

ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2018
Т. 10, № 3**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университета Невады, г. Рино, США)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН, профессор Физики и Оптики **Зельдович Б.Я.** (КРЕОЛ, Университет Центральной Флориды, г. Орландо, США)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2018
Vol. 10, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany
G.L. Brovko, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
D. Guidetti, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
I.V. Zalyapin, University of Nevada, Reno, United States of America
A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
B.Ya. Zeldovich, CREOL, University of Central Florida, Orlando, United States of America
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
L.V. Utkin, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БАЯЗИТОВА А.А. Об обобщенной краевой задаче для линейных уравнений соболевского типа на графе.....	5
ГАВРИЛОВА О.В. Задача стартового управления и финального наблюдения для системы уравнений Фитц Хью–Нагумо с условием Дирихле–Шоуолтера–Сидорова.....	12
ГОЛОСОВСКИЙ М.С., БОГОМОЛОВ А.В., ТЕРЕБОВ Д.С., ЕВТУШЕНКО Е.В. Алгоритм настройки системы нечёткого логического вывода типа Мамдани.....	19
LARKIN E. V., PRIVALOV A.N. Alternative Routs of Games with Rigid Schedule	30
MELEKHOVA O.N., MESHCHERYAKOV R.V. Self-stabilizing Mobile Medical Robots Scattering Algorithm.....	41
РАСУЛОВ К.М., ХАНКИШИЕВА Ш.С. О неустойчивости решений однородной краевой задачи Римана для квазигармонических функций в круговых областях.....	52
RONZHIN A.L., ZAYTSEVA A.A., KULESHOV S.V., NENAUSNIKOV K.V. Methods of Speech and Text Databases Development for QA-Systems	59

Механика

РЯЖСКИХ В.И., РЯЖСКИХ А.В. Седиментация малоконцентрированной полидисперсной взвеси стоковских частиц в плоском слое	67
--	----

Физика

BIBIKOVA E.A., KUNDIKOVA N.D., AL-WASSITI N. Investigation of the Diffraction of a Focused Gaussian Beam by a Half-Plane near the Beam Waist	72
--	----

CONTENTS

Mathematics

BAYAZITOVA A.A. On the Generalized Boundary-Value Problem for Linear Sobolev Type Equations on the Geometric Graph.....	5
GAVRILOVA O.V. Start Control and Final Observation Problem for the Fitz Hugh–Nagumo System for the Dirichlet–Showalter–Sidorov Condition.....	12
GOLOSOVSKIY M.S., BOGOMOLOV A.V., TEREBOV D.S., EVTUSHENKO E.V. Algorithm to Adjust Fuzzy Inference System of Mamdani Type	19
LARKIN E.V., PRIVALOV A.N. Alternative Routs of Games with Rigid Schedule.....	30
MELEKHOVA O.N., MESHCHERYAKOV R.V. Self-Stabilizing Mobile Medical Robots Scattering Algorithm	41
RASULOV K.M., KHANKISHIEVA Sh.S. On the Instability of Solutions of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann Type for Quasiharmonic Functions in Circular Domains	52
RONZHIN A.L., ZAYTSEVA A.A., KULESHOV S.V., NENAUSNIKOV K.V. Methods of Speech and Text Databases Development for QA-Systems	59

Mechanics

RYAZHSKIKH V.I., RYAZHSKIKH A.V. Sedimentation of a Small-Concentrated Polydisperse Suspension of Stokes Particles in a Flat Layer	67
--	----

Physics

BIBIKOVA E.A., KUNDIKOVA N.D., AL-WASSITI N. Investigation of the Diffraction of a Focused Gaussian Beam by a Half-Plane near the Beam Waist.....	72
---	----

ОБ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

А.А. Баязитова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: balfiya@mai.ru

На геометрическом графе рассматривается краевая задача, где помимо условий непрерывности и баланса потоков, впервые вводится условие неподвижности в вершине графа, которое превращается в условие Дирихле, когда граф содержит одно ребро с двумя вершинами. При решении этой задачи сначала рассматривается соответствующая задача Штурма–Лиувилля, а затем полученные результаты применяются для решения задачи Коши двух линейных моделей, заданных на графе: уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной. Особенностью работы является и тот факт, что на каждом ребре графа задаются уравнения с различными коэффициентами, что вкупе с введением неподвижных вершин графа является впервые рассматриваемой задачей.

Обе модели относятся к уравнениям соболевского типа, изучение которых переживает эпоху своего расцвета. Проведенная редукция этих уравнений к абстрактному уравнению соболевского типа позволила применить метод вырожденных полугрупп операторов. Найдено фазовое пространство решений методом фазового пространства, заключающимся в сведении сингулярного уравнения к определенному на некотором подпространстве исходного пространства регулярному уравнению. Полученные результаты теорем могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении стохастических уравнений для моделей, заданных на геометрическом графе.

Ключевые слова: модели соболевского типа; уравнения на графе; метод фазового пространства.

Введение

Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной [1]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f \quad (1)$$

моделирует процессы фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, влагопереноса в почве [2], а также теплопроводности в среде с «двумя температурами» [3].

Уравнение Хоффа [4]

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + f \quad (2)$$

моделирует выпучивание двутавровой балки под воздействием высоких температур.

Обе модели относятся к уравнениям соболевского типа, изучение которых переживает эпоху своего расцвета. Уравнения (1), (2) в различных аспектах изучены в [5–7]. Особенностями нашего подхода будут активное использование теории относительно ограниченных операторов и порождаемых ими вырожденных голоморфных групп операторов [8, гл. 3].

В данной работе впервые изучаются уравнения соболевского типа на графах с более общими условиями в вершинах графа, что является обобщением полученных ранее результатов, например, [9]. Приведены примеры решения задачи Коши для линейных уравнений Хоффа и Баренблатта–Желтова–Кочиной при более общих предположениях на коэффициенты уравнений. В заключительной части статьи намечены направления дальнейших возможных исследований. Список литературы соответствует лишь вкусу автора и не является полным.

1. Функциональные пространства и дифференциальные операторы на графе

Рассмотрим конечный связный ориентированный граф $G = G(\mathfrak{B}; \mathfrak{E})$ с множеством вершин $\mathfrak{B} = \{V_i\}$ и множеством ребер (дуг) $\mathfrak{E} = \{E_j\}$. Каждая дуга снабжена параметрами: длиной $l_j > 0$ и шириной $d_j > 0$. Рассмотрим задачу с краевыми условиями:

$$u_j(0, t) = u_k(l_k, t), E_j, E_k \in E^\alpha(V_i') \cup E^\omega(V_i'), \quad (3)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i')} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_i')} d_k u_{kx}(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$u_j(0, t) = u_k(l_k, t) = 0, E_j, E_k \in E^\alpha(V_i'') \cup E^\omega(V_i'') \quad (5)$$

для уравнений на графе G

$$a_j u_j - u_{jxx} = f. \quad (6)$$

Здесь через $\mathfrak{B}' = \{V_i'\}$ обозначено множество «подвижных» вершин графа, а через $\mathfrak{B}'' = \{V_i''\}$ – множество «неподвижных» вершин графа, через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг, у которых начало дуги (конец дуги) в вершине V_i .

Условие (3) соответствует требованиям непрерывности всех решений в вершинах графа, а условие (4) является аналогом условия Кирхгоффа и означает, что поток через каждую вершину графа должен равняться нулю (соответствует условию Неймана в случае, когда заданный граф состоит из единственной дуги с двумя подвижными вершинами), условие (5) – условие неподвижности решения в вершинах графа $\mathfrak{B}'' = \{V_i''\}$.

Определение. Вектор-функцию $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$ такую, что $u_j \in C^2(0, l_j) \cap C^1[0, l_j]$, назовем решением задачи (3)–(6), если она удовлетворяет уравнению (6) и краевым условиям (3)–(5).

Через $L_2(G)$ обозначим пространство $L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle g, h \rangle \geq \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx$. Через \mathfrak{U} обозначим гильбертово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнены (4), (5)}\}$ со скалярным произведением $[u, v] = \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + u_j(x) v_j(x)) dx$.

В пространстве $W_2^1(0, l_j)$ абсолютно непрерывные функции согласно теоремам вложения Соболева, поэтому следует корректное определение, полнота и компактное вложение в $L_2(G)$ пространства \mathfrak{U} . Отождествим в силу гильбертовости $L_2(G)$ со своим сопряженным пространством, и введем сопряженное относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство \mathfrak{F} к \mathfrak{U} . Легко заметить, что \mathfrak{F} тоже является гильбертовым пространством с компактным вложением $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$.

Умножим (6) скалярно на v , где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(G)$, тогда $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$, где $\langle Au, v \rangle \geq \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (-u_{jxx} v_j + a_j u_j v_j) dx$.

Интегрируя по частям и используя условия (3)–(5), получим

$$\langle Au, v \rangle \geq \sum_{j: E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + a_j u_j v_j) dx.$$

Как нетрудно заметить, оператор A самосопряжен, положительно определен и является топ-линейным изоморфизмом пространств \mathfrak{U} и \mathfrak{F} . Ввиду компактности вложения $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ спектр $\sigma(A)$ оператор A положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.

2. Редукция уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

На каждом ребре E_j зададим линейное уравнение Хоффа

$$\lambda_j u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha_j u_j, \quad (7)$$

описывающее процесс выпучивания двугавровой балки, где параметр $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ характеризует нагрузку на балку, параметры $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки, переменные $x \in (0, l_j)$ соответствуют натуральному параметру дуги, $t \in \mathbb{R}$, и линейное уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$\lambda_j u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha_j u_{jxx}, \quad (8)$$

описывающее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде, а также процессы влагопереноса в почве и теплопроводности в среде с «двумя температурами», где параметры $\lambda_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства среды, переменные $x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}$.

Под краевой задачей понимается поиск вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$, каждая компонента которой $u_j = u_j(x, t)$ удовлетворяет уравнению (7) или (8) на ребре E_j , а в вершинах компоненты удовлетворяют условиям (3)–(5).

Будем для этих моделей рассматривать задачу с начальными условиями Коши

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), x \in (0, l_j). \quad (9)$$

Для редукции уравнения Хоффа к линейному абстрактному уравнению соболевского типа построим операторы $L, M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$

$$\langle Lu, v \rangle \geq \sum_j d_j (\lambda_j + a_j) \int_0^{l_j} u_j v_j dx - \langle Au, v \rangle, \quad (10)$$

$$\langle Mu, v \rangle \geq \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx, \quad (11)$$

а для редукции уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$\langle Lu, v \rangle \geq \sum_j d_j (\lambda_j - a_j) \int_0^{l_j} u_j v_j dx + \langle Au, v \rangle, \quad (12)$$

$$\langle Mu, v \rangle \geq -\sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx. \quad (13)$$

Очевидно, что рассмотренные в (10)–(13) операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U} = \mathfrak{F})$ (т. е. линейные и непрерывные), причем операторы L фредгольмовы (т. е. $\text{ind } L = 0$), а операторы M компактны.

Таким образом мы редуцировали задачу Коши (9) с краевыми условиями (3)–(5) для уравнений (7), (8) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \quad (14)$$

для абстрактного линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \quad (15)$$

3. Фазовое пространство уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{F} – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т. е. линейны и ограничены). Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ назовем *резольвентным множеством* и *L-спектром оператора M* соответственно. Оператор M назовем (L, σ) -ограниченным, если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Если оператор $(L, 0)$ -ограничен, то существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}).$$

Здесь $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ – правая, а $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L -резольвенты оператора M ; контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Контурные интегралы здесь и ниже понимаются в смысле Римана. Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \text{im } P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \text{im } Q$ и обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k \cap \text{dom}$, $k = 0, 1$.

Справедлива

Теорема 3.1. [8] Пусть оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен. Тогда

- (i) оператор $L_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$; причем существует оператор $L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$;
- (ii) оператор $M_k \in Cl(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$; причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Пусть оператор $M(L, \sigma)$ -ограничен, построим оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^0)$. Оператор M назовем (L, p) -ограниченным, $p \in \mathbb{N}$ ($(L, 0)$ -ограниченным), если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$ ($H = \mathbb{O}$).

Для уравнения Хоффа справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1 Оператор $M(L, 0)$ -ограничен (10), (11) в случае выполнения одного из условий:

- (i) тривиальное ядро оператора $\ker L = \{0\}$;
- (ii) нетривиальное ядро оператора $\ker L \neq \{0\}$, коэффициенты $\alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j

имеют одинаковый знак.

Доказательство. Очевидность утверждения (i) следует из существования оператора $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U} \approx \mathfrak{F})$. Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Тогда билинейная форма

$$[h, g] = \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} h_j g_j dx$$

задает эквивалентное $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L_2(G)$. Оператор L фредгольмов, т. е. $\text{codim im } L = \dim \ker L$ и ядро $\ker L$ ортогонально относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ образу $\text{im } L$. Пусть вектор $\psi \in \ker L / \{0\}$, рассмотрим

$$\langle M\psi, \psi \rangle \geq \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} \psi_j^2 dx = [\psi, \psi] > 0.$$

Следовательно, $M\psi \neq \text{im } L$ для любого вектора $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$, что означает отсутствие L -присоединенных векторов для вектора $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$, что доказывает утверждение леммы в случае $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Если же $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$, то для леммы доказательство аналогично.

Для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной справедливо утверждение.

Лемма 3.2. Оператор $M(L, 0)$ -ограничен (12), (13) в случае выполнения одного из двух условий

- (i) тривиальности ядра $\ker L = \{0\}$;
- (ii) ядро оператора нетривиально $\ker L \neq \{0\}$, а для коэффициентов выполняются условия $\alpha_j \neq 0$ при любом j , все α_j с одинаковым знаком, $\lambda_j \neq 0$ при любом j и все λ_j имеют одинаковый знак.

Доказательство. Утверждение (i) следует из существования оператора $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U} \approx \mathfrak{F})$. Если же $\ker L \neq \{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, то при векторе $\psi \in \ker L / \{0\}$ получим

$$\langle M\psi, \psi \rangle \geq -\sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} \psi_{jx}^2 dx \leq 0,$$

равенство $\langle M\psi, \psi \rangle \geq 0$ выполняется только при $\psi_x = (\psi_{1x}, \psi_{2x}, \dots, \psi_{jx}, \dots) \equiv 0$, а

$\langle L\psi, \psi \rangle \geq \sum_j d_j \int_0^{l_j} (\lambda_j \psi_j^2 + \psi_{jx}^2) dx = \sum_j d_j \int_0^{l_j} \lambda_j \psi_j^2 dx \neq 0$ при $\lambda_j \neq 0$ при любом j и все λ_j име-

ют одинаковый знак и $\psi \neq 0$. Это приводит к противоречию с тем, что $\psi \in \ker L / \{0\}$, поэтому $\langle M\psi, \psi \rangle < 0$ при $\psi \in \ker L / \{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$.

Получаем, что $M\psi \neq \text{im } L$ для любого вектора $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$, аналогично лемме 3.1 получаем, что ни один вектор $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет L -присоединенных векторов. Для случая $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ лемма доказана. Тот же самый результат получим при значениях $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$.

Решением уравнения (15) называется вектор-функция $u = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, если она удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$ назовем *решением задачи Коши (14)*, если оно удовлетворяет условию (14) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$. *Фазовым пространством* уравнения (15) называется множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$, если любое его решение $u(t) \in \mathfrak{B}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$; и для любого $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ задачи (14) для уравнения (15). Наконец, введем в рассмотрение вырожденную (если $\ker L \neq \{0\}$) голоморфную (во всей плоскости \mathbb{C}) группу операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что $U^0 = P$, причем $\ker P \supset \ker L$. Справедлива

Теорема 3.2. [8] Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда

(i) любое решение $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ уравнения (15) имеет вид $u(t) = U^t u_0$, $t \in \mathbb{R}_+$, и некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$;

(ii) фазовым пространством уравнения (15) служит подпространство \mathfrak{U}^1 .

Итак, в условиях теоремы 3.2 L -резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M в кольце $|\mu| > a$ разлагается в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q - \sum_{k=0}^p \mu^k H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q),$$

где операторы $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^1)$, $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^0)$. Отсюда разрешающая вырожденная группа U^t уравнения (15) выглядит следующим образом:

$$U^t = (\mathbb{I} - Q) + e^{St} Q,$$

где

$$e^{St} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu \mathbb{I} - S) e^{\mu t} d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{St^k}{k!}$$

– группа операторов, заданная на фазовом пространстве \mathfrak{U}^1 уравнения (15).

Основным результатом статьи являются теоремы о разрешимости задачи Коши для линейных уравнений Хоффа и Баренблатта–Желтова–Кочиной.

Теорема 3.3 (уравнение Хоффа) (i) Пусть $\ker L = \{0\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (7) является все пространство \mathfrak{U} .

(ii) Пусть $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j имеют одинаковый знак. Тогда фазовым пространством уравнения (7) является подпространство \mathfrak{U}^1 .

Теорема 3.4 (уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной) (i) Пусть $\ker L = \{0\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (8) является все пространство \mathfrak{U} .

(ii) Пусть $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j имеют одинаковый знак, $\lambda_j \neq 0$ при любом j и все λ_j имеют одинаковый знак. Тогда фазовым пространством уравнения (8) является подпространство \mathfrak{U}^1 .

Заключение

Полученные результаты теорем могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении стохастических уравнений для моделей (7), (8), заданных на геометрическом графе с условиями (3)–(5).

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
2. Hallaire, M. Soil water movement in the film and vapor phase under the influence of evapotranspiration. Water and its conduction in soils / M. Hallaire // Proceedings of XXXVII Annual Meeting of the Highway Research Board, Highway Research Board Special Report. – 1958. – Vol. 40. – P. 88–105.
3. Chen, P.J. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). – 1968. – Vol. 19. – Issue 4. – P. 614–627.
4. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – Vol. 7, no. 1. – P. 1–20.
5. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – P. 225–236.
6. Сагадеева, М.А. Ограниченные решения модели Баренблатта–Желтова–Кочинной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, Ф.Л. Хасан // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 132–139.
7. Kadchenko, S.I. Numerical research of the Barenblatt–Zhelotov–Kochina stochastic model / S.I. Kadchenko, E.A. Soldatova, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Vol. 9, no. 2. – P. 117–123.
8. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
9. Баязитова, А.А. Задача Шоултера–Сидорова для модели Хоффа на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, вып. 1. – P. 2–8.

Поступила в редакцию 13 июня 2018 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 5–11*

DOI: 10.14529/mmph180301

ON THE GENERALIZED BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS ON THE GEOMETRIC GRAPH

A.A. Bayazitova

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: balfiya@mai.ru

On the geometric graph, where in addition to the continuity conditions and balance flow, condition of immobility is first introduced into the vertices of the graph, which is converted to a Dirichlet condition when the graph has one edge with two vertices. To solve this problem we first consider the corresponding Sturm–Liouville problem, and the results are then used to solve the Cauchy problem for two linear models, defined on the graph: Hoff equation and Barenblatt–Zhelotov–Kochina equation. A feature of the work is the fact that on each edge of the graph given by the equation with different coefficients, which coupled with the introduction of vertices, is fixed for the first time in this problem.

Both models relate to Sobolev type equations, the study of which is experiencing an era of its heyday. Reduction of these equations to an abstract Sobolev type equation makes it possible to apply the method of degenerate semigroups of operators. The phase space of solutions is determined by the phase

space method, which consists in reducing the singular equation to a regular equation defined on some subspace of the original space. The obtained results of theorems can be used in consideration of inverse problems, optimal control problems, the initial-end and multipoint problems, and also in consideration of stochastic equations for the models set in a geometric graph.

Keywords: Sobolev type models; equations on graph; phase space method.

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, Vol. 24, Issue 5, pp. 1286–1303. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90107-6
2. Hallaire M. Soil water movement in the film and vapor phase under the influence of evapotranspiration. Water and its conduction in soils. *Proc. XXXVII Annual Meeting of the Highway Research Board, Highway Research Board Special Report*, 1958, Vol. 40, pp. 88–105.
3. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1968, Vol. 19, Issue 4, pp. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969
4. Hoff N.J. Creep buckling. *The Aeronautical Quarterly*, 1956, Vol. 7, no. 1, pp. 1–20.
5. Manakova N.A., Dyl'kov A.G. Optimal control of the solutions of the initial-finish problem for the linear Hoff model. *Mathematical Notes*, 2013, Vol. 94, Issue 1–2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225
6. Sagadeeva M.A., Hasan F.L. Bounded solutions of Barenblatt–Zheltov–Kochina model in quasi-Sobolev spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 138–144. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150414
7. Kadchenko S.I., Soldatova E.A., Zagrebina S.A. Numerical research of the Barenblatt–Zheltov–Kochina stochastic model. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2016, Vol. 9, no. 2, pp. 117–123. DOI: 10.14529/mmp160211
8. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, VSP, Utrecht–Boston–Köln–Tokyo, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501
9. Bayazitova A.A. Zadacha Showaltera–Sidorova dlya modeli Khoffa na geometricheskom grafe (The Showalter–Sidorov problem for the Hoff model on a geometric graph). *IIGU Ser. Matematika*, 2011, Vol. 4, no. 1, pp. 2–8. (in Russ.).

Received June 13, 2018

ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФИТЦ ХЬЮ–НАГУМО С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ–ШОУОЛТЕРА–СИДОРОВА

О.В. Гаверилова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: gavrilovaov@susu.ru

Исследуется стартовое управление и финальное наблюдение решениями задачи Дирихле–Шоуолтера–Сидорова для вырожденной системы уравнений Фитц Хью–Нагумо. Эта система относится к классу уравнений реакции-диффузии и описывает распространения волн в активных биологических средах, таких как сердечная мышца или мозговая ткань. Система уравнений Фитц Хью–Нагумо является, с одной стороны, развитием известной модели Колмогорова–Петровского–Пискунова, а с другой стороны – упрощением модели Ходжинса–Хаксли. При построении математической модели учитывая, что скорость одной искомой функции системы уравнений Фитц Хью–Нагумо значительно превышает скорость другой, было предложено исследовать вырожденный случай. Изучаемая задача стартового управления и финального наблюдения моделирует ситуацию, когда после кратковременного управляющего воздействие ожидается требуемый результат за некоторый период времени, т. е. в начальный момент времени посылаются импульс большой мощности в систему нервов и ожидается требуемое состояние системы через некоторое установленное время. На основе методов Галеркина и компактности доказана теорема существования задачи стартового управления и финального наблюдения в слабом обобщенном случае.

Ключевые слова: полулинейные уравнения соболевского типа; задача Шоуолтера–Сидорова; задача стартового управления и финального наблюдения; система уравнений Фитц Хью–Нагумо; слабое обобщенное решение.

Введение

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим вырожденную систему уравнений Фитц Хью – Нагумо:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 w - \eta_1 v + f_1, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 w - \eta_2 v - w^3 + f_2 \end{cases} \quad (1)$$

с краевым условием Дирихле

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (2)$$

и начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$w(s, 0) = u(s), s \in \Omega. \quad (3)$$

Искомые функции $w = w(s, t)$ и $v = v(s, t)$ описывают динамику мембранного потенциала и поведение натриевого и калиевого токов; $\beta_2 \in R_-$, $\alpha, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \eta_1, \eta_2 \in R_+$ – характеризуют порог возбуждения, скорость порога возбуждения, электропроводность и реполяризацию среды; $f = (f_1, f_2)$ – источник возбуждения. Первоначально в работах [1, 2] была получена невырожденная система уравнений Фитц Хью–Нагумо, зависящая от двух искомых функций v и w , мо-

делирующих поведение химических элементов в мембране. Скорость искомой функции w увеличивается по мере ее роста, что привносит в систему сильную нелинейность. Невырожденная система уравнений Фитц–Хью в двухкомпонентном и многокомпонентном случаях изучалась подробно в работах [3–5]. Нулевое решение невырожденной системы при $\beta_2 < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\beta_2 > 0$ неустойчиво [6]. В связи с тем, что скорость искомой функции w существенно превосходит скорость изменения v , в случае устойчивости решения (при $\beta_2 < 0$) в работе [7] было предложено рассматривать именно вырожденную систему уравнений вида (1). Нами будет рассмотрен случай асимптотически устойчивой задачи, когда $\beta_2 < 0$ и $\beta_1 = \eta_2$.

Начально-краевая задача (2), (3) для системы уравнений (1) в специальном образом подобранных функциональных пространствах редуцируются к задаче Шоултера–Сидорова

$$L(x(0) - u(s)) = 0 \quad (4)$$

для абстрактного полулинейного уравнения

$$L\dot{x} + Mx + N(x) = f, \ker L \neq \{0\} \quad (5)$$

и относится к широкому классу уравнений соболевского типа [8, 9]. При рассмотрении классического условия Коши в случае уравнений соболевского типа решение задачи существует лишь при начальном значении $u(s)$ взятом из фазового пространства уравнения (5). Рассматриваемое в работе условие Шоултера–Сидорова (4) является более общим по сравнению с условием Коши и позволяет снять данное ограничение. Впервые задача управления для уравнений соболевского типа была поставлена и изучена в конце XX века, задачи же стартового управления и финального наблюдения исследуются сравнительно недавно. Задачи управления для полулинейных уравнений соболевского типа с условием Шоултера–Сидорова рассматривались в [10, 11]. В работе [12] была исследована задача оптимального управления для вырожденной системы уравнений (1), а также рассмотрены и доказаны существование и единственность решения задачи (1)–(3) в слабом обобщенном смысле. Впервые задача стартового управления и финального наблюдения для системы уравнений (1) рассматривалась в работе [13].

Данная работа посвящена исследованию задачи стартового управления и финального наблюдения

$$J(x(T), u) \rightarrow \inf \quad (6)$$

решениями задачи (1)–(3) в слабом обобщенном смысле [8, 14]. Задача стартового управления и финального наблюдения моделирует ситуацию, когда после кратковременного управляющего воздействия ожидается требуемый результат за некоторый период времени, т. е. в начальный момент времени посылается импульс большой мощности в систему нервов и ожидается требуемое состояние системы через некоторое установленное время. В работах [15–17] изучались задачи стартового управления и финального наблюдения для различных математических моделей, основанных на уравнениях соболевского типа.

1. Задача стартового управления и финального наблюдения

Положим $H_i = W_2^1(\Omega)$ и $B_i = L_4(\Omega)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим гильбертово пространство $A = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[x, \zeta] = \langle v, \xi \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle w, \eta \rangle_{L_2(\Omega)}, \text{ где } x = (v, w), \zeta = (\xi, \eta).$$

Определим пространства $H = H_1 \times H_2$ и $B = B_1 \times B_2$, а через H^* , B^* обозначим сопряженные пространства к пространству H , B относительно скалярного произведения в A , соответственно. В силу теоремы Соболева в случае $n \leq 4$ имеют место плотные и непрерывные вложения

$$H \subset B \subset A \subset B^* \subset H^*,$$

причем вложение $H \subset A$ компактно согласно теореме Реллиха–Кондрашева.

Определим операторы L, M, N следующим образом:

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \eta \rangle, x, \zeta \in H,$$

$$[Mx, \zeta] = \langle -\alpha_1 \nabla v, \nabla \xi \rangle + \langle -\beta_1 w + \eta_1 v, \xi \rangle + \langle -\alpha_2 \nabla w, \nabla \eta \rangle + \langle \beta_2 | w + \beta_1 v, \eta \rangle, x, \zeta \in H,$$

$$[N(x), \zeta] = \langle w^3, \eta \rangle, x, \zeta \in B.$$

Замечание 1. Операторы $L, M \in \mathcal{L}(H; H^*)$ линейные непрерывные операторы. Справедливость данного утверждения является классическим результатом.

Рассмотрим пространство

$$X = \{x | v \in L_2(0, T; H_1), w \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_4(0, T; B_2)\}.$$

Определение 1. Вектор-функцию $x \in X$ при $T \in R_+$ назовем слабым обобщенным решением задачи Шоултера–Сидорова (1)–(3), если она удовлетворяет

$$\int_0^T \varphi(t) \left(\left[L \frac{dx}{dt}, \zeta \right] + [Mx + N(x), \zeta] \right) dt = \int_0^T \varphi(t) [f, \zeta] dt, \quad [L(x - x_0), \zeta] = 0 \quad \forall \zeta \in H, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Теорема 1. [13] Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \eta_1 \in R_+, \beta_2 \in R_-$ и $n \leq 4$, тогда при любых $x_0 \in H, T \in R_+, f_1 \in L_2(0, T; H_1^*), f_2 \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; B_2^*), u \in H_2$ существует единственное решение $x \in X$ задачи (1)–(3), причем

$$\|w(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_1 \int_0^t [\|v(\tau)\|_{H_1}^2 + \|w(\tau)\|_{B_2}^4] d\tau \leq C_2 \int_0^t \|f_1(\tau)\|_{H_1^*} d\tau + C_3 \int_0^t \|f_2(\tau)\|_{B_2^*} d\tau + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$C_i > 0, i = \overline{1, 3}. \tag{7}$$

Пусть $J(x(T), u)$ – ограниченный снизу, полунепрерывный снизу, коэрцитивный функционал; $u \in U_{ad}$, где U_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $U = H_2$. Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения (6) решениями (1)–(3) в слабом обобщенном смысле.

Определение 2. Пару $(\hat{x}(T), \hat{u}) \in X \times U_{ad}$ будем называть решением задачи (1)–(3), (6), если

$$J(\hat{x}(T), \hat{u}) = \inf_{(x, u)} J(x(T), u),$$

и пары (x, u) удовлетворяют задаче (1)–(3) в смысле определения 1. Вектор-функцию u будем называть стартовым управлением задачи (1)–(3), (6).

Теорема 2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \eta_1 \in R_+, \beta_2 \in R_-, T \in R_+$ и $n \leq 4$, тогда существует решение $(\hat{x}(T), \hat{u})$ задачи (1)–(3), (6).

