1}^m (\|\psi_i\|_{W_p^{1+s}(0, T)} + \|(f, \varphi_i)\|_{W_p^s(0, T)})).$$

**Proof.** Let  $u \in W_p^{1,2}(Q)$  be a solution to the problem (1)–(3), where  $g = \sum_{i=1}^m q_i \Phi_i$ . The conditions (15) and (A) imply that there exists a unique collection of constants  $q_i(0)$  such that  $u_0|_\Gamma = \sum_{i=1}^m q_i(0) \Phi_i(0, x)$ . Put  $\sum_{i=1}^m q_i(0) \Phi_i(t, x) = g_0(t, x)$  and denote by  $v \in W_p^{1,2}(Q)$  a solution to the problem (see Theorem 1)

$$Lv = f, \quad v|_S = g_0(t, x), \quad v|_{t=0} = u_0(x). \tag{17}$$

Let  $\vec{q} \in W_p^s(0, T)$ . In view of our conditions  $\Phi_j \in W_p^{s,2s}(S)$ . Lemma 1 yields  $q_i(t) \Phi_i(t, x) \in W_p^{s,2s}(S)$  and thus  $g \in W_p^{s,2s}(S)$ . Make the change of variables  $u = v + \omega$ . The function  $\omega \in W_p^{1,2}(Q)$  is a solution to the problem

$$L\omega = 0, \quad B\omega|_S = g - g_0 = \tilde{g}, \quad \omega|_{t=0} = 0. \tag{18}$$



The condition (3) transforms into the form

$$\int_G \omega \varphi_k(x) dx = \psi_k - \int_G v(t, x) \varphi_k(x) dx = \tilde{\psi}_k, k = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

By (16),  $\tilde{\psi}_k(0) = 0$  and we have at least that  $\tilde{\psi}_k(t) \in W_p^1(0, T)$ . Below we demonstrate that  $\tilde{\psi}_k(t) \in W_p^{1+s}(0, T)$  and  $\tilde{\psi}_k'(0) = 0$ . Multiply the equation in (18) by  $\varphi_k(x)$  and integrate the result over  $G$ . We obtain that  $(\omega, \varphi_k) = (L_0 \omega, \varphi_k)$ . Using (18), (19), and integrating by parts, we infer

$$\tilde{\psi}_k'(t) = (\omega, L_0^* \varphi_k) - \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t) \int_{\Gamma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial N} d\Gamma, k = 1, \dots, m, \tilde{q}_i(t) = q_i(t) - q_i(0).$$

The last inequality can be written in either of the forms

$$\sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t) b_{ki} = -\tilde{\psi}_k'(t) + (\omega, L_0^* \varphi_k), \quad (20)$$

or

$$B \bar{q}_a = \bar{F} + R(\bar{q}_a), \bar{F} = (F_1, \dots, F_m)^T, F_k = -\tilde{\psi}_k'(t), (R(\bar{q}_a))_k = (\omega, L_0^* \varphi_k), \quad (21)$$

where  $\bar{q}_a = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)^T$ . The function  $\omega$  in (21) is a solution to the direct problem (18). The entries of  $B$  possess the property  $b_{ij} \in W_p^s(0, T)$  and even more we have the inequality

$$\|b_{ij}\|_{W_p^s(0, T)} \leq \|\Phi_j\|_{L_p(\Gamma; W_p^s(0, T))} \|\varphi_i\|_{C^1(\bar{G})}.$$

As was noticed in the proof of Lemma 1, the embedding theorems state that  $W_p^s(0, T) \subset C([0, T])$ . Hence, we can assume that  $b_{ij} \in C([0, T])$ . In view of (15), we can write

$$\bar{q}_a = B^{-1} \bar{F} + R_0(\bar{q}_a), R_0(\bar{q}_a) = B^{-1} R(\bar{q}_a). \quad (22)$$

We can determine the vector  $\bar{q}_a$  from this equation. Indeed, consider the segment  $[0, \delta] \subset [0, T]$  and estimate the quantity  $\|R_0(\bar{q}_a)\|_{\tilde{W}_p^s(0, \delta)}$ . The second and third statements of Lemma 1 and the conditions on the coefficients and the functions  $\varphi_k$  imply that the entries of the inverse matrix  $B^{-1}$  also belong to the class  $W_p^s(0, T)$ . In this case the estimate (7) and Lemma 1 yield

$$\|R_0(\bar{q}_a)\|_{\tilde{W}_p^s(0, \delta)} \leq c \sum_{k=1}^m \|(\omega, L_0^* \varphi_k)\|_{\tilde{W}_p^s(0, \delta)}. \quad (23)$$

Estimate the norm of the expression  $(\omega, L_0^* \varphi_k)$ . The Minkowski and Holder inequalities and Lemma 1 ensure that

$$\|(\omega, L_0^* \varphi_k)\|_{L_p(0, \delta)} \leq \|\omega\|_{L_p(G; \tilde{W}_p^s(0, \delta))} \|L_0^* \varphi_k\|_{L_q(G; W_p^s(0, T))}. \quad (24)$$

In view of our conditions on the coefficients, the last factor is estimated by some constant independent of  $\delta$ . Estimate the first factor. We have

$$\int_G \|\omega\|_{\tilde{W}_p^s(0, \delta)}^p dx = \int_G \int_0^\delta \frac{|\omega|^p}{t^{sp}} dt dx + \int_G \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\omega(t_1, x) - \omega(t_2, x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx. \quad (25)$$

The Newton–Leibnitz formula validates the inequality

$$\left\| \frac{1}{t^s} \omega \right\|_{L_p(Q^\delta)} \leq c_1 \delta^{1/2} \|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)}. \quad (26)$$

Estimate the second summand on the right-hand side of (25). To this end, we first make the change of variables  $t_1 = \tau_1 \delta$ ,  $t_2 = \tau_2 \delta$  and next use the inequality  $\|\tilde{\omega}(x, \tau)\|_{W_p^s(0, 1)} \leq c \|\tilde{\omega}_\tau\|_{L_p(0, 1)}$

( $\tilde{\omega}(x, \tau) = \omega(x, \delta\tau)$ ) followed by the inverse change of variables. As a result, we arrive at the inequality

$$\int_{G_0} \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\omega(t_1, x) - \omega(t_2, x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx \leq c_1 \int_{G_0} \int_0^\delta |\omega_t(t, x)| dt dx \delta^{1/2}. \quad (27)$$

Thus, from (25)–(27) it follows that

$$\int_G \|\omega\|_{\tilde{W}_p^s(0,\delta)}^p dx \leq c_2 \delta^{1/2} \|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)} \leq c_2 \delta^{1/2} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}. \quad (28)$$

Therefore, taking (23) and Theorem 2 into account, we obtain the estimate

$$\|R_0(\bar{q}_a)\|_{\tilde{W}_p^s(0,\delta)} \leq c_3 c \delta^{1/2} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)} \leq c_4 \delta^{1/2} \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}(Q^\delta)}. \quad (29)$$

Lemma 1 implies the inequality

$$\|R_0(\bar{q}_a)\|_{\tilde{W}_p^s(0,\delta)} \leq c_5 \delta^{1/2} \|\bar{q}_a\|_{\tilde{W}_p^s(0,\delta)}, \quad (30)$$

where the constant  $c_5$  is independent of  $\delta$  and  $\bar{q}_a$ . Fix  $\delta > 0$  such that  $\delta^{1/2} c_5 < 1$ . In this case the operator  $R_0$  is a contraction and thereby the equation (22) is uniquely solvable in the space  $W_p^s(0, \delta)$ , of course under the condition that  $\tilde{\psi}_k' \in \tilde{W}_p^s(0, T)$ . We have that  $\psi_k' \in W_p^s(0, T)$ . Show that  $\psi_{0k} = \int_G v(t, x) \varphi_k(x) dx \in W_p^{1+s}(0, T)$  and  $\psi_{0k}'(0) = \psi_k'(0)$ , i. e.,  $\tilde{\psi}_{kt} \in \tilde{W}_p^s(0, T)$ . Multiply the equation in (17) by  $\varphi_k$  and integrate the result over  $G$ . We infer

$$\psi_{0k}'(t) = (\omega, L_0^* \varphi_k) - \sum_{i=1}^m q_i(0) \int_\Gamma \Phi_i \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial N} d\Gamma + (f, \varphi_k), k = 1, \dots, m. \quad (31)$$

In view of the condition (14) the right-hand side in this equality belongs to  $W_p^s(0, T)$  and the relations (16) and (31) for  $t=0$  yield  $\psi_{0k}'(0) = \psi_k'(0)$ . Thus,  $\tilde{\psi}_k \in \tilde{W}_p^s(0, T)$  for all  $k$  and thus the equation (22) is uniquely solvable on the segment  $[0, \delta]$ . Find a solution  $\omega \in W_p^{1,2}(Q^\delta)$  to the problem (18). Prove (19). Multiply the equation in (18) by  $\varphi_k$  and integrate the results over  $G$ . Using (17), (18), and integrating by parts, we obtain the equality

$$(\omega_t, \varphi_k) = (\omega, L_0^* \varphi_k) - \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t) \int_\Gamma \Phi_i \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial N} d\Gamma, k = 1, \dots, m.$$

The vector-function  $\bar{q}_a$  satisfies the system (20), subtracting its  $k$ -th equation from this equality and cancelling, we arrive at the equality  $\int_G \omega_t \varphi_k dx = \tilde{\psi}_k'$ ,  $k = 1, \dots, m$ , whose integration with respect to  $t$  and the initial condition validate (19) on  $[0, \delta]$ .

We now demonstrate that this solution is extendible to the whole segment  $[0, T]$ . We have defined the vector-function  $\bar{q}_a$  only on  $[0, \delta]$ . Extend  $\bar{q}_a$  by zero for  $t < 0$  and denote  $\bar{q}_b = \begin{cases} \bar{q}_a(t), t \in (0, \delta) \\ \bar{q}_a(2\delta - t), t \in [\delta, T] \end{cases}$ . The coordinates of  $\bar{q}_b$  are denoted by  $q_1^b, \dots, q_m^b$ . This vector-function belongs to  $W_p^{s,2s}(S)$ . Make the change  $\bar{q}^1 = \bar{q}_a - \bar{q}_b$ . The vector-function with the coordinates  $q_i^1$  is a solution to the system

$$\sum_{i=1}^m q_i^1(t) b_{ki} = \tilde{\psi}_k'(t) + (\omega, L_0^* \varphi_k) - \sum_{i=1}^m q_i^b(t) b_{ki}. \quad (32)$$

By definition of  $\bar{q}_b$ , the right-hand side in this equality and the vector  $\bar{q}^1$  vanish on  $[0, \delta]$ . Let  $\omega_0$  – be a solution to the problem

$$L\omega_0 = 0, B\omega_0|_S = \sum_{i=1}^m q_i^b \Phi_i, \omega_0|_{t=0} = 0. \quad (33)$$

In this case the function  $\omega_1 = \omega - \omega_0$  is a solution to the problem

$$L\omega_1 = 0, B\omega_1|_S = \sum_{i=1}^m q_i^1 \Phi_i, \omega_1|_{t=0} = 0. \quad (34)$$

By Theorem 1,  $\omega_1 = 0$  for  $t \in [0, \delta]$ . Thus, the problem of extension of  $\bar{q}_a$  is reduced to solving the system

$$\sum_{i=1}^m q_i^1(t) b_{ki} = \psi_{1k}'(t) + (\omega_1, L_0^* \varphi_k), \quad (35)$$

where  $\psi_{1k}' = \tilde{\psi}_k'(t) + (\omega_0, L_0^* \varphi_k) - \sum_{i=1}^m q_i^b(t) b_{ki}$ , and  $\omega_1$  is a solution to the problem (34). A solution to the system vanishes for  $t \leq \delta$ . We obtain the same system with zero Cauchy data at the point  $t = \delta$  and a new right-hand side  $\bar{F}$ . Next, we repeat the same arguments and estimates on the segment  $[\delta, 2\delta]$ . Without loss of generality, we can assume that the constants arising in estimating the norm of the operator  $R_0$  are the same. Thus, the system (35) is solvable on  $[\delta, 2\delta]$ . Repeating the arguments on  $[2\delta, 3\delta]$  and so on, we can construct a solution on the whole segment  $[0, T]$ . The estimate in the claim of the theorem has been actually proven in the proof.

**Remark.** At first sight, the well-posedness conditions (15) look rather strange and possibly arising in the method of the proof. However, employing other methods leads actually to the same conditions. It is possible that they are essential.

### Acknowledgement

The authors were supported by the grant on development of scientific schools with participation of young scientists of the Yurga State University.

### References

1. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 18, Amsterdam, North-Holland Publishing, 1978, 528 p.
2. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena*. Moscow, Yanus-K Publ., 2009, 299 p. (in Russ.).
3. Ozisik M.N., Orlando H.A.B. *Inverse heat transfer*. New-York, Taylor & Francis, 2000, 352 p.
4. Kostin A.B., Prilepko A.I. On some problems of recovering a boundary condition for a parabolic equation, I. *Differ. Equations*, 1996, Vol. 32, no. 1, pp. 113–122. (in Russ.).
5. Borukhov V.T., Korzyuk V.I. Primenenie neklassicheskikh kraevykh zadach dlya vosstanovleniya granichnykh rezhimov protsessov perenosa (Application of nonclassical boundary value problems for recovering boundary regimes of transfer processes). *Vestnik Belorusskogo universiteta* (Bulletin of Belarussian University), 1998, Ser. 1, no. 3, pp. 54–57. (in Russ.).
6. Tryanin A.P. Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem. *Journal of engineering physics*, 1987, Vol. 52, Issue 3, pp. 346–351. DOI: 10.1007/BF00872521
7. Borukhov V.T., Vabishchevich P.N., Korzyuk V.I. Reduction of a class of inverse heat-conduction problems to direct initial/boundary-value problems. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2000, Vol. 73, Issue 4, pp. 730–734. DOI: 10.1007/s10891-000-0082-9
8. Korotkii A.I., Kovtunov D. A. Reconstruction of boundary regimes in an inverse heat convection problem for an incompressible fluid. *Tr. IMM DVO AN*, 2006, Vol. 12, no. 2, pp. 88–97. (in Russ.).
9. Abylkairov U.U. Obratnaya zadacha integral'nogo nablyudeniya dlya obshchego parabolicheskogo uravneniya. *Matematicheskiy zhurnal*, 2003, Vol. 3, no. 4(10), pp. 5–12. (in Russ.).
10. Abylkairov U.U., Abiev A.A., Aitzhanov S.E. Obratnaya zadacha dlya sistemy teplovoy konveksii (Inverse problem for the system of thermal convection). *Proc. International Youth Scientific School-Conference "Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems"*, Novosibirsk, IM SB RAS Publ., 2009, pp. 10–11. (in Russ.).
11. Kozhanov A.I. Linear inverse problems for some classes of nonstationary equations. *Proc. VI International scientific school-conference for young scientists "Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problem"*, 2015, pp. 264–275. (in Russ.). DOI 10.17377/semi.2015.12.089
12. Iskenderov A.D., Akhundov A.Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations. *Doklady Mathematics*, 2009, Vol. 79, no. 1, pp. 73–75. DOI: 10.1134/S1064562409010219

13. Ismailov M.I., Kanca F. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2012, Vol. 20, no. 24, pp. 463–476. DOI: 10.1080/17415977.2011.629093
14. Li J., Xu Y. An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation. *J. Appl. Math. Comput.*, 2010, Vol. 34, pp. 195–206. DOI: 10.1007/s12190-009-0316-8
15. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, Vol. 396, Issue 2, pp. 546–554. DOI:10.1016/j.jmaa.2012.06.046
16. Kozhanov A.I. Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2017, Vol. 57, no. 6, pp. 956–966. DOI: 10.1134/S0965542517060082.
17. Pyatkov S.G., Safonov E.I. Determination of the Source Function in the Mathematical Models of Convection-Diffusion. *Mathematical notes of NEFU*, 2014, Vol. 21, no. 2, pp. 117–130. (in Russ.).
18. Kriksin Yu.A., Plushchev S.N., Samarskaya E.A., Tishkin V.F. The inverse problem of source reconstruction for convective diffusion equation. *Matem. Mod.*, 1995, Vol. 7, no. 11, pp. 95–108. (in Russ.).
19. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics*. New-York, Marcel Dekker, Inc., 1999, 744 p. DOI: 10.1201/9781482292985
20. Ivanchov M. *Inverse problems for equations of parabolic type*. Mathematical Studies Monograph Series 10, Lviv, VNTL Publishers, 2003, 238 p.
21. Verzhbitskii M.A., Pyatkov S.G. On Some Inverse Problems of Determining Boundary Regimes. *Mathematical notes of NEFU*, 2016, Vol. 23, no. 2, pp. 3–16. (in Russ.).
22. Ladyženskaja O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type. Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968, 648 p. DOI: 10.1090/mmono/023
23. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal  $L_p$ - $L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data. *Math. Z.*, 2007, Vol. 257, no. 1, pp. 193–224. DOI: 10.1007/s00209-007-0120-9

*Received February 6, 2018*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2018, vol. 10, no. 2, pp. 37–46*

---

УДК 517.956

DOI: 10.14529/mmph180204

### ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ<sup>1</sup>

**С.Г. Пятков, М.А. Вержбицкий**

*Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация*

*E-mail: s\_pyatkov@ugrasu.ru*

Рассматривается обратная задача об определении вместе с решением начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка неизвестных функций, входящих в граничное условие Дирихле. Задачи такого вида об определении граничных данных возникают в самых различных задачах математической физики: управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты, диагностика и идентификация теплопередачи в сверхзвуковых гетерогенных потоках, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов, исследование композиционных материалов и т. п. В качестве условий переопределения берутся интегралы от решения по пространственной области

---

<sup>1</sup> Публикация подготовлена в результате проведения научного исследования за счет средств гранта на развитие научных школ с участием молодых ученых федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет»

с весами. Проблема сводится к операторному уравнению типа Вольтерра. Мы устанавливаем теорему существования и единственности решений этой обратной задачи в пространствах Соболева. Решение является регулярным, т. е. все обобщенные производные, входящие в уравнение существуют и суммируемы с некоторой степенью. Доказательство основано на теореме о неподвижной точке и последовательном доказательстве разрешимости на малых промежутках времени. Приведена также оценка устойчивости решений. Полученные условия разрешимости близки к необходимым условиям.

