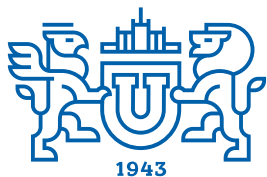


ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2019
Т. 11, № 4**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

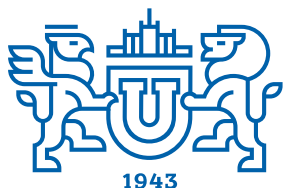
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

SERIES

2019

Vol. 11, no.4

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany

G.L. Brovko, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

V.D. Buchelnikov, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

D. Guidetti, University of Bologna, Bologna, Italy

V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

I.V. Zalyapin, University of Nevada, Reno, United States of America

A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

Kisik Kim, INHA-University, Incheon, South Korea

N.D. Kundikova, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

V.V. Menshikh, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America

Y.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

L.V. Utkin, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium

V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- ДЕРКУНОВА Е.А. Об уточнении асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи в результате разделения корней вырожденного уравнения..... 5
- ЗАЙЦЕВ М.Л., АККЕРМАН В.Б. Гипотеза об универсализации решения задачи Коши для переопределенных систем дифференциальных уравнений 12
- ZAMYSHLYAeva A.A., TSYPLENKOVA O.N. Optimal Control of Solutions to the Initial-Final Problem for the Model of Linear Waves in a Plasma 26
- ПАНИЮКОВ А.В., МЕЗАЛ Я.А. Параметрическая идентификация квазилинейного разностного уравнения 32

Механика

- ДИЛЬМАН В.Л. Математическое моделирование критических состояний тонкостенных цилиндрических оболочек при внутреннем давлении и осевом сжатии 39
- КАРПЕТА Т.В. Математическое моделирование условий разрушения тонкостенных цилиндрических оболочек при внешнем давлении и осевом растяжении..... 47
- КОРОТКИЙ А.И., ЦЕПЕЛЕВ И.А. Реконструкция входящего потока вязкой жидкости по измерениям скорости на доступном участке свободной поверхности течения..... 56
- НОСАЧЕВА А.И. Анализ критического состояния дискретно-неоднородной полосы с наклонной контактной границей и наружным макродефектом в более прочной части 62

Физика

- ВЕБЕР В.А. Математическое моделирование многопараметрового контроля с учетом конструктивных особенностей вихретоковых преобразователей 73

Персоналии

- Валерий Лейзерович Дильман. К 70-летию со дня рождения 80

CONTENTS

Mathematics

- DERKUNOVA E.A. On Refining the Asymptotics of a Singular Perturbed Problem Solution as a Result of Separation of the Roots of a Degenerate Equation..... 5
- ZAYTSEV M.L., AKKERMAN V.B. Hypothesis on Unification of Solution of the Cauchy Problem for Overdetermined Systems of Differential Equations..... 12
- ZAMYSHLYAEVA A.A., TSYPLENKOVA O.N. Optimal Control of Solutions to the Initial-Final Problem for the Model of Linear Waves in a Plasma..... 26
- PANYUKOV A.V., MEZAL Ya.A. Parametric Identification of Quasilinear Difference Equation .. 32

Mechanics

- DILMAN V.L. Mathematical Modeling of Critical States of Thin-Walled Cylindrical Shells under Internal Pressure and Axial Compression..... 39
- KARPETA T.V. Mathematical Modeling of Fracture Conditions of Thin-Walled Cylindrical Shells under External Pressure and Axial Tension 47
- KOROTKII A.I., TSEPELEV I.A. Reconstruction of the Inlet Viscous Fluid Flow by Velocity Measurements on any Observable Part of the Free Moving Surface..... 56
- NOSACHEVA A.I. Analysis of the Critical State of a Discrete-Inhomogeneous Strip with a Tilted Contact Boundary and an External Macrodefect in its More Durable Part 62

Physics

- VEBER V.A. Mathematical Modeling for Multi-Parameter Control Considering Design Features of Eddy-Current Converters..... 73

Personalia

- To the 70th Anniversary of Valery Dilman 80

ОБ УТОЧНЕНИИ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В РЕЗУЛЬТАТЕ РАЗДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Е.А. Деркунова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: derkunovaea@susu.ru

Проведено построение и обоснование асимптотики решения начальной сингулярно возмущенной задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения. Задача характеризуется наличием внутреннего переходного слоя, вблизи которого решение претерпевает изменение поведения, а именно, переходит от стремления от одной ветви составного устойчивого корня к другой. Оказывается, что корни вырожденного уравнения в некоторой окрестности точки их пересечения можно изолировать с помощью определенного их представления. Аналогичное представление справедливо и для искомой функции. Все это позволяет свести задачу к новой, асимптотику решения которой легко можно найти. Во-первых, оценивается порядок входящих в правую часть уравнения членов внутри и вне малой окрестности точки бифуркации, а во-вторых, уточняется асимптотика решения исходной задачи вне малой окрестности этой точки. Последнее продельвается с помощью некой пограничной функции, цель введения которой состоит в том, чтобы асимптотика вышла на режим, задаваемый устойчивым корнем слева и справа точки бифуркации. Доказательство теоремы существования и единственности решения, обладающего указанной асимптотикой, проводится методом дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача; асимптотика; метод пограничных функций; смена устойчивости; метод дифференциальных неравенств.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение вида ($\varepsilon > 0$ – малый параметр):

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = -(u - \varphi_1(t))(u - \varphi_2(t)), \quad -1 < t < 1 \quad (1)$$

с начальным условием:

$$u(-1) = u^0. \quad (2)$$

Потребуем выполнения следующих условий:

Условие 1. $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ при $-1 \leq t < 0$, $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$ при $0 < t \leq 1$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$.

Это означает, что корень $\varphi_1(t)$ устойчив в промежутке $-1 \leq t < 0$ и неустойчив при $0 < t \leq 1$, а корень $\varphi_2(t)$ – наоборот, неустойчив при $-1 \leq t < 0$ и устойчив в промежутке $0 < t \leq 1$. Напомним, что устойчивость корней $u = \varphi_1(t)$, $u = \varphi_2(t)$ вырожденного уравнения

$$f(u, t) \equiv -(u - \varphi_1(t))(u - \varphi_2(t)) = 0$$

определяется знаком производной

$$f_u = -2u + [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)],$$

и для устойчивого корня $f_u < 0$, а для неустойчивого – соответственно, $f_u > 0$ [1]. В силу равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ нарушается условие теоремы А.Н. Тихонова – знакопостоянство f_u на корне вырожденного уравнения, а в точке $t = 0$ характер устойчивости корней меняется, что ведет к необходимости дальнейшего исследования. Ранее было доказано [2] существование и единственность решения задачи (1), (2), для которого в δ – окрестности точки $t = 0$ ($\delta > 0$ – достаточно малое, не зависящее от ε число) справедливо асимптотическое представление

$$u(t) = \bar{u}(t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3)$$

где $\bar{u}(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{при } -1 \leq t < 0, \\ \varphi_2(t) & \text{при } 0 < t \leq 1, \end{cases}$ называется составным устойчивым корнем.

Условие 2. Начальное значение (2) находится в области влияния устойчивого при $t = -1$ корня $\varphi_1(t)$.

Следующее условие достаточно для построения асимптотики погранслоного типа в окрестностях, окаймляющих точку бифуркации:

Условие 3. Корни вырожденного уравнения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы. Производные пересекающихся корней в точке $t = 0$ имеют следующие знаки:

$$\varphi_1'(0) < 0, \quad \varphi_2'(0) > 0.$$

Ниже будет построена асимптотика решения, уточняющая построенную в [2]. Во-первых, эта асимптотика будет описывать решение, выходящее из точки $(-1, u^0)$, подчиненной Условию 2, что совместно с Условием 1 делает ее поведение согласным с требованиями теоремы А.Н. Тихонова [1]. Во-вторых, как уже говорилось, асимптотика вблизи начала координат будет определяться результатами, изложенными в [2, 3] (см. выше формулу (3)). В-третьих, вне малой окрестности точки внутреннего слоя (порядка $\sqrt{|\ln \varepsilon| \varepsilon}$) будет описываться некой пограничной функцией, имеющей две ветви – слева и справа от точки $(0, \varphi_0)$, призванной выйти на режим, задаваемый составным устойчивым корнем. По этой причине оценка для решения будет более детальная, нежели (3). В этом и состоит результат исследования.

2. Построение асимптотики. Зададим достаточно малое, не зависящее от ε число $\delta > 0$. Рассмотрим задачу (1)–(2) в окрестности начальной точки $-1 \leq t < -\delta$. Здесь действует классическая теория: корни $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ изолированы. Устойчив первый корень. К нему и «притянется» решение. Асимптотика решения вблизи начальной точки известна:

$$u(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) + Q_0(\tau_0) + O(\varepsilon),$$

где $Q_0(\tau_0)$ – стандартная пограничная функция, $\tau_0 = \frac{t+1}{\varepsilon}$ – погранслоная переменная. Функция $Q_0(\tau_0)$ находится из начальной задачи:

$$\frac{dQ_0}{d\tau_0} = -Q_0(Q_0 + [\varphi_1(-1) - \varphi_2(-1)]), \quad \tau_0 > 0,$$

$$Q_0(0) = u^0 - \varphi_1(-1).$$

Ее решение выписывается так:

$$Q_0(\tau_0) = \frac{\varphi_1(-1) - \varphi_2(-1)}{\frac{u^0 - \varphi_2(-1)}{u^0 - \varphi_1(-1)} \exp\{[\varphi_1(-1) - \varphi_2(-1)]\tau_0\} - 1}.$$

Используя Условия 1 и 2, убеждаемся в справедливости для пограничной функции $Q_0(\tau_0)$ экспоненциальной оценки:

$$|Q_0(\tau_0)| \leq C \exp(-\kappa\tau_0), \quad \tau_0 > 0,$$

где $C > 0$, $\kappa > 0$ – не зависящие от ε постоянные.

Рассмотрим уравнение (1) в области $-\delta \leq t \leq 1$. Выпишем выражения для корней его вырожденного уравнения:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 + \varphi_1'(0)t + \dots + \frac{1}{n!} \varphi_1^{(n)}(0)t^n + \dots, \quad \varphi_2(t) = \varphi_0 + \varphi_2'(0)t + \dots + \frac{1}{n!} \varphi_2^{(n)}(0)t^n + \dots$$

и подставим их в уравнение (1), получим:

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = -(u - \varphi_0 - v_1(t)t)(u - \varphi_0 - v_2(t)t),$$

где $v_1(t) = \varphi_1'(0) + \dots + \frac{1}{n!} \varphi_1^{(n)}(0)t^{n-1}$ и $v_2(t) = \varphi_2'(0) + \dots + \frac{1}{n!} \varphi_2^{(n)}(0)t^{n-1}$. В силу Условий 3 и 1 $v_1(0) < 0$, $v_2(0) > 0$ и $v_1(t) < v_2(t)$.

Будем искать асимптотику (1) в окрестности $[-\delta, \delta]$ в виде

$$u = v(t)t + \varphi_0 + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4)$$

Для новой функции $v(t)$ имеем задачу:

$$\varepsilon \frac{d(vt)}{dt} = - \left[(v - v_1(t))t + O(\sqrt{\varepsilon}) \right] \cdot \left[(v - v_2(t))t + O(\sqrt{\varepsilon}) \right], \quad -\delta \leq t < 0, \quad 0 < t \leq \delta. \quad (5)$$

Во-первых, в окрестности нуля получили изолированные корни. Во-вторых, они меняют характер устойчивости при переходе через $t = 0$. Корень $v_1(t)$ является устойчивым при $-\delta \leq t < 0$, а корень $v_2(t)$ устойчив при $0 < t \leq 1$. В-третьих, из уравнения (5) следует, что $v(t) = \tilde{c}(t, \varepsilon)/t$, где $\tilde{c}(t, \varepsilon)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\varepsilon \tilde{c}'(t, \varepsilon) = -t^2 \left(\frac{\tilde{c}(t, \varepsilon)}{t} - v_1(t) \right) \left(\frac{\tilde{c}(t, \varepsilon)}{t} - v_2(t) \right) + O(\sqrt{\varepsilon})t \left(2 \frac{\tilde{c}(t, \varepsilon)}{t} - (v_1(t) + v_2(t)) \right) + O(\varepsilon). \quad (6)$$

Из оценки (3) получим, что $\tilde{c}(t, \varepsilon) = c_1(t) + c(\varepsilon, t)$, где $c_1(t) = O(t^\lambda)$ при малых t , $\lambda > 0$. Подставим выражение для $\tilde{c}(t, \varepsilon)$ в уравнение (6):

$$\varepsilon c_1'(t) + \varepsilon c'(\varepsilon, t) = -t^2 \left(\frac{c_1(t)}{t} - v_1(t) \right) \left(\frac{c_1(t)}{t} - v_2(t) \right) - tc(\varepsilon, t) \left(2 \frac{c_1(t)}{t} - v_1(t) - v_2(t) \right) - c^2(\varepsilon, t) + O(\sqrt{\varepsilon})t \left(2 \frac{c_1(t)}{t} - v_1(t) - v_2(t) \right) + O(\sqrt{\varepsilon})c(\varepsilon, t) + O(\varepsilon). \quad (7)$$

Пусть $-m\sqrt{\varepsilon} < t < m\sqrt{\varepsilon}$, где $m = m(\varepsilon) > 0$ – некоторая зависящая от ε величина. Выберем $m(\varepsilon)$ порядка $\sqrt{|\ln \varepsilon|}$. Тогда ясно, что уравнение (7) удовлетворяется, когда $c(\varepsilon, t) = O(\sqrt{\varepsilon})$, а $\lambda = 1$. При этом оказывается, кроме того, что из оценки (3) в указанной окрестности следует равенство $c_1(t) = \frac{v_1(t) + v_2(t)}{2}t + O(\sqrt{\varepsilon})$, поэтому второе и четвертое слагаемое правой части (7) есть величина порядка $O(\varepsilon^{3/2} |\ln \varepsilon|^{1/2})$.

Положим затем $-\delta \leq t < -m\sqrt{\varepsilon}$ и $m\sqrt{\varepsilon} < t \leq \delta$. Первый член правой части (7) будет преобладать над остальными, и в этих промежутках потребуется выполнение соотношений: $c_1(t) \sim v_1(t)t$ или $c_1(t) \sim v_2(t)t$.

Решим уравнение вида:

$$\varepsilon \frac{d(vt)}{dt} = -t^2 [v - v_1(t)] \cdot [v - v_2(t)] + \sigma(t, \sqrt{\varepsilon}). \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой (7), взятое вне окрестности точки перехода порядка $\sqrt{|\ln \varepsilon|}$. Функция $\sigma(t, \sqrt{\varepsilon})$ определяется из (7).

Уточним оценку для решения в указанной области. Асимптотику решения уравнения (8) на временах $-\delta \leq t \leq 1$ будем искать в виде:

$$v(t, \varepsilon) = \bar{v}(t) + \Pi(\tau, \varepsilon),$$

где регулярная часть

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v_1(t), & -\delta \leq t < 0, \\ v_2(t), & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Поведение решения $v(t)$ вблизи начала координат определяется составной пограничной функцией:

$$\Pi(t, \varepsilon) = \begin{cases} \Pi^{(-)}(t, \varepsilon), & t < 0, \\ \Pi^{(+)}(t, \varepsilon), & t > 0. \end{cases}$$

Запишем задачу для определения пограничной функции $\Pi^{(-)}(t, \varepsilon)$:

$$\varepsilon \frac{d\Pi^{(-)}}{dt} = -t\Pi^{(-)}, \quad t < 0, \quad (9)$$

$$\Pi^{(-)}(0, \varepsilon) = -v_1(0). \quad (10)$$

Решая ее, находим:

$$\Pi^{(-)}(t, \varepsilon) = -v_1(0) \exp\left(-\frac{t^2}{2\varepsilon}\right).$$

Непосредственно убеждаемся в справедливости оценки:

$$|\Pi^{(-)}(t, \varepsilon)| \leq C \exp\left(-\kappa \frac{t^2}{\varepsilon}\right), \quad (11)$$

где $C > 0$, $\kappa > 0$ – не зависящие от ε постоянные.

Замечание 1. На промежутке $-\delta \leq t < -m\sqrt{\varepsilon}$ для функции $\Pi^{(-)}(t, \varepsilon)$ справедлива оценка:

$$|\Pi^{(-)}(t, \varepsilon)| \leq C \exp(-\kappa m^2),$$

и чтобы эта пограничная функция стала порядка $O(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha > 0$ – некоторое число, достаточно, чтобы параметр $m \geq \sqrt{\alpha\kappa^{-1}|\ln \varepsilon|}$. Поскольку выше было получено решение (9)–(10) с $\kappa \leq \frac{1}{2}$, то в той задаче $m \geq \sqrt{2\alpha|\ln \varepsilon|}$.

Пограничная функция $\Pi^{(+)}(t, \varepsilon)$ находится как решение задачи:

$$\varepsilon \frac{d\Pi^{(+)}}{dt} = -t\Pi^{(+)}, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$\Pi^{(+)}(0, \varepsilon) = -v_2(0).$$

Ее решение имеет вид:

$$\Pi^{(+)}(\tau, \varepsilon) = -v_2(0) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\varepsilon}\right).$$

Аналогично ситуации с пограничной функцией слева от начала координат для $\Pi^{(+)}(t, \varepsilon)$ справедлива оценка:

$$|\Pi^{(+)}(t, \varepsilon)| \leq C \exp\left(-\kappa \frac{t^2}{\varepsilon}\right), \quad \tau > 0,$$

где постоянные $C > 0$, $\kappa > 0$ не зависят от ε . Замечание, аналогичное приведенному выше, справедливо и для функции $\Pi^{(+)}(t, \varepsilon)$.

Замечание 2. Как видим, чтобы приступить к решению уравнения (8), при построении погранслошной части асимптотики решаются уравнения (9) и (12) соответственно влево и вправо от начала координат, и к ним присоединяются начальные условия вида: $v(0, \varepsilon) = \bar{v}(0) + \Pi^{(\mp)}(0, \varepsilon) = 0$.

3. Обоснование асимптотики. Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема. Если выполнены Условия 1–3, то существует единственное решение задачи (1)–(2), имеющее при достаточно малых ε асимптотическое представление

$$u(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(t) + Q_0(\tau_0) + O(\varepsilon) & \text{при } -1 \leq t < -\delta, \\ \varphi_0 + \bar{v}(t)t + O(\sqrt{\varepsilon}) & \text{при } -m\sqrt{\varepsilon} < t < m\sqrt{\varepsilon}, \\ \varphi_0 + (\bar{v}(t) + \Pi(\tau, \varepsilon))t + O(\sqrt{\varepsilon}) & \text{при } -\delta \leq t \leq -m\sqrt{\varepsilon}, m\sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \delta, \\ \varphi_0 + v_2(t)t + O(\varepsilon) & \text{при } \delta < t \leq 1, \end{cases}$$

где $m \geq \sqrt{2\alpha|\ln \varepsilon|}$, $\alpha > 0$ – некоторое число.

Итак, асимптотика решения при $-1 \leq t < -\delta$ была выше построена, она, впрочем, следует из стандартной теории [1]. Если взять переменную t такой, что $-m\sqrt{\varepsilon} < t < m\sqrt{\varepsilon}$, то для получения асимптотики на указанном промежутке можно воспользоваться результатом, изложенным в [2, 3]. Доказательство теоремы на промежутках $-\delta \leq t \leq -m\sqrt{\varepsilon}$ и $m\sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1$ проведем методом дифференциальных неравенств [2]. Для этого достаточно показать, что существуют кусочно непрерывные функции, называемые нижним $\underline{U}(t, \varepsilon)$ и верхним $\bar{U}(t, \varepsilon)$ решением уравнения (1), то есть выполняются неравенства:

$$1. \quad L_\varepsilon \underline{U} \equiv \varepsilon \frac{d\underline{U}}{dt} + (\underline{U} - \varphi_1(t))(\underline{U} - \varphi_2(t)) \leq 0 \leq L_\varepsilon \bar{U}, \quad -m\sqrt{\varepsilon} > t \geq -\delta, \quad m\sqrt{\varepsilon} < t \leq \delta. \quad (13)$$

$$2. \quad \underline{U}(-m\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) \leq \bar{U}(-m\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) \text{ и } \underline{U}(m\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) \leq \bar{U}(m\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon). \quad (14)$$

Положим:

$$\underline{U}(t, \varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(t, \varepsilon), & t < 0, \\ \underline{U}^{(+)}(t, \varepsilon), & t > 0, \end{cases} \quad \bar{U}(t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{U}^{(-)}(t, \varepsilon), & t < 0, \\ \bar{U}^{(+)}(t, \varepsilon), & t > 0. \end{cases}$$

Нижнее и верхнее решения построим в виде:

$$\underline{U}^{(-)}(t, \varepsilon) = \varphi_0 + (v_1(t) + \Pi^{(-)}(t, \varepsilon))t - A^{(-)}(t)t\sqrt{\varepsilon}, \quad \bar{U}^{(-)}(t, \varepsilon) = \varphi_0 + (v_1(t) + \Pi^{(-)}(t, \varepsilon))t + A\sqrt{\varepsilon}$$

при $-m\sqrt{\varepsilon} > t > -\delta$;

$$\underline{U}^{(+)}(t, \varepsilon) = \varphi_0 + (v_2(t) + \Pi^{(+)}(t, \varepsilon))t - A\sqrt{\varepsilon}, \quad \bar{U}^{(+)}(t, \varepsilon) = \varphi_0 + (v_2(t) + \Pi^{(+)}(t, \varepsilon))t + A\sqrt{\varepsilon}$$

при $m\sqrt{\varepsilon} < t < \delta$.