Доказательство. В силу теоремы 1 для задачи (1)–(3), (6) для любого $u \in U_{ad}$ существует единственное слабое обобщенное решение. Следовательно, можно считать, что

$$J(x(T), u) = J(u).$$

I. Множество значений функционала ограничено снизу, значит, существует минимизирующая последовательность $\{u_m\} \subset U_{ad}$, такая что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = C,$$

где C – точная нижняя грань множества значений функционала $J(x(T), u)$. Последовательность $\{J(u_m)\}_{m=1}^\infty$ ограничена в R , следовательно, в силу коэрцитивности функционала $J(u)$, последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ограничена в U . Согласно теореме Банаха–Алаоглу из $\{u_m\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $u_m \rightarrow \hat{u}$ в U . В силу теоремы Мазура точка $\hat{u} \in U_{ad}$.

II. Обозначим за $x_m = x(u_m) = (v_m, w_m) = (v(u_m), w(u_m))$ последовательность слабо обобщенных решений задачи

$$L\dot{x}_m + Mx_m + N(x_m) = f, \quad L(x_m(0) - u_m) = 0.$$

В силу теоремы 1 и оценки (7) и, ввиду рефлексивности бохнеровских пространств $L_4(0, T; B_2)$, $L_2(0, T; H_1)$ и $L_{\frac{4}{3}}(0, T; B_2^*)$ существуют слабые пределы

$$\begin{aligned} v_m &\rightarrow \hat{v} \text{ слабо } L_2(0, T; H_1), \\ w_m &\rightarrow \hat{w} \text{ *-слабо } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \\ w_m &\rightarrow \hat{w} \text{ слабо } L_4(0, T; B_2). \end{aligned}$$

В силу ограниченности операторов L и M получим

$$\begin{aligned} [Lx_m(t), x_m(t)] &\leq \|Lx_m(t)\|_{H^*} \|x_m(t)\|_H \leq C^L \|x_m(t)\|_H^2, \\ [Mx_m(t), x_m(t)] &\leq \|Mx_m(t)\|_{H^*} \|x_m(t)\|_H \leq C^M \|x_m(t)\|_H^2, \end{aligned}$$

значит $\{Lx_m\}, \{Mx_m\}$ ограничены в $L_\infty(0, T; H)$.

По построению оператора N получим, что

$$\int_0^T [N(x_m), x_m] d\tau = \int_0^T \|w_m\|_{B_2}^3 \|w_m\|_{B_2} d\tau$$

и $\{N(x_m)\}$ ограничена в $L_{\frac{4}{3}}(0, T; B^*)$ следовательно,

$$N(x_m) \rightarrow \mu \text{ слабо в } L_{\frac{4}{3}}(0, T; B^*).$$

III. Покажем, что $\mu = N(\hat{x})$, где $\hat{x} = (\hat{v}, \hat{w})$. Так как пространство $H \subset A$ компактно, то последовательность $w_m \rightarrow w$ в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Получим, что

$$N(\hat{x}) = w^3$$

в силу единственности предела.

IV. Так как пространство A сепарабельно, то выберем в нем счетную всюду плотную ортонормированную систему функций $\{\varphi_j\} = \{(\varphi_j^1, \varphi_j^2)\}$. Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления

$$[Lx_m(T), \varphi_j] + \int_0^T ([Mx_m(\tau), \varphi_j] + [N(x_m(\tau)), \varphi_j]) d\tau = [Lx_m(0), \varphi_j].$$

Зафиксируем j и перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$

$$[L\hat{x}(T), \varphi_j] + \int_0^T [M\hat{x}(\tau) + N(\hat{x}(\tau)), \varphi_j] d\tau = [L\hat{u}, \varphi_j].$$

Тогда получим, что

$$\int_0^T \left(\left[L \frac{d\hat{x}}{d\tau}, \varphi \right] + [M\hat{x} + N(\hat{x}), \varphi] \right) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad L\hat{x}(0) = \hat{u}, \forall \varphi \in A, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Следовательно, $\hat{x} = x(\hat{u})$ и в силу полунепрерывности снизу функционала J , получим $\liminf_{m \rightarrow \infty} J(u_m) \geq J(\hat{u})$. Значит u есть стартовое управление в задаче (1)–(3), (6). Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения (1)–(3), (6), где функционал штрафа задается формулой

$$J(x(T), u) = \vartheta \|v(T) - v_f\|_{H_1}^2 + \vartheta \|w(T) - w_f\|_{B_2}^4 + \|u\|_{H_2}^4. \tag{8}$$

Здесь $x_f(s) = (v_f(s), w_f(s))$ – требуемое состояние системы, которого достигается при минимальном начальном воздействии по прошествии времени $t = T$.

Лемма 1. Функционал $J(x(T), u)$, заданный в виде (8), является ограниченным снизу, полунепрерывным снизу, коэрцитивным функционалом.

Доказательство. Покажем, что функционал $J(x(T), u)$, заданный в виде (8), является коэрцитивным

$$\begin{aligned} \|(x(T), u)\| &\leq \|v(T)\|_{H_1}^2 + \|w(T)\|_{B_2}^4 + \|u\|_{H_2}^2 \leq \\ &\leq C_1 \|v(T) - v_f\|_{H_1}^2 + C_2 \|w(T) - w_f\|_{B_2}^4 + C_3 + \|u\|_{H_2}^2 = -C_1 \vartheta \frac{1}{\vartheta} \|u\|_{B_2^*}^4 + C_1 \vartheta \frac{1}{\vartheta} \|u\|_{H_2}^2 = \\ &= C_1 \left(\vartheta \|v(T) - v_f\|_{H_1}^2 + \vartheta \|w(T) - w_f\|_{B_2}^4 + (1 - \vartheta) \|u\|_{H_2}^2 \right) + C_6 = C_1 (J(x, u)) + C_6, \\ C_i &> 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad C_3 > 3 \quad \text{при} \quad C_2 = \frac{5}{4} \|w_f\|_{B_2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что функционал $J(x(T), u)$ непрерывный, а значит, и полунепрерывный снизу. Таким образом, лемма доказана.

В силу теоремы 2 и леммы 1 справедлива

Теорема 3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \eta_1 \in R_+$, $\beta_2 \in R_-$, $T \in R_+$ и $n \leq 4$, тогда существует решение $(\hat{x}(T), \hat{u})$ задачи (1)–(3), (6), где функционал $J(x(T), u)$ принимает вид (8).

Автор выражает признательность профессору Н.А. Манаковой за постановку задачи и плодотворные дискуссии, а также профессору А.В. Богомолу за интерес к работе. Кроме того, считает своим приятным долгом поздравить профессора А.В. Богомолу с юбилеем.

Литература

1. Fitzhugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. Fitzhugh // *Biophysical Journal*. – 1961. – Vol. 1, no. 6. – P. 445–466.
2. Nagumo, J. An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. – 1962. – Vol. 50. – Issue 10. – P. 2061–2070.
3. Wu, D. Stochastic resonance in Fitz Hugh–Nagumo system with time-delayed feedback / D. Wu, S. Zhu // *Physics Letters A*. – 2008. – Vol. 372. – Issue 32. – P. 5299–5304. DOI: 10.1016/j.physleta.2008.06.015
4. Polymorphic and regular localized activity structures in a two-dimensional two-component reaction diffusion lattice with complex threshold citation / V.I. Nekorkin, A.S. Dmitrichev, J.M. Bilbault, S. Binczak // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2010. – Vol. 239. – Issue 12. – P. 972–987.
5. Weber, S. Multicomponent reaction-diffusion processes on complex networks / S. Weber, M. Porto // *Physical Review E*. – 2006. – Vol. 74. – Issue 4. – P. 046108.
6. Борина, М.Ю. Пространственно-временные структуры в многомерной активной среде, обусловленные многомодовым взаимодействием вблизи волновой бифуркации / М.Ю. Борина, А.А. Полежаев // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. – 2012. – Т. 20, № 6. – С. 15–24.
7. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // *Математические заметки*. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.
8. Al'shin, A.V. Blow-up in nonlinear sobolev-type equations / A.V. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011. – 648 p.
9. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // *Известия вузов. Серия: Математика*. – 2003. – № 9. – С. 36–41.
10. Сагадеева, М.А. О задаче оптимального измерения динамически искаженных сигналов с учетом мультипликативного воздействия / М.А. Сагадеева // *Математические методы в технике и технологиях*. – 2016. – № 2(84). – С. 13–15.

11. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска–Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 5(264), вып. 11. – С. 13–24.
12. Манакова, Н.А. Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 120–126.
13. Гаврилова О.В. Задача стартового управления и финального наблюдения задачи Шоултера–Сидорова для модели Фитц Хью–Нагумо / О.В. Гаврилова // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна–2016». – Воронеж: Научная книга, 2016. – С.115–118.
14. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейные краевые задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 р.
15. Manakova, N.A. Mathematical model of the start control of electric field potential in conducting medium without dispersion considering relaxation / N.A. Manakova, E.A. Bogatyreva // 2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – Chelyabinsk, 2016. – P. 1–5.
16. Подвальный, С.Л. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе / С.Л. Подвальный, В.В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10 «Прикладная математика информатика процессы управления». – 2015. – № 3. – С. 126–142.
17. Manakova, N.A. Numerical Investigation for the Start Control and Final Observation in Model Of- and I-beam Deformation / N.A. Manakova, K.V. Vasiuchkova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Т. 4, № 2. – С. 26–40.

Поступила в редакцию 11 июня 2018 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 12–18*

DOI: 10.14529/mmph180302

START CONTROL AND FINAL OBSERVATION PROBLEM FOR THE FITZ HUGH–NAGUMO SYSTEM FOR THE DIRICHLET–SHOWALTER–SIDOROV CONDITION

O.V. Gavrilova

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: gavrilovaov@susu.ru*

The paper discusses the start control and the final observation of solutions of the Dirichlet–Showalter–Sidorov problem for the degenerate Fitz Hugh–Nagumo system of equations. This system refers to the class of reaction-diffusion equations and describes the propagation of waves in active biological media, such as the heart muscle, or brain tissue. On the one hand, the Fitz Hugh–Nagumo system of equations is the development of more familiar model of Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov, and on the other hand, the simplification of the Hodgins–Huxley model. When constructing a mathematical model taking into account that the speed of one desired function of the Fitz Hugh–Nagumo system of equations significantly exceeds the speed of the other, it has been suggested to investigate the degenerate case. The studied task of the start control and final observation simulates the situation when, after a short-time control action, the expected result for a certain period of time, i.e. at the initial moment of time sends a high-power pulse is sent to a nerve system and the required state of the system is expected after a certain set time. On the basis of Galerkin's methods and compactness, the existence theorem of the problem of starting control and final observation in a weak generalized case is proved.

Keywords: semilinear Sobolev type equations; Showalter–Sidorov problem, the start control and final observation problem; weak generalized solution; the Fitz Hugh–Nagumo system of equations.

References

1. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, Vol. 1, no. 6, pp. 445–466. DOI: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, Vol. 50, Issue 10, pp. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235
3. Wu D., Zhu S. Stochastic resonance in Fitz Hugh–Nagumo system with time-delayed feedback. *Physics Letters A*, 2008, Vol. 372, Issue 32, pp. 5299–5304. DOI: 10.1016/j.physleta.2008.06.015
4. Nekorkin V.I., Dmitrichev A.S., Bilbault J.M., Binczak S. Polymorphic and regular localized activity structures in two-dimensional two-component reaction diffusion lattice with complex threshold excitation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2010, Vol. 239, Issue 12, pp. 972–987. DOI: 10.1016/j.physd.2010.02.004
5. Weber S., Porto M. Multicomponent reaction-diffusion processes on complex networks. *Physical Review E*, 2006, Vol. 74, Issue 4, P. 046108. DOI: 10.1103/physreve.74.046108
6. Borina M.Yu., Polezhaev A.A. Spatial-temporal patterns in a multidimensional active medium formed due to polymodal interaction near the wave bifurcation. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2012, Vol. 20, no. 6, pp. 15–24.
7. Bokareva T.A., Sviridyu G.A. Whitney assemblies of phase spaces of certain semilinear equations of Sobolev type. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776
8. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear sobolev-type equations*. Berlin, N.Y., Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011, 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294
9. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The phase space of the Cauchy–Dirichlet problem for the Oskolkov equation of nonlinear filtration. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2003, Vol. 47, no. 9, pp. 33–38.
10. Sagadeeva M.A. O zadache optimal'nogo izmereniya dinamicheskikh signalov s uchetom mul'tiplikativnogo vozdeystviya (On the problem of optimal measurement of dynamically distorted signals with allowance for the multiplicative effect). *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh* (Mathematical methods in engineering and technology), 2016, no. 2(84), pp. 13–15. (in Russ.).
11. Zamyshlyayeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Love Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, no. 5(264), Issue 11, pp. 13–24. (in Russ.).
12. Manakova N.A., Gavrilova O.V. Optimal Control for a Mathematical Model of Nerve Impulse Spreading. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 120–126. DOI: 10.14529/mmp150411
13. Gavrilova O.V. Zadacha startovogo upravleniya i final'nogo nablyudeniya zadachi Shouoltera–Sidorova dlya modeli Fitts Kh'yu–Nagumo (The task of starting control and final observation of the Showalter–Sidorov problem for the Fitz Hugh–Nagumo model). *Materialy mezhdunarodnoy konferentsii "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola S. G. Kreyna-2016"* (Proc. of the international conference "Voronezh Winter Mathematical School of S.G. Kerin-2016"). Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2016, pp. 115–118. (in Russ.).
14. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).
15. Manakova N.A., Bogatyreva E.A. Mathematical model of the start control of electric field potential in conducting medium without dispersion considering relaxation. *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, Chelyabinsk, 2016, pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911711
16. Podval'ny S., Provotorov V.V. Start control of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2015, Issue 3, pp. 126–142. (in Russ.).
17. Manakova N.A., Vasiuchkova K.V. Numerical Investigation for the Start Control and Final Observation in Model Of- and I-Beam Deformation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, Vol. 4, no. 2, pp. 26–40. DOI: 10.14529/jcem170203

Received June 11, 2018

АЛГОРИТМ НАСТРОЙКИ СИСТЕМЫ НЕЧЁТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА ТИПА МАМДАНИ

М.С. Голосовский¹, А.В. Богомолов², Д.С. Теребов³, Е.В. Евтушенко⁴

¹ Государственный научно-исследовательский испытательный институт военной медицины Министерства обороны Российской Федерации, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

² Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр им. А.И. Бурназяна, г. Москва, Российская Федерация

³ Национальный центр управления обороной Российской Федерации, г. Москва, Российская Федерация

⁴ Черноморское высшее военно-морское ордена Красной Звезды училище им. П.С. Нахимова, г. Севастополь, Российская Федерация

E-mail: a.v.bogomolov@gmail.com

Предложен алгоритм настройки систем типа Мамдани, использующий для подстройки правил нечёткого логического вывода принцип пропорционально-интегрального регулятора с ограниченной интегральной составляющей. Для уменьшения времени подстройки по сравнению с пропорциональным регулятором и уменьшения величины перерегулирования, по сравнению с пропорционально-интегральным регулятором с теми же значениями коэффициентов интегральной и пропорциональной составляющих, используется ограничение интегральной составляющей. Достоинство разработанного алгоритма заключается в возможности осуществления локальной подстройки без полного набора данных области определения входных переменных и соответствующих им значений отклика системы. В качестве приоритетного направления дальнейших исследований рассматривается адаптация применения алгоритмов для функций принадлежности других (отличных от гауссовых) типов. Эффективность алгоритма подтверждена результатами его сопоставления с алгоритмами подстройки систем нечёткого логического вывода на основе нечётких нейронных сетей и нечёткой кластеризации при решении идентичных задач.

Ключевые слова: системы нечёткого логического вывода; адаптивные системы; системы Мамдани; интеллектуальные системы; нечёткая логика; функции принадлежности; пропорционально-интегральный регулятор.

Введение

Использование систем нечёткого логического вывода приобрело широкое распространение, начиная с 1980-х гг., когда разработанные в 1965 году Л. Заде математические принципы стало возможным применить в алгоритмах, выполняемых с использованием ЭВМ. Математическое подтверждение возможности использования нечётких моделей в задачах моделирования функциональных зависимостей получено после доказательства Б. Коско теоремы [1] о том, что системы нечёткого логического вывода типа Мамдани могут аппроксимировать любую функциональную зависимость с заданной точностью (впоследствии аналогичные теоремы доказаны в отношении систем нечёткого вывода типа Сугено). Для настройки правил нечётких моделей существуют различные алгоритмы, наиболее распространёнными из которых являются алгоритмы, построенные на основе нейронных сетей или алгоритмы нечёткой кластеризации. Но указанные методы более часто применяются для настройки систем типа Сугено [2–5], в связи с большей вычислительной простотой и точностью. Тем не менее остаётся класс систем типа Мамдани [6–9], которые применяются при реализации экспертных систем, в связи с интуитивной понятностью интерпретации правил и большей близостью к логическому мышлению человека, для которых после настройки системы экспертами требуется корректировка правил нечёткого логического вывода на основе статистических данных, получаемых в процессе функционирования системы.

В качестве объекта применения адаптивного алгоритма возьмем классическую систему нечёткого логического вывода типа Мамдани, содержащую m входных переменных и одну выходную переменную. Каждая входная переменная может содержать от 2 до m функций принадлеж-

ности к нечёткому множеству. Выходная переменная содержит $k \geq 2$ функций принадлежности. Общая схема вывода для систем типа Мамдани производится по следующему алгоритму:

1. Этап фаззификации: чёткие значения входных переменных x приводятся к нечётким значениям посредством вычисления их степени истинности выражения: x_u есть A_u^j как вычисления значения соответствующего значения входной функции принадлежности $\mu_A(x_u)$, где u – номер входной переменной, j – номер правила нечёткого логического вывода.

2. Этап нечёткого вывода: используя полученные на первом этапе значения степеней истинности, вычисляются результирующие значения для каждого j -го правила из набора в m правил:

$$R_j : \text{ЕСЛИ } (x_1 \text{ есть } A_1^j), \dots, \text{И } (x_n \text{ есть } A_n^j) \text{ ТО } y \text{ есть } B_k^j, \quad (1)$$

где И – операция пересечения нечётких множеств (t -норма). В статье в качестве оператора t -нормы используется оператор умножения (оператор MIN), k – номер функции принадлежности выходной переменной.

3. Этап дефаззификации: получение чёткого значения. В статье будет рассматриваться модель с выполнением дефаззификации методом вычисления центра тяжести

$$y = \frac{\int_{\min}^{\max} y \mu_r(y) dy}{\int_{\min}^{\max} \mu_r(y) dy}, \quad (2)$$

где $\mu_r(y)$ – результирующая функция принадлежности, полученная посредством суммирования частных усечённых функций принадлежности $\mu_{jr}(y)$, полученных при срабатывании j -го правила.

Синтез алгоритма настройки системы нечёткого логического вывода

Для применения принципов регулятора, работающего по пропорционально-интегральному принципу (ПИ-регулятор) [10], для каждого правила введём понятие накапливаемой (интегральной) ошибки, рассчитываемой по формуле (3), и пропорциональной ошибки:

$$I_{ij} = \sum_{i=1}^N w_j (y_i - s_i), \quad (3)$$

$$P_{ij} = w_j (y_i - s_i), \quad (4)$$

где j – номер сработавшего правила; i – номер шага, на котором было получено прогнозируемое значение на выходе системы нечёткого логического вывода y ; S_i – реальное значение прогнозируемой величины; w_j – вес вклада результирующей функции принадлежности j -го правила при формировании i -й оценки, вычисляется по формуле:

$$w_j = T(\mu_{A1j}(x_1), \mu_{A2j}(x_2), \dots, \mu_{Anj}(x_n)), \quad (5)$$

где T – операция вычисления t -нормы. В качестве t -нормы нами использована операция MIN, но можно использовать другие варианты t -норм, такие как оператор произведения или оператор усиленного произведения [11]. В представленной интерпретации w_i соответствует уровню активации j -го правила при получении результирующей функции принадлежности. Для каждого правила выделим чёткое значение заключения y_j , получаемое по тому же правилу, что и общее результирующее значение (6), только в функция принадлежности $\mu_{jr}(y)$ является результирующей функцией от срабатывания j -го правила:

$$y_j = \frac{\int_{\min}^{\max} y \mu_{jr}(y) dy}{\int_{\min}^{\max} \mu_{jr}(y) dy}. \quad (6)$$

В качестве формы функции принадлежности для описания входных и выходной переменных выбрана симметричная гауссова функция принадлежности:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}, \quad (7)$$

где a – параметр, определяющий ширину функции принадлежности; b – параметр, определяющий положение ядра функции принадлежности. Поскольку в выбранной системе каждому правилу соответствует только одна функция принадлежности выходной переменной, которая является симметричной относительно центра b , то результат дефаззификации для правила (6) будет совпадать с ядром функции принадлежности b .

Алгоритм подстройки основан на вычислении ошибки по принципу работы ПИ-регулятора с ограниченной интегральной составляющей и последующим изменением на её основе параметров консеквента для правил логического вывода [11–13].

Для корректной работы алгоритма необходимо соблюдение следующих ограничений:

1. Для задания выходной переменной используются симметричные гауссовы функции принадлежности, описываемые уравнениями (7).
2. Число функций принадлежности выходных переменных равно числу правил логического вывода и равно произведению числа функций принадлежности разных входных переменных.
3. Центры (ядра) входных функций принадлежности должны быть равномерно расположены на всей области определения. При этом расстояние между центрами функций принадлежности Δx вычисляется по формуле

$$\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / (N - 1), \quad (8)$$

где x_{\max} – верхняя граница области определения входной переменной, x_{\min} – нижняя граница области определения выходной переменной. В предельном случае для числа функций принадлежности, равным двум, центры функций принадлежности будут совпадать с границами области определения, N – число функций принадлежности.

4. Значение истинности в точке пересечения двух соседних функций принадлежности x_k равно 0,5: $\mu(x_k) = 0,5$. При задании функции принадлежности гауссова типа (6) оценка параметра a , определяющего ширину функции принадлежности, будет рассчитываться по формуле

$$a = (b - 0,5\Delta x) / \sqrt{2|\ln 0,5|}. \quad (9)$$

Алгоритм основан на изменении ядер функций принадлежности при возникновении ошибки вычислений и состоит из следующих шагов:

1. Берётся набор значений входных переменных $[x_1, x_n]$ и соответствующее им расчётное y_i и фактическое s_i значения выходной переменной (i – номер шага, на котором было получено прогнозируемое значение на выходе системы нечёткого логического вывода для заданного фиксированного значения входных переменных).
2. Для каждого j -го правила $j = [1, M]$, где M – число правил в системе, выполняются шаги 3–6.
3. На основе данных, полученных в результате предыдущих измерений, вычисляется значение ошибки для интегральной составляющей по формуле (3).
4. Для уменьшения значения перерегулирования вводится ограничение интегральной составляющей с помощью указания максимального значения I_s , выше которого значение интегральной составляющей быть не может:

$$\begin{cases} I_{ij} = I_s, & \text{если } I_{ij} \geq I_s, \\ I_{ij}, & \text{если } I_{ij} < I_s. \end{cases} \quad (10)$$

5. Вычисляется значение пропорциональной составляющей по формуле (4).

6. Вычисляется общее значение ошибки E_{ij} как сумма пропорциональной и интегральной составляющих

$$E_{ij} = K_I I_{ij} + K_P P_{ij}, \quad (11)$$

где K_I и K_P – коэффициенты для интегральной и пропорциональной составляющих, используемые для изменения скорости реагирования на ошибку выхода.

7. Производится корректировка параметра b функции принадлежности заключения j -го правила по формуле

$$b_j = b_j + E_{ij} \quad (12)$$

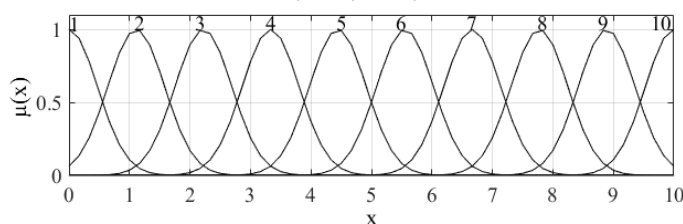


Рис. 1. Графическая интерпретация терм-множества входной переменной

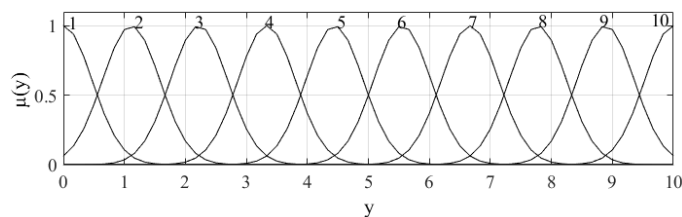


Рис. 2. Графическая интерпретация терм-множества выходной переменной

Рассмотрим работу алгоритма при различных значениях коэффициентов K_I и K_P для того, чтобы показать их влияние на скорость и точность подстройки параметров модели. Для этого возьмем систему нечёткого логического вывода, содержащую одну входную переменную, термножество которой содержит 10 функций принадлежности и одну выходную переменную, термножество которой также содержит 10 функций принадлежности (для соблюдения второго ограничения).

Графическое представление терм-множества входной переменной представлено на рис. 1, выходной переменной – на рис. 2. Система будет содержать 10 правил нечёткого логического вывода, посредством которых функция принадлежности входной переменной с номером 1 связана с функцией входной переменной номер 1, функция принадлежности с номером 2 связана с функцией принадлежности выходной переменной с номером 2 и т. д.

Влияние коэффициентов K_I и K_P будет показано следующим образом: зафиксировано значение входной переменной, равное 3,018. При заданных выше первоначальных настройках системы соответствующее выходное значение будет равно $s = 2,7725$. На первых 5 шагах задано значение $s = 2,7725$, начиная с 20 шага задано значение $s = 6,0829$ (произведено ступенчатое изменение ожидаемой величины). Графики изменения выходного значения y от шага применения алгоритма при различных коэффициентах K_I и K_P представлены на рис. 3.

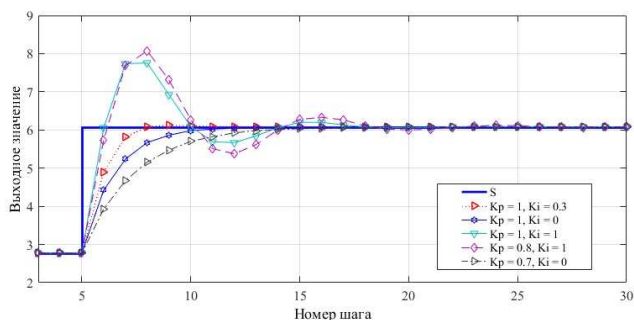


Рис. 3. Зависимость выходного значения системы от шага выполнения алгоритма подстройки при различных коэффициентах K_I и K_P

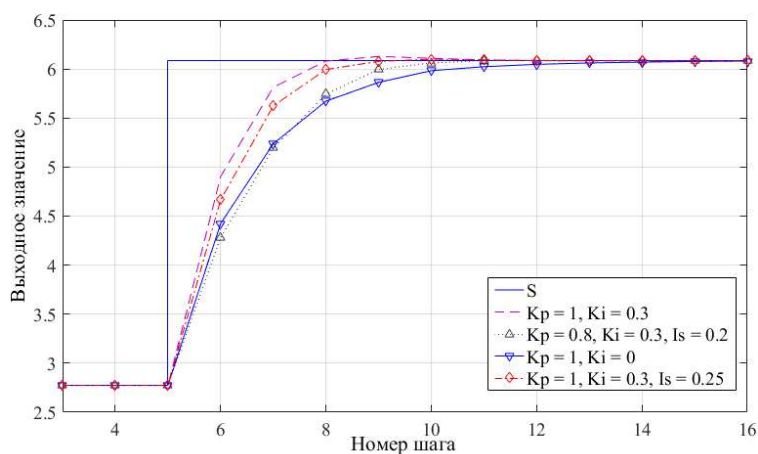


Рис. 4. Зависимость выходного значения от шага выполнения алгоритма подстройки при различных значениях коэффициентов K_I , K_P , I_s

При значениях коэффициента интегральной составляющей больше 0,5 амплитуда перерегулирования становится большой – может превысить 0,7 от значения изменения отслеживаемой выходной величины, но при этом интегральная составляющая позволяет быстрее реагировать на возмущающее воздействие (в этом случае сохраняется скорость подстройки, но уменьшается амплитуда перерегулирования) [14, 15]. Графики изменения выходного значения от шага применения алгоритма для различных значений коэффициентов K_i , K_p , I_s представлены на рис. 4.

За счёт изменения параметров выходной переменной алгоритм производит интерполяционную подстройку поверхности нечёткого вывода. При этом подстройка производится за счёт сдвига «опорных точек», формируемых центрами функций принадлежности выходных переменных. Рассмотрим изменение поверхности вывода и расположения функций принадлежности входных переменных для следующих значений входной переменной: в которой функция принадлежности принимает значение $\mu(x) = 0,5$ и происходит пересечение двух функций принадлежности, для этого возьмем $x = 2,77$, в которой значение функции принадлежности равно $\mu(x) = 0,5$, возьмём $x = 3,33$, в которой только одна функция принадлежности с номером 4 активирует правило, для неё $\mu(x) = 1$, и промежуточное значение $x = 3$. Выбранные значения x и их взаимосвязь с функциями принадлежности входной переменной представлены на рис. 5.

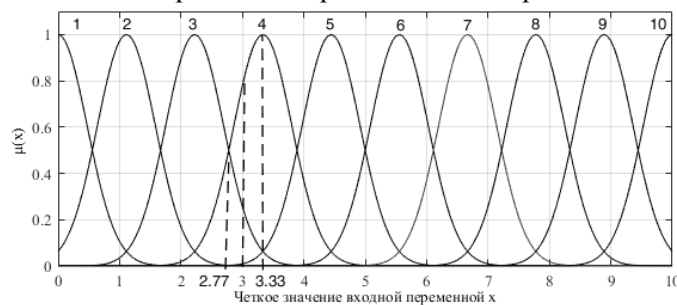


Рис. 5. Выбранные значения x и их взаимосвязь с функциями принадлежности входной переменной

Исходный график поверхности нечёткого логического вывода и его изменения в результате подстройки представлены на рис. 6, изменение расположений функций принадлежности выходной переменной представлены на рис. 7–9.