*Ключевые слова:* обратная задача; параболическое уравнение; краевые и начальные условия; пространство Соболева; теорема существования и единственности; разрешимость.

### Литература

1. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
2. Алифанов, О.М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, А.В. Ненарокомов. – Москва: Янус-К, 2009. – 299 с.
3. Ozisik, M.N. Inverse heat transfer / M.N. Ozisik, H.A.V. Orlando. – New-York: Taylor & Francis, 2000. – 352 p.
4. Костин, А.Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. I / А.Б. Костин, А.И. Прилепко // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 1. – С. 107–116.
5. Борухов, В.Т. Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса / В.Т. Борухов, В.И. Корзюк // Вестник Белорусского университета. – 1998. – Сер. 1, № 3. – С. 54–57.
6. Трянин, А.П. Определение коэффициентов теплообмена на входе в пористое тело и внутри него из решения обратной задачи / А.П. Трянин // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 469–475.
7. Борухов, В.Т. Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам / В.Т. Борухов, П.Н. Вабишевич, В.И. Корзюк // Инженерно-физический журнал. – 2000. – Т. 73, № 4. – С. 742–747.
8. Короткий, А.И. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости / А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов // Тр. ИММ ДВО АН. – 2006. – Т. 12, № 2. – С. 88–97.
9. Абылкаиров, У.У. Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения / У.У. Абылкаиров // Математический журнал. – 2003. – Т. 3, № 4(10). – С. 5–12.
10. Абылкаиров, У.У. Обратная задача для системы тепловой конвекции / У.У. Абылкаиров, А.А. Абиев, С.Е. Айтжанов // Тезисы докладов Молодежной международной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск, ИМ СО РАН, 2009. – С. 10–11.
11. Кожанов, А.И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нелинейных нестационарных уравнений / А.И. Кожанов // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 264–275.
12. Iskenderov, A.D. Inverse problem for a linear system of parabolic equations / A.D. Iskenderov, A.Ya. Akhundov // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79, no. 1. – P. 73–75.
13. Ismailov, M.I. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data / M.I. Ismailov, F. Kanca // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2012. – Vol. 20, № 24. – P. 463–476.
14. Li, J. An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation / J. Li, Y. Xu // J. Appl. Math. Comput. – 2010. – Vol. 34. – P. 195–206.
15. Kerimov, N.B. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions / N.B. Kerimov, M.I. Ismailov // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – Vol. 396. – Issue 2. – P. 546–554.
16. Kozhanov, A.I. Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients / A.I. Kozhanov // Comput. Math. and Math. Phys. – 2017. – Vol. 57, № 6. – P. 956–966.

17. Пятков С.Г. Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии / С.Г. Пятков, А.Е. Сафонов // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 117–130.

18. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии / Ю.А. Криксин, С.Н. Плющев, Е.А. Самарская, В.Ф. Тишкин // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7, № 11. – С. 95–108.

19. Prilepko, A.I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New-York: Marcel Dekker, Inc. 1999. – 744 p.

20. Ivanchov, M. Inverse problems for equations of parabolic type / M. Ivancho // Mathematical Studies Monograph Series 10. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – 238 p.

21. Вержбицкий, М.А. О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов / М.А. Вержбицкий, С.Г. Пятков // Матем. Заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23, № 2. – С. 3–16.

22. Ladyženskaja, O.A. Linear and quasilinear equations of parabolic type / O.A. Ladyženskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralceva // Translations of Mathematical Monographs. – Vol. 23. – American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. – 648 p.

23. Denk, R. Optimal  $L_p$ - $L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Math. Z. – 2007. – Vol. 257, no. 1. – P. 193–224.

*Поступила в редакцию 6 февраля 2018 г.*

# ТОЧНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ НА ОСНОВЕ СПУСКА ПО УЗЛОВЫМ ПРЯМЫМ

А.Н. Тырсин<sup>1,2</sup>, А.А. Азарян<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Научно-инженерный центр «Надежность и ресурс больших систем и машин» УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

<sup>2</sup> Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: at2001@yandex.ru

При построении линейных моделей во многих случаях приходится сталкиваться со стохастической неоднородностью экспериментальных данных. Это проявляется в нарушении условий теоремы Гаусса–Маркова, в частности наблюдения могут быть засорены грубыми ошибками. В этих условиях оценивание параметров моделей требуется выполнять с помощью устойчивых методов. К их числу относят метод наименьших модулей. Однако известные алгоритмы его реализации являются достаточно эффективными лишь для малых размерностей моделей и ограниченного объема выборок. Цель данного исследования – разработка эффективных вычислительных алгоритмов реализации метода наименьших модулей, не имеющих ограничений на порядок моделей и объем экспериментальных данных. Описаны алгоритмы точного решения задачи оценивания параметров линейных регрессионных моделей методом наименьших модулей. Они основаны на спуске по узловым прямым. Для снижения вычислительных затрат использована особенность узловых прямых – все расположенные на каждой такой прямой узловые точки являются пересечением набора гиперплоскостей, из которых различными является только одна гиперплоскость. Данные алгоритмы значительно выигрывают по сравнению с известным переборным алгоритмом и могут эффективно использоваться на практике. Получена оценка вычислительной сложности алгоритма спуска по узловым прямым. Приведена схема алгоритма.

*Ключевые слова:* метод наименьших модулей; линейная регрессионная модель; алгоритм; узловая точка; узловая прямая; гиперплоскость; вычислительная сложность.

## Введение

Одной из распространенных задач при статистической обработке результатов экспериментальных исследований является оценивание неизвестных коэффициентов линейной регрессионной модели [1–4]

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$  – вектор измерений;  $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{n \times m} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$  – заданная матрица;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$  – вектор случайных ошибок;  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$  – вектор коэффициентов регрессии.

Среди прикладных статистических методов построения регрессионных зависимостей наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов (МНК). Использование МНК требует выполнения ряда предпосылок, называемых условиями Гаусса–Маркова [4, с. 6–7]. При их выполнении МНК-оценки параметров модели (1) являются состоятельными и несмещенными. Кроме того, если случайные ошибки имеют нормальный закон распределения, то МНК-оценки становятся эффективными. Однако использование МНК при нарушении условий Гаусса–Маркова может привести к значительным ошибкам при оценивании коэффициентов, а в случае присутствия в измерениях больших выбросов даже к несостоятельности оценок.

С целью обеспечения устойчивости оценок относительно отклонений случайных ошибок от гауссовой модели разработан ряд статистических методов, основанных на более общих предположениях относительно случайных ошибок. Одним из них является метод наименьших модулей (МНМ) [5, 6]. МНМ для задачи (1) имеет вид

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n |y_i - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle| \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m}. \quad (2)$$

Целевая функция  $Q(\mathbf{a})$  задачи (2) является выпуклой. Поскольку во всех точках, где у функции  $Q(\mathbf{a})$  существует производная, она линейна, то, следовательно, ее локальные минимумы могут быть только в особых точках. Известно несколько точных и приближенных методов решения задачи (2) [6–9].

Кусочно-линейный вид целевой функции позволяет рассчитывать на наличие быстрых и точных методов решения задачи (2). Однако в настоящее время в целом удовлетворительно решена только проблема ее приближенного решения. Здесь можно отметить метод вариационно-взвешенных квадратических приближений (называемый также алгоритмом Вейсфельда) [6, 7], подход, основанный на сведении данной проблемы к задаче линейного программирования и ее приближенное решение методом внутренней точки [10], численные методы спуска нулевого порядка [9]. Недостатком этих методов в первую очередь является неточное решение при относительной простоте целевой функции.

К точным методам относится сведение (2) к эквивалентной задаче линейного программирования [6, 11] и ее решение при помощи широко известного симплекс-метода и переборный алгоритм [9].

Использование симплекс-метода ограничено задачами малой размерности. Это вызвано накоплением погрешностей из-за ошибок округлений и требованием чрезмерно большого выделения памяти. Предложенное в [12] использование массивно-параллельных вычислений с использованием дробно-рациональных вычислений без округления устраняет проблему накопления вычислительных погрешностей, но приводит к существенному усложнению реализации и росту вычислительных затрат, затрудняющих широкое практическое применение данного подхода.

Второй метод [9] основан на переборе всех узловых точек, в которых не существует производная функции  $Q(\mathbf{a})$  ни по одному из возможных направлений пространства  $\mathbf{R}^m$ . Переборный алгоритм требует решения  $C_n^m$  систем линейных уравнений порядка  $m$ . Вычислительные погрешности здесь незначительны и не накапливаются. Однако с ростом  $n$  и  $m$  наблюдается экспоненциальный рост вычислительных затрат. Фактически практическое применение переборного алгоритма ограничено объемом выборки  $n < 200$  и числом коэффициентов регрессии  $m < 4$ . Однако отсутствие эффекта накопления вычислительных погрешностей делает возможным использование данного метода при условии ограничения числа перебираемых узловых точек.

Целью статьи является описание эффективного, точного вычислительного метода решения задачи (2), осуществляющего неполный перебор особых точек.

### Алгоритмы спуска по узловым прямым

**Обычный спуск.** Введем гиперплоскости  $\Omega_i = \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i, y_i)$  в виде уравнений:

$$y_i - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Зададим также узловые точки пересечения гиперплоскостей (3):

$$\mathbf{u}_{(k_1, \dots, k_m)} = \bigcap_{s \in M} \Omega_s, \quad M = \{k_1, \dots, k_m\}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_m, \quad k_i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4)$$



Обозначим  $U$  – множество всех узловых точек (4). Алгоритм точного решения задачи (2) основан на спуске к точному решению, двигаясь вдоль узловых прямых  $l$ , каждая из которых является пересечением  $(m - 1)$  различных гиперплоскостей  $\Omega_i$ :

$$l_{(k_1, \dots, k_{m-1})} : \bigcap_{i=k_1}^{k_{m-1}} \Omega_i, \quad k_l \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5)$$

В качестве начального приближения берется произвольная узловая точка, являющаяся пересечением  $m$  гиперплоскостей  $\Omega_{k_1}, \dots, \Omega_{k_m}$ . Исключив одну из гиперплоскостей, получим узловую прямую  $l$ . В любой узловой точке можно построить  $m$  таких узловых прямых. Выберем ту, вдоль которой целевая функция достигает наименьшего значения, которое всегда будет достигаться в одной из узловых точек. Найдя эту точку, продолжим движение из нее по тому же принципу. В результате будет найдена узловая точка, спуск из которой невозможен. И эта узловая точка будет являться точным решением задачи (2). В основе алгоритма лежат следующие теоремы.

**Теорема 1.** Рассмотрим модель (1), для которой имеется выборка наблюдений  $(\mathbf{x}_i, y_i) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, y_i)$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , и пусть заданы функция  $Q(\mathbf{a})$  задачи (2), гиперплоскости (3) и множество  $U$  всех узловых точек (4). Тогда функция (2) всегда имеет точку глобального минимума, эта точка либо единственна и принадлежит  $U$ , либо состоит из выпуклого линейного многогранника, вершины которого являются точками из  $U$ .

*Доказательство теоремы 1.* Известно, что выпуклая, непрерывная, кусочно-линейная функция либо имеет глобальный минимум, либо стремится к минус бесконечности. А поскольку функция  $Q(\mathbf{a})$  является также ограниченной снизу ( $Q(\mathbf{a}) \geq 0$  как сумма модулей) функцией, то она всегда имеет точку глобального минимума.

Пусть  $\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_m^*)^T$  – стационарная точка и является точкой минимума функции  $Q(\mathbf{a})$ . Тогда ее градиент в этой точке равен нулю. Поскольку  $Q(\mathbf{a})$  кусочно-линейная функция, то из равенства  $\text{grad} Q(\mathbf{a}^*) = \mathbf{0}$  следует, что функция  $Q(\mathbf{a})$  является постоянной функцией на выпуклом многограннике с вершинами  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^l$ , гранями которой являются гиперплоскости (3), имеющем вид [13]:

$$A = \{ \mathbf{a} : \mathbf{a} = \sum_{k=1}^l \lambda_k^2 \mathbf{a}^k, \sum_{k=1}^l \lambda_k^2 = 1 \}.$$

Функция  $Q(\mathbf{a})$  является постоянной до граничных точек многогранника  $A$ , лежащих на гиперплоскостях (3) Следовательно, вершины  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^l$  этого многогранника являются узловыми точками и функция  $Q(\mathbf{a})$  достигает минимума и в этих точках.

Все гиперплоскости (3), и только они являются особыми точками функции  $Q(\mathbf{a})$ , поскольку только в них она не дифференцируема. Если взять  $m - 1$  произвольных невырожденных соотношений вида  $l_i = y_i - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle = 0$ , то они в совокупности определяют прямую (5) в пространстве  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  и вместе с тем плоскость  $P_{(Q, k_1, \dots, k_{m-1})}$ , параллельную оси  $Q$  в пространстве  $(Q, a_1, a_2, \dots, a_m)$ . При соединяя к системе (5) выражение (2) и рассматривая их совместно, найдем уравнение ломанной  $M$ , полученной в результате пересечения поверхности (2) плоскостью  $P_{(Q, k_1, \dots, k_{m-1})}$ .

Если с помощью уравнений, входящих в систему (5), выразить  $m - 1$  неизвестных  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$  через оставшееся неизвестное и подставить в выражение (2), то получим уравнение проекции ломанной  $M$  на плоскость  $(Q, a_m)$  (рис. 1). Точки  $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_{n-m+1}}$  являются проекциями на эту плоскость точек пересечения прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  гиперплоскостями (3), не вошедшими в (5).

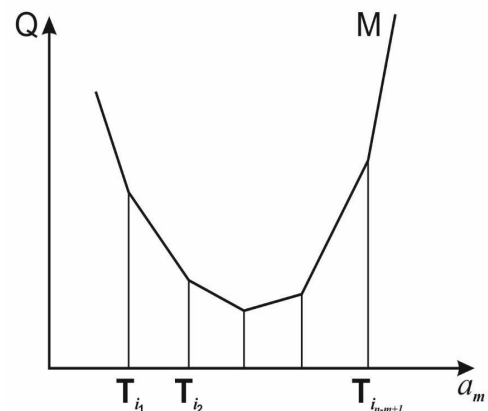


Рис. 1. Вид функции

Функция  $Q(a_m)$  на плоскости  $(Q, a_m)$  – выпуклая и кусочно-линейная с особыми точками  $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_{n-m+1}}$ , которые являются узловыми точками. Отсюда следует, что функция  $Q(\mathbf{a})$  достигает минимума в узловой точке.

**Теорема 2.** Алгоритм спуска вдоль узловых прямых для нахождения решения задачи (2), сходится к точному решению за конечное число шагов.

*Доказательство теоремы 2.* На каждом шаге алгоритма мы находим узловую точку с все меньшим значением целевой функции, а поскольку количество узловых точек конечно, то алгоритм выполняется за конечное число шагов.

Докажем, что алгоритм всегда будет достигать минимума целевой функции (т. е. решения). Допустим, что мы находимся на  $k$ -м шаге алгоритма в какой-то узловой точке и пытаемся осуществить спуск вдоль одной из  $m$  узловых прямых, проходящих через эту точку, к другой узловой точке с меньшим значением целевой функции. Покажем, что либо мы сможем найти такую точку, либо текущая узловая точка является минимальной.

Целевая функция  $Q(\mathbf{a})$  является выпуклой функцией в пространстве  $\mathbf{R}^m$ . Поэтому, если взять произвольную точку  $\tilde{\mathbf{x}}$  и  $m$  линейно независимых прямых  $\tilde{l}_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), проходящих через нее, то либо найдется такая окрестность этой точки, в которой целевая функция будет убывать хотя бы вдоль одного из направлений, либо в текущей узловой точке достигается минимум целевой функции.

Поскольку вероятность того, что случайная величина (случайные погрешности) более одного раза примет одно и то же значение, равна нулю, то узловые прямые, проходящие через узловую точку, являются линейно независимыми. То есть вдоль одной из них целевая функция убывает, причем она будет убывать вплоть до следующей узловой точки на этой узловой прямой, поскольку между двумя соседними узловыми точками, целевая функция (2) будет линейна, так как все ее подмодульные выражения не будут менять знак. Действительно, смена знака означает пересечение одной из образующих гиперплоскостей, что приведет к образованию узловой точки, а мы рассматриваем часть узловой прямой между двумя соседними узловыми точками.

