

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

СЕРИЯ

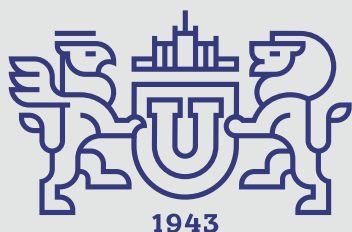
**МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА**

2019, том 11, № 3

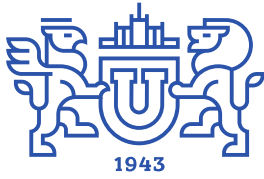
SERIES

**MATHEMATICS.
MECHANICS.
PHYSICS**

2019, volume 11, no. 3



ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2019
Т. 11, №3**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

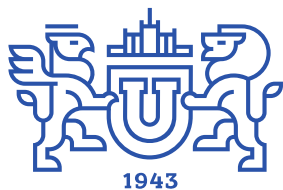
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университета Невады, г. Рино, США)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2019

Vol. 11, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany

G.L. Brovko, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

V.D. Buchelnikov, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

D. Guidetti, University of Bologna, Bologna, Italy

V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

I.V. Zalyapin, University of Nevada, Reno, United States of America

A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

Kisik Kim, INHA-University, Incheon, South Korea

N.D. Kundikova, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

V.V. Menshikh, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America

Y.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

L.V. Utkin, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium

V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БАРСУКОВ А.И., ГЛАЗКОВА М.Ю., РЯЖСКИХ В.И., СУМЕРА С.С. Коммутация спектральных делителей квадратичного пучка	5
БЫЧКОВ Е.В., СОЛОВЬЁВА Н.Н., СВИРИДЮК Г.А. Математическая модель акустических волн в ограниченной области с «белым шумом»	12
ЛИТВИНОВ В.А., УЧАЙКИН В.В. Метод сопряжённого уравнения в задаче об определении источника диффузии	20
МОРГУЛИС А.Б. Об устойчивости квазиравновесий систем типа Келлера–Сегеля в сильно неоднородной среде	28
НИКОЛАЕВ В.Г. О решениях однородной задачи Шварца в виде вектор-полиномов второй степени	41

Механика

ЛЕХ И.А., ТАРАНЕНКО П.А., БЕСКАЧКО В.П. Влияние пузырьков газа на вибрационные параметры измерительных трубок кориолисового расходомера	47
ХОХЛОВ А.В. Монотонное возрастание показателя скоростной чувствительности любых параллельных соединений линейных моделей вязкоупругости со степенными функциями релаксации	56

Персоналии

Валерий Петрович Бескачко. К 70-летию со дня рождения	68
---	----

CONTENTS

Mathematics

BARSUKOV A.I., GLAZKOVA M.Y., RYAZHSEKIKH V.I., SUMERA S.S. Commutativity of Spectral Divisors of Quadratic Pencils.....	5
BYCHKOV E.V., SOLOVYOVA N.N., SVIRIDYUK G.A. Mathematical Model of Acoustic Waves in a Bounded Domain with “White Noise”.....	12
LITVINOV V.A., UCHAIKIN V.V. Adjoint Equation Method for Solving the Inverse Diffusion Source Problem.....	20
MORGULIS A.B. Stability of the Quasi-Equilibria of Keller–Segel Systems in Strictly Inhomogeneous Environment.....	28
NIKOLAEV V.G. On the Solutions of the Schwartz Homogeneous Problem in the Form of Vector Polynomials of the Second Degree.....	41

Mechanics

LEKH I.A., TARANENKO P.A., BESKACHKO V.P. Gas Bubbles Effect on the Vibration Parameters of the Coriolis Flowmeter Measuring Tubes.....	47
KHOKHLOV A.V. Monotone Increase of the Strain Rate Sensitivity Value of Any Parallel Connection of the Fractional Kelvin–Voigt Models.....	56

Personalia

To the 70th Anniversary of Valery Beskachko.....	68
--	----

КОММУТАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА

А.И. Барсуков, М.Ю. Глазкова, В.И. Рязских, С.С. Сумера

*Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: a.barsoukov@mail.ru*

Объектом изучения представленной работы являются квадратичные матричные пучки, другими словами, квадратичные функции комплексной переменной, коэффициентами которой являются эрмитовы матрицы. Такие функции естественным образом появляются при изучении различных задач механики, геофизики и техники. В частности, при описании колебательной системы масс-струн с демпферами коэффициенты пучка характеризуют жесткости пружин и заданные демпферы. В связи с этим особый интерес вызывают так называемые обратные задачи для матричных пучков, то есть задачи построения пучков, обладающих наперед заданными свойствами. В нашей работе изучается возможность построения квадратичных пучков, допускающих разложение на коммутирующие линейные множители. Хорошо известно, что любой квадратичный пучок может быть представлен в виде произведения линейных (не обязательно коммутирующих) множителей, называемых спектральными делителями. Далее в нескольких работах последнего десятилетия было изучено описание структуры одного спектрального делителя через структуру другого. Нами получен критерий, описывающий множество спектральных делителей, для каждого из которых существует коммутирующий с ним второй спектральный делитель. Для каждого элемента этого множества описана структура всех спектральных делителей, коммутирующих с ним. Приведен критерий единственности решения этой задачи. Заметим, что условия этого критерия могут быть проверены для любой заданной квадратной матрицы. Полученные результаты позволяют строить квадратичные пучки, допускающие разложение на коммутирующие спектральные множители. Без ограничения общности предполагается, что задан левый спектральный делитель. Случай, когда задан правый спектральный делитель, сводится к рассмотренной ситуации взятием операции сопряжения.

Ключевые слова: квадратичные матричные пучки; спектральные делители; обратные задачи.

Введение и основные понятия

Пучком степени $k \in \mathbb{N}$ называется функция

$$L(\lambda) = \lambda^k I + \lambda^{(k-1)} A_{n-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0$$

комплексного переменного λ . Объектом наших исследований будут квадратичные пучки $k = 2$ с матричными эрмитовыми коэффициентами. Там, где это удобно, мы будем рассматривать коэффициенты пучка как матрицы операторов, самосопряженных относительно скалярного произведения (\cdot, \cdot) пространства \mathbb{C}^n . Общая теория таких функций изложена в [1, 2] (здесь рассмотрены пучки с произвольными самосопряженными коэффициентами в гильбертовом пространстве). Известно, например, теорема 11.2 в [1], что каждый квадратичный пучок $L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda A_1 + A_0$ может быть представлен в виде произведения $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$. Каждый из множителей в этом разложении называется спектральным делителем пучка L . Построение спектрального делителя $\lambda I - X$ по заданному спектральному делителю $\lambda I - A$ было изучено в работе [3] в случае, когда все собственные значения матрицы A простые и различные, и работе [4] – для произвольной матрицы A . Эта задача относится к классу так называемых обратных задач, которые активно

исследуются в наши дни. Обзор различных типов обратных задач для матричных пучков содержится в работе [5]. Там же и в [6, 7] можно найти приложения этих задач к различным проблемам механики. Нами рассмотрена задача описания всех спектральных делителей $\lambda I - X$, коммутирующих с заданным $\lambda I - A$. Получены необходимые и достаточные условия на матрицу A , при выполнении которых эта задача имеет решение и описана структура множества решений X . Рассмотрение задачи с заданным левым спектральным делителем несколько не ограничивает общности, так как задача с известным правым спектральным делителем легко сводится к задаче с известным левым спектральным делителем. Действительно, предположим, что задан делитель $\lambda I - X$ и нужно определить множитель $\lambda I - A$, для которого коэффициенты пучка $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ являются эрмитовыми матрицами. Из равенства $(\lambda I - A)(\lambda I - X) = (\lambda I - X^*)(\lambda I - A^*)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ следует, что по заданному левому делителю X^* требуется найти правый делитель A^* . После этого матрица A будет решением нашей задачи.

Основные результаты

В работе было показано, как по заданной матрице A определить все матрицы X , для которых пучок $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ имеет эрмитовы коэффициенты. В частности, было доказано, что в случае, когда $\sigma(A) \cap \sigma(A^*)$ является пустым множеством, задача имеет единственное решение $X = A^*$, а в остальных случаях решений бесконечно много. Здесь будет выделен класс решений X , коммутирующих с заданной матрицей A . В соответствии с теоремой 5 работы [4] спектральные делители $\lambda I - A$ и $\lambda I - X$ связаны равенством $X = A^* + W_0$, где W_0 является эрмитовой матрицей специального вида. Тогда условия

$$A + X = A^* + X^*, \quad AX = X^*A^*, \quad AX = XA \quad (1)$$

можно переписать в эквивалентном виде

$$AW_0 = W_0A^*, \quad W_0 = W_0^*, \quad AA^* - A^*A = W_0(A - A^*). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть задана произвольная матрица A . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) система (2) имеет решение W_0 ;
- 2) матрица A представима в виде $A = T\tilde{A}T^{-1}$, где $T^{-1} = T^*$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = A_{22}^* \quad (3)$$

и матрица A_{11} удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} (A_{11}^* - A_{11})A_{11}(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}) = (A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})A_{11}^*(A_{11} - A_{11}^*), \\ (A_{11}^* - A_{11})(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}) = (A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})(A_{11} - A_{11}^*). \end{cases} \quad (4)$$

При выполнении условий матрица W_0 имеет вид

$$W_0 = T \begin{pmatrix} (A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})(A_{11} - A_{11}^*)^{-1} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} T^{-1},$$

где W_{22} – любое решение уравнения $A_{22}W_{22} = W_{22}A_{22}$.

Доказательство. Пусть матрица W_0 является решением системы (2). Рассмотрим некоторый ортонормированный базис $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_0\}$ пространства \mathbb{C}^n , где ε_1 является базисом подпространства $\text{ran}(A^* - A)$, а ε_0 является базисом подпространства $\text{ker}(A^* - A)$. Пусть T – матрица перехода от базиса ε к стандартному базису пространства. Тогда $T^{-1} = T^*$. Обозначим $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{W}_0 = T^{-1}W_0T$. В силу условия $T^{-1} = T^*$ равенства (2) равносильны аналогичным равенствам для матриц \tilde{A} и \tilde{W}_0 . Представим матрицу \tilde{A} в виде

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу выбора базиса \mathcal{E} выполнены равенства $A_{21} = A_{12}^*$, $A_{22} = A_{22}^*$.

Так как $\tilde{W}_0(\tilde{A}^* - \tilde{A}) = (\tilde{W}_0(\tilde{A}^* - \tilde{A}))^* = (\tilde{A} - \tilde{A}^*)\tilde{W}_0$ и матрица $A_{11}^* - A_{11}$ невырождена, то матрица \tilde{W}_0 имеет блочно-диагональную форму:

$$\tilde{W}_0 = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь система (2) для матриц \tilde{A} и \tilde{W}_0 принимает вид

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, W_{11} = W_{11}^*, W_{22} = W_{22}^*; \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(A - A^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5)$$

Приравняв правые верхние элементы в последнем равенстве системы (5), получаем $(A_{11} - A_{11}^*)A_{12} = 0$. Это означает, что $A_{12} = 0$ и мы можем записать систему, равносильную системе (5):

$$\begin{cases} A_{12} = 0, A_{22}W_{22} = W_{22}A_{22}, A_{11}W_{11} = W_{11}A_{11}^*, \\ W_{11} = W_{11}^*, A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11} = W_{11}(A_{11} - A_{11}^*). \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что уравнение $A_{22}W_{22} = W_{22}A_{22}$ имеет решение W_{22} для любой матрицы A_{22} . Следовательно, система (6) имеет решение тогда и только тогда, когда A_{11} удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} A_{11}(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})(A_{11} - A_{11}^*)^{-1} = (A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})(A_{11} - A_{11}^*)^{-1}A_{11}^*, \\ (A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})(A_{11} - A_{11}^*)^{-1} = (A_{11}^* - A_{11})^{-1}(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}). \end{cases}$$

Очевидно, что эти условия равносильны условиям (4) и

$$W_{11} = (A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11})(A_{11} - A_{11}^*)^{-1}.$$

Пусть теперь выполнено условие 2. Непосредственно проверяется, что \tilde{A} и \tilde{W}_0 удовлетворяют системе (2). Тогда $A = T\tilde{A}T^{-1}$ и $W_0 = T\tilde{W}_0T^{-1}$ с $T^{-1} = T^*$ также удовлетворяют этой системе (2) и $X = A^* + W_0$ является решением системы (1).

Следствие 2. Пусть задана матрица A . Система (1) имеет единственное решение $X = A^*$ тогда и только тогда, когда $\ker(A^* - A) = \{\theta\}$ и матрица A удовлетворяет условию (4) теоремы 1.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 1 следует, что в качестве T можно брать матрицу перехода от любого ортонормированного базиса, построенного по разложению $\mathbb{C}^n = \text{ran}(A^* - A) \oplus \ker(A^* - A)$, к стандартному базису пространства \mathbb{C}^n .

Теорема 4. Пусть дана произвольная матрица A . Тогда следующие условия равносильны:

1) система (1) имеет решение;

2) матрица A представима в виде $A = T\tilde{A}T^{-1}$, где $T^{-1} = T^*$, $\tilde{A} = \text{diag}\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ и

2а) \tilde{A}_1 – произвольная диагональная матрица;

2б) матрица \tilde{A}_2 представима в блочном виде, где все вне диагональные блоки нулевые, а каждый диагональный блок имеет вид

$$A_l = \begin{pmatrix} 0, 5i\lambda_l I_l + A'_l & D_l \\ D_l^* & -0, 5i\lambda_l I_l + D_l^* A'_l D_l^{*-1} \end{pmatrix},$$

где D_l – произвольная невырожденная матрица, $A'_l = A_l^*$, $\lambda_l \in \sigma(A)$, $\lambda_l \neq 0$.

Доказательство. Пусть система (1) имеет некоторое решение $X = A^* + W_0$, где A и W_0 связаны равенствами (2). Перейдем от матриц A и A^* к матрицам \tilde{A} и \tilde{A}^* в некотором ортонормированном базисе \mathcal{E} , построенном по разложению $\mathbb{C}^n = \ker(A^* - A) \oplus \text{ran}(A^* - A)$. Пусть T – матрица перехода от базиса \mathcal{E} к стандартному базису пространства \mathbb{C}^n . Тогда $A = T\tilde{A}T^{-1}$, $W_0 = T\tilde{W}_0T^{-1}$ и $T^{-1} = T^*$. Из (2) и равенства $T^{-1} = T^*$ вытекает включение $\ker(\tilde{A}^* - \tilde{A}) \subseteq \ker(\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A})$. Поэтому

$$\tilde{A}^* - \tilde{A} = \text{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{A}\}, \tag{7}$$

$$\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A} = \text{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{D}\}. \tag{8}$$

Согласно теореме 1

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}\mathfrak{D},$$

где матрицы \mathfrak{A} , \mathfrak{D} имеют размер, равный размерности пространства $\text{ran}(\tilde{A}^* - \tilde{A})$. Отсюда следует, что каждый собственный вектор матрицы \mathfrak{A} , отвечающий собственному значению $\lambda \neq \theta$, переводится матрицей \mathfrak{D} в нулевой вектор или в собственный вектор $\mathfrak{D}f$ матрицы \mathfrak{A} , отвечающий собственному значению $-\lambda$. При этом если $\mathfrak{D}f \neq \theta$, то он переводится матрицей \mathfrak{D} в собственный вектор $\mathfrak{D}^2 f$ матрицы \mathfrak{A} , отвечающий собственному значению λ . Чтобы это доказать, нужно исключить равенство $\mathfrak{D}^2 f = \theta$. Предположив противное, получим, что $\mathfrak{D}f \neq \theta$ и $\mathfrak{D}^2 f = \theta$. Но это невозможно, так как матрица \mathfrak{D} кососимметрическая. Обозначим

$$\mathcal{L}_1(i\lambda_j) = \{f \in \mathbb{C}^n : \mathfrak{A}f = i\lambda_j f, \mathfrak{D}f = \theta\}, \quad j = 1, \dots, k; \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_2(\pm i\lambda_j) = \{f \in \mathbb{C}^n : \mathfrak{A}f = \pm i\lambda_j f, \mathfrak{D}f \neq \theta\}, \quad j = k+1, \dots, s; \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_0 = \ker(A - A^*).$$

Заметим, что некоторые собственные значения из (9) могут совпадать с собственными значениями из (10). Из приведенных выше рассуждений следует, что $\dim \mathcal{L}_2(i\lambda_j) = \dim \mathcal{L}_2(-i\lambda_j)$ и $\mathfrak{D}\mathcal{L}_2(\pm i\lambda_j) = \mathcal{L}_2(\mp i\lambda_j)$.

Представим пространство \mathbb{C}^n в виде ортогональной суммы

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(i\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_1(i\lambda_k), \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(i\lambda_{k+1}) \oplus \mathcal{L}_2(-i\lambda_{k+1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_2(i\lambda_s) \oplus \mathcal{L}_2(-i\lambda_s). \tag{12}$$

Теперь будем считать, что ортонормированный базис \mathcal{E} состоит из объединения ортонормированных базисов, выбранных в каждом из слагаемых в разложении (11), (12) пространства \mathbb{C}^n .

Тогда матрицы $\tilde{A}^* - \tilde{A}$ и $\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}$ в построенном базисе \mathcal{E} имеют вид

$$\begin{aligned} A^* - A &= \text{diag}\{0 \cdot I_0, i\lambda_1 I_1, \dots, i\lambda_k I_k, \mathfrak{A}_{k+1}, \dots, \mathfrak{A}_s\} = \\ &= i \cdot \text{diag}\left\{0 \cdot I_0, \lambda_1 I_1, \dots, \lambda_k I_k, \lambda_{k+1} \begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ 0 & -I_{k+1} \end{pmatrix}, \dots, \lambda_s \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}\right\}, \\ AA^* - A^*A &= \text{diag}\{0 \cdot I_0, 0 \cdot I_1, \dots, 0 \cdot I_k, \mathfrak{D}_{k+1}, \dots, \mathfrak{D}_s\} = \end{aligned} \tag{13}$$

$$= \text{diag} \left\{ 0 \cdot I_0, 0 \cdot I_1, \dots, 0 \cdot I_k, \begin{pmatrix} 0 & D_{k+1} \\ D_{k+1}^* & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & D_s \\ D_s^* & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (14)$$

Возможно, что $\ker(A^* - A) = \{\theta\}$. В этом случае матрица I_0 будет отсутствовать в наших представлениях. При определении матриц \mathfrak{D}_l было показано, что они являются обратимыми для всех $l = k, \dots, s$.

Запишем матрицу \tilde{A} в блочном виде $\tilde{A} = (A_{ml})_{m,l=0}^{m,l=s}$ в базисе \mathcal{E} . Из (7) следует, что

$$A_{m,l} = A_{l,m}^* \text{ для всех } l \neq m, \quad (15)$$

$$A_{ll}^* - A_{ll} = i\lambda_l I_l \text{ для всех } l = 0, \dots, k, \quad (16)$$

$$A_{ll}^* - A_{ll} = i\lambda_l \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s. \quad (17)$$

Равенства (16) означают, что матрицы A_{ll} можно представить в виде

$$A_{ll} = -0,5i\lambda_l I_l + A_l \text{ для всех } l = 0, \dots, k. \quad (18)$$

Следовательно, существует ортогональная матрица T_l , для которой

$$A_{ll} = T_l (-0,5i\lambda_l I_l + E_l) T_l^{-1}, \quad E_l - \text{вещественная диагональная матрица, } l = 0, \dots, k. \quad (19)$$

Таким образом, с учетом теоремы 1 доказано представление матрицы \tilde{A}_1 .

Равенство (8) с учетом (7) принимает вид

$$\tilde{A} \cdot \text{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{A}\} - \text{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{A}\} \cdot \tilde{A} = \text{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{D}\}. \quad (20)$$

Из последнего равенства получаем, что для каждого $l = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{pmatrix} A_{1l} \cdot i\lambda_l I_l \dots A_{kl} \cdot i\lambda_l I_l & A_{k+1,l} \cdot i\lambda_l I_l \dots A_{sl} \cdot i\lambda_l I_l & A_{s+1,l} \cdot i\lambda_l I_l \\ (i\lambda_l I_l \cdot A_{1l} \dots i\lambda_l I_k \cdot A_{kl} & \mathfrak{A}_{k+1} \cdot A_{k+1,l} \dots \mathfrak{A}_s \cdot A_{s,l} & 0 \cdot I_{s+1})^T \end{pmatrix} =$$

Следовательно, $A_{ml} = 0$ для всех $m = 1, \dots, k$ и $m \neq l$.

Далее из (20) для каждого $l = k+1, k+2, \dots, s$:

$$\begin{pmatrix} A_{1l} \cdot \mathfrak{A}_l \dots A_{kl} \cdot \mathfrak{A}_l & A_{k+1,l} \cdot \mathfrak{A}_l \dots A_{sl} \cdot \mathfrak{A}_l & A_{s+1,l} \cdot \mathfrak{A}_l \\ (i\lambda_l I_l \cdot A_{1l} \dots i\lambda_l I_k \cdot A_{kl} & \mathfrak{A}_{k+1} \cdot A_{k+1,l} \dots \mathfrak{A}_l \cdot A_{ll} + \mathfrak{D}_l \dots \mathfrak{A}_s \cdot A_{sl} & 0 \cdot I_{s+1})^T \end{pmatrix} = \quad (21)$$

Отсюда

$$A_{ll} \cdot \mathfrak{A}_l = \mathfrak{A}_l \cdot A_{ll} + \mathfrak{D}_l, \quad l = k+1, \dots, s. \quad (22)$$

Непосредственной проверкой из последнего равенства получаем, что матрица A_{ll} имеет вид

$$A_{ll} = \begin{pmatrix} A'_{ll} & \frac{i}{2\lambda_l} D_l \\ -\frac{i}{2\lambda_l} D_l^* & A''_{ll} \end{pmatrix} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s. \quad (23)$$

Запишем матрицы $\tilde{A}, \tilde{A}^* - \tilde{A}, \tilde{A}^* \tilde{A} - \tilde{A} \tilde{A}^*$ в блочном виде относительно разложения

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{L}_{01} \oplus \mathcal{L}_2, \text{ где } \mathcal{L}_{01} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \quad (24)$$

в виде

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{12}^* & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^* - \tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_{22} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Из первого равенства системы (4) вытекает равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{A}_{11} \cdot \tilde{A}_{12} \cdot \mathfrak{D}_{22} \\ 0 & \mathfrak{A}_{22} \cdot \tilde{A}_{22} \cdot \mathfrak{D}_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{D}_{22} \cdot \tilde{A}_{12}^* \cdot \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{D}_{22} \cdot \tilde{A}_{12}^* \cdot \mathfrak{A}_{11} \end{pmatrix}.$$

Так как в построении ненулевых элементов матрицы $\mathfrak{A}_{11} \cdot \tilde{A}_{12} \cdot \mathfrak{D}_{22}$ участвуют обратимые блоки из \mathfrak{A}_{11} и \mathfrak{D}_{22} , то $\tilde{A}_{12} = 0$.

Так как все матрицы в равенстве $\mathfrak{A}_{22} \cdot \tilde{A}_{22} \cdot \mathfrak{D}_{22} = -\mathfrak{D}_{22} \cdot \tilde{A}_{22}^* \cdot \mathfrak{A}_{22}$ имеют блочно-диагональный вид, определяемый равенствами (14), (17) и (23), то мы получаем равенства

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} i\lambda_l I_l & 0 \\ 0 & -i\lambda_l I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{ll} & \frac{i}{2\lambda_l} D_l \\ -\frac{i}{2\lambda_l} D_l^* & A''_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_l \\ D_l^* & 0 \end{pmatrix} = \\ & = - \begin{pmatrix} 0 & D_l \\ D_l^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{ll} & \frac{i}{2\lambda_l} D_l \\ -\frac{i}{2\lambda_l} D_l^* & A''_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\lambda_l I_l & 0 \\ 0 & -i\lambda_l I_l \end{pmatrix} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s. \end{aligned}$$

Отсюда и из (17) следуют равенства

$$\begin{aligned} A'_{ll} - A'_{ll} = i\lambda_l I_l, \quad A''_{ll} - A''_{ll} = -i\lambda_l I_l, \quad A'_l D_l = D_l A''_{ll} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s, \\ A''_{ll} = D_l^* A'_{ll} D_l^{*-1} = -0,5i\lambda_l I_l + D_l^* A'_l D_l^{*-1} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s. \end{aligned}$$

С учетом равенства $\tilde{A}_{12} = 0$ это завершает описание матрицы \tilde{A}_2 и всей матрицы \tilde{A} .

Пусть теперь выполнено условие 2. Тогда выполняются условия (4) теоремы 1. Значит, система (1) имеет решение.

Пример 5. Используя теорему 4, опишем множество матриц A второго порядка, для которых существуют коммутирующие делители X . В этом случае возможны два варианта:

$$\begin{aligned} A &= T \tilde{A} T^{-1}, \quad \tilde{A} - \text{диагональная матрица или} \\ A &= T \begin{pmatrix} \mu + i\lambda & \nu \\ \bar{\nu} & \mu - i\lambda \end{pmatrix} T^{-1}, \quad \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{R}, \nu \neq 0. \end{aligned}$$

Литература

1. Gohberg, I. Matrix Polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. – Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2009. – 409 p.
2. Markus A.S. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils / A.S. Markus. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. – 1988. – 250 p.
3. Lancaster, P. Hermitian quadratic matrix polynomials: Solvents and inverse problems / P. Lancaster, F. Tisseur. – Manchester Institute for Mathematical Sciences, University of Manchester, UK, 2010. – no. 10. – P. 1–10.
4. Барсуков, А.И. Об одной обратной задаче для матричных пучков с эрмитовыми коэффициентами / А.И. Барсуков // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. – 2016. – № 4. – С. 72–82.
5. Chu, M.T. Inverse eigenvalue problems / M.T. Chu // SIAM Rev. – 1998. – Vol. 40, no. 1. – P. 1–39.
6. Timoshenko, S. Vibration Problems in Engineering, fourth ed. / S. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Jr. – Wiley, Chichester, 1974. – 538 p.
7. Gladwell, G.M.L. Inverse problems in vibrations / G.M.L. Gladwell. – Dordrecht, Boston, Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers, 1986. – 400 p.

Поступила в редакцию 9 июля 2019 г.

COMMUTATIVITY OF SPECTRAL DIVISORS OF QUADRATIC PENCILS

A.I. Barsukov, M.Y. Glazkova, V.I. Ryazhskikh, S.S. Sumera
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: a.barsoukov@mail.ru

The object of study of the presented work are quadratic matrix pencils, in other words, quadratic functions of a complex variable, the coefficients of which being the Hermitian matrices. Such functions naturally appear when different problems of mechanics, geophysics or engineering are being studied. In particular, when an oscillatory system of mass-strings with dampers is described, the pencil coefficients characterize the stiffness of the springs and the set dampers. In this context, the so called inverse problems for matrix pencils are of special interest, that is, the problems of building pencils with preset properties. In our work, we study the possibility of building quadratic pencils, allowing for commuting linear factorization. It is well known that any quadratic pencil may be presented as a product of linear (not necessarily commuting) factors, which are called spectral divisors. Henceforth, the description of the structure of one spectral divisor through the structure of another has been studied in several works of the recent decade. We have obtained the criterion, which describes a set of spectral divisors, for each one of which there exists a second commuting spectral divisor. For each element of this set, a structure of all spectral divisors, commuting with it, is described. The criterion of uniqueness of solution to this problem is given. We should note that the conditions of this criterion can be verified for any set quadratic matrix. The obtained results allow to build quadratic pencils, allowing for commuting spectral factorization. Without loss of generality, it is assumed that the left spectral divisor is set. The case when the right spectral divisor is set, is reduced to the considered situation through conjugation operation.

Keywords: quadratic matrix pencils; spectral divisors; inverse problems.

References

1. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Matrix Polynomials*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 409 p.
2. Markus A.S. *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*. In: Translation of Mathematical Monographs, Vol. 71, American Mathematical Society, Providence, 1988, 250 p.
3. Lancaster P., Tisseur F. *Hermitian quadratic matrix polynomials: Solvents and inverse problems*. Manchester Institute for Mathematical Sciences, University of Manchester, UK, 2010, no. 10, pp. 1–10.
4. Barsukov A.I. About an inverse problem for matrix pencils with Hermitian coefficients. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 72–82. (in Russ.).
5. Chu M.T. Inverse eigenvalue problems. *SIAM Rev.*, 1998, Vol. 40, no. 1, pp. 1–39. DOI: 10.1137/S0036144596303984
6. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W. Jr. *Vibration Problems in Engineering*, fourth ed., Wiley, Chichester, 1974, 538 p.
7. Gladwell G.M.L. *Inverse problems in vibrations*. Dordrecht, Boston, Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers, 1986, 400 p.

Received July 9, 2019

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С «БЕЛЫМ ШУМОМ»

Е.В. Бычков, Н.Н. Соловьёва, Г.А. Свиридюк

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: bychkovev@susu.ru

Представлен новый взгляд на классическую задачу о распространении акустических волн в ограниченной области с постоянной фазовой скоростью. Классическая постановка формулируется в детерминированных пространствах, а в данной работе – в пространствах K -«шумов». Исследуется начально-краевая задача для неоднородного стохастического гиперболического уравнения. Начальные данные являются случайными K -величинами, а функция неоднородности – случайным K -процессом в абстрактной постановке. При рассмотрении приложения функция неоднородности задается как «белый шум». В данной работе под термином «белый шум» понимается первая производная в смысле Нельсона–Гликлиха винеровского K -процесса. Данную задачу можно считать обобщением классической, поскольку производная Нельсона–Гликлиха от детерминированной функции совпадает с классической производной. Результаты, полученные для абстрактного детерминированного гиперболического уравнения, переложены на стохастический случай. Абстрактные результаты применяются к математической модели распространения акустических волн в ограниченной области из R^n с гладкой границей с неоднородностью в виде «белого шума».

Ключевые слова: акустические волны; задача Коши–Дирихле; «белый шум»; винеровский K -процесс; пропагаторы.

Введение

Классическое гиперболическое уравнение математической физики

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f \quad (1)$$

в настоящее время хорошо изучено в различных постановках и в ограниченной области, и в неограниченной, и с нелокальными граничными условиями, и с разрывными функциями на границе, например, [1]. На основе этого уравнения строятся динамические математические модели, а также математические модели, описывающие волновые процессы [2]. Также оно может быть базовым уравнением для исследования математических моделей шумового загрязнения окружающей среды. Одним из наиболее сильных источников шумового загрязнения является авиация [3]. Влияние авиационного шума на оператора авиационных эргатических систем управления исследовалось в [3].