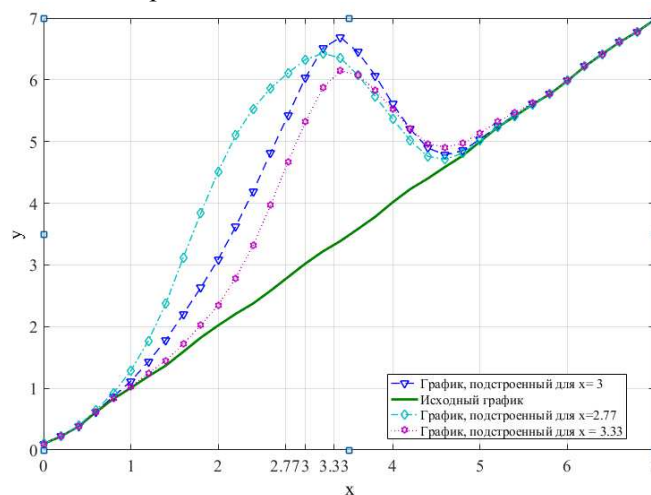


Рис. 6. Изменение поверхности вывода для разных значений входной переменной

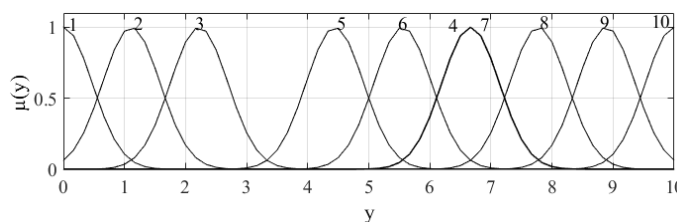


Рис. 7. Расположение функций принадлежности после подстройки параметров для входного значения 3,33

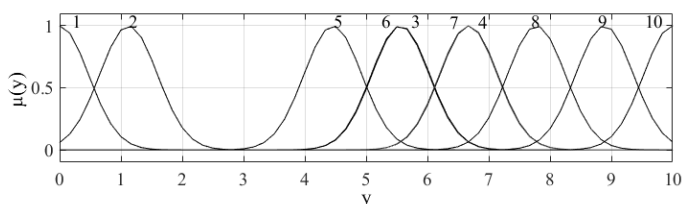


Рис. 8. Расположение функций принадлежности после подстройки параметров для входного значения 2,77

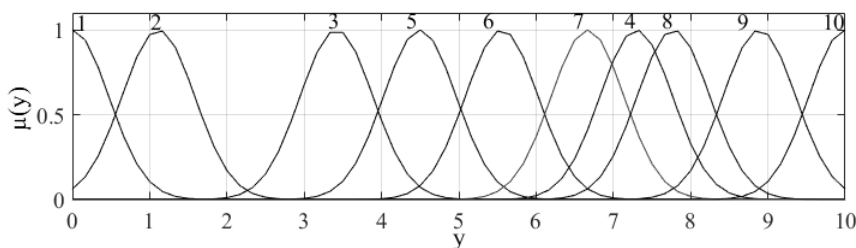


Рис. 9. Расположение функций принадлежности после подстройки параметров для входного значения 3

Получаемая нечёткая поверхность вывода для системы вывода по типу Мамдани и гауссовых функций принадлежности является гладкой функцией, интерполирующей значения между центрами функций принадлежности выходных переменных. В связи с этим при значении $x = 2,77$ алгоритмом было выполнено перемещение выходных функций принадлежности с номерами 3 и 4 (рис. 8). При этом результирующая поверхность вывода имеет более пологий вид, чем поверхность вывода, изменённая для $x = 3$, когда четвертая выходная функция принадлежности имела более существенный вклад в результирующее значение и была перемещена дальше, чем функция с номером 3 (рис. 9). При расчёте степень истинности четвертой выходной функции принадлежности равна 0,8, степень истинности третьей выходной функции принадлежности равна 0,2. При подстройке при значении $x = 3,33$ перемещалась только одна функция принадлежности под номером 4 (рис. 3), при этом полученная функциональная зависимость подстройки для значения 3,33 имеет наименьшее значение максимума на участке $[1, 5]$ области определения входной переменной.

Сравнение эффективности алгоритмов подстройки системы нечёткого логического вывода

В качестве критерия для сравнения предложенных алгоритмов будем использовать среднюю величину ошибки, вычисляемую по формуле

$$\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_i^N |y_i - y_i^*|, \quad (13)$$

где N – число точек, в которых проводилась проверка; y_i – значение, спрогнозированное системой; y_i^* – моделируемое значение функции.

Для выполнения сравнения будем использовать нечёткую нейронную сеть ANFIS (*adaptive-network-based fuzzy inference system*) для подстройки системы нечёткого логического вывода Такаги–Сугено–Канга (TSK) первого порядка с результирующими функциями принадлежности

$$f(x) = b,$$

где b – константа, значение которой совпадает с ядром выходной функции принадлежности системы Мамдани (на графиках и далее будем обозначать ANFIS) и генерацию нечёткой системы типа Мамдани на основе статистических данных с использованием нечёткого алгоритма С-средних (на графиках и далее будем обозначать FCM – *fuzzy C-means*). Область определения моделей примем $D = [0, 10]$, область значений $E = [0, 10]$. Первоначально нечёткие модели настроены на вывод зависимости $y = 5$ для любого значения x .

Сравнение проведено на двух типах проверок:

1. Подстройка системы по одной моделируемой зависимости.
2. Подстройка системы по трём, последовательно изменяемым зависимостям.

Первая проверка производится на моделируемой нелинейной зависимости, имеющей один максимум:

$$y = 3 + 4e^{-(x-5)^2/2,5} . \quad (14)$$

Моделируемая зависимость служит математическим ожиданием для генерации пяти случайных последовательностей (этапов), значения которых распределены по нормальному закону распределения с дисперсией, равной 0,5. Исходная зависимость и сгенерированные случайные последовательности для пяти этапов представлены на рис. 10.

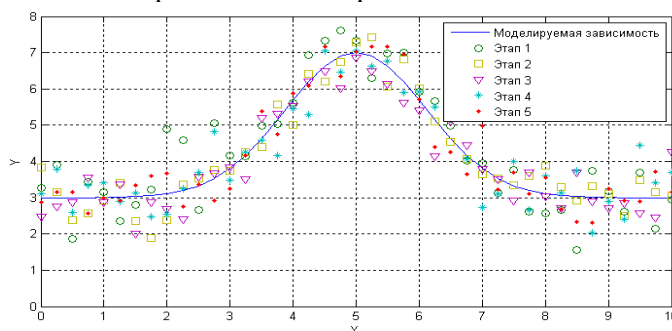


Рис. 10. График исходной зависимости и сгенерированные случайные последовательности

При сравнении алгоритмов нейронная сеть ANFIS будет использовать 10 эпох обучения. Средние значения полученных ошибок представлены в табл. 1. Итоговые графики зависимостей, полученные в результате обработки зашумлённых данных с использованием проверяемых алгоритмов, приведены на рис. 11.

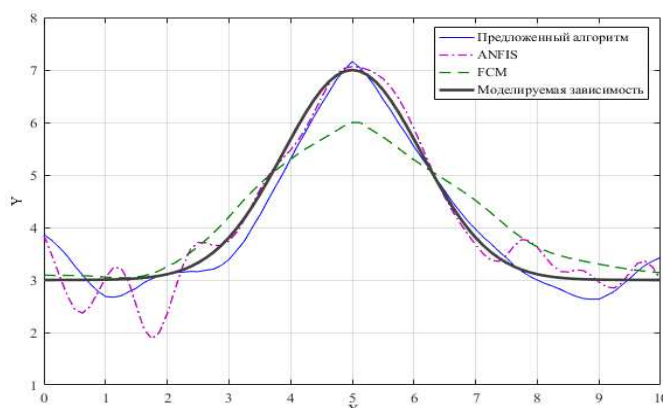


Рис. 11. Зависимости, полученные в результате обработки зашумлённых данных с использованием проверяемых алгоритмов

Таблица 1

Средние значения ошибок на обучающих и контрольных выборках для подстройки с использованием сравниваемых алгоритмов

Алгоритм	Тип выборки	Номер этапа				
		1	2	3	4	5
Предложенный	Обучающая	1,118256	0,574143	0,44774	0,354911	0,233608
	Контрольная	1,135829	0,573822	0,447369	0,351716	0,216397
ANFIS	Обучающая	0,370094	0,270445	0,340054	0,29814	0,24303
	Контрольная	0,367198	0,277986	0,342855	0,287561	0,240048
FCM	Обучающая	0,42473	0,43392	0,440363	0,438923	0,390062
	Контрольная	0,432041	0,43917	0,4501	0,450138	0,398141

Вторая проверка выполнена на серии из трёх последовательностей, являющихся нелинейными и имеющих несколько максимумов и минимумов: формулы (15)–(17). Таким образом, проверена возможность аппроксимации динамической зависимости. Проверка адаптационных свойств

Математика

проведена для трёх итераций по четыре этапа в каждой. Исходные настройки систем и правила генерации случайных последовательностей для алгоритмов идентичны исходным настройкам и правилам генерации случайных последовательностей из предыдущей проверки:

$$y = 3 + 1/(0,3 + 0,2e^{5-x}), \quad (15)$$

$$y = e^{-0,1(x-5)} \sin(2x-8) + 4, \quad (16)$$

$$y = 5 + \sin(x) + 0,5(0,7 \ln(x + 0,09))^2. \quad (17)$$

Графики трёх исходных зависимостей и точек, случайно сгенерированных с использованием этих зависимостей в качестве среднего значения для проверки адаптации алгоритмов, представлены на рис. 12. Результаты аппроксимации этих зависимостей с использованием проверяемых алгоритмов представлены в виде графиков на рис. 13 и в виде числовых значений в табл. 2.

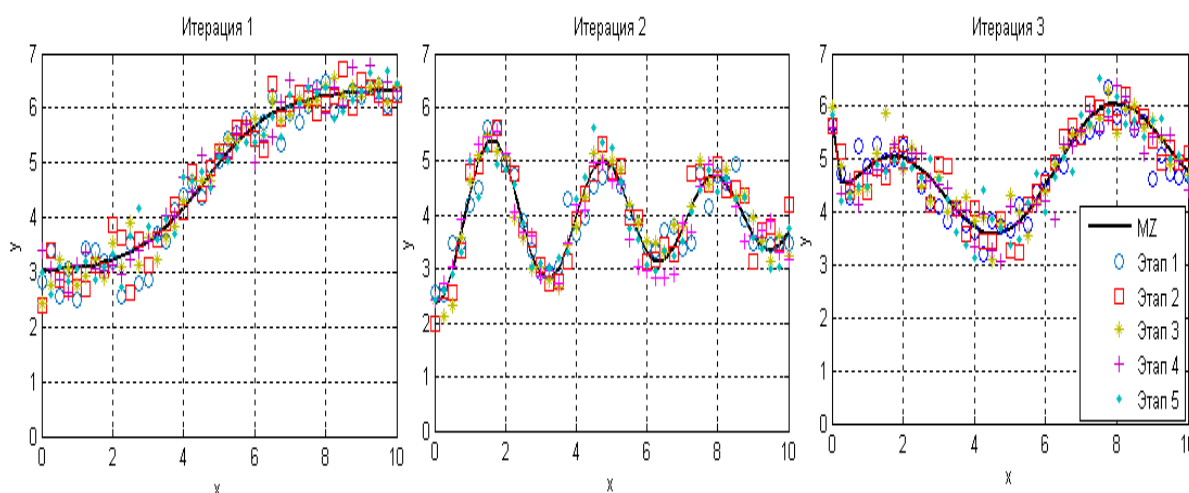


Рис. 12. Распределение исходной величины x и моделирования случайных результатов измерений по итерациям 1–3, содержащим по 5 этапов в каждой

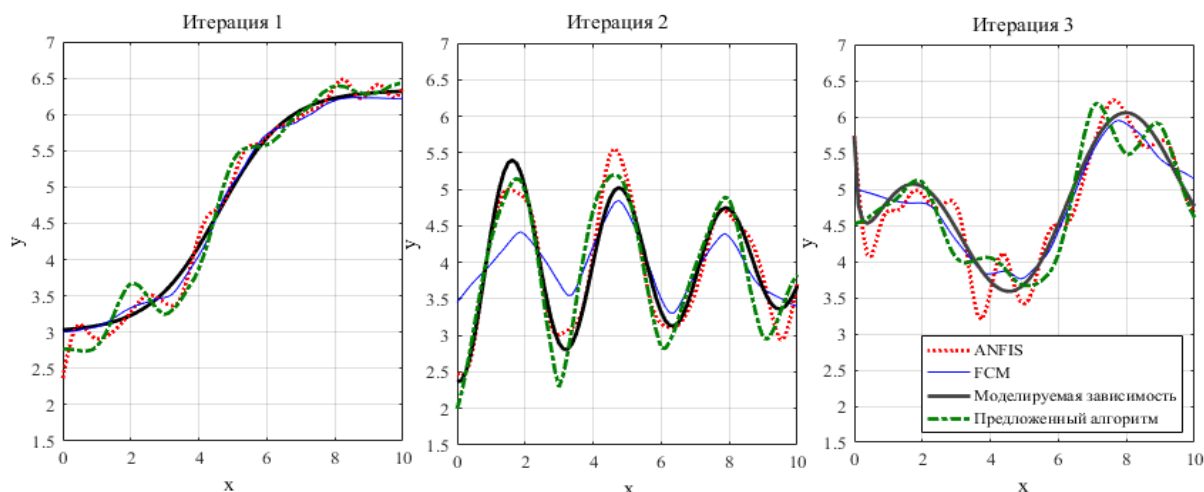


Рис. 13. Графики зависимостей, полученных в результате обработки зашумлённых данных с использованием проверяемых алгоритмов

Проведённые сравнения показывают, что предложенный алгоритм выполняет подстройку зависимости на уровне алгоритмов ANFIS и FCM. Средняя ошибка на обучающей выборке на пятом этапе за три итерации составила 0,201446 для предложенного алгоритма, 0,161623 для алгоритма ANFIS и 0,206263 для алгоритма FCM. На контрольной выборке средняя ошибка на пятом этапе за три итерации составила 0,193556 для предложенного алгоритма, 0,164013 – для алгоритма ANFIS и 0,19779 – для алгоритма FCM.

Средние значения ошибок на обучающих (ОВ) и контрольных (КВ) выборках по трём итерациям для предложенного алгоритма подстройки с использованием нечёткой сети ANFIS, генерации системы с использованием алгоритма FCM

Номер итерации	Номер этапа	Предложенный алгоритм		Алгоритм ANFIS		Алгоритм FCM	
		ОВ	КВ	ОВ	КВ	ОВ	КВ
1	1	0,46926	0,47266	0,17618	0,17454	0,12255	0,12249
	2	0,19537	0,19857	0,15471	0,14542	0,05548	0,05549
	3	0,20666	0,20123	0,17847	0,17895	0,10935	0,11191
	4	0,12472	0,12134	0,16901	0,17085	0,0789	0,07762
	5	0,12951	0,12919	0,12179	0,11241	0,06711	0,06843
2	1	0,66071	0,66577	0,19378	0,19846	0,45681	0,45056
	2	0,41051	0,40337	0,13703	0,13326	0,34301	0,34559
	3	0,24624	0,23246	0,17043	0,16858	0,37221	0,37075
	4	0,23783	0,22348	0,20851	0,20771	0,37072	0,3561
	5	0,24675	0,24498	0,16294	0,16389	0,3795	0,37116
3	1	0,59862	0,59041	0,17529	0,18355	0,20335	0,18813
	2	0,35333	0,35615	0,18398	0,18221	0,20071	0,18264
	3	0,23531	0,20726	0,18021	0,1796	0,18457	0,17185
	4	0,23134	0,20509	0,18918	0,18109	0,18346	0,15748
	5	0,22808	0,2065	0,20014	0,21574	0,17218	0,15378

Заключение

Проведённое исследование показывает, что достоинство разработанного алгоритма настройки системы нечёткого логического вывода типа Мамдани заключается в возможности осуществления локальной подстройки: для одного фиксированного набора входных переменных можно настроить выходное значение (отклик) системы. Для аналогичной подстройки алгоритмам ANFIS и FCM требуется передавать полный набор данных области определения входных переменных и соответствующие им значения отклика системы. В качестве приоритетного направления дальнейших исследований рассматривается адаптация применения алгоритмов для функций принадлежности других (отличных от гауссовых) типов.

Литература

1. Kosko, B. Fuzzy systems as universal approximators / B. Kosko // IEEE Transactions on computers. – 1994. – Vol. 43. – Issue 11. – P. 1329–1333.
2. Jang, J.S.R. ANFIS: Adaptive network based fuzzy inference systems / J.S.R. Jang // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1993. – Vol. 23. – Issue 3. – P. 665–685.
3. Fuzzy adaptive control system of a non-stationary plant with closed-loop passive identifier / F. Manentia, F. Rossia, A. Goryunov *et al.* // Resource-Efficient Technologies. – 2015. – Vol. 1. – Issue 1. – P. 10–18.
4. Паклин, Н.Б. Адаптивные модели нечеткого вывода для идентификации нелинейных зависимостей в сложных системах: автореферат дис. ... канд. техн. наук / Н.Б. Паклин. – Ижевск, 2004. – 19 с.
5. Пегат, А. Нечёткое моделирование и управление / А. Пегат // БИНОМ: Лаборатория знаний, 2013. – 798 с.
6. Борисов, В.В. Нечёткие модели и сети / В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федулов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 284 с.
7. Driankov, O. An introduction to fuzzy control / O. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993. – 316 p.

8. Garibaldi, J.M. Application of simulated annealing fuzzy model tuning to umbilical cord acid-base interpretation / J.M. Garibaldi, E.C. Ifeachor // *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. – 1999. – Vol. 7. – Issue 1. – P. 72–84.
9. Mamdani, E.H. An Experiment in Linguistic Synthesis with Fuzzy Logic Controller / E.H. Mamdani, S. Assilian // *International Journal Man-Machine Studies*. – 1975. – Vol. 7. – Issue 1. – P. 1–13.
10. Кудинов, Ю.И. Методы синтеза и настройки нечетких ПИД регуляторов Мамдани / Ю.И. Кудинов, А.Ю. Келина // *Информационные технологии*. – 2012. – № 6 (приложение). – 32 с.
11. Интеллектуальные системы управления и нечеткие регуляторы. Часть II. обучаемые нечеткие регуляторы, нечеткие ПИД-регуляторы / С.Н. Васильев, Ю.И. Кудинов, Ф.Ф. Пашенко и др. // *Датчики и системы*. – 2017. – № 2 (211). – С. 3–12.
12. Хомоненко, А.Д. Автоматическая рубрикация документов с помощью латентносемантического анализа и алгоритма нечёткого вывода Мамдани / А.Д. Хомоненко, С.В. Логашев, С.А. Краснов // *Труды СПИИРАН*. – 2016. – Вып. 44. – С. 5–19.
13. Cao, S.G. Mamdani-type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers / S.G. Cao, N.W. Rees, G. Feng // *Fuzzy Sets and Systems*. – 2001. – Vol. 123. – Issue 3. – P. 359–367.
14. Hennebach, E. Algebraic operations on a class of Mamdani-controllers // E. Hennebach, W. Dilger // *Fuzzy Sets and Systems*. – 1999. – Vol. 101. – Issue 2. – P. 253–259.
15. Солдатова, О.П. Решение задачи классификации с использованием нейронных нечётких продукционных сетей на основе модели вывода Мамдани–Заде / О.П. Солдатова, И.А. Лёзин // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2014. – № 2 (35). – С. 136–148.

Поступила в редакцию 23 мая 2018 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 19–29*

DOI: 10.14529/mmph180303

ALGORITHM TO ADJUST FUZZY INFERENCE SYSTEM OF MAMDANI TYPE

M.S. Golosovskiy¹, A.V. Bogomolov², D.S. Terebov³, E.V. Evtushenko⁴

¹ *The State Scientific Research Testing Institute of Military Medicine of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Saint-Petersburg, Russian Federation*

² *State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation*

³ *National Center for Defense Management of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation*

⁴ *The Black Sea Higher Naval Orders of the Red Star School named after P.S. Nakhimov, Sevastopol, Russian Federation*

E-mail: a.v.bogomolov@gmail.com

An algorithm to adjust the Mamdani-type systems is given; it uses the principle of a proportional-integral controller with a limited integral component to adjust fuzzy inference rules. To reduce the adjustment time in comparison with proportional controller and to reduce the overshoot amount in comparison with the proportional-integral controller with the same values of the coefficients of the integral and proportional components, the integral component limitation is used. The advantage of the developed algorithm is in the possibility of performing a local adjustment without a complete set of data for the domain of definition of input variables and the corresponding response values of the system. As a priority area for further research adaptation of the application of the algorithms to the membership functions of other types (non-Gaussian) is considered. The efficiency of the algorithm is confirmed by the results of its comparison with algorithms of fuzzy inference system adjustment based on fuzzy neural networks and fuzzy clustering in solving identical problems.

Keywords: fuzzy inference systems; adaptive systems; Mamdani-type systems; intelligent systems; fuzzy logic; functions of membership; proportional-integral controller.

References

1. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on computers*, 1994, Vol. 43, Issue 11, pp. 1329–1333. DOI: 10.1109/12.324566
2. Jang J.S.R. ANFIS: Adaptive network based fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, Vol. 23, Issue 3, pp. 665–685. DOI: 10.1109/21.256541
3. Manentia F., Rossia F., Goryunov A., Dyadik A., Kozin K., Nadezhdin I., Mikhalevich S. Fuzzy adaptive control system of a non-stationary plant with closed-loop passive identifier. *Resource-Efficient Technologies*, 2015, Vol. 1, Issue 1, pp. 10–18. DOI: 10.1016/j.refit.2015.07.001
4. Paklin N.B. *Adaptivnye modeli nechetkogo vyvoda dlya identifikatsii nelineynykh zavisimostey v slozhnykh sistemakh: avtoreferat dis. ... kand. tekhn. nauk* (Adaptive models of fuzzy inference for identification of nonlinear dependencies in complex systems: the abstract of thesis Cand. Sc. (Engineering)). Izhevsk, 2004, 19 p. (in Russ.).
5. Pegat A. *Nechyetskoe modelirovanie i upravlenie* (Fuzzy modeling and control). BINOM, Laboratoriya znaniy Publ., 2013, 798 p. (in Russ.).
6. Borisov V.V., Kruglov V.V., Fedulov A.S. *Nechyetkie modeli i seti* (Fuzzy models and networks). Moscow, Goryachaya liniya–Telekom Publ., 2007, 284 p. (in Russ.).
7. Driankov O., Hellendoorn H., Reinfrank M. *An introduction to fuzzy control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, 316 p. DOI: 10.1007/978-3-662-11131-4
8. Garibaldi J.M., Ifeachor E.C. Application of simulated annealing fuzzy model tuning to umbilical cord acid-base interpretation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, Vol. 7, Issue 1, pp. 72–84. DOI: 10.1109/91.746314
9. Mamdani E.H., Assilian S. An Experiment in Linguistic Synthesis with Fuzzy Logic Controller. *International Journal Man-Machine Studies*, 1975, Vol. 7, Issue 1, pp. 1–13. DOI: 10.1016/S0020-7373(75)80002-2
10. Kudinov Yu.I., Kelina A.Yu. Methods of Synthesis and Tuning of Fuzzy PID Mamdani Regulators. *Informatsionnye tekhnologii*, 2012, no. 6 (supplement), 32 p. (in Russ.).
11. Vassilyev S.N., Kudinov Y.I., Pashchenko F.F., Durgaryan I.S., Kelina A.Yu., Kudinov I.Yu., Pashchenko A.F. Intelligent Control Systems and Fuzzy Controllers. Part 2. Trained Fuzzy Controllers, Fuzzy PID Controllers. *Datchiki & Systemi (Sensors & Systems)*, 2017, no. 2 (211), pp. 3–12. (in Russ.).
12. Khomonenko A.D., Logashev S.V., Krasnov S.A., Automatic Categorization of Documents Using Latent Semantic Analysis and Fuzzy Inference Algorithm of Mamdani. *Tr. SPIIRAN*, 2016, Issue 44, pp. 5–19. (in Russ.). DOI: 10.15622/sp.44.1
13. Cao S.G., Rees N.W., Feng G. Mamdani-type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, Vol. 123, Issue 3, pp. 359–367. DOI: 10.1016/S0165-0114(01)00015-X
14. Hennebach E., Dilger W. Algebraic operations on a class of Mamdani-controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, Vol. 101, Issue 2, pp. 253–259. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00168-7
15. Soldatova O.P., Lyozin I.A. Research of Classification Tasks Solving Using Neural Fuzzy Production Based Network Models of Mamdani–Zadeh, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, Issue 2(35), pp. 136–148. DOI: 10.14498/vsgtu1266

Received May 23, 2018

ALTERNATIVE ROUTS OF GAMES WITH RIGID SCHEDULE

E.V. Larkin¹, A.N. Privalov²

¹ Tula State University, Tula, Russian Federation

² Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, Russian Federation

E-mail: privalov.61@mail.ru

Corporative-competitive system, which is inside of corporations, can be determined as a “game”, step-by-step performing a certain type of activity. The system operates in real physical time, and the result of operation is the distance, which is divided into stages. The stages are passed by the team participants due to rigid schedule, which may be occasionally selected from the set of possible schedules. The abstraction “M-parallel semi-Markov process” is used for description of a system under consideration. In semi-Markov process degenerate distribution is used for description of time intervals between relay points. For analysis of relay-race evolution, recurrent method which takes into account rigidity of schedule and stochastic character of route selection is used. In accordance with the concept of distributed forfeit and proposed recurrent procedure, the method of calculation of summing forfeit, which one of competing teams receives from other teams, is proposed.

Keywords: relay-race; semi-Markov process; degenerate distribution; route; evolution; distributed forfeit; recurrent procedure.

Introduction

Relay-races, as the basic conception of corporative-concurrent system description, may be applied to modeling of such fields of human activity, as industry, economics, politics, defense, sport, etc [1–4]. Due to conception announced teams, participating in relay-race, should to pass the distance, which is divided onto stages by relay-points, and team participants should to pass the stage in real physical time. Common case of random time relay-race simulation was considered in [2, 5], where for description of teams behavior such abstraction, as semi-Markov process was used. Semi-Markov process is quite universal mathematical apparatus, and when instead of random time emerges rigid schedule, it can be used too. Rigidity of stage passing time permit substantially simplify model of the system and calculation of forfeit, but also leads to substantial restrictions of results obtained.

On practice teams, participated the relay race, may vary their schedules, and for an external observer such variations are the stochastic ones. This permits to consider different combinations of schedules and to improve results obtained. Approaches to modeling of relay-races with rigid schedules and alternative routes are currently known insufficiently, that explains necessity and relevance of the investigations in this domain.

1. Relay-race as M-parallel semi-Markov process

The graph, which shows the alternative routes rigid schedule relay-race structure, is shown on the fig. 1.

Following assumptions, when modeling this kind of races, are made bellow [5]:

- in relay-race participate M -teams, every of which pass its distance in real physical time;
- distance of every team is divided onto stages, every of which is overcame by one participant of a team, and first participants of all teams start their stages at once;
- every participant may choose a route, for passing the stage, for an external observer the route selection is a random event;
- passing the stage route by participant lasts rigid time, which is individual for the team, the stage and the route;
- after completion of a current stage on the selected route next participant of the team selects route and starts the passing next stage without a lag;
- forfeit, which is imposed on the teams is defined as the distributed payment, value of which depends on the time and difference of stages, which currently teams pass.