На практике из-за конечной точности измерений гипотетически могут возникнуть ситуации, когда узловые прямые, проходящие через узловую, окажутся параллельными. В этом случае узловой точки не существует, и переходим к рассмотрению другой узловой прямой.

Таким образом, либо произвольная узловая точка является минимумом целевой функции, либо хотя бы по одной из проходящих через нее узловых прямых можно сделать переход к узловой точке с меньшим значением целевой функции. Теорема доказана.

Поясним этот алгоритм, используя рис. 1 (для случая  $m = 2$ ). В качестве начальной точки выберем точку  $H$ . Через нее проходят прямые I и II. Сначала рассмотрим прямую I. Среди узловых точек, которые лежат на этой прямой, выбираем ту, в которой достигается минимальное значение целевой функции (таким образом, происходит спуск по прямой). Предположим, что такой точкой является точка  $C$ . Рассмотрим прямую II. Спускаясь по прямой II, находим на ней точку, в которой достигается минимальное значение. Пусть, например, эта точка  $L$ . Далее, сравнивая значения целевой функции в точках  $C$  и  $L$ , выбираем ту, в которой достигается минимальное значение. Пусть, например, эта точка  $C$ . Через нее помимо прямой I проходит прямая III. На этой прямой находим очередную точку, в которой достигается минимальное значение целевой функции. Далее, сравнивая значения целевой функции в точках  $C$  и  $D$ , выбираем ту, в которой достигается минимальное значение. Пусть такой точкой является  $D$ .

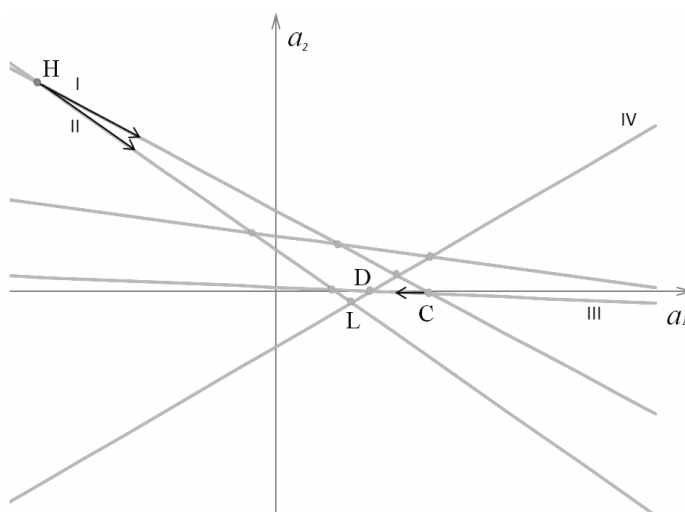


Рис. 2. Спуск по узловым прямым

Допустим, что на прямой IV, проходящей через  $D$ , точкой минимума является сама точка  $D$ . Тогда в качестве решения выбираем точку  $D$ , в которой достигается минимум целевой функции (если бы нашлась другая точка минимума на этой прямой, то из нее продолжили бы дальнейший спуск).

**Спуск с использованием разреженных матриц.** Двигаясь вдоль прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ , для нахождения узловых точек, принадлежащих этой прямой, нужно для каждой точки решать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка  $m$ :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_{k_1,2} + a_3 x_{k_1,3} + \dots + a_m x_{k_1,m} = y_{k_1}, \\ a_1 + a_2 x_{k_2,2} + a_3 x_{k_2,3} + \dots + a_m x_{k_2,m} = y_{k_2}, \\ \dots \\ a_1 + a_2 x_{k_{m-1},2} + a_3 x_{k_{m-1},3} + \dots + a_m x_{k_{m-1},m} = y_{k_{m-1}}, \\ a_1 + a_2 x_{i,2} + a_3 x_{i,3} + \dots + a_m x_{i,m} = y_i, \end{cases} \quad (6)$$

где  $k_1 < k_2 < \dots < k_{m-1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}\}$ .

Очевидно, что СЛАУ двух различных узловых точек, принадлежащих этой прямой, отличаются лишь одним (последним) уравнением. Следовательно, вычислительная эффективность алгоритма спуска существенно повысится, если для нахождения узловых точек, которые лежат на прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ , первые  $(m-1)$  строк расширенной матрицы, соответствующей СЛАУ (6), предварительно преобразуем с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Расширенная матрица СЛУ прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  имеет вид

$$\mathbf{A}_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k_1,2} & x_{k_1,3} & \dots & x_{k_1,m-1} & x_{k_1,m} & y_{k_1} \\ 1 & x_{k_2,2} & x_{k_2,3} & \dots & x_{k_2,m-1} & x_{k_2,m} & y_{k_2} \\ 1 & x_{k_3,2} & x_{k_3,3} & \dots & x_{k_3,m-1} & x_{k_3,m} & y_{k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k_{m-1},2} & x_{k_{m-1},3} & \dots & x_{k_{m-1},m-1} & x_{k_{m-1},m} & y_{k_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Применив алгоритм прямого хода метода Гаусса, преобразуем матрицу  $\mathbf{A}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  к ступенчатому виду

$$\mathbf{A}'_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k_1,2} & x_{k_1,3} & \dots & x_{k_1,m-1} & x_{k_1,m} & y_{k_1} \\ 0 & 1 & x'_{k_2,3} & \dots & x'_{k_2,m-1} & x'_{k_2,m} & y'_{k_2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x'_{k_3,m-1} & x'_{k_3,m} & y'_{k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x'_{k_{m-1},m} & y'_{k_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Используя ступенчатую матрицу  $\mathbf{A}'_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ , можно значительно сократить вычислительные затраты на нахождение всех узловых точек, лежащих на прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ . Действительно, для каждой искомой узловой точки имеем расширенную матрицу

$$\mathbf{A}_{(k_1, \dots, k_{m-1}, i)} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k_1,2} & x_{k_1,3} & \dots & x_{k_1,m-1} & x_{k_1,m} & y_{k_1} \\ 0 & 1 & x'_{k_2,3} & \dots & x'_{k_2,m-1} & x'_{k_2,m} & y'_{k_2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x'_{k_3,m-1} & x'_{k_3,m} & y'_{k_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x'_{k_{m-1},m} & y'_{k_{m-1}} \\ 1 & x_{i,2} & x_{i,3} & \dots & x_{i,m-1} & x_{i,m} & y_i \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $k_1 < k_2 < \dots < k_{m-1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}\}$ .

Варьируя номер  $i$  в (7), найдем все узловые точки, лежащие на прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ .

**Спуск с использованием разреженных матриц и с учетом направления спуска.** Вычислительную эффективность алгоритма спуска можно повысить, рассматривая направление спуска. Поясним как.

Используя ступенчатую матрицу  $A'_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$  и решив СЛАУ, соответствующую расширенной матрице (7), находим значение  $m$ -го коэффициента  $a_m^{(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, i)}$  ( $k_1 < k_2 < \dots < k_{m-1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}\}$ ) для каждой узловой точки. После чего по возрастанию  $a_m^{(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, i)}$  упорядочиваем все узловые точки, которые лежат на прямой  $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$ , и выполняем описанный выше алгоритм спуска, но с учетом направления. Если при непосредственном переходе от одной узловой точки к другой значение целевой функции увеличивается, то в этом направлении значение целевой функции будет увеличиваться во всех узловых точках (вытекает из выпуклости целевой функции). Назовем такое направление «плохим». Для осуществления спуска до вычисления значения целевой функции в очередной узловой точке рассматриваем направление спуска. Если оно «плохое», то переходим к следующей точке, не вычисляя в данной узловой точке ни значение целевой функции, ни значения коэффициентов  $a_j^{(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, i)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m-1$ .

### Анализ вычислительных затрат алгоритмов спуска по узловым прямым

Вспользуемся методом статистических испытаний Монте-Карло [14]. В таблице для 1 000 испытаний приведены средние значения общего количества рассмотренных узловых точек  $L$  и узловых прямых  $P$  (переходов с одной прямой на другую) в алгоритме спуска с использованием разреженных матриц и с учетом направления спуска для некоторых значений  $n$  и  $m$ .

Средние количества рассмотренных узловых точек и узловых прямых в алгоритме спуска с использованием разреженных матриц и с учетом направления спуска

$n$	Кол-во узловых точек $L$					Кол-во узловых прямых $P$				
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
30	56	91	127	168	211	5,2	6,6	7,7	8,8	9,6
50	85	136	197	262	334	6,1	8,0	9,8	11,3	12,7
100	148	235	348	459	604	7,3	9,9	12,3	14,3	16,8
150	214	337	490	655	847	7,9	10,8	13,7	16,3	19,0
300	397	618	895	1205	1529	9,1	12,7	16,1	19,6	22,9
500	644	1002	1441	1905	2477	9,8	13,9	18,0	21,8	26,0
700	881	1417	2008	2665	3390	10,4	15,0	19,1	23,5	28,1
900	1123	1752	2505	3330	4242	10,9	15,5	20,0	24,4	29,3
1000	1257	1946	2771	3676	4701	11,0	15,7	20,3	25,0	30,1
1200	1461	2341	3345	4400	5626	11,3	16,3	21,0	26,1	31,2
1500	1855	2928	4043	5413	6973	11,8	16,8	21,7	26,9	32,4
1700	2155	3294	4600	6165	7860	12,0	17,1	22,1	27,6	33,1
1850	2278	3520	5004	6763	8602	12,1	17,4	22,5	28,0	33,5
2000	2453	3867	5363	7215	9204	12,2	17,6	22,8	28,2	33,8

Оценим вычислительные затраты спуска с использованием разреженных матриц и с учетом направления спуска. Для этого необходимо оценить средние количества рассмотренных узловых точек  $L$  и узловых прямых  $P$ . Анализ полученных результатов для различных  $n$  и  $m$  показал, что  $L \sim O(mn)$ ,  $P \sim O(m \ln n)$ .

**Теорема 3.** Алгоритм спуска по узловым прямым имеет вычислительную сложность

$$W = O(m^2 n^2 + m^4 n \ln n + m^2 n \ln^2 n).$$

Доказательство теоремы 3. Оценим вычислительную сложность всех основных функций, заложенных в базисе алгоритма спуска по узловым прямым. Его схема приведена на рис. 3.

Функция trapezoidalMatrix расширяет матрицу размера  $(m-1) \times (m+1)$  приводит к трапециевидному виду за  $(m-1)$  итерацию. В ходе  $i$ -й итерации выполняется  $(m+2-i)(2m-1-2i)$  операций умножения и вычитания. Следовательно, общее количество выполненных операций

$$I = \sum_{i=1}^{m-1} (m+2-i)(2m-1-2i) = 2 \sum_{i=1}^{m-1} (m+2-i)^2 - 5 \sum_{i=1}^{m-1} (m+2-i) = [j = m+2-i] = 2 \sum_{j=3}^{m+1} j^2 - 5 \sum_{j=3}^{m+1} j.$$

Известно, что  $\sum_{j=1}^m j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$  и  $\sum_{j=1}^m j = \frac{m(m+1)}{2}$ , поэтому

$$I = 2 \cdot \left( \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} - 5 \right) - 5 \cdot \left( \frac{(m+1)(m+2)}{2} - 3 \right) = O(m^3).$$

Функция getMCoeff к трапециевидной матрице размера  $(m-1) \times (m+1)$  добавляет строку и вычисляет  $m$ -й коэффициент. Здесь выполняется  $(m-1)$  итераций. В ходе  $i$ -й итерации выполняется  $2(m+1-i)$  операций умножения и вычитания (кроме первой итерации, во время которой выполняется не  $2m$ , а  $m$  операций умножения и вычитания). Следовательно, общее количество

выполненных операций будет равно  $2 \sum_{i=1}^{m-1} (m+1-i) + m - 1 = m^2 - 1 = O(m^2)$ .

Функция obj вычисляет и возвращает значение целевой функции  $Q(\mathbf{a})$ . Очевидно, что функция obj имеет  $O(mn)$  вычислительную сложность.

Функция sort реализует сортировку полученного массива. Известно, что сортировка Хоара в среднем имеет для входного массива из  $n$  элементов  $O(n \ln n)$  вычислительную сложность [15].

Функция descent, имея матрицу вида (7) и  $m$ -й коэффициент, вычисляет остальные коэффициенты и вызывает функцию obj. Данные действия выполняются циклически, количество итераций примерно равно  $L/(m \cdot P) = O(mn)/(m \cdot (m \ln n)) = O(n/(m \ln n))$ .

Для вычисления остальных коэффициентов выполняется  $(m-1)$  итераций. В ходе  $i$ -й итерации выполняется  $2i$  операций умножения и вычитания. Следовательно, общее количество выполненных операций  $2 \sum_{i=1}^{m-1} i = m^2 - m = O(m^2)$ .

Поскольку функция obj имеет вычислительную сложность  $O(mn)$ , то функция descent имеет  $O(n \cdot (mn + m^2) / m \ln n)$  вычислительную сложность.

Теперь из схемы работы алгоритма получим, что спуск по узловым прямым имеет вычислительную сложность

$$O \left\{ m \ln n \cdot \left[ m \cdot \left( m^3 + (n-m) \cdot m^2 + (n-m) \cdot \ln(n-m) + \frac{n}{m \ln n} \cdot (m^2 + mn) \right) \right] \right\} = \\ = O(m^2 n^2 + m^4 n \ln n + m^2 n \ln^2 n + m^3 n) = O(m^2 n^2 + m^4 n \ln n + m^2 n \ln^2 n).$$

Отметим, что для  $n > \max(\ln^2 n; m^2 \ln n)$  вычислительная сложность спуска по узловым прямым  $W = O(m^2 n^2)$ .

## Выводы

Предложены точные алгоритмы реализации метода наименьших модулей при оценивании параметров линейных регрессионных моделей, основанные на спуске по узловым прямым.

Данные алгоритмы позволяют значительно снизить вычислительные затраты при точной реализации метода наименьших модулей. Выигрыш достигается за счет того, что вместо перебора узловых точек осуществляется спуск по ним. Вычислительная сложность спуска по узловым прямым позволяет на практике реализовать точное оценивание методом наименьших модулей для любых размеров экспериментальных данных.



4. Айвазян, С.А. Прикладная статистика: Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
5. Bloomfield, P. Least absolute deviations: theory, applications, and algorithms / P. Bloomfield, W.L. Steiger. – Boston-Basel-Stuttgart: Birkhauser, 1983. – 349 p.
6. Мудров, В.И. Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Радио и связь, 1983. – 304 с.
7. Weiszfeld, E. On the point for which the sum of the distances to  $n$  given points is minimum / E. Weiszfeld // *Annals of Operations Research*. – 2009. – Vol. 167, Issue 1. – P. 7–41.
8. Акимов, П.А. Уровни неоптимальности алгоритма Вейсфельда в методе наименьших модулей / П.А. Акимов, А.И. Матасов // *Автоматика и телемеханика*. – 2010. – № 2. – С. 4–16.
9. Тырсин, А.Н. Оценивание линейных регрессионных уравнений с помощью метода наименьших модулей / А.Н. Тырсин, К.Е. Максимов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2012. – Т. 78, № 7. – С. 65–71.
10. Boyd, S. *Convex optimization* / S. Boyd, L. Vandenberghe. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 730 p.
11. Зуховицкий, С.И. Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
12. Панюков, А.В. Применение массивно-параллельных вычислений для решения задач линейного программирования с абсолютной точностью / А.В. Панюков, В.В. Горбик // *Автоматика и телемеханика*. – 2012. – № 2. – С. 73–88.
13. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 469 с.
14. Михайлов, Г.А. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло / Г.А. Михайлов, А.В. Войтишек. – М.: Академия, 2006. – 366 с.
15. Алгоритмы: построение и анализ / Т.Х. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. – М.: Вильямс, 2013. – 1323 с.

*Поступила в редакцию 16 января 2017 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2018, vol. 10, no. 2, pp. 47–56*

---

DOI: 10.14529/mmph180205

## EXACT EVALUATION OF LINEAR REGRESSION MODELS BY THE LEAST ABSOLUTE DEVIATIONS METHOD BASED ON THE DESCENT THROUGH THE NODAL STRAIGHT LINES

**A.N. Tyrsin<sup>1,2</sup>, A.A. Azaryan<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Science and Engineering Center «Reliability and Resource of Large Systems and Machines», Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation*

*E-mail: at2001@yandex.ru*

When building linear models, in many cases one has to deal with stochastic nonhomogeneity of experimental data. This manifests itself in violation of the assumptions of the Gauss–Markov theorem, in particular, observations can contain outliers. Under these circumstances the estimation of the parameters of models is required to be performed using resistant methods. Among those is the least absolute deviations method. However, the known algorithms for its implementation are sufficiently effective only for small dimensions of models and a limited volume of samples. The purpose of this study is the development of effective computational algorithms for implementation of the least absolute deviations method, which have no limitations as to the order of models, and the amount of experimental data. Algorithms for the exact solution of the problem on estimating the parameters of linear regression models by the least absolute deviations method are described. They are based on the descent through the nodal straight lines. To reduce computational costs, the particular feature of nodal straight lines is used – all nodes lo-

cated on each such straight line are intersections of a set of hyperplanes, of which only one hyperplane is different. These algorithms significantly outperform the best-known brute-force search and can be effectively used in practice. The computational complexity of the descent algorithm for nodal straight lines is assessed. The scheme of the algorithm is provided.