В работах И.В. Мельниковой [4] построена теория M , N -функций, на основе которой исследуются абстрактные операторно-дифференциальные уравнения. Для исследования уравнений соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0u + f \quad (2)$$

в работах А.А. Замышляевой, например [5], было введено понятие вырожденного семейства M, N -функций, разработана теория полиномиально относительно ограниченных пучков операторов, и на ее основе построены пропагаторы уравнения (3):

$$U_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\bar{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t} d\mu, \quad U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\bar{B})Ae^{\mu t} d\mu, \quad (3)$$

найдено частное решение неоднородного уравнения (2)

$$\tilde{u} = \int_0^t U_0^{t-s} A_1^{-1} Qf(s) ds \quad (4)$$

и получено общее решение задачи Коши в виде

$$u(t) = U_1^t u_1 + U_0^t u_0 + \tilde{u}.$$

В настоящей работе будет рассмотрено уравнение (1) в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ в виде

$$u_{tt}^{\circ} = a^2 \Delta u + w_{Kt}^{\circ} \quad (5)$$

с начальными условиями Коши

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} u(\tau) = u_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} u_t^{\circ}(\tau) = u_1, \quad (6)$$

где a – фазовая скорость распространения волны (скорость звука в среде), а w_K° – «белый шум», характеризующий источники звука внутри области, u_0 и u_1 – начальная форма волны и начальная скорость волны (случайные величины) соответственно. На границе области зададим однородное условие Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times R, \quad (7)$$

естественно, можно рассмотреть и неоднородное граничное условие, которое описывает случайное воздействие на границе области. Линейной заменой можно перейти от неоднородного граничного условия к однородному, поэтому без потери общности рассмотрим только условие вида

(7). Символом u_t° (u_{tt}°) обозначим первую (вторую) производную Нельсона–Гликлиха случайного процесса u . Под «белым шумом» $w_{Kt}^{\circ}(t)$ будем понимать первую производную Нельсона–Гликлиха винеровского процесса $w_K(t)$, т. е. $w_{Kt}^{\circ}(t) = \frac{w_K(t)}{2t}$.

Понятие производной Нельсона–Гликлиха введено в монографии [6], там же найдена первая производная произвольного случайного процесса. Позже вычислены производные случайных процессов высших порядков, и исследованы первые математические модели с «белым шумом» [7]. Производная Нельсона–Гликлиха базируется на понятии производной в среднем, введенном Нельсоном [8]. Помимо подхода к «белому шуму» как производной Нельсона–Гликлиха распространен подход Ито–Стратоновича–Скоророда, который используется в работе Ковача и Ларсона [9] и в [10]. Кроме того в работе [9] рассмотрено уравнение (5) в форме дифференциалов Ито с однородными начальными условиями, решение поставленной задачи найдено путем сведения уравнения к системе первого порядка. Аналогичного подхода придерживается И.В. Мельникова: в работе [11], в ней вводится понятие пространства обобщенных H -значных случайных величин, в которых H -значный белый шум оказывается гладким по переменной t . В работе [12] показано, что производная Нельсона–Гликлиха винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями теории броуновского движения Эйнштейна–Смолуховского, поэтому стохастический процесс был назван «белым шумом». Данный подход успешно применяется и к исследованию дихотомий стохастического уравнения, заданного на многообразии [13], и к исследованию математических моделей измерительных устройств [12].

Статья помимо введения и списка литературы состоит из трех параграфов. В первом параграфе коротко описаны пространства случайных K -величин, случайных K -процессов и K -шумов, подробнее [14, 15]. Во втором параграфе результаты, полученные для детерминированного уравнения (3), переносятся в пространства K -шумов, затем абстрактные результаты применяются к исследованию математической модели (5)–(7).

1. Пространство K -шумов

Теория уравнений соболевского типа в настоящее время переносится в пространства K -шумов. В данном параграфе для полноты картины приведем лишь необходимые сведения о пространствах K -шумов, подчерпнутые в основном в [14, 15]. Обозначим через $\Omega \equiv (\Omega, A, P)$ полное вероятностное пространство. Измеримое отображение $\xi: \Omega \rightarrow R$ назовем *случайной величиной*. Множество случайных величин, чьи математические ожидания равны нулю (т. е. $E\xi = 0$), а дисперсии конечны (т. е. $D\xi < +\infty$), образует гильбертово пространство L_2 со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2$. Обозначим через A_0 σ -подалгебру σ -алгебры A и

построим пространство L_2^0 случайных величин, измеримых относительно A_0 , тогда L_2^0 является подпространством пространства L_2 . Пусть $\xi \in L_2$, тогда $P\xi$, где $P: L_2 \rightarrow L_2^0$ – ортопроектор, будем называть *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначим символом $E(\xi | A_0)$.

Пусть $I = (0, T), T \in R_+$. Рассмотрим два отображения: $f: I \rightarrow L_2$, которое каждому $t \in I$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in L_2$, и $g: L_2 \times \Omega \rightarrow R$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in R$. Отображение $\eta: I \times \Omega \rightarrow R$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, мы назовем (*одномерным*) *случайным процессом*. Если п. н. все траектории случайного процесса непрерывны, то такой процесс назовем *непрерывным*. Обозначим через CL_2 множество непрерывных случайных процессов, которое образует банахово пространство. Примером непрерывного случайного процесса является одномерный винеровский процесс $\beta = \beta(t)$, который можно представить в виде

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2} (2k+1)t, \quad (8)$$

где ξ_k – некоррелируемые гауссовы случайные величины, такие что $E\xi_k = 0$, $D\xi_k = \left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^{-2}$.

Теперь зафиксируем произвольный непрерывный случайный процесс $\eta \in CL_2$ и $t \in I$ через N_t^η обозначим σ -алгебру, порожденную случайной величиной $\eta(t)$, а через $E_t^\eta = E(\cdot | N_t^\eta)$ – условное математическое ожидание.

Пусть $\eta \in CL_2$, производной в среднем справа $D\eta(t, \cdot)$ (слева $D_*\eta(t, \cdot)$) случайного процесса η в точке $t \in (t, \tau)$ называется случайная величина

$$D\eta(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t + \Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\Delta t} \right) \\ \left(D_*\eta(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t - \Delta t, \cdot)}{\Delta t} \right) \right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на R . Случайный процесс η называется *дифференцируемым в среднем справа (слева) на I* , если в каждой точке $t \in I$ существует производная в среднем справа (слева). Пусть $\eta \in CL_2$ – дифференцируемый случайный процесс в среднем справа и слева на I . Тогда *симметрическая производная в среднем* определяется как $\overset{\circ}{\eta} = D_S\eta = \frac{1}{2}(D + D_*)\eta$. Симметрическую производную в среднем в дальнейшем будем называть

производной Нельсона–Гликлиха. Через $\overset{\circ}{\eta}^{(l)}$, $l \in N$, обозначим l -ю производную Нельсона–Гликлиха случайного процесса η . Следует отметить, что если $\eta(t)$ является детерминированной функцией, то производная Нельсона–Гликлиха совпадает с классической производной. В случае одномерного винеровского процесса $\beta = \beta(t)$ справедливо:

- (i) $\overset{\circ}{\beta}(t) = \frac{\beta(t)}{2t}$ при всех $t \in R_+$;
- (ii) $\overset{\circ}{\beta}^{(l)}(t) = (-1)^{l-1} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} (2i-1) \cdot \frac{\beta(t)}{(2t)^l}$, $l \in N, l \geq 2$.

Построим пространства шумов $C^l L_2$, $l \in N$ как пространство случайных процессов из CL_2 , чьи траектории почти наверно дифференцируемы в смысле производной Нельсона–Гликлиха на I до порядка l включительно.

Пусть V – некоторое вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В пространстве $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ выберем базис $\{\varphi_k\}$, тогда каждый элемент $u \in V$ представим в виде $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Пусть $K = \{V_k\}$ – монотонно убывающая

числовая последовательность такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} V_k^2 < +\infty$. В пространстве L_2 выберем

последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} V_k^2 D\xi_k < +\infty$. Тогда через $V_K L_2$

обозначим гильбертово пространство случайных K -величин вида $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \xi_k \varphi_k$. При этом для

существования случайной K -величины $\xi \in V_K L_2$ достаточно, например, чтобы $D\xi_k < \text{const } \forall k$.

Заметим, что пространство $V_K L_2$ гильбертово со скалярным произведением

$$(\xi^1, \xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^2 E \xi_k^1 \xi_k^2.$$

В пространстве CL_2 выберем последовательность случайных процессов $\{\eta_k\}$, определим V -значный непрерывный случайный K -процесс формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \eta_k(t) \varphi_k, \quad (9)$$

при условии, что ряд (9) сходится равномерно на любом компакте из I по норме $V_K L_2$. Введем в

рассмотрение производные Нельсона–Гликлиха случайного K -процесса $\overset{o(l)}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \overset{o(l)}{\eta}_k(t) \varphi_k$

при условии, что в правой части существуют производные Нельсона–Гликлиха до порядка l включительно, и все ряды сходятся равномерно на любом компакте из I по норме $V_K L_2$.

Рассмотрим пространство $C^l(I; V_K L_2)$ непрерывных случайных K -процессов, чьи траектории п.н. непрерывно дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху до порядка $l \in N$ включительно.

Примером K -процесса из пространства $C^l(I; V_K L_2)$ служит винеровский K -процесс [15]

$w_K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \beta_k(t) \varphi_k$, где $\{\beta_k\} \subset C^l L_2$ – последовательность одномерных винеровских процессов

(или же математическая модель броуновского движения в теории Эйнштейна–Смолуховского) на I . Краткости ради пространство $C^l(I; V_K L_2)$ будем называть *пространством K -«шумов»*.

2. Математическая модель

В данном параграфе мы рассмотрим вспомогательную задачу и для нее построим пропагаторы. Используя следующую лемму, мы можем перенести теорию пропагаторов и полиномиально ограниченных пучков операторов в пространство случайных K -величин

Лемма 1. Пусть U, F – сепарабельные гильбертовы пространства и $A \in L(U; F)$ (линейный и непрерывный). Тогда $A \in L(U_K L_2; F_K L_2)$.

Рассмотрим вспомогательную начальную задачу

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} u(\tau) = u_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \overset{o}{u}_t(\tau) = u_1 \quad (10)$$

для абстрактного уравнения

$$u_{tt} = B_0 u + Nf, \quad (11)$$

где $B_0 \in L(V_K L_2; V_K L_2)$, $u \in C^{l+2}(I; V_K L_2)$ – искомый случайный K -процесс, $f \in C^{l+1}(I; V_K L_2)$ – «белый шум».

Два случайных K -процесса будем называть равными, если каждая траектория одного процесса почти наверно совпадает с некоторой траекторией второго, и наоборот.

Определение 1. Случайный K -процесс $u \in C^{l+2}(I; V_k \mathbf{L}_2)$ назовем решением уравнения (11), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (11) при всех $t \in I$. Решение $u = u(t)$ уравнения (11), назовем решением задачи (10), (11), если оно удовлетворяет условию (10).

Теорема 1. Пусть оператор $B_0 \in L(V_K \mathbf{L}_2; V_K \mathbf{L}_2)$. Тогда при случайном процессе f таком, что $Nf \in C^{l+1}(I, V_k \mathbf{L}_2)$, и независимых случайных величинах $u_k, k = 0, 1$, независимых с Nf при фиксированных $t \in [0, \tau]$ существует единственное решение u задачи (10), (11). Причем решение имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^1 U_k^t u_k + \int_0^t U_1^{t-s} Nf(s) ds. \quad (12)$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке решения.

Перейдем к построению решения задачи (5)–(7) в пространствах K -«шумов» посредством редукции к задаче (10), (11).

Пусть область $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Зафиксируем $m \in N$ и зададим пространства $U = \{u \in W_2^{m+2}(\Omega) : u(x, t) = 0 \ (x, t) \in \partial\Omega \times R_+\}$ и $F = W_2^m(\Omega)$. Очевидно, что U является сепарабельным гильбертовым пространством. Обозначим через $\{\lambda_i\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа с однородными граничными условиями Дирихле, пронумерованных в неубывающем порядке с учетом кратности, и через $\{\varphi_i\}$ – последовательность соответствующих ортонормированных собственных функций.

Введем U -значные случайные K -процессы. Последовательность K зададим следующим образом: $K = \{\lambda_i : \lambda_i = |\nu_i|^{-m}\}$. По формуле (9) получим F -значный винеровский K -процесс в виде

$$w_K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \beta_i(t) \varphi_i,$$

где $\beta_i(t)$ задается по формуле (8).

Определим операторы

$$B_0 = a^2 \Delta, \quad N = I$$

как элементы пространства $L(U_K \mathbf{L}_2^0; F_K \mathbf{L}_2)$ в силу леммы 1, а функцию неоднородности зададим как производную одномерного винеровского процесса $w_K(t)$

$$f = \overset{o}{w}_{Kt}(t) \in C^{l+1}(I, F_K \mathbf{L}_2).$$

В силу того, что «белый шум» $\overset{o}{w}_{Kt}(t)$ не дифференцируем при $t = 0$, интеграл в формуле (12) не имеет смысла. Используем способ преодоления этой трудности, предложенный в [5]. Чтобы использовать этот способ, преобразуем второе слагаемое из правой части (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^t U_1^{t-s} \overset{o}{w}_{Kt}(s) ds &= -U_1^{t-\varepsilon} w_K(t) - \int_{\varepsilon}^t \frac{d}{ds} (U_0^{t-s}) w_K(s) ds = \\ &= -U_1^{t-\varepsilon} w_K(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t U_0^{t-s} w_K(s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

В данном случае интегрирование по частям имеет смысл для любого $\varepsilon \in (0, t), t \in R_+$ в силу определения производной Нельсона–Гликлиха. Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ в (13), получим

$$\int_0^t U_1^{t-s} \overset{o}{w}_{Kt}(s) ds = \int_0^t U_0^{t-s} w_K(s) ds.$$

Вычислим пропагаторы (3)

$$U_0^t = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k at) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k; \quad U_1^t = \sum_{k=0}^{\infty} a \lambda_k \sin(\lambda_k at) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Таким образом, в силу теоремы 1, решение (5)–(7) имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k at) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{k=0}^{\infty} a \lambda_k \sin(\lambda_k at) \langle u_1, \varphi_k \rangle \varphi_k + \\ + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\lambda_k a(t-s)) \langle w_k(s), \varphi_k \rangle \varphi_k ds.$$

Параграф 1 выполнен при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.А03.21.0011. Параграф 2 выполнен при поддержке РФФИ, проект № 18-08-00244.

Литература

1. Вишик, М.И. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений / М.И. Вишик, О.А. Ладыженская // Успехи математических наук. – 1956. – Т. 11. – Вып. 6 (72). – С. 41–97.
2. Информационно-логическое моделирование сбора и обработки информации при оценивании функциональной надежности оператора авиационных эргатических систем управления / А.В. Богомолов, В.Н. Зинкин, М.Д. Алёхин и др. // Труды Третьей международной научно-практической конференции «Человеческий фактор в сложных технических системах и средах» (Эрго-2018), Санкт-Петербург, 04–07 июля 2018 г. – С. 315–323.
3. Методическое обеспечение системы автоматизированного мониторинга состояния операторов, подвергающихся воздействию авиационного шума / А.В. Богомолов, С.П. Драган, Ю.А. Кукушкин и др. // Материалы одиннадцатой международной конференции «Управление Развитием Крупномасштабных Систем» (MLSD'2018), Москва, 01–03 октября 2018 г. – С. 440–443.
4. Melnikova, I.V. General theory of the ill-posed Cauchy problem / I.V. Melnikova // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1995. – Vol. 3. – Iss. 2. – P. 149–171.
5. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.
7. Гликликх, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликликх // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27 (286). – Вып. 13. – С. 24–34.
8. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.
9. Kovacs, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations / M. Kovacs, S. Larsson // New Directions in the Mathematical and Computer Sciences: сб. науч. тр. – National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. – Vol. 4. – С. 159–232. Publications of the ICMCS, Lagos, 2008.
10. Zamyshlyayeva, A.A. The Linearized Benney–Luke Mathematical Model with Additive White Noise / A.A. Zamyshlyayeva, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham, 2015. – Vol. 113. – P. 327–337.
11. Мельникова, И.В. Обобщенная корректность задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения с мультипликативным шумом / И.В. Мельникова, М.А. Альшанский // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 251–267.
12. Сагадеева, М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического изменения по искаженным данным / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 82–96.

13. Kitaeva, O.G. Exponential dichotomies in Barenblatt–Zhel'tov–Kochina model in spaces of differential forms with «noise» / O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 47–57.

14. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоултера–Сидорова аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

15. Sviridyuk, G.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive «white noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyayeva, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103–117.

Поступила в редакцию 19 июля 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 12–19*

DOI: 10.14529/mmph190302

MATHEMATICAL MODEL OF ACOUSTIC WAVES IN A BOUNDED DOMAIN WITH “WHITE NOISE”

E.V. Bychkov, N.N. Solovyova, G.A. Sviridyuk

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: bychkovev@susu.ru

The article presents a fresh approach at the classical problem of the acoustic waves propagation in a bounded region with a constant phase velocity. The classical statement of the problem is formulated in deterministic spaces, but in that work this problem will be studied in spaces of K -“noise”. An initial-boundary value problem for an inhomogeneous stochastic hyperbolic equation is investigated. The initial data are a random K -variables, and the inhomogeneity function is a random K -process in the general case. The inhomogeneous function is defined as “white noise”, in the application. In this paper the term “white noise” refers to the first derivative in the sense of Nelson–Gliklich Wiener K -process. This problem can be considered as generalization of the classical, since the Nelson–Gliklich derivative of the deterministic function coincides with the classical derivative. In the article, the results are obtained for an abstract deterministic hyperbolic equation are shifted to the stochastic case. Abstract results are applied to the mathematical model of the acoustic waves propagation with additive “white noise” in a bounded region from R^n with a smooth boundary.

Keywords: acoustic waves; Cauchy–Dirichlet problem; “white noise”; Wiener K -process; propagators.

References

1. Vishik M.I., Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, Vol. 11, Iss. 6 (72), pp. 41–97. (in Russ.).

2. Bogomolov A.V., Zinkin V.N., Alekhin M.D., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Information-Logical Modeling of Information Collection and Processing at the Evaluation of the Functional Reliability of the Aviation Ergate Control System Operator. *Proc. of the Third International Conference Ergo-2018: Human Factors in Complex Technical Systems and Environments*, Saint-Petersburg, July 4–7, 2018, pp. 315–323. (in Russ.).

3. Bogomolov A.V., Dragan S.P., Kukushkin Yu.A., Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Larkin E.V. Metodicheskoe obespechenie sistemy avtomatizirovannogo monitoringa sostoyaniya operatorov, podvergayushchikhsya vozdeystviyu aviatsionnogo shuma (Methodological support of the automated monitoring system of the state of operators exposed to aircraft noise). *Materialy odinnadtsatoy mezhdunarodnoy konferentsii «Upravlenie Razvitiem Krupnomasshtabnykh Sistem» (MLSD'2018)*,

Moskva, 01–03 oktyabrya 2018 g. (Proc. of the eleventh international conference Managing the Development of Large-Scale Systems (MLSD'2018), Moscow, October 1–3, 2018), P. 440–443.

4. Melnikova I.V. General theory of the ill-posed Cauchy problem. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1995, Vol. 3, Iss. 2, pp. 149–171. DOI: 10.1515/jiip.1995.3.2.149

5. Zamyshlyayeva A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140201

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.

7. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 27 (286), Iss. 13, pp. 24–34. (in Russ.).

8. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967, 142 p.

9. Kovacs M., Larsson S. Introduction to stochastic partial differential equations. *Proceedings of “New Directions in the Mathematical and Computer Sciences”*, National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007, Vol. 4, pp. 159–232. Publications of the ICMCS, Lagos, 2008.

10. Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. The Linearized Benney–Luke Mathematical Model with Additive White Noise. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M. (eds) *Semigroups of Operators – Theory and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2015, Vol. 113, pp. 327–337. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_21

11. Melnikova I.V., Alshanskiy M.A. The generalized well-posedness of the Cauchy problem for an abstract stochastic equation with multiplicative noise. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2013, Vol. 280, suppl. 1, pp. 134–150. DOI: 10.1134/S0081543813020119

12. Sagadeeva M.A. Reconstruction of Observation from Distorted Data for the Optimal Dynamic Measurement Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 82–96. DOI: 10.14529/mmp190207 (in Russ.).

13. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltoy–Kochina model in spaces of differential forms with “noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 47–57. DOI: 10.14529/mmp190204

14. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive “Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 1. pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140108

15. Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive “white noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp190204

Received July 19, 2019

МЕТОД СОПРЯЖЁННОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКА ДИФФУЗИИ

В.А. Литвинов¹, В.В. Учайкин²

¹ Барнаульский юридический институт, г. Барнаул, Российская Федерация

² Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Российская Федерация

E-mail: lva201011@yandex.ru

Объектом исследования работы являются дифференциальные уравнения диффузии (теплопроводности). Предметом исследования является алгоритм определения функции источника или начальных условий задачи по экспериментально измеряемым величинам. В основу исследования положено двойственное представление функционалов, соответствующих экспериментально наблюдаемым величинам в процессах массо- и теплообмена. Обратная задача сформулирована в виде интегральных уравнений первого рода, ядром которых является сопряженная функция (функция ценности), получаемая как решение сопряженного в смысле Лагранжа уравнения диффузии (теплопроводности) с функцией чувствительности детектора в правой части. При этом решение сопряженных уравнений путем замены переменных сводится к решению прямых уравнений. Для регуляризации решения уравнения Вольтерры первого рода, соответствующего задаче восстановления зависимости граничного условия от времени, предложено использовать минимизацию невязки для переопределенной системы линейных уравнений. Задача восстановления зависимости начального условия от координаты сформулирована в виде уравнения Фредгольма I рода, для решения которого применен метод регуляризации Тихонова. Приведены результаты модельных расчётов по восстановлению временной зависимости источников, заданных гладкой функцией, ступенчатой функцией и функцией с гармонической составляющей в задаче об одномерной диффузии в однородной среде. Из этих результатов видно, что при выбранных параметрах расчетов полученные предлагаемым методом решения ведут себя регулярно и обладают вполне приемлемой точностью даже несмотря на то, что значения искомой функции на заданном интервале поиска изменяются на шесть порядков. В этом авторы видят главное отличие предложенного ими метода от других подходов к решению данной задачи

Ключевые слова: обратная задача; диффузия; теплопроводность; ценность; чувствительность.

Введение

Значительная часть теоретических расчетов наблюдаемых в экспериментах величин производится с целью проверки тех или иных предположений о характере среды или параметрах физической модели, описывающей изучаемое явление (процесс). Вычисления наблюдаемых физических величин принято называть *прямой задачей*. Определение же количественных характеристик модели по экспериментально наблюдаемым величинам на основе теоретических расчетов принято называть *обратной задачей*.

Как и в классе прямых задач, методы решения задач обратного типа разделяются на две группы: аналитические и численные. К первой относятся построение функционально-инвариантных решений гиперболических уравнений, аналитические представления решений и коэффициентов параболических уравнений, представление решения и коэффициента уравнения Штурма–Лиувилля с применением в обратных задачах теории рассеяния, построение гармонических и других потенциалов для вычисления решений (скорости) и коэффициентов (давления) системы уравнений газовой динамики и др. [1–3].

Вторую группу составляет большая коллекция численных методов (см. монографии [4–7] и др.). Особую роль играют задачи, в которых определению подлежат положения и свойства удалённых (во времени и пространстве) источников. Назовём их *обратными задачами первого рода*, отнеся ко второму роду задачи по извлечению информации о коэффициентах диффузионных уравнений. Примеры обратных задач первого рода рассматриваются в работах [6–14]. В частности, в

[9–10] развивается метод решения обратной задачи диффузионного типа, основанный на использовании прямого и обратного преобразований Лапласа, что позволяет свести исходную задачу к решению интегрального уравнения Вольтерры первого рода, характеризующего прямую зависимость искомой функции источника от известных граничных условий.

Однако в большинстве практически интересных случаев решение прямой задачи не выражается в аналитическом виде, не говоря уж об обратной задаче. На деле это сводится к параметризации физической модели изучаемого процесса с дальнейшим определением количественных значений этих параметров на основе лучшего совпадения результатов теоретических расчетов с экспериментально измеренными значениями. При этом сама процедура параметризации физической модели зачастую неоднозначна, а вводимые параметры требуют дополнительного физического толкования.

Подробное описание постановки различного типа обратных задач можно найти в работах [6, 7]. В настоящей работе рассматривается частный случай обратной задачи по определению функции источника, основанный на двойственном представлении показаний детектора с использованием функции ценности [15, 16] и в этом смысле являющийся продолжением идей, сформулированных в наших ранних работах [17, 18].

Описание метода

Уравнение теплопроводности (диффузии), как и другие уравнения переноса, могут быть представлены в операторной форме

$$L\Phi(u) = S(u), \quad (1)$$

где u – набор фазовых координат, например, для одномерного уравнения диффузии $u = \{t, x\}$. Наличие известного решения $\Phi(u)$ превращает определение источника $S(u)$ в прямую задачу о вычислении $L\Phi(u)$, и особых проблем не возникает. Однако в реальном физическом эксперименте измеряются не значения функции $\Phi(u)$, а некоторый функционал от неё, представляющий показание прибора (детектора). Ограничившись линейным представлением, запишем его в виде скалярного произведения

$$J = \int du \Phi(u) D(u) \equiv (\Phi, D). \quad (2)$$

Введя в функцию чувствительности детектора $D(u)$ совокупность характеризующих его параметров α , выразим этот функционал через решение соответствующего сопряженного уравнения (функцию ценности):

$$L^+ \Phi^+(u, \alpha) = D(u, \alpha), \quad (3)$$

оператор L^+ в котором удовлетворяет соотношению Лагранжа:

$$(\Phi^+, L \Phi) = (\Phi, L^+ \Phi^+).$$

Согласно принципу двойственности показания такого детектора могут быть выражены также через функцию ценности:

$$J(\alpha) = \int du \Phi^+(u, \alpha) S(u) \equiv (\Phi^+, S). \quad (4)$$

Таким образом, использование двойственного представления функционала естественным образом сводит задачу *параметрического* определения функции источника (в чем и состоит специфика данной работы) к решению интегрального уравнения первого рода. Будет это уравнение Вольтерры или Фредгольма, зависит от свойств оператора переноса L и граничных условий задачи. Заметим также, что отмена правой части уравнения (1) и использование вместо неё начального условия

$$\Phi(0, x) = g(x) \quad (5)$$

эквивалентно задаче (1) с функцией источника:

$$S(t, x) = \delta(t)g(x),$$

содержащей дельта-функцию, отвечающую мгновенному (импульсному) характеру источника.

Если функцию чувствительности детектора выбрать в виде

$$D(t, x) = \delta(t - t_0)\delta(x - x_0), \quad (6)$$

(заметим, здесь t_0, x_0 представляют совокупность α), то решением уравнения (3) будет функция Грина, через которую могут быть выражены решения, соответствующие другим функциям чувствительности, то есть другим функционалам (2).

Рассмотрим модельную задачу для одномерной диффузии в неограниченном пространстве с различными точечными источниками:

$$S(t, x) = \phi(t)\delta(x). \quad (7)$$

Дополнительным как для уравнения (1), так и для уравнения (3) в этом случае будет граничное условие – равенство нулю на бесконечности искомых функций.

В случае постоянного коэффициента диффузии a^2 уравнение (3) имеет вид:

$$-\frac{\partial \Phi^+}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi^+}{\partial x^2} = \delta(t - t_0)\delta(x - x_0). \quad (8)$$

Данное уравнение отличается от классического «прямого» уравнения только знаком перед производной по времени. Путем замены переменных оно легко сводится к классическому уравнению диффузии (теплопроводности), для которого решение известно:

$$\Phi^+(t, x, t_0, x_0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t_0 - t)}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2(t_0 - t)}\right). \quad (9)$$

Пусть нам известно, что источник является точечным, а найти требуется зависимость мощности источника от времени, характеризуемую множителем $\phi(t)$. Подставляя (7) и (9) в (4), получим интегральное уравнение Вольтерры I рода:

$$\int_0^{t_0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t_0 - t)}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4a^2(t_0 - t)}\right) \phi(t) dt = J(x_0, t_0). \quad (10)$$

Заметим, что для краевой задачи теплопроводности в стержне единичной длины, рассматриваемой в работах [8, 9], функция ценности будет представляться в виде гармонического ряда с весовыми сомножителями $\sim \exp(-a^2 \pi^2 t)$, что соответствует виду ядра уравнений, решаемых в цитируемых работах.

Известно, что замена интеграла в выражении (10) квадратурными формулами и сведение задачи к системе линейных уравнений часто приводит к плохо обусловленным матрицам и, как следствие, нерегулярным решениям. Тестовые расчеты для нескольких видов $\phi(t)$ подтверждают это заключение.

Регуляризация решения

Вопросы регуляризации решений интегральных уравнений I рода рассматривались во многих работах. Одним из способов получить устойчивое решение для уравнения Вольтерры I рода является сведение его к уравнению II рода путем дифференцирования. В рассматриваемом случае ядро интегрального оператора таково, что после первого дифференцирования уравнение по-прежнему будет первого рода, так как $\Phi^+(t_0, t_0) = 0$. Дальнейшее дифференцирование приводит к такому же результату.

Другим способом решения интегральных уравнений Вольтерры I рода является применение различных методов регуляризации [8, 19, 20], основная идея которых состоит в минимизации некоторого функционала от искомого решения.

Предположим, что нам известны значения функционала в разные моменты времени при фиксированном x_0 : $J_k \equiv J(x_0, t_k)$, $k = 1, M$.

Зададим две сетки значений моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_M$, в которые необходимо определить значения искомой функции $\phi(t)$, входящей в выражение (10). Представим её интерполяционным полиномом Лагранжа степени n :

$$\phi(t) = \sum_{l=0}^n \phi(t_{m+l}) \prod_{j=0, j \neq l}^n \frac{(t - t_{m+j})}{(t_{m+l} - t_{m+j})}. \quad (11)$$

В выражении (11) значение индекса m определяет номер начального узла интерполяции и влияет на вид матрицы квадратурных коэффициентов, получающихся при подстановке выражения (11) в (10). Подставим (11) в (10) и выполним интегрирование для всех значений y_k , получим

$$\sum_{m=1}^N A_{km} \phi(t_m) = J_k, \quad 1 \leq k \leq M. \quad (12)$$

При $N < M$ система (12) переопределена и для её решения можно воспользоваться методом наименьших квадратов для минимизации невязки. Такой метод, в частности, реализован в пакете MATLAB для решения переопределенных систем.