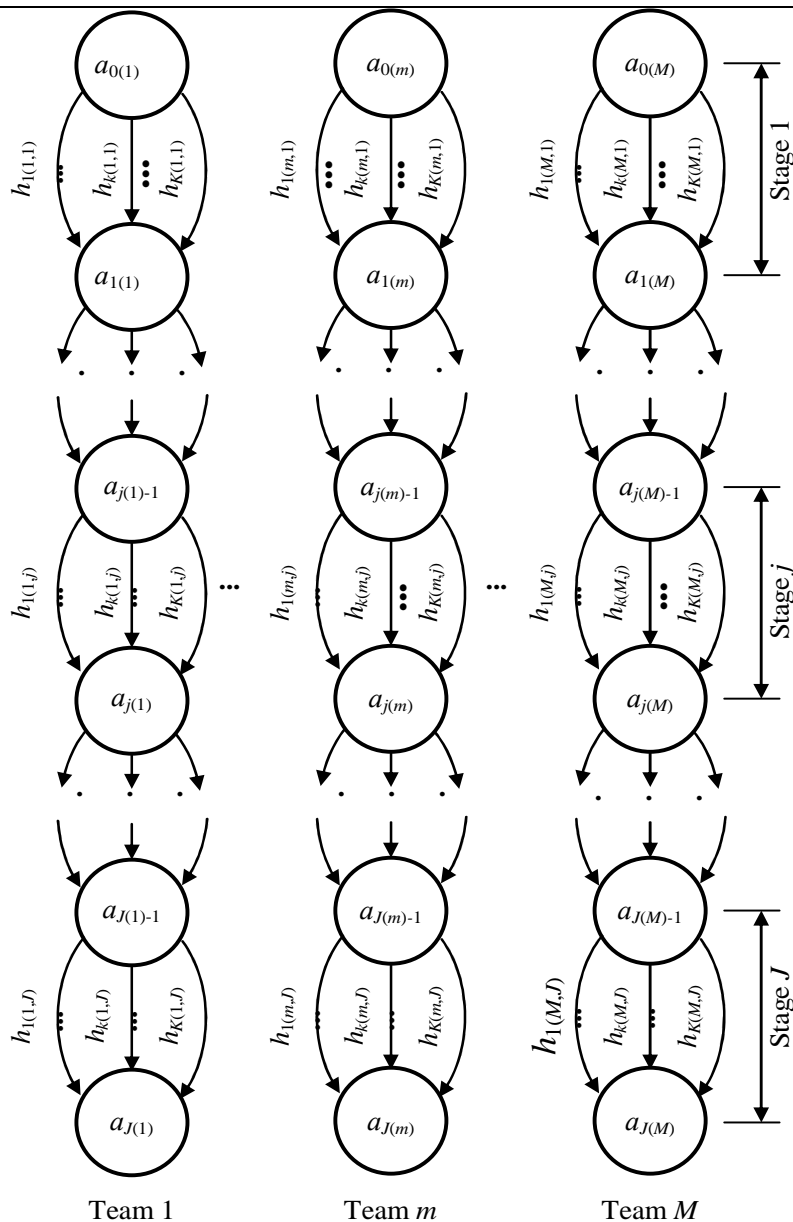


Fig. 1. Structure of alternative routes rigid schedule relay-race

The model of relay-race with M teams may be performed as M -parallel semi-Markov process [6–8]:

$$\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_m, \dots, \mu_M(t)\}, \quad (1)$$

$$\mu_m = \{A_m, h_m(t)\},$$

where t is the physical time; μ_m is the ordinary semi-Markov process, A_m is the set of states; $h_m(t)$ is the semi-Markov matrix, which describes an activity of the m -th team;

$$A_m = \{a_{0(m)}, a_{1(m)}, \dots, a_{j(m)}, \dots, a_{J(m)}\}; \quad (2)$$

$$\mathbf{h}_m(t) = [h_{j(m),l(m)}(t)]; \quad (3)$$

$$\mathbf{h}_m(t) = [h_{j(m),l(m)}(t)], \quad 1 \leq j(m), l(m) \leq J; \quad (4)$$

$$h_{j(m),l(m)}(t) = \begin{cases} \sum_{k(m,j)=1}^{K(m,j)} h_{k(m,j)}(t), & \text{when } l(m) = j(m) + 1, 0 \leq j(m) \leq J(m) - 1; \\ 0 & \text{in all other cases.} \end{cases} \quad (5)$$

Due to rigid schedule and quasi-stochastic principle of route selection [9]

$$h_{k(m,j)}(t) = p_{k(m,j)} f_{k(m,j)}(t) = p_{k(m,j)} \delta[t - T_{k(m,j)}], \quad (6)$$

where $p_{k(m,j)}$ is the probability of route selection; $f_{k(m,j)}(t)$ is the pure time density of residence the process at the state $a_{j(m)}$ with further switch to the state $a_{j(m)+1}$ on the k -th route; $\delta(t - T_{k(m,j)})$ is the Dirac δ -function; $T_{k(m,j)}$ is the rigid time of passing the j -th stage by participant of team m with $k(m, j)$ -th route.

Comparison of classic competition [2] and competition with rigid schedule is shown on the fig. 2;

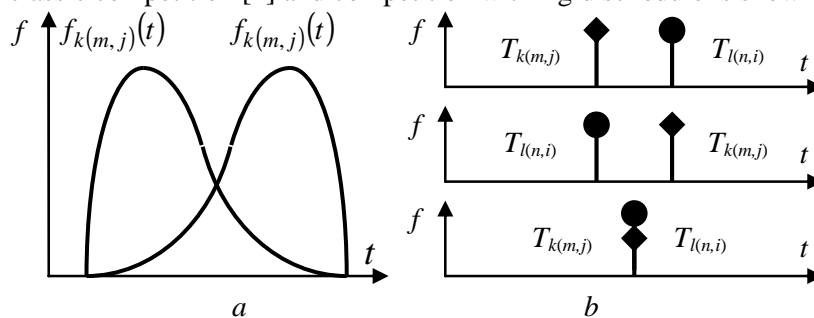


Fig. 2. Classic competition (a) and competition with rigid schedules (b)

When classic competition, times of semi-Markov process residence in states $a_{j(m)}$ and $a_{i(n)}$ are equal to $f_{k(m,j)}(t)$ and $f_{l(n,i)}(t)$, correspondingly. When rigid schedule times are equal to $\delta[t - T_{k(m,j)}]$ and $\delta[t - T_{l(n,i)}]$. Formulae, which describe weighted time density and probabilities of winning the j -th stage of race by m -th team, if all participating teams start their stages simultaneously, are as follows:

$$\psi_{k(m,j)}^w(t) = f_{k(m,j)}(t) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M [1 - F_{l(n,i)}(t)], \quad (7)$$

$$\pi_{k(m,j)}^w = \int_0^{\infty} \psi_{k(m,j)}^w(t) dt; \quad (8)$$

$$\psi_{k(m,j)}^w(t) = \begin{cases} \delta(t - T_{k(m,j)}), & \text{when } T_{k(m,j)} = \min\{T_{l(1,i)}, \dots, T_{k(m,j)}, \dots, T_{l(M,i)}\}; \\ \text{nonsense,} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

$$\pi_{k(m,j)}^w = \begin{cases} 1, & \text{when } T_{k(m,j)} = \min\{T_{l(1,i)}, \dots, T_{k(m,j)}, \dots, T_{l(M,i)}\}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (10)$$

where $F_{\dots}(t) = \int_0^t f_{\dots}(\theta) d\theta$ is the distribution function; θ is the auxiliary argument.

Pure time density of winning the j -th stage of race by m -th team is as follows:

$$\phi_{k(m,j)}^w(t) = \frac{\psi_{k(m,j)}^w(t)}{\pi_{k(m,j)}^w}. \quad (11)$$

When paired competition, formulae, which describe the time density of waiting by m -th, winner, team until n -th, loser, team, finishes the stage, are as follows:

$$\varphi_{k(m,j) \rightarrow l(n,i)}(t) = \frac{\eta(t) \int_0^{\infty} f_{k(m,j)}(\theta) \cdot f_{l(n,i)}(t+\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} F_{k(m,j)}(t) dF_{l(n,i)}(t)}; \quad (12)$$

$$\varphi_{k(m,j) \rightarrow l(n,i)}(t) = \begin{cases} \delta[t - T_{l(n,i)} + T_{k(m,j)}], & \text{when } T_{k(m,j)} \leq T_{l(n,i)}; \\ \text{nonsense,} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (13)$$

where $\eta(t)$ is the Heaviside function;

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{when } t \leq 0; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is necessary to admit, that in the case under consideration, unlike the case considered at [2], the draw effect emerges. It is caused with the infinitesimal probability of two or more teams stage passing times coincidence when time intervals are a random ones, and quite real rigid schedule case, when some time intervals are quite the same (the case is shown on the fig. 2, *b*, bottom line).

Due to the fact, that for all teams, participated in a race, number of the stage *j* at every relay point may to increment only, for external viewer sequence of switches during relays in the system as a whole has the nature of evolution [10–13], which develops from functional state, being defined with vector [14] $(a_{0(1)}, \dots, a_{0(m)}, \dots, a_{0(M)})$ till functional state $(a_{J(1)}, \dots, a_{J(m)}, \dots, a_{J(M)})$. Trajectory of evolution depends of routes, which every team select for passing of proper stages and schedules which develop from routes selected. Owing to random character of routes selection trajectory of evolution is the random one. Common number of routes, on which *m*-th team as a whole may overcome the distance is equal to

$$\tilde{K}(m) = \prod_{j=1}^J K(m, j), \quad (14)$$

where $K(m, j)$ is the common number of routs of *m*-th team *j*-th stage.

Common number of different variants of rigid relay-races is as follows:

$$\tilde{K} = \prod_{m=1}^M \tilde{K}(m). \quad (15)$$

2. Recursive procedure of relay-race evolution analysis

Let us select from all possible routes on which *m*-th team may overcome the distance the $\tilde{k}(m)$ -th variant, in which routes $k(m, 1), \dots, k(m, j), \dots, k(m, J)$ are selected (note, that in common case $k(m, 1) \neq \dots \neq k(m, j) \neq \dots \neq k(m, J)$, since these are different functions of *m* and *j*). So $\tilde{1}(m)$ -th and $\tilde{K}(m)$ -th variants correspond to combinations $1(m, 1), \dots, 1(m, j), \dots, 1(m, J)$ and $K(m, 1), \dots, K(m, j), \dots, K(m, J)$ respectively. Such a selection should be executed on routes of all other teams. For selected routes the recursive procedure of relay-race evolution may be worked out. For this purpose auxiliary time θ should be introduced. Recursive procedure of evolution analysis is as follows.

Initial functional state of the semi-Markov process (1) as a whole is $(a_{0(1)}, \dots, a_{0(m)}, \dots, a_{0(M)})$, where elements of vector are numbers of relay-race starting points. All teams start race simultaneously, and into auxiliary time θ next substitutions should be made:

$$\theta_0(1) \leftarrow T_{k(1,1)}, \dots, \theta_0(m) \leftarrow T_{k(m,1)}, \dots, \theta_0(M) \leftarrow T_{k(M,1)}, \quad (16)$$

where arrow \leftarrow indicates the direction of substitution; index means the quantity of previous switches.

Rigid time intervals $\theta_0(1), \dots, \theta_0(m), \dots, \theta_0(M)$ compete between them, and result of competition is winning the stage by those teams, which have minimal value of θ . This values fulfill the subset Θ_0^* :

$$\Theta_0^* = \{\theta_0^*(u), \dots, \theta_0^*(v), \dots, \theta_0^*(w)\}; \quad (17)$$

$$\{\theta_0^*(u), \dots, \theta_0^*(v), \dots, \theta_0^*(w)\} = \min_{\theta} \{\theta_0(1), \dots, \theta_0(m), \dots, \theta_0(M)\},$$

where u, v, w are auxiliary indices for nomination the number of team.

It is obviously, that

$$\theta_0^* \Leftarrow \theta_0^*(u) = \dots = \theta_0^*(v) = \dots = \theta_0^*(w), \quad (18)$$

i. e. teams with numbers

$$N_0^* = \{\arg[\theta_0^*(u)], \dots, \arg[\theta_0^*(v)], \dots, \arg[\theta_0^*(w)]\} \quad (19)$$

win the competition among other teams, but draw the competition among themselves. Quantity of switches $\bar{s}(1)$ on the first step of recursion is equal to cardinal number of subset Θ_0^* :

$$\bar{s}(1) = |\Theta_0^*|. \quad (20)$$

Due to the switches, next substitutions should be maid to prepare next step of recursion:

index of $\theta_0(m)$, $1 \leq m \leq M$, should be replaced with index of $s(1) \Leftarrow 0 + \bar{s}(1)$;

time intervals, which will compete further should be replaced as follows

$$\theta_{s(1)}(m) \Leftarrow \begin{cases} \theta_0(m) - \theta_0^*, & \text{when } m \notin N_0^*; \\ T_{k(m,2)}, & \text{when } m \in N_0^*; \end{cases} \quad (21)$$

indices $\iota(m)$ of elements of vector $(a_{0(1)}, \dots, a_{0(m)}, \dots, a_{0(M)})$ should be replaced as follows:

$$\iota(m) \Leftarrow \begin{cases} 0(m), & \text{when } m \notin N_0^*; \\ 1(m), & \text{when } m \in N_0^*. \end{cases} \quad (22)$$

In such a way on the second step or recursion rigid time intervals $\theta_{s(1)}(1), \dots, \theta_{s(1)}(m), \dots, \theta_{s(1)}(M)$ will compete between them.

Let us assume that on the r -th step of the recursion vector of functional state of semi-Markov process is $(a_{j(1)-1}, \dots, a_{j(m)-1}, \dots, a_{j(M)-1})$, and time intervals $\theta_{s(r-1)}(1), \dots, \theta_{s(r-1)}(m), \dots, \theta_{s(r-1)}(M)$ compete between them. Result of competition is winning the stage by those teams, which have minimal value of θ . This values fulfill the subset $\Theta_{s(r-1)}^*$:

$$\Theta_{s(r-1)}^* = \{\theta_{s(r-1)}^*(u), \dots, \theta_{s(r-1)}^*(v), \dots, \theta_{s(r-1)}^*(w)\}; \quad (23)$$

$$\{\theta_{s(r-1)}^*(u), \dots, \theta_{s(r-1)}^*(v), \dots, \theta_{s(r-1)}^*(w)\} = \min_{\theta} \{\theta_{s(r-1)}(1), \dots, \theta_{s(r-1)}(m), \dots, \theta_{s(r-1)}(M)\}.$$

It is obviously, that

$$\theta_{s(r-1)}^* \Leftarrow \theta_{s(r-1)}^*(u) = \dots = \theta_{s(r-1)}^*(v) = \dots = \theta_{s(r-1)}^*(w), \quad (24)$$

i.e. teams with numbers

$$N_{s(r-1)}^* = \{\arg[\theta_{s(r-1)}^*(u)], \dots, \arg[\theta_{s(r-1)}^*(v)], \dots, \arg[\theta_{s(r-1)}^*(w)]\} \quad (25)$$

win the competition. Quantity of switches on the r -th step of recursion is equal to cardinal number of subset $\Theta_{s(r-1)}^*$:

$$\bar{s}(r) = |\Theta_{s(r-1)}^*|. \quad (26)$$

Due to the switches, following substitutions should be maid to prepare next step of recursion:

index of $\theta_{s(r-1)}(m)$ $1 \leq m \leq M$, should be replaced with index $\bar{s}(r) \leftarrow s(r-1) + \bar{s}(r)$;

time intervals, which will compete further should be replaced as follows –

$$\theta_{s(r)}(m) \leftarrow \begin{cases} \theta_{s(r-1)}(m) - \theta_{s(r-1)}^*, & \text{when } m \notin N_{s(r-1)}^*; \\ T_{k(m,j+1)}, & \text{when } m \in N_{s(r-1)}^*; \end{cases} \quad (27)$$

components of vector $(a_{j(1)-1}, \dots, a_{j(m)-1}, \dots, a_{j(M)-1})$ should be replaced as follows –

$$a_{j(m)-1} \leftarrow \begin{cases} a_{j(m)-1}, & \text{when } m \notin N_{s(r-1)}^*; \\ a_{j(m)}, & \text{when } m \in N_{s(r-1)}^*. \end{cases} \quad (28)$$

In such a way on the $(r+1)$ -th step or recursion rigid time intervals $\theta_{s(r)}(1), \dots, \theta_{s(r)}(m), \dots, \theta_{s(r)}(M)$ compete between them.

Let assume that on the last but one step of recursion after $MJ-3$ switches vector became $(a_{J(1)}, \dots, a_{J(u)-1}, \dots, a_{J(v)-1}, \dots, a_{J(m)}, \dots, a_{J(w)-1}, \dots, a_{J(M)})$, and rigid time intervals $\theta_{MJ-3}(k), \theta_{MJ-3}(l), \theta_{MJ-3}(n)$ compete between them only. Let us also assume, that minimal values of θ , which fulfill the subset Θ_{JM-3}^* , are

$$\Theta_{JM-3}^* = \{\theta_{JM-3}^*(u), \theta_{JM-3}^*(w)\}; \quad (29)$$

$$\{\theta_{JM-3}^*(u), \dots, \theta_{JM-3}^*(w)\} \subseteq \min_{\theta} \{\theta_{MJ-3}(u), \theta_{MJ-3}(v), \theta_{MJ-3}(w)\}.$$

$$\theta_{MJ-3}^* \leftarrow \theta_{MJ-3}^*(u) = \theta_{MJ-3}^*(w), \quad (30)$$

i. e. teams with numbers u and w win the competition.

Due to (29) and (30) on the last but one step two switches occur, namely u -th and w -th teams reach the final point of race and after that functional state became $(a_{J(1)}, \dots, a_{J(u)}, \dots, a_{J(v)-1}, \dots, a_{J(m)}, \dots, a_{J(w)}, \dots, a_{J(M)})$, i.e. w -th team on the last step should finish the distance at the time

$$\theta_{MJ-3+2}(l) = \theta_{MJ-3}(l) - \theta_{MJ-3}^*, \quad (31)$$

and relay race in the state $(a_{J(1)}, \dots, a_{J(m)}, \dots, a_{J(M)})$ will over.

3. Schedule effectiveness evaluation recursive procedure

Quite natural for evaluation of rigid schedule effectiveness is the model, in which all possible pairs of teams, f.e. m -th and n -th, and forfeit $\sigma_{i(m),j(n)}(t)$, distributed at the time, are considered. Distributed forfeit, in turn, is defined as payment, which the n -th team pays to the m -th team, namely

$$\sigma_{i(m),j(n)}(t) \left\{ \begin{array}{l} > 0, & \text{when } i(m) > j(n); \\ = 0, & \text{when } i(m) = j(n); \\ < 0, & \text{when } i(m) < j(n), \end{array} \right. \quad (32)$$

where $0 \leq i(m), j(n) \leq J$.

For evaluation of common forfeit, which the m -th team receives from the n -th team, one can to use the recursive procedure, described above. At initial two-elements functional state $(a_{0(m)}, a_{0(n)})$ substitutions

$$\theta_0(m) \leftarrow T_{k(m,1)}, \quad \theta_0(n) \leftarrow T_{k(n,1)} \quad (33)$$

should be done.

In this simplified two-parallel semi-Markov process only time intervals $\theta_0(m)$, $\theta_0(n)$ compete between them. Possible result of competition may be the next:

a) wins the team m , if $\theta_0(m) < \theta_0(n)$, then $\Theta_0^* = \{\theta_0^*(m)\} = \min\{\theta_0(m), \theta_0(n)\}$, $\theta_0^* \Leftarrow \theta_0^*(m)$, $s(1) = 1$;

b) wins the team n , if $\theta_0(m) > \theta_0(n)$, then $\Theta_0^* = \{\theta_0^*(n)\} = \min\{\theta_0(m), \theta_0(n)\}$, $\theta_0^* \Leftarrow \theta_0^*(n)$, $s(1) = 1$;

c) competition is draw, if $\theta_0(m) = \theta_0(n)$, then $\Theta_0^* = \{\theta_0^*(m), \theta_0^*(n)\} = \min\{\theta_0(m), \theta_0(n)\}$, $\theta_0^* \Leftarrow \theta_0^*(m) = \theta_0^*(n)$, $s(1) = 2$.

Value of forfeit is equal as follows:

$$\sigma_{s(0)}[k(m,1), k(n,1)] = \int_0^{\theta_0^*} \sigma_{0(m),0(n)}(t) dt, \quad (34)$$

where insertion indices $k(m,1), k(n,1)$ substitution (33).

Substitutions for preparing next step of recursion are as follows:

indices of $\theta_0(m)$, $\theta_0(n)$, should be replaced with

$$s(1) \Leftarrow 0 + \bar{s}(1); \quad (35)$$

$$s(1) = \begin{cases} 1 & \text{in the case a), b);} \\ 2 & \text{in the case c);} \end{cases} \quad (36)$$

time intervals, which will compete further and components of vector $[0(m), 0(n)]$ should be replaced as follows

$$\begin{aligned} \theta_{s(1)}(m) &\Leftarrow \begin{cases} T_{k(m,2)} & \text{in the cases a), c);} \\ \theta_0(m) - \theta_0^* & \text{in the cases b);} \end{cases} \\ \theta_{s(1)}(n) &\Leftarrow \begin{cases} T_{k(n,2)} & \text{in the cases b), c);} \\ \theta_0(n) - \theta_0^* & \text{in the cases a);} \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

components of vector $(a_{0(m)}, a_{0(n)})$ should be replaced as follows –

$$(a_{0(m)}, a_{0(n)}) \Leftarrow \begin{cases} (a_{1(m)}, a_{0(n)}) & \text{in the case a);} \\ (a_{0(m)}, a_{1(n)}) & \text{in the case b);} \\ (a_{1(m)}, a_{1(n)}) & \text{in the case c).} \end{cases} \quad (38)$$

In such a way on the second step or recursion rigid time intervals $\theta_{s(1)}(m), \theta_{s(1)}(n)$ will compete between them.

Let us assume that on the r -th step of the recursion vector of functional state of semi-Markov process is $(a_{i(m)}, a_{j(n)})$, and time intervals $\theta_{s(r-1)}(m), \theta_{s(r-1)}(n)$ compete between them. Possible result of competition may be the next:

a) wins the team m , if $\theta_{s(r-1)}(m) < \theta_{s(r-1)}(n)$, then $\Theta_{s(r-1)}^* = \{\theta_{s(r-1)}^*(m)\} = \min\{\theta_{s(r-1)}(m), \theta_{s(r-1)}(n)\}$, $\theta_{s(r-1)}^* \Leftarrow \theta_{s(r-1)}^*(m)$, $s(r) \Leftarrow s(r-1) + 1$;

b) wins the team n , if $\theta_{s(r-1)}(m) > \theta_{s(r-1)}(n)$, then
 $\Theta_{s(r-1)}^* = \{\theta_{s(r-1)}^*(n)\} = \min\{\theta_{s(r-1)}(n), \theta_{s(r-1)}^*(n)\}$, $\theta_{s(r-1)}^* \leftarrow \theta_{s(r-1)}^*(n)$, $s(r) \leftarrow s(r-1) + 1$;
 c) competition is draw, if $\theta_{s(r-1)}(m) = \theta_{s(r-1)}(n)$, then
 $\Theta_{s(r-1)}^* = \{\theta_{s(r-1)}^*(m), \theta_{s(r-1)}^*(n)\} = \min\{\theta_{s(r-1)}(m), \theta_{s(r-1)}(n)\}$, $\theta_{s(r-1)}^* \leftarrow \theta_{s(r-1)}^*(m) = \theta_{s(r-1)}^*(n)$,
 $s(r) \leftarrow s(r-1) + 2$.

Value of forfeit is equal as follows:

$$\sigma_{s(r-1)}[k(m, i), k(n, j)] = \int_0^{\theta_{s(r-1)}^*} \sigma_{i(m), j(n)}(t) dt. \quad (39)$$

Substitutions for preparing next step of recursion are as follows:

indices of $\theta_{s(r-1)}(m)$, $\theta_{s(r-1)}(n)$, should be replaced with index of $\bar{s}(r) \leftarrow s(r-1) + \bar{s}(r)$, where $\bar{s}(r)$ is defined as (36);

time intervals, which will compete further and components of vector $[i(m), j(m)]$ should be replaced as follows

$$\theta_{s(r)}(m) \leftarrow \begin{cases} T_{k(m, i+1)} & \text{in the cases a), c);} \\ \theta_{s(r-1)}(m) - \theta_{s(r-1)}^* & \text{in the case b);} \end{cases}$$

$$\theta_{s(r)}(n) \leftarrow \begin{cases} T_{k(n, j+1)} & \text{in the cases b), c);} \\ \theta_{s(r-1)}(n) - \theta_{s(r-1)}^* & \text{in the case a);} \end{cases} \quad (40)$$

components of vector $[i(m), j(n)]$ should be replaced as follows

$$(a_{i(m)}, a_{j(n)}) \leftarrow \begin{cases} (a_{i(m)+1}, a_{j(n)}) & \text{in the case a);} \\ (a_{i(m)}, a_{j(n)+1}) & \text{in the case b);} \\ (a_{i(m)+1}, a_{j(n)+1}) & \text{in the case c).} \end{cases} \quad (41)$$

So on the $(r+1)$ -th step or recursion rigid time intervals $\theta_{s(r)}(m)$, $\theta_{s(r)}(n)$ will compete between them.

Let us assume, that on the last step of recursion only m -th team stays in race, and time, it spend from a previous switch till finishing J -th stage, obtained on previous stage of recursion, is $\theta_{s(R-1)}^*$. Value of forfeit on the last stage is is equal as follows:

$$\sigma_{s(R-1)}[k(m, J-1), k(n, J)] = \int_0^{\theta_{s(R-1)}^*} \sigma_{J(m)-1, J(n)}(t) dt. \quad (42)$$

For evaluation of common forfeit one should to evaluate probability of realization of the $\tilde{k}(m)$ -th evolution trajectory of team m and $\tilde{k}(n)$ -th evolution trajectory of team n . They are as follows:

$$\tilde{p}_{\tilde{k}(m)} = \prod_{i=1}^J \tilde{p}_{k(m, i)}, \quad \tilde{1}(m) \leq \tilde{k}(m) \leq \tilde{K}(m);$$

$$\tilde{p}_{\tilde{k}(n)} = \prod_{j=1}^J \tilde{p}_{k(n, j)}, \quad \tilde{1}(n) \leq \tilde{k}(n) \leq \tilde{K}(n). \quad (43)$$

Weighted sum of forfeit, which the m -th team receives from m -th team when realized $\tilde{k}(m)$ -th and $\tilde{k}(n)$ -th evolution trajectories is as follows:

$$\sigma_{\tilde{k}(m),\tilde{k}(n)}(m,n) = \tilde{p}_{\tilde{k}(m)}\tilde{p}_{\tilde{k}(n)} \sum_{r=0}^{R-1} \sigma_{s(r-1)} [k(m,i), k(n,j)]. \quad (44)$$

Common sum of forfeit, which the m -th team receives from the n -th team is as follows:

Common sum of forfeit, which the m -th team receives from the n -th team, when is as follows

$$\sigma(m,n) = \sum_{\tilde{k}(m)=\tilde{1}(m)}^{\tilde{K}(n)} \sum_{\tilde{k}(n)=\tilde{1}(n)}^{\tilde{K}(m)} \sigma_{\tilde{k}(m),\tilde{k}(n)}(m,n). \quad (45)$$

Common sum of forfeit, which the m -th team receives from all other teams, is as follows

$$\sigma(m) = \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq m}}^M \sigma(m,n). \quad (46)$$

It is necessary to admit, that common sum of forfeit, $\sigma(m)$, the m -th team receives from all other teams, rigidly depends of schedules of all participants of races, including the m -th team and probabilities of routes selection. So to change a sum of forfeit $\sigma(m)$ one may both change m -th team schedule, and probabilities of selection possible routes on the every stage of the distance. This is essential obstacle, from point of view of putting and solving the forfeit optimization task.

Conclusion

Results obtained gives to system engineers and economists rather simple method of evaluation the effectiveness of those or that team management decisions on the basis of opponent teams behavior observation. Method of forfeit calculation proposed, gives a solid forfeit figure, based on the real knowledge of the strategies of opponents and possible changes of opponents plans. This, in turn, permits to use the game theory [15, 16] to work out a managing strategy, for increasing sum of forfeit which team under management receives from other teams, participated in relay race.

Further investigation in this area should be directed to finding common recommendation for scheduling m -th team strategy with optimization sum of forfeit [17].

The research was carried out within the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russian Federation (No 2.3121.2017/PCH).

References

1. Bellman R.E. *Dynamic Programming*. N.Y.: Dover Publications, Inc, 2003, 384 p.
2. Ivutin A.N., Larkin E.V. Simulation of Concurrent Games. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 43–54. DOI: 10.14529/mmp150204
3. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N. A method for estimating the time intervals between transactions in speech-compression algorithms. *Automatic documentation and mathematical linguistics*, 2017, Vol. 51, Issue 5, pp. 214–219. DOI: 10.3103/S000510551705003X
4. Ivutin A.N., Larkin E.V., Kotov V.V. Established Routine of Swarm Monitoring Systems Functioning. *Advances in Swarm and Computational Intelligence. ICSI 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9141*, Springer, Cham, 2015, pp. 415–422. DOI: 10.1007/978-3-319-20472-7_45
5. Ivutin A.N., Larkin E.V., Lutskov Yu.I. Simulation of Concurrent Games in Distributed Systems. *Proc. 5th International Workshop on Computer Science and Engineering (WCSE 2015)*, Moscow, Russia, April 15–17, 2015, pp. 60–65.
6. Korolyuk V., Swishchuk A. Semi-Markov random evolutions. *Semi-Markov Random Evolutions. Mathematics and Its Applications. Vol 308*, Springer, Dordrecht, 1995, pp. 59–91. DOI: 10.1007/978-94-011-1010-5_4
7. Larkin E.V., Lutskov Yu.I., Ivutin A.N., Novikov A.S. Simulation of concurrent process with Petri-Markov nets. *Life Science Journal*, 2014, Vol. 11, no. 11, pp. 506–511. DOI: 10.7537/marslsj111114.86

8. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A. Data buffering in information-measuring system. *Proc. 2nd International Ural Conference on Measurements (UralCon)*, Chelyabinsk, 2017, pp. 118–123. DOI: 10.1109/URALCON.2017.8120697
9. Shiryayev A.N. *Probability*. Springer, New York, NY, 1996, 623 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2539-1
10. Cleaveland R., Smolka S. Strategic directions in concurrency research. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 1996, Vol. 28, Issue 4, pp. 607–625. DOI: 10.1145/242223.242252
11. Heymann M. Concurrency and Discrete Event Control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1990, Vol. 10, Issue 4, pp. 103–112. DOI: 10.1109/37.56284
12. Valk R. Concurrency in Communicating Object Petri Nets. *Concurrent Object-Oriented Programming and Petri Nets. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2001*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2001, pp. 164–195. DOI: 10.1007/3-540-45397-0_5
13. Dijkstra E.W. Cooperating sequential processes. *Programming Languages*, Academic Press, London, 1968, pp. 43–112.
14. Larkin E.V., Ivutin A.N. "Concurrency" in M-L-Parallel Semi-Markov Process. *MATEC Web of Conferences*, 2017, Vol. 108, Article no. 05003. DOI: 10.1051/mateconf/201710805003
15. Myerson R.B. *Game theory*. Cambridge, London: Harvard University Press, 1997, 568 p.
16. Chatterjee K., Jurdziński M., Henzinger T. Simple stochastic parity games. *Computer Science Logic. CSL 2003. Lecture Notes in Computer Science*, 2003, Vol. 2803, pp. 100–113. DOI: 10.1007/978-3-540-45220-1_11
17. Squillante M.S. Stochastic Analysis and optimization of multiserver systems. *Run-time Models for Self-managing Systems and Applications. Autonomic Systems*. Springer, Basel, 2010, pp. 1–25. DOI: 10.1007/978-3-0346-0433-8_1

Received May 30, 2018

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 30–40*

УДК 519.2

DOI: 10.14529/mmph180304

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МАРШРУТЫ ИГР С ЖЁСТКИМ РАСПИСАНИЕМ

Е.В. Ларкин¹, А.Н. Привалов²

¹ Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация

² Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Российская Федерация

E-mail: privalov.61@mail.ru

Корпоративно-конкурирующая система, которая присутствует внутри корпораций, может быть определена как «игра», шаг за шагом реализующая определённую деятельность. Система функционирует в реальном физическом времени, а результат операции – это «дистанция», которая делится на «этапы». Этапы проходят участники команд в соответствии с «жестким графиком», который может быть выбран из набора возможных графиков. Абстракция «М-параллельный полумарковский процесс» может быть использована для описания рассматриваемой системы. В полумарковском процессе вырожденное распределение используется для описания временных интервалов между промежуточными точками эстафеты. Для анализа развития эстафеты используется рекуррентный метод, учитывающий жесткость графика и стохастический характер выбора маршрута. В соответствии с предложенной концепцией распределенной «неустойки» и предлагаемой рекуррентной процедуры предлагается метод расчета суммирующей «неустойки», которую получает одна из конкурирующих команд от других команд.