*Keywords:* the least absolute deviations method; linear regression model; algorithm; nodal point; nodal straight line; hyperplane; computational complexity.

### References

1. Kendel M.D., St'yuart A. *Statisticheskie vyvody i svyazi* (Statistical Inferences and Relationships). Moscow, Nauka Publ., 1973, 899 p. (in Russ.).
2. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike* (A Handbook on Probability Theory and Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1985, 640 p. (in Russ.).
3. Demidenko E.Z. *Lineynaya i nelineynaya regressiya* (Linear and nonlinear regression). Moscow, Finansy i statistika Publ., 1981, 302 p. (in Russ.).
4. Ayvazyan S.A., Enyukov I.S., Meshalkin L.D. *Prikladnaya statistika: Issledovanie zavisimostey* (Applied statistics: Dependency Studies). Moscow, Finansy i statistika Publ., 1985, 487 p. (in Russ.).
5. Bloomfield P., Steiger W.L. *Least absolute deviations: theory, applications, and algorithms*. Boston-Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1983, 349 p.
6. Mudrov V.I., Kushko V.L. *Metody obrabotki izmereniy: kvazipravdopodobnye otsenki* (Measurement processing methods: quasi-truth estimates). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1983, 304 p. (in Russ.).
7. Weiszfeld E. On the point for which the sum of the distances to  $n$  given points is minimum. *Annals of Operations Research*, 2009, Vol. 167, no. 1, pp. 7–41. DOI: 10.1007/s10479-008-0352-z
8. Akimov P.A., Matasov A.I. Levels of nonoptimality of the Weiszfeld Algorithm in the least-modules method. *Automation and Remote Control*, 2010, Vol. 71, Issue 2, pp. 172–184. DOI: 10.1134/S0005117910020025
9. Tyrsin A.N., Maksimov K.E. Estimation of the Linear Regression Equations Using the Least-Modules Method. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2012, Vol. 78, no. 7, pp. 65–71. (in Russ.).
10. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex optimization*. Cambridge, Cambridge University Press, 2004, 730 p. DOI: 10.1017/CBO9780511804441
11. Zukhovitskiy S.I., Avdeeva L.I. *Lineynoe i vypukloe programmirovaniye* (Linear and convex programming). Moscow, Nauka Publ., 1967, 460 p.
12. Panyukov A.V., Gorbik V.V. Using massively parallel computations for absolutely precise solution of the linear programming problems. *Automation and Remote Control*, 2012, Vol. 73, Issue 2, pp. 276–290. DOI: 10.1134/S0005117912020063
13. Rokafellar R. *Vypuklyy analiz* (Convex analysis). Moscow, Mir Publ., 1973, 469 p. (in Russ.).
14. Mikhaylov G.A., Voytishchik A.V. *Chislennoe statisticheskoe modelirovaniye. Metody Monte-Karlo* (Numerical statistical modeling. Monte Carlo methods). Moscow, Akademiya Publ., 2006, 368 p. (in Russ.).
15. Kormen T.Kh., Leyzerson Ch., Rivest R., Shtayn K. *Algoritmy: postroyeniye i analiz* (Algorithms: construction and analysis). Moscow, Vil'yams Publ., 2013, 1323 p. (in Russ.).

*Received January 16, 2017*



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ИЗОБАРИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИСТАЛЛОВ НИТРОСОЕДИНЕНИЙ

**Ю.М. Ковалев**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: kovalevym@susu.ru*

Предложен вид уравнений состояния молекулярных кристаллов нитросоединений, построенный на основании разделения свободной энергии Гельмгольца на внутримолекулярную и межмолекулярную составляющие. Тепловую часть внутренней энергии и давления молекулярного кристалла предлагается аппроксимировать приближением Дебая для межмолекулярной и приближением Эйнштейна для внутримолекулярной составляющей. Данное разделение энергии Гельмгольца позволило получить в явном виде выражения для всех термодинамических величин, входящих в уравнения состояния. Предположение о том, что изотермическая скорость звука молекулярного кристалла при температуре 0 К определяется исключительно упругими характеристиками кристалла, дало возможность получить зависимость коэффициента Грюнайзена от объема. Определенные в работе зависимости термодинамических величин от температуры и объема были использованы для построения аналога уравнения Грюнайзена для молекулярных кристаллов и определения зависимости изобарического коэффициента объемного расширения кристалла от температуры. Оказалось, что для получения расчетных значений объемов элементарных ячеек кристаллов ТАТБ при интегрировании уравнения Грюнайзена по температуре, можно использовать высоко температурное приближение для функции теплоемкости Дебая. Полученная теоретическая зависимость изобарического коэффициента объемного расширения кристалла от температуры указывает на автоматическое выполнение условия стремления его к нулю при стремлении температуры к нулю. Проведение сравнительного анализа расчетных и экспериментальных значений объемов элементарных ячеек молекулярных кристаллов 1,3,5 – 2,4,6 – тринитробензола (ТАТБ) в зависимости от температуры показало их удовлетворительное совпадение с точностью не более 3 %.

*Ключевые слова: уравнение состояния; молекулярный кристалл; энергия Гельмгольца; постоянная Планка; постоянная Больцмана; приближение Дебая; приближение Эйнштейна.*

### Введение

Построение уравнений состояния в широком диапазоне давлений является необходимым элементом для математического моделирования нестационарных газодинамических процессов импульсного воздействия на вещество [1–2]. Это связано с тем, что в основе математических моделей механики сплошных сред, термодинамики, электродинамики и т. д. лежат законы сохранения массы, импульса и энергии, которые не являются замкнутой системой и требуется определить зависимости между входящими в уравнения сохранения величинами [3–4].

Уравнения состояния определяют фундаментальную связь между термодинамическими параметрами вещества, не зависящую от способа достижения тех или иных значений этих параметров. Математические модели термодинамических свойств вещества постоянно совершенствуются. Для анализа и проверки адекватности предлагаемых математических моделей требуется наличие экспериментальных данных в широком диапазоне температур и давлений.

Применение строгих теоретических методов расчета термодинамических свойств материалов даже в ограниченных интервалах термодинамических параметров не всегда позволяет получать достоверные результаты. В этой ситуации особое значение приобретают методы построения полуэмпирических уравнений состояния [5]. В данном случае вид функциональных зависимостей термодинамического потенциала для полуэмпирического описания определяется из теоретических соображений, а результаты экспериментов используются для определения входящих в эти зависимости коэффициентов. Несмотря на то, что решению задачи построения уравнений состояния молекулярных кристаллов посвящено достаточно большое количество как экспериментальных, так и теоретических работ, теория построения уравнений состояния молекулярных кристаллов и нитросоединений далека от своего завершения [1, 6, 7]. Это связано с тем, что с одной стороны теоретическое определение зависимостей, характеризующих поведение твердых взрывчатых веществ (ВВ), которые относятся к молекулярным кристаллам, осложняется большим числом внутренних степеней свободы молекул, входящих в состав молекулярного кристалла нитросоединений, а с другой стороны проведение экспериментальных работ ограничено требованиями безопасности.

Известно, что термодинамические свойства вещества полностью определяются, если известен один из термодинамических потенциалов. Для твердых тел удобно исходить из определения свободной энергии Гельмгольца  $F(V, T)$ , которая наиболее простым образом связана с моделью строения вещества [6–8]:

$$F = U + E_0 + kT \sum_{\alpha} \ln(1 - \exp(-\frac{h\omega_{\alpha}}{kT})), \quad E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} h\omega_{\alpha}. \quad (1)$$

Здесь  $U$  – энергия взаимодействия между атомами;  $V$  – удельный объем;  $T$  – температура тела;  $h$  – постоянная Планка;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\omega_{\alpha}$  – частоты нормальных колебаний;  $E_0$  – энергия нулевых колебаний. Суммирование в формуле (1) производится как по частотам колебаний молекул, образующих кристалл, так и по частотам колебаний атомов, входящих в состав молекул.

Если известен вид функции свободной энергии Гельмгольца  $F(V, T)$  и определены все значения параметров, входящих в описание функции  $F(V, T)$ , то дифференцированием могут быть найдены выражения для определения всех измеряемых и вычисляемых термодинамических величин [9].

В настоящее время принято считать, что в уравнения состояния молекулярных кристаллов входят две составляющие: тепловая и «холодная» [1, 5, 10, 11]. Тепловая составляющая определяется колебательным движением молекул, входящих в состав кристалла, а холодная составляющая – изменением энергии взаимодействия, как внутри молекулы, так и между молекулами, входящих в состав кристалла, в зависимости от объема. Для получения достоверных результатов необходима независимая верификация тепловой и «холодной» составляющих уравнения состояния по известным экспериментальным данным. Для тепловой составляющей уравнения состояния это могут быть экспериментальные данные по зависимости теплоемкости и объема элементарной ячейки молекулярного кристалла от температуры.

Целями настоящего исследования являются:

1. Получение функциональной зависимости изобарического коэффициента объемного расширения молекулярного кристалла от температуры.
2. Верификация полученной зависимости изобарического коэффициента объемного расширения от температуры по экспериментальным данным для 1,3,5 – 2,4,6 – тринитробензола (ТАТБ).

### **Уравнения состояния молекулярных кристаллов нитросоединений для описания зависимости изобарического коэффициента объемного расширения от температуры**

Известно, что энергия взаимодействия между атомами молекулярного кристалла складывается из внутримолекулярной и межмолекулярной. Внутримолекулярная энергия определяется энергией валентных взаимодействий атомов внутри молекулы. Межмолекулярная энергия является энергией не валентных взаимодействий атомов между молекулами. Если

межмолекулярная (кристаллическая) энергия  $U_C$  зависит от пространственного расположения молекул, т. е. от объема, то внутримолекулярная энергия  $U_M$  зависит исключительно от величины валентных связей и валентных углов. Поэтому целесообразно разбиение энергии взаимодействия между атомами  $U$  в равенстве (1) на две составляющие: внутримолекулярную энергию  $U_M$  и межмолекулярную энергию  $U_C$ .

Все частоты нормальных колебаний в кристалле можно разделить на низкочастотные и высокочастотные. К низкочастотным колебаниям можно отнести шесть колебаний молекулы как целого (три колебания центра масс и три угла Эйлера) а также колебания внутри молекулы, зависящие от кристаллического поля, например торсионные колебания нитрогрупп. В дальнейшем низкочастотные колебания будем называть *деформационными* (акустическими). Остальные колебания внутри молекул будем относить к высокочастотным (оптическим) колебаниям. Учитывая тот факт, что высокочастотные колебания внутри молекулы на порядок больше *деформационных* частот, можно ввести две характеристические температуры и разделить колебательную составляющую свободной энергии на низкочастотную (акустическую) и высокочастотную (оптическую). В силу того, что частоты *деформационных* колебаний определяются изменением энергии  $U_C$ , т. е. энергии невалентных взаимодействий между молекулами, то только эти частоты нормальных колебаний и будут зависеть от объема. Данное предположение было успешно применено в работе [12] для расчета температуры на фронте ударной волны для ряда органических нитросоединений и экспериментально подтверждено в работе [13] для нитрометана.

Предположив возможность использования для низкочастотной составляющей свободной энергии подхода Дебая, а для высокочастотной – подхода Эйнштейна [11, 14], перепишем выражение (1) в виде

$$F = U_C + U_M + E_0 + 3MRT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \xi^2 \ln(1 - \exp(-\xi)) d\xi + (3N - M)RT \ln \left( 1 - \exp \left( -\frac{\theta_E}{T} \right) \right), \quad (2)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная, поделенная на молекулярную массу вещества  $\mu$ ;  $M$  – число низкочастотных (*деформационных*) колебаний;  $N$  – число атомов в молекуле;  $3N - M$  – число высокочастотных колебаний;  $\theta_D$  – характеристическая температура Дебая;  $\theta_E$  – характеристическая температура Эйнштейна.

Интегрируя по частям выражение для низкочастотной составляющей свободной энергии  $F(V, T)$ , определенное равенством (2), и вводя функцию Дебая  $D(x)$  [15]

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \xi^3 \frac{d\xi}{\exp(\xi) - 1},$$

получаем

$$F = U_C + U_M + MRT \left( \ln(1 - \exp(-x_D)) - \frac{D(x_D)}{3} \right) + (3N - M)RT \ln(1 - \exp(-x_E)), \quad (3)$$

где  $x_D = \frac{\theta_D}{T}$ ;  $x_E = \frac{\theta_E}{T}$ .

Используя выражение (3), легко получить выражения для давления  $P$  и энтропии  $S$ :

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \frac{\partial U_C}{\partial V} - \frac{\partial U_M}{\partial V} - \frac{dE_0}{dV} - MRTD(x_D) \frac{d(\ln \theta_D)}{d(\ln V)} \frac{1}{V} - (3N - M)RTx_E \frac{d(\ln \theta_E)}{d(\ln V)} \frac{1}{V(\exp(x_E) - 1)}; \quad (4)$$

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = - \left\{ MR \left[ \ln(1 - \exp(-x_D)) - \frac{D(x_D)}{3} \right] + MRT \left[ \frac{\exp(-x_D)}{1 - \exp(-x_D)} - \frac{D'(x_D)}{3} \right] \frac{\partial x_D}{\partial T} + \right.$$

$$+(3N-M)R \ln(1-\exp(-x_E)) + (3N-M)RT \frac{\exp(-x_E)}{1-\exp(x_E)} \frac{\partial x_E}{\partial T} \Bigg\} = - \left\{ MR \left[ \ln(1-\exp(-x_D)) - \frac{D(x_D)}{3} \right] - MRD(x_D) + (3N-M)R \ln(1-\exp(-x_E)) - (3N-M) \frac{RTx_E}{\exp(x_E)-1} \right\}. \quad (5)$$

При выводе формулы (5) было использовано свойство функции Дебая

$$D(x) = \frac{x}{\exp(x)-1} - \frac{x}{3} D'(x),$$

где штрих обозначает дифференцирование по характеристической температуре  $x$ .

Зная равенства (3) и (5), легко определить выражения для полной энергии  $E$  и теплоемкости при постоянном объеме  $C_V$ :

$$E = F + TS = U_C + U_M + E_0 + MRTD(x_D) + (3N-M) \frac{RTx_E}{\exp(x_E)-1};$$

$$C_V = MR \left( 4D(x_D) - \frac{3x_D}{\exp(x_D)-1} \right) + (3N-M) R x_E^2 \frac{\exp(x_E)}{(\exp(x_E)-1)^2} = C_{VD} + C_{VM}.$$

Здесь  $C_{VD}$  – составляющая теплоемкости при постоянном объеме, зависящая от деформационных (акустических) колебаний молекулы и определяемая в приближении Дебая, а  $C_{VM}$  – составляющая теплоемкости при постоянном объеме, зависящая от внутримолекулярных (оптических) колебаний. Часть теплоемкости  $C_{VM}$  называют внутримолекулярной.

Следуя определению коэффициента Грюнайзена

$$\gamma_D(V) = - \frac{d(\ln \theta_D)}{d(\ln V)},$$

выражение (4) можно записать в виде

$$P = - \frac{\partial U_C}{\partial V} - \frac{\partial U_M}{\partial V} - \frac{dE_0}{dV} + \frac{MRT \gamma_D(V) D(x_D)}{V}. \quad (6)$$

Последний член в выражении (4) равен нулю, так как при разделении частот было сделано предположение о независимости высоких частот от объема.

Исходя из определения энергии нулевых колебаний и учитывая разделение частот, получаем выражения для функций  $E_0$  и  $\frac{dE_0}{dV}$ :

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} h \omega_{\alpha} = \frac{3N' - M'}{2} h \omega_E + \frac{3M'}{2} \int_0^{w_D} w^2 h w dw = \frac{3N - M}{2} R \theta_E + \frac{3}{8} MR \theta_D(V);$$

$$\frac{dE_0}{dV} = - \frac{3}{8} \frac{MR \gamma_D(V) \theta_D(V)}{V}, \quad (7)$$

где  $N'$  – число атомов,  $M'$  – число низкочастотных колебаний в объеме  $V$ .

Подставляя выражение для производной от энергии нулевых колебаний по объему (7) в равенство (6), получаем уравнение для определения давления в виде

$$P = \frac{MRT \gamma_D(V)}{V} \left( \frac{3}{8} x_D + D(x_D) \right) + P_E, \quad P_E = - \frac{dU_C}{dV} - \frac{dV_M}{dV}. \quad (8)$$

Как было показано в работах [16, 17] зависимость коэффициента Грюнайзена от плотности описывается выражением следующего вида:

$$\gamma_D = \frac{V}{C - V},$$

где константа  $C$  определяется из условия  $\gamma_D(V_0) = \gamma_D^0$ . Здесь  $\gamma_D^0$  значение коэффициента Грюнайзена при нормальных условиях  $V = V_0$ ,  $T = T_0$ . Похожее выражение для коэффициента Грю-

найзена было получено из других соображений в работах А.М. Молодца [18, 19]. В результате получим

$$\gamma_D = \gamma_D^0 \left( \frac{V}{V_0} \right) \frac{1}{1 + \gamma_D^0 \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right)}. \quad (9)$$

Формула (9) в случае слабого сжатия переходит в известное эмпирическое выражение

$$\gamma_D = \gamma_D^0 \left( \frac{V}{V_0} \right),$$

которое широко используется при обработке экспериментальных данных.