В случае мгновенного протяженного источника $S(t, x) = \delta(t)g(x)$ подстановка данного выражения и функции ценности (7) в равенство (4) приведет к уравнению:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t_0}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t_0}\right) g(x) dx = J(x_0, t_0). \quad (13)$$

В данном случае момент наблюдения t_0 является параметром. Для восстановления функции $g(x)$, определяющей пространственную зависимость мгновенного источника, потребуется набор значений функционала J в нескольких точках. Будем в дальнейшем для данной задачи использовать обозначение $J(y) \equiv J(y, t_0)$.

Уравнение (13) в отличие от уравнения (10) является уравнением Фредгольма. Пробные расчеты показали, что примененный к решению уравнения (10) метод регуляризации при помощи переопределения системы линейных уравнений не дает желаемого результата. В настоящей работе для получения устойчивого решения уравнения (13) применен метод регуляризации Тихонова, заключающийся в поиске минимума функционала:

$$\psi = \int_c^d dy \left[\int_a^b K(y, x) g(x) dx - J(y) \right]^2 + \alpha \int_a^b g^2(x) dx + \alpha \int_a^b [g'(x)]^2 dx,$$

где α – малый параметр регуляризации.

При получении результатов, приведенных ниже, значение параметра α определялось простым перебором, что является приемлемым при небольшом числе расчетов и применяется рядом авторов. В общем случае пределы интегрирования в приведенном выражении должны быть бесконечными, но при построении квадратурных формул в рассматриваемом примере использовался отрезок $[-7, 7]$, выбранный исходя из поведения функций $J(y)$ и $g(x)$.

Обсуждение результатов

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты решения уравнения (10) для различных характеров поведения искомой функции $\phi(t)$. На рис. 1 представлены расчеты для монотонно изменяющихся функций $\phi(t) = t^{3/2}$ и $\phi(t) = \exp(-3t/2)$. Значения второй функции на заданном интервале поиска изменяется на шесть порядков. Из рис. 1 и 2 видно, что при выбранных параметрах расчетов решения ведут себя регулярно и точность вполне достаточная. Расчеты проводились для шага по времени $\Delta t = 0,25$ и $M = 2N$.

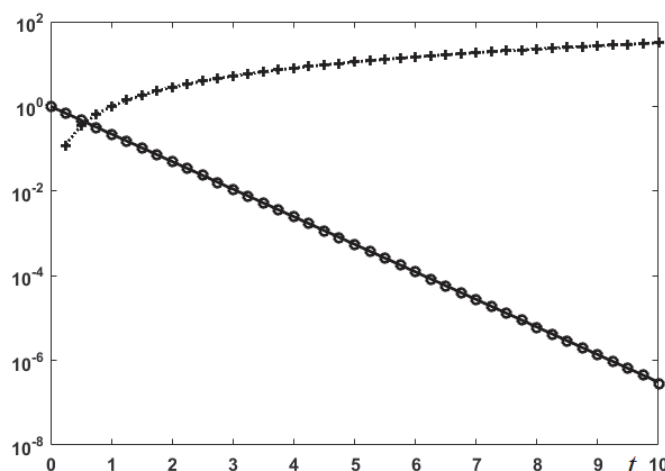


Рис. 1. Результаты решения уравнения (10) для монотонных источников.

Линии – точное исходное значение, +, o – численное решение; + – $\phi(t) = t^{3/2}$, o – $\phi(t) = \exp(-3t/2)$

На рис. 2 приводятся результаты решения уравнения (10) для источников с гармонической составляющей: $\phi(t) = 1 + \sin(5t)$ и $\phi(t) = 1 + \sin(2t)/(2t)$. В обоих случаях решалась переопределенная система линейных уравнений с количеством уравнений в два раза большим числа неизвестных. И в этом случае решения ведут себя регулярно и для выбранной сетки с шагом $\Delta t = 0,2$ достигается хорошая точность.

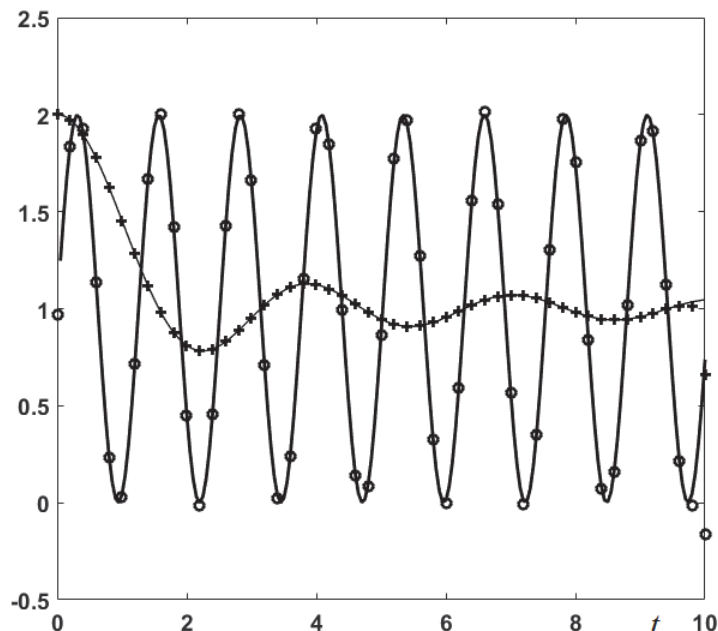


Рис. 2. Результаты решения уравнения (10) для источников с гармонической составляющей. Линии – точное исходное значение, +, o – численное решение; + – $\phi(t) = 1 + \sin(2t)/(2t)$, o – $\phi(t) = 1 + \sin(5t)$

На рис. 3 представлены результаты решения уравнения (13) путем минимизации функционала Тихонова. Параметр регуляризации подбирался вручную из условия отсутствия осцилляций (разболтки) решения. Из рис. 3 видно, что рассматриваемый метод позволяет получить удовлетворительную точность для гладких функций. Несколько хуже результат получился для источника в виде прямоугольного импульса.

Заключение

Использованное в работе для определения функции источника представление функционала в форме (4) имеет общий вид для задач тепло- и массообмена, других задач переноса частиц и излучений. Нахождение ядра интегрального оператора сводится к нахождению обобщенного решения (функции Грина) уравнения переноса (в рассматриваемом случае – диффузии). Для многих задач теории переноса обобщенные решения известны, это позволяет сформулировать задачу определения источника сразу в виде интегрального уравнения первого рода с известным ядром.

Приведенные в работе результаты модельных расчетов для различных типов функций источника уравнения диффузии показывают, что использованный в работе метод решения уравнения Вольтерры I рода путем сведения задачи к переопределенной системе линейных уравнений позволяет получить устойчивые решения. Из приведенных результатов видно, что при выбранных параметрах расчетов полученные предлагаемым методом решения ведут себя регулярно и обладают вполне приемлемой точностью даже несмотря на то, что значения искомой функции на заданном интервале поиска изменяются на шесть порядков. В этом мы видим главное отличие нашего метода от других подходов к решению данной задачи.

Благодарность

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку работы (грант 18-51-53018).

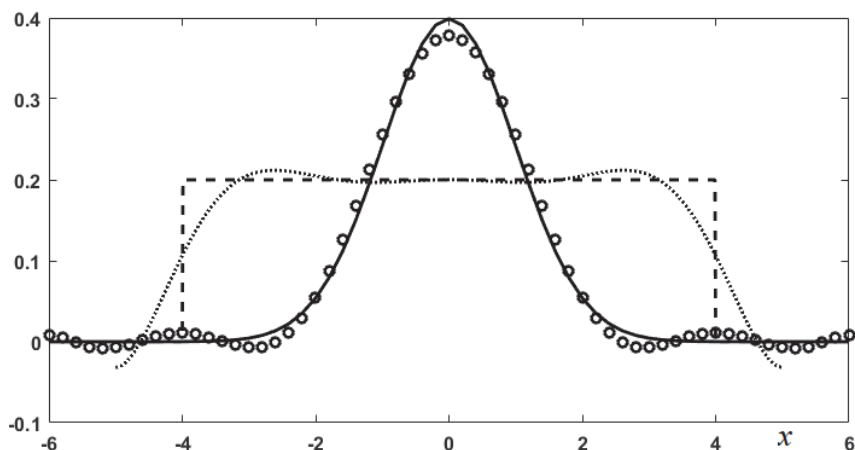


Рис. 3. Результаты восстановления пространственного мгновенного источника. Сплошная линия и пунктир – точные решения. Маленькие точки и кружки – результат решения уравнения (13). Сплошная линия и кружки – $g(x) \sim \exp(-x^2/2)$. Пунктирная линия – прямоугольный импульс

Литература

1. Соболев, С.Л. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / С.Л. Соболев // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1934. – Т. 5. – С. 259–264.
2. Колмогоров, А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей / А.Н. Колмогоров // Успехи мат. наук. – 1938. – Вып. 5. – С. 5–41.
3. Лаврентьев, М.М. Одномерные обратные задачи математической физики / М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г. Яхно. – Новосибирск: Наука, 1982. – 88 с.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 478 с.
5. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. – 457 с.
6. Гончарский, А.В. Численные методы решения обратных задач астрофизики / А.В. Гончарский, А.М. Черепашук, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1978. – 335 с.
7. Калинина, Е.А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции–диффузии / Е.А. Калинина // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 89–99.
8. Япарова, Н.М. Численный метод решения некоторых обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями / Н.М. Япарова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 55–65.
9. Япарова, Н.М. Метод решения обратной задачи идентификации функции источника с использованием преобразований Лапласа / Н.М. Япарова // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Вычислительная математика и информатика». – 2016. – Т. 5, № 3. – С. 20–35.
10. Кожанов, А.И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении / А.И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23, № 4. – С. 31–44.
11. Hasanov, A. An analysis of inverse source problems with final-time measured output data for the heat conduction equation: A semigroup approach / A. Hasanov, M. Slodicka // Applied Mathematics Letters, 2013. – Vol. 26, Iss. 2. – P. 207–214.
12. An inverse time-dependent source problem for the heat equation / A. Hazanee, M.I. Ismailov, D. Lesnic, N.B. Kerimov // Applied Numerical Mathematics. – 2013. – Vol. 69. – P. 13–33.
13. Inverse problem of time-dependent heat sources numerical reconstruction / L. Yang, M. Dehghan, J.-N. Yu, G.-W. Luo. Mathematics and Computers in Simulation. – 2011. – Vol. 81, Iss. 8. – P. 1656–1672.
14. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Мир, 1980. – 430 с.
15. Marchuk, G.I. Adjoint equations and analysis of complex systems / G.I. Marchuk // Mathematics and Its Applications (MAIA, volume 295). – Springer, Dordrecht, 1995. – 468 p.

16. Литвинов, В.А. Вариации ценности в проблеме изучения широких атмосферных ливней / В.А. Литвинов, В.В. Учайкин // Известия вузов. Физика. – 1986. – Т. 29, № 2. – С. 128.

17. Литвинов, В.А. Метод функциональных производных в проблеме чувствительности ШАЛ / В.А. Литвинов, В.В. Учайкин // Известия вузов. Физика. – 1986. – Т. 29, № 12. – С. 96.

18. Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 31–33.

19. Магницкий, Н.А. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений Вольтерра первого рода / Н.А. Магницкий // Вестник Московского университета. Серия 15: «Вычислительная математика и кибернетика». – 1978. – № 1. – С. 91–98.

Поступила в редакцию 21 апреля 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 20–27*

DOI: 10.14529/mmph190303

ADJOINT EQUATION METHOD FOR SOLVING THE INVERSE DIFFUSION SOURCE PROBLEM

V.A. Litvinov¹, V.V. Uchaikin²

¹ *Barnaul law Institute, Barnaul, Russian Federation*

² *Ulyanovsk state University, Ulyanovsk, Russian Federation*

E-mail: lva201011@yandex.ru

The objects of the research are differential equations of diffusion (or thermal conductivity) kind. The subject of research is the algorithm for determining the function of the source or the initial conditions of the problem as per the experimentally measured values. The approach is based on a dual representation of functionals corresponding to experimentally observed quantities in the processes of mass and heat transfer. The inverse problem is formulated in the form of integral equations of the first kind, the core of which is the adjoint function (importance function) obtained as a solution of the adjoint (in the Lagrange sense) diffusion (thermal conductivity) equation with the detector sensitivity function in the right-hand side. Meanwhile, solving the adjoint equations by changing the variables is reduced to solving direct equations. To regularize the solution of the Volterra equation of the first kind corresponding to the problem of recovering the dependence of the boundary condition on time, the residual minimization for an overdetermined system of linear equations has been proposed to be used. The problem of reconstructing the dependence of the initial condition on the coordinate is formulated as a Fredholm equation of the first kind, the solution to which has been obtained using the Tikhonov regularization method. The results of model calculations are presented for the restoration of the time dependence of the sources set by a smooth function, a step function and a function with a harmonic component in the problem of one-dimensional diffusion in a homogeneous medium. These results prove that with the selected calculation parameters, the solutions obtained by the proposed method behave regularly and have quite an acceptable accuracy, even though the values of the sought-for function within the set search interval change by six orders of magnitude. This is seen by the authors as the main difference of their method from other approaches to solving this problem.

Keywords: inverse problem; diffusion; thermal conductivity; importance-function; sensitivity.

References

1. Sobolev S. Functionally-invariant solutions of wave equation, *Travaux Inst. Physico-Math. Stekloff*, 1934, vol. 5, pp. 259–264. (in Russ.).

2. Kolmogorov A.N. On the analytic methods of probability theory, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1938, no. 5, pp. 5–41. (in Russ.).

3. Lavrent'ev M.M., Reznitskaya K.G., Yakhno V.G. *Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* (One-dimensional inverse problems of mathematical physics). Novosibirsk: Nauka Publ., 1982, 88 p. (in Russ.).

4. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* (Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics). Moscow, Izd-vo LKI publ., 2009, 478 p. (in Russ.).
5. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnyye zadachi* (Inverse and ill-posed problems). Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izd-vo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).
6. Goncharskiy A.V., Cherepashchuk A.M., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach astrofiziki* (Numerical methods for solving inverse problems of astrophysics). Moscow, Nauka Publ., 1978, 335 p. (in Russ.).
7. Kalinina A.E. Numerical study of inverse problem of identification of source density for the two-dimensional non-stationary convection–diffusion equation. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2004, Vol. 5, no. 1, pp. 89–99. (in Russ.).
8. Yaparova N.M. Numerical Method for Solving some Inverse Heat Conduction Problems with Unknown Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015, Vol. 15, no. 2, pp. 55–65. (in Russ.). DOI: 10.14529/ctcr150206
9. Yaparova N.M. Method for Solving an Inverse Term Source Problem Based on the Laplace Transform. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*, 2016, Vol. 5, no. 3, pp. 20–35. (in Russ.). DOI: 10.14529/cmse160302
10. Kozhanov A.I. Inverse problems of recovering the right-hand side of a special type of parabolic equations. *Mathematical notes of NEFU*, 2016, Vol. 23, no. 4, pp. 31–45. (in Russ.).
11. Hasanov A., Slodicka M. An analysis of inverse source problems with final-time measured output data for the heat conduction equation: A semigroup approach. *Applied Mathematics Letters*, 2013, Vol. 26, Iss. 2, pp. 207–214. DOI: 10.1016/j.aml.2012.08.013
12. Hazanee A., Ismailov M.I., Lesnic D., Kerimov N.B. *An inverse time-dependent source problem for the heat equation*. *Applied Numerical Mathematics*, 2013, Vol. 69, pp. 13–33. DOI: 10.1016/j.apnum.2013.02.004
13. Yang L., Dehghan M., Yu J.-N., Luo G.-W. *Inverse problem of time-dependent heat sources numerical reconstruction*. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, Vol. 81, Iss. 8, pp. 1656–1672. DOI: 10.1016/j.matcom.2011.01.001
14. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* (Computational Mathematics Methods), Moscow, Mir Publ., 1980, 430 p. (in Russ.).
15. Marchuk G.I. *Adjoint equations and analysis of complex systems*. *Mathematics and Its Applications* (MAIA, vol. 295), Springer, Dordrecht, 1995, 468 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0621-6
16. Litvinov B.A., Uchaykin B.B. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 1986, Vol. 29, no. 2, p. 128. (in Russ.).
17. Litvinov B.A., Uchaykin B.B. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 1986, Vol. 29, no. 12, p. 96. (in Russ.).
18. Lavrent'ev M.M. *Doklady AN SSSR*, 1959, Vol. 127, no. 1, pp. 31–33. (in Russ.).
19. Magnitskiy N.A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: "Vychislitel'naya matematika i kibernetika"*, 1978, no. 1, pp. 91–98. (in Russ.).

Received April 21, 2019

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИРАВНОВЕСИЙ СИСТЕМ ТИПА КЕЛЛЕРА–СЕГЕЛЯ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А.Б. Моргулис^{1,2}

¹ Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, г. Владикавказ, Российская Федерация

² Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

E-mail: morgulisandrey@gmail.com

Хорошо известно, что локальная бифуркация равновесия системы типа Патлака–Келлера–Сегеля (ПКС) часто оказывается первым звеном в цепи динамических переходов, приводящих к весьма сложным режимам движения. Однако, насколько нам известно, первые переходы исследованы лишь для однородных равновесий однородных (т.е. трансляционно инвариантных) систем. В настоящей статье рассмотрено влияние неоднородности. С этой целью введена система ПКС, моделирующая два вида, один из которых (хищник) способен искать другой (жертву). При этом помимо таксиса к жертве хищник наделён таксисом к некоторым характеристикам окружающей среды, например таким, как температура, солёность, рельеф местности и т. д., то есть хищник способен воспринимать внешний сигнал. Отключение последнего приводит к очень простой однородной системе типа ПКС, которая тем не менее может перейти от однородного равновесия к автоколебательным волновым движениям через локальную бифуркацию. Примечательно, что этот переход происходит безотносительно кинетики хищников, а лишь только благодаря таксису. Для исследования эффекта коротковолнового внешнего сигнала применена гомогенизация и на этой основе установлено, что коротковолновый сигнал обычно вызывает экспоненциальное снижение подвижности хищников по сравнению с однородной системой в ответ на увеличение уровня внешнего сигнала. Потеря подвижности в значительной степени предотвращает возникновение волн и резко стабилизирует примитивные квазиравновесия, полностью навязанные внешним сигналом. Можно сказать, что интенсивные мелкомасштабные колебания окружающей среды дезориентируют и отвлекают хищников и мешают им эффективно преследовать добычу.

Ключевые слова: системы Келлера–Сегеля; таксис к жертве; косвенный таксис; внешний сигнал; устойчивость; неустойчивость; бифуркация Пуанкаре–Андропова–Хопфа; усреднение; гомогенизация.

Введение

Таксис обычно определяется как способность биологического вещества реагировать на другое вещество, называемое стимулом или сигналом, направленным движением в макроскопическом масштабе. Хемотаксис, например, управляется химическими сигналами. Хорошо известная модель Патлака–Келлера–Сегеля (ПКС) предполагает, что хемотаксический поток видов направлен вдоль градиента стимула и в этом смысле представляет собой нелинейную кросс-диффузию. Подход ПКС широко используется для моделирования других видов таксиса. Например, стимулом для одного биологического вида («хищник») может быть плотность другого вида («жертва») или какой-то другой сигнал, генерируемый «жертвой». Это может быть какое-то химическое вещество или нечто другое, привлекающее или отталкивающее «хищников». Такое взаимодействие видов известно как таксис к жертве (prey–taxis) [1–8]. Если при этом хищник реагирует не на жертву, а на подаваемый ей сигнал, то говорят о косвенном (indirect) таксисе. Подробный обзор теории систем ПКС и их приложений см. в [9].

Хорошо известно, что локальная бифуркация равновесия системы типа Патлака–Келлера–Сегеля (ПКС) часто оказывается первым звеном в цепи динамических переходов, приводящих к весьма сложным режимам движения x [7, 10–13]. Однако насколько нам известно, первый переход исследован лишь для однородных равновесий однородных (т. е. трансляционно инвариантных) систем. Эффект пространственно-временной неоднородности пока малоизучен. Нам извест-

ны только статьи [14–16]. В статьях [14, 15] рассматриваются вопросы глобальной ограниченности решений. Нашей работе идейно близка статья [16], в которой с целью моделирования влияния рельефа местности на пространственно распределенное живое сообщество изучается гомогенизация системы типа «реакция–диффузия» со скачками коэффициентов в точках заданной сетки, когда последняя измельчается. В нашей статье рассмотрено влияние неоднородности на устойчивость так называемых квазиравновесий – режимов, заменяющих однородные равновесия в неоднородном случае. В известной степени наше исследование следует плану, реализованному П.Л. Капицей при построении теории маятника с вибрирующим подвесом (см. также [17, 18]).

Мы рассматриваем систему ПКС, описывающую сообщество «хищник–жертва», где наряду с таксисом к жертве хищник наделён таксисом к некоторым характеристикам окружающей среды, например таким, как температура, солёность, рельеф местности и т. д, то есть хищник способен воспринимать внешний сигнал. Отключение последнего приводит к очень простой однородной системе типа ПКС, введённой в [10, 11], которая представляет, пожалуй, самую простую систему этого типа, способную перейти от однородных равновесий к автоколебательным волновым движениям через локальную бифуркацию. Примечательно, что этот переход происходит безотносительно кинетики хищников, а лишь только благодаря таксису.

Для исследования эффекта коротковолнового внешнего сигнала применяется гомогенизация [19–21]. Оказывается, что коротковолновый сигнал обычно вызывает экспоненциальное снижение подвижности хищников по сравнению с однородной системой в ответ на увеличение уровня внешнего сигнала. Потеря подвижности в значительной степени предотвращает возникновение волн и резко стабилизирует примитивные квазиравновесия, полностью навязанные внешним сигналом. Можно сказать, что интенсивные мелкомасштабные колебания окружающей среды дезориентируют и отвлекают хищников, и мешают им эффективно преследовать добычу.

1. Постановка задачи

Рассматриваем систему, введённую в [10, 11], но с внешним сигналом. В безразмерных переменных имеем

$$\partial_t u = \partial_x (\kappa q + f) - \nu u + \delta_u \partial_x^2 u; \tag{1}$$

$$\partial_t p = \partial_x (\delta_p \partial_x p - pu); \tag{2}$$

$$\partial_t q = q(1 - q - p) + \delta_q \partial_x^2 q. \tag{3}$$

Здесь x, t – пространственная координата и время, ∂_t и ∂_x – операторы частного дифференцирования по указанным координатам; p, q – концентрации хищников и жертв соответственно, u – адвективная скорость хищников, f – внешний сигнал, $\delta_p, \delta_q, \delta_u, \kappa, \sigma, \nu$ – числовые параметры¹, за исключением κ – положительные. Как видно из уравнения (2), вклады от рождаемости и смертности хищников в кинетику системы считаются пренебрежимыми, а кинетика жертв подчиняется логистическому закону и закону Лотка–Вольтерра. Функция $f = f(x, t)$ задана. При $f = \text{const}$ получается однородная версия системы, введенная в [10, 11].

Как отмечено в [7], подстановка $u = \kappa \partial_x \phi$ преобразует систему (1)–(3) в систему, состоящую из уравнения (3) и следующих двух уравнений:

$$\partial_t \phi = q + \kappa^{-1} f - \nu \phi + \delta_u \partial_x^2 \phi; \partial_t p = \partial_x (\delta_p \partial_x p - \kappa p \partial_x \phi). \tag{4}$$

Система (3), (4) – система типа ПКС с косвенным таксисом (*indirect taxis*), где потенциал скорости ϕ играет роль сигнала, генерируемого жертвой, и с внешним сигналом f ; коэффициент κ играет роль коэффициента подвижности хищников. С целью исследования коротковолнового внешнего сигнала в уравнениях (1)–(2) полагаем

$$f = f(x, t, \xi, \tau), \xi = \omega x, \tau = \omega t, \omega \gg 1, \tag{5}$$

$$\delta_u = \nu_1 \omega^{-1}, \delta_p = \nu_2 \omega^{-1}, \nu_1 > 0, \nu_2 > 0. \tag{6}$$

¹ параметр κ в уравнении (1) может быть нормирован на единицу выбором масштаба длины.

Прежде чем перейти к гомогенизации системы при $\omega \rightarrow +\infty$, приведем некоторые сведения об однородной версии системы (1)–(3) (где $f = 0$), установленные в основном в [10, 11]. Их изложение необходимо для последующего сравнения с гомогенизированной системой.

2. Однородная система

Однородные равновесия однородной системы (1)–(3) имеют вид

$$p \equiv p_e, q \equiv q_e, u = 0, p_e = \text{const} > 0, q_e = \text{const} > 0, p_e + q_e = 1. \quad (7)$$

Линеаризация однородной системы (1)–(3) вблизи равновесия семейства (7) с данной плотностью p_e (играющей роль параметра семейства) имеет вид:

$$\partial_t u + \nu u - \kappa \partial_x q = \delta_u \partial_x^2 u; \quad (8)$$

$$\partial_t p + p_e \partial_x u = \delta_p \partial_x^2 p; \quad (9)$$

$$\partial_t q + q_e (p + q) = \delta_q \partial_x^2 q; \quad (10)$$

$$p_e + q_e = 1.$$

Разыскиваем собственные моды малых возмущений этого равновесия в виде

$$(\hat{u}, \hat{p}, \hat{q}) \exp(i\alpha x + \lambda t), \lambda = \lambda(\alpha) \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Собственная мода (11) устойчива (неустойчива, нейтральна), если действительная часть λ отрицательна (положительна, равна нулю).

Рассмотрим возникновение неустойчивых мод (11), то есть трансверсальное пересечение гладким семейством собственных чисел λ мнимой оси при изменении параметров задачи вдоль некоторого гладкого пути в пространстве параметров $p_e, \alpha, \kappa, \nu, \bar{a}_u, \delta_p, \delta_q$. Если такое пересечение происходит в ненулевой точке мнимой оси, говорят о колебательной неустойчивости, иначе – о монотонной. Известно, что возникновение неустойчивости в семействе равновесий сопровождается ответвлением от него вторичных режимов движения. Если при этом нет дополнительных вырождений и неустойчивость монотонная, то ответвляются равновесия, если колебательная – предельные циклы (бифуркация Пуанкаре–Андронов–Хопфа); в случае дополнительного вырождения, такого, например, как кратность нейтрального спектра, имеют место более сложные бифуркации [22–25].

С целью отсекаания излишних вырождений вводим ограничения

$$\alpha \neq 0, 0 < p_e < 1, \nu(\delta_p + \delta_u + \delta_q) > 0. \quad (12)$$

Заметим, что любое равновесие семейства (7) имеет собственную моду (11) с $\lambda = \alpha = 0$, но это не приводит к длинноволновой неустойчивости. Вводим обозначения

$$\beta = \alpha^2, \delta = (\nu, \delta_q, \delta_p, \delta_u),$$

и пусть Π – область в пространстве параметров p_e, β, δ , высекаемая неравенствами (12). Рассмотрим равновесие (7), заданное параметром p_e , и соответствующие собственные моды (11) с $\alpha = \sqrt{\beta}$.

Предложение 1. Найдётся функция

$$\kappa_c = \kappa_c(p_e, \beta, \delta)$$

– аналитическая в Π и такая, что (i) каждая из указанных собственных мод устойчива при $\kappa < \kappa_c(p_e, \beta, \delta)$; (ii) имеется неустойчивая мода при $\kappa > \kappa_c(p_e, \beta, \delta)$; (iii) имеется две комплексно сопряжённые нейтральные собственные моды $\lambda \neq 0$ при $\kappa = \kappa_c(p_e, \beta, \delta)$.

Доказательство. Выберем равновесие из семейства (1), задав значение параметра семейства, p_e . Собственные значения λ для собственных мод (5), имеющих заданное волновое число α , суть решения алгебраического уравнения

$$\lambda^3 + (D_1 + D_2 + D_3)\lambda^2 + (D_2 D_3 + D_1 D_3 + D_1 D_2)\lambda + D_1 D_2 D_3 + \beta \kappa p_e q_e = 0,$$

$$D_1 = \nu + \beta \delta_u; D_2 = \beta \delta_p; D_3 = q_e + \beta \delta_q; \beta = \alpha^2.$$

Ввиду ограничений (12) все коэффициенты полинома в левой части этого уравнения строго положительны. Следовательно, этот многочлен не имеет ни положительных, ни нулевых корней. Следовательно, вещественному собственному значению не могут соответствовать ни неустойчивые, ни нейтральные собственные моды. Из теоремы Рауса–Гурвица следует, что необходимым и достаточным условием нахождения всех корней указанного многочлена в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости является неравенство $(D_1 + D_2 + D_3)(D_2D_3 + D_1D_3 + D_1D_2) > D_1D_2D_3 + \beta\kappa p_e q_e$. Оно допускает более компактную форму, а именно: $(D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3) > \beta\kappa p_e q_e$. Отсюда вытекают утверждения (i)–(iii) предложения 1, если положить

$$\kappa_c = \frac{(D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)}{\beta p_e q_e}. \tag{13}$$

Предложение доказано.

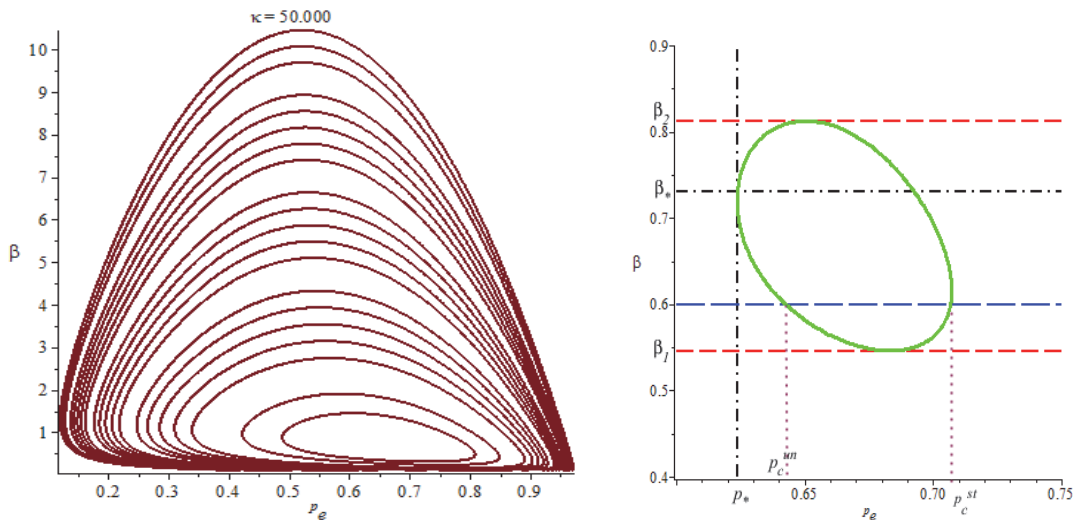
Замечание 1. Для нас будет особо интересен случай $\delta_p = \delta_u = 0$. В этом случае κ_c принимает гораздо более простую форму

$$\kappa_c|_{\delta_p=\delta_u=0} = \frac{v(\delta_q\beta + v + q_e)(\delta_q\beta + q_e)}{q_e p_e \beta}. \tag{14}$$

Замечание 2. Колебательная неустойчивость наступает всякий раз, когда путь в области $\Pi \times (0, \infty)$ (где $(0, \infty) \ni \kappa$) трансверсально пересекает график $(p_e, \beta, \delta, \kappa_c(p_e, \beta, \delta))$, исключая, быть может, некоторые вырождения (см. рисунок). Отметим, что

$$\min_{0 < p_e < 1, \beta > 0} \kappa_c(p_e, \beta, \delta) = \kappa_*(\delta) > 0, \tag{15}$$

причём строгая положительность нижней грани в (15) имеет место для всех δ , удовлетворяющих ограничениям (12). Для всех $\kappa \in (\kappa_*(\delta), \infty)$ уравнение $\kappa = \kappa_c(p_e, \beta, \delta)$ определяет гладкую замкнутую кривую в полуполосе $0 < p_e < 1, \beta > 0$, которая стремится к границе этой полуполосы, когда $\kappa \rightarrow +\infty$ (см. рисунок, справа). Левая панель рисунка показывает, что в ответ на увеличение p_e в семействе (7) возникает колебательная неустойчивость при условии, что $\kappa > \kappa_*(\delta)$.