Ключевые слова: эстафета; полумарковский процесс; вырожденное распределение; маршрут; эволюция; распределенная неустойка; рекуррентная процедура.

Литература

1. Bellman, R.E. Dynamic Programming / R.E. Bellman. – N.Y: Dover Publications, Inc. – 2003. – 384 p.
2. Ivutin, A.N. Simulation of Concurrent Games / A.N. Ivutin, E.V. Larkin // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 43–54.
3. Larkin, E.V. A method for estimating the time intervals between transactions in speech-compression algorithms / E.V. Larkin, A.V. Bogomolov, A.N. Privalov // Automatic documentation and mathematical linguistics. – 2017. – Vol. 51, Issue 5. – P. 214–219.
4. Ivutin, A.N. Established Routine of Swarm Monitoring Systems Functioning / A.N. Ivutin, E.V. Larkin, V.V. Kotov // Advances in Swarm and Computational Intelligence. ICSI 2015. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 9141: сб. науч. тр. – Springer, Cham, 2015. – P. 415–422.
5. Ivutin, A.N. Simulation of Concurrent Games in Distributed Systems / A.N. Ivutin, E.V. Larkin, Yu.I. Lutskov // The 5th International Workshop on Computer Science and Engineering (WCSE 2015). – Moscow, Russia, April 15–17, 2015. – P. 60–65.
6. Korolyuk, V. Semi-Markov random evolutions / V. Korolyuk, A. Swishchuk. – Semi-Markov Random Evolutions. Mathematics and Its Applications. Vol 308: сб. науч. тр. – Springer, Dordrecht, 1995. – P. 59–91.
7. Simulation of concurrent process with Petri-Markov nets / E.V. Larkin, Yu.I. Lutskov, A.N. Ivutin, A.S. Novikov // Life Science Journal. – 2014. – Vol. 11, no. 11. – P. 506–511.
8. Larkin, E. Data buffering in information-measuring system / E. Larkin, A. Bogomolov, A. Privalov // 2-nd International Ural conference on measurements (UralCon). – Chelyabinsk, 2017. – P. 118–123.
9. Shiryayev, A.N. Probability / A.N. Shiryayev. – Springer, New York, NY, 1996. – 623 p.
10. Cleaveland, R. Strategic directions in concurrency research / R. Cleaveland, S. Smolka // ACM Computing Surveys (CSUR). – 1996. – Vol. 28. – Issue 4. – P. 607–625.
11. Heymann, M. Concurrency and Discrete Event Control / M. Heymann // IEEE Control Systems Magazine. – 1990. – Vol. 10. – Issue 4. – P. 103–112.
12. Valk, R. Concurrency in Communicating Object Petri Nets / R. Valk. – Concurrent Object-Oriented Programming and Petri Nets. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2001: сб. науч. тр. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2001. – P. 164–195.
13. Dijkstra, E.W. Cooperating sequential processes / E.W. Dijkstra // Programming Languages: сб. науч. тр. – Academic Press, London, 1968. – P. 43–112.
14. Larkin, E.V. "Concurrency" in M-L-Parallel Semi-Markov Process / E.V. Larkin, A.N. Ivutin // MATEC Web Conf. – 2017. – Vol. 108. – Article no. 05003.
15. Myerson, R.B. Game theory: analysis of conflict / R.B. Myerson. – Cambridge, London: Harvard University Press, 1997. – 568 p.
16. Chatterjee, K. Simple stochastic parity games / K. Chatterjee, M. Jurdziński, T. Henzinger // Computer Science Logic. CSL 2003. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2803: сб. науч. тр. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. – P. 100–113.
17. Squillante, M.S. Stochastic Analysis and optimization of multiserver systems / M.S. Squillante // Run-time Models for Self-managing Systems and Applications. Autonomic Systems. – Springer, Basel, 2010. – P. 1–25.

Поступила в редакцию 30 мая 2018 г.

SELF-STABILIZING MOBILE MEDICAL ROBOTS SCATTERING ALGORITHM

O.N. Melekhova¹, R.V. Meshcheryakov²

¹ TeDa, Paris, France

² V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

E-mail: meshcheryakov.roman@gmail.com

The paper is devoted to the possibility of determinate and probabilistic scattering under various assumptions of the state of the locations of medical robots in both fault-tolerance and vulnerable environments. The topicality of the work is due to the need to place medical robots in the coordinate space having disjoint polygons (robot bodies) which is absolutely unacceptable in the case of medical applications. As a limitation it is assumed that the medical robot sees its nearest neighbors and local monitor of multiplicity is functioning, which can determine the situation when robots occupy intersecting spaces. We propose a probabilistic scattering algorithm which describes the initial states of medical robots and the proper transient state algorithm which can predict the movement of robots to a location where they can intersect. It is shown, that when using the algorithm the states and motion algorithms can be estimated in a fault-tolerance (robots do not fail and the medium is stationary) and vulnerable (the robot may fail and the byzantine problem is not solved, the environment changes faster than the robot can react) environments. The estimates for the computational complexity of the algorithm working without the mission planner are given.

Keywords: mobile medical robots; fault-tolerance; probabilistic scattering; self-stabilization.

Introduction

In recent years, centralized sophisticated and expensive medical robots gave way to distributed systems of mobile autonomous and cheap medical robots [1–3]. The rise of distributed systems was based on two main reasons:

1. The lower cost of uniform medical robots compared to centralized ones. For example, now there are polymorphic medical robots which consist of a network of low cost simple medical robots that are able to reorganize themselves into a single complex medical robot [4]).

2. The simplicity of uniform medical robots. Indeed, it may be advantageous to use a group of simple small and relatively cheap medical robots in some instances of cooperative work. For example, application of medical robot networks in hazardous or harsh environments, such as space, great depths of seas, or after some natural or man caused disasters, etc. It follows that the group should be able to reorganize themselves without any prior infrastructure or after a major disaster occurred.

On the other hand, as the systems of cheap, simple and relatively weak medical robots are not reliable we can face the problem of possible failures, especially when such medical robot systems are expected to operate in hazardous or harsh environments. At the same time, one of the main advantages of mobile medical robot systems is the possibility to correctly execute a given task even in case of faults. This is possible due to redundancy of such systems [5]. Another problem of these systems is a complexity of coordination which appears because of the large medical robot networks. Due to simplicity of medical robots algorithm they follow must be simultaneously self-organized fault-tolerant and distributed.

Another important task that has been studied to a lesser extent is that of scattering. In this task, the medical robots must start from any initial configuration, and then scatter on the positions, not fixed in advance, such that no two medical robots occupy the same position.

To study the scattering problem, we consider the ATOM system model first defined by Suzuki and Yamashita [6]. In this model, medical robots are represented as points that evolve on the plane. At any given time, a medical robot can be either idle or active. In the latter case, the medical robot observes the

locations of other medical robots, computes a target position, and moves towards it. In our case we have a partially blind medical robot meaning that the medical robot has the capability of detecting the position of its nearest neighbor. Hereinafter, we use the term of visibility of nearest neighbor to express the sense of "partially blind". The time when a medical robot becomes active is governed by an activation daemon (scheduler). In the original definition of Suzuki and Yamashita, called the ATOM model, activations (i.e., look-compute-move) are atomic, and the scheduler is assumed to be arbitrary and distributed, meaning that at each configuration, an arbitrary (non-empty) subset of enabled medical robots is activated. In the CORDA model of Prencipe [7], activations are completely asynchronous, for instance allowing medical robots to be seen while moving.

Model

Medical robots networks

We consider a network of n autonomous mobile medical robots, denoted by $r_1; \dots; r_n$, arbitrarily deployed in a two-dimensional unbounded plane. The medical robots are viewed as points, and they are capable to freely move in the plane. The medical robots never collide and two or more medical robots may simultaneously occupy the same physical position. The medical robots are devices with sensing, computational and motion capabilities. The medical robots are devoid of any common orientation and any means of explicit communication. Communication occurs in a totally implicit manner, by observing other medical robots' position. Each medical robot has its own local coordinate system (e. g., Cartesian).

The medical robots are uniform, it means that they all execute the same algorithm. The medical robots are anonymous. They cannot be distinguished by their appearance and they do not have any kind of identifiers that can be used during the computation. The medical robots are oblivious, meaning that they do not remember any previous observation nor computations performed in the previous steps.

In this paper, we consider that medical robots have complementary capabilities:

1. *Visibility of nearest neighbor* – each medical robot can only observe the position of its nearest neighbor.
2. *Local multiplicity detector* – a medical robot can distinguish if there are more than one medical robot at the current position.

This model is more adapted to systems where the visibility is replaced by wireless communication or radar detection.

Summarizing, the medical robots are uniform, anonymous, oblivious, and endowed with capabilities of local multiplicity detection and visibility of nearest neighbor; they are devoid of any orientation.

Medical robot computation cycle. Each medical robot repeatedly cycles through the following states:

- *Look*. The medical robot observes the world and returns a snapshot of the positions of all other medical robots in the visibility range with respect to its local coordinate system. In our case, this observation returns the value of the distance between the medical robot and its nearest neighbor.
- *Compute*. The medical robot performs a local computation to a probabilistic algorithm A. The algorithm is the same for all medical robots and the result of the computed state is a destination point.
- *Move*. The medical robot moves towards the computed destination. It can be stopped anywhere before the destination by the scheduler after some predefined distance has been traversed.

Computational model

The literature proposes two computational models: ATOM and CORDA. The ATOM model was introduced by Suzuki and Yamashita [6]. In this model, each medical robot performs the actions of a computation cycle (observation, computation and motion) once activated by the scheduler in an atomic manner. The execution of the system can be modeled as an infinite sequence of rounds. In a round one or more medical robots are activated and perform a computation cycle. In every single activation, the distance that medical robot r_i can travel in one cycle is bounded by $\delta_{ri} > 0$. Specifically, if the destination point computed at a given cycle by medical robot r is farther than δ_{ri} , then the algorithm returns a point of at most δ_{ri} . This distance may be different for different medical robots.

The CORDA model was introduced by Prencipe [7]. This model refines the atomicity of actions performed by each robot. Hence, medical robots may perform in a decoupled fashion the atomic actions of a computation cycle. They may be interrupted by the scheduler in the middle of a computation cycle.

In particular, when a medical robot goes towards its goal, the move can end anywhere before the destination. Moreover, while a medical robot performs an action A , where A can be one of the following atomic actions: *wait*, *look*, *compute* or *move*, another medical robot may perform a totally different action B .

Scheduler. A scheduler decides at each configuration the set of medical robots allowed to perform their actions. We distinguish various kinds of scheduler. The arbitrary scheduler is such that at each configuration an arbitrary subset of enabled medical robots is activated. In our case, a medical robot is enabled if it occupies a multiplicity point. A scheduler is fair if, in an infinite execution, a medical robot is activated infinitely often. The probabilistic scheduler guarantees that the probability for medical robot r_i to be activated at time t_j is such that $\lim_{j \rightarrow \infty} Pr[r_i(t_j) = \text{active}] = 1$. A centralized scheduler guarantees that at each configuration a single medical robot is allowed to execute its actions.

In our work we use two hypotheses to assure the termination of scattering procedure:

1. A non-fair scheduler activates a medical robot which is placed on one of multiplicity points, if a medical robot is alone on its position it will be never activated.

Definition 2.1. A multiplicity aware scheduler – a scheduler which activates a medical robot which is placed on one of multiplicity points.

2. A fair scheduler activates a medical robot even if it is alone on its position. In this case, the medical robots have a complementary capability as the local multiplicity detection.

Faults

The ordinary models of medical robot networks are relatively simple and cheap medical robots and, hence, not fail-proof. In addition, hazardous or harsh environments (explosion, theft, crash, etc.) can also affect the fail-proof of medical robots. Thus, it is essential to study distributed networks of autonomous mobile medical robots in the context of faulty medical robots. Our attention focuses on two types of faults:

1. crash failures can happen in two cases:
 - medical robots physically disappear from the network;
 - medical robots stop all their activities, however they are still physically present in the network.

Note. The scheduler activates only non-crashed medical robots in the case of crashed medical robots which are still physically present in the network.

2. Byzantine failures. A Byzantine medical robot [8] might behave in arbitrary and unforeseeable ways. To prevent correct medical robots to disperse on the plan, a Byzantine medical robot chooses, by vision, one or more medical robots on the same multiplicity point and go at the same position.

Scattering problem

In the following we formally define the scattering problem. The Scatter problem is considered solved when no two medical robots occupy the same position [9, 10]. A system of n autonomous mobile medical robots solves the scattering problem if any execution of the system verifies the following properties:

1. Convergence: Regardless of the initial position of the medical robots on the plane, no two medical robots are eventually located at the same position.
2. Closure: Starting from a configuration where no two medical robots are located at the same position, no two medical robots are located at the same position thereafter.
3. Termination: Starting from any configuration the scattering procedure is finite when no two medical robots are located at the same position.

Lemma. Termination of scattering is impossible without additional assumptions.

Proof. During an execution of scattering procedure without additional assumptions, the medical robots never stop moving. A scheduler activates a medical robot even if it is alone on its position. The medical robots have no ability to detect number of medical robots on the same position and, even if no two medical robots are located at the same position, to stop. So, execution of scattering procedure must be infinite.

Note. Petit and Dieudonné [10] proved that there does not exist a deterministic algorithm that solves the scattering problem in ATOM model, even if the medical robots have the localization knowledge or are able to detect the multiplicity.

If the faults are present (crash or Byzantine medical robots) in the system we can have a situation where several faulty medical robots can be on the same multiplicity point, so, the scattering of medical robots is impossible in the general sense. But to avoid this situation we consider that the scattering problem has a solution for the correct medical robots. For that we introduce a following definition:

Definition. The weak scattering problem consists in providing scattering of correct medical robots.

By definition [11] a self-stabilizing system is a system that will end in a correct state after a finite number of execution steps regardless of the initial states of the computing units. So, an algorithm is self-stabilizing if it solves the scattering problem with oblivious or stateless medical robots [12].

Probabilistic scattering algorithm

In this section we present a probabilistic self-stabilizing algorithm for the scattering problem. In general, r denotes a medical robot in the system, $p(r)$ is used to represent the point in the plane occupied by that robot. A configuration of the medical robots at given time t ($t > 0$) is the set of positions in the plane occupied by the medical robots at time t : $P(t) = \{p_1; \dots; p_n\}$.

We consider that medical robots move according to a local coordinate system (i.e. the axes and the distances may be specific to each robot). The local coordinate system makes use of possible distances and directions. We consider the set $A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$ as the set of possible distances in the plane. The set A contains k elements, $k > 0$; $k \in \mathbb{N}$. The set $B = \{b_1; b_2; \dots; b_d\}$ is the set of possible directions which contains d elements, $d > 0$; $d \in \mathbb{N}$. Thus, we have the set of kd pairs $(a_i; b_j)$ – the set of possible destination points in the plane.

Lemma. Termination of scattering procedure in fault-free systems is possible with additional assumptions.

Proof. We can get a termination for the scattering procedure in fault-free systems in two cases.

Case 1. Under a non-fair multiplicity aware scheduler (which activates a medical robot locating on one of multiplicity points).

A non-fair scheduler can choose the same set of medical robots at each activation, so, the scattering problem has no solution. If we apply an additional assumptions that a non-fair scheduler activates only medical robots which are placed on a multiplicity point, thus, gradually we reduce number of multiplicity points (at moment of activation each medical robot is obliged to move on other position). So, execution of scattering procedure is finite.

Case 2. Under a fair scheduler which activates a medical robot even if it is alone on its position with multiplicity detection capability of medical robots.

In [10], the authors apply a fair scheduler and note the necessity of multiplicity detection capability to ensure the termination of scattering procedure. During an execution of scattering procedure without additional assumptions, the medical robots never stop moving. Because they have no ability to detect number of medical robots on the same position and, even if no two medical robots are located at the same position, to stop. So, execution of scattering procedure must be infinite.

But multiplicity detection allows the medical robots to stop if there exists no position with more than one robot. So, execution of scattering procedure can be finite. In fault-free systems we can apply both cases for the termination of scattering procedure.

Systems under an arbitrary multiplicity aware scheduler

In this section, we consider a system of medical robots with visibility of nearest neighbor under an arbitrary multiplicity aware scheduler.

At the time of activation, the multiplicity aware scheduler activates a medical robot which is placed on a multiplicity point. This medical robot detects its nearest neighbor by vision and it builds its movement circle by taking the half of the distance between itself and its neighbor. Then, it chooses a position with a probability within its movement circle and it moves towards the chosen position.

A medical robot r_1 has the capability of viewing its nearest neighbor – he detects the medical robot r_2 its nearest strict neighbor ($p(r_1) \neq p(r_2)$). It estimates the value of distance between them as β_{r_1} . Then, the medical robot r_1 takes the half of this distance β_{r_1} to build its movement circle with radius $\beta_{r_1}/2$. It moves at distance a_i which is chosen with probability $1/k$ and a direction b_j which is chosen with prob-

ability $1/d$. The destination coordinates are bounded by the movement circle: $(\varepsilon_{min}; \beta_{r1}/2)$, where $\varepsilon_{min} > 0$.

Definition The movement circle of medical robot r is a set of points in the circle with radius $(\varepsilon_{min}; \beta_{r1}/2)$, where β_{r1} is value of distance between medical robot r and its nearest strict neighbor; where $\varepsilon_{min} > 0$ and ε_{min} can be different for every computation cycle.

Algorithm 1. Probabilistic scattering for medical robot r .

Function:

compute nearest distance :: returns the distance β_{r1} between r and a nearest neighbor r' .

A_1 ::

compute nearest distance () and medical robot r chooses a position p_j with probability $1/kd$ (k – distance; d – direction) and move from current position p_i towards the chosen position p_j where $p_i \neq p_j$ within $Circle_{r2} \in (\varepsilon_{min}; \beta_{r1}/2)$.

Lemma. No two medical robots which are nearest neighbors choose the same destination point.

Proof. Consider a system of two medical robots r_1 and r_2 , so, they are nearest neighbors. The value of distance between medical robot r_1 and r_2 is β . By algorithm 1 each of the medical robots builds its movement circle by taking half of the distance between itself and its neighbor. The medical robot r_1 has its movement circle: $Circle_{r1} \in (\varepsilon_{min}; \beta/2)$, and respectively for medical robot r_2 : $Circle_{r2} \in (\varepsilon_{min}; \beta/2)$. So, the movement circles of medical robots have one point of intersection on the border of circles. But the medical robots can move within their movement circles and not on the border of circles. So, they can not choose the same destination because the medical robots have not a sector of intersection.

Definition. Legitimate configuration:

$\forall r_i; local\ multiplicity\ detection(position[r_i]) = 1$.

Lemma (Closure). Started in a legitimate configuration the system verifies the closure property.

Proof. The medical robot r will be activated if it is on a multiplicity point:

local multiplicity detection ($position[r]$) > 1 .

If medical robot r is alone at its position it will be never activated.

Lemma (Convergence). For any time t_z and for every pair of medical robots $(r_i; r_j)$ such that $p(r_i) = p(r_j)$. By executing scattering algorithm, we have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Pr[p_i(t_z) \neq p_j(t_z)] = 1.$$

Proof. If medical robots occupying the same position at the instant of activation do not choose the same destination, the condition of convergence is accomplished.

The probability that n medical robots choose the same destination tends to zero when the number of rounds tends to infinity:

$$\Pr[p_i(t_z) = p_j(t_z)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(kd)^{n-1}} \right)^x = 0,$$

where x is the number of rounds of execution.

Consider two medical robots r_1 and r_2 which occupy the same position in the initial configuration.

The probability that the medical robot r_1 chooses a distance among k -elements is $1/k$ (respectively for r_2). The probability that two medical robots r_1 and r_2 choose the same distance is upper bounded by $k/k^2 = 1/k$. It's the same for direction. The probability that two medical robots r_1 and r_2 choose the same element of direction among d -elements is upper bounded by $1/d$. The choice of the two medical robots are independent, so, $Pr[choice\ r_1 \cap choice\ r_2] = 1/kd$.

The probability that two medical robots choose the same destination tends to zero if $x \rightarrow \infty$, where x is the number of rounds of execution.

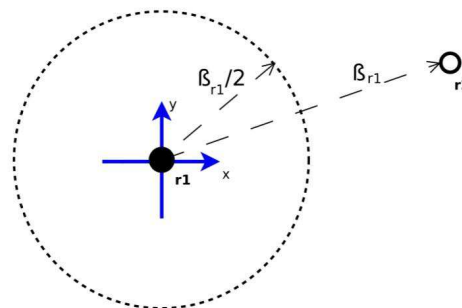


Fig. 1. Watts – Radius detection of the movement circle

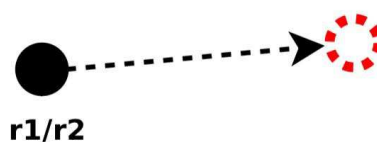


Fig. 2. Two medical robots occupying the same position at the instant of activation

Lemma. Algorithm 1 converges in $n-1+\frac{1}{kd-1}$ rounds under an arbitrary scheduler with multiplicity detection assumption.

Proof. The scheduler activates only the medical robots with strict multiplicity. That is a medical robot alone on its position is not activated.

Consider a system with n medical robots and let $X_t = k$ be the stochastic process shown in fig. 3: at round t there are k medical robots at the same position and $n-k$ medical robots with different positions.

In the worst case, all the n medical robots are initially placed on the same point, $X_0 = n$. We should compute the time needed for the stochastic process to reach 1 (all the medical robots have different positions). Note that in a particular configuration the scheduler may activate all the medical robots on the same multiplicity point at the same time and all of them may choose the same destination. Let T_b^e be the expectation time for the Markov chain defined above to reach state e starting from state b . Formally,

$$T_b^e = E[\min\{t, \text{such that } X_t = e \text{ knowing } X_0 = b\}].$$

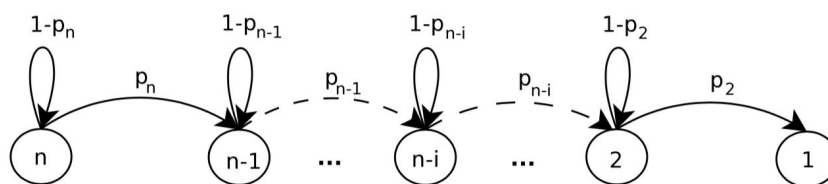


Fig. 3. Time of convergence in the worst case

It follows that the convergence time of Algorithm is T_n^1 computed below.

$$T_n^1 = 1 + p_n T_{n-1}^1 + (1 - p_n) T_n^1,$$

where $p_n = 1 - \frac{1}{(kd)^{-1}}$ – probability not to choose the same destination.

$$\begin{aligned} T_n^1 &= 1 + p_n T_{n-1}^1 + T_n^1 - p_n T_n^1, \\ 1 &= p_n (T_{n-1}^1 - T_n^1), \\ T_n^1 - T_{n-1}^1 &= \frac{1}{p_n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(kd)^{n-1}}} = 1 + \frac{1}{(kd)^{n-1} - 1}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{cases} T_n^1 - T_{n-1}^1 = 1 + \frac{1}{(kd)^{n-1} - 1}, \\ T_{n-1}^1 - T_{n-2}^1 = 1 + \frac{1}{(kd)^{n-2} - 1}, \\ \vdots \\ T_2^1 - T_1^1 = 1 + \frac{1}{kd - 1}. \end{cases}$$

So,

$$T_n^1 = (n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(kd)^i - 1}.$$

If $kd \geq 2$, so

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(kd)^i - 1} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kd}\right)^{i-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kd}\right)^{i-1} = \frac{(kd)^{n-1} - 1}{(kd)^{n-2}(kd-1)},$$

$$T_n^1 = (n-1) + \frac{(kd)^{n-1} - 1}{(kd)^{n-2}(kd-1)}.$$

We can bound the equation: $\frac{(kd)^{n-1} - 1}{(kd)^{n-2}(kd-1)}$

$$\frac{(kd)^{n-1} - 1}{(kd)^{n-2}(kd-1)} < \frac{kd}{kd-1},$$

$$\frac{(kd)^{n-1} - 1}{(kd)^{n-2}} \leq kd,$$

$$(kd)^{n-1} - 1 \leq (kd)^{n-1},$$

$$-1 \leq 0,$$

$$T_n^1 = (n-1) + \frac{1}{kd-1}.$$

The algorithm converges in $n-1 + \frac{1}{kd-1}$ rounds.

Note that we studied the time of convergence of Algorithm 1 in a discrete space. In a continuous space the set of possible destinations for every medical robot tends to infinity. For k -distances choices $\rightarrow \infty$ and for d -directions choices $\rightarrow \infty$, the fraction $\frac{1}{kd-1}$ tends to 0. It follows that the convergence time tends to $n-1$ rounds.

Lemma. Algorithm 1 converges in $n-1$ steps under a centralized scheduler with multiplicity detection assumption.

Proof. A centralized scheduler activates the medical robots on multiplicity points one by one. The probability that the activated medical robot reaches a singularity position after it completes its move operation is 1.

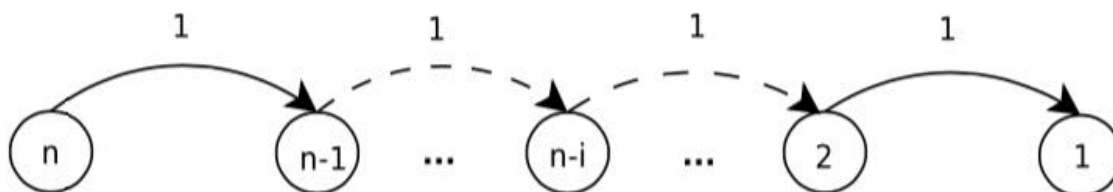


Fig. 4. Time of convergence in the best case

The convergence time is $(n-1)$ steps.

Lemma 4.7. Algorithm 1 converges on average in $\log_{kd} n$ rounds under an arbitrary multiplicity aware scheduler.

Proof. Consider a system of n medical robots. A scheduler activates the non empty subset of medical robots which are placed on the multiplicity points. If a medical robot is alone on its position it will be never activated. At the moment of activation a medical robot chooses with probability $1/kd$ its future position, where k – number of elements of possible distances and d – number of elements of possible directions.

Consider that all n medical robots are initially placed on the same point p_0 . The scheduler activates the medical robots. The probability that at least one medical robot chooses the position p_x (a pair $(a_i; b_j)$ is the position p_x in the plane) is $n = kd$. The probability that after i -rounds on the position p_x remains no more than one medical robot is $n/(kd)^i$. So, the average convergence time is $\log_{kd} n$. If $kd \rightarrow \infty$ the average convergence time equal to 1.

The number of rounds is $i = \frac{\log n}{\log kd}$:

$$\begin{aligned} \frac{n}{(kd)^i} &= 1, \\ n &= (kd)^i, \\ \log n &= i \log kd, \\ i &= \frac{\log n}{\log kd}. \end{aligned}$$

Note. The convergence time with the same assumptions as in Lemma is $\log_4 2$.

Systems under a fair scheduler

In this section we consider a system of medical robots with nearest neighbor visibility under a fair scheduler which activates a medical robot even if it is alone on its position. In this case, the medical robots possess complementary capability as the local multiplicity detection to assure the termination of scattering procedure.

A system of n autonomous mobile medical robots solves the scattering problem if any execution of the system verifies the following properties:

1. Convergence: regardless of the initial position of the medical robots on the plane, no two medical robots are eventually located at the same position.
2. Closure: starting from a configuration where no two medical robots are located at the same position, no two medical robots are located at the same position thereafter.
3. Termination: starting from any configuration the scattering procedure is finite when no two medical robots are located at the same position.

In Lemma we proved that the termination is possible in the systems of medical robots with capability of local multiplicity detection under a fair scheduler.

At the time of activation, the scheduler activates a medical robot even if it is alone on its position. This medical robot verifies the multiplicity. If the medical robot distinguishes more than one medical robot on its position it executes the algorithm 1, else it does not move. Executing algorithm 1 the medical robot detects its nearest neighbor by vision and it builds its movement circle by taking the half of the distance between itself and its neighbor. Then, it chooses a position with a probability within its movement circle and it moves towards the chosen position.

A medical robot r_1 has the capability of viewing its nearest r neighbor – he detects the medical robot r_2 its nearest strict neighbor ($p(r_1) \neq p(r_2)$). It estimates the value of distance between them as β_{r_1} .

Then, the medical robot r_1 takes the half of this distance β_{r_1} to build its movement circle with radius $\beta_{r_1}/2$. It moves at distance a_i which is chosen with probability $1/k$ and a direction b_j which is chosen with probability $1/d$. The destination coordinates are bounded by the movement circle: $(\varepsilon_{min}; \beta_{r_1}/2)$, where $\varepsilon_{min} > 0$.

Algorithm 1. Probabilistic scattering for medical robot r .

Function:

local multiplicity detection :: local multiplicity detection.

compute nearest distance :: returns the distance β_r between r and a nearest neighbor r' .