Здесь функция $A^{(-)}(t)$ есть решение уравнения $\frac{dA^{(-)}}{dt}t = a - A^{(-)}$, что дает $A^{(-)}(t) = \frac{A}{t} + a$, где $A > 0$, $a > 0$ – достаточно большие числа. При $-\frac{A}{a} < t < 0$ функция $A^{(-)}(t) < 0$, что и требуется для нижнего решения при отрицательных t . Достаточно проверить неравенства (13), (14) отдельно для функций $\underline{U}^{(-)}(t, \varepsilon)$ и $\bar{U}^{(-)}(t, \varepsilon)$, отдельно для $\underline{U}^{(+)}(t, \varepsilon)$ и $\bar{U}^{(+)}(t, \varepsilon)$ соответственно слева и справа от начала координат. Неравенства 2 проверяются элементарно с учетом того, что начальной точкой для нижнего и верхнего решения на отрезке $-m\sqrt{\varepsilon} \geq t \geq -\delta$ будет $t = -m\sqrt{\varepsilon}$, а эволюция системы происходит справа налево. Докажем неравенство $L_\varepsilon \underline{U} \leq 0$ на промежутке $-\delta \leq t < -m\sqrt{\varepsilon}$. Имеем:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &\equiv \varepsilon \frac{d\underline{U}}{dt} + (\underline{U} - \varphi_1(t))(\underline{U} - \varphi_2(t)) = \\ &= \varepsilon \frac{dv_1}{dt}t + \varepsilon \frac{d\Pi^{(-)}}{dt}t + \varepsilon (v_1 + \Pi^{(-)}) - \frac{dA^{(-)}}{dt}t\varepsilon^{3/2} - A^{(-)}(t)\varepsilon^{3/2} + \\ &\quad + (\Pi^{(-)}t - A^{(-)}(t)t\sqrt{\varepsilon})(\Pi^{(-)}t - A^{(-)}(t)t\sqrt{\varepsilon} + (v_1 - v_2)t) = \\ &= \varepsilon \frac{dv_1}{dt}t + \varepsilon (v_1 + \Pi^{(-)}) - \left\{ \frac{dA^{(-)}}{dt}t + A^{(-)}(t) - a \right\} \varepsilon^{3/2} + t \left\{ \varepsilon \frac{d\Pi^{(-)}}{dt} + t\Pi^{(-)} \right\} + \\ &\quad + t^2\Pi^{(-)}(\Pi^{(-)} + (v_1 - v_2) - 1) + (v_2 - v_1 - 2\Pi^{(-)})A^{(-)}(t)t^2\sqrt{\varepsilon} + A^{(-)}(t)^2t^2\varepsilon - a\varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

Выражения в фигурных скобках равны нулю в силу уравнения для $A^{(-)}(t)$ и уравнения (9).

Шестое слагаемое будет иметь вид: $[At + at^2](v_2 - v_1 - 2\Pi^{(-)})\sqrt{\varepsilon} < 0$ при $-\frac{A}{a} < t < 0$, более того, при выше указанном порядке $m(\varepsilon)$ будет являться величиной меньшей, чем $-2Ac\sqrt{|\ln \varepsilon|}\varepsilon$, где

Математика

$c > 0$ подходящая постоянная. Это слагаемое будет доминировать над всеми слагаемыми этой суммы при достаточном соотношении между константами A и a , при достаточно малых ε , и достаточно больших A и m . Здесь следует отметить, что порядок функции $\Pi^{(-)}(t, \varepsilon)$ в силу Замечания 1 на исследуемом промежутке является величиной $O(\varepsilon^\alpha)$, если выбрать $m \geq \sqrt{2\alpha|\ln \varepsilon|}$, пятый член по абсолютной величине меньше $C\varepsilon^{1+\alpha}|\ln \varepsilon| = o(\sqrt{|\ln \varepsilon|}\varepsilon)$, но больше $\delta o(\varepsilon^N)$. Седьмой член есть функция вида $(A + at)^2 \varepsilon < (A + \delta a)^2 \varepsilon$. Первый и второй члены на указанном промежутке порядка $O(\varepsilon)$. Все это приводит к неравенству $L_\varepsilon \underline{U} \leq 0$ для $-\delta \leq t < -m\sqrt{\varepsilon}$ при достаточно малых ε .

Аналогично, $L_\varepsilon \bar{U} \geq 0$ в промежутке $-\delta \leq t < -m\sqrt{\varepsilon}$. Действительно, получаем:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \bar{U} \equiv & \varepsilon \frac{d\bar{U}}{dt} + (\bar{U} - \varphi_1(t))(\bar{U} - \varphi_2(t)) = \varepsilon \frac{dv_1}{dt} t + \varepsilon \frac{d\Pi^{(-)}}{dt} t + \varepsilon (v_1 + \Pi^{(-)}) + \\ & + (\Pi^{(-)} t + A\sqrt{\varepsilon})(\Pi^{(-)} t + A\sqrt{\varepsilon} + (v_1 - v_2)t) = \varepsilon \frac{dv_1}{dt} t + \varepsilon (v_1 + \Pi^{(-)}) + \\ & + t \left\{ \varepsilon \frac{d\Pi^{(-)}}{dt} + t\Pi^{(-)} \right\} + t^2 \Pi^{(-)} (\Pi^{(-)} + (v_1 - v_2) - 1) - t(v_2 - v_1 - 2\Pi^{(-)})A\sqrt{\varepsilon} + A^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь пятое слагаемое имеет положительное значение и преобладает в этих выражениях при достаточно малых ε и достаточно больших A , то есть $L_\varepsilon \bar{U} \geq 0$ на указанном промежутке.

Рассмотрим теперь ситуацию с нижним и верхним решением в промежутке $m\sqrt{\varepsilon} < t \leq \delta$. Для нижнего решения получим:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} \equiv & \varepsilon \frac{d\underline{U}}{dt} + (\underline{U} - \varphi_1(t))(\underline{U} - \varphi_2(t)) = \varepsilon \frac{dv_2}{dt} t + \varepsilon \frac{d\Pi^{(+)}}{dt} t + \varepsilon (v_2 + \Pi^{(+)}) + \\ & + (\Pi^{(+)} t - A\sqrt{\varepsilon} + (v_2 - v_1)t)(\Pi^{(+)} t - A\sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon \frac{dv_2}{dt} t + \varepsilon (v_2 + \Pi^{(+)}) + \\ & + t \left\{ \varepsilon \frac{d\Pi^{(+)}}{dt} + t\Pi^{(+)} \right\} + t^2 \Pi^{(+)} (\Pi^{(+)} + (v_2 - v_1) - 1) - t(v_2 - v_1 + 2\Pi^{(+)})A\sqrt{\varepsilon} + A^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

В данном промежутке пятое слагаемое отрицательно, и при указанных m , достаточно малых ε и достаточно больших A справедливо неравенство $L_\varepsilon \underline{U} \leq 0$. Докажем, наконец, соответствующую оценку для \bar{U} в промежутке $m\sqrt{\varepsilon} < t \leq \delta$:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \bar{U} \equiv & \varepsilon \frac{d\bar{U}}{dt} + (\bar{U} - \varphi_1(t))(\bar{U} - \varphi_2(t)) = \varepsilon \frac{dv_2}{dt} t + \varepsilon \frac{d\Pi^{(+)}}{dt} t + \varepsilon (v_2 + \Pi^{(+)}) + \\ & + (\Pi^{(+)} t + A\sqrt{\varepsilon} + (v_2 - v_1)t)(\Pi^{(+)} t + A\sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon \frac{dv_2}{dt} t + \varepsilon (v_2 + \Pi^{(+)}) + \\ & + t \left\{ \varepsilon \frac{d\Pi^{(+)}}{dt} + t\Pi^{(+)} \right\} + t^2 \Pi^{(+)} (\Pi^{(+)} + (v_2 - v_1) - 1) + t(v_2 - v_1 + 2\Pi^{(+)})A\sqrt{\varepsilon} + A^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Пятое слагаемое в этом равенстве положительно. Оно будет главным при малых ε и достаточно больших A , то есть $L_\varepsilon \bar{U} \geq 0$. В силу изолированности корня $\varphi_2(t)$ на отрезке $\delta \leq t \leq 1$ асимптотика решения такая, как указано в формулировке теоремы. Очевидно, единственность решения задачи (1)–(2) гарантирована. Теорема доказана.

Литература

1. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.
2. Бутузов, В.Ф. Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости / В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов, К.Р. Шнайдер // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее

приложения. Тематические обзоры. – М.: ВИНТИ, 2002 – Т. 109. Дифференц. уравнения. Сингулярные возмущения.

3. Бутузов, В.Ф. О системах сингулярно возмущенных уравнений в случае пересечения корней вырожденной системы / В.Ф. Бутузов, М.А. Терентьев // Вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 11. – С. 1686–1699.

Поступила в редакцию 1 марта 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 5–11*

DOI: 10.14529/mmph190401

ON REFINING THE ASYMPTOTICS OF A SINGULAR PERTURBED PROBLEM SOLUTION AS A RESULT OF SEPARATION OF THE ROOTS OF A DEGENERATE EQUATION

E.A. Derkunova

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: derkunovaea@susu.ru

We carry the constructing and founding of solution asymptotics for initial singular perturbed problem when the roots of degenerate equation are cross. The problem is characterized by a presence of inner transition layer near which the solution has a change of own behavior, it means, passes from one branch of complex stable root to another one. It turns out, the roots of degenerate equation could be separated by means of defined their representation. The same representation is true for research function also. It lets to reduce the problem to new one which estimate of solution is easily found. In the first place, the order of the terms of right part of equation is set up into and out of small neighborhood of bifurcation point; secondly, the solution asymptotics of reference problem is improved out of this small neighborhood. The last one is made by means of a certain boundary function, which aim of introduce is to go of asymptotics to regime given left and right of bifurcation point. The proof of existence and uniqueness theorem having the point out asymptotics we carry by differential inequalities method.

Keywords: singularly perturbed problem; asymptotics; boundary function method; change of stability; differential inequality method.

References

1. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* (Asymptotic methods in the theory of singular perturbations). Moscow, Vysshaya shkola, 1990, 207 p. (in Russ.).

2. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Shnaider K.R. *Singulyarno vozmushchennye zadachi v sluchae smeny ustoychivosti* (Singular perturbed problems in the case of stability change). *Itogi nauki i tekhniki. Sovrem. matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory. T. 109. Differents. uravneniya. Singulyarnye vozmushcheniya* (Advances in Science and Engineering. Modern Mathematics and Its Applications. Subject Surveys. Vol. 109. Differential Equations. Singular Perturbations), Moscow, VINITI Publ., 2002. (in Russ.).

3. Butuzov V.F., Terent'ev M.A. System of singularly perturbed equations in the case of intersecting roots of a degenerate system. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, Vol. 42, no. 11, pp. 1622–1635.

Received March 1, 2019

ГИПОТЕЗА ОБ УНИВЕРСАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Л. Зайцев¹, В.Б. Аккерман²

¹ г. Москва, Российская Федерация

² Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, США

E-mail: mlzaytsev@gmail.com

Изучается возможность существования универсального решения задачи Коши у систем УрЧП в случае, если эта система переопределяется так, что новая переопределенная система УрЧП содержит все решения исходной системы УрЧП и, кроме того, редуцируется до систем ОДУ, решение которых потом находится в виде универсальной формулы от начальных данных. Это решение может быть чрезвычайно сложным, но, тем не менее, представлять теоретический интерес. Для этого предложена модификация метода редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений, предложенного ранее авторами. Предлагается выделять решения у переопределенных систем УрЧП с помощью параметризованной задачи Коши, которая ставится для параметризованных систем ОДУ при выполнении некоторых условий. Предлагается общий способ переопределения любых систем УрЧП на основе введения вспомогательной функции, увеличения количества переменных и преобразования к новой переопределенной системе УрЧП от одной неизвестной функции. Приведены аналитические примеры использования метода. Приводятся также гипотезы об унификации внешнего вида любых систем УрЧП и их решении данным методом. Результаты статьи могут быть применены переопределенным уравнениям гидродинамики, полученным ранее авторами, в случае, если в результате расчетов окажется, что они имеют большой произвол в общих решениях, но редуцируются до систем ОДУ.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений; ОДУ; размерность дифференциальных уравнений; задача Коши; параметрические решения систем дифференциальных уравнений.

Введение

В настоящий момент затруднено или практически невозможно прямое численное моделирование многих физических процессов: горения, обтекания, гидродинамических неустойчивостей, турбулентности, плазмы и т. д. [1]. Требуется большие затраты вычислительных мощностей и времени. Один из возможных путей решения этой проблемы в практических задачах: сведение полной системы гидродинамических уравнений и химической кинетики по объему к системе уравнений на поверхности [2–5]. Как следствие, снижаются размерность задачи, минимальные масштабы, которые надо разрешить, и вычислительные затраты. Нарботки по снижению размерности недостаточны и требуют дальнейшего развития.

Авторами был предложен общий способ снижения размерности для произвольных систем дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП), который позволяет свести системы УрЧП в объёме к системам на поверхности [6–8]. Требуется исходную систему УрЧП дополнить уравнениями связи и произвести преобразования. На основе этой идеи в работах авторов [6–8] также был предложен метод нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП. В этом методе нахождение решений сводится к решению систем обыкновенных неявных уравнений. При этом можно показать, что решения, которые нам нужны, не могут зависеть от непрерывного параметра. Заранее требуется наличие такого переопределения систем дифференциальных уравнений, чтобы их общих решений было не более, чем счетно. Такого изначального переопределения добиться довольно непросто. Однако есть простой способ переопределения любых систем уравнений в частных производных, который содержит большой произвол в общих решениях.

Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v = S_v(x)$, $v=1\dots p$, $x=(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{R}_x^m$ [9, 10]

$$H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) = 0, \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p. \quad (1)$$

Здесь $H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right)$, $k=1\dots p$, – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\frac{\partial S_v}{\partial x}$, S_v , x , $v=1\dots p$, \mathfrak{R}_x^m – евклидово пространство размерности m . Рассмотрим вспомогательную функцию, зависящую от $x=(x_1, \dots, x_m)$ и дополнительной переменной ξ ,

$$U = U(x, \xi) = G(S_1(x), \dots, S_k(x), \dots, S_p(x), x, \xi), \quad k=1\dots p, \quad (2)$$

где $G(S_1(x), \dots, S_v(x), \dots, S_p(x), x, \xi)$ – заранее заданная достаточно гладкая функция своих аргументов $S_v(x)$, ξ , x , где $v=1\dots p$. Проинтегрируем (2) по переменной ξ p раз:

$$\frac{\partial^j}{\partial \xi^j} [U(x, \xi)] = \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} [G(S_1(x), \dots, S_k(x), \dots, S_p(x), x, \xi)], \quad k=1\dots p, \quad j=1\dots p. \quad (3)$$

Тогда мы имеем систему из $p+1$ неявных уравнений (2), (3) относительно p неизвестных $S_k = S_k(x)$, $k=1\dots p$. Предположим, что функция $G(S_1(x), \dots, S_v(x), \dots, S_p(x), x, \xi)$ такова (например, степенная по переменной ξ), что эти неизвестные из системы (2), (3) можно выразить в явном виде через функцию $U(x, \xi)$ и ее производные по ξ

$$S_k = F_k \left(x, \xi, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^l U}{\partial \xi^l}, \dots, \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}} \right), \quad k=1\dots p, \quad l=1\dots p-1, \quad (4)$$

а также выписать дополнительное соотношение в виде:

$$\frac{\partial^p U}{\partial \xi^p} = W \left(x, \xi, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^l U}{\partial \xi^l}, \dots, \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}} \right), \quad l=1\dots p-1. \quad (5)$$

Потребуем, чтобы следующий определитель был не равен нулю для любых S_k , $k=1\dots p$, являющихся решениями системы из неявных уравнений (2), (3)

$$\Delta = |a_{i,j}| = \left| \frac{\partial}{\partial S_j} \left(\frac{\partial^{i-1} G(S_1, \dots, S_k, \dots, S_p, x, \xi)}{\partial \xi^{i-1}} \right) \right| \neq 0, \quad i, j=1\dots p, \quad k=1\dots p.$$

Если функция $U(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению (5) и выполняется условие выше на определитель, то выражения для S_k , $k=1\dots p$, вычисленные по формуле (4), не зависят от ξ . Подставим выражения (4) в уравнения (1). Тогда мы сможем преобразовать систему (1) к системе из p уравнений

$$H_k \left(x, \xi, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial^l U}{\partial \xi^l}, \dots, \frac{\partial^{p-1} U}{\partial \xi^{p-1}}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial x}, \dots, \frac{\partial^{l+1} U}{\partial \xi^l \partial x}, \dots, \frac{\partial^p U}{\partial \xi^{p-1} \partial x} \right) = 0, \quad k=1\dots p, \quad l=1\dots p-1, \quad (6)$$

которая содержит всего одну неизвестную функцию $U(x, \xi)$. Решая переопределенную систему уравнений (5), (6), мы можем найти все решения исходной системы (1) по формулам (4). К системе уравнений (1) может быть задана задача Коши, содержащая непрерывный параметр, и выделена непрерывная серия решений. Следовательно, непрерывную серию решений по формуле (2) имеет и переопределенная система дифференциальных уравнений (5), (6).

В статьях [6–8] предложено несколько способов переопределения различных уравнений математической физики. Конкретное решение, которое содержит переопределенная система уравнений, учитывается в самом способе переопределения в виде начального распределения у неизвестных функций, взятых из задачи Коши для исходной системы УрЧП. При преобразовании

этой системы УрЧП к системам неявных уравнений приходится до миллиона раз дифференцировать эти начальные распределения у неизвестных функций. С точки зрения численных методов это крайне неэффективно, так как для этого нужно запредельно точно знать начальные данные. Однако предлагаемый в статьях авторов [6–8] метод допускает также редуцирование переопределенных систем дифференциальных уравнений не только вплоть до систем неявных уравнений, но и до систем УрЧП размерности меньшей, чем у исходных систем УрЧП. В частности, при некоторых условиях возможна редукция до параметризованных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). С точки зрения численных методов выгоднее найти такие способы переопределения, чтобы соответствующая переопределенная система содержала сразу все решения исходной системы УрЧП, и редуцировать потом ее до параметрической системы ОДУ. Решив потом эту систему ОДУ в общем виде, мы сможем выписать решение у исходной системы УрЧП.

Требуется уточнение данного метода нахождения частных решений у систем УрЧП на этот случай. Оказывается, что можно выделять решения у таких переопределенных систем УрЧП с помощью параметризованной задачи Коши, которая ставится для параметризованных систем ОДУ при выполнении некоторых условий. Цель данной статьи состоит в исследовании этой задачи Коши с возможностью ее универсализации (представление ее решения в виде универсальной формулы от начальных данных).

Везде мы предполагаем достаточную гладкость всех рассматриваемых функций, а в некоторых случаях и их аналитичность. Для простоты везде предполагается, что решения ищутся в пространстве аналитических функций и что выполняются условия теоремы Коши–Ковалевской о единственности решения задачи Коши для систем УрЧП.