Слева показаны типичные кривые, определяемые уравнением $\kappa_c(p_e, \beta, \delta) = \kappa$ на плоскости (p_e, β) , когда κ пробегает интервал от 15,12 до 50,0 и $\delta = (1,1,0,0)$. Область, ограниченная кривой, расширяется с ростом κ . Справа показана одна из кривых, соответствующая $\delta = (1,1,0,0)$ и $\kappa = 13,56$. Прочие числовые значения таковы: $p_* \approx 0,624$; $p_c^{min} \approx 0,642$, $p_c^{st} \approx 0,707$, $\beta_1 \approx 0,546$, $\beta_2 \approx 0,812$

Из результатов [10, 11]¹ следует, что указанная колебательная неустойчивость сопровождается бифуркацией Пуанкаре–Андронов–Хопфа, проявляющейся возбуждением волн, причём динамика волн оказывается выгоднее равновесия: хищник может потреблять больше, оставляя при этом большой запас жертв. Значение $\kappa_*(\delta) > 0$ – порог подвижности хищников, κ . Если $\kappa < \kappa_*(\delta)$, то ни колебательная неустойчивость однородного равновесия, ни сопутствующая бифуркация невозможны, независимо от значений p_e, β . Таким образом, уменьшение подвижности хищников приводит к абсолютной стабилизации однородных равновесий и не позволяет сообществу адаптироваться к дефициту ресурсов.

Бифуркация Пуанкаре–Андронов–Хопфа в более общем классе однородных систем типа ПКС изучалась в [7, 12, 13].

3. Гомогенизация

В дальнейшем функции от (ξ, τ) понимаются как функции на двумерном торе \mathbb{T}^2 . Вводим усреднение

$$\langle g \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, t, \xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты диффузии в уравнениях (1) и (2) имеют вид (6). Тогда отклик системы (1)–(3) на коротковолновый внешний сигнал (5) имеет формальную асимптотику

$$q(x, t) = \bar{q}(x, t) + O(\omega^{-1}), \omega \rightarrow +\infty; \quad (16)$$

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \tilde{u}_0(x, t, \xi, \tau) + O(\omega^{-1}), \omega \rightarrow +\infty; \quad (17)$$

$$p(x, t) = \bar{p}(x, t)P(x, t, \xi, \tau) + O(\omega^{-1}), \omega \rightarrow +\infty, \quad (18)$$

где $\xi = \omega x$ и $\tau = \omega t$; при этом функции \tilde{u}_0 , P , \bar{u} , \bar{q} и \bar{p} определяются из уравнений

$$\partial_\tau \tilde{u}_0 = \partial_\xi (f + v_1 \partial_\xi \tilde{u}_0); \langle u_0 \rangle = 0, \quad (19)$$

$$\partial_\tau P = \partial_\xi (v_2 \partial_\xi P - P(\bar{u} + \tilde{u}_0)); \langle P \rangle = 1; \quad (20)$$

$$\partial_t \bar{u} = \partial_x (\kappa \bar{q} + \bar{f}) - v\bar{u}; \bar{f} = \langle f \rangle \quad (21)$$

$$\partial_t \bar{p} + \partial_x (\bar{p}(\bar{u} + \langle \tilde{u}_0 P \rangle)) = 0; \quad (22)$$

$$\bar{q}_t = \bar{q}(1 - \bar{p} - \bar{q}) + \delta_q \partial_x^2 \bar{q}; \quad (23)$$

причём уравнения (19) и (20) рассматриваются на \mathbb{T}^2 .

Замечание 3. Как видно из уравнения (20), имеется дополнительный дрейф хищников со скоростью, равной $\langle u_0 P \rangle$, и именно он отвечает за эффект коротковолнового сигнала. При заданном сигнале f дрейф однозначно определяется средней скоростью \bar{u} . Поэтому уравнения (21), (22) и (23) представляют собой замкнутую систему относительно неизвестных \bar{u} , \bar{q} и \bar{p} , которые описывают гладкую компоненту отклика системы в главном приближении.

Определение 1. Систему уравнений (21), (22) и (23), где дрейфовый член $\langle \tilde{u}_0 P \rangle$ выражен через функции \bar{u} и f из уравнений (19)–(20), а функция f задана, назовём гомогенизированной.

Доказательство теоремы 1. Вводим быстрые переменные $\xi = \omega x$, $\tau = \omega t$ в уравнения (1)–(3). Имеем

$$\omega((\partial_t + \omega \partial_\tau)u - (\partial_x + \omega \partial_\xi)(\kappa q + f) + v u) = v_1(\partial_x + \omega \partial_\xi)^2 u; \quad (24)$$

¹ В указанных работах рассматривается ограниченная пространственная область; соответственно спектры собственных мод (5) заполняют некоторые дискретные подмножества непрерывных спектров, описанных выше.

$$\omega((\partial_t + \omega\partial_\tau)p + (\partial_x + \omega\partial_\xi)(up)) = \nu_2(\partial_x + \omega\partial_\xi)^2 p; \tag{25}$$

$$(\partial_t + \omega\partial_\tau)q - q(1 - p - q) = \delta_q(\partial_x + \omega\partial_\xi)^2 q \tag{26}$$

Ищем степенное разложение решений системы (1)–(3) в виде

$$(u, p, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k} (u_k, p_k, q_k)(x, t, \xi, \tau), \omega \rightarrow \infty, \tag{27}$$

требуя при этом 2π – периодичности всех коэффициентов разложения (27) по ξ и τ . Подставляем (27) в уравнения (24)–(26) и требуем взаимного сокращения членов одного порядка по ω . Исключаем члены порядка ω^2 из уравнения (26) и приходим к уравнению

$$\partial_{\xi\xi} q_0 = 0, \tag{28}$$

общее периодическое решение которого имеет вид

$$q_0 = q_0(x, t, \tau), \tag{29}$$

где функция q_0 должна быть определена на последующих шагах процедуры исключения. Исключаем члены порядка ω^2 из уравнений (24)–(25). Ввиду (28)–(29), приходим к уравнениям

$$(\partial_\tau - \nu_1 \partial_{\xi\xi})u_0 = \partial_\xi f; \tag{30}$$

$$(\partial_\tau - \nu_2 \partial_{\xi\xi})p_0 + \partial_\xi(u_0 p_0) = 0; \tag{31}$$

$$(u_0, p_0) = (u_0, p_0)(x, t, \xi, \tau), (\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2.$$

Замечаем, что уравнение (31) – в точности совпадает с первым уравнением задачи (19). Уравнение (31) на \mathbb{T}^2 имеет ровно одно решение с нулевым средним, которое мы обозначаем \tilde{u}_0 . Итак, $u_0 = \bar{u} + \tilde{u}_0$, $\bar{u} = \langle u_0 \rangle$, и мы обосновали главный член асимптотического разложения неизвестной u , определённый формулами (17), (19).

Лемма 1. Пусть $w = w(\xi, \tau)$ – гладкая функция на торе \mathbb{T}^2 , и $\varepsilon = \text{const} > 0$. Тогда система

$$\partial_\tau Q + \partial_\xi(wQ - \varepsilon \partial_\xi Q) = 0 \text{ on } \mathbb{T}^2; \langle Q \rangle = 1 \tag{32}$$

имеет ровно одно решение.

Доказательство леммы 1. Прежде чем доказывать лемму в полной общности, рассмотрим частный случай $w = w(\xi)$. Тогда уравнение (32) сводится к ОДУ $\partial_\xi(\varepsilon \partial_\xi Q - wQ) = 0$, общее решение которого имеет вид $Q = \exp(\varepsilon^{-1} \int w(\xi) d\xi) \int \exp(-\varepsilon^{-1} \int w(\xi) d\xi) d\xi$. Среди функций, заданных этим интегралом, имеется ровно одна периодическая (с точностью до множителя). Запишем её явно. С этой целью полагаем $w(\xi) = \langle w \rangle + \tilde{w}(\xi)$ и вводим функцию $E(\xi) = \exp((\varepsilon \partial_\xi)^{-1} \tilde{w}(\xi))$. Тогда

$$Q = AE(\xi) \int_0^\infty E\left(\xi + \frac{s}{\mu}\right) e^{-s} ds, \text{ где } \mu = \langle w \rangle \varepsilon^{-1}, \text{ и } \langle w \rangle \neq 0 \text{ и } Q = AE(\xi), \langle w \rangle = 0, A = \text{const}. \text{ Очевидно, выбор } A \text{ однозначно определён условием } \langle Q \rangle = 1. \text{ Осталось записать решение в форме, охватывающей оба случая. С этой целью разлагаем функции } E, E^{-1} \text{ в ряды Фурье, так что}$$

$$E(\xi) = \sum_k \alpha_k e^{ik\xi}, E^{-1}(\xi) = \sum_k \beta_k e^{ik\xi}. \text{ Тогда}$$

$$Q = AE(\xi) \left(\beta_0 + \mu \sum_{k \neq 0} \frac{\beta_k e^{ik\xi}}{\mu - ik} \right), A^{-1} = \phi_0 \psi_0 + \mu \sum_{k \neq 0} \frac{\beta_k \alpha_k^*}{\mu - ik}, \tag{33}$$

где α_k^* – комплексно-сопряжённые коэффициенты Фурье. Перейдём к общему случаю. Пусть H – пространство рядов Фурье по переменным ξ, τ с квадратично-суммируемыми коэффициентами. Через $\mathcal{L}: H \rightarrow H$ обозначим оператор, ассоциированный с левой частью первого уравнения в системе (32). Наша задача – доказать, что $\dim \text{Ker } \mathcal{L} = 1$, и $\langle \chi \rangle \neq 0 \forall \chi \in \text{Ker } \mathcal{L} \setminus \{0\}$. Вводим опера-

тор $\tilde{\mathcal{L}}^* = \mathcal{J}\mathcal{L}^*\mathcal{J}$, где \mathcal{L}^* – сопряжён к \mathcal{L} , а оператор $\mathcal{J}: H \rightarrow H$ индуцирован инверсией $(\zeta, \tau) \mapsto (-\zeta, -\tau)$. По определению, $\tilde{\mathcal{L}}^*: \varphi \mapsto (\partial_\tau - \varepsilon \partial_{\xi\xi})\varphi + w \partial_\xi \varphi$. Уравнение $(\partial_\tau - \varepsilon \partial_{\xi\xi})\varphi + w \partial_\xi \varphi = 0$ подчиняется сильному принципу максимума [25, 26]. Поэтому $\text{Ker } \tilde{\mathcal{L}}^* = \phi \equiv \text{const}$, и $\text{Ker } \tilde{\mathcal{L}}^* = \text{Ker } \mathcal{L}^*$. Обратимся к уравнению $(\partial_\tau - \varepsilon \partial_{\xi\xi})\varphi + w \partial_\xi \varphi = 1$. В этом случае действует сильный односторонний принцип максимума, из которого вытекает, что ни уравнение $\tilde{\mathcal{L}}^* \tilde{\psi} = 1$, ни уравнение $\mathcal{L}^* \tilde{\psi} = 1$ не имеют решений в H . Следовательно, резольвента $(\mathcal{L}^* - \lambda \mathcal{J})^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет простой полюс в начале комплексной плоскости. Далее, эта резольвента компактна, так что сопряжённые операторы \mathcal{L}^* и \mathcal{L} подчиняются теореме Фредгольма. Поэтому $\dim \text{Ker } L = 1$. Более того, если $\langle \chi \rangle = 0$ и $\chi \in \text{Ker } \mathcal{L} \setminus \{0\}$, то уравнение $\mathcal{L}^* \psi = \text{const} \neq 0$ разрешимо, что противоречит уже доказанному. Лемма 1 доказана.

Продолжим вывод асимптотического разложения. Применяем к уравнению (31) лемму 1, где ε заменяем на ν_2 , и w на $\bar{u} + \tilde{u}_0$, и заключаем, что $p_0 = \bar{p}(x, t) P(x, t, \xi, \tau)$, где функция P однозначно определена уравнениями (20). Итак, обоснована асимптотика неизвестной p , определённая равенствами (18), (20).

Переходим к исключению членов порядка ω из уравнения (26). С учётом (29) приходим к уравнению $\delta_q \partial_{\xi\xi} q_1 = \partial_\tau q_0$, где q_0 не зависит от ξ . Получившееся уравнение имеет периодическое решение, если и только если q_0 не зависит от τ . Поэтому $q_0 = \bar{q}(x, t)$, и мы приходим к главному члену асимптотического приближения (16). Кроме того, понятно, что $q_1 = q_1(x, t, \tau)$. Функции q_1 и \bar{q} должны быть определены на последующих шагах процедуры исключения. Заметим, что существование периодического решения q_1 обосновывает оценку O -члена (т. е. ошибки) приближения (16).

Исключение членов порядка ω из уравнений (24), (25) приводит к уравнениям

$$(\partial_\tau u_1 - \nu_1 \partial_{\xi\xi} u_1) = 2\nu_2 \partial_{x\xi} u_0 + \partial_x (\kappa q_0 + f) - \nu u_0 - \partial_t u_0, (\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2; \quad (34)$$

$$\partial_\tau p_1 + \partial_\xi (u_0 p_1) - \nu_2 \partial_{\xi\xi} p_1 = 2\nu_2 \partial_{x\xi} p_0 - \partial_t p_0 - \partial_x (u_0 p_0) - \partial_\xi (u_1 p_0), (\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2. \quad (35)$$

Усреднение уравнений (34), (35) с учётом уже известных фактов приводит к гомогенизированной системе. Теорема доказана.

Замечание 4. Разрешая гомогенизированную систему, мы обеспечиваем существование периодических решений уравнений (34), (35), что, в свою очередь, обосновывает оценку O -членов в выражениях (17), (18).

4. Устойчивость квазиравновесий

В дальнейшем полагаем

$$f = f(\xi, \tau).$$

Тогда гомогенизированная система однородна и имеет семейство однородных равновесий (7). В силу формул (14)–(16), каждое однородное равновесие гомогенизированной системы определяет некоторое квазиоднородное квазиравновесие – коротковолновый режим, полностью навязанный внешним сигналом и потому стационарный в медленном времени. В главном приближении средние значения скорости хищников и плотностей обоих видов в квазиоднородном квазиравновесии определяются значениями соответственных фазовых переменных гомогенизированной системы в её однородном равновесии, так что средняя квазиравновесная скорость равна нулю, а средние плотности обоих видов постоянны. В наших рассуждениях квазиоднородные квазиравновесия и однородные равновесия гомогенизированной системы неразличимы и в дальнейшем изложении отождествляются.

Исследуем устойчивость квазиравновесий методом линеаризации. Пусть на \mathbb{T}^2 задана функция $f = f(\xi, \tau)$. Определим отображение $\mathcal{V}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, действующее по следующему правилу: $\mathcal{V}(f): \eta \mapsto \langle \tilde{u}_0 P \rangle$, где $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0(\xi, \tau)$ – решение уравнения (19), а $P = P(\xi, \tau)$ – решение системы

$$\partial_\tau P = \partial_\xi (v_2 \partial_\xi P - P(\eta + \tilde{u}_0)), \langle P \rangle = 1. \tag{36}$$

Пусть $\mathcal{L}^*, \mathcal{L}$ – пара сопряжённых операторов, введённых при доказательстве леммы 1. Пусть $\Pi^* = \Pi^*(\eta)$ – спектральный проектор на $\text{Ker } \mathcal{L}^*$. Тогда $\mathcal{V}(f): \eta \mapsto \langle \Pi^*(\eta) \tilde{u}_0 \rangle$. Из теории возмущений линейных операторов вытекает аналитичность $\mathcal{V}(f)$ в окрестности $\eta = 0$. Обозначим $\mathcal{V}'(f)$ дифференциал отображения $\mathcal{V}(f)$ при $\eta = 0$.

Предположим, что внешний сигнал не зависит от τ :

$$f = f(\xi), \langle f \rangle = 0. \tag{37}$$

Линеаризация гомогенизированной системы на квазиравновесии имеет вид

$$\partial_t \bar{u} + v \bar{u} - \kappa \partial_x \bar{q} = 0; \tag{38}$$

$$\partial_t \bar{p} + p_e (1 + \mathcal{V}'(f)) \partial_x \bar{u} = 0; \tag{39}$$

$$\partial_t \bar{q} + q_e (\bar{p} + \bar{q}) - \delta_q \partial_x^2 \bar{q} = 0. \tag{40}$$

Заметим, что множитель $1 + \mathcal{V}'(f)$ можно рассматривать как эффективный коэффициент подвижности хищника.

Перенормировкой неизвестной \bar{u} приводим систему (38)–(40) к виду (8)–(10) с $\delta_p = \delta_u = 0$ и коэффициентом κ , заменённым на $\kappa = (1 + \mathcal{V}'(f)) \kappa$. Итак, эффект коротковолнового сигнала на устойчивость квазиравновесий проявляется в изменении интенсивности таксиса, или, эквивалентно, подвижности хищника по правилу $\kappa \mapsto \bar{\kappa} = (1 + \mathcal{V}'(f)) \kappa$.

В разделе 2 параметры системы были подчинены ограничениям (12). Заметим, что эти ограничения не исключают равенств $\delta_p = \delta_u = 0$. Таким образом, все утверждения об устойчивости и неустойчивости однородных равновесий однородной системы, сформулированные в предложении 1, распространяются на квазиравновесия при условии, что подвижность κ заменяется эффективной подвижностью $\bar{\kappa} = (1 + \mathcal{V}'(f)) \kappa$. В частности, неравенство $\bar{\kappa} < \kappa_* \Big|_{\delta_p = \delta_u = 0}$ (где κ_* – в точности пороговая подвижность хищников, введённая в разделе 2, подразумевает абсолютную стабилизацию квазиравновесий в том смысле, что неустойчивых мод не существует, независимо от того, какое равновесие и какое волновое число возмущения рассматриваются. Таким образом, критерий абсолютной стабилизации квазиравновесий имеет вид

$$1 + \mathcal{V}'(f) < \kappa_*^{-1} \Big|_{\delta_p = \delta_u = 0}. \tag{41}$$

Правая часть в неравенстве (41) не зависит от внешнего сигнала, тогда как левая часть, очевидно, зависит, и интересно узнать, в какой степени; в частности, может ли коротковолновый внешний сигнал привести к абсолютной стабилизации равновесий, неустойчивых при условии, что сигнал выключен? Более формально, можно ли получить неравенство (8), манипулируя функцией f ? Покажем, что ответ на этот вопрос положителен. Введём усреднение $\langle g \rangle^\xi$ по переменной ξ , полагая $\langle g \rangle^\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, t, \xi, \tau) d\xi$. Тогда вычисление \tilde{u}_0 и P сводится к решению

уравнений

$$\partial_\xi (f + v_1 \partial_\xi \tilde{u}_0) = 0, \langle u_0 \rangle^\xi = 0, \tag{42}$$

$$\partial_\xi (v_2 \partial_\xi P - P(\bar{u} + \tilde{u}_0)) = 0, \langle P \rangle^\xi = 1. \tag{43}$$

Следовательно, $\mathcal{V}'(f) = \langle \tilde{u}_0 P_1 \rangle^\xi$, где функция P_1 определяется уравнениями

$$\partial_\xi (v_2 \partial_\xi P_1 - P_0 - \tilde{u}_0 P_1) = 0, \langle P_1 \rangle^\xi = 0, \quad (44)$$

$$\partial_\xi (v_2 \partial_\xi P_0 - \tilde{u}_0 P_0) = 0, \langle P_0 \rangle^\xi = 1. \quad (45)$$

Непосредственное интегрирование уравнений (44)–(45) с учётом условия периодичности даёт

$$P_0 = A_0 e^v, A_0 = \frac{1}{\langle e^v \rangle^\xi}, v = (v_2 \partial_\xi)^{-1} \tilde{u}_0, \quad (46)$$

$$P_1 = e^v \left(A_1 + \frac{\partial_\xi^{-1} (A_0 - C_1 e^{-v})}{v_2} \right), A_1 = \frac{A_0 \langle e^v \partial_\xi^{-1} (C_1 e^{-v} - A_0) \rangle^\xi}{v_2}, C_1 = \frac{1}{\langle e^{-v} \rangle^\xi \langle e^v \rangle^\xi}; \quad (47)$$

где оператор ∂_ξ^{-1} действует на подпространстве 2π -периодических по ξ функций с нулевым средним как правый обратный к ∂_ξ , то есть, $\partial_\xi \partial_\xi^{-1} w = w, \langle \partial_\xi^{-1} w \rangle^\xi = 0$ для любой 2π -периодической по ξ функции $w: \langle w \rangle^\xi = 0$. Следовательно, $\mathcal{V}'(f) =$

$$v_2 \langle (A_1 + v_2^{-1} \partial_\xi^{-1} (A_0 - C_1 e^{-v})) e^v \partial_\xi v \rangle^\xi = -\langle e^v (A_0 - C_1 e^{-v}) \rangle^\xi = C_1 - 1 = \frac{1}{\langle e^{-v} \rangle^\xi \langle e^v \rangle^\xi} - 1.$$

Решаем уравнение (42) и находим $\tilde{u}_0 = -(v_1 \partial_\xi)^{-1} f$. Отсюда имеем $v = (v_2 \partial_\xi)^{-1} \tilde{u}_0 = -(v_2 \partial_\xi)^{-1} (v_1 \partial_\xi)^{-1} f$. Для удобства меняем f на $-f$, что не приводит к ошибке ввиду чётности функционала $\mathcal{V}'(f)$. Итак, эффективная подвижность $\bar{\kappa} = (1 + \mathcal{V}'(f)) \kappa$ записана в почти явной форме; именно:

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\langle e^{-v} \rangle^\xi \langle e^v \rangle^\xi}, v = (v_1 v_2)^{-1} \partial_\xi^{-2} f. \quad (48)$$

Подставляем эти выражения в неравенства (40) и находим критерий абсолютной стабилизации в виде

$$\frac{1}{\langle e^{-v} \rangle^\xi \langle e^v \rangle^\xi} < \kappa^{-1} \kappa_* \Big|_{\delta_p = \delta_u = 0}, \quad (49)$$

Пример 1. Полагаем $f = A \sin \xi$, $A = \text{const} > 0$. Тогда $v = -A(v_1 v_2)^{-1} \sin \xi$, и

$$\bar{\kappa} = \kappa I_0^{-2}(a), a = \frac{A}{v_1 v_2},$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода. Критерий абсолютной стабилизации принимает вид

$$\frac{\kappa}{I_0^2(a)} < \kappa_* \Big|_{\delta_p = \delta_u = 0}, a = \frac{A}{v_1 v_2}.$$

Замечание 5. Мы привели пример экспоненциального убывания эффективной подвижности хищников с ростом параметра $a = A(v_1 v_2)^{-1}$, который представляет собой характерную амплитуду внешнего сигнала. Возрастание последней оказывает мощное стабилизирующее воздействие.

Замечание 6. Стабилизирующий эффект коротковолнового сигнала, основанный на экспоненциальном снижении эффективной подвижности хищников при возрастании амплитуды сигнала, – довольно общее свойство системы. Это вытекает из оценки $\langle e^{-v} \rangle$ методом Лапласа для $f = A f_0$, где f_0 – гладкая периодическая функция и $A \rightarrow \infty$.

Заключение

Итак, увеличение уровня внешнего сигнала экспоненциально быстро приводит к абсолютной стабилизации квазиравновесий. Заметим, что указанная стабилизация имеет место независимо от того, является ли внешний сигнал привлекающим или отталкивающим хищников. В любом слу-

чае сообществу навязывается примитивная коротковолновая структура, хищники разобщаются и теряют способность преследовать жертву. В этом смысле воздействие интенсивного коротковолнового внешнего сигнала дезориентирует сообщество, и оно утрачивает способность к самоорганизации, несмотря на выгоды последней для обоих видов (при переходе к сложной динамике хищники могут потреблять больше и в то же время держать большой запас жертв, чем в равновесном состоянии).

Механизм дезориентации действует благодаря возникновению дрейфа стокова типа (см. уравнение (22)). Это понятие объединяет различные добавки к средней скорости адвекции, возникающей при усреднении по коротким волнам, создаваемым высокочастотными/ коротковолновыми пульсациями адвективной скорости [27]. В нашем случае стоков дрейф сильно стабилизирует. В этом смысле эффект коротковолнового сигнала подобен эффекту модуляции силы гравитации в механике (перевернутый маятник, виброконвекция, ... [17, 18]).

Литература

1. Иваницкий, Г.Р. От динамики популяционных автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике / Г.Р. Иваницкий, А.Б. Медвинский, М.А. Цыганов // Успехи физических наук. – 1994. – Т. 164, № 10. – С. 1041–1072.
2. Quasisoliton interaction of pursuit–evasion waves in a predator–prey system / M.A. Tsyganov, J. Brindley, A.V. Holden, V.N. Biktashev // Physical review letters. – 2003. – Vol. 91, Iss. 21. – P. 218102.
3. Soliton-like phenomena in one-dimensional cross-diffusion systems: a predator–prey pursuit and evasion example / M.A. Tsyganov, J. Brindley, A.V. Holden, V.N. Biktashev // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2004. – Vol. 197, Iss. 1-2. – P. 18–33.
4. Tsyganov, M.A. Half-soliton interaction of population taxis waves in predator–prey systems with pursuit and evasion / M.A. Tsyganov, V.N. Biktashev // Physical Review E. – 2004. – Vol. 70, Iss. 3. – P. 031901.
5. Li, C. Steady states of a predator–prey model with prey–taxis / C. Li, X. Wang, Y. Shao // Non-linear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2014. – Vol. 97. – P. 155–168.
6. Tello, J.I. Predator–prey model with diffusion and indirect prey–taxis / J.I. Tello, D. Wrzosek // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2016. – Vol. 26, no. 11. – С. 2129–2162.
7. Tyutyunov, Y.V. Prey–taxis destabilizes homogeneous stationary state in spatial Gause–Kolmogorov-type model for predator–prey system / Y.V. Tyutyunov, L.I. Titova, I.N. Senina // Ecological complexity. – 2017. – Vol. 31. – P. 170–180.
8. Li, H. Boundedness in a chemotaxis system with indirect signal production and generalized logistic source / H. Li, Y. Tao // Applied Mathematics Letters. – 2018. – Vol. 77. – P. 108–113.
9. Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues / N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao, M. Winkler // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2015. – Vol. 25, no. 9. – P. 1663–1763.
10. Говорухин, В.Н. Медленный таксис в модели хищник–жертва / В.Н. Говорухин, А.Б. Моргулис, Ю.В. Тютюнов // Доклады академии наук. – 2000. – Т. 372, № 6. – С. 730–732.
11. Directed movement of predators and the emergence of density-dependence in predator–prey models / R. Arditi, Y. Tyutyunov, A. Morgulis *et al.* // Theoretical Population Biology. – 2001. – Vol. 59, no. 3. – P. 207–221.
12. Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems / I.G. Pearce, M.A. Chaplain, P.G. Schofield *et al.* // Journal of mathematical biology. – 2007. – Vol. 55, Iss. 3. – P. 365–388.
13. Wang, Q. Time-periodic and stable patterns of a two-competing-species Keller–Segel chemotaxis model: Effect of cellular growth / Q. Wang, J. Yang, L. Zhang // Discrete & Continuous Dynamical Systems – B. – 2017. – Vol. 22, no. 9. – P. 3547–3574.
14. Black, T. Boundedness in a Keller–Segel system with external signal production / T. Black // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – Vol. 446, Iss. 1. – P. 436–455.
15. Yurk, B.P. Homogenization techniques for population dynamics in strongly heterogeneous landscapes / B.P. Yurk, C.A. Cobbold // Journal of biological dynamics. – 2018. – Vol. 12, Iss. 1. – P. 171–193.

16. Issa, T. Persistence, coexistence and extinction in two species chemotaxis models on bounded heterogeneous environments / T. Issa, W. Shen // 2018. – arXiv preprint arXiv:1709.10040v4
17. Юдович, В.И. Вибродинамика систем со связями / В.И. Юдович // Докл. РАН. – 1997. – Т. 354, № 5. – С. 622–624.
18. Vladimirov, V.A. On vibrodynamics of pendulum and submerged solid / V.A. Vladimirov // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2005. – Vol. 7, Supplement 3. – P. S397–S412.
19. Allaire, G. A brief introduction to homogenization and miscellaneous applications / G. Allaire // ESAIM: Proc. – 2012. – Vol. 37. – P. 1–49.
20. Allaire, G. Homogenization and two-scale convergence / G. Allaire // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1992. – Vol. 23, Iss. 6. – P. 1482–1518.
21. Allaire, G. Shape optimization by the homogenization method / G. Allaire // Applied Mathematical Sciences. – Vol. 146. – New York, NY: Springer, 2002. – 456 p.
22. Йосс, Ж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Ж. Йосс, Д. Джозеф. – Мир, 1983. – 300 с.
23. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // Динамические системы – 5. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления: сб. науч. тр. – М.: ВИНТИ, 1986. – Т. 5 – С. 5–218.
24. Haragus, M. Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems / M. Haragus, G. Iooss. – Universitext. London: Springer; Les Ulis: EDP Sciences, 2011. – 329 p.
25. Nirenberg, L. A strong maximum principle for parabolic equations / L. Nirenberg // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1953. – Vol. 6, Iss. 2. – P. 167–177.
26. Landis, E.M. Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type / E.M. Landis. – American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1998. – Translations of Mathematical Monographs, Vol. 171. – 203 p.
27. Vladimirov, V.A. Two-Timing Hypothesis, Distinguished Limits, Drifts, and Pseudo-Diffusion for Oscillating Flows / V.A. Vladimirov // Studies in Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 138, Iss. 3. – P. 269–293.