A1 ::

if *local multiplicity detection* () > 1;

then compute nearest distance () and medical robot r chooses a position p_j with probability $1/kd$ (k – distance; d – direction) and move from current position p_i towards the chosen position p_j where $p_i \neq p_j$ within $Circle_{r_2} \in (\varepsilon_{min}; \beta_{r_1}/2)$.

else do not move.

Lemma (Convergence) are true for this case, because, in these Lemmas we do not use any assumptions of scheduler.

Lemma (Closure) Started in a legitimate configuration the system verifies the closure property.

Proof. Each medical robot has a complementary capability as local multiplicity detection. At the moment of activation a medical robot verifies legitimate configuration. If local multiplicity detection ($position[r] > 1$) then this medical robot chooses a new position with probability $1/kd$ (k – distance, d – direction) and move towards it, else it does not move.

The time of convergence in the case of arbitrary multiplicity aware scheduler is better than in the case of fair scheduler, because, an arbitrary multiplicity aware scheduler activates the medical robots of multiplicity points whereas a fair scheduler activates a medical robot even if it is alone on its position.

Note. The time of convergence in the case of multiplicity aware scheduler is better than in the case of fair scheduler, because, a multiplicity aware scheduler activates the medical robots of multiplicity points whereas a fair scheduler activates a medical robot even if it is alone on its position.

The goal of our research is to define minimal capabilities of theoretical medical robots for solving the scattering problem in both fault-free and fault-prone systems. We proposed a probabilistic self-stabilizing algorithm for the scattering problem. As far as we know, this is the first attempt to solve scattering in fault-prone environments [13, 14].

The given paper is completed with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the limits of the project part of the state assignment of TUSUR in 2017 and 2019 (project 2.3583.2017) and science school (№ NSH-3070.2018.8).

In conclusion, the authors are pleasant sincere gratitude to Professor A.V. Bogomolov for his hearts discussion of the on problem of medical device and equipment in the framework of medical and biological research and congratulate him on anniversary.

References

1. Kukushkin Yu.A., Bogomolov A.V., Guziy A.G. Principles of construction of the life-performance system of "man-machine" system operators adaptive to their functional state. *Mechatronics, automation, control*, 2005, no. 3, pp. 50–54. (in Russ.).
2. Goryachkina T.G., Ushakov I.B., Evdokimov V.I., Bogomolov A.V. Methodical and Methodological Recommendations for Inventors of Innovations Aimed at Assessing the Functional State of A Human Operator. *Journal Technologies of Living Systems*, 2006, Vol. 3, no. 3, pp. 33–38. (in Russ.).
3. Bogomolov A.V., Kukushkin Yu.A. Personalized monitoring automation of the labor conditions. *Automation. Modern technologies*, 2015, no. 3, pp. 6–8. (in Russ.).
4. Shen W.-M., Krivokon M., Chiu H., Everist J., Rubenstein M., Venkatesh J. Multimode locomotion for reconfigurable robots. *Autonomous Medical robots*, 2006, Vol. 20, Issue 2, pp. 165–177. DOI: 10.1007/s10514-006-6475-7
5. Efrima A., Peleg D. Distributed models and algorithms for mobile robot systems. *SOFSEM 2007: Theory and Practice of Computer Science. SOFSEM 2007. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4362, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 70–87. DOI: 10.1007/978-3-540-69507-3_5
6. Suzuki I., Yamashita M. Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns. *SIAM J. Comput.*, 1999, Vol. 28, Issue 4, pp. 1347–1363. DOI: 10.1137/S009753979628292X
7. Principe G. Corda: Distributed coordination of a set of autonomous mobile robots. *Proceeding of fourth European research seminar on advances in distributed systems (ERSADS 2001)*, Bertinoro, Italy, mai 2001, pp. 185–190.
8. Agmon N., Peleg D. Fault-tolerant gathering algorithms for autonomous mobile robots. *SIAM J. Comput.*, 2006, Vol. 36, Issue 1, pp. 56–82. DOI: 10.1137/050645221
9. Suzuki I., Yamashita M. *A theory of distributed anonymous mobile robots – formation problems. Technical report*, Department of Electrical Engineering and Computer Science University of Wisconsin, jul 1994.
10. Dieudonné Y., Petit F. *Scatter of weak robots. CoRR*, 2007. <http://arxiv.org/abs/cs/0701179>

11. Dijkstra E.W. Self-stabilizing systems in spite of distributed control. *Communications of the ACM*, 1974, Vol. 17, no. 11, pp. 643–644. DOI: 10.1145/361179.361202
12. Dolev S. *Self-Stabilization*. MIT Press, 2000, 208 p.
13. Gorbunov I.V., Zaitsev A.A., Meshcheryakov R.V., Hodashinsky I.A. A decision support system for prescription of non-medication-based rehabilitation. *Biomedical Engineering*, 2017, Vol. 50, no. 6, pp. 393–397. DOI 10.1007/s10527-017-9663-1
14. Iskhakov A., Meshcheryakov R., Ekhlakov Yu. The internet of things in the security industry. *Interactive Systems: Problems of Human-Computer Interaction: collection of scientific papers*, 2017, pp. 161–168.

Received June 9, 2018

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 41–51*

УДК 51-7, 004.072

DOI: 10.14529/mmph180305

АВТОСТАБИЛИЗИРУЮЩИЙСЯ АЛГОРИТМ СХОЖДЕНИЯ МОБИЛЬНЫХ МЕДИЦИНСКИХ РОБОТОВ

О.Н. Мелехова¹, Р.В. Мещеряков²

¹ ТеДа, Париж, Франция

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Российская Федерация
E-mail: meshcheryakov.roman@gmail.com

Работа посвящена возможности детерминированного и вероятностного рассеяния при различных предположениях состояния местоположения медицинских роботов как в безотказной, так и в уязвимой среде. Актуальность работы обусловлена необходимостью размещения медицинских роботов в пространстве координат, имеющие непересекающиеся полигоны (тела роботов), что в случае медицинских приложений абсолютно недопустимо. В качестве ограничений приняты предположения, что медицинский робот видит ближайших соседей и функционирует локальный монитор множественности, который может определять ситуацию, когда роботы занимают пересекающиеся места в пространстве. Предлагается алгоритм вероятностного рассеяния, описывающий исходные состояния медицинских роботов и собственно алгоритм переходных состояний, которые может прогнозировать движение роботов в местоположение, где они могут пересекаться. Показывается, что при использовании алгоритма могут быть оценены состояния и алгоритмы движения как в безотказной среде (роботы не выходят из строя и среда стационарна), так и в уязвимой среде (робот может выйти из строя, не решена Византийская проблема, среда меняется быстрее, чем робот может реагировать). Также приведены оценки по вычислительной сложности алгоритма, работающего без планировщика миссий.

Ключевые слова: робот; медицинский робот; алгоритм; вероятностное рассеяние; автостабилизация.

Литература

1. Кукушкин, Ю.А. Принципы построения систем обеспечения жизнедеятельности операторов систем «человек-машина», адаптивных к их функциональному состоянию / Ю.А. Кукушкин, А.В. Богомолов, А.Г. Гузий // Мехатроника, Автоматизация, Управление. – 2005. – № 3. – С. 50–54.
2. Методико-методологические рекомендации авторам инноваций по диагностике функционального состояния человека-оператора / Т.Г. Горячкина, И.Б. Ушаков, В.И. Евдокимов, А.В. Богомолов // Технологии живых систем. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 33–38.
3. Богомолов, А.В. Автоматизация персонифицированного мониторинга условий труда / А.В. Богомолов, Ю.А. Кукушкин // Автоматизация. Современные технологии. – 2015. – № 3. – С. 6–8.

4. Multimode locomotion for reconfigurable robots / W.-M. Shen, M. Krivokon, H. Chiu *et al.* // Autonomous Medical robots. – 2006. – Vol. 20. – Issue 2. – P. 165–177.
5. Efrima, A. Distributed models and algorithms for mobile robot systems / A. Efrima, D. Peleg // SOFSEM 2007: Theory and Practice of Computer Science. SOFSEM 2007. Lecture Notes in Computer Science, vol. 4362. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. – P. 70–87.
6. Suzuki, I. Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns / I. Suzuki, M. Yamashita // SIAM J. Comput. – 1999. – Vol. 28. – Issue 4. – P. 1347–1363.
7. Prencipe, G. Corda: Distributed coordination of a set of autonomous mobile robots / G. Prencipe // Proceeding of fourth European research seminar on advances in distributed systems (ERSADS 2001): сб. науч. тр. – Bertinoro, Italy, mai 2001. – P. 185–190.
8. Agmon, N. Fault-tolerant gathering algorithms for autonomous mobile robots / N. Agmon, D. Peleg // SIAM J. Comput. – 2006. – Vol. 36. – Issue 1. – P. 56–82.
9. Suzuki, I. A theory of distributed anonymous mobile robots – formation problems / I. Suzuki, M. Yamashita // Technical report, Department of Electrical Engineering and Computer Science University of Wisconsin, jul 1994.
10. Dieudonné, Y. Scatter of weak robots / Y. Dieudonné, F. Petit // CoRR. – 2007. <http://arxiv.org/abs/cs/0701179>
11. Dijkstra, E.W. Self-stabilizing systems in spite of distributed control / E.W. Dijkstra // Communications of the ACM. – 1974. – Vol. 17. – Issue 11. – P. 643–644.
12. Dolev, S. Self-Stabilization / S. Dolev. – MIT Press, 2000. – 208 p.
13. Горбунов И.В., Зайцев А.А., Мещеряков Р.В., Ходашинский И.А. Система поддержки принятия решений при назначении комплексов немедикаментозной реабилитации / И.В. Горбунов, А.А. Зайцев, Р.В. Мещеряков, И.А. Ходашинский // Медицинская техника. – 2016. – Т. 50, № 6 (300). – С. 23–26.
14. Iskhakov A. The internet of things in the security industry / A. Iskhakov, R. Meshcheryakov, Yu. Ekhlakov // Interactive Systems: Problems of Human-Computer Interaction: сб. науч. тр. – 2017. – С. 161–168.

Поступила в редакцию 9 июня 2018 г.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

К.М. Расулов, Ш.С. Ханкишиева

Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация

E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Рассматривается краевая задача типа задачи Римана (задача сопряжения) в классах кусочно квазигармонических функций. Подробно исследуется однородная задача типа задачи Римана в классах кусочно квазигармонических функций второго рода в круговых областях. В частности, в указанном случае для однородной задачи типа задачи Римана разработан явный метод решения, логическая суть которого состоит в сведении решения рассматриваемой однородной задачи к последовательному решению обычной однородной задачи Римана для аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера второго порядка. Кроме того, установлена неустойчивость решений искомой однородной задачи по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой круговой области, а также построена полная картина её разрешимости при различных значениях индекса задачи и величины радиуса круговой области. Доказано, что основной причиной неустойчивости решений однородной задачи типа Римана в классах кусочно квазигармонических функций второго рода в круговых областях по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой круговой области является тот факт, что число линейно независимых аналитических решений однородных дифференциальных уравнений Эйлера, к которым редуцируется исследуемая задача типа Римана, существенно образом зависит от величины радиуса рассматриваемой круговой области.

Ключевые слова: краевая задача типа Римана; кусочно квазигармоническая функция; дифференциальное уравнение Эйлера; круговые области; радиус круговой области.

1. Постановка задачи. Рассмотрим на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область T^+ , ограниченную замкнутым гладким контуром L , причем для определенности будем считать, что точка $z = 0$ принадлежит T^+ . Пусть $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

В дальнейшем в основном будем пользоваться определениями и обозначениями, принятыми в работе [1].

В работе [1] была сформулирована краевая задача типа задачи Римана (короче, задача ρ_n) в классе кусочно квазигармонических функций произвольного рода n .

Из результатов [1; 2] следует, что если носителем краевых условий является окружность $L_r = \{t : |t| = r\}$, $r > 0$, то задача ρ_n допускает решение в явном виде. Основной целью настоящей заметки является установление неустойчивости решения однородной задачи ρ_n^0 в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ по отношению к изменению величины радиуса r , причем ради краткости далее ограничиваемся рассмотрением случая $n = 2$, т. е. исследованием задачи ρ_2^0 .

2. О явном решении задачи ρ_2^0 в круговых областях. Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $L_r = \{t : |t| = r\}$, $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$. Далее рассматривается следующая задача ρ_2^0 : требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ второго рода с линией скачков L_r , принадлежащие классу $\mathcal{Q}_2(T_r^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$ и удовлетворяющие на L_r условию

$$W^+(t) = G(t)W^-(t), \quad (1)$$

где $G(t)$ – заданная на L_r функция, $G(t) \in H(L_r)$ и $G(t) \neq 0$ на L_r .

Поскольку (см. [1; 2]) при $n=2$ квазигармонические функции $W^+(z)$ и $W^-(z)$ можно представить соответственно в виде

$$W^+(z) = \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \varphi^+(z), \quad (2)$$

$$W^-(z) = \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \varphi^-(z), \quad (3)$$

где $\varphi^\pm(z) \in A(T_r^\pm) \cap H^2(L_r)$, то решения $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ краевой задачи ρ_2^0 будем искать в виде (2) и (3).

В силу того, что на $L_r = \{t : |t| = r\}$ имеет место соотношение $\bar{t} = r^2/t$, то с учетом (2) и (3) краевое условие (1) можно переписать так:

$$\begin{aligned} & t^2 \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - t \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(t) = \\ & = G(t) \left(t^2 \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} - t \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^-(t) \right), \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Psi^\pm(z) = z^2 \frac{d^2 \varphi^\pm(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^\pm(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^\pm(z), \quad z \in T_r^\pm, \quad (5)$$

а $\varphi^\pm(z)$ – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции $W(z)$. Ясно, что функция $\Psi(z) = \{\Psi^+(z), \Psi^-(z)\}$ является кусочно аналитической функцией с линией скачков $L_r = \{t : |t| = r\}$. С помощью функций (5) краевое условие (4) можно записать в виде

$$\Psi^+(t) = G(t) \Psi^-(t), \quad t \in L_r, \quad (6)$$

где $\Psi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Psi^\pm(z)$.

Таким образом, получили однородную краевую задачу Римана (6) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Psi(z) = \{\Psi^+(z), \Psi^-(z)\}$ (см., например, [3, с. 106]).

В случае $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ (см., например, [3, с. 110]) краевая задача (6) неразрешима (т. е. имеет лишь тривиальное решение $\Psi^\pm(z) \equiv 0$). Если же $\chi \geq 0$, то задача (6) безусловно разрешима и её общее решение можно задавать формулой:

$$\Psi^\pm(z) = X^\pm(z) P_\chi(z), \quad z \in T_r^\pm, \quad (7)$$

где $X(z) = \{X^+(z), X^-(z)\}$ – каноническая функция задачи, а $P_\chi(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_\chi z^\chi$ – произвольный многочлен степени не выше χ .

Предположим, что $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$. Тогда $\Psi^\pm(z) \equiv 0$ и, следовательно, в силу (5) аналитические функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ должны удовлетворять соответственно линейным однородным дифференциальным уравнениям Эйлера 2-го порядка следующего вида:

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r^+, \quad (8)$$

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^-(z) = 0, \quad z \in T_r^-. \quad (9)$$

Допустим, что однородные дифференциальные уравнения Эйлера (8) и (9) разрешимы в классах $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и $A(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ соответственно. Тогда общее решение искомой задачи ρ_2^0 можно найти по формуле

$$W(z) = \begin{cases} \frac{d^2 \hat{\varphi}^+(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\hat{\varphi}^+(z)}{dz} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \hat{\varphi}^+(z), & z \in T_r^+, \\ \frac{d^2 \hat{\varphi}^-(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\hat{\varphi}^-(z)}{dz} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^2 \hat{\varphi}^-(z), & z \in T_r^-, \end{cases} \quad (10)$$

где $\hat{\varphi}^+(z)$ и $\hat{\varphi}^-(z)$ – общие решения дифференциальных уравнений (8) и (9) соответственно.

Если же $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$, то в силу (5) и (7) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ искомой кусочно квазигармонической функции $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ должны удовлетворять соответственно линейным неоднородным дифференциальным уравнениям Эйлера 2-го порядка:

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z) = X^+(z)P_\chi(z), \quad z \in T_r^+, \quad (11)$$

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^-(z) = X^-(z)P_\chi(z), \quad z \in T_r^-. \quad (12)$$

В случае разрешимости неоднородных дифференциальных уравнений (11) и (12) в классах $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и $A(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ соответственно, общее решение исходной задачи ρ_2^0 также можно найти по формуле (10), где $\hat{\varphi}^+(z)$ и $\hat{\varphi}^-(z)$ – общие решения неоднородных дифференциальных уравнений (11) и (12) соответственно.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ и $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, то решение задачи ρ_2^0 в классе $\mathcal{Q}_2(T_r^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$ квазигармонических функций второго рода сводится к решению двух однородных уравнений Эйлера 2-го порядка вида (8) и (9) в классах аналитических функций $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и $A(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ соответственно. Если же $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$ и $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, то решение задачи ρ_2^0 в классе $\mathcal{Q}_2(T_r^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$ квазигармонических функций второго рода сводится к последовательному решению однородной задачи Римана (6) для аналитических функций и двух неоднородных уравнений Эйлера 2-го порядка вида (11) и (12) в классах аналитических функций $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и $A(T^-) \cap H^{(2)}(L)$ соответственно.*

3. О неустойчивости решений задачи ρ_2^0 в круговых областях по отношению к изменению величины радиуса рассматриваемой области. Как видно из формулы (10), при фиксированном значении $\chi = \text{Ind}G(t)$ число линейно независимых (над полем \mathbb{C}) решений однородной краевой задачи ρ_2^0 определяется числом линейно независимых решений однородных дифференциальных уравнений Эйлера (8) и (9).

Далее покажем, что при различных значениях величины радиуса r рассматриваемого круга $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, дифференциальные уравнения (8) и (9) будут иметь различное число линейно независимых (над полем \mathbb{C}) решений, принадлежащих классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$. Для этого, во-первых, покажем, что однородное дифференциальное уравнение (8) будет иметь ненулевые решения, принадлежащие классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, лишь при следующих трех значениях радиуса r : $r = 1$, $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ и $r = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. В самом деле, нетрудно проверить (см. также [4, с. 136]), что общее решение дифференциального уравнения Эйлера (8) задается в виде

$$\varphi^+(z) = C_1 z^{\frac{1+7r^2-\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}} + C_2 z^{\frac{1+7r^2+\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}}, \quad (13)$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Так как функция $\omega_1(r) = \frac{1+7r^2 - \sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}$ принимает целые неотрицательные значения лишь при $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $r=1$ ($\omega_1(\sqrt{2+\sqrt{3}}) = 2$ и $\omega_1(1) = 1$), то при $C_1 \neq 0$ ($C_2 = 0$) функция вида (13) может принадлежать классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ только при $r=1$ или $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Аналогично, функция $\omega_2(r) = \frac{1+7r^2 + \sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}$ принимает целые неотрицательные значения лишь при $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r=1$ (причем $\omega_2(\sqrt{2-\sqrt{3}}) = 2$; $\omega_2(1) = 3$), а значит при $C_2 \neq 0$ ($C_1 = 0$) функция вида (13) может принадлежать классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ лишь при $r=1$ или $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Таким образом, если $r=1$, то общее решение однородного дифференциального уравнения (8), принадлежащее классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, задается в виде

$$\varphi^+(z) = C_1 z + C_2 z^3, \quad (14)$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Если же $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ или $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, то общее решение дифференциального уравнения (8), принадлежащее классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, можно задавать в виде

$$\varphi^+(z) = C z^2, \quad (15)$$

где C – произвольная комплексная постоянная.

Далее методом степенных рядов нетрудно убедиться, что однородное дифференциальное уравнение (9) ни при каком значении параметра $r \in (0, +\infty)$ не имеет нетривиальных решений, принадлежащих классу $A(T_r^-) \cap H^{(2)}(L_r)$.

Таким образом, при $r \neq 1$ и $r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ и $\chi < 0$ однородные дифференциальные уравнения (8) и (9) не имеют ненулевых решений. Значит, в этом случае *однородная задача ρ_2^0 неразрешима* (т. е. она не имеет ненулевых решений).

Если $r=1$ и $\chi < 0$, то исконая однородная задача ρ_2^0 разрешима и ее общее решение зависит от двух произвольных комплексных постоянных. Если же $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ или $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $\chi < 0$, то однородная задача ρ_2^0 также разрешима, но ее общее решение зависит в данном случае лишь от одной произвольной комплексной постоянной.

Предположим теперь, что $\chi \geq 0$. Тогда в силу (5) и (7) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ искомой кусочно квазигармонической функции $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$ должны удовлетворять соответственно линейным неоднородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка вида (11) и (12).

Так как при $r \neq 1$ и $r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ и $\chi \geq 0$ соответствующие (11) и (12) однородные дифференциальные уравнения *неразрешимы* в классах $A(T_r^\pm) \cap H^{(2)}(L_r)$, то (в случае их разрешимости) неоднородные дифференциальные уравнения (11) и (12) будут иметь *единственные* решения. Но поскольку правые части данных дифференциальных уравнений линейно зависят от $\chi+1$ произвольных комплексных постоянных, то в данном случае общие решения этих уравнений будут содержать не более $\chi+1$ произвольных комплексных постоянных. Следовательно, в рассматриваемом случае решение искомой задачи ρ_2^0 также линейно зависит не более чем от $\chi+1$ произвольных комплексных постоянных.

Если $r = 1$ и $\chi \geq 0$, то общее решение соответствующего (11) однородного дифференциального уравнения (8) задается формулой (14). Следовательно, в этом случае общее решение $\hat{\phi}^+(z)$ неоднородного уравнения (11) может линейно зависеть не более чем от $\chi + 3$ произвольных комплексных постоянных. Поэтому (в силу (10)) в этом случае общее решение задачи ρ_2^0 линейно зависит не более чем от $\chi + 3$ произвольных комплексных постоянных.

Если же $r = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ или $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ и $\chi \geq 0$, то общее решение соответствующего (11) однородного уравнения (8) задается формулой (15). Значит, в этом случае общее решение $\hat{\phi}^+(z)$ неоднородного уравнения (11) может линейно зависеть не более чем от $\chi + 2$ произвольных комплексных постоянных. Следовательно, общее решение задачи ρ_2^0 в этом случае также может линейно зависеть не более чем от $\chi + 2$ произвольных комплексных постоянных.

Итак, установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Если $\chi \geq 0$, то для разрешимости однородной задачи ρ_2^0 в классе квазигармонических функций второго рода в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ необходимо и достаточно, чтобы линейные дифференциальные уравнения (11) и (12) были разрешимы в классах функций $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ и $A(T_r^-) \cap H^{(2)}(L_r)$ соответственно. Причем общее решение задачи ρ_2^0 , задаваемое формулой (10), будет линейно зависеть не более чем от l произвольных комплексных постоянных, причем

$$l = \begin{cases} \chi + 1, & \text{если } r \neq 1, r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ \chi + 3, & \text{если } r = 1, \\ \chi + 2, & \text{если } r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}. \end{cases}$$

Если $\chi < 0$ и $r \neq 1, r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$, то однородная задача ρ_2^0 неразрешима.

Если $\chi < 0$ и $r = 1$, то однородная задача ρ_2^0 безусловно разрешима, и её общее решение, задаваемое формулой

$$W(z) = \begin{cases} 6C_2 z - \frac{6\bar{z}(C_1 + 3C_2 z^2)}{1 + z\bar{z}} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)^2 \cdot (C_1 \cdot z + C_2 \cdot z^3), & z \in T_1^+, \\ 0, & z \in T_1^-, \end{cases} \quad (16)$$

линейно зависит от двух произвольных комплексных постоянных C_1, C_2 , т. е. $l = 2$.

Если же $\chi < 0$ и $r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$, то однородная задача ρ_2^0 безусловно разрешима, и её общее решение, задается в виде

$$W(z) = \begin{cases} 2C - \frac{12Cz\bar{z}}{1 + z\bar{z}} + 12 \left(\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)^2 \cdot Cz^2, & z \in T_r^+, \\ 0, & z \in T_r^-, \end{cases}$$

и зависит от одной произвольной комплексной постоянной C , т. е. $l = 1$.

На основании теоремы 2 можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, из этой теоремы следует, что в случае $r = 1$ картина разрешимости задачи ρ_2^0 имеет «резонансный» характер, так как при изменении радиуса круга $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ в пределах интервала $\sqrt{2 - \sqrt{3}} < r < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, именно при $r = 1$, задача ρ_2^0 имеет наибольшее число линейно независимых решений. Аналогичный характер картина разрешимости задачи ρ_2^0 имеет при $r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ и $r = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Наконец, пусть $W(r_1; z)$ и $W(r_2; z)$ – решения задачи ρ_2^0 в областях $T_{r_1}^+ = \{z: |z| < r_1\}$ и $T_{r_2}^+ = \{z: |z| < r_2\}$ соответственно. Как видно из утверждения теоремы 2, если, например, $\chi < 0$, $r_1 = 1$ и $r_2 \in (1; \sqrt{2 + \sqrt{3}})$, то для любого достаточно малого положительного числа ε при условии $|r_2 - r_1| < \varepsilon$ может случиться, что $|W(r_2; z) - W(r_1; z)| > \varepsilon$, так как в рассматриваемом случае $W(r_2; z) \equiv 0$, а $W(r_1; z)$ определяется формулой (16). Значит, решения задачи ρ_2^0 неустойчивы по отношению к изменению границы рассматриваемой круговой области.

Таким образом, из теоремы 2 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие. Решения краевой задачи ρ_2^0 неустойчивы по отношению к изменению границы круговой области.

Литература

1. Расулов, К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода / К.М. Расулов // Известия Смоленского государственного университета, 2015. – № 2/1. – С. 159–168.

2. Расулов, К.М. О краевой задаче типа Римана квазигармонических функций в круге неединичного радиуса / К.М. Расулов, Ш.С. Ханкишиева // Материалы XVII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения». – Смоленск: Издательство СмолГУ, 2016. – Вып. 17. – С. 211–216.

3. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М: Наука, 1977. – 640 с.

4. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

Поступила в редакцию 24 ноября 2017 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 52–58*

DOI: 10.14529/mmph180306

ON THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF THE HOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

K.M. Rasulov, Sh.S. Khankishieva

Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
E-mail: kahrmanr@yandex.ru

We consider the boundary value problem of Riemann type (the conjugation problem) in the classes of piecewise quasiharmonic functions. A homogeneous problem of a Riemann type problem in the classes of piecewise quasiharmonic functions of the second kind in circular domains is studied in details. In particular, in this case a clear solution method is developed for a homogeneous problem of Riemann type, the logical essence of which consists in reducing the solution of the homogeneous problem under consideration to a sequential solution of the common homogeneous Riemann problem for analytic functions and two second-order linear differential Euler equations. Moreover, instability of the solutions of the homogeneous problem is determined with respect to the change in the radius value of the considered circular domain, and a complete picture of its solvability for different values of the index of the problem and the radius of the circular domain is constructed. It is proved that the main reason for the instability of the solutions of a homogeneous problem of Riemann type in classes of piecewise quasiharmonic functions of the second kind in circular domains with respect to the change in the radius value of the considered circular domain is the fact that the number of linear independent analytic solutions of homogeneous differential Euler equations, to which the desired Riemann type problem is reduced, depends

essentially on the radius of the considered circular region. In this paper we use the methods of the theory of functions of a complex variable, the theory of integral equations, and the analytic theory of differential equations.

Keywords: the boundary value problem of Riemann type; piecewise quasiharmonic function; differential equation of Euler; circular domains; radius of a circular domain.

References

1. Rasulov K.M. On the Method of Solution of the Riemann Type Boundary Value Problem in Classes of Quasiharmonic Functions of Arbitrary Genus. *Izvestiya Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2015, no. 2/1, pp. 159–168. (in Russ.).

2. Rasulov K.M., Khankishieva Sh.S. O kraevoy zadache tipa Rimana kvazigarmonicheskikh funktsiy v krugе needi-nichnogo radiusa (On a boundary-value problem of Riemann type of quasiharmonic functions in a circle of a non-unitary radius). *Materialy XVII mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya"* (Proc. XVII international scientific conference "Computer mathematics systems and their applications"), Smolensk, Izdatel'stvo SmolGU Publ., 2016, Issue 17, pp. 211–216. (in Russ.).

3. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).

4. Koddington E.A., Levinson N. *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Theory of Ordinary Differential Equations). Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ., 1958, 474 p. (in Russ.).

Received November 24, 2017

METHODS OF SPEECH AND TEXT DATABASES DEVELOPMENT FOR QA-SYSTEMS

A.L. Ronzhin, A.A. Zaytseva, S.V. Kuleshov, K.V. Nenausnikov

*Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Science,
Saint-Petersburg, Russian Federation
E-mail: ronzhin@ias.spb.su*

The paper is devoted to the problems of question-answer systems development (QA-systems). The subject of the study is discussion of approaches to the automatic filling of the database of the QA-system based on the analysis of the unstructured text sources currently available in the public domain of the Internet.

The analysis reveals that the following ways of implementing QA-systems are distinguished: based on inference for ontologies, rules and syntax, using artificial neural networks.

The methods for automatically search of question-answer pairs based on the structure of sentences and on the basis of associative-ontological analysis has been developed and tested in the research.

The method based on the analysis of the structure of sentences is effective for texts such as lists of frequently asked questions (FAQ), as well as literature texts containing dialogs, direct speech, based on preliminary processing of the text, expressed in the form of a heuristic rule.

The method based on associative-ontological analysis is focused to the class of reference and dictionary texts and is based on the assumption that in the descriptive text there is a sentence (or a group of sentences) containing the main idea of the text. In this case, the title of the text can be considered a question, and this sentence (or a group of sentences) is the answer. We need to make the selection of meaning-generating sentences due to the semantic reduction of the text automation. For this purpose, algorithms of self-referencing are applied based on the associative-ontological approach to the processing of texts in natural language.

For the experimental verification of the possibility of creating an open QA-system based on the automatic collection of question-answer pairs from the Internet, a prototype of a collection module for the database of the QA-system has been developed.