1. Основная идея метода

Рассмотрим переопределенную систему из $p + n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v = S_v(x)$, $v = 1 \dots p$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{R}_x^m$

$$H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) = 0, \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots (p + n). \quad (7)$$

Здесь $H_k \left(\partial S_1 / \partial x, \dots, \partial S_v / \partial x, \dots, \partial S_p / \partial x, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right)$, $k = 1 \dots (p + n)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_v / \partial x$, S_v , x , $v = 1 \dots p$.

Зададим согласованную соответствующим образом задачу Коши для этих уравнений:

$$S_v \Big|_{x_m=0} = S_v^0(x_1, \dots, x_{m-1}), \quad \frac{\partial S_v}{\partial x_m} \Big|_{x_m=0} = R_v^0(x_1, \dots, x_{m-1}), \quad v = 1 \dots p, \quad (8)$$

потребовав, чтобы равенства (8) удовлетворяли уравнениям (7) при $x_m = 0$.

Продифференцируем выражения (7) $N_1 - 1$ раз по переменной x_1 , $N_2 - 1$ раз по переменной x_2 , \dots , $N_{m-1} - 1$ раз по переменной x_{m-1} . В результате получим систему неявных обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x_m вида

$$P_\alpha \left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_m}, Q_\beta, x \right) = \frac{\partial^{(i_1 + \dots + i_{m-1})}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m-1}^{i_{m-1}}} \left[H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) \right] = 0, \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p + n, \quad (9)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_{m-1})} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}, \quad v = 1 \dots p, \quad (10)$$

с параметрами (x_1, \dots, x_{m-1}) . Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_{m-1}) = 1, 2, \dots, N_H$, $\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_{m-1}) = 1, 2, \dots, N_S$, где N_H – количество уравнений (9) и N_S – количество неизвестных (10), функции-биекции от ин-

дексов (мульти-индексов) такие, что $Q_{\beta(v,0,\dots,0)} = S_v$, $v=1\dots p$, $P_{\alpha(k,0,\dots,0)} = H_k \left(\frac{\partial S_v}{\partial x}, S_v, x \right)$, $k=1\dots(p+n)$ и

$$i_1 = 0\dots(N_1 - 1), i_2 = 0\dots(N_2 - 1), \dots, i_{m-1} = 0\dots(N_{m-1} - 1). \quad (11)$$

$$j_1 = 0\dots N_1, j_2 = 0\dots N_2, \dots, j_{m-1} = 0\dots N_{m-1}. \quad (12)$$

Конкретные выражения $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_{m-1})$, $\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_{m-1})$ могут быть взяты, например, из [8].

Если решение системы (7) существует, то оно удовлетворяет системе ОДУ (9). Очевидно, количество уравнений (9), учитывая (11), равно

$$N_H = (p+n)N_1 N_2 \dots N_{m-1}, \quad (13)$$

а количество неизвестных (10), учитывая (12), равно

$$N_S = p \cdot (N_1 + 1)(N_2 + 1) \dots (N_{m-1} + 1). \quad (14)$$

Выберем такие N_1, \dots, N_{m-1} , чтобы выполнялось неравенство $N_S \leq N_H$ (см. (13)–(14)). Это можно сделать подобно работе [8].

Рассмотрим **расширенную** переопределенную систему неявных обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x_m вида

$$P_{\alpha} \left(\frac{\partial Q_{\beta}}{\partial x_m}, Q_{\beta}, x \right) = \frac{\partial^{(i_1 + \dots + i_{m-1})}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m-1}^{i_{m-1}}} \left[H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x} \dots \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) \right] = 0, \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p+n, \quad (15)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_{\beta} = \frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_{m-1})} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}, \quad v=1\dots p, \quad (16)$$

с параметрами (x_1, \dots, x_{m-1}) . Но функции-биекции от мульти-индексов $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_{m-1}) = 1, 2, \dots, N'_H$, $\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_{m-1}) = 1, 2, \dots, N'_S$, где N'_H – количество уравнений (15) и N'_S – количество неизвестных (16), в отличие от (11), (12) пусть определяются из условий:

$$i_1 = 0\dots N_1, i_2 = 0\dots N_2, \dots, i_{m-1} = 0\dots N_{m-1}, \quad (17)$$

$$j_1 = 0\dots(N_1 + 1), j_2 = 0\dots(N_2 + 1), \dots, j_{m-1} = 0\dots(N_{m-1} + 1). \quad (18)$$

Система уравнений (15) (с индексами из (17)) включает в себя систему уравнений (9). Неизвестных (16) (с индексами из (18)) несколько больше неизвестных (10). Функции от мульти-индексов $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_{m-1})$ и $\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_{m-1})$ в уравнениях (9) и (15) обозначены одинаково, т. к. их можно выбрать совпадающими на их общей области определения. Область определения одних индексов (17), (18) включает в себя область определения других индексов (11)–(12).

Зададим к системе ОДУ (15) параметрическую задачу Коши [11]:

$$Q_{\beta} \Big|_{x_m=0} = \frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_{m-1})} S_v^0}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}, \quad \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial x_m} \Big|_{x_m=0} = \frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_{m-1})} R_v^0}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}, \quad v=1\dots p. \quad (19)$$

Если $S_v = S_v(x)$, $v=1\dots p$ являются решениями системы (7) и удовлетворяют задаче Коши (8), то функции вида (16) будут являться решениями задачи (19) к системе (15). Найдем, при каких условиях, решая задачу (19) к системе (15), можно найти решение задачи Коши (8) к системе (7).

Пусть количество неизвестных в уравнениях (9) равно N_S^{real} . Некоторые неизвестные из (10) отсутствуют в уравнениях (9) или могут быть без ущерба убраны вместе с уравнениями, где они присутствуют. Например, рассмотрим уравнения (9) с мульти-индексами $\alpha = \alpha(k, (N_1 - 1), \dots, (N_{m-1} - 1))$, $k=1\dots(p+n)$. Таких уравнений $(p+n)$ штук. Только в них встречаются неизвестные (10) с мульти-индексами $\beta = \beta(v, N_1, (N_2 - 1) \dots (N_{m-1} - 1))$, \dots $\beta = \beta(v, (N_1 - 1), \dots, N_s \dots (N_{m-1} - 1))$, \dots $\beta = \beta(v, (N_1 - 1), \dots, (N_s - 1) \dots N_{m-1})$, $v=1\dots p$. Количество таких неизвестных равно $(m-1)p$. Таким образом, при $(m-1)p \geq (p+n)$ или $n \leq (m-2)p$ коли-

Математика

чество неизвестных будет больше числа уравнений, где они встречаются. Следовательно, они никогда не могут быть найдены из системы (9) и вместе с их уравнениями без ущерба могут быть убраны из (9).

Продифференцируем уравнения (9) по переменной x_s , $1 \leq s \leq (m-1)$. Имеем,

$$\sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \left(\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_m} \right)} \frac{\partial \left(\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s} \right)}{\partial x_m} + \sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_{l^*}}} \frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_s} + \frac{\partial P_\alpha(Q_{\beta_l}, x)}{\partial x_s} = 0, \quad l = 1 \dots N_S^{real}. \quad (20)$$

Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_{m-1})$, $\beta_l = \beta(v^l, j_1^l, \dots, j_{m-1}^l)$. С другой стороны из определения уравнений (15) следует, что

$$P_{\tilde{\alpha}}(Q_{\beta_l}, x) = \sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \left(\frac{\partial Q_{\beta_{l^*}}}{\partial x_m} \right)} \frac{\partial Q_{\tilde{\beta}_{l^*}}}{\partial x_m} + \sum_{l^*=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_{l^*}}} Q_{\tilde{\beta}_{l^*}} + \frac{\partial P_\alpha(Q_{\beta_l}, x)}{\partial x_s} = 0, \quad l = 1 \dots N_S^{real}, \quad (21)$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha(k, i_1, \dots, (i_s + 1) \dots i_{m-1})$, $\tilde{\beta}_l = \beta(v^l, j_1^l, \dots, (j_s^l + 1) \dots j_{m-1}^l)$. Вычтем почленно из выражений (21) выражения (20). Тогда

$$\sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \left(\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_m} \right)} \frac{\partial \left(Q_{\tilde{\beta}_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s} \right)}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_l}} \left(Q_{\tilde{\beta}_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s} \right) = 0. \quad (22)$$

Мы видим, что выражения $M_l = \left(Q_{\tilde{\beta}_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s} \right)$, $l = 1 \dots N_S^{real}$ удовлетворяют системе невязных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \left(\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_m} \right)} \frac{\partial M_l}{\partial x_m} + \sum_{l=1}^{N_S^{real}} \frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_{\beta_l}} M_l = 0 \quad (23)$$

с начальными данными Коши из (19)

$$M_l|_{x_m=0} = \left(Q_{\tilde{\beta}_l}|_{x_m=0} - \frac{\partial Q_{\beta_l}|_{x_m=0}}{\partial x_s} \right) = \frac{\partial^{(j_1^l + \dots + (j_s^l + 1) + \dots + j_{m-1}^l)} S_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \dots \partial x_s^{j_s^l + 1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} - \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial^{(j_1^l + \dots + j_s^l + \dots + j_{m-1}^l)} S_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \dots \partial x_s^{j_s^l} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} = 0, \quad l = 1 \dots N_S^{real},$$

$$\frac{\partial M_l}{\partial x_m}|_{x_m=0} = \left(\frac{\partial Q_{\tilde{\beta}_l}}{\partial x_m}|_{x_m=0} - \frac{\partial \left(\frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_m} \right)|_{x_m=0}}{\partial x_s} \right) = \frac{\partial^{(j_1^l + \dots + (j_s^l + 1) + \dots + j_{m-1}^l)} R_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \dots \partial x_s^{j_s^l + 1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} - \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial^{(j_1^l + \dots + j_s^l + \dots + j_{m-1}^l)} R_v^0}{\partial x_1^{j_1^l} \dots \partial x_s^{j_s^l} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}^l}} = 0.$$

Очевидно, нулевое решение удовлетворяет системе (23). **Предположим**, что другого решения указанная выше задача Коши не имеет. Это возможно, например, когда все производные по x_m от неизвестных M_l , $l = 1 \dots N_S^{real}$ выражаются из (23) в явном виде [11]. В силу нашего предположения отсюда следует

$$\left(Q_{\tilde{\beta}_l} - \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s} \right) = 0 \quad \text{или} \quad Q_{\tilde{\beta}_l} = \frac{\partial Q_{\beta_l}}{\partial x_s}, \quad l = 1 \dots N_S^{real}. \quad (24)$$

Таким образом, мы доказали, что для каждой переменной x_s , $1 \leq s \leq (m-1)$ выполняется соотношение (24). Отсюда, учитывая, что по определению $Q_{\beta(v,0,\dots,0)} = S_v$, $v=1\dots p$, следует

$$Q_{\beta(v,j_1,\dots,j_{m-1})} = \frac{\partial Q_{\beta(v,j_1-1,\dots,j_{m-1})}}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial^{j_1} Q_{\beta(v,0,\dots,j_{m-1})}}{\partial x_1^{j_1}} = \dots = \frac{\partial^{(j_1+j_2)} Q_{\beta(v,0,0,\dots,j_{m-1})}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} = \dots$$

$$\dots = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_{m-1})} Q_{\beta(v,0,\dots,0)}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}} = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_{m-1})} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_{m-1}^{j_{m-1}}}. \quad (25)$$

Мы видим, что функции $S_v = S_v(x) = Q_{\beta(v,0,\dots,0)}$, $v=1\dots p$ являются решением системы (7), а величины (10) являются соответствующими частными производными этого решения (25).

В итоге, решая параметрическую задачу Коши (19) для расширенной системы ОДУ (15) при выполнении некоторого предположения, мы находим решение задачи Коши (8) к системе (7).

2. Пример использования метода

Пример 1. Рассмотрим известную из механики систему ОДУ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \quad (26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \quad (27)$$

с задачей Коши: $u|_{t=0} = A$, $v|_{t=0} = B$, где A и B константы. Введем функцию $U = U(t, \xi) = u(t) + \xi v(t)$. Отсюда легко получить, что

$$u = U - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (28)$$

Подставим (28) в уравнения (26) и (27). После преобразований получим, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\xi U + (1 + \xi^2) \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -U + \xi \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (30)$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (31)$$

Мы имеем переопределенную систему трех уравнений в частных производных первого порядка (29)–(31) от двух неизвестных U и V . Поставим для них согласованную задачу Коши:

$$U|_{t=0} = U^0(\xi) = A + \xi B, \quad V|_{t=0} = \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi} = B. \quad (32)$$

Относительно неизвестных U , V и $\partial U/\partial \xi$ система (29)–(31) превращается в параметрическую систему ОДУ по переменной t с параметром ξ из трех уравнений и трех неизвестных.

Рассмотрим расширенную систему уравнений. Для этого продифференцируем обе части уравнений (29)–(31) по переменной ξ . Имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \xi} = -U - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + (1 + \xi^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -U + \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + (1 + \xi^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}. \quad (35)$$

Выпишем соответствующую расширенную параметрическую систему уравнений ОДУ.

$$\frac{\partial Q_{U0}}{\partial t} = -\xi Q_{U0} + (1 + \xi^2) Q_{U1}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial Q_{V0}}{\partial t} = -Q_{U0} + \xi Q_{U1},$$

$$Q_{V0} = Q_{U1}.$$

$$\frac{\partial Q_{U1}}{\partial t} = -Q_{U0} + \xi Q_{U1} + (1 + \xi^2) Q_{U2},$$

$$\frac{\partial Q_{V1}}{\partial t} = \xi Q_{U2},$$

$$Q_{V1} = Q_{U2}. \quad (37)$$

Поставим для (36), (37) задачу Коши:

$$Q_{U0}|_{t=0} = U^0(\xi), \quad Q_{V0}|_{t=0} = Q_{U1}|_{t=0} = \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi}, \quad Q_{U2}|_{t=0} = Q_{V1}|_{t=0} = \frac{\partial^2 U^0(\xi)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (38)$$

Из (36), (37) следует, что

$$\frac{\partial M_{U0}}{\partial t} = -\xi M_{U0} + (1 + \xi^2) M_{U1}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial M_{V0}}{\partial t} = -M_{U0} + \xi M_{U1}, \quad (40)$$

$$M_{V0} = M_{U1}, \quad (41)$$

где $M_{U0} = Q_{U1} - \partial Q_{U0} / \partial \xi$, $M_{U1} = Q_{U2} - \partial Q_{U1} / \partial \xi$, $M_{V0} = Q_{V1} - \partial Q_{V0} / \partial \xi$. Очевидно, необходимое требование на систему (39)–(41) здесь выполняется.

Система ОДУ (36)–(37) линейная с постоянными коэффициентами. Решение задачи Коши (38) для системы (36)–(37) может быть найдено стандартным способом в явном виде и выглядит следующим образом:

$$Q_{U0} = U^0(\xi)(\cos t - \xi \sin t) + \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi}(1 + \xi^2) \sin t, \quad (42)$$

$$Q_{V0} = Q_{U1} = -U^0(\xi) \sin t + \frac{\partial U^0(\xi)}{\partial \xi}(\cos t + \xi \sin t), \quad (43)$$

$$Q_{V1} = Q_{U2} = 0. \quad (44)$$

Следовательно, решение задачи Коши (32) для системы уравнений (29)–(31) есть $U = Q_{U0}$, $V = Q_{V0}$. Тогда по формулам (28) находим, что

$$u = U - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} = A \cos t + B \sin t, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \xi} = -A \sin t + B \cos t. \quad (45)$$

Выражения (45) являются общим решением задачи Коши для системы (26) и (27).

3. Универсальный решатель систем ОДУ

Рассмотрим произвольную систему ОДУ вида

$$\frac{du}{dt} = H(u, t), \quad (46)$$

где $u = (u_1(t), u_2(t) \dots u_n(t))$, $H(u, t) = (H_1(u, t), \dots H_n(u, t))$ – некоторые аналитические функции своих аргументов. Зададим задачу Коши для уравнений (46):

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (47)$$

где $u_0 = (u_{01}, u_{02} \dots u_{0n}) \in \mathfrak{R}_{u_0}^n$.

Как известно, решение любой задачи Коши для ОДУ есть некоторая функция от начальных данных. Пусть решение ОДУ (46) с начальными данными (47) имеет вид

$$u = u(u_0, t). \quad (48)$$

Тогда систему (46) мы можем записать в виде

$$\frac{\partial u(u_0, t)}{\partial t} = H(u, t). \quad (49)$$

Систему уравнений (49) можно рассматривать как систему уравнений в частных производных для неизвестных функций (48), определенных в пространстве $\mathfrak{R}_{u_0, t}^{n+1}$, с задачей Коши (47). Согласно теореме Коши–Ковалевской эта задача имеет единственное решение. Если эту задачу можно решить аналитически или численно, то мы сразу выпишем общее решение системы ОДУ (46).

Предположим, что (48) можно преобразовать к виду

$$u_0 = u_0(u, t). \quad (50)$$

Тогда

$$0 = \frac{du_0}{dt} = \frac{du_0(u(u_0, t), t)}{dt} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{du}{dt} \frac{\partial u_0}{\partial u} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + H(u, t) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial u}. \quad (51)$$

Мы имеем систему УрЧП для неизвестных (50)

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + H(u, t) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial u} = 0, \quad (52)$$

где $u_0 = (u_{01}(u, t), u_{02}(u, t) \dots u_{0n}(u, t))$. Из (47) и (50) следует, что

$$u_0|_{t=0} = u, \quad (53)$$

где $u = (u_1, u_2 \dots u_n) \in \mathfrak{R}_u^n$. Согласно теореме Коши–Ковалевской задача (53) к системе УрЧП (52) имеет единственное решение. Решая данную задачу, также можно найти общее решение системы ОДУ (46), преобразовав ее решение (50) к виду (48).

Рассмотрим параметризованную систему ОДУ вида

$$\frac{du}{dt} = H(u, t, \alpha), \quad (54)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m) \in \mathfrak{R}_\alpha^m$ – параметры, а $u = (u_1(t, \alpha), u_2(t, \alpha) \dots u_n(t, \alpha))$,

$H(u, t, \alpha) = (H_1(u, t, \alpha), \dots H_n(u, t, \alpha))$ – некоторые аналитические функции своих аргументов.

Зададим задачу Коши для уравнений (54):

$$u|_{t=0} = u_0(\alpha), \quad (55)$$

где $u_0 = (u_{01}(\alpha), u_{02}(\alpha) \dots u_{0n}(\alpha))$ – аналитические функции своих аргументов.

Вместо (54) рассмотрим систему ОДУ

$$\frac{du}{dt} = H(u, t, \alpha), \quad (56)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad (57)$$

где $u = (u_1(t), u_2(t) \dots u_n(t))$, $\alpha = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \dots \alpha_m(t))$, $0 = (0, 0 \dots 0)$. Зададим начальные условия для уравнений (56), (57):

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \alpha|_{t=0} = \alpha_0, \quad (58)$$

где $u_0 = (u_{01}, u_{02} \dots u_{0n}) \in \mathfrak{R}_{u_0}^n$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02} \dots \alpha_{0m}) \in \mathfrak{R}_{\alpha_0}^m$. Согласно теореме Коши – Ковалевской задача (58) к системе (56), (57) имеет единственное решение. Пусть это решение (численное или аналитическое) имеет следующий вид:

$$u = F(u_0, \alpha_0, t), \quad \alpha = \alpha_0. \quad (59)$$

Тогда общее решение задачи (55) для уравнений (54) будет выписываться в виде:

$$u = F(u_0(\alpha), \alpha, t). \quad (60)$$

Вычислив один раз универсальный решатель (59), мы можем сразу составить по формуле (60) все решения задачи (55) для уравнений (54).

Таким образом, в случае удачной редукции переопределенной системы (7) к параметрической системе ОДУ вида (54) с задачей Коши (55) решение задачи Коши (8) к системе (7) в нашем случае будет некоторая функция от начальных данных (8) и их производных (19) (см. (60)). Чтобы найти решение любой соответствующей задачи Коши (8), достаточно один раз вычислить для системы УрЧП (7) универсальный решатель вида (60) (см. **Гипотеза 1**) и подставить туда начальные данные (19).

В работе [12] показано, что в случае предположения о дополнительной гладкости решений и их параметризации любая система УрЧП может быть преобразована к системе УрЧП стандартного вида, которая будет содержать все решения исходной системы УрЧП (см. **Приложение В**). Таким образом, достаточно найти универсальное переопределение и произвести редукцию только для таких специфических систем УрЧП (см. **Гипотеза 2**).