Поступила в редакцию 7 мая 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 28–40*

DOI: 10.14529/mmph190304

STABILITY OF THE QUASI-EQUILIBRIA OF KELLER–SEGEL SYSTEMS IN STRICTLY INHOMOGENEOUS ENVIRONMENT

A.B. Morgulis^{1,2}

¹ Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russian Federation

² Institute for Mathematics, Mechanics, and Computer Science in the name of I.I. Vorovich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

E-mail: morgulisandrey@gmail.com

It is well known that a local bifurcation of the equilibrium of a system of Patlak-Keller-Segels' type (PKS) often turns out to be the first link in the chain of dynamical transitions leading to rather complex regimes of motion. However, as far as we are aware, the studies of the first transition cover only the homogeneous equilibria of homogeneous (i.e. translationally invariant) systems. In this article, we consider the effect of inhomogeneity. For this purpose, we have been introducing a PKS system, modeling two species, one of which (predator) is capable of searching the other one (prey). In addition to the prey-taxis, the predator has been endowed with taxis driven by environmental characteristics, such as temperature, salinity, terrain relief, etc. In other words, the predator can perceive an external signal. When the external signal is off, then we get a very simple homogeneous PKS-type system, which is, nevertheless,

capable of transiting from the homogeneous equilibrium to self-oscillatory wave motions via a local bifurcation. Notably, this transition does not involve the predator's kinetics, but the taxis only. We have been examining the short wavelength signals using the homogenization technique. It turns out that a short wavelength signal typically causes an exponential reduction of the predators' motility in comparison with the homogeneous system in response to the increase in the external signal level. The loss of motility to a great extent prevents the occurrence of the waves and dramatically stabilizes the primitive quasi-equilibria fully imposed by the external signal. It can be said that intense small-scale environmental fluctuations disorient and distract predators, and prevent them from effectively pursuing their prey.

Keywords: Patlak–Keller–Segel systems; prey-taxis; indirect taxis; external signal production; stability; instability; Poincaré–Andronov–Hopf bifurcation; averaging; homogenization.

References

1. Ivanitskii G.R., Medvinskii A.B., Tsyganov M.A. From the dynamics of population autowaves generated by living cells to neuroinformatics. *Phys. Usp.*, 1994, Vol. 37, Iss. 10, pp. 961–989. DOI: 10.1070/PU1994v037n10ABEH000049
2. Tsyganov M.A., Brindley J., Holden A.V., Biktashev V.N. Quasisoliton interaction of pursuit–evasion waves in a predator–prey system. *Physical review letters*, 2003, Vol. 91, Iss. 21, p. 218102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.218102
3. Tsyganov M.A., Brindley J., Holden A.V., Biktashev V.N. Soliton-like phenomena in one-dimensional cross-diffusion systems: a predator–prey pursuit and evasion example. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, Vol. 197, Iss. 1-2, pp. 18–33. DOI: 10.1016/j.physd.2004.06.004
4. Tsyganov M.A., Biktashev V.N. Half-soliton interaction of population taxis waves in predator-prey systems with pursuit and evasion. *Physical Review E*, 2004, Vol. 70, Iss. 3, p. 031901. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.031901
5. Li C., Wang X., Shao Y. Steady states of a predator–prey model with prey–taxis. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2014, Vol. 97, pp. 155–168. DOI: 10.1016/j.na.2013.11.022
6. Tello J.I., Wrzosek D. Predator–prey model with diffusion and indirect prey–taxis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2016, Vol. 26, no. 11, pp. 2129–2162. DOI: 10.1142/S0218202516400108
7. Tyutyunov Y.V., Titova L.I., Senina I.N. Prey–taxis destabilizes homogeneous stationary state in spatial Gause–Kolmogorov-type model for predator–prey system. *Ecological complexity*, 2017, Vol. 31, pp. 170–180. DOI: 10.1016/j.ecocom.2017.07.001
8. Li H., Tao Y. Boundedness in a chemotaxis system with indirect signal production and generalized logistic source. *Applied Mathematics Letters*, 2018, Vol. 77, pp. 108–113. DOI: 10.1016/j.aml.2017.10.006
9. Bellomo N., Bellouquid A., Tao Y., Winkler M. Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2015, Vol. 25, no. 9, pp. 1663–1763. DOI: 10.1142/S021820251550044X
10. Govorukhin V.N., Morgulis A.B., Tyutyunov Y.V. Slow taxis in a predator-prey model. Slow Taxis in a Predator–Prey Model. *Doklady Mathematics*, Vol. 61, no. 3, pp. 420–422.
11. Arditi R., Tyutyunov Y., Morgulis A., Govorukhin V., Senina I. Directed movement of predators and the emergence of density-dependence in predator–prey models. *Theoretical Population Biology*, 2001, Vol. 59, Iss. 3, pp. 207–221. DOI: 10.1006/tpbi.2001.1513
12. Pearce I.G., Chaplain M.A., Schofield P.G., Anderson A.R., Hubbard S.F. Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems. *Journal of mathematical biology*, 2007, Vol. 55, Iss. 3, pp. 365–388. DOI: 10.1007/s00285-007-0088-4
13. Wang Q., Yang J., Zhang L. Time-periodic and stable patterns of a two-competing-species Keller–Segel chemotaxis model: Effect of cellular growth. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*, 2017, Vol. 22, no. 9, pp. 3547–3574. DOI: 10.3934/dcdsb.2017179
14. Black T. Boundedness in a Keller–Segel system with external signal production. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, Vol. 446, Iss. 1, pp. 436–455. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.08.049

15. Yurk B.P., Cobbold C.A. Homogenization techniques for population dynamics in strongly heterogeneous landscapes. *Journal of biological dynamics*, 2018, Vol. 12, Iss. 1, 171–193. DOI: 10.1080/17513758.2017.1410238
16. Issa T, Shen W. Persistence, coexistence and extinction in two species chemotaxis models on bounded heterogeneous environments. 2018; *arXiv preprint* arXiv:1709.10040v4
17. Yudovich V.I. The dynamics of vibrations in systems with constraints. *Doklady Physics*, 1997, Vol. 42, no. 6, pp. 322–325.
18. Vladimirov V.A. On vibrodynamics of pendulum and submerged solid. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2005, Vol. 7, Supplement 3, P. S397–S412. DOI: 10.1007/s00021-005-0168-4
19. Allaire G. A brief introduction to homogenization and miscellaneous applications. *ESAIM: Proc.*, 2012, Vol. 37, pp. 1–49. DOI: 10.1051/proc/201237001
20. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1992, Vol. 23, Iss. 6, pp. 1482–1518. DOI: 10.1137/0523084
21. Allaire G. *Shape optimization by the homogenization method*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 146, New York, NY, Springer, 2002, 456 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9286-6
22. Iooss G., Joseph D.D. *Elementary stability and bifurcation theory*. Springer Science & Business Media, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4684-9336-8
23. Arnol'd V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu.S., Shilnikov L.P. Bifurcation theory. *Dynamical systems – 5, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, Vol. 5, Moscow, VINITI publ., 1986, pp. 5–218. (in Russ.).
24. Haragus M., Iooss G. *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems*. Universitext. London: Springer; Les Ulis: EDP Sciences, 2011, 329 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-112-7
25. Nirenberg L. A strong maximum principle for parabolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1953, Vol. 6, Iss. 2, pp. 167–177. DOI: 10.1002/cpa.3160060202
26. Landis E.M. *Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type*. Translations of Mathematical Monograph, Vol. 171, American Mathematical Society, Providence, RI, USA; 1998, 203 p. DOI: 10.1090/mmono/171
27. Vladimirov V.A. Two-Timing Hypothesis, Distinguished Limits, Drifts, and Pseudo-Diffusion for Oscillating Flows. *Studies in Applied Mathematics*, 2017, Vol. 138, Iss. 3, pp. 269–293. DOI: 10.1111/sapm.12152

Received May 7, 2019

О РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ВИДЕ ВЕКТОР-ПОЛИНОМОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В.Г. Николаев

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород,
Российская Федерация
E-mail: vg14@inbox.ru

Рассмотрена однородная задача Шварца для вектор-функций, аналитических по Дуглису. Данные функции являются решениями однородной эллиптической системы в частных производных первого порядка, которая зависит от матрицы с комплексными коэффициентами. Предполагается, что определитель комплексной части этой матрицы отличен от нуля. Показано, что реальная часть функции, аналитической по Дуглису, будет решением некоторой однородной системы второго порядка в частных производных. Зная решение задачи Дирихле для данной системы, можно построить решение задачи Шварца, соответствующее исходной матрице. Нужно решение задачи Дирихле ищем в виде вектор-полинома второй степени с линейно зависимыми компонентами. После подстановки такой функции в полученную систему уравнений в частных производных получаем однородную вещественную алгебраическую систему. Эта система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Приравнивая к нулю соответствующий определитель, получаем алгебраическое уравнение с двумя переменными. Далее доказывается основная теорема о том, что существование произвольного ненулевого вещественного решения данного алгебраического уравнения является необходимым и достаточным условием существования соответствующего исходной матрице решения однородной задачи Шварца в виде вектор-полинома второй степени. В заключение статьи построен пример.

Ключевые слова: матрица; J -аналитическая функция; вектор-полином; квадратичная форма; эллипс; система алгебраических уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть все собственные числа $n \times n$ -матрицы J имеют ненулевые комплексные части.

Определение 1. [1–3] Аналитической по Дуглису (*A. Douglis*), или J -аналитической с матрицей J , назовем комплексную n -вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, которая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $\phi(z)$ соответствует матрице J , если выполнено уравнение (1).

Как показано в [1], система уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для системы (1) следующую однородную задачу Шварца [2, 3].

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена контуром Γ . Требуется найти J -аналитическую с известной матрицей J в области D вектор-функцию $\phi(z) \in C(\bar{D})$, для которой выполнено граничное условие

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Очевидными решениями задачи (2) являются постоянные функции $\phi(z) \equiv ic$, где $c \in \mathbb{R}^n$. Если $n=1$, то частным случаем J -аналитических функций при $J=i$ будут скалярные голоморфные функции [4]. Для них задача (2), как известно [4], имеет только постоянное (или тривиальное) решение $\phi(z) \equiv ic$, где $c \in \mathbb{R}$. Но при $n \geq 2$ ситуация кардинально меняется – задача (2) может иметь решения в виде вектор-полиномов. Приведем пример.

Пример 1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} -4i(x^2 + y^2) \\ x^2 + 3y^2 - 1 - 2xyi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица J в (3) имеет кратное собственное число $\lambda = i$. Здесь вектор-полином второй степени $\phi(z)$ будет функцией, J -аналитической с данной матрицей J , что проверяется непосредственной подстановкой в (1). При этом $\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $x^2 + 3y^2 = 1$.

В пункте 3 приведен общий метод построения аналогичных примеров.

Замечание 1. Сложность задачи (2) состоит именно в *конечности* области D . Если D неограничена, то построение нетривиальных решений задачи (2) не представляет каких-либо трудностей. Например, пусть $n = 1$, $J = i$, $f(z) = z^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1 + 2xyi$. Тогда $\operatorname{Re} f(z)|_{\Gamma} = 0$ на гиперболе $\Gamma: x^2 - y^2 = 1$.

2. Преобразование уравнения (1) к системе второго порядка

Выполним некоторые предварительные преобразования. Запишем n -вектор-функцию $\phi(z)$ в виде $\phi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, где $u(x, y), v(x, y)$ – вещественные n -вектор-функции. Также введем следующие обозначения:

$$J = A + Bi, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det B \neq 0. \quad (4)$$

Подставим матрицу (4) в уравнение (1), после чего приравняем к нулю действительные и мнимые части в получившемся выражении. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - A \frac{\partial v}{\partial x} - B \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Выразим из уравнений (5) частные производные функции $v = v(x, y)$ через частные производные функции $u = u(x, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B^{-1} A \frac{\partial u}{\partial x} - B^{-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (B + AB^{-1} A) \frac{\partial u}{\partial x} - AB^{-1} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

С учетом условия замкнутости

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7)$$

из уравнений (6) вытекает следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[B^{-1} A \frac{\partial u}{\partial x} - B^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[(B + AB^{-1} A) \frac{\partial u}{\partial x} - AB^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (8)$$

Применим в (8) операторы дифференцирования, после чего обе части равенства умножим слева на матрицу B . В результате получим следующую однородную $n \times n$ -систему уравнений в частных производных второго порядка:

$$(B^2 + BAB^{-1}A) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (9)$$

Относительно системы (9) докажем приведенную ниже теорему.

Теорема 1. *Справедливы следующие два утверждения.*

1) Если $\phi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ – решение однородной задачи Шварца (2), соответствующее матрице $J = A + Bi$, $\det B \neq 0$, то функция $u(x, y)$ будет решением однородной задачи Дирихле

$$u(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

для системы (9);

2) если существует решение задачи (10) для системы (9) в виде вектор-полинома $u = u(x, y)$, то можно однозначно восстановить функцию $\phi = u + i v$ как решение задачи (2), соответствующее матрице $J = A + Bi$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из алгоритма построения системы (9). Для доказательства пункта 2) заметим, что если функция $u(x, y)$ – решение (9), то она есть решение системы (8). При этом с учетом (8) для функций $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ вида (6) выполнены условия замкнутости (7). Поэтому вектор-функцию $v = v(x, y)$ при заданной функции $u = u(x, y)$ можно по координатно-единственным образом (с точностью до вектор-постоянной) восстановить из уравнений (6).

Так как для полученной функции $v(x, y)$ по построению выполнена пара равенств (6), то для пары функций $u(x, y), v(x, y)$ выполнены равносильные им равенства (5). Следовательно, функция $\phi = u + iv$ соответствует исходной матрице $J = A + Bi$. При этом по построению выполнено граничное условие (2). Теорема 1 доказана.

3. Общий метод построения решений задачи (2) в виде вектор-полиномов второй степени

Опираясь на теорему 1, получим необходимое и достаточное условие существования решений однородной задачи Шварца в виде вектор-полиномов второй степени.

Замечание 2. Будем называть эллипсом не только кривую Γ на плоскости, но также и область K , ограниченную кривой Γ , – в зависимости от контекста. Такая договоренность упростит изложение.

Как известно, произвольный эллипс Γ с центром в точке (x_0, y_0) можно задать следующим уравнением:

$$a(x - x_0)^2 + 2c(x - x_0)(y - y_0) + b(y - y_0)^2 - 1 = 0, \quad ab - c^2 > 0. \quad (11)$$

Пусть $\phi = u + iv$ – решение задачи (2) в виде вектор-полинома второй степени в *конечной* области D . В этом случае контур Γ может быть только эллипсом. Обозначим $u = (p_1, \dots, p_n)$. Тогда каждое из уравнений $p_1(x, y) = 0, \dots, p_n(x, y) = 0$ будет уравнением данного эллипса. Задание эллипса в виде (11) как множества точек на плоскости – единственно с точностью до множителя. Поэтому функции $p_k(x, y), k = 1, \dots, n$ будут с точностью до множителя совпадать с левой частью (11) при одних и тех же параметрах a, c, b .

Для упрощения дальнейших вычислений сделаем замену переменных $x = x' + x_0, y = y' + y_0$. Тогда после элементарных преобразований с учетом (1) получим, что функция $\phi(x', y') = u(x', y') + iv(x', y')$ будет J -аналитической с той же матрицей J . Но в этом случае компоненты $p_k(x', y'), k = 1, \dots, n$ вектор-функции $u = u(x', y')$ в силу (11) с точностью до множителя примут вид $p_k(x', y') = ax'^2 + 2cx'y' + by'^2 - 1$.

Таким образом, вектор-функцию $u(x, y) = \operatorname{Re} \phi(z)$, не умаляя общности, можно искать в следующем виде:

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} t_1 \cdot (ax^2 + 2cxy + by^2 - 1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_n \cdot (ax^2 + 2cxy + by^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad ab - c^2 > 0. \quad (12)$$

В (12) числа a, c, b , а также вектор $t = (t_1, \dots, t_n)$ – вещественные параметры. Случай $t = 0$, то есть $u \equiv 0$, не рассматриваем как вырожденный.

Для нахождения функции $u(x, y)$ подставим (12) в (9). В результате получим следующую однородную $n \times n$ -систему линейных алгебраических уравнений относительно вещественных переменных $t = (t_1, \dots, t_n)$ с параметрами a, c, b .

$$[a \cdot (B^2 + BAB^{-1}A) - c \cdot B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) + b \cdot E] \cdot (t)^T = 0, \quad (13)$$

где через E обозначена единичная $n \times n$ -матрица.

Параметры (a, c, b) для (13) находим из следующего условия. Как известно, однородная система (13) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\Delta(a, c, b)$ равен нулю, то есть

$$\Delta(a, c, b) = \det[a \cdot (B^2 + BAB^{-1}A) - c \cdot B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) + b \cdot E] = 0. \quad (14)$$

В (14) функция $\Delta(a, c, b)$ – полином степени n от трех переменных. Пусть (a, c, b) – такое решение (14), что $ab - c^2 > 0$. В этом случае квадратичные формы в (12) будут положительно (или отрицательно) определенными и неособыми. Поэтому все компоненты (12) будут задавать один и тот же эллипс.

Подставим ненулевое решение $t = t_0$ алгебраической системы (13) с этими параметрами в (12). Тем самым будет найдено решение $u_0 = u_0(x, y)$ задачи Дирихле (10) для системы дифференциальных уравнений (9) в эллипсе $\Gamma: ax^2 + 2cxy + by^2 = 1$.

Далее в силу теоремы 1 по функции $u(x, y)$ можно восстановить функцию $\phi(z)$ как решение задачи (2) в эллипсе Γ . С учетом формул (6) $\phi(z)$ будет вектор-полиномом второй степени. Сделаем замену переменных $x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$. Тогда в силу (1) получим решение $\phi(x', y')$ задачи (2), соответствующее той же матрице J . При этом данное решение будет определено в эллипсе Γ (11) с произвольным наперед заданным центром (x_0, y_0) . В итоге доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполнено равенство (14) при $ab - c^2 > 0$. Тогда существует решение $\phi(z)$ задачи (2), соответствующее матрице $J = A + Bi$, $\det B \neq 0$. При этом контур Γ — эллипс, а $\phi(z)$ есть вектор-полином второй степени.

Преобразуем уравнение (14). Заметим, что если $ab - c^2 > 0$, то $a \neq 0$. Поэтому можно, не умаляя общности, положить в (14) $a = 1$. Тогда неравенство $ab - c^2 > 0$ переписывается в виде $b > c^2$, что равносильно условиям

$$a = 1, \quad c = c, \quad b = c^2 + \varepsilon^2, \quad \varepsilon \neq 0. \quad (15)$$

Замечание 3. Так, если $\varepsilon \neq 0$, то в (15) допустима так же ситуация $c = 0$.

С учетом (15) равенство (14) переписем в следующем равносильном виде:

$$\det[B^2 + BAB^{-1}A - c \cdot B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) + (c^2 + \varepsilon^2) \cdot E] = 0, \quad \varepsilon \neq 0. \quad (16)$$

Равенство (16) можно рассматривать как алгебраическое уравнение n -й степени относительно вещественной переменной c , где ε – вещественный параметр. При этом существенным является условие $\varepsilon \neq 0$. Относительно формулы (16) докажем следующее основное утверждение.

Теорема 2. Существование (произвольного) вещественного решения (c, ε) , где $\varepsilon \neq 0$ алгебраического уравнения (16) является необходимым и достаточным условием существования соответствующего данной матрице $J = A + Bi \in C^{n \times n}$, $\det B \neq 0$ решения $\phi(z)$ однородной задачи Шварца (2) в виде вектор-полинома второй степени.

Доказательство. Достаточность. Пусть (c_0, ε_0) , где $\varepsilon_0 \neq 0$ – вещественное решение уравнения (16). Для этого решения с учетом (15) выполнено условие леммы 1. Поэтому согласно утверждению этой леммы существует искомое решение $\phi(z)$ задачи (2).

Докажем необходимость: пусть $\phi = u + iv$ – вектор-полином второй степени, который есть решение задачи (2) в конечной области K с границей Γ . В этом случае область K представляет собой эллипс. Обозначим, как и выше, $u = (p_1, \dots, p_n)$. Тогда уравнения $p_1 = 0, \dots, p_n = 0$ задают один и тот же эллипс $\Gamma = \partial K$. Следовательно, функции $p_k(x, y)$, $k = 1, \dots, n$ совпадают с точностью до множителя с левой частью (11). После замены переменных $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ вектор-функция $u(x', y')$ с точностью до обозначения переменных примет вид (12). При этом $\phi = u + iv$ останется J -аналитической с той же матрицей J .

Так как для $\phi = u + iv$ выполнено равенство (1), то для $u = u(x', y')$ в силу преобразований пункта 2 справедливо уравнение (9). Подстановка (12) в (9) дает алгебраическую систему (13). Вектор $t = (t_1, \dots, t_n)$ в (12) по условию ненулевой, так как функция $u(x', y')$ не равна нулю тождественно. То есть вектор t является ненулевым решением системы (13). Следовательно, выполнено равенство (14) при $ab - c^2 > 0$. Таким образом, с учетом подстановки (15) выполнено и равносильное (14) равенство (16) при некоторых (c_0, ε_0) , где $\varepsilon_0 \neq 0$, что и требовалось. Теорема 2 доказана.

4. Применение формулы (16) для построения примера 1

В качестве иллюстрации к теореме 2 построим два решения задачи (2) для матрицы J (3) из примера 1. Они будут определены в разных эллипсах. Имеем:

$$J = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det B = -3 \neq 0. \quad (17)$$

Выпишем уравнение (16) с учетом конкретных матриц A, B (17), не приводя промежуточные вычисления. При этом для упрощения вычислений положим $c = 0$:

$$\det[B^2 + BAB^{-1}A - c \cdot B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) + (c^2 + \varepsilon^2) \cdot E]_{c=0} = (-3 + \varepsilon^2) \cdot \left(-\frac{1}{3} + \varepsilon^2\right) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, имеем следующую пару решений уравнения (18):

$$c = 0, \quad b = c^2 + \varepsilon^2 = 3; \quad c = 0, \quad b = c^2 + \varepsilon^2 = \frac{1}{3}. \quad (19)$$

Как показывают вычисления, первой паре (c, b) в (19) при $a = 1$ соответствует ненулевое решение $(t_1, t_2) = (0, 1)$ алгебраической системы (13). Матрицы J (3) и (17) совпадают. Поэтому при полученных значениях параметров a, c, b, t_1, t_2 по функции $u(x, y)$ (12) с помощью алгоритма, описанного при доказательстве пункта 2) теоремы 1, восстанавливается решение $\phi(z)$ (3) задачи (2).

Второй паре (c, b) в (19) при $a = 1$ соответствует ненулевое решение $(t_1, t_2) = (1, 0)$ системы (13). В данном случае по алгоритму теоремы 1 можно построить функцию

$$\phi_1(z) = \begin{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 + \frac{2}{3}xyi \\ \frac{i}{3}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Функция (20) соответствует той же матрице J (3), то есть и матрице J (17). Она является решением задачи (2) в эллипсе $x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$.

Литература

1. Солдатов, А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. – Изд-во НовГУ, 1995. – 196 с.
2. Васильев, В.Б. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости / В.Б. Васильев, В.Г. Николаев // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 10. – С. 1351–1361.
3. Nikolaev, V.G. A Criterion for the Existence of Nontrivial Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem / V.G. Nikolaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 219, Iss. 2. – pp. 220–225.
4. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Высшая школа, 1999. – 432 с.

Поступила в редакцию 4 июля 2019 г.

**ON THE SOLUTIONS OF THE SCHWARTZ HOMOGENEOUS PROBLEM
IN THE FORM OF VECTOR POLYNOMIALS OF THE SECOND DEGREE****V.G. Nikolaev***Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod, Russian Federation**E-mail: vg14@inbox.ru*

A Schwartz homogeneous problem for vector functions being analytic as per Douglis in the final domain on plane has been considered. The function data are the solutions to a homogeneous elliptic partial-derivatives system of the first order, which depends on the matrix with complex coefficients. It is assumed that the determinant of the complex part of this matrix is different from zero. In the beginning of the article the solution to the problem under consideration is given for a bivariate case in the form of a vector polynomial of the second degree. Further transformations are made to find the general method of building such solutions. It is demonstrated that the real part of the function being analytic as per Douglis will be a solution for a certain homogeneous partial-derivatives system of the second order. Meanwhile, if we know the solution to the Dirichlet problem for this system, we can build the solution to the Schwartz problem, corresponding to the initial matrix. We are searching for the required solution to the Dirichlet problem in the form of a vector polynomial of the second degree with linearly-dependent components. After this function's substitution into the obtained system of partial-derivatives equations, we get a real homogeneous algebraic system. Such system will have nonzero solutions only in case its determinant is equal to zero. By setting the relevant determinant to zero, we get a two-variable algebraic equation. Further on, we prove a fundamental theorem that the existence of a real arbitrary nonzero solution to this algebraic equation is a necessary and sufficient condition of the existence the solution to the Schwartz homogeneous problem in the form of a vector polynomial of the second degree, corresponding to the initial matrix. In the end of the article we give an example of using the fundamental theorem to build two solutions to the studied problem, which correspond to the set matrix.

Keywords: matrix; J-analytic function; vector polynomial; quadratic form; ellipse; system of algebraic equations.

References

1. Soldatov A.P. *Funktsii, analiticheskie po Duglisu* (Functions being analytic as per Douglis). NovGU Publ., 1995, 196 p. (in Russ.).
2. Vasil'ev V.B., Nikolaev V.G. Schwarz problem for first-order elliptic systems on the plane. *Differential Equations*, 2017, Vol. 53, no. 10, pp. 1318–1328. DOI: 10.1134/s0012266117100081
3. Nikolaev V.G. A Criterion for the Existence of Nontrivial Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, Vol. 219, Iss. 2, pp. 220–225. DOI: 10.1007/s10958-016-3099-0
4. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Introduction to the theory of functions of a complex variable). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 432 p. (in Russ.).

Received July 4, 2019

ВЛИЯНИЕ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА НА ВИБРАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ТРУБОК КОРИОЛИСОВОГО РАСХОДОМЕРА

И.А. Лех, П.А. Тараненко, В.П. Бескачко

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: taranenkopa@susu.ru

В связи с разработкой методики измерения параметров потоков «жидкость–газ» кориолисовыми массовыми расходомерами (КМР) предпринята попытка оценить влияние присутствия пузырьков газа на параметры колебаний измерительной трубки КМР. Разработана балочная конечноэлементная модель прямой трубки, реализованная средствами пакета MATLAB. Поток флюида описывается в 1D-приближении, присутствие газового пузырька моделируется локальным (с точностью до размера конечного элемента) изменением плотности потока в месте расположения пузырька в данный момент времени. Возбуждение поперечных колебаний трубки осуществляется с помощью внешней гармонической силы, приложенной в центре трубки. Частота возбуждения задается равной частоте собственных колебаний заполненной трубки с пузырьком. Выполнена серия численных экспериментов, в которых варьировались объемная доля газовой фазы и скорость флюида. Выявлена зависимость от этих факторов обусловленного эффектом Кориолиса фазового сдвига между колебаниями плеч расходомера. Оценена погрешность определения массового расхода, обусловленная присутствием пузырьков. Проведена серия экспериментов по наблюдению пузырьков эффектов с промышленным расходомером ДУ15. Найдено качественное согласие результатов расчетов и экспериментов.

Ключевые слова: кориолисов массовый расходомер; газожидкостный поток; численные эксперименты; метод конечных элементов.

Введение

Кориолисовы расходомеры (КМР) за три десятилетия, прошедших с момента их массового появления на рынке, получили широкое распространение в самых разных отраслях промышленности и заслужили признание благодаря точности и надежности измерений массовых расходов и плотностей однородных, однофазных флюидов. История создания этих устройств и основные этапы в развитии их теории и практического применения подробно описаны в обзорах [1–4], краткий обзор современных исследований приведен в работе [5]. Для однофазных потоков теория измерений разработана достаточно глубоко для того, чтобы предсказывать рабочие характеристики КМР данной конструкции или проектировать приборы с заданными характеристиками [6].

Успехи в применении КМР к однофазным потокам постоянно стимулируют попытки распространить метод и на многофазные потоки. Возникающие в этом случае задачи весьма разнообразны и сильно различаются по сложности в зависимости от количества фаз, их физических свойств и списка характеристик потока, подлежащих измерению. Очевидно, что не все из этих задач могут быть решены «неинвазивно», так, как это делается в однофазном случае – по наблюдениям за движениями трубопровода, возбуждаемыми потоком флюида. Наиболее простым является случай двухфазного потока, в котором одна из фаз является мелкодисперсной и равномерно распределенной по объему трубопровода. В этом случае флюид можно рассматривать как гомогенную жидкость с некоторым эффективным набором свойств [7] и для измерения его массового расхода использовать те же средства, что и для однофазных потоков. Примером являются потоки «жидкость–газ» при достаточно большой приведенной скорости жидкости, когда газ присутствует в потоке в виде мелких пузырьков (режим дисперсных пузырьков [8]). Как показывает практика, «однофазный» подход остается достаточно точным, если объемная доля газа не превышает нескольких процентов. Дальнейшее ее увеличение приводит к неприемлемой потере точ-

ности и надежности измерений. Причиной является образование крупных газовых пузырей с размерами, сопоставимыми с диаметром трубы, – переход от пузырькового режима течения к т. н. снарядному (пробковому) режиму, в котором модель гомогенного флюида перестает работать. Качественно понятно, почему в этом режиме нарушается работоспособность КМР: распределение массы флюида вдоль измерительной трубки становится существенно неоднородным и изменяющимся во времени случайным образом, что ведет к случайным же изменениям наблюдаемых параметров колебаний – основной частоты колебаний трубки и фазового сдвига между колебаниями ее плеч. В настоящее время предложен эмпирический метод решения этой задачи, позволяющий получать надежные результаты для потоков, где объемная доля газовой фазы достигает 80 % [9–11]. В то же время отмечается, что дальнейшее совершенствование метода требует более глубокого понимания механизмов взаимодействия двухфазного флюида с измерительной трубкой КМР и разработки соответствующих физических моделей, позволяющих предсказывать отклик прибора на двухфазный поток.

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментальных исследований отклика КМР на возмущения, вносимые короткими пакетами газовых пузырей, импульсно инжектируемыми в однородный поток жидкости. Описываются результаты численных экспериментов, полученные с помощью конечноэлементной модели прямой измерительной трубки КМР, в которой поток описывается в 1D-приближении и характеризуется неоднородным распределением массовой плотности из-за присутствия в нем одиночных пузырей или их пакетов.