Keywords: question-answer pair; associative-ontological analysis; text; automatic text processing; natural language; speech recognition.

Introduction

The task of automatic speech recognition in real conditions is far from its solution, taking into account the variability of the source of the speech signal and the acoustic noise that harbors the initial sequence of audio segments. In recent years, significant progress has been made in this area and there are commercial voice-independent applications that quite successfully recognize speech in the processing of voice commands (Google maps, Yandex maps), in interactive systems (Siri), in stenographic systems [1]. The accuracy of recognition of speech units in these systems has reached the necessary threshold, so that users begin to trust automatic voice input and think about the transition from the usual means of contact input of information to contactless ones.

The reached success in the field of speech recognition is associated with the development of cloud technologies, which made it possible to use: 1) "large" heterogeneous data for teaching a multi-level hierarchical acoustic language model of language and speech; 2) crowdsourcing technologies for manual processing of a huge volume of training and recognizable audio and text data; 3) distributed computing resources for servicing client voice applications.

The advantageous factors, that reduce the complexity of the task, are the possibility of preliminary tuning to a specific speaker and a relatively small size of the dictionary of recognizable speech units.

Among the possible areas of research contributing to the solution of the problem are the methods with the application of: 1) multichannel recording and processing of audio signals using an array of microphones for filtering audio noise; 2) multi-sensory recording of the process of speech formation using different types of datacom (microphones, laryngophones, video cameras, etc.); 3) biometric analysis of the psychophysiological state of the speaker with the evaluation of speech capabilities and the choice of the most accessible communication channel.

The effectiveness of human-machine interaction is also related to the current state of the operator. In the works [2, 3] the technology of personified monitoring of working conditions of the personnel of industrial enterprises and industries, implemented in the interests of ensuring reliable activity and health preservation, is presented. The general scheme of a personified indicator of working conditions is presented. In the works [4, 5] the analysis of domestic patents for methods and devices for diagnosing the functional state of a human operator has been performed, showing a low innovative ability of inventions, and the forecast of the process of scientific and inventive activity indicates a decrease in the number of inventions in this branch of science and equipment for the next years.

The problem of the variability of speech in the various psychophysiological states of the speaker caused by external factors is less studied and represents the greatest complexity. To study it, it is required to create the speech databases necessary for the subsequent learning of the on-board speech recognition system. But first of all it's important to determine the hardware and software resources that can be allocated for the processing of speech audio. This will determine which generation of speech recognition systems (based on comparison of standards, hidden Markov models, artificial neural networks, etc.) can be launched on the client device.

Given the responsibility of the tasks to be solved with the help of on-board client devices, it is difficult to record training voice databases in real operating conditions. The only option for the introduction of speech technologies is the iterative procedure for the gradual modification of speech training databases, recorded primarily in an artificially recreated acoustic environment. The main steps in the formation of speech databases are: 1) classification, analysis of the amplitude-frequency characteristics of audio noise and the creation of appropriate databases; 2) an analysis of the variability of the speaker's speech caused by audio noise.

It is probably possible to organize the implementation of the first step in conditions closed to real operation. Audio recordings in the second study can be carried out in the laboratory, giving the headphones audio speaker with the specified characteristics. The implementation of additional devices for audio signals recording in real conditions, of course, significantly accelerated the process of solving the problem of noise and variability of the speaker's speech filtering.

Automatic text processing is an integral step in the formation of human-machine speech interfaces. For QA-systems, it is important that the equivalent in sense questions can be recognized as the same question, regardless of the words, style, syntactic interconnections and idioms used. To search or generate an answer to a question, a QA system must have access to some knowledge base that contains information allowing you to formulate a response.

There are two main types of QA-systems: closed-domain or specialized (with a limited thematic area) and open-domain (not limited to a particular subject area). The Open-domain QA-systems work with information in all areas of knowledge, which provides the ability to conduct search in related areas. An open-domain QA-system usually works with several sources of knowledge, in which it searches for answers depending on the class of the given question [6, 7].

The following ways of QA-systems implementing can be distinguished: on the basis of inference on ontologies [8], rules, and syntax [9], using artificial neural networks [10]. Also it is worth noting that there is the availability of approaches to improve the quality of QA-systems based on the user satisfaction score [11].

The system's response should be presented in the form of a phrase in natural language. In some cases, the simple search for the data of the copy of the communicative act is enough, that gives the question was ever used and an answer was given to it (a question-answer pair was formed).

The existing database filling technologies for QA-systems include expert filling [12], the use of crowd sourcing technologies [13], methods of procedure generation [14], automatic filling methods using existing anthologies (text corpus).

The growth of the number of public information resources in the Internet, which allows, on the one hand, the completeness of the terminological thesaurus within individual subject areas, and on the other hand, the diversity of thematic areas, has become the basis for making the assumption of the possibility of automatic analysis of texts of various content with the purpose to detect and highlight communicative acts for their subsequent entry into the database of the QA-system in the form of QA-pairs.

The joint use of the voice interface and QA-systems within the framework of human-machine interaction gives the following features:

1) the use of a closed-domain QA-system within the voice interface of interaction with the operator can expand the functionality in cases where the operator's co-command can't be directly executed, in which case the phrase is transmitted as a request to the QA system for issuing recommendations or receiving situational help. In this case, the QA system should be built on the extended thesaurus of the voice interface of a specific board system and include the basic aspects of the functioning of such a system in the base of question-answer pairs.

2) the use of an open-domain QA system operating in the voice assistant mode for issues not directly related to the operation of the on-board or mobile system (the analog of the assistants Siri, Cortana, Google Assistant, etc.) increases the process of satisfaction in communication with the system. In this case, the filling of the system can be made from available open resources, but in addition it is necessary to take into account the variability of speech and the difference in the forms of question phrases constructing.

1. The approach to the QA-system's database development

Consider the functional features of the QA-system that allows creating a database of QA-pairs, extracting knowledge from the publicly available Internet resources and providing a dialog question-answer interface in the form of web service (the block diagram is shown in Figure). As we can see on the figure, the system consists of functionally independent blocks for generating a database and for using this database to respond to user requests.

For filling the database there is a set of web crawlers and a module for collecting QA-pairs, that collect, download and analyze text documents, as well as extracting question-answer pairs from them.

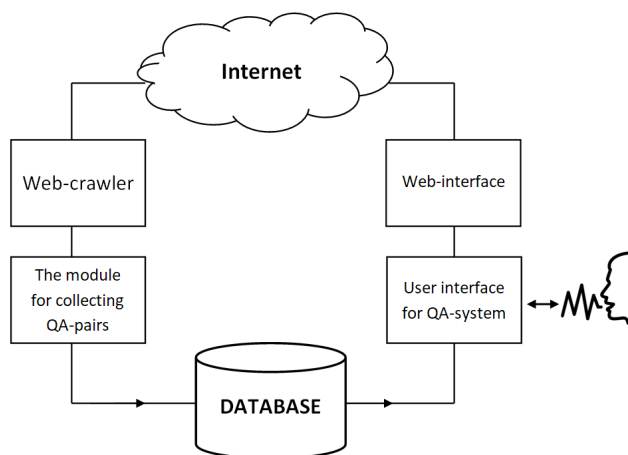
For the analysis of search queries (texts of questions) and the choice of the most relevant answer to this question, among the available question-answer pairs there is the interface search-and-dialogue component, represented on the structural diagram by the interface module of the question-answer system.

The formulation of the final answer is made by the module for responses generating (included in the interface module of the QA-system), so that the result looks syntactically natural and represents exactly what the user was looking for.

The mechanisms of decomposition of the question (user query), search and generation of the answer are considered, for example, in [15]. We will consider only methods of automatic collection of documents for filling the database (DB) of the QA-system based on the analysis of texts available in the web.

The available pages from the Internet are downloaded using web crawler technology [16]. It crawls links in processed documents according to specified algorithms, in conjunction with a headless browser that parses the original format of the downloaded document (PDF, HTML, MS Word, etc.) and converts it to text format. Additionally, the title of the document is retrieved. At this stage, the elements of the document are filtered, containing blocks of information that are not related to the main text: text blocks, navigation bars, etc.

In the work several methods of automatic



The structured scheme of QA-system with speech interface

selection of question-answer pairs were developed and tested based on the structure of sentences and on the basis of an associative-ontological approach to text analysis [16].

Before the direct allocation of question-answer pairs by any of the developed methods, the received texts are subjected to preliminary processing, in this case the graphematic analysis [17], which includes the definition of the boundaries of paragraphs, sentences and words, taking into account the structure of sentences.

The selection of sentences from the text is made by heuristic rules based on the search for the delimiter characters of the sentences: «.», «!», «?», «...» and the line transfer symbol. The words boundaries are delimited characters: « », «,», «;», «-», «(», «)», «:» и «"».

Each word in the text is being lemmatized – normalized using the function m of the morphological analysis (m -function). In this context the normalization means the obtaining the base form of the word (called 'lemma'), $w_i \xrightarrow{m} \bar{w}_i$, $w_i \in \{\mathbf{W}\}$, $i \in \mathbb{N}$, where $\{\mathbf{W}\}$ is the set of word forms, \bar{w}_i is the base form of the word, w_i is a word, \mathbf{W} – set of words, and ω is the set of valid words in the language, $i \in \mathbb{N}$. A valid set of words in the language $\{\omega\}$ is defined by some thesaurus $w_i \in \{\mathbf{W}\} \subset \{\omega\}$. The words belonging to the set of stop-words are ignored.

2. The method of QA-pairs delivering based on the sentence structure analysis

For texts such as lists of frequently asked questions (FAQs), as well as prose texts containing dialogs and direct speech, a method based on the analysis of the sentence structure obtained by preprocessing the text, expressed in the form of the following heuristic rule is effective. A sentence containing a direct speech is a sentence satisfying any of the following conditions:

- the first symbol of the sentence is the symbol «-»;
- within the sentence, a pair of symbols are sequentially located: the first character is the element of the set {«,», «.», «!», «?», «"»}, the second character is the «-» symbol;
- inside the sentence, a pair of «:» and «"» symbols are sequentially located.

From the sentences received, the author's words are deleted. The author's words are the text fragment that satisfies any of the following conditions:

- the text fragment is located after a pair of characters: the first character is the element of the set {«,», «.», «!», «?», «"»}, the second character is the «-» symbol;
- the fragment of the text is separated by the symbols «-»;
- the fragment of the text is located before the sequence of characters: «:» and «"».

Proposals that do not contain direct speech are considered in their original form, because they aren't needed in preprocessing.

Interrogative sentences are allocated from the text.

These sentences satisfy the following condition:

(the sentence contains more than two words) AND (the sentence ends with the symbol «?»).

Immediately after the interrogative sentences within one paragraph, a sentence that satisfies the conditions is selected:

(the sentence must not end with a «?» symbol) AND (the sentence contains at least one word).

Such a proposal will be considered an answer to the question posed. If any sentence in this paragraph doesn't satisfy these conditions, we believe that the question doesn't contain a response and it won't be entered into the database.

These heuristic rules can be written in the form of a generating grammar and implemented as a finite automaton.

3. The method on QA-pairs delivering based on associative-ontological approach

The method based on associative-ontological analysis is primarily focused on the class of reference and dictionary texts and it is based on the assumption that in the descriptive text there is a sentence (or a group of sentences) containing the main idea of the text. In this case, the title of the text (including that indicated through the meta tags of the online document) can be considered as a question, and this sentence (or a group of sentences) is the answer.

The use of abstracting algorithms based on the associative-ontological approach to the processing of texts in natural language [18] makes it possible to automate the selection of meaning-generating sentences through the semantic reduction of the text. The abstracting of texts is based on bi-grams, where a bi-gram is a pair of words found in one sentence. A couple of words that are often found in one sentence are considered associated, and the more often this bi-gram occurs, the stronger the connection. The sentences containing concepts, whose sum of connections is greatest, better than all other reflect the subject area described in the text.

4. The experiments and discussion

For the experimental verification of the possibility of creating an open-domain QA-system based on the automatic collection of question-answer pairs from the Internet, a prototype of the collection module, working in conjunction with the web crawler of the monitoring system for Internet resources is developed [18, 19]. The system processed 310,239 documents with useful volume of the text 1.92 GB (without taking into account the layout of the document and media data). While analyzing the texts, 2,230,325 questions and answers were received, the database size is 710 MB. The quantitative results obtained during the experimental verification of various methods are presented in Table.

Method	QA-pairs quantity
The method based on the structure sentences analysis without the direct speech registration	529117
The method based on the sentence structure analysis for direct speech	1080730
The method of QA-pairs delivering based on associative-ontological approach	310239

The greatest contribution to the formation of the database of question-answer pairs among the texts containing recorded communicative acts, mainly due to the high specific content of question-answer pairs within each document was made:

- by the prose texts containing dialogues of heroes (26 %);
- by the sections of frequently asked questions (FAQ) (17 %);
- by the reference and dictionary sources using the algorithm based on associative-semantic analysis (21 %);
- by the user generated content (UGC): forums, blogs, comments;
- by the documentary texts and news content.

Conclusion

A prototype of a system for collecting question-answer pairs was developed on the basis of the actual material contained in the public domain of the Internet.

Available pages were downloaded using web crawler technology, which crawls links in conjunction with a headless browser that parses the original format of the loaded document.

Two methods were tested for identifying question-answer pairs: a method based on analysis of the structure of sentences, and a method based on an associative-ontological analysis of texts.

Based on the analysis of the results obtained by the developed methods, it can be asserted that for a particular sample the average number of question-answer pairs was 7,9 per 1 document (one question-answer pair per 1 KB of text).

At the same time, an expert evaluation of the quality and completeness of the database, carried out using the interactive prototype, showed the impossibility of obtaining adequate answers for most of the specified search queries that the expert asked the search system without regard to the subject area.

This indicates the limited ability to create an open-domain (not specialized) QA-system only by directly identifying question-answer pairs from unstructured text sources currently available in the public domain of the Internet.

In conclusion, the authors are pleasant to express their sincere gratitude to Professor A.V. Bogomolov for his constructive criticism, a joint discussion of the problems of human-machine interaction in the framework of medical and biological research and congratulate him on the forty-fifth anniversary.

The research is granted by the budget (projects No. 0073-2014-0005 and No. 0073-2018-0002).

References

1. Kipyatkova I.S., Karpov A.A. Automatic Russian Speech Recognition Using Factored Language Models. *Artificial Intelligence and Decision Making*, 2015, no. 3, pp. 62–69. (in Russ.).
2. Bogomolov A.V., Kukushkin Yu.A. Personalized monitoring automation of the labor conditions. *Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii* (Automation. Modern technologies), 2015, no. 3, pp. 6–8. (in Russ.).
3. Zinkin V.N., Soldatov S.K., Kukushkin Yu.A., Afanasyev R.V., Bogomolov A.V., Akhmetzyanov I.M., Svidovyi V.I., Pirozhkov M.V. Hygienic evaluation of work conditions for noise-related occupations in aircraft repair plants. *Meditsina truda i promyshlennaya ekologiya* (Occupational Medicine and Industrial Ecology), 2008, no. 4, pp. 40–42. (in Russ.).
4. Goryachkina T.G., Ushakov I.B., Evdokimov V.I., Bogomolov A.V. Methodical and Methodological Recommendations for Inventors of Innovations Aimed at Assessing the Functional State of a Human Operator. *Technologies of Living Systems*, 2006, Vol. 3, no. 3, pp. 33–38. (in Russ.).
5. Kukushkin Ju.A., Bogomolov A.V., Guzij A.G. Principles of Construction of Life Support Systems of Human Controllers of Systems "Man-Machine", Adaptive to Their Functional State. *Mechatronics, Automation, Control*, 2005, no. 3, pp. 50–54. (in Russ.).
6. Lapshin V.A. Voprosno-otvetnye sistemy: razvitiye i perspektivy (Question-answer systems: development and prospects). *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Seriya 2. Informatsionnye protsessy i sistemy* (Scientific and technical information. Series 2. Information Processes and Systems), 2012, no. 6, pp. 1–9. (in Russ.).
7. Rodrigo A., Peñas A. A study about the future evaluation of Question-Answering systems. *Knowledge-Based Systems*, 2017, Vol. 137, pp. 83–93. DOI: 10.1016/j.knosys.2017.09.015
8. Zou L., Huang R., Wang H., Yu J.X., He W., Zhao D. Natural Language Question Answering over RDF: A Graph Data Driven Approach. *Proc. 2014 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, SIGMOD'14, Snowbird, Utah, USA, June 22–27, 2014*, pp. 313–324. DOI: 10.1145/2588555.2610525
9. Fader A., Zettlemoyer L., Etzioni O. Open Question Answering over the Curated and Extracted Knowledge Bases. *Proc. 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, KDD '14, New York, New York, USA, August 24–27, 2014*, pp. 1156–1165. DOI: 10.1145/2623330.2623677
10. Li J., Liu H., Zhang Y., Xing C. A Health QA with Enhanced User Interfaces. *Proc. 13th Web Information Systems and Applications Conference (WISA), 23–25 Sept. 2016*, pp. 173–178. DOI: 10.1109/WISA.2016.43
11. Liu Y., Bian J., Agichtein E. Predicting Information Seeker Satisfaction in Community Question Answering. *Proc. 31st annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval, SIGIR '08, Singapore, Singapore, July 20–24, 2008*, pp. 483–490. DOI: 10.1145/1390334.1390417
12. Sutyagin I.V. *Molodoy uchenyy* (Young Scientist), 2012, no. 1-1, pp. 151–153. (in Russ.).
13. Fedorkova, G.S. Kraudsorsingovye tekhnologii v rossiyskikh sotsial'nykh media (Crowdsourcing technologies in the Russian social media). *Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Kommunikatsiya v sovremennom mire"* (Proc. All-Russian Scientific and Practical Conference "Communication in the Modern World"), Voronezh, May 11–13, 2017, pp. 154–155. (in Russ.).
14. <https://www.wolframalpha.com/>
15. Nikitin A., Raykov P. *Voprosno-otvetnye sistemy* (Question-answer systems): <http://yury.name/internet/06ia-seminar.ppt> (in Russ.).
16. Kuleshov S.V., Zaytseva A.A., Markov V.S. Associative-Ontological Approach to Natural Language Texts Processing. *Intellectual Technologies on Transport*, 2015, no. 4, pp. 40–43. (in Russ.).
17. Pervushin A. Modul' grafematicheskogo analiza v sisteme obrabotki russkoyazychnykh tekstov (Module of graphematic analysis in the system for processing Russian-language texts). *Novye informatzionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh*, 2012, no. 15, pp. 187–190. (in Russ.).
18. Alexandrov V.V., Kuleshov S.V. Analytical Monitoring of Internet Content. Info Logical Approach. *Kachestvo. Innovatsii. Obrazovanie* (Quality. Innovation. Education), 2008, no. 3, pp. 68–70. (in Russ.).

19. Mikhailov S.N., Kuleshov S.N. Expert monitoring of unstructured content in the interest of information and analytical support of space researches. *Proceedings of the Southwest State University*, 2013, no. 6-2 (51), pp. 40–43. (in Russ).

Received May 16, 2018

УДК 51-7, 004.89

DOI: 10.14529/mmph180307

МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ РЕЧЕВЫХ И ТЕКСТОВЫХ БАЗ ДАННЫХ ВОПРОСНО-ОТВЕТНЫХ СИСТЕМ

А.Л. Ронжин, А.А. Зайцева, С.В. Кулешов, К.В. Ненаусников

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ronzhin@ias.spb.su

Работа посвящена проблемам построения речевых вопросно-ответных систем (QA-систем). Предметом исследования являются подходы к автоматическому наполнению базы данных вопросно-ответной системы путем анализа неструктурированных текстовых источников, имеющих в настоящий момент времени в открытом доступе в сети Интернет.

В результате анализа выявлено, что выделяют следующие способы реализации QA-систем: на основе логического вывода по онтологиям, правилам и на основе синтаксиса, с использованием искусственных нейронных сетей.

В исследовании разработаны и протестированы методы автоматического выделения вопросно-ответных пар на основе структуры предложений и на основе ассоциативно-онтологического анализа.

Метод на основе анализа структуры предложений эффективен для текстов типа списков часто задаваемых вопросов (FAQ), а также художественных текстов, содержащих диалоги, прямую речь, основан на предварительной обработке текста, выраженный в виде эвристического правила.

Метод на основе ассоциативно-онтологического анализа ориентирован на класс справочных и словарных текстов и основан на предположении о том, что в тексте описательного характера имеется предложение (или группа предложений), содержащее основную мысль текста. В этом случае заголовок текста может считаться вопросом, а это предложение (или группа предложений) – ответом. Для автоматизации выделения смыслообразующих предложений за счет семантической редукции текста применяются алгоритмы реферирования на основе ассоциативно-онтологического подхода к обработке текстов на естественном языке.

Для экспериментальной проверки возможности создания открытой вопросно-ответной системы на базе автоматического сбора вопросно-ответных пар из сети Интернет был разработан прототип модуля сбора базы данных вопросно-ответной системы.

Ключевые слова: вопросно-ответная пара; ассоциативно-онтологический подход; текст на естественном языке; автоматическая обработка текста; распознавание речи.

Литература

1. Кипяткова, И.С. Автоматическое распознавание русской речи с применением факторных языковых моделей / И.С. Кипяткова, А.А. Карпов // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2015. – № 3. – С. 62–69.
2. Богомолов, А.В. Автоматизация персонифицированного мониторинга условий труда / А.В. Богомолов, Ю.А. Кукушкин // Автоматизация. Современные технологии. – 2015. – № 3. – С. 6–8.

3. Гигиеническая оценка условий труда работников «шумовых» профессий авиаремонтных заводов / Зинкин В.Н., Солдатов С.К., Кукушкин Ю.А. и др. // Медицина труда и промышленная экология. – 2008. – № 4. – С. 40–42.
4. Методико-методологические рекомендации авторам инноваций по диагностике функционального состояния человека-оператора / Т.Г. Горячкина, И.Б. Ушаков, В.И. Евдокимов, А.В. Богомолов // Технологии живых систем. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 33–38.
5. Кукушкин, Ю.А. Принципы построения системы обеспечения жизнедеятельности операторов систем «человек-машина», адаптивных к их функциональному состоянию / Ю.А. Кукушкин, А.В. Богомолов, А.Г. Гузий // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 3. – С. 50–54.
6. Лапшин, В.А. Вопросно-ответные системы: развитие и перспективы / В.А. Лапшин // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. – 2012. – № 6. – С. 1–9.
7. Rodrigo, A. study about the future evaluation of Question-Answering systems / A. Rodrigo, A.A. Peñas // Knowledge-Based Systems. – 2017. – Vol. 137. – P. 83–93.
8. Natural Language Question Answering over RDF: A Graph Data Driven Approach / L. Zou, R. Huang, H. Wang *et al.* // Proceedings of the 2014 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, SIGMOD'14. – Snowbird, Utah, USA, June 22–27, 2014. – P. 313–324.
9. Fader, A. Open Question Answering over the Curated and Extracted Knowledge Bases / A. Fader, L. Zettlemoyer, O. Etzioni // Proceedings of the 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, KDD '14, New York, New York, USA, August 24–27, 2014, pp. 1156–1165.
10. A Health QA with Enhanced User Interfaces / J. Li, H. Liu, Y. Zhang, C. Xing // Proceedings of the 13th Web Information Systems and Applications Conference (WISA). – September 23–25, 2016. – P. 173–178.
11. Liu, Y. Predicting Information Seeker Satisfaction in Community Question Answering / Y. Liu, J. Bian, E. Agichtein // Proceedings of the 31st annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval, SIGIR '08. – 2008. – P. 483–490.
12. Сутягин И.В. Методы формализации экспертных знаний для наполнения базы знаний / И.В. Сутягин // Молодой ученый. – 2012. – № 1-1. – С. 151–153.
13. Федоркова, Г.С. Краудсорсинговые технологии в российских социальных медиа / Г.С. Федоркова // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Коммуникация в современном мире». – Воронеж, 11–13 мая 2017 г. – С. 154–155.
14. <https://www.wolframalpha.com/> (Date of access: 27.12.2017).
15. Никитин, А. Вопросно-ответные системы / А. Никитин, П. Райков // URL: <http://yury.name/internet/06ia-seminar.ppt> (Date of access 27.12.2017)
16. Кулешов, С.В. Ассоциативно-онтологический подход к обработке текстов на естественном языке / С.В. Кулешов, А.А. Зайцева, В.С. Марков // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2015. – № 4. – С. 40–43.
17. Первушин, А. Модуль графематического анализа в системе обработки русскоязычных текстов / А. Первушин // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2012. – № 15. – С. 187–190.
18. Александров, В.В. Аналитический мониторинг Internet контента. Инфологический подход / В.В. Александров, С.В. Кулешов // Качество. Инновации. Образование. – 2008. – № 3(34). – С. 68–70.
19. Михайлов, С.Н. Экспертный мониторинг неструктурированных информационных ресурсов в интересах информационно-аналитического обеспечения космических исследований / С.Н. Михайлов, С.В. Кулешов // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2013. – № 6–2 (51). – С. 40–43.

Поступила в редакцию 16 мая 2018 г.

СЕДИМЕНТАЦИЯ МАЛОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ СТОКСОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

В.И. Рязских, А.В. Рязских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ryazhskih_vi@mail.ru

На основе диффузионно-кинетического подхода выполнен аналитический анализ осаждения малоцентрированной полидисперсной взвеси стоксовских частиц в плоском слое покоящейся дисперсионной фазы (вязкая несжимаемая жидкость). При отсутствии перемешивания математическая модель для монодисперсных частиц, обобщенная на полидисперсный случай с использованием принципа суперпозиции концентрационных полей, представлена в виде начально-краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка в частных производных относительно функции плотности распределения частиц по размерам, решение которой записано аналитическим соотношением с помощью обобщенной функции Хэвисайда. Получены расчетные выражения для локальной счетной функции плотности распределения частиц в пространстве размеров, массовой концентрации в объеме и роста осадка, инвариантных физико-химическим свойствам гетерогенной системы. Показано, что найденное обобщенное решение может быть применено для дисперсного анализа взвеси как альтернативная методика седиментометрическому анализу, если известна эмпирическая относительная седиментационная кривая. Если исходная счетная функция плотности распределения частиц по размерам относится к экспоненциальному типу, то из безусловной задачи минимизации легко может быть вычислен среднечисленный размер частиц взвеси. Данный подход может быть обобщен на случай грубодисперсных взвесей, скорость осаждения которых не подчиняется закону Стокса, а также для произвольных исходных счетных функций плотности распределения частиц взвеси по размеру. В этом случае для нахождения функции плотности частиц по размеру применяется целевая функция, записанная в виде функционала, и задача его минимизации приводит с некоторой степенью приближения к искомой экспериментальной счетной функции плотности распределения частиц по размерам.

Ключевые слова: седиментация; полидисперсная взвесь; осадок; плоский слой; концентрация.

Введение. Процесс осаждения малоцентрированной полидисперсной взвеси находит широкое использование в энергетике, химической и пищевой технологиях [1, 2], а если при этом несущая среда является условно неподвижной, то этот процесс имеет фундаментальное значение в седиментометрическом анализе дисперсной фазы [3]. В частности, если скорость частиц постоянна, что означает уравнивание силы тяжести силами гидродинамического сопротивления, то такие частицы принято называть стоксовскими [4]. Анализ процесса осаждения с позиций механики гетерогенных сред вызывает ряд трудностей, связанных с идентификацией межфазной границы [5], что, в конечном счете, делает невозможным постановку краевых условий и применение интегро-дифференциального исчисления. Альтернативой этому является применение диффузионно-кинетической модели процесса осаждения [6], что с успехом апробировано при решении ряда задач [7, 8].

Постановка задачи. Рассмотрим плоский слой дисперсионной среды высотой h со свободной поверхностью, которая содержит равномерно распределенную дисперсную фазу малоцентрированных полидисперсных частиц. Направим ось Ox декартовой координаты с началом на

Механика

поверхности осаждения перпендикулярно к свободной поверхности, тогда диффузионно-кинетическая модель осаждения монодисперсной взвеси имеет вид [9]:

$$\frac{\partial n(x, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial n(x, \tau)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$n(x, 0) = n_0; \quad (2)$$

$$(w - k)n(0, \tau) + D \frac{\partial n(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$wn(h, \tau) + D \frac{\partial n(h, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где τ, x – время и декартова координата; $n(x, \tau)$ – локальная счетная концентрация частиц размера l ; w – стоксовская скорость осаждения частиц размера l ; D – коэффициент конвективного перемешивания взвеси; k – кинетический коэффициент встраивания частиц в структуру осадка.

Если перемешивание отсутствует ($D = 0$), то из (3) следует, что $k \rightarrow w$, т. е. частицы, подошедшие к поверхности осаждения, беспрепятственно оказываются в осадке. Поэтому (1)–(4) трансформируется в систему:

$$\frac{\partial n(x, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial n(x, \tau)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$n(x, \tau) = n_0, \quad (6)$$

$$n(0, \tau) \neq n_0, \quad (7)$$

$$n(h, \tau) = 0. \quad (8)$$

Из (5)–(8) следует, что

$$n(0, \tau) = [H(\tau) - H(\tau - h/w)]n_0,$$

где $H(\dots)$ – функция Хэвисайда. В силу малоконцентрированности взвеси система (5)–(8) может быть обобщена на полидисперсный случай, используя принцип суперпозиции концентрационных полей, т. е.

$$\frac{\partial f(x, l, \tau)}{\partial \tau} = w(l) \frac{\partial f(x, l, \tau)}{\partial x}, \quad (9)$$

$$f(x, l, 0) = f_0(l), \quad (10)$$

$$f(0, l, \tau) = \{H(\tau) - H[\tau - h/w(l)]\} f_0(l), \quad (11)$$

где $f_0(l)$, $f(x, l, \tau)$ – исходная и локальная счетные функции плотности распределения частиц по размерам.