Заключение

В статье рассматривается возможность существования универсального решения задачи Коши у систем УрЧП, если эта система переопределяется так, что новая переопределенная система УрЧП содержит все решения исходной системы УрЧП и, кроме того, редуцируется методом сокращения размерности [6–8] до систем ОДУ. Для этого рассматривается уточнение метода редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений на случай редукции до систем ОДУ. Показывается, что задача Коши для исходной переопределенной системы УрЧП может быть решена, если решить параметризованную задачу Коши для системы ОДУ, получающуюся из исходной системы УрЧП. Но при этом эта задача вида (19) не может быть произвольной, поскольку в целом задается для переопределенной системы ОДУ (15) (см. **Пример 1**). При этом решение будет не только существовать и быть единственным, но и непрерывно зависеть от начальных данных (если такие можно задать), поскольку для систем ОДУ это доказано [11]. Если по каким-то причинам из (15) удастся найти не само решение, а только его производные, то тогда можно учесть и краевые условия. Помимо этого, это универсальное решение может быть чрезвычайно сложным из-за того, что необходимо решить систему ОДУ большого порядка, но тем не менее оно может представлять теоретический интерес. Для практических целей нужно или добиться получения его в явном виде (см. **Пример 1, Приложение А**) или найти новый экономичный способ его вычисления.

В статьях авторов [6–8] приводятся переопределенные уравнения гидродинамики. Несмотря на общность подхода, учитывающего начальные данные потока, из-за чрезвычайной сложности там не доказывается строго, что общих решений у них будет не более, чем счетно. Результаты данной статьи могут быть применены к ним в случае, если в результате расчетов окажется, что они имеют большой произвол в общих решениях.

Приложение А. Гипотеза о нахождении решений систем УрЧП

Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v = S_v(x)$, $v=1\dots p$, $x=(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{R}_x^m$

$$H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) = 0, \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p. \quad (61)$$

Здесь $H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right)$, $k=1\dots p$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\frac{\partial S_v}{\partial x}$, S_v , x , $v=1\dots p$. Обозначим $U_v^i = \frac{\partial S_v}{\partial x_i}$, $v=1\dots p$, $i=1\dots m$.

Тогда уравнения (61) можно записать в виде

$$H_k \left(U_1^1, \dots, U_v^i, \dots, U_p^m, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) = 0, \quad i=1\dots m, \quad v=1\dots p, \quad k=1\dots p. \quad (62)$$

Можно выписать следующие выражения:

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_m} = \frac{\partial^2 S_v}{\partial x_m \partial x_i} = \frac{\partial U_v^m}{\partial x_i}, \quad i=1\dots(m-1), \quad v=1\dots p, \quad (63)$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = U_v^m, \quad v = 1 \dots p. \quad (64)$$

Введем вспомогательную функцию вида (2) в форме

$$V(x, \xi) = \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^p A_v^i(x_1 \dots x_{m-1}, \xi) U_v^i + \sum_{v=1}^p B_v(x_1 \dots x_{m-1}, \xi) S_v. \quad (65)$$

Подберем коэффициенты $A_v^i(x_1 \dots x_{m-1}, \xi)$, $B_v(x_1 \dots x_{m-1}, \xi)$, $i = 1 \dots m$, $v = 1 \dots p$ так, чтобы U_v^i , S_v , $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$ выражались линейно по формуле (4) через функцию $V(x, \xi)$ и ее производные по ξ , и подставим их выражения в (63), (64). В результате получим переопределенную систему из mp линейных дифференциальных уравнений вида (6) от одной неизвестной функции $V(x, \xi)$. Обозначим W_V множество функций $V(x, \xi)$, получающееся при подстановке всех решений U_v^i , S_v , $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$ системы (62)–(64) в формулу (65). Если эту систему формально редуцировать нашим способом, изложенным в разделе 2, до системы ОДУ относительно переменной x_m , состоящей из достаточно большого числа уравнений и неизвестных, и решить аналитически [11], т. к. это будет линейная параметрическая система ОДУ с постоянными коэффициентами, то множество решений одной из ее неизвестных $V(x, \xi)$ будет содержать W_V . Тогда по формулам (4) можно выписать выражения для U_v^i , S_v , $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$. Это решение будет содержать некоторый произвол, который можно определить из дополнительных условий, поскольку U_v^i , S_v , $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$ связаны между собой еще p нелинейными соотношениями (62), а также из начальных условий Коши, которые можно поставить и для системы (62)–(64), и для этой системы ОДУ, пользуясь выражением (65).

Пусть система уравнений УрЧП (61) линейна и выражения (62) записываются линейно в виде:

$$H_k(U_1^1, \dots, U_v^i, \dots, U_p^m, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x) = \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^p W_{j,i}^k(x_1 \dots x_{m-1}) U_v^i + \sum_{v=1}^p Q_v^k(x_1 \dots x_{m-1}) S_v + L_k(x_1 \dots x_{m-1}) = 0, \quad (66)$$

$$v, k = 1 \dots p, \quad i = 1 \dots m,$$

где коэффициенты $W_{j,i}^k(x_1 \dots x_{m-1})$, $Q_v^k(x_1 \dots x_{m-1})$, $L_k(x_1 \dots x_{m-1})$, $i = 1 \dots m$, $v, k = 1 \dots p$ – достаточно гладкие функции, зависящие только от $(x_1 \dots x_{m-1})$. Тогда, если ввести аналогично функцию (65), выразить U_v^i , S_v , $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$ линейно по формуле (4) и подставить их выражения в (63), (64) и (66), то получим переопределенную систему из $(m+1)p!$ линейных дифференциальных уравнений вида (6) от одной неизвестной функции $V(x, \xi)$. Таким образом, мы учтем сразу все уравнения первоначальной системы уравнений. Если ее формально редуцировать предлагаемым способом (раздел 2) до системы ОДУ относительно переменной x_m , то это будет линейная параметрическая система ОДУ с постоянными коэффициентами. Из некоторых ее решений по формуле (4) можно найти решения U_v^i , S_v , $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$ системы (63), (64) и (66). Впрочем, это не гарантирует, что произвола в решениях этой системы ОДУ, которого нельзя определить из начальных данных Коши, все равно не останется.

В качестве примера рассмотрим автономную систему ОДУ нормального вида (46). Всякую систему ОДУ можно преобразовать к автономной. Тогда согласно результатам раздела 4 решение системы (46) сводится к нахождению решения линейного уравнения (52). Уравнение (52) можно преобразовать к системе уравнений вида (63), (64) и (66). Можно выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза 1. *Решение задачи Коши для любой системы ОДУ нормального вида можно найти в явном виде из решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров.*

Приложение В. Еще один способ унификации систем УрЧП первого порядка

В работе [12] был предложен достаточно общий способ преобразования к единообразному виду (унификации) систем УрЧП первого порядка путем их параметризации. Приведем еще один способ унификации. Не ограничивая общности, рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v = S_v(x)$, $v = 1 \dots p$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{R}_x^m$ вида [9]

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = F_v^m \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_k}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x_{m-1}}, S_1, \dots, S_k, \dots, S_p \right), \quad i = 1 \dots m-1, \quad v, k = 1 \dots p. \quad (67)$$

Здесь $F_k^m \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x_{m-1}}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p \right)$, $k = 1 \dots p$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов $\frac{\partial S_v}{\partial x_i}$, S_v , $i = 1 \dots m-1$, $v = 1 \dots p$. Обозначим $U_v^i = \frac{\partial S_v}{\partial x_i}$, $v = 1 \dots p$, $i = 1 \dots m$. Тогда уравнения (67) можно записать в виде

$$U_v^m = F_v^m \left(U_1^1, \dots, U_k^i, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_k, \dots, S_p \right), \quad i = 1 \dots m-1, \quad v, k = 1 \dots p. \quad (68)$$

Можно также выписать выражения (64), (65). Введем новые переменные (параметры) C_r , $r = 1 \dots m(p-1) + 1$ с помощью следующей задачи Коши к системе уравнений (64), (65), (68):

$$U_v^i \Big|_{x_m=0} = \frac{\partial S_v^0(x_1, \dots, x_{m-1}, C_r)}{\partial x_i}, \quad v = 1 \dots p, \quad i = 1 \dots m-1, \quad r = 1 \dots m(p-1) + 1, \quad (69)$$

$$S_v \Big|_{x_m=0} = S_v^0(x_1, \dots, x_{m-1}, C_r), \quad v = 1 \dots p, \quad r = 1 \dots m(p-1) + 1. \quad (70)$$

Наложим следующее условие

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial S_1^0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_v^0}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial S_p^0}{\partial x_{m-1}}, S_1^0, \dots, S_v^0, \dots, S_p^0 \right)}{\partial (x_1, \dots, x_{m-1}, C_r)} \neq 0, \quad v = 1 \dots p, \quad i = 1 \dots m-1, \quad r = 1 \dots m(p-1) + 1. \quad (71)$$

Сделаем в системе уравнений (64), (65), (68) замену переменных:

$$U_v^i = U_v^i(x_1, \dots, x_m, C_r), \quad v = 1 \dots p, \quad i = 1 \dots m-1, \quad r = 1 \dots m(p-1) + 1, \quad (72)$$

$$S_v = S_v(x_1, \dots, x_m, C_r), \quad v = 1 \dots p, \quad r = 1 \dots m(p-1) + 1, \quad (73)$$

$$\tilde{x}_m = x_m. \quad (74)$$

В силу условия (71) это можно локально сделать. Из соотношения (68) следует, что в новых переменных

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial \tilde{x}_m} = 0, \quad v = 1 \dots p. \quad (75)$$

Уравнения (64), (65) в новых переменных имеют вид:

$$\frac{\partial \left(U_v^i, x_1, \dots, x_{m-1}, C_r \right)}{\partial \left(U_v^i, U_1^1, \dots, U_v^{i-1}, U_v^{i+1}, \dots, U_{v-1}^i, U_{v+1}^i, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)} = \pm \frac{\partial \left(U_v^m, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m, C_r \right)}{\partial \left(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)}, \quad (76)$$

$$i = 1 \dots m-1, \quad v = 1 \dots p,$$

$$\frac{\partial \left(S_v, x_1, \dots, x_{m-1}, C_r \right)}{\partial \left(S_v, U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_{v-1}, S_{v+1}, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)} = U_v^m \frac{\partial \left(x_m, x_1, \dots, x_{m-1}, C_r \right)}{\partial \left(S_v, U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_{v-1}, S_{v+1}, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)}, \quad v = 1 \dots p. \quad (77)$$

Учитывая (74), мы имеем универсальную систему уравнений (75)–(77) от неизвестных функций вида: $x_1 \left(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)$, \dots , $x_{m-1} \left(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)$, $C_1 \left(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)$, \dots , $C_{m(p-1)+1} \left(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m \right)$ и

$U_1^m(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m), \dots, U_p^m(U_1^1, \dots, U_p^{m-1}, S_1, \dots, S_p, \tilde{x}_m)$ и не содержащую в своей записи никакого указания на исходную систему (67). Начальные данные для этой системы можно найти из (68)–(70). Решение исходной системы (64), (65), (68) находится по формулам (72)–(74).

Пример 2. Рассмотрим простое уравнение

$$\frac{dS}{dt} = F(S) \quad (78)$$

с параметрической задачей Коши $S|_{t=0} = S_0(C)$, $\partial S_0 / \partial C \neq 0$. Рассмотрим параметр C как дополнительную переменную у неизвестной функции S в уравнении (78). Сделаем замену переменных $S = S(C, t)$, $C = C(S, t)$, $t = t$. В новых переменных уравнение (78) имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial S} = 0, \quad (79)$$

где обозначено $U(S, t) = F(S)$. Очевидно,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (80)$$

Таким образом, мы имеем систему из двух **универсальных** уравнений (79), (80), которая содержит все решения уравнения (78). Формула (79) согласуется с формулой (52).

Система уравнений (75)–(77) достаточно специфична. Через свои начальные данные она позволяет находить решения широких классов систем УрЧП. Выдвинем следующую гипотезу:

Гипотеза 2. Система уравнений (75)–(77) переопределяется с помощью метода (1)–(6) и редуцируется до параметрической системы ОДУ, решая которую можно находить решения не только первоначальной системы уравнений (75)–(77), но и систем УрЧП, которых она обобщает через свои начальные данные.

Литература

1. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. – М.: Наука, 1980. – 478 с.
2. Sivashinsky, G.I. Nonlinear Analysis of Hydrodynamic Instability in Laminar Flames – I. Derivation of basic equations / G.I. Sivashinsky // Acta Astronautica. – 1977. – Vol. 4. – Iss. 11–12. – P. 1177–1206.
3. Ott, E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh–Taylor Instability of a Thin Layer / E. Ott // Phys. Rev. Lett. – 1972. – Vol. 29. – Iss. 21. – P. 1429–1432.
4. Bychkov, V. Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Density Drop at the Front / V. Bychkov, M. Zaytsev, V. Akkerman // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 68. – Iss. 2. – P. 026312–026324.
5. Joulin, G. On-Shell Description of Unsteady Flames / G. Joulin, H. El-Rabii, K. Kazakov // J. Fluid Mech. – 2008. – V. 608. – P. 217–242.
6. Аккерман, В.Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.
7. Зайцев, М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.
8. Зайцев, М.Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.
9. Курант, Р. Методы математической физики / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – Т. 2. – 830 с.
10. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
11. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – СПб.: «Лань», 2003. – 447 с.

12. Зайцев, М.Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 18–33.

Поступила в редакцию 2 августа 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 12–25*

DOI: 10.14529/mmph190402

HYPOTHESIS ON UNIFICATION OF SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR OVERDETERMINED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.L. Zaytsev¹, V.B. Akkerman²

¹ *Moscow, Russian Federation*

² *West Virginia University, Morgantown, USA*

E-mail: mlzaytsev@gmail.com

In this paper, we study the possibility of the existence of a universal solution of the Cauchy problem for the partial differential equation (PDE) systems in the case if this system is overdetermined so that the new overdetermined system of PDE contains all solutions of the initial PDE system and, in addition, reduces to the ordinary differential equation (ODE) systems, whose solution is then found. To do this, the article discusses the modification of the method of finding particular solutions for any overdetermined systems of differential equations by reduction to overdetermined systems of implicit equations. In the previous papers of the authors, a method was proposed for finding particular solutions for overdetermined PDE systems. In this method, in order to find solutions it is necessary to solve systems of ordinary implicit equations. In this case, it can be shown that the solutions that we need cannot depend on a continuous parameter, i.e. they are no more than countable. In advance, there is a need for such an overriding of the systems of differential equations, so that their general solutions are no more than countable. Such an initial overdetermination is rather difficult to achieve. However, the proposed method also allows to reduce the overdetermined systems of differential equations not only up to systems of implicit equations, but also up to the PDE systems of dimension less than that of the initial systems of PDE. In particular, under certain conditions, reduction to the ODE systems is possible. It is proposed to choose solutions for the overdetermined PDE systems using the parameterized Cauchy problem, which is posed for parameterized ODE systems under certain conditions. The solution of this Cauchy problem is some function of the initial data and their derivatives. In order to find the solution of any corresponding Cauchy problem for the initial system of PDE, it is sufficient to calculate the universal solver for the reduced ODE system once. In this case, the solution will not only exist and be unique, but will also depend continuously on the initial data, since this holds for ODE systems.

The purpose of this paper is to study the Cauchy problem with the possibility of its universalization and the parameterized Cauchy problem as a whole for arbitrary PDE systems.

Keywords: overdetermined systems of differential equations; partial differential equation; ordinary differential equations; dimension of differential equations; Cauchy problem; parametric solutions of the systems of differential equations.

References

1. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva* (The Mathematical Theory of Combustion and Explosion). Moscow, Nauka Publ., 1980, 478 p. (in Russ.).

2. Sivashinsky G.I. Nonlinear Analysis of Hydrodynamic Instability in Laminar Flames – I. Derivation of basic equations. *Acta Astronautica*, 1977, Vol. 4, Iss. 11–12, pp. 1177–1206. DOI: 10.1016/0094-5765(77)90096-0

3. Ott E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh–Taylor Instability of a Thin Layer. *Phys. Rev. Lett.* 1972, Vol. 29, Iss. 21., pp. 1429–1432. DOI: 10.1103/physrevlett.29.1429
4. Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V. Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Density Drop at the Front. *Phys. Rev. E.*, 2003, Vol. 68, Iss. 2, pp. 026312–026324. DOI: 10.1103/physreve.68.026312
5. Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. On-Shell Description of Unsteady Flames. *J. Fluid Mech.*, 2008, Vol. 608, pp. 217–242. DOI: 10.1017/S0022112008002140
6. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 8, pp. 1418–1430. DOI: 10.1134/S0965542511080021
7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Hypothesis on reduction of overdetermined systems of differential equations and its application to equations of hydrodynamics. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27. (in Russ.).
8. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics. *Science Journal of VolsU. Mathematics. Physics*, 2016, no. 6 (37), pp. 119–127. (in Russ.). DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11
9. Courant R. Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2. New York, London, Interscience Publ., 1962, 830 p. DOI: 10.1126/science.137.3527.334
10. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).
11. Fedoryuk M.V. *Obyknoennyye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations). SPb.: Lan' Publ., 2003, 447 p. (in Russ.).
12. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Transformation of Systems of Partial Differential Equations to Systems of Quasilinear and Linear Differential Equations. Their Reduction and Unification. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, Vol. 21, Iss. 1, pp. 18–33. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3

Received August 2, 2019

OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS TO THE INITIAL-FINAL PROBLEM FOR THE MODEL OF LINEAR WAVES IN A PLASMA

A.A. Zamyshlyayeva, O.N. Tsyplenkova

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: zamyshlyayeva@susu.ru

The optimal control problem for a Sobolev type equation of higher order with a relatively polynomially bounded operator pencil is investigated in the paper. The results are applied to the study of the optimal control of solutions to the initial-final problem for the model of linear waves in plasma. The first results on the investigation of equation that describes the linear ion-acoustic waves in an unmagnetized plasma and on the study of some properties of these waves were obtained by Yu.D. Pletner. The initial-final conditions posed for the fourth-order Sobolev type equation are the generalization of the conditions in the Cauchy problem that is unsolvable at the arbitrary initial values. The research is based on the phase space method developed by G.A. Sviridiuk and the theory of relatively polynomially bounded operator pencil developed by A.A. Zamyshlyayeva. The article considers an equation that describes ion-acoustic waves in a plasma in an external magnetic field.

Keywords: Sobolev type equations of higher order with a relatively polynomially bounded operator pencil; model of linear waves in a plasma; optimal control problem; initial-final conditions.

Introduction

Let $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^3$. The article investigates the optimal control of solutions to the following problem:

$$(\lambda - \Delta)x_{tttt}(s, t) = (\Delta - \lambda')x_{tt}(s, t) + \alpha \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial s_3^2} + u(s, t), \quad s \in \Omega, t \in (0, \tau), \quad (1)$$

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau). \quad (2)$$

Model (1), (2) describes ion-acoustic waves in plasma in an external magnetic field [1]. The parameters in equation (1) relate such physical quantities as the ionic hydro frequency, the Langmuir frequency, and the Debye radius. The function $x(s, t)$ represents the generalized potential of an electric field, the function $u(s, t)$ represents an external effect.

Problem (1), (2) is investigated in the framework of the theory of relatively polynomially bounded pencils of operators [2]. Consider a high-order abstract Sobolev type equation

$$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + B_0x + y + Cu, \quad (3)$$

where the operators $A, B_{n-1}, \dots, B_0 \in L(X; Y)$, $C \in L(U; Y)$, the functions $u: [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow U$, $y: [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$ ($\tau < \infty$), X, Y, U are Hilbert spaces.

Supplement equation (3) with initial-final conditions [3]

$$\begin{aligned} P_{in} \left(x^{(k)}(0) - x_k^0 \right) &= 0, \\ P_{fn} \left(x^{(k)}(\tau) - x_k^\tau \right) &= 0, \end{aligned} \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (4)$$

where $P_{in(fin)}$ are some projectors in space X . Thus, the optimal control problem is to find a pair (\hat{x}, \hat{u}) , where \hat{x} is a solution of (1), (2), and $\hat{u} \in U_{ad}$ is the control for which the relation

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x, u) \in X \times U_{ad}} J(x, u) \quad (5)$$

holds.

Here $J(x, u)$ is some specially constructed penalty functional, and U_{ad} is a closed convex set in the space of controls U .