Для того чтобы воспользоваться выражением для коэффициента Грюнайзена  $\gamma_D$  (9), необходимо определить его значение  $\gamma_D^0$ , соответствующее начальному удельному объему  $V_0$ . С этой целью в работе [20] был получен аналог уравнения Грюнайзена для молекулярных кристаллов в виде:

$$\alpha C_T^2 = \gamma_D(V) C_{VD}. \quad (10)$$

Следовательно, если из эксперимента известны значения изобарического коэффициента объемного расширения  $\alpha$ , изотермической скорости звука  $c_T$  и определен способ нахождения теплоемкости при постоянном объеме  $C_{VD}$ , из уравнения (10) можно найти значение коэффициента Грюнайзена  $\gamma_D^0$  при начальном значении удельного объема и температуры. Это даст возможность использовать выражение (9) для определения зависимости коэффициента Грюнайзена молекулярных кристаллов от удельного объема, а выражение (10) для определения зависимости изобарического коэффициента объемного расширения  $\alpha$  от температуры.

Известно [6, 8], что характеристическая температура Дебая для акустических колебаний молекулы при нормальных условиях в случае молекулярных кристаллов нитросоединений может быть определена, если существуют экспериментальные данные по значениям теплоемкости при постоянном объеме или данные по значениям продольной и поперечной скоростям упругих волн молекулярных кристаллов нитросоединений. В силу того что экспериментальные данные по теплоемкости при постоянном объеме определены в некотором диапазоне значений [20], достоверно определить значение характеристической температуры Дебая не представляется возможным [21].

В модели Дебая [4, 6] реальный спектр акустических колебаний атомов заменён простой зависимостью. Максимальная частота колебаний для молекулярных кристаллов зависит от объёма и физических свойств вещества и определяется по формуле [4]

$$\omega_D = C_S \left( \frac{MN_a \rho}{4\pi\mu} \right)^{1/3}, \quad (11)$$

где  $N_a$  – число Авагадро,  $C_S$  – средняя скорость звука, выражаемая через скорости продольных  $C_L$  и поперечных  $C_t$  упругих волн в кристалле

$$\frac{1}{C_S^3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{C_L^3} + \frac{2}{C_t^3} \right). \quad (12)$$

Максимальная частота  $\omega_D$  определяет характеристическую температуру Дебая

$$\theta_D = \frac{h\omega_D}{k}. \quad (13)$$

В силу того, что уравнения состояния определяют шаровую часть тензора напряжений, то в равенстве (12) необходимо перейти от средней скорости звука  $C_S$  к адиабатической скорости звука  $C_0$ , учитывая следующие соотношения:

$$C_L^2 = C_0^2 + \frac{4G}{3\rho}, \quad C_t^2 = \frac{G}{\rho},$$

где  $G$  – модуль сдвига. Анализ экспериментальных данных [22] показал, что связь между средней скоростью звука  $C_S$  и адиабатической скоростью звука  $C_0$  может быть описана простой зависимостью:

$$C_S = KC_0, \quad (14)$$

где значение корреляционного коэффициента  $K$  для дальнейших расчетов было выбрано равным 0,75.

На примере ТАТБ рассмотрим способ определения количества деформационных колебаний  $M$ , максимальной частоты  $\omega_D$  и характеристической температуры Дебая  $\theta_D$ . Это связано с тем, что в настоящее время в справочной литературе, представляющей экспериментальные данные по молекулярным кристаллам нитросоединений, только для ТАТБ имеется полный набор экспериментальных данных [22–24], позволяющий определить зависимость коэффициента объемного от температуры. Значение адиабатической скорости звука ТАТБ, определенное по изотермической сжимаемости [24], равно 2350 м/сек, а значение средней скорости звука  $C_S$ , определенное формулой (14), равно 1762,5 м/сек.

Для определения количества деформационных колебаний  $M$  молекулярного кристалла ТАТБ воспользуемся результатами расчетов, приведенных в работе [25]. Силовые постоянные для расчета спектров нормальных колебаний внутри молекулы были определены с помощью квантово-химических методов РМ-3 и DFT, подробно описанных в работах [26, 27]. Полученные в расчетах ИК – спектры для ТАТБ хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [28].

Процесс расчета деформационных частот является итерационным. Для молекулярных кристаллов шесть колебаний: три колебания центра тяжести молекулы и три колебания углов Эйлера, определяющих поведение молекулы как целого, однозначно относятся к низкочастотным колебаниям. Следовательно, на первом этапе количество деформационных колебаний  $M = 6$ . Сравнивая вычисленные по формуле (11) значения максимальных частот Дебая со значениями внутримолекулярных частот ТАТБ [25], получим, что количество деформационных колебаний  $M = 12$ .

Проводя расчет характеристической температуры и частоты Дебая по формуле (14) для  $M = 12$ , получим для ТАТБ  $\theta_D = 137,30$  К;  $\omega_D = 95,83$  см<sup>-1</sup>. Полученные значения характеристических температур и частот Дебая показывают, что внутримолекулярные колебания трех нитрогрупп и трех аминогрупп ТАТБ также необходимо включать в число деформационных колебаний, частоты остальных внутримолекулярных колебаний находятся значительно выше полученных значений максимальных частот Дебая.

### Определение формы изобарического коэффициента объемного расширения молекулярных кристаллов

Для определения начального значения коэффициента Грюнайзена  $\gamma_D^0$  воспользуемся равенством (10). Подставляя в него значения изотермической скорости звука  $c_T$ , изобарического коэффициента объемного расширения  $\alpha$  и теплоемкости при постоянном объеме, соответствующей деформационным колебаниям  $C_{VD}$ , получим значение коэффициента Грюнайзена  $\gamma_D^0$ , соответствующее начальному состоянию  $T = 293$  К,  $V_0 = 0,5162$  см<sup>3</sup>/г. Для ТАТБ при количестве деформационных колебаний  $M = 12$  коэффициент Грюнайзена  $\gamma_D^0$  равен 1,44.

В силу того, что попытки аппроксимации экспериментальных данных без учета свойств реальных материалов, приводят к неутешительным результатам по определению зависимости изобарического коэффициента объемного расширения от температуры, в настоящей работе был предложен подход, позволивший исправить данную ситуацию.

Рассмотрим уравнение (10), где коэффициент Грюнайзена определяется линейной зависимостью от удельного объема, получим

$$\alpha C_T^2 = \gamma_D(V)C_{VD}, \quad \gamma_D = \gamma_D^0 \left( \frac{V}{V_0} \right). \quad (15)$$

В силу того, что изобарический коэффициент объемного расширения определяется термодинамическим равенством

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p,$$

то, подставляя данное выражение в равенство (15), получим следующее дифференциальное уравнение для определения зависимости плотности молекулярного кристалла от температуры

$$-\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\gamma_D^0 \rho_0}{C_T^2} \right) C_{VD}(T) = K_\alpha MRD_C(x). \quad (16)$$

Здесь были введены следующие обозначения

$$K_\alpha = \left( \frac{\gamma_D^0 \rho_0}{C_T^2} \right), \quad D(x) = \frac{3}{x^4} \int_0^x \xi^4 \frac{d\xi}{\exp(\xi) - 1}.$$

Аналитически проинтегрировать по температуре правую часть равенства (16) не представляется возможным. Поэтому в диапазоне температур 153–413 К, в рамках которого были проведены эксперименты [23], функцию теплоемкости Дебая  $D_C(x)$  [8] достаточно точно описывает высокотемпературное приближение:

$$D_C(x) \approx 1 - \frac{1}{20} x^2 + \frac{1}{560} x^4.$$

Данное выражение уже легко интегрируется по температуре и результатом интегрирования является функция вида

$$F_C(x) = \int D_C(x) dT = T \left( 1 + \frac{1}{20} x^2 - \frac{1}{1680} x^4 \right).$$

Интегрируя уравнение (20) по температуре от значения  $T_0 = 293$  К до текущего значения  $T$  при постоянной изотермической скорости звука, получим равенство, позволяющее определить значение плотности  $\rho$  для произвольной температуры

$$\rho = \rho_0 + K_\alpha MRF_C(x) \Big|_{293}^T. \quad (17)$$

Зная зависимость плотности молекулярного кристалла от температуры, количество молекул в элементарной ячейке  $Z$ , молекулярный вес вещества  $\mu$ , из равенства (17) легко получается выражение для зависимости объема элементарной ячейки кристалла от температуры в виде

$$V_C = Z \cdot \mu / (N_a \cdot \rho).$$

В таблице проведены значения экспериментальных  $V_{EX}$  и рассчитанных  $V_p$  объемов элементарных ячеек для ТАТБ при различных температурах.

Изменение объёма элементарной ячейки кристаллитов ТАТБ при температурном воздействии

Т, К	$V_{EX}, \text{Å}^3$	$V_C, \text{Å}^3$	Т, К	$V_{EX}, \text{Å}^3$	$V_C, \text{Å}^3$
153	435,48	438,38	293	444,39	444,39
173	436,85	439,22	313	444,92	445,50
193	437,27	440,29	333	447,37	446,37
213	438,83	431,15	353	449,28	447,26
233	440,45	442,00	373	451,28	448,15
253	442,26	442,87	393	452,17	449,05
273	443,82	443,74	413	454,37	449,96

Данные таблицы показывают, что рассчитанные и экспериментальные значения объемов элементарных ячеек кристаллов ТАТБ различаются на 2–3 % во всем диапазоне изменения температур. Следовательно, равенство (15) можно применять для аппроксимации коэффициента объемного расширения молекулярных кристаллов нитросоединений. Условие стремления изобарического коэффициента объемного расширения к нулю при стремлении температуры к нулю будет выполняться автоматически.

### Литература

1. Фортов, В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы / В.Е. Фортов. – М.: Физматлит, 2013. – 492 с.
2. Хищенко, К.В. Исследование уравнений состояния материалов при высокой концентрации энергии / К.В. Хищенко, В.Е. Фортов // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. – 2014. – Т. IV, № 1. – С. 6–16.
3. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2007. – 302 с.
4. Ковалев, Ю.М. Математический анализ уравнений сохранения двухфазных смесей / Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 29–37.
5. Бушман А.В., Фортов В.Е. Модели уравнения состояния вещества. / А.В. Бушман, В.Е. Фортов // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 140, № 2. – С. 177–232.
6. Китайгородский, А.И. Молекулярные кристаллы / А.И. Китайгородский. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
7. Жарков, В.Н. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах / В.Н. Жарков, В.А. Калинин. – М.: Наука, 1968. – 311 с.
8. Жирифалько, Л. Статистическая физика твердого тела / Л. Жирифалько. – М.: Мир, 1975. – 382 с.
9. Базаров, И.П. Термодинамика / И.П. Базаров. – М.: Высшая школа, 1991. – 375 с.
10. Зельдович, Я.Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – М.: Физматлит, 2008. – 652 с.
11. Ковалев, Ю.М. Уравнения состояния и температуры ударного сжатия кристаллических ВВ / Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1984. – Т. 20, № 2. – С. 102–107.
12. Воскобойников, И.М. Обобщенная ударная адиабата органических жидкостей / И.М. Воскобойников, А.Н. Афанасенков, В.М. Богомолов // Физика горения и взрыва. – 1967. – Т. 3, № 4. – С. 585–593.
13. Miller, P.J. Effect of Pressure on the Vibration Spectra of Liquid Nitromethane / P.J. Miller, S. Block, G.J. Piermarini // J. of Physical Chemistry. – 1989. – Vol. 93. – P. 462–466.
14. Термодинамические свойства пластиков в широком диапазоне плотностей и температур / К.В. Хищенко, И.В. Ломоносов, В.Е. Фортов, О.Ф. Шленский // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 349, № 3. – С. 322–325.
15. Ландау, Л.Д. Статистическая физика. Ч. I / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука, 1976. – 584 с.
16. Ковалев, Ю.М. Определение вида коэффициента Грюнайзена для молекулярных кристаллов / Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 403, № 4. – С. 475–477.
17. Ковалев, Ю.М. Функция Грюнайзена для твердых взрывчатых веществ / Ю.М. Ковалев // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2005. – № 2. – С. 55–59.
18. Молодец, А.М. Функция Грюнайзена и нулевая изотерма трех металлов до давлений 10 ГПа / А.М. Молодец // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1995. – Т. 107, № 3. – С. 824–831.
19. Молодец, А.М. Функция Грюнайзена, определенная на основе закономерностей ударно-волнового сжатия монолитного материала / А.М. Молодец // Доклады Академии наук. – 1995. – Т. 341, № 6. – С. 753–754.
20. Щетинин, В.Г. Расчет теплоемкости органических веществ в ударных и детонационных волнах / В.Г. Щетинин // Химическая физика. – 1999. – Т. 18, № 5. – С. 90–95.
21. Ковалев, Ю.М. Определение температурной зависимости теплоемкости для некоторых молекулярных кристаллов нитросоединений / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, № 2. – С. 297–306.
22. Dobrats, V.M. LLNL Explosives Handbook. Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants / V.M. Dobrats, P.C. Crawford. – Livermore, California: University of California, 1985.
23. Анизотропное тепловое расширение молекулярного кристалла 1,3,5-триамино 2,4,6-тринитробензола при нормальном давлении / А.В. Станкевич, Е.Б. Смирнов, О.В. Костицын и др.



// Использование синхротронного и терагерцового излучения для исследования высокоэнергетических материалов. – Новосибирск: ИЯФ СО АН, 2015. – С. 46–49.

24. Олинджер, Б. Ударная сжимаемость тэна, ТАТБ, CO<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>O при давлениях до 10 ГПа, рассчитанная на основании экспериментальных данных по гидростатическому сжатию / Б. Олинджер, Г. Кейди // Детонация и взрывчатые вещества. – М.: Мир, 1981. – С. 203–219.

25. Ковалев, Ю.М. Математическое моделирование тепловой составляющей уравнения состояния молекулярных кристаллов / Ю.М. Ковалев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 34–42.

26. Кларк, Т. Компьютерная химия / Т. Кларк. – М.: Мир, 1990. – 381 с.

27. Степанов, Н.Ф. Квантовая химия сегодня / Н.Ф. Степанов, Ю.В. Новаковская // Российский Химический Журнал. – 2007. – Т. LI, № 5. – С. 5–17.

28. Gibbs, T.R. Last explosive property data. Los Alamos series on dynamic material properties / T.R. Gibbs, A. Popolato. – Berkeley. Los Angeles, London: University of California Press, 1980.

*Поступила в редакцию 8 апреля 2018 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2018, vol. 10, no. 2, pp. 57–67*

---

DOI: 10.14529/mmph180206

## DETERMINING THE EXPRESSION FOR ISOBARIC COEFFICIENT OF VOLUME EXPANSION FOR SOME MOLECULAR CRYSTALS OF NITRO COMPOUNDS

**Yu.M. Kovalev**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: kovalevym@susu.ru*

A type of equations on the state of molecular crystals of nitro compounds is suggested based on dividing Helmholtz free energy into intramolecular and intermolecular components. It is suggested to approach the thermal part of the internal energy and pressure of a molecular crystal with Debye approximation for intermolecular component, and with Einstein approximation for intramolecular component. This division of Helmholtz energy allowed to obtain clear expressions for all thermodynamic quantities being part of the equations of state. The suggestion that isothermal sound speed of a molecular crystal at the temperature of 0 K is determined solely by elastic characteristics of the crystal made it possible to obtain the dependency of Gruneisen coefficient on volume. The dependencies of thermodynamic quantities on temperature and volume determined in this work were used to build an analog of Gruneisen equation for molecular crystals, and to determine the dependency of isobaric coefficient of crystal volume expansion on temperature. It turned out that to obtain calculated values of volumes of unit cells of triamino trinitrobenzene (TATB) crystals while integrating Gruneisen equation as per temperature, a high-temperature approximation may be used for Debye specific thermal capacity function. The obtained theoretical dependency of isobaric coefficient of crystal volume expansion on temperature indicates at the automatic meeting the condition of its tending to zero while the temperature tends to zero. The comparative analysis of the calculated and experimental values of volumes of unit cells of molecular crystals of 1,3,5 – 2,4,6 – trinitrobenzene (TATB) depending on the temperature showed that they concur satisfactorily to the accuracy of no more than 3 %.

*Keywords: equation of state; molecular crystal; Helmholtz energy; Planck's constant; Boltzmann's constant; Debye approximation; Einstein approximation.*

### References

1. Fortov V.E. *Uravneniya sostoyaniya veshchestva: ot ideal'nogo gaza do kvark-glyuonnoy plazmy* (Equations of state of matter: from an ideal gas to a quark-gluon plasma). Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, 492 p. (in Russ.).