В безразмерном виде система (9)–(11) такова:

$$\frac{\partial F(X, L, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = L^2 \frac{\partial F(X, L, \bar{\theta})}{\partial X}, \quad (12)$$

$$F(X, L, 0) = F_0(L); \quad (13)$$

$$F(0, L, \bar{\theta}) = [H(\bar{\theta}) - H(\bar{\theta} - L^2)] F_0(L), \quad (14)$$

где $\bar{\theta} = w(\bar{l})\tau/h$; $X = x/h$; $L = l/\bar{l}$; $F(X, L, \bar{\theta}) = \bar{l}f^{(N)}(x, l, \tau)$; $F_0(L) = \bar{l}f_0^{(N)}(l)$;

$f^{(N)}(x, l, \tau) = f(x, l, \tau) / \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_0(l) dl$; $f_0^{(N)}(l) = f_0(l) / \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_0(l) dl$; $\bar{l} = \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} f_0^{(N)}(l) dl$; l_{\min} , l_{\max} –

минимальный и максимальный размеры частиц взвеси.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа по $\bar{\theta}$, получим решение (12)–(14)

$$F(X, L, \bar{\theta}) = \{H(\bar{\theta}) - H[\bar{\theta} - (1 - X)L^2]\} F_0(L). \quad (15)$$

С помощью (15) определены: локальная относительная массовая концентрация частиц во взвеси

$$C(X, \bar{\theta}) = \frac{c(x, \tau)}{c_0} = \frac{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L^3 F(X, L, \bar{\theta}) dL}{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} F_0(L) dL}, \quad (16)$$

где $L_{\min} = l_{\min}/\bar{l}$, $L_{\max} = l_{\max}/\bar{l}$, $c(x, \tau) = k_V \rho_T \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^3 f(x, l, \tau) dl$, $c_0 = k_V \rho_T \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^3 f_0(l) dl$,

k_V – коэффициент формы частиц, ρ_T – плотность частиц; среднеобъемная относительная массовая концентрация частиц

$$\bar{C}(\bar{\theta}) = \int_0^1 C(X, \bar{\theta}) dX; \quad (17)$$

относительная толщина осадка

$$\Delta(\bar{\theta}) = \frac{\delta(\tau)}{\delta_0} = \frac{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L^5 \left[\int_0^{\bar{\theta}} F(0, L, \xi) d\xi \right] dL}{\int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L^3 F_0(L) dL}, \quad (18)$$

где

$$\delta(\tau) = \frac{k_V}{1-\varepsilon} \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} w(l) l^3 \left[\int_0^{\tau} f(0, l, \xi) d\xi \right] dl; \quad \delta_0 = \frac{k_V}{1-\varepsilon} h \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} l^3 f_0(l) dl; \quad \varepsilon - \text{порозность осадка взвеси.}$$

Пример расчета. В практике наиболее часто встречается экспоненциальный закон распределения взвеси, например, в процессах кристаллизации твердой фазы из растворов, объемной конденсации парообразных сред и т. д. В этом случае $F_0(L) = \exp(-L)$ и приближенно можно считать $L_{\min} = 0$, $L_{\max} \rightarrow \infty$. Заметим, что условие нормировки при этом выполняется автоматически. Тогда из (15) следует

$$F(X, L, \bar{\theta}) = \left\{ \text{H}(\bar{\theta}) - \text{H}[\bar{\theta} - (1-X)L^2] \right\} \exp(-L).$$

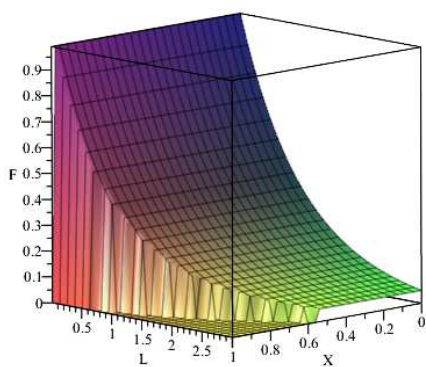


Рис. 1. Безразмерная функция плотности распределения частиц по размеру при $\bar{\theta} = 0,05$

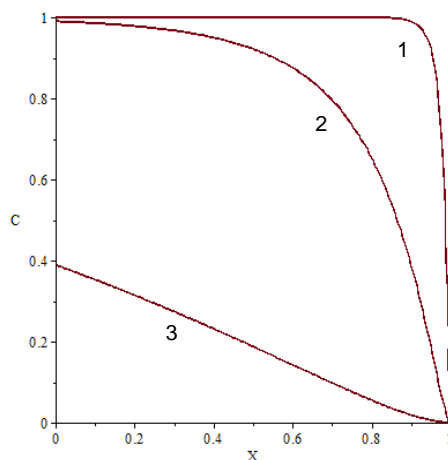


Рис. 2. Относительная массовая концентрация частиц при: 1 – $\bar{\theta} = 0,001$; 2 – $\bar{\theta} = 0,01$; 3 – $\bar{\theta} = 0,1$

Трансформирование $F(X, L, \bar{\theta})$ в процессе седиментации показано на рис. 1. Выражение для локальной относительной массовой концентрации частиц во взвеси (16) принимает вид (рис. 2)

$$C(X, \bar{\theta}) = \left[6 - (L^{*3} + 3L^{*2} + 6L^* + 6) \exp(-L^*) \right] / 6,$$

где $L^* = \sqrt{(1-X)/\bar{\theta}}$. Кинетика осветления взвеси в процессе осаждения есть

$$C(\bar{\theta}) = 2 \left[60\bar{\theta} - 3 - (60\bar{\theta} + 1/\bar{\theta} + 60/\sqrt{\bar{\theta}} + 27 + 7/\sqrt{\bar{\theta}}) \exp(-1/\sqrt{\bar{\theta}}) \right].$$

Относительная толщина осадка представлена в квадратурах

$$\sigma(\bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}} \left[120 - (\xi^{-5/2} + 5\xi^{-2} + 20\xi^{3/2} + 60\xi^{-1} + 120\xi^{-1} + 120) \exp(-0,5/\xi) \right] d\xi.$$

В частности, если известна экспериментальная относительная седиментационная кривая $\sigma_s(\tau)$, то решив оптимизационную задачу

$$|1 - \sigma(\alpha\tau)/\sigma_s(\tau)| \rightarrow \min_{\alpha},$$

в которой $\alpha = w(\bar{l})/h$, нетрудно найти $\bar{l} = \sqrt{\frac{18\rho\nu\alpha}{g(\rho_T - \rho)}}$, где ρ – плотность; ν – кинематическая

вязкость несущей среды; g – ускорение свободного падения.

Заключение. Аналитический анализ позволил получить основные характеристики кинетики осаждения малоконцентрированной полидисперсной взвеси стоковских частиц в неподвижной несущей среде инвариантно физико-химическим свойствам гетерогенной системы и на его основе предложить способ идентификации среднего размера взвеси по экспериментальной седиментационной кривой.

Литература

1. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
2. Богомолов, А.В. Математическое обеспечение оценивания состояния материальных систем / А.В. Богомолов, И.Б. Ушаков, Ю.А. Кукушкин. – М.: Машиностроение. – Новые технологии, 2004. – 36 с.
3. Коузов, П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов / П.А. Коузов. – Л.: Химия, 1974. – 279 с.
4. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
5. Morel, C. Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows / C. Morel. – N.Y.: Springer International Publishing, 2015. – 350 с.
6. Броунштейн, В.Б. Диффузионная модель классификации частиц в разряженных суспензиях / В.Б. Броунштейн // Журнал прикладной химии. – 1983. – Т. 56, № 8. – С. 1788–1793.
7. Харин, В.М. К теории осаждения / В.М. Харин, В.И. Рязских // Теоретические основы химической технологии. – 1989. – Т. 23, № 5. – С. 651–658.
8. Харин, В.М. Кинетика осаждения примесей при испарительном охлаждении криогенных жидкостей / В.М. Харин, В.И. Рязских, Р.М. Завадских // Теоретические основы химической технологии. – 1996. – Т. 30, № 5. – С. 453–457.
9. Веригин, А.Н. Диффузия и седиментация мелкодисперсной однородной взвеси в отстойниках / А.Н. Веригин, С.В. Васильев // Теоретические основы химической технологии. – 1982. – Т. 16, № 3. – С. 374–380.

Поступила в редакцию 11 июня 2018 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2018, vol. 10, no. 3, pp. 67–71*

DOI: 10.14529/mmph180308

SEDIMENTATION OF A SMALL-CONCENTRATED POLYDISPERSE SUSPENSION OF STOKES PARTICLES IN A FLAT LAYER

V.I. Ryazhskikh, A.V. Ryazhskikh

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskikh_vi@mail.ru

On the basis of the diffusion-kinetic approach, an analytical analysis of the precipitation of a low-concentration polydisperse suspension of Stokes particles in a flat layer of a stationary dispersive phase (viscous incompressible liquid) is performed. In the absence of mixing, the mathematical model for

monodisperse particles, generalized to a polydisperse case using the principle of superposition of concentration fields, is presented in the form of an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with respect to the particle size distribution function in dimensions, the solution of which is written in the analytic relation with the help of the generalized Heaviside function. The calculated expressions are obtained for the local counting function of the density of the particle distribution in the space of dimensions, mass concentration in the volume, and growth of the sediment, which are invariant to the physicochemical properties of the heterogeneous system. It is shown that the generalized solution found can be applied to the dispersion analysis of suspended matter as an alternative technique to sedimentometric analysis if the empirical relative sedimentation curve is known. If the initial counting function of the particle size distribution density refers to the exponential type, then the average number particle size of the suspension can easily be calculated from the unconditional minimization problem. This approach can be generalized to the case of coarse suspended solids, the rate of deposition of which does not obey the Stokes law, and also for arbitrary initial counting functions of the particle size distribution of the slurry in size. In this case, to find the particle density function with respect to size, we use the objective function written in the form of a functional and the minimization problem leads to a certain degree of approximation to the required experimental countable density distribution function for particles.

Keywords: sedimentation; polydisperse suspension; sediment; flat layer; concentration.

References

1. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport phenomena*. NY: John Wiley, 1974, 688 p.
2. Bogomolov A.V., Ushakov I.B., Kukushkin Yu.A. *Matematicheskoe obespechenie otsenivaniya sostoyaniya material'nykh sistem* (Mathematical support for assessing the state of material systems), Moscow, Mashinostroenie – Noveye tekhnologii Publ., 2004, 36 p. (in Russ.).
3. Kouzov P.A. *Osnovy analiza dispersnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov* (Fundamentals of analysis of the disperse composition of industrial dusts and crushed materials), Leningrad, Khimiya Publ., 1974, 279 p. (in Russ.).
4. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Prentice-hall, 1965, 553 p.
5. Morel C. *Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows*. NY: Springer International Publishing, 2015, 350 c. DOI: 10.1007/978-3-319-20104-7
6. Brounshtein V.B. Diffuzionnaya model klassifikatsii chastic v razryazhennyhm suspenziyahh (Diffusion model of classification of particles in discharged suspensions). *Zhurnal prikladnoi khimii*, 1983, Vol. 56, no. 8, pp. 1788–1793. (in Russ.).
7. Kharin V.M., Ryazhskikh V.I. K teorii osazhdeniya (To the theory of deposition). *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 1989, Vol. 23, no. 5, pp. 651–658. (in Russ.).
8. Kharin V.M., Ryazhskikh V.I., Zavadskikh R.M. Kinetics of sedimentation of impurities in the evaporative cooling of cryogenic liquids. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1996, Vol. 30, no. 5, pp. 409–413. (in Russ.).
9. Verigin A.N., Vasil'ev S.V. Diffuziya i sedimentatsiya melkodispersnoy odnorodnoy vzvesi v otstoynikakh (Diffusion and sedimentation of a fine dispersed homogeneous suspension in sedimentation tanks). *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 1982, Vol. 16, no. 3, pp. 374–380. (in Russ.).

Received June 11, 2018

INVESTIGATION OF THE DIFFRACTION OF A FOCUSED GAUSSIAN BEAM BY A HALF-PLANE NEAR THE BEAM WAIST

E.A. Bibikova^{1,2}, N.D. Kundikova^{1,2}, N. Al-Wassit^{2,3}

¹ Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

² South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

³ Al-Mustansiriya University, Baghdad, Iraq

E-mail: kundikovand@susu.ru

Diffraction of a focused Gaussian beam in the vicinity of the waist region at the edge of the screen is considered on the basis of numerical simulation and experimental investigation. The Gaussian beam propagation has been simulated on the basis of the Helmholtz equation solution by the spectral method. The diffraction of coherent laser radiation (wavelength of 0,63 μm) at the edge of a rectangular screen overlapping half the beam in the transverse direction has been analyzed experimentally. The laser beam is focused by the lens of focal length of 4 cm. A dependence of the diffraction pattern on the screen position relative to the focal waist position is observed. It is found that if the screen is located at distances less than the focal length, then the diffraction pattern is observed in the dark region and represents a semicircle with diffraction fringes. If the screen is placed in the waist region, then the diffraction pattern becomes symmetrical with respect to the screen edge, and if the screen is located at a distance greater than the focal length, then the diffraction pattern is observed in bright area with the diffraction fringes appearing on the other side. The results can be used for the accurate determination of the focused Gaussian beams waist position.

Keywords: Gaussian beam; the beam waist; the focal plane; light diffraction.

Introduction

The focusing of structured light beams gives rise to new effects in the focal plane [1]. Changing of the sign of circular polarization of asymmetric light beams causes the transverse displacement of beam waist [2–6]. Transverse focal displacement is also observable in beams with vortices. The value of this displacement from the geometric focus depends on the topological charge of the vortices, the vortices initial position in the beam, and the beam aperture [7, 8].

Besides the transverse displacement, the longitudinal focal shift from the geometric focus is observable. This focal shift is directed toward the beam aperture and depends on a Fresnel number [9, 10]. For the focused Laguerre-Gaussian beams the longitudinal focal shift increases with the increasing of the focal distance and decreases with the increasing of the waist region diameter [11].

The diffraction by the screen with the straight edge (half plane) has been investigated for several decades and revealed new properties of optical waves [12]. It was found that the diffraction of a beam with a zero topological charge gives rise to optical vortices (wavefront dislocations) [13]. Half plane edge diffraction allowed researchers to determine the dependence of diffraction pattern on the sign of circular polarization and to demonstrate the vortex character of the longitudinal field component of the circularly polarized beams [14]. The diffraction of the Gaussian vortex beam by the edge of the screen resulted in the formation of polarization singularities, which appear from the transverse and longitudinal components of the diffracted beam electric field [15]. Moreover, half plane and slit diffraction of beams made possible the determination of the energy flow direction in beams with wavefront dislocations [16, 17].

The diffraction of focused beams by a screen will allow us to research the properties of light in the waist region. In this paper we present the results of numerical simulation and experimental investigation of the half plane diffraction of a focused Gaussian beam at the beam waist.

Half plane diffraction of a focused Gaussian beam: simulation

To obtain the diffraction pattern of the Gaussian beam cross section after the diffraction of the beam by the edge of the screen we solved Helmholtz equation using a spectral method. We calculated the far-field intensity distribution. The screen was located at different distances from the focal waist in such way, that it always overlapped the right half of the beam.

The results of the intensity distribution calculations are shown in Fig. 1. We can see that the diffraction pattern changes with the screen move along the beam propagation axis. If the screen is located in the waist region, the intensity distribution is symmetric with respect to the screen edge and forms an ellipse, the major ellipse axis is perpendicular to the screen edge (Fig. 1, c). If the screen is before or after the beam waist region, the intensity distribution has an evident diffraction nature and forms a semicircle with diffraction fringes. If the screen is far from the beam waist, the diffraction pattern is more evident, and the diffraction pattern image depends on the screen location (before or after the waist region). If the screen is located before the beam waist, the diffraction fringes are to the left of the screen edge (Fig. 1 a, b). If the screen is located after the beam waist, the diffraction fringes are to the right of the screen edge (Fig. 1 d, f).

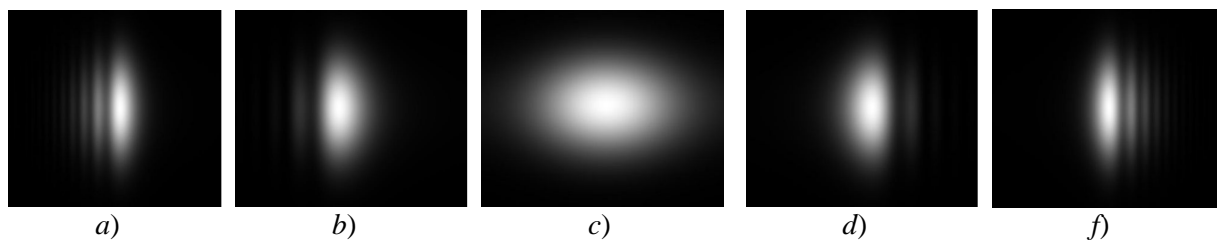


Fig. 1. Calculated far-field intensity distributions.
The screen is between the lens and the focal plane (a, b); at focal plane (c); after the focal plane (d, f)

Half plane diffraction of a focused Gaussian beam: experiment

For experimental investigation we used the radiation of a He-Ne laser generated on the main transverse mode at the wavelength $\lambda = 632,8$ nm. The laser beam was focused by a lens with the focal distance of 4 cm. The opaque screen with the vertical edge was mounted on a two-coordinate micro-motion stage. We can smoothly insert the screen into a beam, overlapping the right half of the beam, and move the screen along the beam propagation. The changes in the far-field intensity distribution on the change of the screen location relative to the focal waist were recorded by a CCD-camera (Fig. 2). At some screen locations we detected clear vertical fringes (Fig. 2, a, b), which were observable under any beam cross-section overlapping (by half or not). At some point the light spot formed an ellipse, the major ellipse axis was perpendicular to the screen edge (Fig. 2, c). A further move of the screen along the beam propagation axis led to the appearance of vertical diffraction fringes at the other side of the intensity distribution (Fig. 2 d, f).

The comparison of Fig. 1 and Fig. 2 demonstrates that the symmetric diffraction pattern corresponds to the screen location at the focal plane. This fact allows us to assume that the focal plane position can be determined from the diffraction pattern form. We showed that the symmetry of the diffraction pattern is broken under the screen displacement by $20 \mu\text{m}$ from the focal plane. Therefore, using a lens with the focal distance of 4 cm, we could determine the focal plane position with an accuracy of $20 \mu\text{m}$.

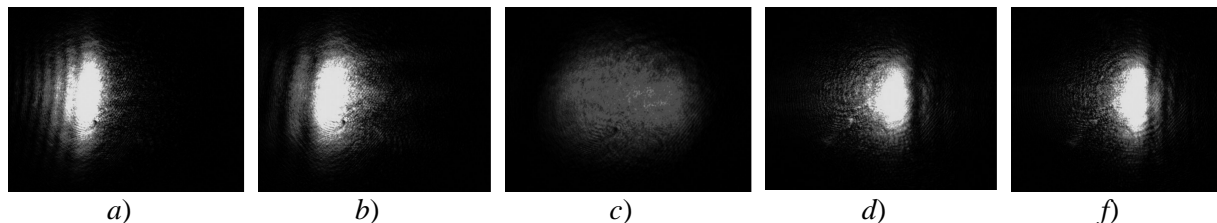


Fig. 2. Experimental far-field intensity distributions. The screen is located a) at 1,5 mm before the focal plane; b) at $75 \mu\text{m}$ before the focal plane; c) at the focal plane; d) at $75 \mu\text{m}$ after the focal plane; f) at 1,5 mm after the focal plane

Conclusion

We investigated experimentally and theoretically half plane diffraction of the focused Gaussian beam in the vicinity of the waist region. We found that if the screen is located at distances less than the focal length, the diffraction pattern appears in the dark region. If the screen is placed in the waist region, the diffraction pattern becomes symmetrical with respect to the screen edge. And if the screen is located at a distance greater than the focal length, the diffraction pattern appears in the bright area. The results can be used for the accurate determination of the focused Gauss beams waist position.

This work was partly carried out within the scope of the topic of State Assignment No. 0389-2016-0003.

References

1. Abdulkareem S., Kundikova N. Joint effect of polarization and the propagation path of a light beam on its intrinsic structure. *Opt. Express*, 2016, Vol. 24, Issue 17, pp. 19157–19166. DOI: 10.1364/OE.24.019157
2. Baranova N.B., Savchenko A.Yu., Zel'dovich B.Ya. Transverse shift of a focal spot due to switching of the sign of circular polarization. *JETP Letters*, 1994, Vol. 59, no. 4, pp. 232–234.
3. Zeldovich B.Y., Kundikova N.D., Rogacheva L.F. Observed transverse shift of a focal spot upon a change in the sign of circular polarization. *JETP Letters*, 1994, Vol. 59, no. 11, pp. 766–769.
4. Aiello A., Lindlein N., Marquardt C., Leuchs G. Transverse Angular Momentum and Geometric Spin Hall Effect of Light. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, Vol. 103, pp. 100401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.100401
5. Bekshaev A. Improved theory for the polarization-dependent transverse shift of a paraxial light beam in free space. *Ukr. J. Phys. Opt.*, 2011, Vol. 12, pp. 10–18. DOI: 10.3116/16091833/12/1/10/2011
6. Neugebauer M. Geometric spin Hall effect of light in tightly focused polarization-tailored light beams. *Phys. Rev. A*, 2014, Vol. 89, Issue 1, p. 13840. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.013840
7. Zhao X., Zhang J., Pang X., Wan G. Properties of a strongly focused Gaussian beam with an off-axis vortex. *Opt. Commun.*, 2017, Vol. 389, P. 275–282. DOI: 10.1016/j.optcom.2016.12.050
8. Zhao X., Zhang J., Pang X., Wan G. Transverse Focal Shift in Vortex Beams. *IEEE Photonics Journal*, 2018, Vol. 10, no. 1, pp. 6500417. DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2795597
9. De Nicola S., Anderson D., Lisak M. Focal shift effects in diffracted focused beams. *Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A*, 1998, Vol. 7, no. 5, pp. 1249–1259. DOI: 10.1088/0963-9659/7/5/030
10. Sheppard C.J.R., Török P. Focal shift and the axial optical coordinate for high-aperture systems of finite Fresnel number. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, Vol. 20, Issue 11, pp. 2156–2162. DOI: 10.1364/JOSAA.20.002156
11. Rena Z.-C., Qiana S.-X., Tua C., Lia Y., Wang H.-T. Focal shift in tightly focused Laguerre–Gaussian beams. *Opt. Commun*, 2015, Vol. 334, P. 156–159. DOI: 10.1016/j.optcom.2014.08.036
12. Senior T.B.A. Half plane edge diffraction. *Radio Science*, 1975, Vol. 10, Issue 6, pp. 645–650. DOI: 10.1029/RS010i006p00645
13. Zeylikovich I., Nikitin A. Diffraction of a Gaussian laser beam by a straight edge leading to the formation of optical vortices and elliptical diffraction fringes. *Opt. Commun.*, 2018, Vol. 413, pp. 261–268. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.12.072
14. Bekshaev A.Y. Spin–orbit interaction of light and diffraction of polarized beams. *Journal of Optics*, 2017, Vol. 19, no. 8, pp. 085602. DOI: 10.1088/2040-8986/aa746a
15. Luo Y., Lü B. Polarization singularities of Gaussian vortex beams diffracted at a half-plane screen beyond the paraxial approximation. *Journal of the Optical Society of America A*, 2009, Vol. 26, Issue 9, pp. 1961–1966. DOI: 10.1364/JOSAA.26.001961
16. Terborg R.A., Volke-Sepúlveda K. Quantitative characterization of the energy circulation in helical beams by means of near-field diffraction. *Optics Express*, 2013, Vol. 21, Issue 3, pp. 3379–3387. DOI: 10.1364/OE.21.003379
17. Kundikova N.D., Popkov I.I. Difraktsiya na shcheli pologo tsepochnoobraznogo puchka s dislokatsiey volnovogo fronta (Diffraction by a slit of a hollow chain-like beam with a wave front dislocation). *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2015, Vol. 58, no. 11-3, pp. 61–63. (in Russ.).

Received March 14, 2018

УДК 535.4

DOI: 10.14529/mmph180309

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ СФОКУСИРОВАННОГО ПУЧКА ГАУССА НА ПОЛУПЛОСКОСТИ В ОБЛАСТИ ПЕРЕТЯЖКИ

Э.А. Бибикова^{1,2}, Н.Д. Кундикова^{1,2}, Н. Алвассити^{2,3}

¹ Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

² Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

³ Университет Аль-Мустансирия, г. Багдад, Ирак

E-mail: kundikovand@susu.ru

На основе численного моделирования и экспериментального исследования рассмотрена дифракция на краю экрана сфокусированного пучка Гаусса в окрестности области перетяжки. Моделирование распространения пучка Гаусса проводилось на основе решения уравнения Гельмгольца спектральным методом. Экспериментально исследовалась дифракция когерентного лазерного излучения на длине волны 0,63 мкм на краю прямоугольного экрана, перекрывающего половину пучка в поперечном направлении. Фокальная перетяжка формировалась с помощью линзы с фокусным расстоянием 4 см. Была обнаружена зависимость картины дифракции от положения экрана относительно положения фокальной перетяжки. Оказалось, что если экран расположен на расстояниях меньше фокусного, то дифракционная картина наблюдается в области тени и представляет собой полукруг с дифракционными полосами. Если экран помещен в область перетяжки, то дифракционная картина становится симметричной относительно края экрана. А если экран расположен на расстоянии большем фокусного расстояния, то дифракционная картина наблюдается в светлой области, при этом дифракционные полосы появляются уже с другой стороны. Полученные результаты могут быть использованы для точного определения положения перетяжки сфокусированных пучков Гаусса.

Ключевые слова: пучок Гаусса; перетяжка пучка; фокальная плоскость; дифракция света.

Литература

1. Abdulkareem, S. Joint effect of polarization and the propagation path of a light beam on its intrinsic structure / S. Abdulkareem, N. Kundikova // Opt. Express. – 2016. – Vol. 24, Issue 17. – P. 19157–19166.
2. Baranova, N.B. Transverse shift of a focal spot due to switching of the sign of circular polarization / N.B. Baranova, A.Yu. Savchenko, B.Ya. Zel'dovich // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – Т. 59, № 4. – С. 216–218.
3. Зельдович, Б.Я. Наблюдение поперечного сдвига фокальной перетяжки при смене знака циркулярной поляризации / Б.Я. Зельдович, Н.Д. Кундикова, Л.Ф. Рогачева // Письма в ЖТФ. – 1994. – Т. 59, вып. 11. – С. 737–740.
4. Transverse Angular Momentum and Geometric Spin Hall Effect of Light / A. Aiello, N. Lindlein, C. Marquardt, G. Leuchs // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – P. 100401.
5. Bekshaev, A. Improved theory for the polarization-dependent transverse shift of a paraxial light beam in free space / A. Bekshaev // Ukr. J. Phys. Opt. – 2011. – Vol. 12. – P. 10–18.
6. Neugebauer, M. Geometric spin Hall effect of light in tightly focused polarization-tailored light beams / M. Neugebauer // Phys. Rev. A. – 2014. – Vol. 89, Issue 1. – P. 13840.
7. Properties of a strongly focused Gaussian beam with an off-axis vortex / X. Zhao, J. Zhang, X. Pang, G. Wan // Opt. Commun. – 2017. – Vol. 389. – P. 275–282.
8. Transverse Focal Shift in Vortex Beams / X. Zhao, J. Zhang, X. Pang, G. Wan // IEEE Photonics Journal. – 2018. – Vol. 10. – Issue 1. – P. 6500417.
9. De Nicola, S. Focal shift effects in diffracted focused beams / S. De Nicola, D. Anderson, M. Lisak // Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A. – 1998. – Vol. 7, no. 5. – P. 1249–1259.

10. Sheppard, C.J.R. Focal shift and the axial optical coordinate for high-aperture systems of finite Fresnel number / C.J.R. Sheppard, P. Török // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2003. – Vol. 20. – Issue 11. – P. 2156–2162.
11. Ren, Z.-C. Focal shift in tightly focused Laguerre–Gaussian beams / Z.-C. Rena, S.-X. Qiana, C. Tua, Y. Lia, H.-T. Wang // *Opt. Commun.* – 2015. – Vol. 334. – P. 156–159.
12. Senior, T.B.A. Half plane edge diffraction / T.B.A. Senior // *Radio Science.* – 1975. – Vol. 10. – Issue 6. – P. 645–650.
13. Zeylikovich, I. Diffraction of a Gaussian laser beam by a straight edge leading to the formation of optical vortices and elliptical diffraction fringes / I. Zeylikovich, A. Nikitin // *Opt. Commun.* – 2018. – Vol. 413. – P. 261–268.
14. Bekshaev, A.Y. Spin–orbit interaction of light and diffraction of polarized beams / A.Y. Bekshaev // *Journal of Optics.* – 2017. – Vol. 19, no. 8. – P. 085602.
15. Luo, Y. Polarization singularities of Gaussian vortex beams diffracted at a half-plane screen beyond the paraxial approximation / Y. Luo, B. Lü // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2009. – Vol. 26. – Issue 9. – P. 1961–1966.
16. Terborg, R.A. Quantitative characterization of the energy circulation in helical beams by means of near-field diffraction / R.A. Terborg, K. Volke-Sepúlveda // *Optics Express.* – 2013. – Vol. 21, Issue 3. – P. 3379–3387.
17. Кундикова, Н.Д. Дифракция на щели полого цепочнообразного пучка с дислокацией волнового фронта / Н.Д. Кундикова, И.И. Попков // *Известия высших учебных заведений. Физика.* – 2015. – Т. 58, № 11-3. – С. 61–63.

Поступила в редакцию 14 марта 2018 г.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям наук и группам специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 01.04.00 – физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям “Ulrich’s Periodicals Directory”, “Zentralblatt MATH”, “Russian Science Citation Index on Web of Science”.

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 10, № 3
2018

16+

Редакторы: *О. Шаханская, А. Полякова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 16.07.2018. Дата выхода в свет 24.07.2018.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 9,30.

Тираж 500 экз. Заказ 188/291. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.