Many non-classical models of mathematical physics [4–9] are based on Sobolev type equations. For example, they occur in problems of hydromechanics, plasma physics, atmospheric physics, filtration theory, theory of electrical circuits, and others. In the work, to find the optimal control of solutions to linear Sobolev type equations of high-order, the ideas and methods obtained by G.A. Sviridyuk [10] and his students [11–13] in the study of first-order Sobolev type equations are used. Here the initial-final problem [14] is investigated. A distinctive feature of this problem is that one projection of the solution is specified at the initial moment of time, and the other at the final point. The initial-final problem for the first-order Sobolev type equations was considered by G.A. Sviridyuk and S.A. Zagrebina.

1. Polynomially A -bounded operator pencils and projectors. Strong solutions

By \vec{B} denote the pencil formed by operators B_{n-1}, \dots, B_0 . The sets $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in C : (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in L(Y; X)\}$ and $\sigma^A(\vec{B}) = C \setminus \rho^A(\vec{B})$ are called an A -resolvent set and an A -spectrum of pencil \vec{B} , respectively. The operator function $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ of a complex variable with domain $\rho^A(\vec{B})$ is called an A -resolvent of pencil \vec{B} .

Let the pencil be \vec{B} polynomially A -bounded. Introduce an additional condition [15]

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \quad (6)$$

where γ is a contour that bounds the domain containing the relative spectrum of the pencil \vec{B} . Then the operators

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) \mu^{n-1} A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu^{n-1} A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu$$

are projectors in spaces X and Y . Denote $X^0 = \ker P$, $Y^0 = \ker Q$, $X^1 = \text{im} P$ and $Y^1 = \text{im} Q$. If the pencil of operators is polynomially A -bounded, ∞ is a pole of order $p \in \{0\} \cup N$ of the A -resolvent of pencil \vec{B} , then the pencil of operators \vec{B} is called (A, p) -bounded.

Let the pencil \vec{B} be polynomially A -bounded, (6) hold and the following conditions be satisfied:

$$\sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \cup \sigma_1^A(\vec{B}), \sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset, k = \overline{0, 1},$$

and there is a circuit $\gamma_0 \subset C$,

bounding the domain $\Gamma_0 \subset C$ such, that

$$\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}), \overline{\Gamma_0} \cap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset.$$

$$\int_{\gamma_0} \mu^m R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv 0, m = \overline{0, n-2}. \quad (8)$$

Operators

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu \in L(X)$$

and $P_{in} = P - P_{fin} \in L(X)$ are projectors in space X [15].

Definition 1. The vector-function $x \in H^n(X) = \{x \in L_2(0, \tau; X) : x^{(n)} \in L_2(0, \tau; X)\}$ is called a strong solution of linear non homogeneous Sobolev type equation

$$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + B_0x + y, \quad (9)$$

if it turns the equation to an identity almost everywhere on interval $(0, \tau)$. A strong solution $x = x(t)$ of (9) is called a strong solution to (4), (9), if (4) holds.

Theorem 1. If the pencil \vec{B} is (A, p) -bounded, $p \in \{0\} \cup N$, conditions (6)–(8) are satisfied, then for arbitrary $x_k^0, x_k^\tau \in X, k = \overline{0, n-1}$ and $y \in H^{p+n}(Y)$ there exists a unique strong solution to (4) for equation (9).

2. Optimal control for the model of linear waves in plazma

Consider problem (4) for equation (3), where the functions x, y, u lie in X, Y and U , respectively.

Introduce the control space

$$H^{\circ, p+n}(U) = \{u \in L_2(0, \tau; U) : u^{(p+n)} \in L_2(0, \tau; U), u^{(q)}(0) = 0, q = \overline{0, p}\},$$

$p \in \{0\} \cup N$. It is a Hilbert space with inner product

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+n} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_U dt.$$

In the space $H^{\circ, p+n}(U)$ single out a closed convex subset U_{ad} . A vector function $\hat{u} \in U_{ad}$ is called an optimal control of solutions to (3), (4), if (5) holds.

Let us prove the existence of optimal control $\hat{u} \in U_{ad}$, minimizing penalty functional

$$J(x, u) = \mu \sum_{q=0}^n \int_0^\tau \|x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}\|^2 dt + \nu \sum_{q=0}^{p+n} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle_U dt. \tag{10}$$

Here $\mu, \nu > 0, \mu + \nu = 1, N_q \in L(U), q = 0, 1, \dots, p+n$, are self-adjoint positively defined operators, and $\tilde{x}(t)$ is the target state of the system.

Theorem 2. If the pencil \bar{B} is polynomially A -bounded, conditions (6)–(8) are satisfied, then for arbitrary $x_k^0, x_k^\tau \in X, k = \overline{0, n-1}$ and $y \in H^{p+n}(Y)$ there exists a unique optimal control of solutions to problem (3), (4).

Reducing problem (1), (2) to equation (3) put

$$X = \{x \in W_2^{l+2}(\Omega) : x(s) = 0, s \in \partial\Omega\}, \quad Y = W_2^l(\Omega),$$

where $W_2^l(\Omega)$ are Sobolev spaces. Define the operators $A = \lambda - \Delta, B_2 = \Delta - \lambda', B_0 = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$

$B_3 = B_1 = O$. Operators $A, B_3, B_2, B_1, B_0 \in L(X; Y)$ for all $l \in \{0\} \cup N$.

Denote by $\varphi_{ijk} = \left\{ \sin \frac{\pi i s_1}{a} \sin \frac{\pi j s_2}{b} \sin \frac{\pi k s_3}{c} \right\}$ the eigenfunctions of the Dirichlet problem for the Laplace operator, where $i, j, k \in N$, and the corresponding eigenvalues are denoted by

$$\lambda_{ijk} = -\sqrt{\left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}.$$

Since $\{\varphi_{ijk}\} \subset C^\infty(\Omega)$, then we get

$$\mu^4 A - \mu^3 B_3 - \mu^2 B_2 - \mu B_1 - B_0 = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \left[(\lambda - \lambda_{ijk}) \mu^4 + (\lambda' - \lambda_{ijk}) \mu^2 - \alpha \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2 \right] \langle \varphi_{ijk}, \cdot \rangle \varphi_{ijk},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is an inner product in $L^2(\Omega)$.

Lemma 1. [15] Let one of the following conditions be satisfied:

- (i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$;
- (ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$.

Then the pencil \bar{B} is polynomially $(A, 0)$ -bounded, and conditions (6) are fulfilled.

The A -spectrum of the pencil \bar{B} consists of solutions $\mu_{ijk}^l, l = \overline{1, 4}$ of equation

$$(\lambda_{ijk} - \lambda) \mu^4 + (\lambda_{ijk} - \lambda') \mu^2 - \alpha \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2 = 0. \tag{11}$$

Construct the projector

$$P = \begin{cases} I, & \text{if (i) holds,} \\ I - \sum_{\lambda_{ijk} = \lambda} \langle \cdot, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk}, & \text{if (ii) holds.} \end{cases}$$

To construct the projector P_{fin} choose a domain $\Gamma_0 \subset C$, containing, for example, a finite set $\sigma_0^A(\bar{B})$ of points μ_{ijk}^l of the A -spectrum of the pencil \bar{B} and such that $\partial\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\bar{B}) = \emptyset$. As it is easy to see, the domain Γ_0 can be chosen such that $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ is a contour. Thus, condition (7) is satisfied.

Consider the initial-final problem

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\bar{B})} \langle x(\cdot, 0) - x_0^0, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\bar{B})} \langle x_t(\cdot, 0) - x_1^0, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\bar{B})} \langle x_{tt}(\cdot, 0) - x_2^0, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_1^A(\bar{B})} \langle x_{ttt}(\cdot, 0) - x_3^0, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\bar{B})} \langle x(\cdot, \tau) - x_0^\tau, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\bar{B})} \langle x_t(\cdot, \tau) - x_1^\tau, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\bar{B})} \langle x_{tt}(\cdot, \tau) - x_2^\tau, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \\ \sum_{\lambda_{ijk} \neq \lambda, \mu_{ijk}^l \in \sigma_0^A(\bar{B})} \langle x_{ttt}(\cdot, \tau) - x_3^\tau, \varphi_{ijk} \rangle \varphi_{ijk} &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

for equation (1) with boundary conditions (2).

Theorem 3. For any $\alpha \in R$ and $\lambda \in R$ such that the conditions of Lemma 1 are fulfilled, and for any $\tau \in R_+, x_k^0, x_k^\tau \in X, k = \overline{0,3}$, there exists a unique solution to the optimal control problem for equation (1) with conditions (2), (12) that minimizes functional (10).

References

1. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear the Sobolev Type Equations). Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007, 736 p. (in Russ.).
2. Zamyshlyayeva A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University, Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140201
3. Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A., Manakova N.A. Optimal Control of Solutions of a Multipoint Initial-Finish Problem for Non-Autonomous Evolutionary Sobolev Type Equation. *Evolution equations and control theory*, 2019, Vol. 8, no. 3, pp. 473–488. DOI: 10.3934/eect.2019023
4. Manakova N.A., Bogatyreva E.A. Mathematical Model of the Start Control of Electric Field Potential in Conducting Medium without Dispersion Considering Relaxation. *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, Chelyabinsk, 2016, pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911711
5. Zamyshlyayeva A.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control of Solutions to the Showalter–Sidorov Problem in a Model of Linear Waves in Plazma. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2018, Vol. 5, no. 4, pp. 46–57. DOI: 10.14529/jcem180404

6. Bogatyreva E.A., Manakova N.A. Numerical Simulation of the Process of Nonequilibrium Counterflow Capillary Imbibition. *Computational mathematics and mathematical physics*, 2016, Vol. 56, no. 1, pp. 132–139. DOI: 10.1134/S0965542516010085
7. Keller A.V., Ebel A.A. Parallelization of Numerical Algorithm for Optimum Dynamic Measurement Problem Solution. *Proc. 2nd International Ural Conference on Measurements (UralCon), Chelyabinsk, 2017*, pp. 372–377. DOI: 10.1109/URALCON.2017.8120738
8. Zakirova G.A. Inverse Spectral Problems and Mathematical Models of Continuum Mechanics. *Bulletin of the South Ural State University, Series “Mathematical Modelling, Programming & Computer Software”*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 5–24. DOI: 10.14529/mmp190201
9. Shafranov D.E., Kitaeva O.G. The Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive “white noise” in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, Vol. 5, no. 2, pp. 139–152.
10. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, VSP, Utrecht–Boston–Köln–Tokyo, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501
11. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p -Radial Operator. *Semigroup of operators – theory and applications*, 2015, pp. 213–224. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_13
12. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relatively p -Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, Vol. 31, no. 11, p. 1882–1890.
13. Zamyshlyeva A.A., Tsyplenkova O.N., Bychkov E.V. Optimal Control of Solutions to the Showalter–Sidorov Problem for the Sobolev type Equation of Higher Order. *Proc. 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), Chelyabinsk, 2016*, pp. 1–4. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911725
14. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, p. 128.
15. Zamyshlyeva A.A. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* (Linear Sobolev Type Equations of Higher Order). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012, 88 p. (in Russ.).

Received October 5, 2019

*Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2019, vol. 11, no. 4, pp. 26–31*

УДК 517.9

DOI: 10.14529/mmph190403

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: zamyshliaeva@susu.ru*

В работе исследована задача оптимального управления для уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов. Результаты применены к исследованию оптимального управления решениями начально-конечной задачи для модели линейных волн в плазме. Первые результаты по уравнению, которое описывает линейные ионно-звуковые волны в немагнитной плазме, и изучению некоторых свойств этих волн были получены Ю.Д. Плетнером. Начально-конечные условия, поставленные для уравнения соболевского типа четвертого порядка, являются обобщением условий в задаче Коши, которые неразрешимы при произвольных начальных значениях. Работа основывается на методе фазового про-

странства, разработанного Г.А. Свиридюком, и теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов, разработанной А.А. Замышляевой. В статье рассмотрено уравнение, которое описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов; модель линейных волн в плазме; оптимальное управление; начально-конечные условия.

Литература

1. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
2. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.
3. Sagadeeva, M.A. Optimal Control of Solutions of a Multipoint Initial-Finish Problem for Non-Autonomous Evolutionary Sobolev Type Equation / M.A. Sagadeeva, S.A. Zagrebina, N.A. Manakova // Evolution Equations and Control Theory. – 2019. – Vol. 8, № 3. – P. 473–488.
4. Manakova, N.A. Mathematical Model of the Start Control of Electric Field Potential in Conducting Medium without Dispersion Considering Relaxation / N.A. Manakova, E.A. Bogatyreva // 2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – Chelyabinsk, 2016. – P. 1–5.
5. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal Control of Solutions to the Showalter–Sidorov Problem in a Model of Linear Waves in Plasma / A.A. Zamyshlyayeva, O.N. Tsyplenkova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2018. – Vol. 5, № 4. – P. 46–57.
6. Богатырева, Е.А. Численное моделирование процесса неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Е.А. Богатырева, Н.А. Манакова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 1. – С. 125–132.
7. Keller, A.V. Parallelization of Numerical Algorithm for Optimum Dynamic Measurement Problem Solution / A.V. Keller, A.A. Ebel // Proc. 2nd International Ural Conference on Measurements. – 2017. – p. 372–377.
8. Zakirova, G.A. Inverse Spectral Problems and Mathematical Models of Continuum Mechanics / G.A. Zakirova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 5–24.
9. Shafranov, D.E. The Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive «white noise» in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary / D.E. Shafranov, O.G. Kitaeva // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, no. 2. – С. 139–152.
10. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
11. Manakova, N.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p -Radial Operator / N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Semigroup of Operators – Theory and Applications. – 2015. – P. 213–224.
12. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
13. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal Control of Solutions to the Showalter–Sidorov Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order / A.A. Zamyshlyayeva, O.N. Tsyplenkova, E.V. Bychkov // Proc. 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016. – 2016. – P. 1–4.
14. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018. – P. 128.
15. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

Поступила в редакцию 5 октября 2019 г.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

А.В. Панюков, Я.А. Мезал

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: paniukovav@susu.ru

Идентификация квазилинейного разностного уравнения сводится к задаче регрессионного анализа с взаимно зависимыми наблюдаемыми переменными. Это делает неэффективными классические схемы решения, основанные на методе наименьших квадратов и его вариациях. Нахождение оценок коэффициентов уравнения авторегрессии существенно осложняется плохой обусловленностью системы уравнений, представляющих собой необходимые условия минимума суммы квадратов отклонений. При этом оценки параметров задачи оказываются несостоятельными. Для решения подобных задач возможно применение обобщённого метода наименьших модулей (ОМНМ), сводимого к решению последовательности задач оценки коэффициентов уравнения регрессии по взвешенному методу наименьших модулей (ВМНМ). В статье предложен алгоритм решения задачи ВМНМ-оценивания, на основе ее сведения к задаче линейного программирования (ЛП) простой структуры. Простота структуры допустимого множества используемой задачи ЛП: пересечение линейного подпространства с параллелепипедом, – позволяет предложить эффективный алгоритм ее решения, основанный на методе проекции градиента. Алгебраическая вычислительная сложность предложенного алгоритма не превосходит величины $O(N^2M^2)$, где N – количество коэффициентов в исследуемом уравнении, M – количество наблюдаемых значений. Данная оценка вычислительной сложности ВМНМ является наилучшей из известных.

Ключевые слова: метод наименьших модулей; модель авторегрессии; линейное программирование; метод проекции градиента; вычислительная сложность.

Введение

Проблема идентификации является в настоящее время одной из основных проблем системного анализа и его приложений в различных областях [1]. При идентификации предполагается экспериментальное изучение и сопоставление входных и выходных процессов, а задача идентификации состоит в выборе соответствующей математической модели. Модель должна быть такой, что ее реакция и реакция объекта на один и тот же входной сигнал должны быть, в известном смысле, близкими. Поиск модели, как правило, ведется в параметризованных классах, полученных «на основе физических закономерностей и представлений о процессах». Одним из таких классов является класс квазилинейных разностных уравнений. В качестве примеров можно привести:

- модели делового цикла [2]:

$$Y_t - Y_{t-1} = u_t + s(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3,$$

где Y_t – доход в момент времени t , u_t – налоги (экзогенная переменная), v, s – параметры модели;

- модели оценки влияния различных факторов рыночной среды на процессы переноса (трансфера) и освоения инновационных (в том числе информационных) технологий [3]:

$$\frac{dy}{dt} = u(t) + ay(t) + by^2,$$

где $y(t)$ – объём распространения инновации к моменту t ; экзогенная функция $u(t)$ и параметры a, b модели отражают суммарное число потенциальных потребителей инновационного продукта на рынке, степень внешних (влияние СМИ, рекламы, публикаций) и внутренних воздействий (непосредственное общение людей) на скорость адаптации;

- и др. [4].

Как правило, все подобные модели имеют параметры, являющиеся коэффициентами систем интегро-дифференциальных уравнений. В данном случае исходная проблема идентификации может быть сведена к задаче идентификации коэффициентов разностного уравнения, т. е. к оценке их значений по наблюдаемым возмущенным траекториям. Такой подход правомерен при наличии большого объема априорной информации об искомым параметрах и при несоответствии реальных параметров принятой модели приводит к потере сходимости алгоритма.

В данной работе показано, что идентификация квазилинейного разностного уравнения сводится к задаче регрессионного анализа с взаимно зависимыми наблюдаемыми переменными. В первом разделе задача идентификации квазилинейного уравнения представлена в виде задачи ОМНМ-оценивания [5, 6], которая в соответствии с [7] может быть решена с помощью решения последовательности задач ВМНМ-оценивания, представляющих задачи кусочно-линейного программирования. В третьем разделе подробно рассмотрена задача ВМНМ-оценивания. Показано, что ее решение сводится к задаче линейного программирования (ЛП) простой структуры. Простота структуры допустимого множества используемой задачи ЛП: пересечение линейного подпространства с параллелепипедом, – позволяет предложить эффективный алгоритм ее решения, основанный на методе проекции градиента [8, 9]. Описание алгоритма и доказательство его результативности приведено в разделе 4.

Постановка задачи

Пусть $\{y_t \in \mathbb{R}\}_{t=-m+1}^M$ – значения переменных состояния (т. е. эндогенных переменных) в моменты времени $t \in M$. Пусть $\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn} \in \mathbb{R}\}_{t=1}^M$ – значения переменных управления (т. е. экзогенных переменных) в моменты времени $t \in M$. Пусть $g_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, j=1, 2, \dots, m$ – заданные функции, $\{\varepsilon_t \in \mathbb{R}\}_{t=1}^M$ – случайные ошибки. В статье рассматривается проблема определения неизвестных коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \in \mathbb{R}, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ квазилинейной модели авторегрессии

$$y_t = \sum_{j=1}^m a_j g_j \{y_{t-k}\}_{k=1}^m + \sum_{j=1}^n b_j x_{tj} + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

Введем новые обозначения с целью уменьшения громоздкости математических выражений

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad X_t = \begin{bmatrix} g_1 \{y_{t-k}\}_{k=1}^m \\ g_2 \{y_{t-k}\}_{k=1}^m \\ \dots \\ g_m \{y_{t-k}\}_{k=1}^m \\ x_{1t} \\ x_{2t} \\ \dots \\ x_{nt} \end{bmatrix}; \quad t=1, 2, \dots, M; \quad N = n + m.$$

В новых терминах задача (1) примет вид

$$y_t = A^T X_t + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

Наиболее известным методом определения коэффициентов уравнения регрессии является метод наименьших квадратов (МНК)

$$A^* = \arg \min_{A \in \mathbb{R}^N} \sum_{t=1}^T (A^T X_t - y_t)^2, \quad (3)$$

который является параметрическим методом, требующим выполнения ряда строгих ограничений: детерминированности переменных, независимости и нормальности распределения погрешностей измерений [10–12]. Даже незначительные нарушения этих предпосылок резко снижают эффективность оценок МНК [13, 14].

Если допустить погрешности в измеренных значениях эндогенных переменных $y_t, t=1, 2, \dots, T$, то их наличие в значениях функций $g_j \{y_{t-k}\}_{k=1}^m$ очевидно. Кроме того, эти

ошибки будут взаимно коррелированы и иметь распределения вероятностей, отличные от нормального распределения. Это делает неэффективными классические схемы решения, основанные на методе наименьших квадратов и его вариациях.

Нахождение оценок коэффициентов уравнения авторегрессии существенно осложняется плохой обусловленностью системы уравнений, представляющих собой необходимые условия минимума суммы квадратов отклонений, при этом оценки становятся несостоятельными.