2. Khishchenko K.V., Fortov V.E. Investigation of equations of state of materials at high concentration of energy. *Proceeding of the Kabardino-Balkarian State University*, 2014, Vol. IV, no. 1, pp. 6–16. (in Russ.).
3. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnykh sred* (Models of Continuum Mechanics). Chelyabinsk: Izd-vo ChelIGU Publ., 2007, 302 p. (in Russ.).
4. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A. A Mathematical Study of the Conservation Equation for Two-Phase Mixtures. *Bulletin of the South Ural State University, Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 29–37. DOI: 10.14529/mmp140202
5. Bushman A.V., Fortov V.E. Model equations of state. *Sov. Phys. Usp.*, 1983, Vol. 26, pp. 465–496. DOI: 10.1070/PU1983v026n06ABEH004419
6. Kitaygorodskiy A.I. *Molekulyarnye kristally* (Molecular Crystals). Moscow, Nauka Publ., 1971, 424 p. (in Russ.).
7. Zharkov V.N., Kalinin V.A. *Uravneniya sostoyaniya tverdykh tel pri vysokikh davleniyakh i temperaturakh* (Equations of state of solids at high pressures and temperatures). Moscow, Nauka Publ., 1968, 311 p. (in Russ.).
8. Zhirifal'ko L. *Statisticheskaya fizika tverdogo tela* (Statistical Solid State Physics). Moscow, Mir Publ., 1975, 382 p. (in Russ.).
9. Bazarov I.P. *Termodinamika* (Thermodynamics), Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991, 375 p. (in Russ.).
10. Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy* (Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena). Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 652 p. (in Russ.).
11. Kovalev Yu.M. *Fizika goreniya i vzryva*, 1984, Vol. 20, no. 2, pp. 102–107. (in Russ.).
12. Voskoboynikov I.M., Afanasenkov A.N., Bogomolov V.M. *Fizika goreniya i vzryva*, 1967, Vol. 3, no. 4, pp. 585–593. (in Russ.).
13. Miller P.J, Block S., Piermarini G.J. Effect of Pressure on the Vibration Spectra of Liquid Nitromethane. *J. of Physical Chemistry*, 1989, Vol. 93, pp. 462–466. DOI: 10.1021/j100338a088
14. Khishchenko K.V., Lomonosov I.V., Fortov V.E., Shlenskiy O.F. *Doklady Akademii nauk*, 1996, Vol. 349, no. 3, pp. 322–325. (in Russ.).
15. Landau L.D., Lifshits E.M. *Statisticheskaya fizika. Ch. I* (Statistical physics. Part I) Moscow, Nauka Publ., 1976, 584 p. (in Russ.).
16. Kovalev Yu.M. Determination of Form of the Grüneisen Coefficient for Molecular Crystals *Doklady Akademii nauk*, 2005, Vol. 403, no. 4, pp. 475–477. (in Russ.).
17. Kovalev Yu.M. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov*, 2005, no. 2, pp. 55–59. (in Russ.).
18. Molodets A.M. Grüneisen function and the zero-temperature isotherm of three metals up to pressures of 10 TPa. *JETP*, Vol. 80, no. 3, p. 467–471. (in Russ.).
19. Molodets A.M. *Doklady Akademii nauk*, 1995, Vol. 341, no. 6, pp. 753–754. (in Russ.).
20. Shchetinin V.G. *Khimicheskaya fizika*, 1999, Vol. 18, no. 5, pp. 90–95. (in Russ.).
21. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2018, Vol. 91, no. 2, pp. 297–306. (in Russ.).
22. Dobrats B.M., Crawford P.C. *LLNL Explosives Handbook. Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants*. Crawford Livermore, California: University of California, 1985.
23. Stankevich A.V., Smirnov E.B., Kostitsyn O.V., Ten K.A., Shmakov A.N., Tolochko B.P. *Ispol'zovanie sinkhrotronnogo i teragertsovogo izlucheniya dlya issledovaniya vysokoenergeticheskikh materialov* (Proc. Using synchrotron and terahertz radiation to study high-energy materials), Novosibirsk, IYaf SO AN Publ., 2015, pp. 46–49. (in Russ.).
24. Olindzher B., Keydi G. Udarnaya szhimaemost' tena, TATB, CO<sub>2</sub> i H<sub>2</sub>O pri davleniyakh do 10 GPa, rasschitannaya na osnovanii eksperimental'nykh dannykh po gidrostaticheskomu szhatiyyu (Shock compressibility of ten, TATB, CO<sub>2</sub> and H<sub>2</sub>O at pressures up to 10 GPa, calculated on the basis of experimental data on hydrostatic compression). *Detonatsiya i vzryvchatye veshchestva*, Moscow, Mir Publ., 1981, pp. 203–219. (in Russ.).

25. Kovalev Yu.M. Mathematical Modelling of the Thermal Component of the Equation of State of Molecular Crystals. *Bulletin of the South Ural State University, Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, Vol. 6, no. 1, pp. 34–42. (in Russ.).

26. Klark T. *Komp'yuternaya khimiya* (Computer chemistry). Moscow, Mir Publ., 1990, 381 p. (in Russ.).

27. Stepanov N.F., Novakovskaya Yu.V. *Rossiyskiy Khimicheskiy Zhurnal*, 2007, Vol. LI, no. 5, pp. 5–17. (in Russ.).

28. Gibbs T.R., Popolato A. *Last explosive property data. Los Alamos series on dynamic material properties*. Berkeley. Los Angeles, London, University of California Press, 1980.

*Received April 8, 2018*

## ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ НАГРУЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ НЕСУЩИХ СИСТЕМ

**А.А. Петров**

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация

E-mail: PetrovAA64@yandex.ru

Произведен анализ методов оценки ресурса элементов конструкции несущих систем машин. Выявлены недостатки этих методов. Предложен метод оценки ресурса элементов конструкции, основанный на постоянстве суммарной работы внешних сил на разрушение образца, с помощью которого были произведены расчеты для определения ресурса элемента подрамника троллейбуса ЗиУ-9. При этом необходимая суммарная работа рассчитывается по величине предела выносливости реального элемента конструкции с учетом геометрических характеристик его поперечного сечения. Был произведен анализ влияния режимов нагружения на величину работы внешних сил, которая суммируется в образцах. Построены графики зависимости работы внешних сил от действующей нагрузки и скорости, от скорости и нагрузки, от отношения хорошего асфальта к плохому. В ходе исследования для определения приближенной величины ресурса выявлен эквивалентный режим нагружения для конструкции.

*Ключевые слова:* амплитудные напряжения; оценка ресурса; работа внешних сил на разрушение образца; кривая усталости; случайное нагружение.

При проектировании несущей системы транспортного средства одним из важных условий является обеспечение долговечности, то есть ресурса при эксплуатации транспортного средства в целом. В современных условиях дорожного покрытия, скоростного режима и весовой нагрузки транспортное средство может быстро выйти из строя как из-за плохого покрытия дороги, так и из-за некачественных материалов конструкции. Задача конструктора при проектировании – выбрать оптимальное соотношение размеров и материала деталей.

Методы оценки ресурса элементов конструкции несущих систем машин можно разделить на два основных типа. Первый тип основан на прямом применении гипотезы суммирования усталостных повреждений и её скорректированных модификаций [1–3]. Второй – на анализе энергетической структуры случайного процесса [4–8].

Анализ указанных работ показал, что у данных методов есть свои достоинства и недостатки. Одним из недостатков является то, что при подсчете циклов никто не учитывает работу внешних сил за данный цикл. Существующие методы не дают необходимой точности при прогнозировании ресурса элементов транспортного средства. Результаты расчета значительно отличаются от реального эксплуатационного ресурса машин.

На данный момент существует методика определения тепловой энергии [5], которая показывает, что работа внешних сил на разрушение постоянна (рис. 1).

Также стоит отметить, что ни один из существующих методов не принимает в расчет работу внешних сил на разрушение образца. В связи с этим была предпринята попытка оценить ресурс детали с учетом этой работы. Был предложен

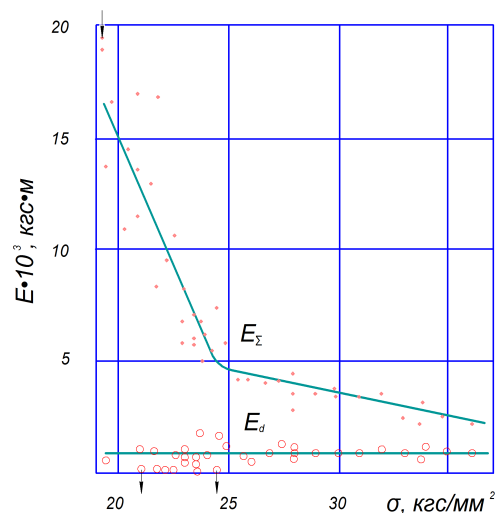


Рис. 1. Зависимость подведенной  $E_{\Sigma}$  и повреждающей  $E_d$  энергий от уровня напряжений для стали 3 в состоянии поставки

метод оценки ресурса элементов конструкции, основанный на условии постоянства суммарной работы внешних сил, затраченной на разрушение образца [9]. При этом необходимая суммарная работа рассчитывается по величине предела выносливости реального элемента конструкции с учетом геометрических характеристик его поперечного сечения ( $A$  – площади,  $I$  – осевого момента инерции сечения,  $W$  – момента сопротивления сечения). Определение работы внешних сил по пределу выносливости обусловлено тем обстоятельством, что работа, рассчитанная по амплитудным напряжениям, превышающим предел выносливости, больше, так как включает в себя также работу, затраченную на образование тепла, а «повреждающая энергия практически не зависит от уровня приложенного циклического напряжения» [5].

Данный метод был использован для определения ресурса консоли подрамника ЗиУ-9 (рис. 3). Работа внешних сил для консольного нагружения равна

$$A_i = \frac{1}{2} Ff,$$

где  $F$  – внешняя сила, приложенная к консоли;  $f$  – максимальное перемещение под силой.

В этом случае перемещение рассчитывается по зависимости

$$f = \frac{Fl^3}{3EI},$$

где  $l$  – расстояние от рассматриваемого сечения (заделка консоли) до центра приложения внешней силы;  $E$  – модуль упругости материала;  $I$  – момент инерции рассчитываемого сечения. Тогда

$$A_i = \frac{1}{2} F \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Учитывая, что

$$\sigma_v = \frac{Fl}{W},$$

где  $\sigma_v$  – амплитудные напряжения процесса;  $W$  – момент сопротивления рассчитываемого сечения, и выразив силу  $F$  через  $\sigma_v$  в выражении работы, получим

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_v W}{l} \cdot \frac{l^3}{3EI} \cdot \frac{\sigma_v W}{l} = \frac{\sigma_v^2 W^2 l}{6EI}.$$

Программный блок по подсчету суммарной работы внешних сил на разрушение образца на исследуемом участке работает следующим образом: работа считается только для случая роста деформации; уменьшение деформации происходит за счет внутренних сил объекта. Так, на участке осциллограммы 1–2 (рис. 2) работа равна

$$A_{1-2} = (\sigma_{v2}^2 - \sigma_{v1}^2) \frac{1}{6} \frac{W^2 l}{EI}.$$

На участке 3–4 работа равна

$$A_{3-4} = (\sigma_{v4}^2 - \sigma_{v3}^2) \frac{1}{6} \frac{W^2 l}{EI}.$$

Таким образом, работа подсчитывается на каждом очередном цикле изменения деформации  $A_1, A_2, \dots, A_i$  для выбранного мерного участка пути или отрезка времени. Затем единичные работы суммируются и определяется работа на длине мерного участка

$$\sum A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_i.$$

В дальнейшем с учетом весовых коэффициентов по заданным режимам рассчитывалась сумма работ  $A_i$  на пробеге, равном 1 км

$$\sum A'_i = a_1 b_1 c_1 A_1 + a_2 b_2 c_2 A_2 + \dots + a_i b_i c_i A_i,$$

где  $a_i$  – весовой коэффициент нагрузки;  $b_i$  – весовой коэффициент скорости;  $c_i$  – весовой коэффициент дорожного покрытия [10].

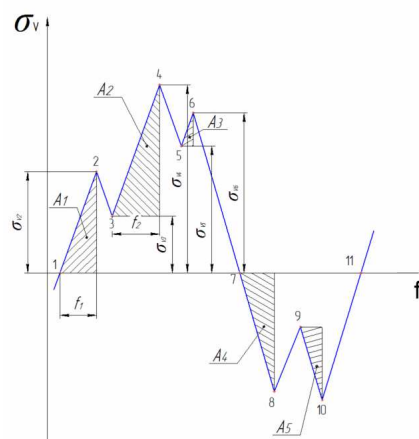


Рис. 2. Схема оценки работы внешних сил в случае переменных напряжений

Полная работа внешних сил, затраченная на разрушение образца, рассчитывалась по зависимости:

$$A_{\Sigma} = \sigma_{-1д}^2 N_{НО} \frac{W^2 I}{6EI},$$

где  $\sigma_{-1д}$  – предел выносливости элемента конструкции;  $N_{НО}$  – базовое число циклов нагружения элементов конструкции;  $W, I, l$  – геометрические характеристики сечения;  $E$  – модуль упругости материала.

Ресурс до разрушения рассчитывался по формуле

$$L = \frac{A_{\Sigma}}{\sum A_i'} \text{ (км)}.$$

В каждом из режимов нагружения работа рассчитывалась по записям переменных напряжений в 24 процессах при скоростях  $V = 20; 30; 40$  км/ч, нагрузках  $P = 15\ 000; 30\ 000; 45\ 000; 60\ 000$  Н при плохом и хорошем асфальте.

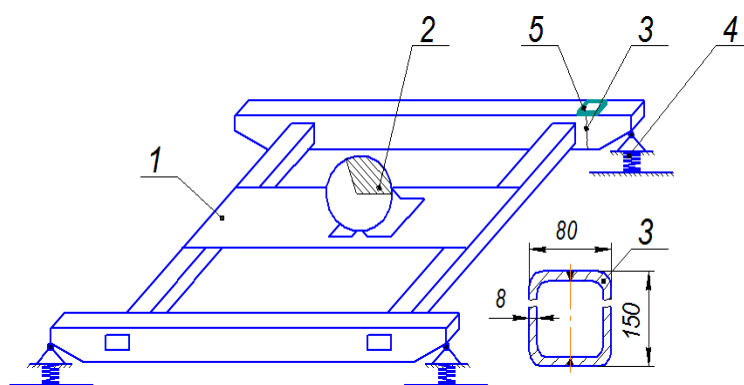


Рис. 3. Испытание подрамника на усталость:

1 – вспомогательная балка; 2 – вибратор; 3 – испытываемое сечение поперечной балки подрамника; 4 – подпрессорное основание стенда; 5 – контролируемые режим тензодатчики

В дальнейшем на основании вышеизложенного попробуем проанализировать влияние режимов нагружения на величину работы внешних сил, которая суммируется в образцах.

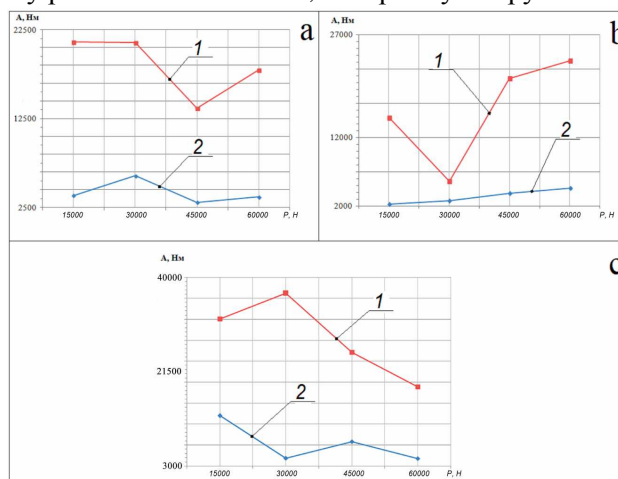


Рис. 4. Зависимость работы внешних сил от действующей нагрузки и скорости:  
 а – скорость 20 км/ч; б – скорость 30 км/ч; с – скорость 40 км/ч;  
 1 – асфальт плохой; 2 – асфальт хороший

Максимальная работа внешних сил на пробеге 1 км, приложенная к подрамнику, равна 39 300 Н·м при скорости  $V = 40$  км/ч и при действующей нагрузке в 30 000 Н. Минимальная работа внешних сил, приложенная к образцу, равна 2300 Н·м при скорости  $V = 30$  км/ч и при действующей нагрузке в 15 000 Н (рис. 4).

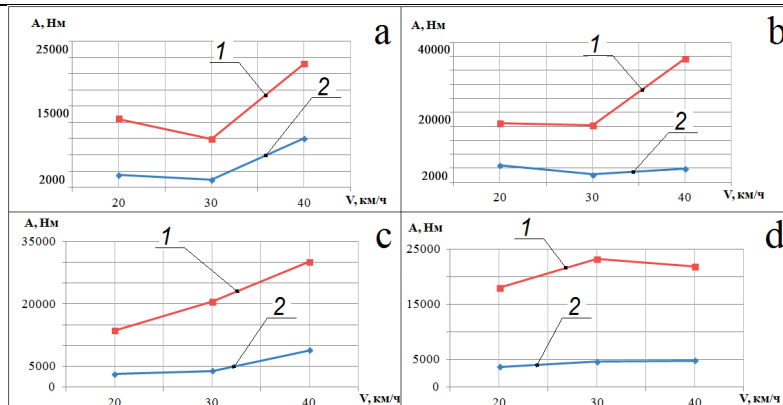


Рис. 5. Зависимость работы внешних сил от действующей скорости и нагрузки: а – нагрузка 15 000 Н; б – нагрузка 30 000 Н; с – нагрузка 45 000 Н; d – нагрузка 60 000 Н; 1 – асфальт плохой; 2 – асфальт хороший

Анализируя характер изменения работы внешних сил в зависимости от действующей скорости и нагрузки (рис. 5), мы можем сделать вывод, что с увеличением скорости увеличивается работа внешних сил. Также можно предположить, что до определенного момента при малых нагрузках в работе подвески большую долю занимает работа рессор. На хорошем асфальте влияние нагрузки незначительно сказывается на величине работы внешних сил на разрушение образца.