Экспериментальное исследование

Экспериментальная установка схематически представлена на рис. 1. Она включает бак с водой, насос, эталонный и исследуемый расходомеры, систему подачи воздуха, а также комплекс аппаратуры для контроля и управления параметрами потока и автоматической записи результатов измерений. В качестве эталонного расходомера использовался коммерческий расходомер ДУ15 производства ООО «ЭлМетро Групп», а в качестве опытного – расходомер ДУ15 той же фирмы. В этих расходомерах входной поток делится пополам и попадает в две идентичные измерительные трубки, имеющие Δ -образную форму и расположенные параллельно друг другу. Поперечные вынужденные колебания трубок создаются электромеханическим приводом типа «катушка индуктивности+магнит», причем катушка закреплена в середине одной трубки, а магнит расположен напротив катушки на другой трубке, так что возбуждаемые драйвером колебания трубок происходят в противофазе. Поток флюида через колеблющуюся трубку приводит к появлению сил Кориолиса, которые возбуждают изгибные колебания каждой трубки и приводят к сдвигу фаз (или сдвигу по времени) между колебаниями их плеч. Эти сдвиги фиксируются путем сравнения показаний двух датчиков движения того же типа, что и драйвер, расположенных на трубках симметрично относительно драйвера.

Было выполнено две серии экспериментов. В первой серии изучался отклик расходомера на появление пузырьков воздуха в его измерительной трубке. Для этого системы подачи воздуха и воды настраивались так, чтобы обеспечить заданную величину объемной доли газа (gas volume fraction – GVF) в стационарном потоке флюида. После этого клапан подачи воздуха закрывали. Далее ждали, пока в трубопроводе установится стационарный однофазный поток жидкости (воды) с заданным ранее расходом. Затем кратковременно (на 0,2–0,5 с) открывали клапан подачи воздуха в промежутке между эталонным и опытным расходомерами (см. рис. 1) и записывали временные сигналы с двух измерительных катушек расходомера. Запись происходила на отрезке времени, достаточном для пробега пакета пузырьков воздуха по измерительным трубкам и возвращения системы в исходный стационарный режим. Целью второй серии экспериментов было исследование влияния газовой фазы на демпфирующие свойства колебательной системы опытного расходомера при тех же самых параметрах подачи воды и воздуха, что и в первой серии. После достижения стационарного режима выключали центральную катушку, возбуждающую колебания измерительных трубок опытного расходомера, и записывали сигналы с измерительных катушек – виброграммы затухающих колебаний.

Численные исследования

Расчетная схема модели показана на рис. 2. Здесь рассматривается геометрически простой вариант КМР с прямой измерительной трубкой кольцевого поперечного сечения. С механической

точки зрения трубка описывается как защемленная по краям балка Тимошенко, совершающая вынужденные колебания под действием поперечной гармонической силы, приложенной в середине трубки (в точке С) и имеющей частоту вблизи частоты основной формы колебаний трубки с текущей средой. В присутствии среды, текущей по трубке со средней скоростью V , возникают силы инерции, приводящие к возбуждению второй (кориолисовой) формы колебаний. В результате колебания в точках А и В, симметрично расположенных относительно центра С, совершаются со сдвигом $\Delta\varphi$ по фазе относительно друг друга. Величина $\Delta\varphi$ непосредственно связана с массовым расходом флюида прямо пропорциональной зависимостью и поэтому является основной наблюдаемой величиной. Флюид рассматривается в простейшем приближении, когда он характеризуется всего двумя параметрами – скоростью V и плотностью $\rho_{\text{жидк}}$. С физической точки зрения он представляется как тонкая, но массивная нить, протягиваемая по оси трубки со скоростью V (1D-модель флюида). Подобные модели не впервые рассматриваются в литературе и достаточно хорошо изучены для случая, когда поток однофазный и стационарный, $\rho_{\text{жидк}} = \text{const}$, $V = \text{const}$ [12, 13].

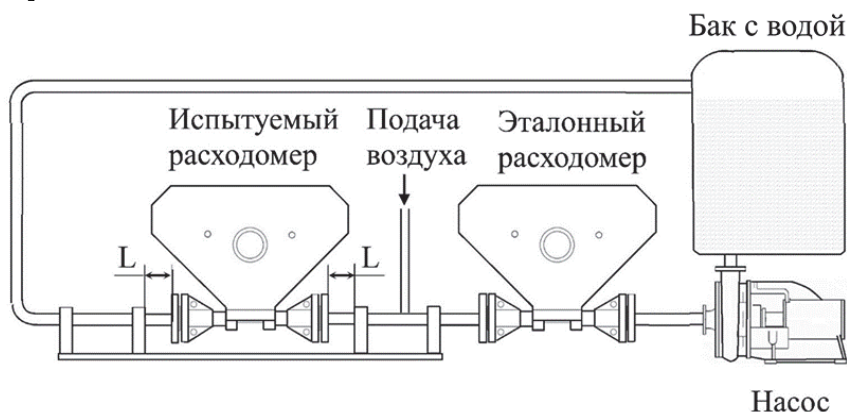


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

В двухфазном потоке плотность флюида представляет собой среднее по сечению значение плотности движущихся фаз и является функцией, зависящей от выбора положения сечения (его координаты z) и момента времени t , когда это сечение рассматривается: $\rho_{\text{жидк}} = \rho_{\text{жидк}}(z, t)$. Существенна или нет эта зависимость, зависит от соотношения между плотностями фаз и от режима потока. Наиболее сильной она является при большой разнице в плотностях фаз и для прерывистых потоков, например, для потоков «жидкость–газ» в пробковом режиме, когда сечение трубки оказывается занятым преимущественно то одной, то другой фазой. В этом, интересующем нас, случае при не слишком больших давлениях можно считать, что плотность флюида целиком определяется плотностью жидкой фазы. Кроме того, для не слишком больших пузырей можно считать, что они движутся вдоль трубы с той же скоростью, что и жидкость [14, 15]. Последние два соображения мы положили в основу предлагаемой ниже численной модели. Фактически она является некоторым обобщением 1D модели флюида в виде массивной тонкой нити на случай, когда линейная плотность нити изменяется вдоль потока из-за присутствия легкой газовой фазы (рис. 3). Естественным способом реализовать эту модель численно является метод конечных элементов, хорошо зарекомендовавший себя при моделировании КМР в «однородном случае».

Опуская технические подробности применения FEM к интересующей нас задаче (их можно найти в работах [12, 13, 16]), отметим только, что в итоге подлежащие решению уравнения движения имеют вид:

$$M\ddot{x} + K(V)\dot{x} + C(V)x = F(t),$$

где M , $K(V)$ и $C(V)$ – глобальные матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно; а $F(t)$ – вектор столбец внешних вынуждающих воздействий – сосредоточенных сил и моментов. Локальные матрицы, характеризующие отдельный конечный элемент, имеют размерность 4×4 . Явные выражения для локальных матриц приведены в [16]. Они описывают поперечные колебания этого элемента в плоскости рисунка с учетом сил, действующих на элемент со стороны текущей среды. Степени свободы, соответствующие растяжению–сжатию, кручению и изгибу из плоскости, не учитываются.

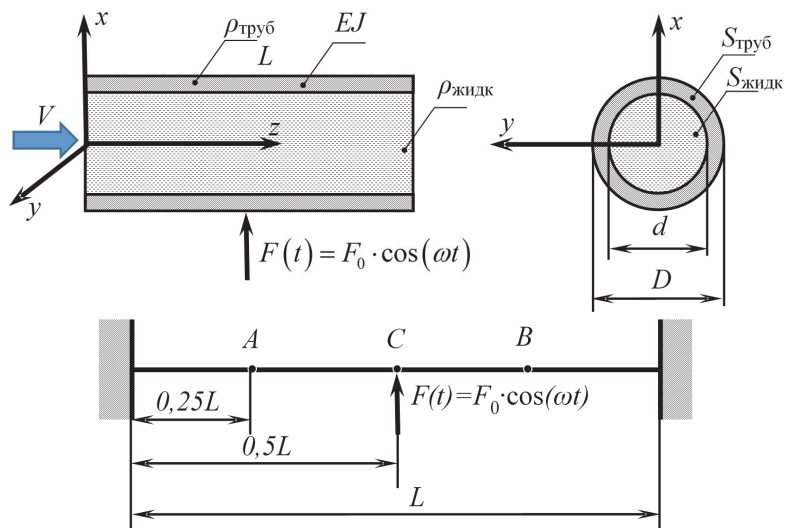


Рис. 2. Расчетная модель расходомера с прямой измерительной трубкой

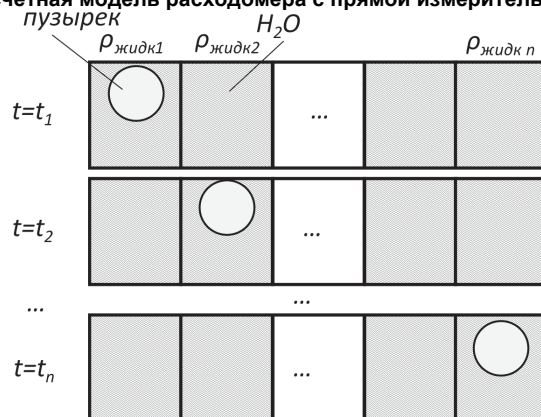


Рис. 3. Движение пузырька по трубке (расчет)

Параметры модели были подобраны так, чтобы частота основной формы колебаний трубки, заполненной неподвижной жидкостью (водой), примерно соответствовала основной частоте опытного расходомера (около 90 Гц). Для этого пришлось положить $L = 800$ мм, $D = 11$ мм, $d = 9$ мм, а в качестве материала трубки взять материал со свойствами $\rho_{\text{труб}} \approx 7800$ кг/м³, $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па, что примерно соответствует стали. Трение в материале трубки принято прямо пропорциональным матрице жесткости. В этом случае трение является частотно зависимым, оно определялось декрементом, равным δ на собственной частоте. Трубка с такими параметрами была разбита на $N = 40$ элементов равной длины $l = L/N$. Масса флюида в каждом элементе в данный момент времени зависела от присутствия в нем пузырьков и их общего объема и считалась равномерно распределенной по длине элемента. Эта масса перемещалась вниз по потоку в соседний элемент спустя промежуток времени $\Delta t = l/V$. При смене положения пузырька одновременно пересчитывались локальные матрицы масс, жесткости и демпфирования элементов, участвующих в обмене пузырьком, и соответственно модифицировались одноименные глобальные матрицы. В описываемых ниже численных экспериментах мы ограничились рассмотрением движения по трубке одиночного пузырька или (точнее) компактного пакета пузырьков с размерами, не выходящими за пределы одного элемента, и объемом, отвечающим заданной объемной доле газа α , в пределах этого элемента.

Вначале мы выяснили, как влияет присутствие воздушного пузырька и его положение в трубке (z) на частоту f_0 основной формы ее колебаний, $f_0 = f_0(z, \alpha)$. Положив $V = 0$ и передвигая последовательно пузырек из одного элемента в другой, мы выполнили модальный анализ колебательной системы КРМ для каждого положения пузырька.

Если считать, что пузырек перемещается со скоростью V , тогда можно оценить, как изменяется частота f_0 в зависимости от времени в процессе пробега пузырька по трубке

$$f_0 = f_0(z, \alpha) = f_0(Vt, \alpha) \equiv \tilde{f}_0(t, \alpha).$$

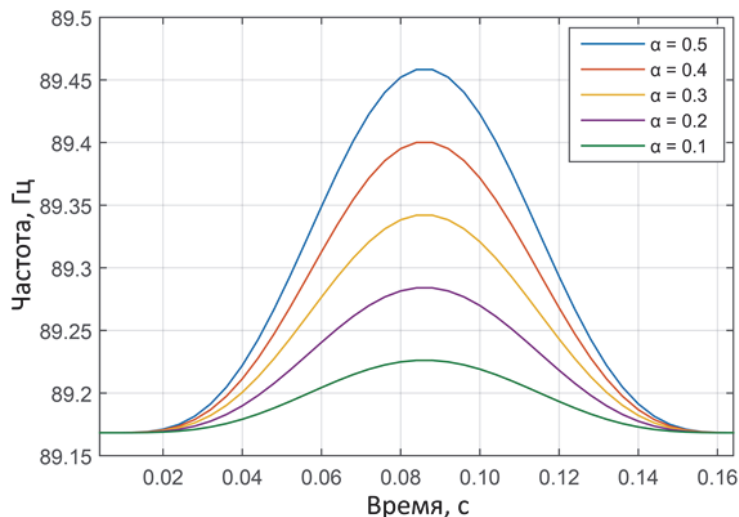


Рис. 4. Зависимость от времени собственной частоты колебаний трубки в процессе прогона по ней пузырьков разного размера (разной объемной доли газа)

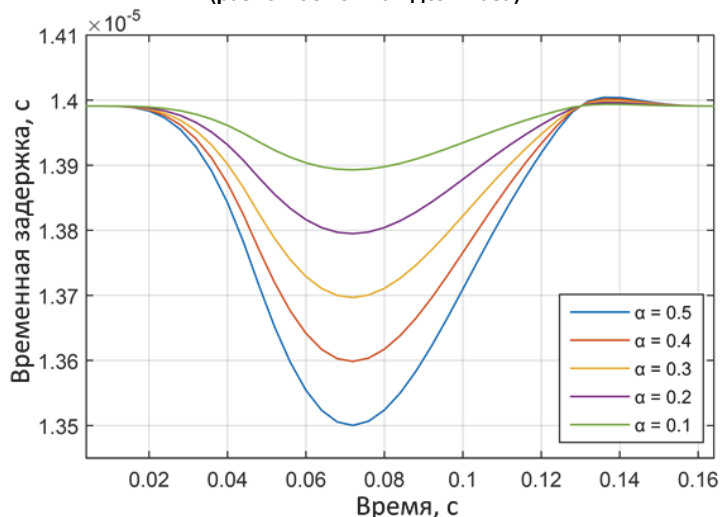


Рис. 5. Зависимость от времени временной задержки в процессе прогона по трубке пузырьков разного размера

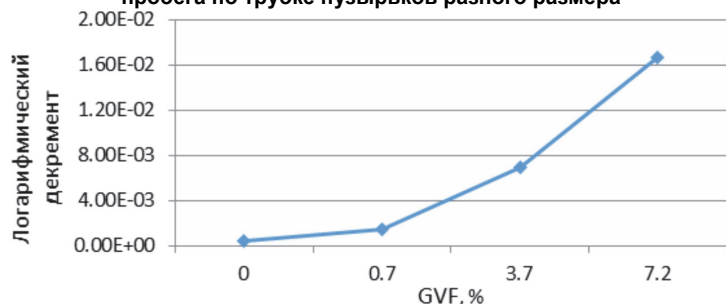


Рис. 6. Зависимость логарифмического декремента колебаний от объемной доли газа в потоке

различной объемной доле газа в потоке были определены экспериментальным путем, как говорилось выше (см. рис. 6). Эти данные служили ориентирами в модельных расчетах. Для однофазного потока устанавливали декремент колебаний, $\delta = \delta_1 \approx 0,0005$ (см. рис. 6). Демпфирующие свойства трубок, несущих потоки «газ–жидкость», намного выше и существенно зависят от GVF. В таких случаях мы полагали в расчетах $\delta = \delta_2 \approx 0,015$ (рис. 6). В отсутствие пузырей время установления колебаний в модели с указанными выше параметрами и однофазным потоком составляло около 20 с. По его истечении декремент колебаний скачком увеличивался до δ_2 и в трубке появлялся пузырь, движущийся далее так, как описано выше.

Эта зависимость показана на рис. 4. При определении собственных частот трение в материале не учитывалось, поскольку оно мало и очень слабо влияет на собственные частоты. Из опыта также известно, что движение жидкости в трубке слабо влияет на частоту основной формы ее колебаний. Поэтому не будет большой ошибкой считать, что продемонстрированная зависимость $f_0(z, \alpha)$ будет иметь место и в случае, когда $V \neq 0$. В реальных расходомерах система управления работает таким образом, чтобы частота вынуждающей силы всегда находилась вблизи частоты основной формы колебаний трубки $f_0(z, \alpha)$. Поэтому далее, располагая зависимостью $f_0(z, \alpha)$ и уравнениями движения (1), мы выполнили гармонический анализ для каждого из N положений пузырька в рассматриваемой конечно-элементной модели. Это позволило оценить амплитуды и фазы колебаний каждого элемента в процессе прогона пузыря по трубке и, следовательно, определить измеряемую на опыте разницу фаз $\Delta\varphi$ в колебаниях элементов, содержащих точки А и В. (рис. 5). Как показали предварительные расчеты, декремент колебаний не влияет на $\Delta\varphi$, поэтому вычисления проводились с фиксированным декрементом $\delta = 0,1$.

Наконец, путем непосредственного численного интегрирования уравнений движения (1) был выполнен анализ переходных процессов. Рассматривалось возбуждение колебаний трубки из состояния покоя гармонической силой, приложенной в ее центре (см. рис. 1). Демпфирующие свойства трубки опытного расходомера при

Анализ численных и экспериментальных результатов

В эксперименте расход жидкости через опытный расходомер составлял 2025 кг/ч. Поскольку расходомер содержит две трубки, а расчетная модель одну, расчеты выполнены при расходе 1012,5 кг/ч. При таком массовом расходе средняя по сечению скорость воды V в трубке составляет примерно 5 м/с. Если пузырь движется со скоростью жидкости, тогда время его пробега по трубке длиной 0,8 м будет составлять 0,16 с. На рис. 7 показаны опытные данные о движении точки на трубке, где расположен один из двух индуктивных датчиков движения, в процессе пропускания через трубку короткого пакета пузырей. На рис. 8 представлен тот же процесс пропускания пузырей, как он описывается предложенной моделью. Заметим, что наводящаяся в сенсоре ЭДС пропорциональна скорости движения трубки в месте расположения сенсора, а не ее смещению. Тем не менее графики на рисунках сравнивать можно, поскольку при колебаниях амплитуда скорости отличается от амплитуды смещения только на множитель, равный частоте колебаний. Поэтому можно заключить, что модель качественно верно передает характер отклика трубки на прохождение пузыря. Согласно рис. 7, прохождение пузыря регистрируется как узкий (шириной $\approx 0,16$ с) хорошо выраженный провал на временной зависимости амплитуды ЭДС сенсора, за которым следует более длительный (≈ 3 с) период установления колебаний. Примерно столько же времени занимает процесс установления колебаний и в модели, однако предсказываемая ею глубина провала заметно меньше, чем в эксперименте, возможно, из-за малого числа конечных элементов N .

Рис. 9–12 позволяют сравнить опытные данные, полученные при пропускании через трубку пакета пузырьков, с предсказаниями модели в отношении поведения частоты колебаний на основной форме и временной задержки, обусловленной сдвигом фаз $\Delta\varphi$ в колебаниях сенсоров движения, располагающихся в точках A и B на рис. 2. Видно, что вновь качественное согласие имеет место, лучшее – в предсказаниях частоты и худшее – в предсказаниях временной задержки. В последнем случае, возможно, это связано с тем, что в модели подстройка частоты вынуждающей силы под частоту основной формы колебаний трубки с пузырьком не происходит, в отличие от опытного расходомера. Однако обосновать последнее утверждение можно будет после детального исследования динамических свойств системы управления этого расходомера.

Заключение

В настоящей работе в связи с исследованиями механизмов взаимодействия двухфазного потока «жидкость–газ» с измерительной трубкой кориолисова расходомера выполнены эксперименты по изучению ее реакции на появление в однородном потоке одиночных пузырей газа или их компактных пакетов. Для интерпретации полученных данных предложена простая конечно-элементная модель, в которой измерительная трубка в механическом отношении рассматривается как балка Тимошенко, а движущийся в ней двухфазный поток описывается в 1D-приближении неоднородным распределением линейной массовой плотности. Опытные данные показывают, что прохождение одиночного пузыря или пакета приводит к заметным возмущениям обеих величин, измеряемых в КРМ: частоты основной формы колебаний и сдвига фаз колебаний плеч измерительной трубки. Эти возмущения являются причиной погрешностей в определении плотности жидкой фазы и ее массового расхода. Предложенная в работе численная модель способна качественно правильно описать отклик КРМ на присутствие газовых пузырей в потоке жидкости. Совершенствование модели в количественном отношении требует более детальных исследований динамических свойств системы управления движением измерительной трубки и связи демпфирующих свойств колебательной системы с параметрами газовой смеси – GVF и массовым расходом жидкости.

Испытания проведены с использованием оборудования ЦКП «Экспериментальная механика» ЮУрГУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант № 9.9676.2017/8.9).

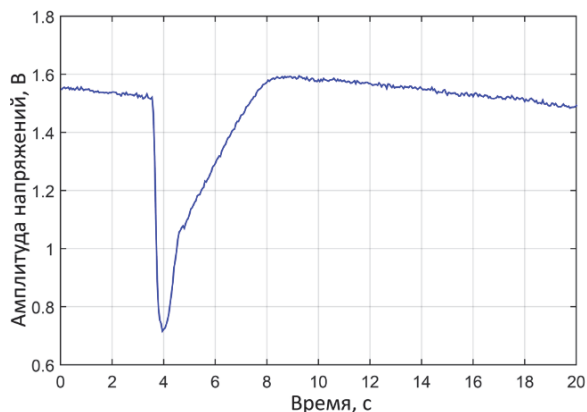


Рис. 7. Временная зависимость огибающей амплитуды ЭДС, создаваемой индуктивным датчиком движения (эксперимент)

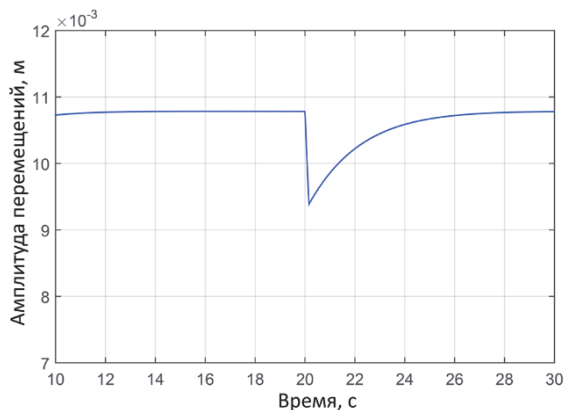


Рис. 8. Временная зависимость огибающей амплитуды смещения точки А в модели (см. рис. 2), где в реальных расходомерах расположен датчик движения (расчет)

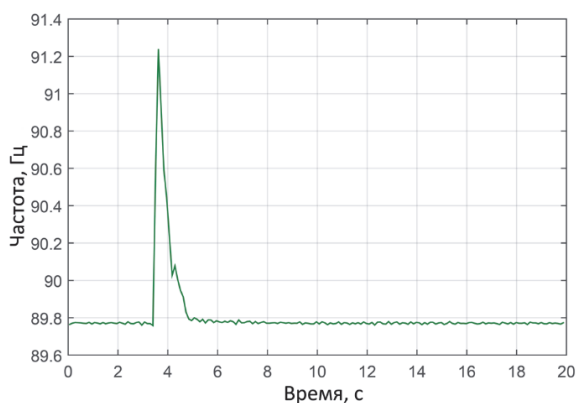


Рис. 9. Поведение основной собственной частоты колебаний трубки расходомера в процессе пробега газового пузырька в эксперименте

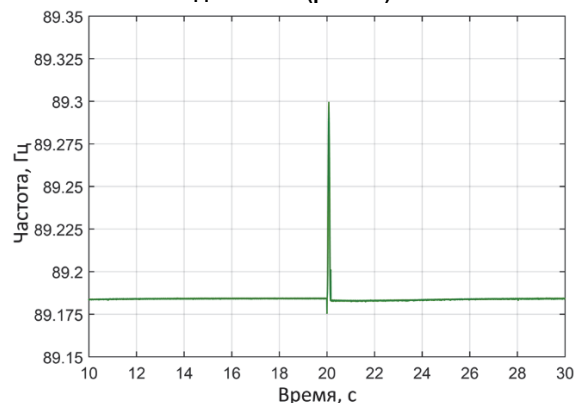


Рис. 10. Поведение основной собственной частоты колебаний трубки расходомера в процессе пробега газового пузырька в расчетной модели

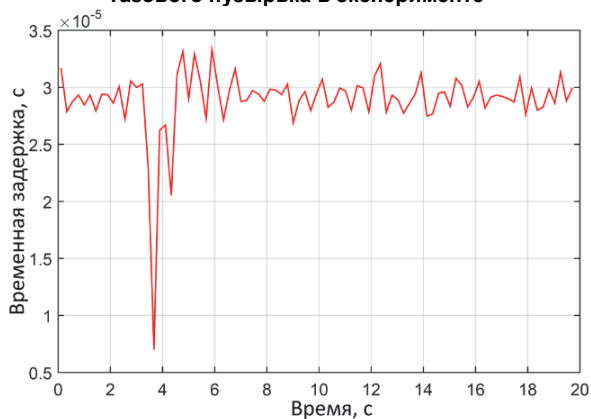


Рис. 11. Поведение временной задержки в процессе пробега газового пузырька в эксперименте

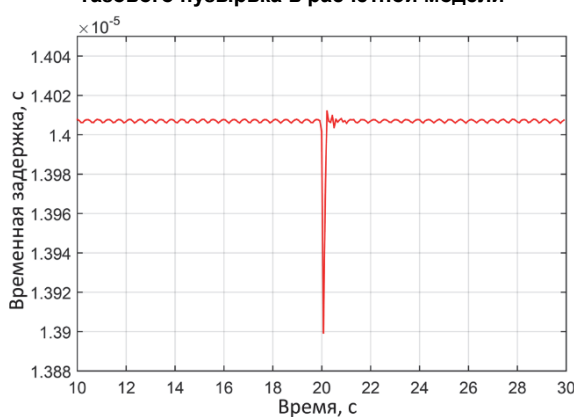


Рис. 12. Поведение временной задержки в процессе пробега газового пузырька в расчетной модели

Литература

1. Baker, R.C. Coriolis flowmeters: industrial practice and published information / R.C. Baker // Flow Measurement and Instrumentation. – 1994. – Vol. 5, Iss. 4. – P. 229–246.
2. Wang, T. Coriolis flowmeters: a review of developments over the past 20 years, and an assessment of the state of the art and likely future directions / T. Wang, R. Baker // Flow Measurement and Instrumentation. – 2014. – Vol. 40. – P. 99–123.
3. Binulal, B.R. Coriolis Flow meter: A Review from 1989 to 2014 / B.R. Binulal, K. Jayarai // International Journal of Scientific & Engineering Research. – 2014. – Vol. 5, no. 7. – P. 718–723.
4. Anklin, M. Coriolis mass flowmeters: Overview of the current state of the art and latest research / W. Drahm, A. Rieder // Flow Measurement and Instrumentation. – 2006. – Vol. 17, Iss. 6. – P. 317–323.

5. Kolhe, V.A. An overview of Coriolis Mass Flowmeter as a Direct Mass Flow Measurement Device / V.A. Kolhe, R.L. Edlabadkar // *Int. J. on Emerging Trends in Technology (IJETT)*. – 2016. – Vol. 3, Iss. 2. – P. 2112–2119.
6. Modeling a Coriolis Mass Flow Meter for Shape Optimization / W. Hakvoort, J.P. Meijaard, R.G.K.M. Aarts *et al.* // *Proceedings of The 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics*. Lappeenranta, Finland: Lappeenranta University of Technology. – 2010. – P. 1–10.
7. Brennen, C.E. *Fundamentals of Multiphase Flows* / C.E. Brennen. – Cambridge University Press, 2005. – P. 220–245.
8. Dukler, A.E. *Flow Pattern Transitions in Gas-liquid Systems: Measurement and Modeling* / A.E. Dukler, Y. Taitel // *Multiphase science and technology*. – 1986. – P. 1–94.
9. Two-phase flow metering of viscous oil using a Coriolis mass flow meter: a case study / M. Henry, M. Tombs, M. Duta *et al.* // *Flow Measurement and Instrumentation*. – 2006. – Vol. 17, Iss. 6. – P. 399–413.
10. New Applications for Coriolis Meter-based Multiphase Flow Metering in the Oil and Gas Industries / M. Henry, M. Tombs, F. Zhou, M. Zamora // *The 10th International symposium of measurement technology and intelligent instruments*. June 29 – July 2, 2011. – P. 1–6.
11. Coriolis mass flow metering for three-phase flow: A case study / M.P. Henry, M.S. Tombs, M.E. Zamora, F.B. Zhou // *Flow Measurement and Instrumentation*. – 2013. – Vol. 30. – P. 112–122.
12. Wang, S. Virtual Coriolis flow meter: a tool for simulation and design / S. Wang, C. Clark, R. Cheesewright // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2006. – Vol. 220, Iss. 6. – P. 817–835.
13. Stack, C. A finite element for the vibration analysis of a fluid-conveying Timoshenko beam / C. Stack, R. Garnett, G. Pawlas // *34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. – 1993. – P. 1552–1562.
14. van Hout R. Evolution of hydrodynamic and statistical parameters of gas-liquid slug flow along inclined pipes / R. van Hout, L. Shemer, D. Barnea // *Chemical Engineering Science*. – 2003. – Vol. 58, Iss. 1. – P. 115–133.
15. Taitel, Y. Hydrodynamic Models Based on Flow Patterns / Y. Taitel, D. Barnea // *Encyclopedia of Two-Phase Heat Transfer and Flow I*. – 2015. – P. 23–99.
16. Belhadj, A. The simulation of Coriolis meter response to pulsating flow using a general purpose F.E. code / A. Belhadj, R. Cheesewright, C. Clark // *Journal of fluids and structures*. – 2000. – Vol. 14, Iss. 5. – P. 613–634.

Поступила в редакцию 23 июня 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 10, no. 3, pp. 47–55*

DOI: 10.14529/mmph190306

GAS BUBBLES EFFECT ON THE VIBRATION PARAMETERS OF THE CORIOLIS FLOWMETER MEASURING TUBES

I.A. Lekh, P.A. Taranenko, V.P. Beskachko

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: taranenkopa@susu.ru

In developing a methodology for measuring the mass flow rates of liquid-gas flows by Coriolis mass flowmeters (CMF), an attempt is made to estimate the effect of the presence of gas bubbles on the observed parameters of the vibrations of the CMF measuring tube. The finite-element model CMF with a straight tube, created in MATLAB package, is presented. The fluid flow is described in the 1D-approximation, the presence of a gas bubble is modeled by a local change in the flux density at the bubble location at a given time (the size of the bubble depends on the size of the finite element). Bending vibrations of the tube are carried out by means of an external harmonic force applied at the center of the tube. The drive frequency is set equal to the modal frequency of the filled tube. A series of numerical experiments has been performed, in which the gas volume fraction (GVF) and the fluid velocity varied.