Альтернативой МНК является метод наименьших модулей (МНМ) [15, 16].

$$A^* = \arg \min_{A \in \mathbb{R}^N} \sum_{t=1}^M |A^T X_t - y_t|. \quad (4)$$

Возможными обобщениями МНМ являются взвешенный МНМ (ВМНМ)

$$A^* = \arg \min_{A \in \mathbb{R}^N} \sum_{t=1}^M (p_t |A^T X_t - y_t|), \quad p_t \in \mathbb{R}, \quad t = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

и обобщенный МНМ (ОМНМ)

$$A^* = \arg \min_{A \in \mathbb{R}^N} \sum_{t=1}^M \rho(|A^T X_t - y_t|), \quad (6)$$

где $\rho(\cdot)$ – выпуклая вверх дифференцируемая функция.

Основной проблемой при применении ВМНМ является отсутствие общих формальных правил выбора весовых коэффициентов. Идентификация квазилинейного уравнения (1) авторегрессии возможна применением ОМНМ с использованием установленной связи между ОМНМ- и ВМНМ-моделями [7], позволяющей решить проблему определения ОМНМ-оценок посредством итеративной процедуры ОМНМ-оценивания с ВМНМ-оценками [5, 6].

Проблема ВМНМ оценивания

Алгоритм ВМНМ-оценивания для задачи (5) приводит к решению задачи кусочно-линейного программирования

$$\sum_{i=1}^M p_i |A^T X_i - y_i| \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^N}, \quad (7)$$

для заданных $X_i \in \mathbb{R}^N$, $y_i, p_i \in \mathbb{R}$, $t = 1, 2, \dots, M$. Задача (7) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\sum_{t=1}^M p_t z_t \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}^M}, \quad (8)$$

$$A^T X_t + z_t \geq y_t, \quad t = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

$$-A^T X_t + z_t \geq -y_t, \quad t = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

Двойственной задаче (8)–(10) является задача

$$\sum_{t=1}^M (u_t - v_t) y_t \rightarrow \max_{u, v \in \mathbb{R}^M}, \quad (11)$$

$$\sum_{i=t}^M X_{ij} (u_i - v_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

$$u_i + v_i = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (13)$$

$$u_i, v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (14)$$

Введем переменные $w_t = u_t - v_t$, $t = 1, 2, \dots, M$. Из условий (13)–(14) следует

$$u_t = \frac{p_t + w_t}{2}, \quad v_t = \frac{p_t - w_t}{2}, \quad t = 1, 2, \dots, M.$$

$$-p_t \leq w_t \leq p_t, \quad t = 1, 2, \dots, M.$$

Поэтому оптимальное значение задачи (11)–(14) равно оптимальному значению задачи

$$\sum_{t=1}^M w_t \cdot y_t \rightarrow \max_{w \in \mathbb{R}^M}, \quad (15)$$

$$\sum_{t=1}^M X_{ij} w_t = 0, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (16)$$

$$-p_t \leq w_t \leq p_t, \quad t=1,2,\dots,M. \quad (17)$$

Если w^* является оптимальным решением задачи (15)–(17), то оптимальное решение задачи (11)–(14) равно

$$u_t^* = \frac{p_t + w_t^*}{2}, \quad v_t^* = \frac{p_t - w_t^*}{2}, \quad t=1,2,\dots,M.$$

Из условия комплементарности для пары взаимно двойственных задач (8)–(10) и (11)–(14) следует

$$(A^*)^T X_t = y_t, \quad t: -p_t < w_t^* < p_t, \quad (18)$$

$$z_t^* = \begin{cases} 0, & \text{если } |w_t^*| < p_t, \\ w_t^* (y_t - (A^*)^T X_t), & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad t=1,2,\dots,M. \quad (19)$$

Фактически (A^*, z^*) является оптимальным двойственным решением задачи (15)–(17).

Повышение эффективности алгоритма ВМНМ-оценивания

Известен точный алгоритм МНМ-оценивания [17]. Этот алгоритм имеет вычислительную сложность $O(M^2 N^2 + M^4 N \log N + M^2 N \log^2 N)$. Кусочно-линейная форма целевой функции и простая структура допустимого множества задачи (15)–(17) дает основание полагаться на возможность ее более эффективного решения задачи. Решения таких задач, как (15)–(17), возможны с помощью алгоритма, основанного на методе проекции градиента [8, 9]. В рассматриваемом здесь случае, благодаря простоте структуры допустимого множества, вычислительная сложность алгоритма не превышает величины $O(M^2 N^2)$.

Алгоритм PrGrad

Вход: $X \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $p \in (\mathbb{R}^+)^M$, $y \in \mathbb{R}^M$.

Выход: $w^* = \arg \max_{w \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^M w_i \cdot y_i$.

Шаг 1. /* Инициализация */

Шаг 1.1. $k=0$ /* Счетчик итераций */

Шаг 1.2. $w^{(0)} = \{w_i^{(0)} = 0\}_{i=1,2,\dots,M}$ /* Координаты начальной точки */

Шаг 2. /* Текущая итерация k */

Шаг 2.1. Вычислить набор индексов ненасыщенных переменных:

$$S^{(k)} = \{i: -p_i < w_i^{(k)} < p_i, i=1,2,\dots,M\}.$$

Шаг 2.2. Вычислить подматрицы ненасыщенных переменных:

$$X^{(k)} = \{X_{ji} : i \in S^{(k)}, j=1,2,\dots,N\}, \quad y^{(k)} = \{y_i; i \in S^{(k)}\}.$$

Шаг 2.3. Вычислить матрицу проектирования

$$P^{(k)} = E - X^{(k)T} [X^{(k)} X^{(k)T}]^{-1} X^{(k)}$$

и проекцию градиента целевой функции $g^{(k)} = P^{(k)} y^{(k)}$.

Шаг 2.4. Проверить необходимое и достаточное условие максимума:

если $g^{(k)} = 0$, то перейти на Шаг 3.

Шаг 2.5. Вычислить максимально допустимую длину шага в направлении $g^{(k)}$:

$$\alpha_* = \arg \max_{\alpha} \{ \alpha: -p_i \leq w_i^{(k)} + \alpha g_i^{(k)} \leq p_i, i \in S^{(k)} \}.$$

Шаг 2.6. Вычислить следующую точку

$$w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)} + \alpha_* g_i^{(k)}, \quad i \in S^{(k)}.$$

Шаг 2.7. Положить $k=k+1$ и перейти на Шаг 2.1.

Шаг 3. Завершение алгоритма: $w^* = w^{(k)}$.

Конец описания алгоритма PrGrad

Теорема. Алгоритм **PrGrad** корректно решает проблему (15)–(17). Его вычислительная сложность не превышает величины $O(M^2N^2)$.

Доказательство. Каждая k -я итерация алгоритма состоит из допустимого перемещения из текущей точки $w^{(k)}$ в следующую точку $w^{(k+1)}$ (см. Шаг 2.6) в направлении проекции $g^{(k)}$ градиента у целевой функции (15) на пересечение множества решений системы уравнений (16) и множества решения системы активных ограничений из (17), которые могут быть определены множеством $r^{(k)} = \{I : |W_i^{(k)}| = p_i\}$ насыщенных переменных.

Более того, если выполнено необходимое условие для экстремума, т. е. из $g^{(k)} = 0$, то для всех $i \in R^{(k)}$ выполняются условия $w_i^{(k)} y_i \geq 0$. Поэтому градиент u не может быть представлен как неотрицательная линейная комбинация градиентов (т. е. внутренних нормалей) активных ограничений. Поэтому в нашем случае в соответствии с теоремой Куна–Такера необходимое условие экстремума также является достаточным, и тело шага 2 будет выполнено не более чем N раз.

Вычислительная сложность шагов 2.1, 2.4–2.6 не превышает величины $O(M)$.

Матрица $X^{(k)}$ имеет N строк и не более M столбцов. Поэтому вычислительная сложность шага 2.2 не будет превышать $O(MN)$.

Опишем более подробно оценку вычислительной сложности шага 2.3. Вычислительная сложность умножения $(N \times M)$ -матрицы на $(M \times N)$ -матрицу, т. е. вычисление матрицы в квадратных скобках, не превышает величины $O(MN^2)$. Сложность полученной обратной $(N \times N)$ -матрицы не превышает значения $O(N^3)$.

Вычислительная сложность умножения $(M \times N)$ -матрицы на $(N \times N)$ -матрицу не превышает $O(MN^2)$. Вычислительная сложность умножения $(M \times N)$ -матрицы на $(N \times M)$ -матрицу также не превышает значения $O(MN^2)$.

Таким образом, вычислительная сложность тела цикла не превышает $O(MN^2 + N^3)$, а вычислительная сложность алгоритма не превышает $O(M^2N^2)$, поскольку $M > N$.

Теорема доказана.

Заключение

Идентификация квазилинейного уравнения (1) авторегрессии порядка m , имеющего n экзогенных переменных, по M отсчетам траектории возможна применением ОМНМ на основе связи между ОМНМ- и ВМНМ-моделями, позволяющей решить проблему определения ОМНМ-оценок посредством итеративной процедуры ОМНМ-оценивания с ВМНМ-оценками. При этом задача ВМНМ-оценивания представляет задачу линейного программирования, содержащую $N = n + m$ переменных и $2M$ ограничений. С помощью предложенного алгоритма **PrGrad** данная задача решается за время не превосходящее $O(M^2N^2)$.

Литература

1. Райбман, Н.С. Что такое идентификация? / Н.С. Райбман. – М.: Наука, 1970. – 119 с.
2. Gabisch, G. Business Cycle Theory / G. Gabisch, H.W. Lorenz. – Springer-Verlag, 1989. – 250 p.
3. Davies, S. Inter-Firm Diffusion of Process Innovations / S. Davies // European Economic Review. – 1979. – Vol. 12, Iss. 4. – P. 299–317.
4. Grabec, I. Synergetics of Measurements, Prediction and Control. Springer Series in Synergetics, Book 68 / I. Grabec, W. Sachse. – Berlin-New York: Springer Verlag, 1997. – 458 p.
5. Panyukov, A.V., Stable Identification of Linear Autoregressive Model with Exogenous Variables on the Basis of the Generalized Least Absolute Deviation Method / A.V.Panyukov, Y.A. Mezaal // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 35–43.

6. Panyukov, A.V. Stable Estimation of Autoregressive Model Parameters with Exogenous Variables on the Basis of the Generalized Least Absolute Deviation Method / A.V. Panyukov, Y.A. Mezaal // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, Iss. 11. – P. 1666–1669.
7. Panyukov, A.V. Linkage Between Wlad and Glad and its Applications for Autoregressive Analysis / A.V. Panyukov, I.A. Tetin, Y.A. Mezaal // Proceedings of the 4th International Conference «Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS'2016)». – 2016. – С. 224–227.
8. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 485 с.
9. Rosen, J.B. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, part 1: linear constraints / J.B. Rosen // Journal S.I.A.M. – 1960. – Vol. 8. – P. 181–217.
10. Гурин, Л.С. О состоятельности оценок метода наименьших квадратов / Л.С. Гурин // Математическое обеспечение космических экспериментов: сб. науч. тр. – М.: Наука, 1978. – С. 69–81.
11. Мудров, В.И. Методы обработки измерений: квазиравдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: URSS, 2014. – 302 с.
12. Shestakov, A.L. The Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, A.V. Keller, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 1. – С. 3–16.
13. Huber, P. Robust Statistics / P. Huber, E.M. Ronchetti. – New York, Wiley, 2009. – 354 p.
14. Bloomheld, P. Least Absolute Deviations – Theory, Applications, and Algorithms / P. Bloomheld, W. Steiger. – Boston-Basel-Stuttgart: Birkhauser, 1983. – 351 p.
15. Pan, J. Weighted Least Absolute Deviations Estimation for ARMA Models with Infinite Variance / J. Pan, H. Wang, Y. Qiwei // Econometric Theory. – 2007. – Vol. 23, Issue 5. – P. 852–879.
16. Panyukov, A. Stable Parametric Identification of Vibratory Diagnostics Objects / A. Panyukov, A. Tyrsin // Journal of Vibroengineering. – 2008. – Vol. 10, no. 2. – P. 142–146.
17. Тырсин, А.Н. Точные алгоритмы реализации метода наименьших модулей на основе спуска по узловым прямым / А.Н. Тырсин, А. Азарян // Вестник БГУ. Математика. Информатика. – 2017. – № 4. – С. 21–32.

Поступила в редакцию 20 сентября 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 32–38*

DOI: 10.14529/mmph190404

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF QUASILINEAR DIFFERENCE EQUATION

A.V. Panyukov, Ya.A. Mezal

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: paniukovav@susu.ru

Identification of the quasilinear difference equation is reduced to the problem of regression analysis with mutually dependent observable variables. This makes the classical solution schemes, based on the least squares method and its variations, ineffective. Finding estimates of the autoregressive equation coefficients is significantly complicated by poor conditionality of the system of equations, which represent necessary conditions for the minimum sum of squared deviations. In this case, estimates of the problem parameters are untenable. For solving such problems, it is possible to use the generalized least absolute deviations (GLAD) method, reduced to problems sequence of estimates of the autoregressive equation coefficients with the weighted least absolute deviations (WLAD) method. The article proposes an algorithm for solving the problem of WLAD-estimation, based on its conversion to the problem of linear programming (LP) of simple structure. The simplicity of the admissible set of the LP problem structure lies in the intersection of a linear subspace with a parallelepiped. It allows to propose an effective algorithm for its solution based on the gradient projection method. The algebraic computational

complexity of the proposed algorithm does not exceed the value $O(N^2M^2)$, where N is the number of coefficients in the equation under study, and M is the number of the observed values. This WLAD computational complexity estimate is considered the best among the known ones.

Keywords: least absolute deviations; autoregressive model; linear programming; gradient projection method; computational complexity.

References

1. Raybman N.S. *Chto takoe identifikatsiya?* (What is Identification?). Moscow, Nauka Publ., 1970, 119 p. (in Russ.).
2. Gabisch G., Lorenz H.W. *Business Cycle Theory*. Springer-Verlag, 1989, 250 p. DOI: 10.1007/978-3-642-74715-1
3. Davies S. Inter-Firm Diffusion of Process Innovations. *European Economic Review*, 1979, Vol. 12, Iss. 4, pp. 299–317. DOI: 10.1016/0014-2921(79)90023-0
4. Grabec I., Sachse W. *Synergetics of Measurements, Prediction and Control*. Springer Series in Synergetics, Book 68, Berlin-New York, Springer Verlag, 1997, 458 p.
5. Panyukov A.V., Mezaal Y.A. Stable Identification of Linear Autoregressive Model with Exogenous Varia-Bles on the Basis of the Generalized least Absolute Deviation Method. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2018, Vol. 11, no. 1, pp. 35–43. DOI: 10.14529/mmp180104
6. Panyukov A.V., Mezaal Y.A. Stable estimation of autoregressive model parameters with exogenous variables on the basis of the generalized least absolute deviation method. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, Vol. 51, Iss. 11, pp. 1666–1669. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.08.217
7. Panyukov A.V., Tetin I.A., Mezaal Y.A. Linkage Between Wlad and Glad and its Applications for Autoregressive Analysis. *Proceedings of the 4th International Conference "Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS'2016)"*, 2016, C. 224–227.
8. Minoux M. *Programmation mathematique: theorie et algorithmes*. Paris, Dunod, 1983. (in French).
9. Rosen J.B. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part 1: Linear Constraints. *Journal S.I.A.M.*, 1960, Vol. 8, P. 181–217.
10. Gurin L.S. O sostoyatel'nosti otsenok metoda naimen'shikh kvadratov (On the Consistency of the Least Squares Method Estimates). *Matematicheskoe obespechenie kosmicheskikh eksperimentov: sb. nauch. tr.* (Mathematical Support of Space Experiments: Collection of Scientific Papers). Moscow, Nauka Publ., 1978, pp. 69–81. (in Russ.).
11. Mudrov V.I., Kushko V.L. *Metody obrabotki izmereniy: kvazipravdopodobnye otsenki* (Methods for Processing Measurements: Quasilike Estimates). Moscow, URSS Publ., 2014, 302 p. (in Russ.).
12. Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1. pp. 3–16. (in Russ.).
13. Huber P., Ronchetti E.M. *Robust Statistics*. New York, Wiley, 2009, 354 p. DOI: 10.1002/9780470434697
14. Bloomheld P., Steiger W. *Least Absolute Deviations – Theory, Applications, and Algorithms*. Boston-Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1983, 351 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-8574-5
15. Pan J., Wang H., Qiwei Y. Weighted Least Absolute Deviations Estimation for ARMA Models with Infinite Variance. *Econometric Theory*, 2007, Vol. 23, Issue 3, pp. 852–879. DOI: 10.1017/S0266466607070363
16. Panyukov A., Tyrsin A. Stable Parametric Identification of Vibratory Diagnostics Objects. *Journal of Vibroengineering*, 2008, Vol. 10, no. 2, pp. 142–146.
17. Tyrsin A.N., Azaryan A.A. Exact Algorithms for Implementation of the Least Absolute Deviations' Method Based on the Descent Through the Nodal Straight Lines. *BSU Bulletin. Mathematics, Informatics*, 2017, Issue 4, pp. 21–32. (in Russ.).

Received September 20, 2019

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ И ОСЕВОМ СЖАТИИ

В.Л. Дильман

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dilman49@mail.ru

Рассматриваются условия нагружения тонкостенной цилиндрической оболочки, в том числе трубы большого диаметра, при сжимающих (отрицательных) осевых напряжениях и растягивающих (положительных) кольцевых напряжениях. Цель статьи – установить зависимости критических деформаций, напряжений, давлений и осевых нагрузок на оболочку от ее параметров и условий нагружения. Метод исследования основан на применении критерия Свифта–Марциньяка потери устойчивости процесса пластического деформирования. Материал оболочки предполагается изотропным с показательно-степенной диаграммой деформирования. Получены явные аналитические выражения для искомых величин. Результаты позволяют при данных параметрах оболочки и условиях нагружения определять критические давления и критические осевые нагрузки, а также толщины стенок при заданном рабочем давлении.

Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка; труба большого диаметра; пластическая устойчивость, критерий Свифта; критические деформации; критические напряжения; критические давления; локализация пластической деформации.

Введение. Хорошо известно влияние двухосного нагружения стенок труб магистральных трубопроводов [1, 2] на критическое давление в них. Двухосное нагружение вызывается осевой нагрузкой на трубу. В некоторых случаях осевая сила, возникающая вследствие особых, иногда нештатных условий функционирования трубопроводов (при резких колебаниях температуры, под водой, в местности с подвижными грунтами, в горных условиях, в районах с высокой сейсмической активностью [3, 4]), приводит к осевым напряжениям σ_1 , противоположным по знаку кольцевым напряжениям σ_2 , порожденным внутренним или внешним давлением. Влияние коэффициента двухосности нагружения трубы $m = \sigma_1 / \sigma_2$ на несущую способность трубопроводов изучалось в работах [5–13] и др. В работах [8–13] критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки (ТЦО) из упрочняемого материала определялось на основе критерия Свифта–Марциньяка (СМ) потери стабильности пластического деформирования ТЦО [14–16]. В указанных работах не рассматривались случаи, когда осевые и кольцевые напряжения имеют разные знаки, т. е. когда $m < 0$.

Критическим состоянием (состоянием предразрушения) назовем состояние ТЦО, при котором деформирование всей оболочки или ее локального участка происходит без возрастания внешней нагрузки с неконтролируемой скоростью [16]. Как известно [16], существует два вида критического состояния тонкостенной цилиндрической оболочки из упрочняемого материала: *общая (тотальная) потеря стабильности процесса пластического деформирования* (ОПС) и *локализация пластической деформации* (ЛПД) в форме кольцевой шейки или продольной выпучины или вмятины. Какое из этих состояний реализуется, зависит от условий нагружения [10; 11, с. 25–27; 12, с. 28–30; 16]. Для нахождения критических интенсивностей деформаций и напряжений, соответствующих как ОПС, так и ЛПД, в работе применяется критерий Свифта [14] (использованный также Марциньяком [15]).

Цель работы – нахождение аналитических выражений для критических напряжений и деформаций стенок ТЦО, в том числе труб большого диаметра, критических давлений и осевых нагрузок на ТЦО, в зависимости от механических и геометрических параметров оболочек в условиях внутреннего давления и осевой сжимающей силы (кольцевые напряжения в стенках ТЦО положительны, осевые напряжения отрицательны). Предполагается, что диаграмма деформирования аппроксимируется показательно-степенной зависимостью (6) (см. ниже).