Для определения приближенной величины ресурса необходимо найти эквивалентный режим нагружения для конструкции. Для этого рассчитываем сумму работ на 24 режимах нагружения  $\sum A'_i$  с учетом весовых коэффициентов. Для испытываемого сечения подрамника троллейбуса ЗиУ-9 она равна  $7,54 \cdot 10^3$  Н·м. Сумма работ характеризует нагруженность конструкции при пробеге 1 км на всех режимах нагружения. Это делается для того, чтобы не испытывать троллейбус во всех режимах в дальнейшем: достаточно будет провести эксперимент только в одном. Это позволит снизить затраты на проведение эксперимента.

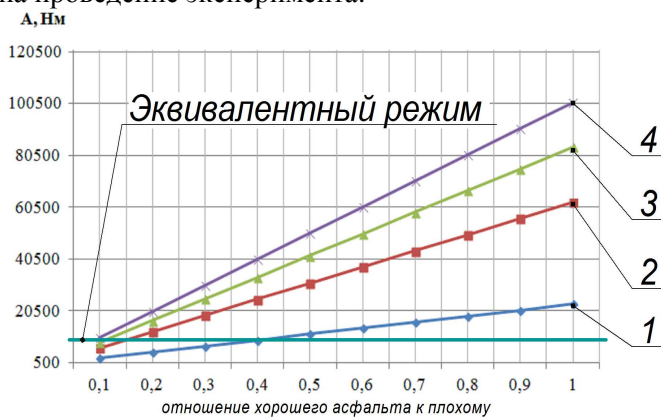


Рис. 6. Зависимость работы внешних сил от отношения хорошего асфальта к плохому: 1 – нагрузка 15 000 Н, скорость 40 км/ч; 2 – нагрузка 30 000 Н, скорость 40 км/ч; 3 – нагрузка 45 000 Н, скорость 40 км/ч; 4 – нагрузка 60 000 Н, скорость 40 км/ч

## Выводы

- с увеличением нагрузки и скорости движения транспортного средства величина работы внешних сил увеличивается, но не во всех случаях;
- наибольшее влияние на величину ресурса оказывает состояние дорожного покрытия, скорость транспортного средства влияет в меньшей степени;
- для того, чтобы долговечность конструкции была максимальной, требуется качественный вид дорожного покрытия – это значительно экономит средства на ремонт элементов транспортных машин;
- эквивалентным режимом для ресурсных испытаний при рессорно-пневматической подвеске на первом этапе можно считать скорость 40 км/ч при нагрузке в 30 000 Н на плохом асфальте. Это обуславливается тем, что большую часть своего времени троллейбус ходит без нагрузки, то есть без пассажиров в салоне машины.

### Литература

1. Когаев, В.П. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени / В.П. Когаев. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
2. Дмитриченко, С.С. К расчету долговечности деталей машин / С.С. Дмитриченко, В.Н. Никулин // Проблемы прочности. – 1976. – № 10. – С. 45–48.
3. Усталостная долговечность стали с учетом различных механизмов поврежденности / В.П. Багмутов, А.Н.Савкин, В.И. Водопьянов, О.В. Кондратьев // Известия вузов. Машиностроение. – 2007. – № 12. – С. 6–14.
4. Иванова, В.С. Природа усталости металлов / В.С. Иванова, В.Ф. Терентьев. – М.: Металлургия, 1975. – 455 с.
5. Гуревич, С.Е. Методика экспериментального определения разрушающей энергии при циклическом нагружении / С.Е. Гуревич, А.П. Гаевой // Заводская лаборатория. – 1983. – № 9. – С. 1110–1114.
6. Котиев, Г.О. Прогнозирование долговечности деталей транспортных машин: вопросы теории / О.Г. Котиев, Д.В. Зорин // Мир транспорта: Теория, история, конструирование будущего. – 2008. – № 1. – С. 4–9.
7. Абызов, А.А. Расчет ресурса деталей при случайном независимом многопараметрическом нагружении / А.А. Абызов, И.Я. Березин, О.С. Садаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Машиностроение». – 2006. – Вып. 8. – № 11(66). – С. 30–36.
8. Березин, И.Я. Обеспечение прочностной надежности дорожно-строительной техники на основе моделирования процессов эксплуатации / И.Я. Березин, В.И. Костюченко, В.К. Халтурин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Машиностроение». – 2008. – Вып. 12. – № 23(123). – С. 32–39.
9. Боровских, В.Е. Оценка ресурса элементов несущих систем машин по записям амплитудных напряжений в условиях эксплуатации / В.Е. Боровских, У.В. Боровских, А.А. Петров // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2017. – № 4(115). – С. 88–96.
10. Дмитриченко, С.С. Расчет средней долговечности деталей машин по результатам тензометрирования / С.С. Дмитриченко, В.Е. Боровских // Вестник машиностроения. – 1975. – № 9. – С. 34–36.

*Поступила в редакцию 20 сентября 2017 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2018, vol. 10, no. 2, pp. 68–73*

---

DOI: 10.14529/mmph180207

## INFLUENCE OF VEHICLE LOADING REGIMES ON THE DURABILITY OF ELEMENTS OF BEARING SYSTEMS

**A.A. Petrov**

*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

*E-mail: PetrovAA64@yandex.ru*

An analysis was made of the methods for estimating the life of structural elements of the bearing systems of machines. The disadvantages of these methods were revealed. A method for estimating the lifetime of structural elements based on the constancy of the total work of external forces destructing a sample, with the help of which calculations were made to determine the resource of the subframe element of a ZiU-9 trolley bus. In this case, the necessary total work is calculated from the limit of endurance of a real structural element taking into account the geometric characteristics of its cross section. An analysis was made of the influence of loading regimes on the magnitude of the work of external forces, which is summarized in the samples. The graphs were plotted on the dependence of the external forces work on the current load and speed, on speed and load, on the ratio of good asphalt to poor one. In the



course of the study, to determine the approximate value of the resource, an equivalent loading regime for the structure was identified.

*Keywords: amplitude stresses; resource evaluation; work of external forces on sample destruction; S-N curve; random loading.*

### References

1. Kogaev V.P. *Raschety na prochnost' pri napryazheniyakh peremennykh vo vremeni* (Calculations on the strength at voltages of the variables in time). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 232 p. (in Russ.).
2. Dmitrichenko S.S., Nikulin V.N. K raschetu dolgovechnosti detaley mashin (To the calculation of the durability of machine parts). *Problemy prochnosti*, 1976, no. 10, pp. 45–48. (in Russ.).
3. Bagmutov V.P., Savkin A.N., Vodop'yanov V.I., Kondrat'ev O.V. Ustalostnaya dolgovechnost' stali s uchetom razlichnykh mekhanizmov povrezhdennosti (Fatigue life of steel with different mechanisms of damage). *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, 2007, no. 12, pp. 6–14. (in Russ.).
4. Ivanova V.S., Terent'ev V.F. *Priroda ustalosti metallov* (Nature of metal fatigue). Moscow, Metallurgiya, 1975, 455 p. (in Russ.).
5. Gurevich S.E., Gaevoy A.P. Metodika eksperimental'nogo opredeleniya razrushayushchey energii pri tsiklicheskom nagruzhении (Technique of experimental determination of destructive energy under cyclic loading). *Zavodskaya laboratoriya*, 1983, no. 9, pp. 1110–1114. (in Russ.).
6. Kotiev G.O., Zorin D.V. Forecasting of Durability of the Transport machines parts. Mir transporta: *Teoriya, istoriya, konstruirovaniye budushchego* (World of Transport and Transportation), 2008, no. 1, pp. 4–9. (in Russ.).
7. Abyzov A.A., Berezin I.Ya., Sadakov O.S. Raschet resursa detaley pri sluchaynom nezavisimom mnogoparametricheskom nagruzhении (Calculation of the life of parts with random independent multi-parameter loading). *Bulletin of the SUSU, Series "Mechanical engineering industry"*, 2006, Issue 8, no. 11(66), pp. 30–36. (in Russ.).
8. Berezin I.S., Kostuchenko V.I., Halturin V.K. Maintenance of Strength Reliability of the Road-Building Machines on the Basis of Operation Process Modeling. *Bulletin of the SUSU, Series "Mechanical engineering industry"*, 2008, Issue 12, no. 23(123), pp. 32–39. (in Russ.).
9. Borovskikh V.E., Borovskikh U.V., Petrov A.A. Resource Evaluation of Machine Carrier System Elements According to Crest Value Record under Operation Conditions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2017, no. 4(115), pp. 88–96. (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2017-4-88-96
10. Dmitrichenko S.S., Borovskikh V.E. Raschet sredney dolgovechnosti detaley mashin po rezul'tatam tenzometrirovaniya (Calculation of the average longevity of machine parts according to the results of strain gauging). *Vestnik mashinostroeniya*, 1975, no. 9, pp. 34–36. (in Russ.).

*Received September 20, 2017*

## FORMATION OF COMPOUNDS BASED ON BISMUTH FERRITE WITH PARTIAL SUBSTITUTION OF BISMUTH IONS BY LANTHANUM AND PRASEODYMIUM

Yu.A. Lupitskaya, D.A. Kalganov, Yu.O. Afanas'ev  
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: lupitskaya@gmail.com

Using the solid-phase reaction method we obtained bismuth ferrite based compounds generated by partial substitution of bismuth ions with rare earth metal ions (lanthanum and praseodymium). We used thermogravimetric analysis and X-ray analysis at the temperature range from 297 to 1123 K to study the peculiarities of the processes of phase formation of reaction-products synthesis in the systems which contain oxides of iron, bismuth, lanthanum, and praseodymium; their compositions were also determined. For the final synthesis temperature of 1123 K we determined a homogeneous concentration area, where bismuth ferrite solid solutions with the structure of distorted perovskite exist. We studied the influence of lanthanum and praseodymium oxides on phase composition of bismuth ferrite compounds in the process of isovalent alloying of a part of bismuth ions by lanthanum and praseodymium ions. In the frequency range of 20 Hz – 1 MHz we determined the key parameters, which characterize electrical and magnetic properties of perovskite-like phases. We found that for the considered samples the frequency dependencies of complex magnetic permeability and electrical parameters (real and alleged part of permittivity) are of almost the same type. We showed that for the given frequency range both electrical (complex permittivity) and magnetic (complex magnetic permeability) parameters decrease with the frequency increase.

*Keywords: bismuth ferrite; solid solutions; distorted perovskite structure; electrical and magnetic properties.*

### Introduction

Multiferroic materials are inorganic compounds, which have both ferromagnetic and ferroelectric features. Such compounds can be used to create magnetoelectric materials, which can operate in various fields of microelectronics and microwave technology (e. g. extra-high density storage devices: magnetic memory, logical components, magnetic field sensors [1–3]). Therefore, the synthesis of new multiferroic materials attracts the great interest of researchers.

Bismuth ferrite ( $\text{BiFeO}_3$ ) is a well-known multiferroic compound, in which dipole ordering occurs near 1100 K and antiferromagnetic ordering – near 640 K. Hence, it can be used for the room temperature applications [4]. Besides, on the base of bismuth ferrite it is possible to create, using sol-gel processing and solid-state synthesis, solid solutions with the broad homogeneous region by double isovalent alloying of a part of  $\text{Bi}^{3+}$  ions by rare earth metal ions ( $\text{Ln}^{3+}$ ), and of the same amount of  $\text{Fe}^{3+}$  by  $\text{Co}^{3+}$  ions. This modification can increase the possible number of application of such compounds [5]. However, the synthesis of monophasic ceramic  $\text{BiFeO}_3$  in the system  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--Fe}_2\text{O}_3$  is hindered by the formation of transitional crystalline phases  $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$  and  $\text{Bi}_{25}\text{FeO}_{39}$ .

So, the intent of our work was to investigate the formation of bismuth ferrite solid solution in systems  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--La}_2\text{O}_3\text{--Fe}_2\text{O}_3$  and  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--La}_2\text{O}_3\text{--Pr}_6\text{O}_{11}\text{--Fe}_2\text{O}_3$  under heating in air. We considered the influence of lanthanum and praseodymium oxides on the phase composition of bismuth ferrite compounds in the process of isovalent alloying of a part of  $\text{Bi}^{3+}$  ions by  $\text{La}^{3+}$  and  $\text{Pr}^{3+}$  ions. We aimed to determine main parameters, which characterize magnetic and electrical properties of the obtained compounds.

## Experiments

We synthesized polycrystalline samples of solid solutions  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{FeO}_3$  ( $x = 0; 0,05; 0,1; 1,0$ ) and  $\text{Bi}_{0,9-x}\text{La}_{0,1}\text{Pr}_x\text{FeO}_3$  ( $x = 0; 0,05; 0,1; 0,7$ ) by solid-phase reaction from chemically pure oxides  $\text{Bi}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{La}_2\text{O}_3$ , and  $\text{Pr}_6\text{O}_{11}$ . Oxides of rare earth metals ( $\text{La}_2\text{O}_3$  and  $\text{Pr}_6\text{O}_{11}$ ) were thermally annealed at 1273 K for one hour. Mixtures, prepared according to preset quantities of starting reagents, were mixed and thoroughly ground in the agate mortar for 30 minutes with the addition of ethanol. The obtained alcohol-containing load was pressed under the pressure of 50 MPa to cylinders with the diameter of 8 mm and thickness of 1–4 mm. The cylinders were thermally annealed at 1073 K in air for 3 hours. The synthesis of investigated compounds in air was made in the incinerator at  $T_1 = 650$  K (3 hours),  $T_2 = 833$  K (3 hours),  $T_3 = 1093$  K (3 hours) и  $T_4 = 1123$  K (6 hours) until the mass of the samples did not change.

We calculated the content of the obtained reaction products by weighting on the analytic balance of 0,05 mg sensitivity.

Thermogravimetric measurements were done dynamically in air for broad temperature range (297–1123 K), using the thermogravimetric analyzer "Derivatograph Q-1000" (Paulic–Erdey system) at the heating rate of 10 degrees in one minute.

After every isothermal exposition we examined the qualitative phase composition of the reaction products by the diffractometer DRON-3, using the standard procedure for polycrystalline powder: monochromatic  $\text{CuK}\alpha_1$  radiation, diffraction angle  $2\theta$  from  $13^\circ$  to  $80^\circ$ . The synthesized compounds were identified from the International Center for Diffraction Data database (JCPDS-ICDD).

Complex permittivity was calculated using the values of capacity frequency profile and loss angle (alternating current), which were measured in air at room temperature and the frequency range from 20 Hz to 1 MHz. Measurements were done using the meter RLC AKTAKOM AM-3028 (double contact method). Before that we coated the end faces of the cylinders with silver electrodes by baking of a silver conductive paste. We did not take into account errors which stem from the edge electric field and the field irregularities on the electrode surfaces because they are small.

To investigate a frequency profile of complex permeability we used the technique of a solenoid partial filling. We measured the inductance and the Q-factor of the coil with the sample inside. The instrument error was estimated taking into account the coil inductance (without the samples) and losses connected with the coil resistance and eddy currents in it.

## Results and discussion

Solid solutions of  $\text{BiFeO}_3$ – $\text{LnFeO}_3$  are broadly investigated binary systems, where phases of  $\text{BiFeO}_3$  and  $\text{LnFeO}_3$  crystallize in the rhombohedral structure and the orthorhombic structure of perovskite type, respectively [5]. Isovalent alloying of a part of  $\text{Bi}^{3+}$  ions by  $\text{La}^{3+}$  and  $\text{Pr}^{3+}$  ions leads to the formation of solid solution  $\text{Bi}_{0,9-x}\text{La}_{0,1}\text{Pr}_x\text{FeO}_3$ , in which there is an orthorhombic distortion of perovskite unit cell. The unit cell parameters are determined for the  $\text{BiFeO}_3$  phase ( $a = 3,959$  Å and  $\alpha = 89^\circ 46'$ ).

From the analysis of X-ray patterns of  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{FeO}_3$  samples, synthesized by solid-phase reaction, the authors [5] noted that the quantitative content of mullite ( $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$ ) and sillenite ( $\text{Bi}_{25}\text{FeO}_{39}$ ) phases increased with the increase of concentration  $x$ , starting from the molecular ratio  $x > 0,1$ . This indicates the thermal instability of solid solutions based on bismuth ferrite. However, by X-ray diffraction analysis we showed that solid solutions  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{FeO}_3$  ( $x = 0; 0,05; 0,1; 1,0$ ) and  $\text{Bi}_{0,9-x}\text{La}_{0,1}\text{Pr}_x\text{FeO}_3$  ( $x = 0; 0,05; 0,1; 0,7$ ) had the crystal structure of perovskite with an orthorhombic distortion (see Fig. 1). Moreover, the percentage of impurity phases  $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$  and  $\text{Bi}_{25}\text{FeO}_{39}$  did not exceed 3 % at all investigated concentrations  $x$ .

Using thermogravimetric analysis we showed that the formation of bismuth ferrite and its derivatives was accompanied by a multistage decrease of samples masses in the broad temperature range (297 – 1123 K), which indicates that physical and chemical processes in the considered systems were staged (see Fig. 2). The differential thermogram (DT) of the base mix  $[\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-La}_2\text{O}_3\text{-Fe}_2\text{O}_3]\cdot n\text{H}_2\text{O}$  had several peaks in low-temperature (520–710 K) and high-temperature regions (780–1123 K), which could be the evidence of change in the oxidation state of the metals in forming compounds (Fig. 2, b).