The dependence of the phase shift between the flowmeter arms oscillations caused by the Coriolis effect on these factors has been revealed. The error in determining the mass flow due to the bubbles presence is estimated. A series of experiments has been conducted with an industrial DU15 flowmeter to observe bubble effects. The results of the experiments are compared with the predictions of numerical calculations and their qualitative agreement is found.

Keywords: Coriolis mass flowmeter; gas-liquid flow; numerical experiments; finite-element methods.

References

1. Baker R.C. Coriolis flowmeters: industrial practice and published information. *Flow Measurement and Instrumentation*, 1994, Vol. 5, Iss. 4, pp. 229–246. DOI: 10.1016/0955-5986(94)90027-2
2. Wang T., Baker R. Coriolis flowmeters: a review of developments over the past 20 years, and an assessment of the state of the art and likely future directions. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2014, Vol. 40, pp. 99–123. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.08.015
3. Binulal B.R., Jayarai K. Coriolis Flow meter: A Review from 1989 to 2014. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 2014, Vol. 5, no. 7, pp. 718–723.
4. Drahm W., Rieder A. Coriolis mass flowmeters: Overview of the current state of the art and latest research. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2006, Vol. 17, Iss. 6, pp. 317–323. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2006.07.004
5. Kolhe V.A., Edlabadkar R.L. An overview of Coriolis Mass Flowmeter as a Direct Mass Flow Measurement Device. *Int. J. on Emerging Trends in Technology (IJETT)*, 2016, Vol. 3, Iss. 2, pp. 2112–2119.
6. Hakvoort W., Meijaard J.P., Aarts R.G.K.M., Jonker J.B., Zwikker J.M. Modeling a Coriolis Mass Flow Meter for Shape Optimization. *Proc. 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics, Lappeenranta, Finland: Lappeenranta University of Technology*, 2010, p. 1–10.
7. Brennen C.E. *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge University Press, 2005. – P. 220–245. DOI: 10.1017/CBO9780511807169
8. Dukler A.E., Taitel Y. Flow Pattern Transitions in Gas–liquid Systems: Measurement and Modeling. *Multiphase science and technology*, 1986, pp. 1–94. DOI: 10.1007/978-3-662-01657-2_1
9. Henry M., Tombs M., Duta M., Zhou F., Mercado R., Kenyery F., Shen J., Morles M., Garcia C., Langansan R. Two-phase flow metering of viscous oil using a Coriolis mass flow meter: a case study. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2006, Vol. 17, Iss. 6, pp. 399–413. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2006.07.008
10. Henry M., Tombs M., Zhou F., Zamora M. New Applications for Coriolis Meter-based Multiphase Flow Metering in the Oil and Gas Industries. *Proc. 10th International symposium of measurement technology and intelligent instruments*. June 29 – July 2, 2011. – P. 1–6.
11. Henry M.P., Tombs M.S., Zamora M.E., Zhou F.B. Coriolis mass flow metering for three-phase flow: A case study. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2013, Vol. 30, pp. 112–122. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2013.01.003
12. Wang S., Clark C., Cheesewright R. Virtual Coriolis flow meter: a tool for simulation and design. *Proc. Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, Vol. 220, Iss. 6, pp. 817–835. DOI: 10.1243/09544062JMES186
13. Stack C., Garnett R., Pawlas G. A finite element for the vibration analysis of a fluid-conveying Timoshenko beam. *Proc. 34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 1993, pp. 1552–1562. DOI: 10.2514/6.1993-1552
14. van Hout R., Shemer L., Barnea D. Evolution of hydrodynamic and statistical parameters of gas–liquid slug flow along inclined pipes. *Chemical Engineering Science*, 2003, Vol. 58, Iss. 1, pp. 115–133. DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00441-4
15. Taitel Y., Barnea D. Hydrodynamic Models Based on Flow Patterns. *Encyclopedia of Two-Phase Heat Transfer and Flow I*, 2015, pp. 23–99. DOI: 10.1142/9789814623216_0004
16. Belhadj A., Cheesewright R., Clark C. The simulation of Coriolis meter response to pulsating flow using a general purpose F.E. code. *Journal of fluids and structures*, 2000, Vol. 14, Iss. 5, pp. 613–634. DOI: 10.1006/jfls.2000.0287

Received June 23, 2019

МОНОТОННОЕ ВОЗРАСТАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛЮБЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СО СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ РЕЛАКСАЦИИ

А.В. Хохлов

Научно исследовательский институт механики, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва,
Российская Федерация
E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Продолжен анализ свойств показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования с постоянными скоростями, порождаемых линейным определяющим соотношением вязкоупругости с произвольной функцией релаксации (в одноосном случае) и его зависимости от деформации, скорости деформации и характеристик функции релаксации.

Выведено и аналитически изучено выражение для показателя скоростной чувствительности параллельных соединений любого числа (трехпараметрических) фрактальных моделей Фойгта, в частности, моделей со степенными функциями релаксации («фрактальных элементов»). Доказано, что он принимает значения в диапазоне от нуля до максимального показателя соединяемых моделей, а в случае соединения только «фрактальных элементов» нижняя граница диапазона (и предельное значение при стремлении скорости деформации к нулю) равна не нулю, а минимальному из показателей. Главный результат статьи – доказательство возрастания показателя скоростной чувствительности рассматриваемых моделей с ростом скорости деформации (отсутствия у него точки максимума). Он аналогичен полученному ранее для любых параллельных соединений нелинейных степенных вязких элементов и его обобщению на параллельные соединения вязкопластичных моделей Гершеля–Балкли (и Шведова–Бингама) и означает отсутствие точки перегиба кривой зависимости логарифма напряжения от логарифма скорости деформации, порождаемой любой моделью рассматриваемого класса. Отсюда следует, что такие фрактальные модели не способны описывать сигмоидальную форму кривой скоростной чувствительности, характерную для режима сверхпластического деформирования материалов, и потому непригодны для моделирования сверхпластичности. Этот результат дополняет и оттеняет обнаруженную способность линейной теории вязкоупругости (даже классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого) качественно описывать наличие максимума и высокие значения показателя скоростной чувствительности, сколь угодно близкие к единице, верхней границе для псевдопластических сред.

Ключевые слова: вязкоупругость; диаграммы деформирования; показатель скоростной чувствительности; сверхпластичность; сигмоидальная кривая; фрактальные модели Фойгта; фрактальный элемент; уравнения с дробной производной; степенной нелинейно-вязкий элемент.

Введение

Диаграммы деформирования (ДД) многих материалов (в частности, наследственных) в одноосных квазистатических испытаниях с постоянными скоростями деформации $\dot{\varepsilon} = a$ зависят от скорости a : $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$. Одна из наиболее распространенных мер скоростной чувствительности материала (выраженности зависимости ДД от a и скоростного упрочнения) – показатель скоростной чувствительности (ПСЧ)

$$m(a, \varepsilon) := \frac{\partial \lg \sigma(\varepsilon, a)}{\partial \lg a} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a}. \quad (1)$$

К примеру, ПСЧ классической степенной модели вязкой (жидкообразной) среды

$$\sigma = K\dot{\varepsilon}^M, \quad M \in (0;1], \quad K > 0, \quad (2)$$

($M \in (0;1)$ для псевдопластических сред, $M > 1$ для дилатантных) равен M (не зависит от a , ε). Напряжение и время (скорость деформации) в дальнейшем предполагаются безразмерными.

Особенно важна высокая скоростная чувствительность материала и ее характеристика при сверхпластическом деформировании [1–12], лежащем в основе важных технологических процессов штамповки изделий сложной формы, получения материалов с нужной структурой и механическими свойствами посредством обработки давлением и большими пластическими деформациями [2–7, 10–12]. Сверхпластичность – способность многих материалов в определенных структурно-термомеханических условиях (в определенном диапазоне температур, скоростей и при достаточной степени измельчения зерен) к очень большой пластической деформации (100–200 % и более) при относительно низком напряжении течения и его сильной зависимости от скорости деформации. Сильная зависимость напряжения течения от скорости деформации (режим сверхпластичности) характеризуется величиной $m \in [0,3;1)$ (максимальное значение $m = 1$ соответствует линейно вязкой жидкости), тогда как для материалов в обычном состоянии $m \leq 0,1$. Многочисленные данные испытаний показывают [2–13], что для режима сверхпластического деформирования материала характерна «сигмоидальная» форма графика зависимости $\lg \sigma$ от $\lg a$ (кривая 1 на рис. 1), т. е. наличие точки перегиба с почти прямолинейным участком в ее окрестности и, соответственно, наличие точки максимума на графике зависимости ПСЧ (1) от $\lg a$ при фиксированной деформации (кривая 2). Модели сверхпластичности должны описывать характерные качественные особенности данных испытаний материалов (наблюдаемых эффектов), в частности, должны воспроизводить наличие точки перегиба у зависимости $\lg \sigma - \lg a$ и ее сигмоидальную форму (наряду с такими свойствами ДД, как развитое течение при почти постоянном напряжении и высокая чувствительность напряжения течения к скорости деформирования) [2–15].

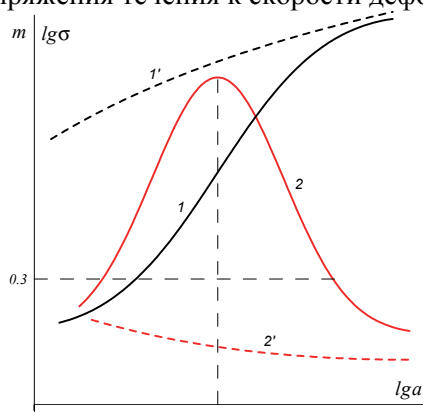


Рис. 1. Типичные зависимости напряжения течения и ПСЧ от скорости деформирования: 1, 2 – в режиме сверхпластического деформирования, 1', 2' – в обычном состоянии

Например, в работе [14] доказана строгая монотонность ПСЧ и невозможность описания сигмоидальной кривой сверхпластичности $\lg \sigma - \lg a$ только параллельными или только последовательными соединениями любого количества нелинейно-вязких элементов вида (2) (традиционно используемых в сверхпластичности) с произвольными параметрами $M_i \in (0;1]$, $K_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, $N > 1$, т. е. доказана необходимость комбинировать в моделях сверхпластичности и параллельные, и последовательные соединения или добавлять элементы других типов (моделирующие другие законы деформирования).

В работе [15] исследованы общие свойства ПСЧ (1) ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$, порождаемых физически линейным определяющим соотношением (ОС) вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

с произвольными функциями релаксации (ФР) и ползучести $R(t)$ и $\Pi(t)$, $t > 0$, и обнаружено, что линейное ОС (3) не только порождает (при определенных ограничениях на ФР) ДД с выра-

женными участками течения при постоянном напряжении, но и, как ни странно, способно моделировать максимум ПСЧ диаграмм деформирования, т. е. «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации в осях $\lg \sigma - \lg a$, и очень высокую скоростную чувствительность с показателем $m \in (0,5;1)$, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов, причем без каких-либо экзотических ограничений на функцию релаксации (в дополнение к общим ограничениям на ФР достаточно потребовать непрерывность $R(t)$ справа в точке $t = 0$, т. е. регулярность модели, и отличие от нуля длительного модуля $R(\infty)$). Эти требования выполняются даже для классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого (ее ФР имеет вид $R = (E - r)e^{-\mu t} + r$, $E > r \geq 0$, $\mu > 0$), и этот факт выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ. Из этого результата следует принципиальная возможность использования линейных интегральных операторов вида (3) (инвариантных относительно сдвигов по времени) как полезного инструмента («элемента») при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала, и необходимость более детального исследования возможностей линейного ОС (3) с ФР конкретных видов [15].

Цель данной статьи – вывод и анализ выражения для ПСЧ (1) диаграмм деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$, порождаемых ОС (3) с функцией релаксации, равной сумме слагаемых вида

$$R(t) = r + At^{-\alpha}, \quad A > 0, \quad r \geq 0, \quad \alpha \in (0;1), \quad (4)$$

с произвольными тройками параметров $\alpha_i \in (0;1]$, $A_i > 0$, $r_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $N > 1$, т.е. ПСЧ любых параллельных соединений фрактальных моделей Фойгта (fractional Kelvin–Voigt model), и доказательство строгого возрастания $m(a, \varepsilon)$ с ростом скорости a (при любом фиксированном ε). Отсутствие максимума у ПСЧ $m(a)$ означает отсутствие точки перегиба у кривых $\lg \sigma - \lg a$ и невозможность моделирования сигмоидальной формы кривых $\lg \sigma - \lg a$ с помощью таких линейных моделей. Этот результат аналогичен доказанному в статье [14] возрастанию ПСЧ любых параллельных соединений *нелинейных* степенных вязких элементов вида (2). Эта аналогия усиливается тем наблюдением (см. ниже), что ПСЧ линейной модели (4) с $r = 0$ (в англоязычной литературе ее называют моделью Скотта Блэра или фрактальным элементом: the Scott Blair model, fractional element, fractional dashpot, spring-pot) [16–20] не зависит от a и ε и равен постоянной α , т.е. обладает тем же свойством, что и ПСЧ нелинейного вязкого элемента (2). В силу линейности операторов (3) изучаемые качественные свойства ДД и ПСЧ не зависят от способа обезразмеривания напряжений и времени.

1. Семейство диаграмм деформирования линейного ОС вязкоупругости

Данная статья продолжает цикл работ [15, 21–24] и др. по системному аналитическому исследованию линейного ОС (3) с целью определения комплекса моделируемых им реологических эффектов, границ и индикаторов границ его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации.

ОС (3) связывает истории напряжения и деформации в одноосных изотермических процессах в структурно-стабильных материалах. Функции релаксации и ползучести в ОС (3) предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, $\Pi(t)$ – возрастающей и выпуклой вверх на $(0; \infty)$ [21–24], а $R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз; $R(t)$ может быть непрерывной на луче $[0; \infty)$ (тогда модель называется регулярной), а может иметь в точке $t = 0$ интегрируемую особенность (например, степенную) или включать сингулярное слагаемое $\eta \delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция, $\eta > 0$. Из положительности и монотонности функций релаксации и ползучести на $(0; \infty)$ следует, что в т. $t = 0$ существуют пределы справа $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$ и $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0) = +\infty$, если R не ограничена сверху) и предел $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$. Если $\Pi(0+) \neq 0$, то модель регулярна и $R(0+) = 1/\Pi(0+)$.

Процесс деформирования с постоянной скоростью $\varepsilon = at$ ОС (3) переводит в напряжение

$$\sigma(t) = atP(t), \quad P(t) := t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (5)$$

В [21] доказаны следующие свойства осреднения ФР $P(t)$, полезные при анализе ДД и ПСЧ.

Лемма. Пусть $R(t)$ – положительная непрерывная убывающая функция. Тогда $P(t)$, $t > 0$, – гладкая убывающая функция, обладающая свойствами: 1) $P(t) > 1/P(t) > R(t)$ при $t > 0$; 2) $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t))$; 3) $P(+\infty) = R(+\infty)$; 4) для регулярной ФР $P(0+) = R(0+)$; 5) если $R(t)$ дифференцируема, то $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$ при $t \rightarrow \infty$, а функция $tP(t)$ возрастает и выпукла вверх; 6) если $\dot{R}(0+) < \infty$, то $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$.

Исключив параметр $t = \varepsilon/a$, получим из (5) ДД в явной форме:

$$\sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (6)$$

Секущий и касательный модули выражаются формулами $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a)$. При $\varepsilon \rightarrow 0+$ они стремятся к пределу $E := \sigma'(0) = R(0+) = P(0+)$ (если модель регулярна, т.е. $R \in C[0; \infty)$), а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ – к пределу $r := R(\infty) = P(\infty) \geq 0$; E и r – мгновенный и длительный модули (модули сдвига, объемные модули или модули Юнга – в зависимости от физического смысла σ и ε).

В работе [21] доказаны следующие общие свойства ДД (6) (для любой допустимой ФР).

Теорема 1. Пусть $R(t)$ – положительная непрерывная убывающая и выпуклая вниз функция при $t > 0$. Тогда: 1) при любом $a > 0$ ДД $\sigma(\varepsilon)$ монотонна и выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$;

2) семейство ДД (6) возрастает по a ;

3) мгновенный и длительный модули E и r не зависят от скорости деформации a ;

4) при любом $a > 0$ справедлива оценка $r\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < E\varepsilon$ (правое неравенство содержательно при $E < \infty$, т.е. в случае $R \in C[0; \infty)$);

5) при $a \rightarrow 0$ семейство ДД (6) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$;

6) при $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (6) любой регулярной модели сходится (снизу) к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (мгновенной ДД) равномерно на любом отрезке оси ε ;

7) если модель не регулярна (т.е. $R \notin C[0; \infty)$), то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\sigma = 0$;

8) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД (6) обладает асимптотой тогда и только тогда, когда сходится интеграл $I := \int_0^\infty (R(\tau) - r) d\tau$; тогда каждая ДД (6) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I > 0$, и $\sigma(\varepsilon, a) < r\varepsilon + Ia$.

Отсутствие любого из обнаруженных свойств у ДД материала – достаточный признак неприменимости ОС (3) к его моделированию. В частности, линейное ОС (3) не способно описывать материалы с отрицательной скоростной чувствительностью, с падающей ДД, с выпуклыми вниз или имеющими точки перегиба ДД и те, у которых установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от скорости деформации.

2. Показатель скоростной чувствительности линейного ОС и его общие свойства

Вычислим ПСЧ (1) по ДД (6), используя формулу п. 2 леммы $P'(x) = x^{-1}(R(x) - P(x))$:

$$m(a, \varepsilon) = -\sigma^{-1} a (\varepsilon/a)^2 P'(\varepsilon/a) = \varepsilon \sigma^{-1} (P(\varepsilon/a) - R(\varepsilon/a)), \quad \text{т. к. } \sigma/\varepsilon = P(\varepsilon/a), \quad \text{то} \quad (7)$$

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x), \quad x := \varepsilon/a > 0.$$

Итак, ПСЧ – гладкая функция, зависящая от одного аргумента $x := \varepsilon/a$. Каждой конкретной модели (3) (каждой ФР) соответствует своя функция $m(x)$, характеризующая скоростную чувствительность модели (и остальные свойства, поскольку по ней можно восстановить ФР с точностью до множителя [15]). Так как по лемме $P(x) > R(x) > 0$ при $x > 0$, то из (7) следует *общая оценка*

$0 < m(x) < 1$, справедливая для любой ФР. Таким образом, линейное ОС (3) описывает лишь псевдопластические среды и не может моделировать дилатантные среды (у которых кажущаяся вязкость $\eta := \sigma/\dot{\varepsilon}$ – возрастающая функция скорости деформации). Предельные случаи реализуются для упругого элемента с $R(t) = E = \text{const}$, $P(t) = E$ и $m(x) \equiv 0$ и для ньютоновской жидкости: $R = \eta\delta(t)$, $P(t) = \eta t^{-1}$ и $m(x) \equiv 1$ при $x > 0$.

В работе [15] доказано следующее общее утверждение о существовании максимума ПСЧ.

Теорема 2. Пусть ФР $R(t)$ в ОС (3) – положительна, дифференцируема, убывает и выпукла вниз на интервале $(0; \infty)$. Если $R(t)$ непрерывна на луче $[0; \infty)$ (т.е. модель регулярна) и $R(\infty) \neq 0$, то функция $m(x)$ непрерывна на $[0; \infty)$, $m(0) = 0$, $m(\infty) = 0$ и $m(x)$ имеет хотя бы один локальный максимум.

Точкой максимума будет точка $x = \hat{x}$, в которой $m(x)$ достигает своей точной верхней грани $\hat{m} := m(\hat{x})$ на $[0; \infty)$. При фиксированной скорости a функция $m(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, имеет максимум в т. $\hat{\varepsilon} = a\hat{x}$. А при фиксированном ε функция $m(a)$, $a > 0$, имеет максимум в т. $\hat{a} = \varepsilon/\hat{x}$. Таким образом, линейное ОС (3) способно моделировать наличие максимума ПСЧ и сигмоидальность зависимости $\lg \sigma - \lg a$ (см. рис. 1), столь важные для сверхпластичности.

Для сингулярных ФР и неограниченных в точке $t = 0$ ФР свойства ПСЧ, доказанные для регулярных ФР, могут нарушаться. Например, для модели Фойгта (с $R = \eta\delta(t) + r$) имеем $P = r + \eta/t$, и ДД (6) и ПСЧ (7) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a, \quad m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}, \quad x := \varepsilon/a > 0,$$

где $\lambda := r/\eta = 1/\tau > 0$, τ – время ретардации. Очевидно, $m(x)$ убывает при всех $x \geq 0$, причём $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$. А для модели Скотта Блэра с ФР $R(t) = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$, будет $P(t) = Kt^{-\alpha}$, $K := A/(1-\alpha)$, $R(t)/P(t) \equiv 1-\alpha$ и ДД (6) и ПСЧ (7) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = K\varepsilon(\varepsilon/a)^{-\alpha} = K\varepsilon^{1-\alpha}a^\alpha, \quad m(x) \equiv \alpha, \quad x > 0. \quad (8)$$

Таким образом, ПСЧ фрактального элемента не зависит от a и ε ; можно доказать, что это свойство присуще только ему (только степенным ФР) среди линейных моделей (3) [15]. При $\alpha \rightarrow 0+$ ДД и ПСЧ (8) фрактального элемента сходятся к ДД и ПСЧ упругого элемента с модулем $E = r + A$, а если наложить на параметры ФР связь $A/(1-\alpha) = \eta$, где $\eta > 0$ – фиксированная постоянная (равная интегралу $R(t)$ по $[0; 1]$), то при $\alpha \rightarrow 1-0$ семейства ДД и ПСЧ (8) сходятся к ДД и ПСЧ ньютоновского вязкого элемента с $R = \eta\delta(t)$, $P(t) = \eta/t$ и $m(x) \equiv 1$.

3. Свойства показателя скоростной чувствительности фрактальных моделей Фойгта и их параллельных соединений

Фрактальная модель Фойгта – параллельное соединение линейно упругого элемента с фрактальным элементом Скотта Блэра, задаваемого оператором дробного дифференцирования $\sigma = \eta D^\alpha \varepsilon$ [16–20] или интегральным оператором (3) со степенной ФР $R = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$ (для функции Хевисайда $h(t)$ $D^\alpha h = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$). Эта трехпараметрическая (нерегулярная) модель описывается ОС (3) с неограниченной ФР вида (4) или уравнением с дробной производной $\sigma = r\varepsilon + \eta D^\alpha \varepsilon$, $\eta = A/(1-\alpha)$. При $\alpha \in (0; 1)$ интеграл (5) для осреднения ФР (4) сходится, $P = r + A(1-\alpha)^{-1}t^{-\alpha}$, и семейства ДД и ПСЧ модели (4) задаются уравнениями

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + A(1-\alpha)^{-1}a^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}, \quad (9)$$

$$m(x) = \frac{Aa(1-\alpha)^{-1}x^{-\alpha}}{r + A(1-\alpha)^{-1}x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \bar{r}(1-\alpha)x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \bar{r} := r/A \quad (10)$$

(при $\varepsilon \rightarrow \infty$ асимптоты у ДД (9) нет, длительный модуль $\sigma'_\varepsilon(\infty, a) = r$). Очевидно, что $m(0) = \alpha$. Если $r > 0$, то $m(x)$ монотонно убывает при всех $x > 0$, $m(x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$ и $m(\infty) = 0$. Если $r = 0$, то $m(x) \equiv \alpha$ – константа. Горизонтальные прямые $m = \alpha$ являются асимптотами при

$x \rightarrow \infty$ для возрастающих ПСЧ $m(x)$ регулярных моделей, задаваемых ФР

$$R = r + A(t+h)^{-\alpha}, \quad A, h, \alpha > 0, \quad r \geq 0, \quad (11)$$

с $r = 0$. При $h \rightarrow 0+$ семейство ФР (11) сходится к ФР (4) (т.е. семейство ФР (11) – регуляризация для модели (4)). ПСЧ моделей (11) с любыми $r > 0$ и $h > 0$ имеют максимум (теорема 2) и $m(\infty) = 0$. В случае $\alpha \neq 1$ осреднение ФР, ДД и ПСЧ модели (11) имеют вид:

$$P(t) = r + A(1-\alpha)^{-1} t^{-1} [(t+h)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}], \quad \sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + A(1-\alpha)^{-1} h^{1-\alpha} a [(1+\varepsilon(ah)^{-1})^{1-\alpha} - 1],$$

$$m(x) = 1 - \frac{\bar{r} + h^{-\alpha} (1+x/h)^{-\alpha}}{\bar{r} + (1-\alpha)^{-1} h^{1-\alpha} x^{-1} [(1+x/h)^{1-\alpha} - 1]}, \quad x > 0, \quad \bar{r} := r/A, \quad (12)$$

а при $\alpha = 1$ имеем $P(t) = r + At^{-1} \ln[(t+h)/h]$,

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + Aa \ln(1 + \varepsilon(ah)^{-1}), \quad m(x) = 1 - \frac{\bar{r} + (x+h)^{-1}}{\bar{r} + x^{-1} \ln(1+x/h)}.$$

На рис. 2, а приведены ДД (9) при фиксированных скоростях $a = 0,01; 0,02; 0,03$ для трёх фрактальных моделей (4) с $A = 9 : 1$ с $\alpha = 0,9, r = 1$ (ДД 1–3); 2) с $\alpha = 0,9, r = 0$ (ДД 1'–3'); 3) с $\alpha = 0,5, r = 1$ (штрих-пунктирные ДД 11–13). Все ДД имеют вертикальную касательную в нуле ($E = R(0) = \infty$), а обе модели с показателем $\alpha = 0,9$ (близким к единице) имеют длинный, почти вертикальный, участок быстрого роста при очень малых ε (приближающийся по длине к вертикальному участку $a\eta$ модели Фойгта с $\eta = A/(1-\alpha)$). За счёт этого ДД фрактальных моделей (4) с α , близким к 1, очень сильно зависят от скорости деформации (и от величины α). ДД 11–13 для $\alpha = 0,5$ слабее зависят от a и при малых ε растут медленнее. Рис. 2, б иллюстрирует, насколько сильно влияют на ДД регулярных моделей (11) с α , близким к единице, значения параметра h . Кривые 1–4 – ДД моделей (11) с $\alpha = 0,9$ и $r = 1$ при $h = 10^{-9}; 10^{-6}; 10^{-3}; 10^{-1}$ для $a = 0,03$; кривая 0 – ДД фрактальной модели (4) (с $h = 0$). При меньших α чувствительность ДД к величине h гораздо ниже: ДД 14 модели (11) с $\alpha = 0,5$ и $h = 0,1$ для $a = 0,01$ отклоняется от ДД 10 модели (4) гораздо меньше, чем ДД 4 от ДД 0.

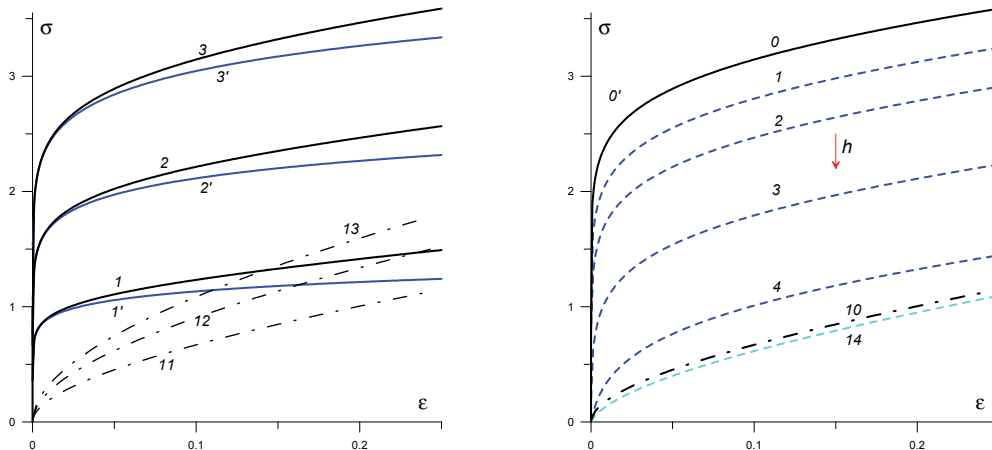


Рис. 2. Диаграммы деформирования (9) трёх фрактальных моделей Фойгта (4) при $a = 0,01; 0,02; 0,03$ (а); Диаграммы деформирования двух моделей (4) и их регуляризаций (11) с разными h при $a = 0,03$ (б)

На рис.3, а приведены графики ПСЧ (10) трёх фрактальных моделей Фойгта (4) с $\bar{r} = 1/9$ и $\alpha = 0,9; 0,5; 0,2$ (кривые 1–3), трех моделей (4) с $\bar{r} = 0$ и теми же α (кривые 1'–3'), трех регулярных моделей (11) с $h = 0,1$ и $\bar{r} = 1/9$ (штриховые кривые 11–13) и еще двух моделей (11) с $h = 0,1$ и $r = 0$ (синие штриховые кривые 12'–13'). Для ПСЧ всех моделей с $r > 0$ имеем $m(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Все ПСЧ моделей (11) с $r > 0$ имеют максимум. Начальные участки всех ПСЧ тем выше, чем больше α , но и скорость убывания (при $r > 0$) растёт с α , поскольку $m(x) \sim Cx^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$, и при больших x ПСЧ с большим α лежат ниже. Штриховые линии между кривыми 11 и 1 – ПСЧ регулярных моделей (11) с фиксированными $\bar{r} = 1/9, \alpha = 0,9$ и ма-

лыми значениями $h=10^{-2}; 10^{-4}; 10^{-6}$. Они иллюстрируют сходимость семейства ПСЧ моделей (11) при $h \rightarrow 0$ на полуоси $x > 0$ к ПСЧ I фрактальной модели (4) с $h=0$ и тем же α (скорость сходимости тем выше, чем меньше α). Кривая 23 – ПСЧ параллельного соединения двух фрактальных моделей 2 и 3 вида (4): с $\alpha_1=0,5, \alpha_2=0,2, A_1=A_2=9, r_1=r_2=1$.