Обозначения и допущения. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) – осевые, кольцевые и радиальные нормальные напряжения (логарифмические деформации) в стенке ТЦО соответственно, p – внутреннее или внешнее давление на ТЦО, N – осевая растягивающая или сжимающая сила, $m = \sigma_1 / \sigma_2$ – коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО. Для упрощения формул используется обозначение: $s = \sqrt{m^2 - m + 1}$. Всюду в работе нижний индекс *cr* указывает на критическое значение данной величины.

Предполагается, что материал оболочки однородный, изотропный, упругопластический, в пластической зоне упрочняемый, а также, что выполняется «гипотеза единой кривой», т. е. диаграмма деформирования упрочняемого материала ТЦО имеет вид:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (1)$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций в стенке оболочки. При условии $\sigma_3 = 0$ (см. ниже (3)) σ_i и ε_i вычисляются по формулам соответственно:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (2)$$

В работе рассматриваются следующие основные параметры ТЦО, в том числе бесшовной трубы большого диаметра.

Геометрическими параметрами ТЦО являются ее внутренний радиус R и толщина стенки t . В начальный момент нагружения $R = R_0$, $t = t_0$.

Параметры, определяющие механические свойства материала ТЦО: 1) предел прочности (временное сопротивление) материала оболочки σ_B ; 2) параметры, определяющие зависимость (1): n и a (см. ниже (6)).

Главные напряжения в стенке ТЦО рассчитываются по формулам [17, с. 220]:

$$\sigma_1 = \frac{Rp}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}; \quad \sigma_2 = \frac{Rp}{t}; \quad \sigma_3 = 0, \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – осевые, кольцевые и радиальные нормальные напряжения в стенке трубы соответственно, p – внутреннее или внешнее давление, N – осевая растягивающая или сжимающая сила, t и R – толщина стенки и радиус оболочки. Из условий несжимаемости и пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций, а также условия $\sigma_3 = 0$ следует [8–12]:

$$(2 - m)\varepsilon_1 = (2m - 1)\varepsilon_2. \quad (4)$$

Отсюда видно, что при $m < 0,5$ деформации ε_1 и ε_2 имеют разные знаки. Предполагаем, что внешняя нагрузка происходит по зависимости, при которой коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО $m = \sigma_1 / \sigma_2$ не изменяется в процессе нагружения. Всюду в работе будем считать, что

$$m = \sigma_1 / \sigma_2 = \text{const} < 0.$$

Ситуация, когда $m > 0$, подробно исследовалась в работах [8–13, 16]. В случае, когда $m \leq 0$, некоторые результаты сформулированы в [18].

Аппроксимация диаграммы деформирования. Во многих работах диаграмма деформирования (1) аппроксимируется степенной функцией

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad A = e^n n^{-n} \sigma_B. \quad (5)$$

Тогда материал оболочки характеризуется параметром n – показателем упрочнения материала. Известны и применяются другие аппроксимации [17, 18]. В работе будет рассматриваться более общая, чем (5), показательно-степенная аппроксимация функции (1) [8–10; 12, с. 27–30].

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i), \quad A = (1 - a)^n e^n n^{-n} \sigma_B \quad (6)$$

с двумя параметрами, определяющими процесс деформирования упрочняемого материала. Коэффициент A в формуле (6) вычислен с применением критерия СМ [12, с. 27–30]. Аппроксимация (6) имеет два важных преимущества по сравнению с другими (некоторые из них приведены в [12, с. 23–24]) – она, во-первых, является обобщением и, следовательно, уточнением аппроксимации (5) и, во-вторых, она мультипликативна («удобно логарифмируется»), что желательно при использовании критерия СМ для получения обзримых аналитических зависимостей (в противном случае получаются не явные зависимости, связывающие критические значения деформаций, напряжений, давлений и т. д. с механическими и геометрическими параметрами оболочки или другой конструкции, а трансцендентные уравнения для нахождения искомых величин).

Чтобы аппроксимировать реальные соотношения между ε_i и σ_i , функция (1) вида (6) должна быть выпуклой вверх по крайней мере на участке, соответствующем условию $\sigma_i \in [0; (\sigma_i)_{cr}]$. Используя полученные ниже формулы (9)–(11), средствами элементарного анализа можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. Если $a < 0$, то функция вида (6) выпукла вверх на участке, соответствующем условию $\sigma_i \in [0; (\sigma_i)_{cr}]$. Если $a > 0$, то для выпуклости вверх функции вида (6) на этом участке необходимо и достаточно, чтобы, при осевом сжатии и внутреннем давлении, выполнялось условие: $0 < a < 1,5(1 - \sqrt{n})/s$, если $-1 \leq m < 0,5$, и условие: $0 < a < (1 - m/2)(1 - \sqrt{n})/s$, если $m \leq -1$.

Аппроксимация методом наименьших квадратов по формуле (6) известных, полученных в натуральных экспериментах (см. ссылки в работах [11, с. 22–24; 19, 20]) зависимостей для низкоуглеродистых сталей показала [21] выполнение условий предложения 1 для параметра a .

Метод исследования. Как было отмечено, критическое состояние ТЦО может проявиться как в форме общей потери стабильности процесса пластического деформирования (ОПС), так и в форме локализации пластической деформации (ЛПД) в виде кольцевой шейки или продольной шейки либо выпучины.

На основе сравнения скорости роста интенсивности напряжений, связанных со свойствами материала, определяемыми его диаграммой деформирования, со скоростью роста интенсивности напряжений, определяемой изменением геометрии оболочки, критерий СМ позволяет вычислять критические деформации ТЦО, соответствующие той или иной форме потери оболочкой пластической стабильности. Как следствие, это дает возможность вычисления критических напряжений, давлений, осевых нагрузок при данных геометрических и механических параметрах ТЦО и условиях нагружения.

Основные результаты. Подходы работ [8–13], основанные на применении критерия СМ, с использованием зависимостей (2)–(4), и при условии $\sigma_1 < 0$ позволяют найти выражения для вычисления критических значений интенсивностей деформаций. Считаем, что на ТЦО действуют осевое сжатие и внутреннее давление. В [18] показано, что в случае ОПС

$$\sigma_i = \frac{sR_0 p}{t_0} \exp\left(\frac{3}{2s} \varepsilon_i\right), \quad (7)$$

а в случае ЛПД

$$\sigma_i = \frac{sR_0 p}{t_0} \exp\left(\frac{2-m}{2s} \varepsilon_i\right). \quad (8)$$

Приравнявая дифференциалы выражений для σ_i из формул (6) и (7) в случае ОПС, и из формул (6) и (8) в случае ЛПД (критерий СМ), получим критические выражения деформаций $\varepsilon_{i\,tot}$ и $\varepsilon_{i\,loc}$ при реализации случаев ОПС и ЛПД соответственно. Очевидно, что $\varepsilon_{i\,cr} = \min(\varepsilon_{i\,tot}, \varepsilon_{i\,loc})$. Используя это и сравнивая выражения в (7) и (8), получим

Предложение 2. Пусть ТЦО подвержена внутреннему давлению и осевой сжимающей силе. Тогда: 1) критическое состояние ТЦО возникает в виде ОПС, если $-1 \leq m < 0,5$, и в виде ЛПД – продольной выпучины, если $m < -1$; 2) критическая интенсивность деформации вычисляется по формуле:

$$(\varepsilon_i)_{cr} = \begin{cases} \frac{2sn}{2-m-2as}, & \text{если } m \leq -1; \\ \frac{2sn}{3-2as}, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя выражения для вычисления $(\varepsilon_i)_{cr}$ из (9) в (6), получим

Предложение 3. В условиях осевой сжимающей силы и внутреннего давления критическая интенсивность напряжений вычисляется по формулам: при $m < -1$

$$\sigma_{i cr} = \left(\frac{2(1-a)s \exp\left(\frac{2-m}{2-m-2as}\right)}{2-m-2as} \right)^n \sigma_B, \quad (10)$$

при $-1 \leq m < 0,5$

$$\sigma_{i cr} = \left(\frac{2(1-a)s \exp\left(\frac{3}{3-2as}\right)}{3-2as} \right)^n \sigma_B. \quad (11)$$

Подставив вместо σ_i его критические значения (10) и (11), а вместо ε_i его критическое значение (9) в формулы (7) и (8) соответственно, найдем давление p_{cr} в ТЦО в критический момент нагружения.

Предложение 4. В условиях осевой сжимающей нагрузки и внутреннего давления критическое давление вычисляется по формуле:

$$p_{cr} = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{1-0,5m-as} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B, & \text{если } m \leq -1; \\ \left(\frac{1-a}{1,5-as} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть p_w – рабочее давление в трубопроводе. Обращая формулу (12), получим критическую толщину стенки t_{cr} трубы, работающей в составе трубопровода, в зависимости от условий нагружения, которые характеризуются параметром m .

Предложение 5. В условиях осевой сжимающей нагрузки и внутреннего давления критическая толщина стенки трубы вычисляется по формуле:

$$t_{cr} = \begin{cases} s^{1-n} \left(\frac{1-0,5m-as}{1-a} \right)^n \frac{R_0 p_w}{\sigma_B}, & \text{если } m \leq -1; \\ s^{1-n} \left(\frac{1,5-as}{1-a} \right)^n \frac{R_0 p_w}{\sigma_B}, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (13)$$

Вычислительные эксперименты. Графики зависимостей от условий нагружения (параметра m) критического давления p_{cr} , критической толщины стенки трубы при данном рабочем давлении p_w приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 предполагается $\sigma_B = 600$ МПа, $R_0 = 300$ мм, $t = 10$ мм. На рис. 2 $\sigma_B = 600$ МПа, $R_0 = 300$ мм, рабочее давление принято $p_w = 8$ МПа. На рис. 1 кривые расположены снизу вверх в таком порядке: при $m^* < m < 0$ (число m^* определено в (14)) первые три линии – $n = 0,2$, $a = 0,2$; 0 ; $-0,2$ соответственно; следующие три линии – $n = 0,1$, $a = 0,2$; 0 ; $-0,2$; при $m < m^*$ порядок кривых противоположен. На рис. 2 порядок расположения кривых противоположен их порядку на рис. 1.

Заметим, что при

$$m^* = \frac{1-\sqrt{6}}{2} \approx -0,725 \quad (14)$$

формула (12) упрощается, становится независимой от n и a и приобретает вид:

$$p_{cr} = \frac{2t_0}{3R_0} \sigma_B.$$

При условии (14) формула (13) также упрощается, становится независимой от n и a и приобретает вид:

$$t_{cr} = \frac{3R_0 p_v}{2\sigma_B}.$$

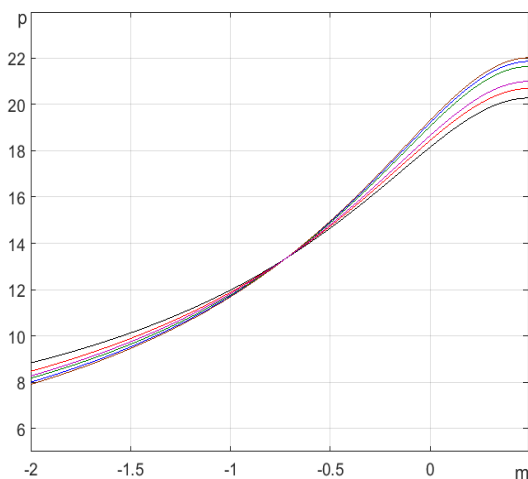


Рис. 1. Зависимость критического давления p_{cr} (в МПа) от условий нагружения (параметра $m = \sigma_1/\sigma_2$), при различных значениях параметров упрочнения n и a , вычисленная по формуле (12)

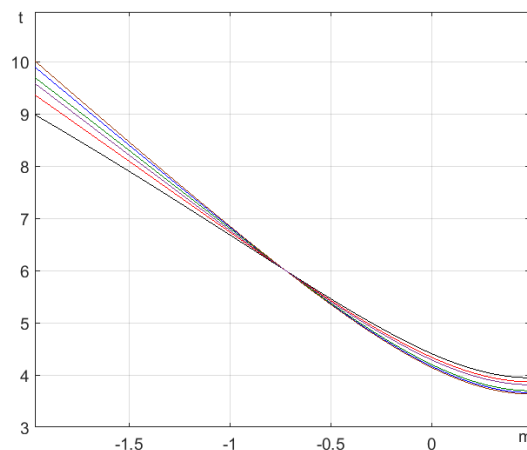


Рис. 2. Зависимость критической толщины стенки t_{cr} (в мм) от условий нагружения (параметра $m = \sigma_1/\sigma_2$) при различных значениях параметров упрочнения n и a и рабочего давления $p_w = 8$ МПа, вычисленная по формуле (13)

Закключение. Получены зависимости критических деформаций, напряжений и давлений от геометрических параметров ТЦО t и R , механических характеристик σ_B , n и a материала ТЦО и условий нагружения, характеризующихся отношением $m = \sigma_1/\sigma_2$ осевых и кольцевых напряжений при его постоянном отрицательном значении в условиях осевого сжатия и внутреннего давления. Установлены зависимости критической толщины стенки t_{cr} трубы, работающей в составе трубопровода, от условий нагружения, которые характеризуются параметром m .

Установлено, что в случае осевой сжимающей нагрузки и внутреннего давления:

1. Осевые напряжения самым существенным образом влияют на величину критического давления (см. рис. 1). Из рис. 1 видно, что, в зависимости от значений параметров n и a при отсутствии осевых напряжений критическое давление примерно в 1,585...1,635 раза выше, чем при условии, когда осевые и кольцевые напряжения (по модулю) совпадают.

2. Осевые напряжения самым существенным образом влияют на критическую толщину стенок (см. рис. 2).

3. Критическое состояние возникает в виде: общей потери устойчивости процесса пластического деформирования при условии $-1 \leq m < 0,5$ и в виде локализации пластической деформации – продольной выпучины, при условии $-\infty < m < -1$.

4. Влияние параметров упрочнения n и a в предложенном диапазоне на критическое состояние ТЦО не очень существенно (см. рис. 1, 2), но заметно. Например, при $n = 0,2$, $a = 0,2$ критическая толщина стенки при данных условиях $t_{cr} = 9$ мм, а при $n = 0,1$, $a = -0,2$, $t_{cr} = 10$ мм.

Литература

1. Системная надежность трубопроводного транспорта углеводородов / В.Д. Черняев, К.В. Черняев, В.Л. Березин и др. – М.: Наука, 1997. – 516 с.

2. Бородавкин, П.П. Сооружение магистральных трубопроводов / П.П. Бородавкин, В.Л. Безин. – М.: Недра, 1987. – 471 с.
3. Hector, S.S. Deformation of steel pipes with internal pressure under axial compression and bending load under seismic action / S.S. Hector, S.C. Carlos // The 14-th World Conference on Earthquake Engineering. October 12–17, 2008. Beijing, China.
4. Eiber, P.J. Outside force causes most natural gas pipeline failures / P.J. Eiber // Oil and Gas J. – 1987. – Vol. 85, no. 11. – P. 52–57.
5. Малинин, Н.Н. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек / Н.Н. Малинин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 2. – С. 115–118.
6. Моношков, А.Н. Пластическая устойчивость и ее роль в оценке прочности труб / А.Н. Моношков, С.И. Пыхов, И.А. Пустин // Производство труб с покрытиями, отделка и контроль качества труб. – М.: Metallurgy, 1972. – С. 77–81.
7. Куркин, С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением / С.А. Куркин. – М.: Машиностроение, 1976. – 183 с.
8. Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179–185.
9. Дильман, В.Л. О потере пластической устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 5. – С. 50–57.
10. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 141–151.
11. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 201 с.
12. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2011. – 275 с.
13. Дильман, В.Л. Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей прослойку из менее прочного материала / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2013. – № 10. – С. 21–24.
14. Swift, H.W. Plastic Instability under Plane Stress / H.W. Swift // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1952. – Vol. 1, no. 1. – pp. 1–18.
15. Marciniak, Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych / Z. Marciniak // Mech. teoretyczna i stosowana. – 1966. – Vol. 4, no. 3. – P. 209–220.
16. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11–16.
17. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 415 с.
18. Дияб, А.Н. Критические состояния однородных тонкостенных цилиндрических оболочек при внутреннем давлении и осевом сжатии / А.Н. Дияб // Фундамент. проблемы основных направлений научно-техн. исследований: сб. трудов Междунар. научно-практ. конференции (Волгоград, 17 марта 2018 г.). – Стерлитамак: АМИ, 2018. – С. 35–39.
19. Воронцов, А.Л. Об аппроксимации кривых упрочнения / А.Л. Воронцов // Вестник машиностроения. – 2002. – № 1. – С. 51–54.
20. Кроха, В.А. О зависимости показателя деформационного упрочнения от степени деформации и выполнении степенного закона упрочнения / В.А. Кроха // Проблемы прочности. – 1981. – № 8. – С. 72–77.
21. Дильман, В.Л. О влиянии аппроксимации диаграммы деформирования на точность критериев несущей способности тонкостенных оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Эбель // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 638–639.

Поступила в редакцию 30 сентября 2019 г.

MATHEMATICAL MODELING OF CRITICAL STATES OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS UNDER INTERNAL PRESSURE AND AXIAL COMPRESSION**V.L. Dilman**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: dilman49@mail.ru

The loading conditions of a thin-walled cylindrical shell, including large-diameter pipes, under compressive (negative) axial stresses and tensile (positive) ring stresses are considered. The purpose of the article is to specify the dependences of critical deformations, stresses, pressures, and axis loads on the shell on the parameters and loading conditions. The research method is based on the application of the loss in stability of the plastic deformation process Swift–Marciniak criterion. The material of the shell is assumed to be isotropic with exponential-power deformation diagram. Explicit analytical expressions for the target values were obtained. Considering the given parameters of the shell and loading conditions, the results allow to determine critical pressures, critical axial loads and wall thickness at a given working pressure.

Keywords: thin-walled cylindrical shell; large-diameter pipe; plastic stability; Swift criterion; critical deformations; critical stresses; critical pressures; localization of plastic deformation.

References

1. Chernyaev V.D., Chernyaev K.V., Berezin V.L. *et al.* *Sistemnaya nadezhnost' truboprovodnogo transporta uglevodorodov* (System reliability of hydrocarbon pipeline transport). Moscow, Nauka Publ., 1997, 516 p. (in Russ.).
2. Borodavkin P.P., Berezin V.L. *Sooruzhenie magistral'nykh truboprovodov* (Main Pipeline Construction). Moscow, Nedra Publ., 1987, 471 p. (in Russ.).
3. Hector S.S., Carlos S.C. Deformation of Steel Pipes with Internal Pressure under Axial Compression and Bending Load under Seismic Action. *The 14-th World Conference on Earthquake Engineering*, October 12–17, 2008, Beijing, China.
4. Eiber P.J. Outside Force Causes Most Natural Gas Pipeline Failures. *Oil and Gas J.*, 1987, Vol. 85, no. 11, pp. 52–57.
5. Malinin N.N. Ustoychivost' dvukhosnogo plasticheskogo rastyazheniya anizotropnykh listov i tsilindricheskikh obolochek (Biaxial Plastic Extension Stability of Anisotropic Sheets and Cylindrical Shells). *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1971, no. 2, pp. 115–118. (in Russ.).
6. Monoshkov A.N., Pykhov S.I., Pustin I.A. Plasticheskaya ustoychivost' i ee rol' v otsenke prochnosti trub (Plastic Stability and its Role in Assessing Pipes Strength). *Proizvodstvo trub s pokryiyami, otdelka i kontrol' kachestva trub* (Coated Pipe Manufacturing, Pipe Finishing and Quality Control), Moscow, Metallurgiya Publ., 1972, pp. 77–81. (in Russ.).
7. Kurkin S.A. *Prochnost' svarnykh tonkostennykh sudov, rabotayushchikh pod davleniem* (Strength of Welded Thin-Walled Pressure Vessels). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 183 p. (in Russ.).
8. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. O vliyanii dvukhosnosti nagruzheniya na nesushchuyu sposobnost' trub magistral'nykh gazonefteprovodov (On the Effect of Biaxial Loading on the Bearing Capacity of the Main Gas and Oil Pipelines). *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2000, no. 5, pp. 179–185. (in Russ.).
9. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. O potere plasticheskoy ustoychivosti tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek (On the Loss of Plastic Stability of Thin-Walled Cylindrical Shells). *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, 2002, no. 5, pp. 50–57. (in Russ.).

10. Dil'man V.L. Plastic Instability of Thin-Walled Cylindrical Shells. *Mech. Solids*, 2005, Vol. 40, Iss. 4, pp.113–121.