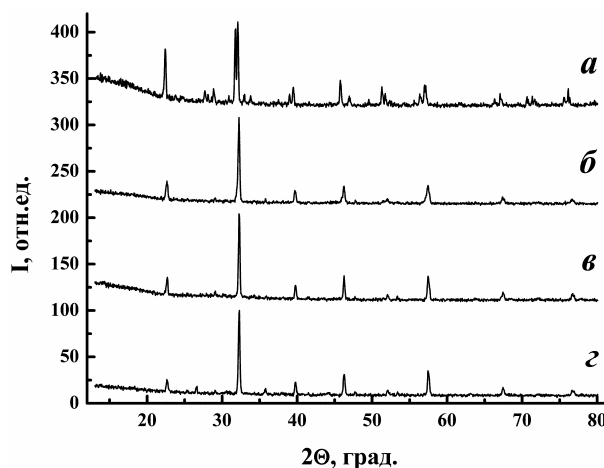


Fig. 1. X-ray patterns of samples, obtained using solid-phase reaction ( $T = 1123$  K): *a* –  $\text{BiFeO}_3$ ; *b* –  $\text{Bi}_{0.8}\text{La}_{0.2}\text{FeO}_3$ ; *c* –  $\text{Bi}_{0.8}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.1}\text{FeO}_3$ ; *d* –  $\text{LaFeO}_3$ . All samples have the crystal structure of perovskite with an orthorhombic distortion

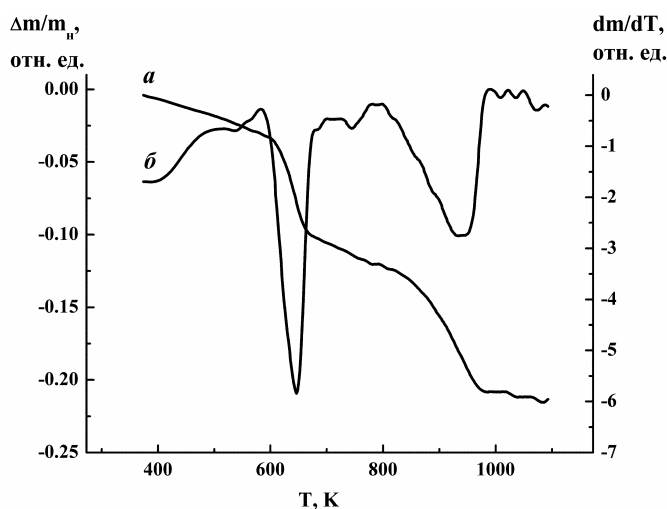


Fig. 2. Thermogram (*a*) and differential thermogram (*b*) of the base mix  $[\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-La}_2\text{O}_3\text{-Fe}_2\text{O}_3]\cdot n\text{H}_2\text{O}$

Low-temperature processing of compounds (at 650 K) did not change the phase composition of samples. It can be seen from the XRD patterns with reflexes of the initial reagents of the corresponding oxide systems (see Fig. 3, *a*). The rise of temperature up to 833 K contributed toward the formation of crystalline phases in the synthesized powders, which can be seen from the appearance of fuzzy diffraction peaks (see Fig. 3, *b*). These peaks correspond to the reflexes of  $\text{BiFeO}_3$  phase. Further increase of fusion temperature (in the range 833–1093 K) resulted in the recrystallization process and formation of additional small peaks, which correspond to phases of  $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$  and  $\text{Bi}_{25}\text{FeO}_{39}$  (Fig. 3, *c*).

So, by the experimental thermogravimetric and qualitative X-ray diffraction analysis we showed that the formation of bismuth ferrite and its derivatives starts at temperature  $\sim 833$  K, and at  $T > 833$  K  $\text{BiFeO}_3$  decomposes with the formation of impurity phases. The number of these impurity phases did not rise with the increase of degree of substitution of lanthanum and praseodymium in the synthesized compounds.

Complex permittivity measurements showed that the real part of permittivity  $\varepsilon'$  (Fig. 4) and dielectric losses  $\varepsilon''$  (Fig. 5) decreased with the frequency increase. The maximum value of permittivity ( $\varepsilon' \sim 3750$ ) and the minimum value of dielectric losses ( $\varepsilon'' \sim 1148$ ) were obtained in the compound  $\text{Bi}_{0.7}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.2}\text{FeO}_3$  at frequency  $f = 1$  kHz.

Complex permeability of the considered samples had the similar type of the dependence on frequency as electric parameters (the real and the imaginary parts of permittivity). In the frequency range 20 Hz – 1 MHz the real part of permeability  $\mu'$  decreased with the frequency increase. The maximum value of  $\mu'$  ( $\sim 496$ ) was obtained in the compound  $\text{Bi}_{0.9}\text{La}_{0.1}\text{FeO}_3$ .

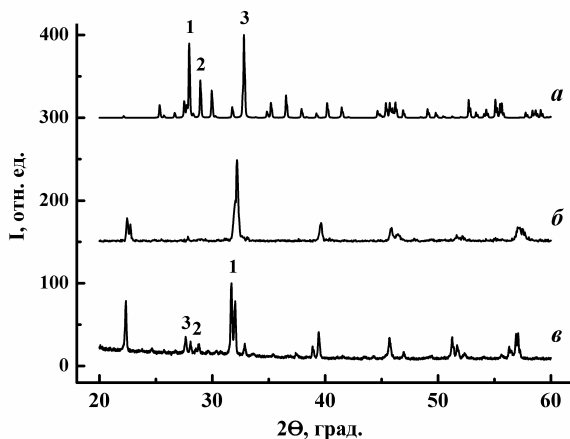


Fig. 3. X-ray patterns of samples, which form in systems  $\text{BiFeO}_3 - \text{LaFeO}_3$  and  $\text{Bi}(\text{Pr})\text{FeO}_3 - \text{LaFeO}_3$  at different fusion temperatures: 650 K (a; 1 –  $\text{Bi}_2\text{O}_3$ ; 2 –  $\text{La}_2\text{O}_3$ ; 3 –  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), 833 K (b;  $\text{BiFeO}_3$ ), 1093 K (c; 1 –  $\text{BiFeO}_3$ ; 2 –  $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$ ; 3 –  $\text{Bi}_{25}\text{FeO}_{39}$ )

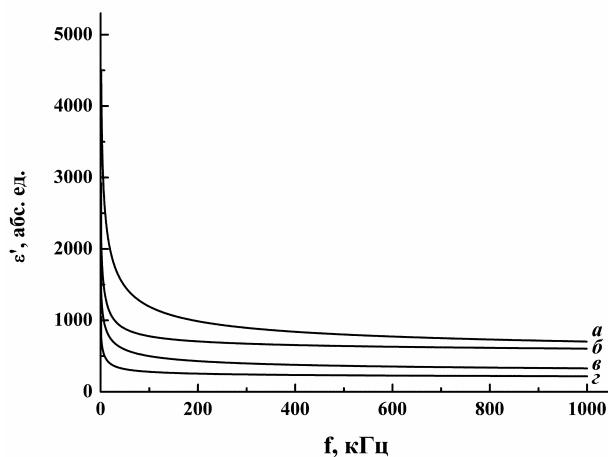


Fig. 4. Dependence of the real part of permittivity  $\epsilon'$  on the frequency in the range 20 Hz – 1 MHz for compounds: a –  $\text{Bi}_{0.7}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.2}\text{FeO}_3$ ; b –  $\text{Bi}_{0.8}\text{La}_{0.2}\text{FeO}_3$ ; c –  $\text{Bi}_{0.9}\text{La}_{0.1}\text{FeO}_3$ ; d –  $\text{Bi}_{0.8}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.1}\text{FeO}_3$

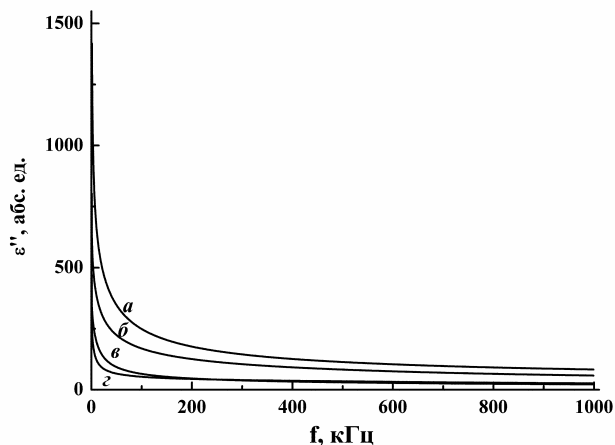


Fig. 5. Dependence of the imaginary part of permittivity  $\epsilon''$  on the frequency in the range 20 Hz – 1 MHz for compounds: a –  $\text{Bi}_{0.7}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.2}\text{FeO}_3$ ; b –  $\text{Bi}_{0.8}\text{La}_{0.2}\text{FeO}_3$ ; c –  $\text{Bi}_{0.9}\text{La}_{0.1}\text{FeO}_3$ ; d –  $\text{Bi}_{0.8}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.1}\text{FeO}_3$

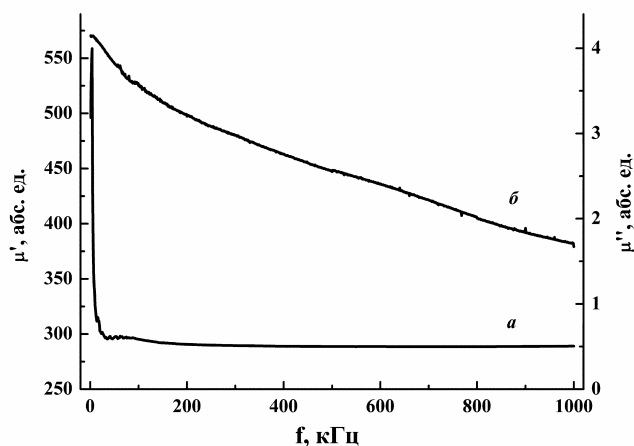


Fig. 6. Dependence of the real  $\mu'$  (a) and the imaginary  $\mu''$  (b) parts of permeability on the frequency in the range 20 Hz – 1 MHz for the compound  $\text{Bi}_{0.9}\text{La}_{0.1}\text{FeO}_3$

### Conclusion

We determined homogeneous concentration region, where solid solutions  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{FeO}_3$  and  $\text{Bi}_{0.9-x}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_x\text{FeO}_3$  with the crystal structure of perovskite with an orthorhombic distortion exists. We found that the formation of bismuth ferrite and its derivatives starts at temperature  $\sim 833$  K, and at  $T > 833$  K  $\text{BiFeO}_3$  decomposes with the formation of impurity phases of mullite ( $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$ ) and sillenite ( $\text{Bi}_{25}\text{FeO}_{39}$ ). The number of these impurity phases does not rise with the increase of degree of substitution of lanthanum and praseodymium in the base compound  $\text{BiFeO}_3$ . We showed that in perovskite-like phases in the frequency range 20 Hz – 1 MHz both electrical (complex permittivity) and magnetic (complex permeability) parameters decrease with the frequency increase. The maximum values of permittivity  $\epsilon'$  and permeability  $\mu'$  were obtained in the compounds  $\text{Bi}_{0.7}\text{La}_{0.1}\text{Pr}_{0.2}\text{FeO}_3$  and  $\text{Bi}_{0.9}\text{La}_{0.1}\text{FeO}_3$ , respectively.

### Acknowledgments

The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 18-33-00269.

### References

1. Zvezdin A.K., Pyatakov A.P. Phase transitions and the giant magnetoelectric effect in multiferroics. *Phys. Usp.* 2004, Vol. 47, no. 4, pp. 416–421. DOI: 10.1070/PU2004v047n04ABEH001752
2. Lupitskaya Y.A., Kalganov D.A., Abdrahmanova K.V. Phase formation in the  $\text{BaCO}_3\text{–PbO–Fe}_2\text{O}_3\text{–Nb}_2\text{O}_5$  system. *The Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2017, Vol. 11, no. 1, pp. 87–91. DOI: 10.1134/S1027451016050347
3. Troyanchuk I.O., Bushinsky M.V., Chobot A.N., Mantyskaya O.S., Tereshko N.V. Weak ferromagnetism in  $\text{BiFeO}_3$ -based multiferroics. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 2009, Vol. 89, no. 4, pp. 180–184. DOI: 10.1134/S0021364009040043
4. Troyanchuk I.O., Karpinsky D.V., Bushinsky M.V., Mantyskaya O.S., Tereshko N.V., Shut V.N. Phase Transition, Magnetic and Piezoelectric Properties of Rare-Earth-Substituted  $\text{BiFeO}_3$  Ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, 2011, Vol. 94, no. 12, pp. 4502–4506. DOI: 10.1111/j.1551-2916.2011.04780.x
5. Zatyupo A.A., Bashkirov L.A., Petrov G.S., Shichkova T.A. Fiziko-himicheskie svoystva tverdyh rastvorov  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{O}_3$ , sintezirovannyh s ispol'zovaniem raznyh metodov (Physical and chemical properties of solid solution  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{O}_3$  synthesized by different methods. *Trudy BGTU. No. 3. Himiya i tekhnologiya neorganicheskikh materialov i veshchestv*, 2012, no. 3, pp. 37–41. (in Russ.).

Received January 30, 2018

УДК 537.9

DOI: 10.14529/mmph180208

## ОБРАЗОВАНИЕ СОЕДИНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФЕРРИТА ВИСМУТА ПРИ ЧАСТИЧНОМ ЗАМЕЩЕНИИ ИОНОВ ВИСМУТА ИОНАМИ ЛАНТАНА И ПРАЗЕОДИМА<sup>1</sup>

Ю.А. Лупицкая, Д.А. Калганов, Ю.О. Афанасьев

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: lupitskaya@gmail.com

Методом твердофазной реакции получены соединения на основе феррита висмута, образующиеся при частичном замещении ионов висмута ионами редкоземельных металлов – лантана и празеодима. В интервале температур от 297 до 1123 К методами термогравиметрического и рентгеновского анализа исследованы особенности процессов фазообразования синтеза продуктов реакций в системах, содержащих оксиды железа, висмута, лантана и празеодима, определены их составы. Для конечной температуры синтеза 1123 К выявлена гомогенная концентрационная область существования твердых растворов феррита висмута, имеющих структуру искаженного перовскита. Изучено влияние оксидов лантана и празеодима на фазовый состав соединений феррита висмута при изовалентном легировании части ионов висмута ионами лантана и празеодима. В частотном диапазоне (20 Гц – 1 МГц) установлены основные параметры, характеризующие электрические и магнитные свойства перовскитоподобных фаз. Установлено, что характер частотной зависимости комплексной магнитной проницаемости исследуемых образцов существенно не отличается от частотной зависимости электрических параметров (вещественной и мнимой части диэлектрической проницаемости). Показано, что во всем заданном диапазоне наблюдается уменьшение как электрических (комплексной диэлектрической проницаемости), так и магнитных параметров (комплексной магнитной проницаемости) с ростом частоты.

*Ключевые слова:* феррит висмута; твердые растворы; структура искаженного перовскита; электрические и магнитные свойства.

### Литература

1. Звездин, А.К. Фазовые переходы и гигантский магнитоэлектрический эффект в мультиферроиках / А.К. Звездин, А.П. Пятаков // УФН. – 2004. – Т. 174, № 4. – С. 465–470. DOI: 10.3367/UFNr.0174.200404n.0465
2. Лупицкая, Ю.А. Фазообразование в системе  $\text{BaCO}_3\text{-PbO-Fe}_2\text{O}_3\text{-Nb}_2\text{O}_5$  / Ю.А. Лупицкая, Д.А. Калганов, К.В. Абдрахманова // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2016. – № 12. – С. 84–88.
3. Слабый ферромагнетизм в мультиферроиках на основе  $\text{BiFeO}_3$  / И.О. Троянчук, М.В. Бушинский, А.Н. Чобот и др. // Письма в ЖЭТФ. – 2009. – Т. 89. – Вып. 4. – С. 204–208.
4. Phase Transition, Magnetic and Piezoelectric Properties of Rare-Earth-Substituted  $\text{BiFeO}_3$  Ceramics / И.О. Troyanchuk, D.V. Karpinsky, M.V. Bushinsky // Journal of the American Ceramic Society. – 2011. – Vol. 94. – Issue 12. – P. 4502–4506.
5. Физико-химические свойства твердых растворов  $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{O}_3$ , синтезированных с использованием разных методов / А.А. Затюпо, Л.А. Башкиров, Г.С. Петров, Т.А. Шичкова // Труды БГТУ. № 3. Химия и технология неорганических материалов и веществ. – 2012. – № 3. – С. 37–41.

Поступила в редакцию 30 января 2018 г.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-33-00269

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям наук и группам специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 01.04.00 – физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям “Ulrich’s Periodicals Directory”, “Zentralblatt MATH”, “Russian Science Citation Index on Web of Science”.

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

### ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребинной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редакторы: *О. Шаханская, А. Полякова*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 25.04.2018. Дата выхода в свет 30.04.2018.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 9,30.

Тираж 500 экз. Заказ 114/229. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.