На рис. 3, б приведены зависимости ПСЧ от скорости $m(a)$ при $\varepsilon=0,001; 0,01; 0,1; 1$ для модели (4) с $\alpha=0,5, \bar{r}=1/9$ (кривые 1–4), для модели (4) с $\alpha=0,5, r=0$ (прямая 0) и для регулярной модели (11) с $h=0,1$ и теми же $\alpha=0,5, \bar{r}=1/9$ (штриховые кривые 11–14) и с $r=0$ (синие штрих-пунктирные кривые 11', 12'). С ростом ε кривые 1–4 опускаются вниз, максимум кривых 11–14 смещается вправо, их плато вблизи максимума расширяется. Из-за инверсии оси абсцисс ($x = \varepsilon/a$) даже при малом значении $h=0,1$ хорошее приближение к ПСЧ $m(a)$ фрактальной модели (4) может быть только в узкой окрестности т. $a = 0$, а далее кривые регулярной и фрактальной моделей всё больше расходятся, ибо ПСЧ моделей (4) возрастают на полуоси $a > 0$, причём $m(a) \rightarrow \alpha$ при $a \rightarrow \infty$, а ПСЧ моделей (11) с $h > 0$ убывают при $a > \varepsilon/\hat{x}$, где \hat{x} – точка максимума $m(x)$, и для них $m(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. При $\varepsilon=0,001; 0,01$ кривые значительно расходятся уже при $a > 0,0001$ и имеют совершенно разные очертания. С ростом ε правая окрестность точки $a = 0$, в которой регулярное приближение $m(a)$ удовлетворительно, растягивается (см. кривые 4 и 14 для $\varepsilon=1$). С убыванием h этот участок, конечно, тоже увеличивается, $m(a)$ поднимается выше, максимум становится менее острым.

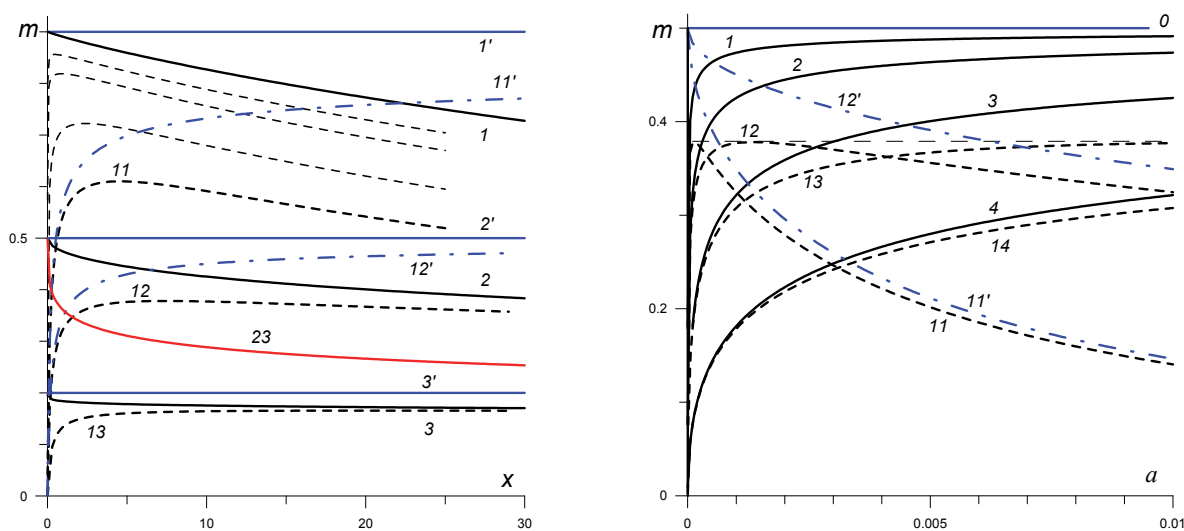


Рис. 3. Показатель скоростной чувствительности фрактальных моделей Фойгта (4) и их регуляризации (11) в зависимости от $x = \varepsilon/a$ (а) и от скорости a при $\varepsilon = 0,001; 0,01; 0,1; 1$ (б)

Исследуем параллельные соединения фрактальных моделей Фойгта (4) с произвольными тройками параметров $A_i > 0, r_i \geq 0, \alpha_i \in (0;1)$ (в частности, моделей со степенными ФР при $r_i = 0$, т. е. фрактальных элементов). Они задаются дифференциальным уравнением с дробными производными $\sigma = \sum(r_i \varepsilon + \eta_i D^{\alpha_i} \varepsilon)$ или интегральным оператором (3) с неограниченной ФР вида

$$R = \sum R_i = \sum(r_i + A_i t^{-\alpha_i}). \quad (13)$$

Удобно считать, что все α_i различны, т.е. модель и сумма (13) неприводимы.

Для параллельного соединения любого количества произвольных моделей $R = \sum R_i$, в силу (5) $P = \sum P_i$, и потому ПСЧ выражается формулой: $m(x) = 1 - R(x)/P(x) = \sum(P_i - R_i)/\sum P_i$. В случае модели (13) $P = \sum(r_i + A_i(1 - \alpha_i)^{-1} t^{-\alpha_i})$ и ПСЧ имеет вид

$$m(x) = \frac{\sum A_i \alpha_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i}}{\sum (r_i + A_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i})}. \quad (14)$$

При $x \rightarrow 0+$ главные части числителя и знаменателя – слагаемые вида $Cx^{-\alpha}$ с модулем показателя $\alpha = \max \alpha_i$ и потому $m(0+) = \alpha$. При $x \rightarrow \infty$ (т. е. $a \rightarrow 0$) главная часть числителя – слагаемое $A_0\alpha_0(1-\alpha_0)^{-1}x^{-\alpha_0}$ с $\alpha_0 = \min \alpha_i$, а главная часть знаменателя $S(x)$ – постоянная $r := \sum r_i$, если $r > 0$, и слагаемое $A_0(1-\alpha_0)^{-1}x^{-\alpha_0}$, если $r = 0$; поэтому $m(+\infty) = 0$, если $r > 0$, и $m(+\infty) = \alpha_0$, если $r = 0$ (т. е. для соединения степенных моделей с $r_i = 0$).

Докажем, что ПСЧ (14) всегда убывает по x :

$$m'(x)S^2 = -\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i^2(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i-1}\sum_{j=1}^n (r_j + A_j(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_j}) + \sum_{i=1}^n A_i\alpha_i(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i}\sum_{j=1}^n A_j\alpha_j(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_j-1},$$

$$m'(x)S^2 = -r\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i^2(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i-1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_iA_j(\alpha_i^2 - \alpha_i\alpha_j)(1-\alpha_i)^{-1}(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_i-\alpha_j-1};$$

так как в двойной сумме сумма любой пары слагаемых с переставленными индексами $i \neq j$ (симметричных в матрице) равна $A_iA_j(\alpha_i^2 + \alpha_j^2 - 2\alpha_i\alpha_j)(1-\alpha_i)^{-1}(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_i-\alpha_j-1}$, то

$$m'(x)S^2 = -r\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i^2(1-\alpha_i)^{-1}x^{-\alpha_i-1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n A_iA_j(\alpha_i - \alpha_j)^2(1-\alpha_i)^{-1}(1-\alpha_j)^{-1}x^{-\alpha_i-\alpha_j-1}.$$

Если $\alpha_i \in (0;1)$ и все α_i различны, то все слагаемые отрицательны и $m'(x) < 0$. Поэтому ПСЧ параллельных соединений любого числа фрактальных моделей Фойгта (4) (в частности, моделей со степенными ФР при $r_i = 0$) убывает по x и, следовательно, возрастает с ростом скорости a .

Полученный результат аналогичен полученному в работе [14] для параллельного соединения любого числа нелинейных степенных вязких элементов вида (2) (ПСЧ (1) такого элемента не зависит от a и ε и равен постоянной M , т. е. обладает тем же свойством, что и ПСЧ линейного фрактального элемента): ПСЧ любого параллельного соединения степенных вязких элементов не имеет точки максимума, а всегда строго возрастает на полуоси $a > 0$. Последний результат можно обобщить на параллельные соединения любого числа вязкопластических моделей Гершеля–Балкли $\sigma = \bar{\sigma} + K\varepsilon^M$ (и моделей Шведова–Бингама $\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon$): оказывается, что учет в таких моделях пороговых напряжений $\bar{\sigma}_i > 0$ (роль которых в моделировании сверхпластичности может быть существенной [25]) не нарушает возрастания ПСЧ, а кривая скоростной чувствительности $\lg \sigma - \lg a$ не имеет точек перегиба (точнее, выпукла вниз) при произвольных $M \in (0;1]$, $K > 0$ и $\bar{\sigma}_i \geq 0$. Отметим также, что ПСЧ (7) параллельного соединения (даже лишь двух) моделей Максвелла с разными временами релаксации не обязан быть монотонной функцией и может иметь точку максимума и другие точки экстремума.

Заключение

В работе продолжено аналитическое исследование общих свойств показателя скоростной чувствительности (ПСЧ) (1) семейства диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации $a > 0$, порождаемых физически линейным ОС вязкоупругости (3) с произвольной функцией релаксации [15]. Установлено, что в рамках линейной вязкоупругости ПСЧ (1) зависит не от двух аргументов, а лишь от их отношения $x := \varepsilon/a$ (формула (7)), и что его значения всегда лежат в интервале от нуля до единицы (т. е. линейное ОС (3) описывает только псевдопластические среды и не может описывать дилатантные среды).

Выведено и изучено выражение (14) для ПСЧ параллельных соединений любого числа фрактальных моделей Фойгта (4), т. е. произвольных моделей с функциями релаксации вида (13) (в частности, моделей со степенными ФР при $r_i = 0$). Доказано, что ПСЧ таких моделей принимает значения в диапазоне $(0; \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} = \max \alpha_i$ – максимальный показатель соединяемых моделей вида (4), а в случае моделей со степенными ФР – в диапазоне $(\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$, где $\underline{\alpha} = \min \alpha_i$ (в этом случае $m \rightarrow \underline{\alpha}$ при $a \rightarrow 0$, а не $m \rightarrow 0$). Главный результат работы – доказательство того, что ПСЧ таких моделей всегда возрастает с ростом скорости a (и не имеет точки максимума). Он анало-

гичен полученному в работе [14] для параллельного соединения любого числа степенных (нелинейных) вязких элементов (2) (и указанному выше его обобщению на параллельные соединения любого числа вязкопластических моделей Гершеля–Балкли и Шведова–Бингама) и означает отсутствие точки перегиба кривой скоростной чувствительности $\lg \sigma - \lg a$, порождаемой любой из рассмотренного класса (фрактальных) моделей вида (13). В частности, отсюда следует, что такие модели не способны описывать сигмоидальную форму кривой скоростной чувствительности, характерную для сверхпластического деформирования материалов, и потому непригодны для моделирования сверхпластичности. С другой стороны, полученный результат дополняет и подчеркивает обнаруженную в работе [15] способность линейного ОС вязкоупругости (3) (даже классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого) качественно описывать сигмоидальность зависимости $\lg \sigma - \lg a$ и очень высокие значения ПСЧ (сколь угодно близкие к единице, верхней границе для псевдопластических сред), характерные для режима сверхпластического деформирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_a).

Литература

1. Бочвар, А.А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием / А.А. Бочвар, З.А. Свицерская // Изв. АН СССР. ОТН. – 1945. – № 9. – С. 821–824.
2. Грабский, М.В. Структурная сверхпластичность металлов / М.В. Грабский. – М.: Металлургия, 1975. – 270 с.
3. Смирнов, О.М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности / О.М. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1979. – 184 с.
4. Padmanabhan, K.A. Superplasticity / K.A. Padmanabhan, J.J. Davies. – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – 314 p.
5. Кайбышев, О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов / О.А. Кайбышев. – М.: Металлургия, 1984. – 263 с.
6. Процессы пластического структурообразования металлов / В.М. Сегал, В.И. Резников, В.И. Копылов, Д.А. Павлик. – Минск: Наука и техника, 1994. – 232 с.
7. Nieh, T.G. Superplasticity in metals and ceramics / T.G. Nieh, J. Wadsworth, O.D. Sherby. – Cambridge University Press, 1997. – 287 p.
8. Васин, Р.А. Введение в механику сверхпластичности / Р.А. Васин, Ф.У. Еникеев. – Уфа: Гилем, 1998. – 280 с.
9. Padmanabhan, K.A. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics / K.A. Padmanabhan, R.A. Vasin, F.U. Enikeev. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 363 p.
10. Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation / V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome *et al.* – New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p.
11. Ефимов, О.Ю. Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением / О.Ю. Ефимов, В.Е. Громов, Ю.Ф. Иванов. – Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, Интер-Кузбасс, 2012. – 345 с.
12. Faraji, G. Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties / G. Faraji, H.S. Kim, H.T. Kashi. – Elsevier, 2018. – 324 p.
13. Mechanical modelling of the universal superplastic curve / R.A. Vasin, F.U. Enikeev, M.I. Mazurski, O.S. Munirova // J. Mater. Sci. – 2000. – Vol. 35, Iss. 10. – P. 2455–2466.
14. Белякова, Т.А. О невозможности моделирования сигмоидальных кривых суперпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов / Т.А. Белякова, И.А. Гончаров, А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. (В печати).
15. Хохлов, А.В. Характеристика скоростной чувствительности диаграмм деформирования в линейной теории вязкоупругости и построение по ней функции релаксации / А.В. Хохлов // Проблемы прочности и пластичности. (В печати).
16. Scott Blair, G.W. Significance of power-law relations in rheology / G.W. Scott Blair, J. Caffyn // Nature. – 1945. – Vol. 155. – P. 171–172.

17. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications / I. Podlubny. – Mathematics in Science and Engineering, 198. – San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p.
18. Kilbas, A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
19. Mainardi, F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal. Special Topics. – 2011. – Vol. 193, Iss. 1. – P. 133–160.
20. Огородников, Е.Н. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Л.Г. Унгарова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2016. – Т. 20, № 1. – С. 167–194.
21. Хохлов, А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации / А.В. Хохлов // Проблемы проч. и пластичности. – 2015. – Вып. 77, № 1. – С. 60–74.
22. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности / А.В. Хохлов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 326–361.
23. Хохлов, А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 3. – С. 81–104.
24. Хохлов, А.В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления / А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25, № 2.
25. Murty, G.S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials / G.S. Murty, S. Banerjee // Scripta Metallurgica et Materialia. – 1994. – Vol. 31, Iss. 6. – P. 707–712.

Поступила в редакцию 8 июля 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 56–67*

DOI: 10.14529/mmph190307

MONOTONE INCREASE OF THE STRAIN RATE SENSITIVITY VALUE OF ANY PARALLEL CONNECTION OF THE FRACTIONAL KELVIN–VOIGT MODELS

A.V. Khokhlov

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru*

We continue to analyze the properties of the strain rate sensitivity value of the stress-strain curves at constant strain rates generated by the Boltzmann–Volterra linear viscoelasticity constitutive equation with an arbitrary relaxation modulus (in uni-axial case) and its dependence on strain, strain rate and relaxation modulus characteristics.

The expression for the strain rate sensitivity value of the parallel connection of any number of the fractional Kelvin–Voigt models (each one governed by three parameters) is derived and analytically studied. In particular, arbitrary connections of the Scott Blair fractional elements (specified by power relaxation modulus) are considered. We prove that the strain rate sensitivity takes the values in the range

from zero to the maximal exponent of the models connected whatever strain and strain rate magnitudes are; and in case only “fractal elements” are connected, the lower bound (and the limit value as the strain rate tends to zero) is non-zero and is equal to the minimal exponent of the models connected. The main result of the article is that we prove that strain rate sensitivity value of the studied models increases with the growth of the strain rate for any fixed strain (it has no peak value). This result is similar to the one obtained earlier for any parallel connections on non-linear power-law viscous elements and to its generalization on parallel connections of viscoplastic Herschel–Bulkley models (and the Shvedov–Bingham models as well) accounting for threshold stress. It means that there is no inflection point on the log-log graph of stress dependence on strain rate generated by any model of the class under consideration. This implies that such fractal models are not able to produce sigmoid shape of stress dependence on strain rate (in logarithmic scales) which is the distinctive feature of superplastic deformation regime and so they aren't suitable for modeling superplasticity of materials. This result supplements and elaborates the capability of the linear viscoelasticity theory to provide existence of the strain rate sensitivity index maximum as well as its high values close to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) which have been discovered in previous contribution.

Keywords: viscoelasticity; stress-strain curves; strain rate sensitivity value; superplasticity; sigmoid curve; Voigt fractional models; fractal element; fractional differential equations; power non-linear viscous element.

References

1. Bochvar A.A., Sviderskaia Z.A. Iavlenie sverkhplastichnosti v splavakh tsinka s aliuminiem (Superplasticity phenomenon in zinc-aluminum alloys). *Izvestiia akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1945, no. 9, pp. 821–824. (in Russ.).
2. Grabskiy M.V. *Strukturnaya sverkhplastichnost' metallov* (Structural superplasticity of metals). Moscow, Metallurgiya Publ., 1975, 272 p. (in Russ.).
3. Smirnov O.M. *Obrabotka metallov davleniem v sostoianii sverkhplastichnosti* (Shaping of Metals in the Superplasticity State). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979, 184 p. (in Russ.).
4. Padmanabhan K.A., Davies J.J. *Superplasticity*. Berlin, Springer-Verlag, 1980, 314 p.
5. Kaybyshev O.A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* (Superplasticity of industrial alloys). Moscow, Metallurgiya Publ., 1984, 263 p. (in Russ.).
6. Segal V.M., Reznikov V.I., Kopylov V.I., Pavlik D.A. *Protsessy plasticheskogo strukturoobrazovaniia metallov* (Processes of plastic structure formation of metals). Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1994, 232 p. (in Russ.).
7. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge Univ. Press, 1997, 287 p. DOI:10.1017/CBO9780511525230
8. Vasin R.A., Enikeev F.U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti* (Introduction to the superplasticity mechanics). Ufa, Gilem Publ., 1998, 280 p. (in Russ.).
9. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, 363 p.
10. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York, NovaSciencePub. Inc, 2010, 542 p.
11. Efimov O.Yu., Gromov V.E., Ivanov Yu.F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoistv staley i splavov v uprochniaiushchikh tekhnologiakh obrabotki davleniem* (Forming of structure, phase composition and properties of steels and alloys in the hardening technologies of pressure treatment). Novokuznetsk, Sibirskii gosudarstvennyi industrial'nyi universitet, Inter-Kuzbass Publ., 2012, 345 p. (in Russ.).
12. Faraji G., Kim H.S., Kashi H.T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Elsevier, 2018, 324 p. DOI:10.1016/B978-0-12-813518-1.00010-2
13. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurski M.I., Munirova O.S. Mechanical modelling of the universal super-plastic curve. *Journal of Materials Science*, 2000, Vol. 35, no. 10, pp. 2455–2466. DOI:10.1023/A:1004761501240
14. Beliakova T.A., Goncharov I.A., Khokhlov A.V. O nevozmozhnosti modelirovaniya sigmoidal'nykh krivykh sverkhplastichnosti parallel'nym ili posledovatel'nym soedineniyami stepennykh vyazkhih elementov (The impossibility of modelling of sigmoid superplasticity curves using only par-

allel or series connections of power-law viscous elements). *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. (in press).

15. Khokhlov A.V. Kharakteristika skorostnoi chuvstvitelnosti diagram deformirovaniya v lineynoi teorii vyazkouprugosti i postroeniye po nei funktsii relaksatsii (The function characterizing strain rate sensitivity in the linear viscoelasticity theory and the relaxation modulus reconstruction assuming the function is given). *Problemy prochnosti i plastichnosti*. (in press).

16. Scott Blair G.W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology. *Nature*, 1945, Vol. 155, pp. 171–172. DOI: 10.1038/155171c0

17. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*, 198. San Diego: Academic Press, 1999, 340 p.

18. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204, Amsterdam, Elsevier, 2006, 523 p.

19. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal. Special Topics*, 2011, Vol. 193, Iss. 1, pp. 133–160. DOI: 10.1140/epjst/e2011-01387-1

20. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Ungarova L.G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2016, Vol. 20, no. 1, pp. 167–194. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1456

21. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti pri postoyannoy skorosti deformatsii (General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from the linear theory of viscoelasticity). *Problemy prochnosti i plastichnosti* (Problems of strength and plasticity), 2015, Vol. 77, no.1, pp. 60–74 (in Russ.). DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74

22. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriey nasledstvennosti (Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings). *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2017, Vol. 21, no. 2, pp. 326–361. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1533

23. Khokhlov A.V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, Iss. 3, pp. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105

24. Khokhlov A.V. Indikatory neprimenimosti lineynoi teorii vyazkouprugosti po dannym ispytaniyu materiala na polzuchest' pri rastyazhenii s nalozheniyem gidrostaticheskogo davleniya (Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure). *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol. 25, no. 2. (in Russ.).

25. Murty G.S., Banerjee S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994, Vol. 31, no. 6, pp. 707–712. DOI: 10.1016/0956-716X(94)90214-3

Received July 8, 2019

Персоналии

ВАЛЕРИЙ ПЕТРОВИЧ БЕСКАЧКО. К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



Валерий Петрович Бескачко родился 30 августа 1949 года в г. Копейске. После окончания физического факультета Уральского государственного университета (г. Екатеринбург) В.П. Бескачко начал свою научную и преподавательскую деятельность в 1972 г. в должности младшего научного сотрудника Челябинского политехнического института (ЧПИ). В 1974 году он поступает в аспирантуру Института металлургии Уральского отделения РАН (Екатеринбург) – одного из ведущих центров страны по исследованию физических и химических процессов в металлических расплавах. Хотя основные принципы статистической теории жидкостей были сформулированы ранее в пионерских работах Боголюбова, Борна, Грина и Кирквуда, прогресс в использовании этих принципов был весьма незначительным ввиду сложности уравнений, описывающих систему силь-

но взаимодействующих частиц, и отсутствия дальнего структурного порядка в их расположении. К семидесятым годам ситуация стала меняться в связи с появлением производительной вычислительной техники. Появление компьютеров дало возможность численного исследования структуры и свойств, что послужило, в свою очередь, дальнейшим стимулом к развитию теории межчастичных взаимодействий и электронной теории расплавов. С другой стороны, развились методы компьютерного моделирования атомной структуры и свойств жидкостей, заключающиеся либо в прямом интегрировании уравнений движения для частиц (метод молекулярной динамики), либо в прямой оценке конфигурационного интеграла системы (метод Монте-Карло). Одним из первых центров страны, в котором эти методы начали осваиваться и применяться в исследованиях высокотемпературных расплавов, был Екатеринбург, где Олегом Алексеевичем Есиным была создана мощная школа физико-химиков. Представителями этой школы являются известные российские ученые: академик РАН Н.А. Ватолин, члены-корреспонденты РАН Г.П. Вяткин, Э.А. Пастухов, профессора С.И. Попель, В.Ф. Ухов и другие. Работа под руководством академика Н.А. Ватолина над проблемой определения потенциалов межионного взаимодействия в жидких металлах определила дальнейшее направление научных исследований В.П. Бескачко. Для оценки этого взаимодействия он впервые в стране реализовал метод априорного псевдопотенциала, который теперь является составной частью многих широко распространенных программных пакетов для расчета электронной структуры веществ.

В 1977 году, после окончания аспирантуры, молодой ученый возвращается в ЧПИ, где работает ассистентом кафедры физики. В 1979 году он защищает в Институте металлургии УрО РАН кандидатскую диссертацию на тему «Расчеты потенциалов межчастичного взаимодействия в жидких металлах». Многие полученные им результаты вошли в известную монографию «Межчастичные взаимодействия в жидких металлах». («Наука», 1979).

С 1980 года В.П. Бескачко становится доцентом кафедры физики № 1 ЧПИ и приступает к самостоятельным исследованиям. Начало этих исследований удачно совпало с приходом на кафедру нового заведующего, в будущем ректора ЮУрГУ и члена-корреспондента РАН Г.П. Вяткина, который также прошел школу О.А. Есина и был в свое время инициатором поступления В.П. Бескачко в аспирантуру ИМет УрО РАН. Г.П. Вяткин сосредоточил научные исследования кафедры на развитии экспериментальных методов определения физико-химических свойств высокотемпературных расплавов и способов их интерпретации методами компьютерного моделирования, статистической и квантовой механики.

Переход на иной, микроскопический, уровень описания свойств расплавов потребовал развития и соответствующей техники – развернулись работы по реализации масс-спектрометрических и гамма-резонансных методов исследования расплавов. В.П. Бескачко стал одним из руководителей и основных исполнителей этой перспективной программы исследований. При его непосредственном участии в лаборатории кафедры был спроектирован и изготовлен комплекс ЯГР-спектрометрии, снабженный средствами автоматизации (в архитектуре КАМАК), высокотемпературными ячейками, позволяющими вести наблюдения за эволюцией ЯГР-спектров в окрестности переходов твердое тело–расплав, а также разработан и запущен в эксплуатацию комплект оборудования для высокотемпературных измерений вязкости. Были выполнены пионерские эксперименты по наблюдению эффекта Мессбауэра за пределами твердого состояния – на высоковязких оксидных системах при температурах выше их температуры размягчения. Эти эксперименты дали прямой ответ на вопрос о зарядовых состояниях ионов железа в подобных системах и их роли в процессах структурообразования. На основе усовершенствованной экспериментальной базы и сложившегося вокруг Г.П. Вяткина коллектива сотрудников в начале 80-х гг. совместно с Институтом металлургии УрО РАН был открыт вузовско-академический отдел физики высокотемпературных систем, ведущей лабораторией которого стала лаборатория «Физики расплавов», возглавляемая В.П. Бескачко.

Исследование вязкости металлических расплавов привело В.П. Бескачко к пониманию, что стандартная методика измерения этого важнейшего для металлургии свойства далека от совершенства. В конце 80-х годов в связи с известной дискуссией о причинах аномалий в поведении физико-химических свойств жидких металлов В.П. Бескачко были начаты работы, развивающие теоретические основы экспериментальных методик измерения вязкости, электропроводности, скоростей растворения. В области вискозиметрии было выполнено обобщение теории, предложенной Е.Г. Швидковским, позволяющее учесть ряд факторов, способных существенно повлиять на интерпретацию опытных данных и быть причиной указанных аномалий: присутствие оксидных пленок на поверхности расплава и наличие магнитного поля, создаваемого нагревателем. Располагая обобщенным вариантом теории, оказалось возможным наблюдать механические свойства таких пленок и обосновать новый метод измерения электропроводности расплава – по наблюдениям за колебаниями вискозиметра в осевом статическом магнитном поле. Последний метод служит альтернативой широко распространенному методу измерения электропроводности расплавов – методу вращающегося магнитного поля. Его преимущество в том, что он является абсолютным, а не относительным, причем имеет прочную теоретическую основу, а также допускает одновременное измерение вязкости. Действуя в том же направлении, удалось обобщить теорию крутильного вискозиметра на случай, когда он заполнен двумя и более несмешиваемыми жидкостями или даже жидкостью, стратифицированной по высоте. Первое дает возможность для изучения явлений расслоения в расплавах, а второе позволяет наблюдать процессы в неоднородных жидкостях, например, седиментацию неметаллических включений. В связи с экспериментами по влиянию магнитного поля на скорость растворения твердых тел в металлических расплавах, измеряемую методом вращающегося диска, было найдено точное решение магнитогидродинамической задачи о массообмене между расплавом и материалом диска для случая, когда магнитное поле имеет осевое направление. Полученное решение служит обобщением найденного Б.Н. Левичем и положенного в обоснование упомянутого экспериментального метода. Оно указывает на возможность управления скоростью массообменных процессов с помощью магнитного поля, представляющую интерес, например, в связи с технологиями выращивания кристаллов по методу Чохральского. Полученные результаты заставили пересмотреть интерпретацию многих экспериментов по измерению вязкости металлических расплавов и скоростей растворения в них твердых тел, а также создали новые возможности для экспериментального изучения высокотемпературных систем. В 1995 г. В.П. Бескачко защищает в Южно-Уральском государственном университете докторскую диссертацию на тему «Математическое моделирование экспериментов по измерениям свойств жидких металлов».

С 1998 года Валерий Петрович работает исполняющим обязанности заведующего кафедрой общей и теоретической физики (ранее кафедра физики № 1), а с 2012 года и по настоящее время – заведующим этой кафедрой, трансформировавшейся теперь в кафедру физики наноразмерных систем. За это время университет прошел ряд реформ в образовательной и научной сфере, в ходе

Персоналии

которых была проведена модернизация учебных лабораторий кафедры и создан тест-класс по курсу общей физики на основе разработанной В.П. Бескачко компьютерной системы тестирования знаний студентов. На момент появления (в 2002 г.) эта система была передовой по своей функциональности, гибкости применения и объему базы задач. К настоящему времени тестирование в этой системе прошли десятки тысяч студентов, которым было предъявлено порядка миллиона заданий в режиме обучения и режиме контроля знаний.

В 2003 году кафедра вошла в состав физического факультета и с 2004 года приступила к подготовке магистров по направлению «Прикладные математика и физика» со специализацией «Физика конденсированного состояния». В это время среди научных направлений кафедры стало активно развиваться первопринципное компьютерное моделирование материалов и на кафедре появился первый в Челябинске вычислительный кластер, предтеча линейки суперкомпьютеров ЮУрГУ, заканчивающейся ныне топовым «Торнадо». В.П. Бескачко возглавил одно из наиболее современных направлений исследования – моделирование строения и свойств углеродных наночастиц. Неудивительно поэтому, что в результате укрупнения кафедр физического факультета в 2019 г. возникла новая кафедра – физики наноразмерных систем, руководимая юбиляром.

Немало сил отдал В.П. Бескачко воспитанию новых поколений физиков. Его знают как великолепного преподавателя. Его увлекательные лекции по общей физике и квантовой механике надолго останутся в памяти учеников. Под его научным руководством защищены 4 кандидатские диссертации (С.А. Созыкин, О.А. Головня, А.В. Рыжкова, Н.А. Болотникова) и одна докторская диссертация (А.Г. Воронцов). Многие его ученики работают в ведущих вузах Северной Америки и Европейского союза. Им опубликовано около 90 научных трудов, половина из которых – в переводных российских и зарубежных изданиях, в том числе одна монография. В.П. Бескачко является членом двух специализированных советов по защите диссертаций, более 15 лет является бессменным членом редколлегии журнала «Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математика. Механика. Физика».

Оптимизм, неременная доля юмора при обсуждении всех проблем, сердечное отношение к людям – таков характерный стиль общения Валерия Петровича с коллегами, который создает неповторимую дружескую и в то же время рабочую атмосферу в коллективе кафедры. Трудовая и общественная деятельность В.П. Бескачко отмечена государственной наградой – званием «Почетный работник высшей школы». Искренне желаем Валерию Петровичу крепкого здоровья и дальнейших успехов на ниве образования и науки!

А.А. Мирзоев, Б.Р. Гельчинский

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 11, № 3
2019

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 22.07.2019. Дата выхода в свет 26.07.2019.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,37.

Тираж 500 экз. Заказ 327/333. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.