11. Dil'man V.L. *Matematicheskie modeli napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek* (Mathematical Models of the Stress State of Inhomogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells), Chelyabinsk, Izd-vo YuUrGU Publ., 2007, 201 p. (in Russ.).

12. Dil'man V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy myagkikh prosloek v neodnorodnykh soedineniyakh* (Mathematical Modeling of Soft Layers Critical State in Inhomogeneous Compounds). Chelyabinsk, Izdatel'skiy Tsentr YuUrGU Publ., 2011, 275 p. (in Russ.).

13. Dilman V.L., Karpeta T.V. Critical State of a Thin-Walled Cylindrical Shell Containing an Interlayer Fabricated from a Material of Lesser Strength. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2014, Vol. 49, Issue 9–10, pp. 668–674.

14. Swift H.W. Plastic Instability under Plane Stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1952, Vol. 1, no. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90002-1

15. Marciniak Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych. *Mech. teoretyczna i stosowana*, 1966, Vol. 4, no. 3, pp. 209–220.

16. Koval'chuk G.I. K voprosu o potere ustoychivosti plasticheskogo deformirovaniya obolochek (On the Issue of Plastic Deformation Stability Loss of the Shells). *Problemy prochnosti*, 1983, no. 5, pp. 11–16. (in Russ.).

17. Pisarenko G.S. *Deformirovanie i prochnost' materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii* (Deformation and Strength of Materials under Complex Stress State). Kiev, Naukova dumka, 1976, 415 p. (in Russ.).

18. Diyab A.N. Kriticheskie sostoyaniya odnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek pri vnutrennem davlenii i osevom szhatii (Critical States of Homogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells under Internal Pressure and Axial Compression). *Fundament. problemy osnovnykh napravleniy nauchno-tekhn. issledovaniy: sb. trudov Mezhdunar. nauchno-prakt. Konferentsii, Volgograd, 17 marta 2018 g.* (Proceedings of the International Scientific and Practical Conference “Fundamental Problems of the Main Directions of Scientific and Technical Research”, Volgograd, March 17, 2018), Sterlitamak, AMI Publ., 2018, pp. 35–39. (in Russ.).

19. Vorontsov A.L. Ob approksimatsii krivykh uprochneniya (On the Approximation of Hardening Curves). *Vestnik mashinostroeniya*, 2002, no. 1, pp. 51–54. (in Russ.).

20. Krokha V.A. O zavisimosti pokazatelya deformatsionnogo uprochneniya ot stepeni deformatsii i vypolnenii stepennogo zakona uprochneniya (On the Approximation of Hardening Curves Dependence of the Strain Hardening Index on the Degree of Deformation and the Fulfillment of the Power Hardening Law). *Problemy prochnosti*, 1981, no. 8, pp. 72–77. (in Russ.).

21. Dil'man V.L., Ebel' A.A. O vliyanii approksimatsii diagrammy deformirovaniya na tochnost' kriteriev nesushchey sposobnosti tonkostennykh obolochek (On the Dependence of the Strain Hardening Index on the Degree of Deformation and the Implementation of the Power Law of Hardening). *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2006, Vol. 13, Iss. 4, pp. 638–639. (in Russ.).

Received September 30, 2019

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ РАЗРУШЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ И ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ

Т.В. Карпета

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: etv1980@mail.ru

Рассматриваются условия потери устойчивости при пластическом деформировании тонкостенной цилиндрической оболочки, в том числе трубы большого диаметра, при растягивающих (положительных) осевых напряжениях и сжимающих (отрицательных) кольцевых напряжениях. Цель статьи – вычислить критические деформации, напряжения, давления и осевые нагрузки на оболочку в зависимости от ее параметров и условий нагружения. Метод исследования основан на применении критерия Свифта–Марциньяка потери устойчивости процесса пластического деформирования. Материал оболочки предполагается изотропным с показательной диаграммой деформирования. Получены явные аналитические выражения для искомых величин. Результаты позволяют при данных параметрах оболочки и условиях нагружения определять критические давления и критические осевые нагрузки, а также толщины стенок при заданном рабочем давлении.

Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка; труба большого диаметра, пластическая устойчивость; критерий Свифта, критические деформации, критические напряжения; критические давления; локализация пластической деформации.

Введение. Значительное влияние на критическое давление в трубопроводах оказывает осевая нагрузка, приводящая к двухосному нагружению труб [1, 2]. Осевая сила, возникающая вследствие особых, иногда нештатных условий функционирования трубопроводов (при резких колебаниях температуры, под водой, в местности с подвижными грунтами, в горных условиях, в районах с высокой сейсмической активностью [3, 4]), приводит к осевым напряжениям σ_2 , противоположным по знаку кольцевым напряжениям σ_1 , порожденным внутренним или внешним давлением. Коэффициент двухосности нагружения трубы $m = \sigma_1 / \sigma_2$ существенно влияет на несущую способность магистральных трубопроводов [5–13]. В работах [8–13] критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки (ТЦО) из однородного изотропного упрочняемого материала определялось на основе критерия Свифта–Марциньяка (СМ) потери стабильности пластического деформирования ТЦО [14–16]. В указанных работах кольцевые напряжения вызывались внутренним давлением. Внешнее давление не рассматривалось; в частности, не рассматривались случаи, когда осевые и кольцевые напряжения имеют разные знаки, т. е. когда $m < 0$.

Критическим состоянием (состоянием предразрушения) назовем состояние ТЦО, при котором деформирование всей оболочки или ее локального участка происходит без возрастания внешней нагрузки с неконтролируемой скоростью [16]. Как известно [16], существует два вида критического состояния тонкостенной цилиндрической оболочки из упрочняемого материала: *общая (тотальная) потеря стабильности процесса пластического деформирования* (ОПС) и *локализация пластической деформации* (ЛПД) в форме кольцевой шейки или продольной выпучины или вмятины. Какое из этих состояний реализуется, зависит от условий нагружения [10; 11, с. 25–27; 12, с. 28–30; 16]. Для нахождения критических интенсивностей деформаций и напряжений, соответствующих как ОПС, так и ЛПД, в работе применяется критерий Свифта [14] (использованный также Марциньяком [15]).

Обозначения и допущения. В работе $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) – осевые, кольцевые и радиальные нормальные напряжения (логарифмические деформации) стенки ТЦО соответственно, p – внутреннее или внешнее давление на ТЦО, N – осевая растягивающая ($N > 0$) или сжимающая сила,

$m = \sigma_1 / \sigma_2$ – коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО, $s = \sqrt{m^2 - m + 1}$. Нижний индекс cr указывает на критическое значение данной величины.

Материал оболочки полагается однородным, изотропным, упругопластическим, в пластической зоне упрочняемым. Предполагается, что диаграмма деформирования упрочняемого материала ТЦО имеет вид:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (1)$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций в стенке оболочки («гипотеза единой кривой»). При условии $\sigma_3 = 0$ (см. ниже (3)) σ_i и ε_i вычисляются по формулам соответственно:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (2)$$

В работе рассматриваются следующие основные параметры ТЦО (в том числе бесшовной трубы большого диаметра).

Геометрическими параметрами ТЦО являются ее внутренний радиус R и толщина стенки t . В начальный момент нагружения $R = R_0$, $t = t_0$.

Параметры, определяющие механические свойства материала ТЦО: 1) предел прочности (временное сопротивление) материала оболочки σ_B ; 2) параметры, определяющие зависимость (1): n и a (см. ниже (6)).

Главные напряжения в стенке ТЦО рассчитываются по формулам [17, с. 220]:

$$\sigma_1 = \frac{Rp}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}; \quad \sigma_2 = \frac{Rp}{t}; \quad \sigma_3 = 0, \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – осевые, кольцевые и радиальные нормальные напряжения в стенке трубы соответственно, p – внутреннее или внешнее давление, N – осевая растягивающая или сжимающая сила, t и R – толщина стенки и радиус оболочки. Из условий несжимаемости и пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций, а также условия $\sigma_3 = 0$ следует [8–12]:

$$(2 - m)\varepsilon_1 = (2m - 1)\varepsilon_2. \quad (4)$$

Отсюда видно, что при $m < 0,5$ деформации ε_1 и ε_2 имеют разные знаки. Предполагаем, что внешняя нагрузка происходит по зависимости, при которой коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО $m = \sigma_1 / \sigma_2$ не изменяется в процессе нагружения. Всюду в работе будем считать, что

$$m = \sigma_1 / \sigma_2 = \text{const} < 0.$$

Ситуация, когда $m > 0$, подробно исследовалась в работах [8–13, 16]. В случае, когда $m \leq 0$, некоторые результаты сформулированы в [18, 19].

Цель работы – нахождение аналитических выражений для критических напряжений и деформаций стенок ТЦО (труб большого диаметра), критических давлений и осевых нагрузок на ТЦО, в зависимости от механических и геометрических параметров оболочек, в условиях внешнего давления и осевой растягивающей силы (кольцевые напряжения в стенках ТЦО отрицательны, осевые напряжения положительны). Результаты работы являются основой для аналогичных исследований ТЦО, содержащих геометрические и механические неоднородности, в том числе труб большого диаметра, содержащих сварные швы и дефекты различной природы [20–29]. В работе предполагается, что диаграмма деформирования аппроксимируется показательной-степенной зависимостью (6) (см. ниже).

Аппроксимация диаграммы деформирования. Во многих работах диаграмма деформирования (1) в пластической зоне аппроксимируется степенной функцией

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad A = e^n n^{-n} \sigma_B. \quad (5)$$

Тогда материал оболочки характеризуется параметром n – показателем упрочнения материала. Известны и применяются другие аппроксимации [17, 18]. В работе будет рассматриваться более общая, чем (5), аппроксимация функции (1) [8–10, 12, с. 27–30]:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i), \quad A = (1 - a)^n e^n n^{-n} \sigma_B \quad (6)$$

с двумя параметрами, определяющими процесс деформирования упрочняемого материала. Коэффициент A в формуле (6) вычислен с применением критерия СМ [12, с. 27–30]. Аппроксимация (6) имеет два важных преимущества по сравнению с другими [12, с. 23–24] – она, во-первых, является обобщением и, следовательно, уточнением аппроксимации (5) и, во-вторых, она мультипликативна («удобно логарифмируется»), что желательно при использовании критерия СМ для получения обозримых аналитических зависимостей (в противном случае получаются не явные зависимости, связывающие критические значения деформаций, напряжений, давлений и т. д. с механическими и геометрическими параметрами конструкции, а трансцендентные уравнения для нахождения искомых величин).

Чтобы аппроксимировать реальные соотношения между ε_i и σ_i , функция (1) вида (6) должна быть выпуклой вверх по крайней мере на участке, соответствующем условию $\sigma_i \in [0; (\sigma_i)_{cr}]$. Используя полученные ниже формулы (8) и (9), средствами элементарного анализа можно доказать:

Предложение 1. Если $a < 0$, то функция вида (6) выпукла вверх на участке, соответствующем условию $\sigma_i \in [0; (\sigma_i)_{cr}]$. Если $a > 0$, то для выпуклости вверх функции вида (6) на этом участке необходимо и достаточно, чтобы, при осевом растяжении и внешнем давлении, выполнялось условие $0 < a < (1/2 - m)(1 - \sqrt{n})/s$.

Аппроксимация методом наименьших квадратов по формуле (6) известных, полученных в натуральных экспериментах (см. ссылки в работах [11, с. 22–24; 30, 31]), зависимостей для низкоуглеродистых сталей показала [32] выполнение условий Предложения 1 для параметра a .

Метод исследования. Как было отмечено, критическое состояние ТЦО может проявиться как в форме общей потери стабильности процесса пластического деформирования (ОПС), так и в форме локализации пластической деформации (ЛПД) в виде кольцевой шейки или продольной шейки либо выпучины.

На основе сравнения скорости роста интенсивности напряжений, связанных со свойствами материала, определяемыми его диаграммой деформирования, со скоростью роста интенсивности напряжений, определяемой изменением геометрии оболочки, критерий СМ позволяет вычислять критические деформации ТЦО, соответствующие той или иной форме потери оболочкой пластической стабильности. Как следствие, это дает возможность вычисления критических напряжений, давлений, осевых нагрузок при данных геометрических и механических параметрах ТЦО и условиях нагружения.

Основные результаты. Пусть ТЦО находится под действием осевой растягивающей силы и внешнего давления. В работе [16] доказано, при сделанных предположениях, что тогда

$$\sigma_i = \frac{sR_0(-p)}{t_0} \exp\left(\frac{1-2m}{2s} \varepsilon_i\right). \quad (7)$$

Приравнявая дифференциалы выражений для σ_i из формул (6) и (7) (критерий СМ), получим критические выражения деформаций ε_i cr.

Предложение 2. Пусть ТЦО подвержена внешнему давлению и осевой растягивающей силе. Тогда: 1) критическое состояние ТЦО возникает в виде ЛПД – кольцевой шейки; 2) критическая интенсивность деформации вычисляется по формуле:

$$(\varepsilon_i)_{cr} = \frac{2sn}{1-2m-2as}. \quad (8)$$

Подставляя выражения для вычисления $(\varepsilon_i)_{cr}$ из (8) в (6), получим

Предложение 3. Пусть ТЦО подвержена внешнему давлению и осевой растягивающей силе. Тогда

$$(\sigma_i)_{cr} = \left(\frac{2(1-a)s \exp\left(\frac{1-2m}{1-2m-2as}\right)}{1-2m-2as} \right)^n \sigma_B. \quad (9)$$

Подставив вместо σ_i его выражение (9) в левую часть формулы (7), а вместо ε_i его выражение (8), найдем критическое давление на ТЦО в рассматриваемом случае.

Предложение 4. В условиях осевой растягивающей нагрузки и внешнего давления критическое давление вычисляется по формуле:

$$p_{cr} = - \left(\frac{1-a}{0,5-m-as} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B. \quad (10)$$

В условиях осевой растягивающей нагрузки и внешнего давления критическое состояние возникает в виде кольцевой шейки, поэтому естественно найти величину критической осевой растягивающей силы. Подставляя (10) в (3), получим

Предложение 5. В условиях осевой растягивающей нагрузки и внешнего давления критическое растягивающее усилие вычисляется по формуле:

$$N_{cr} = \left(\frac{1-a}{0,5-m-as} \right)^n \frac{(1-2m)\pi R_0 t_0}{s^{1-n}} \sigma_B. \quad (11)$$

В частном случае, когда $a=0$, формулы (8)–(11) обращаются в полученные ранее соотношения [9, 18].

При $m=-\infty$ из формулы (11) следует, что $N_{cr} = 2\pi R_0 t_0 \sigma_B = S_0 \sigma_B$, где S_0 – площадь поперечного сечения ТЦО в начальный момент нагружения. Последнее означает, что при растяжении полого стержня характеристика состояния предразрушения – предел прочности – совпадает с пределом прочности, полученным при растяжении сплошного стержня.

Пусть p_w – рабочее давление в трубопроводе. Обращая формулу (10), получим критическую толщину стенки t_{cr} трубы, работающей в составе трубопровода, в зависимости от условий нагружения, которые характеризуются параметром m .

$$t_{cr} = s^{1-n} \left(\frac{1-0,5m-as}{1-a} \right)^n \frac{R_0 |p_w|}{\sigma_B} \quad (12)$$

Вычислительные эксперименты. Графики зависимостей от условий нагружения (параметра m) критического давления p_{cr} , осевой критической силы N_{cr} , критической толщины стенки трубы при данном рабочем давлении p_w , приведены на рис. 1–3. На всех рисунках кривые расположены в таком порядке снизу вверх: первые три линии – $n=0,2$, $a=0,2$; 0; $-0,2$ соответственно; следующие три линии – $n=0,1$, $a=0,2$; 0; $-0,2$ соответственно. Всюду предполагается $\sigma_B = 600$ МПа, $R_0 = 300$ мм. Всюду (кроме рис. 3) $t = 10$ мм. На рис. 3 рабочее давление принято $p_w = 8$ МПа.

Заключение. Получены зависимости критических деформаций, напряжений, давлений и осевых нагрузок от геометрических параметров ТЦО – толщины стенки t и радиуса R , механических характеристик σ_B , n и a и условий нагружения, характеризующихся отношением $m = \sigma_1 / \sigma_2$ осевых и кольцевых напряжений при его постоянном отрицательном значении в условиях осевого сжатия и внутреннего давления. Установлены зависимости критической толщины стенки t_{cr} трубы, работающей в составе трубопровода, от условий нагружения, которые характеризуются параметром m .

Установлено, что в случае осевой растягивающей нагрузки и внешнего давления:

1. При отсутствии осевых напряжений критическое давление примерно в 1,78...1,87 раза выше, чем при условии, когда осевые и кольцевые напряжения (по модулю) совпадают.
2. Осевые напряжения самым существенным образом влияют на критическую толщину стенок (рис. 3).
3. Осевые напряжения самым существенным образом влияют на величину критического давления (рис. 1). Из рис. 1 видно, что, в зависимости от значений параметров n и a , при отсутствии осевых напряжений критическое давление примерно в 1,78...1,87 раза выше, чем при условии, когда осевые и кольцевые напряжения (по модулю) совпадают.

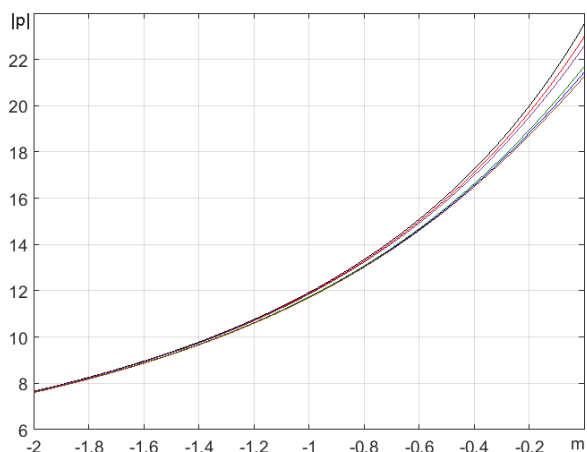


Рис. 1. Зависимость критического давления p_{cr} (в МПа) от параметра нагружения $m = \sigma_1 / \sigma_2$ при различных значениях показателей упрочнения n и a , вычисленная по формуле (10)

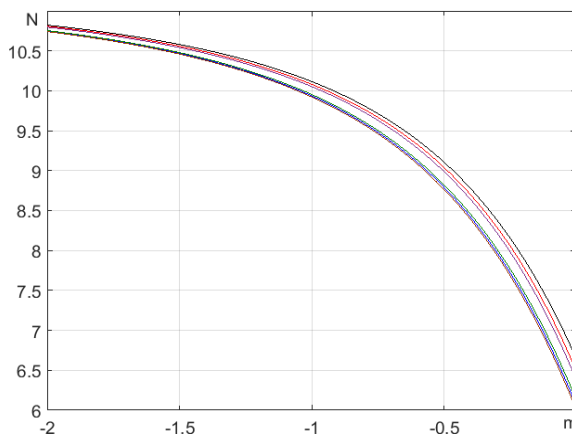


Рис. 2. Зависимость критической осевой растягивающей силы N_{cr} (в МН) от параметра нагружения $m = \sigma_1 / \sigma_2$ при различных значениях показателей упрочнения n и a , вычисленная по формуле (11)

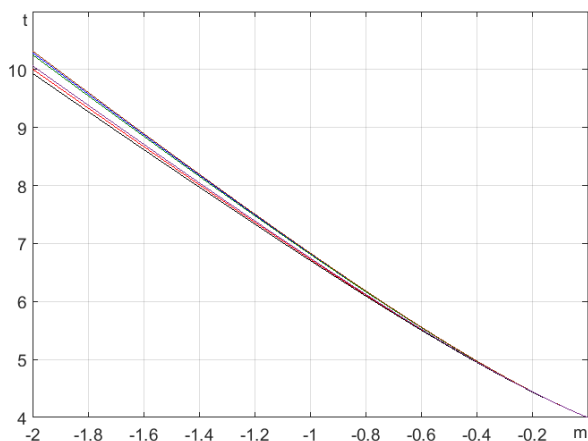


Рис. 3. Зависимость критической толщины стенки t_{cr} (в мм) от параметра нагружения $m = \sigma_1 / \sigma_2$ при различных значениях показателей упрочнения n и a и рабочего давления $p_w = 8$ МПа, вычисленная по формуле (12)

4. Критическое состояние возникает при всех отрицательных значениях m в виде кольцевой шейки.

5. Влияние параметров упрочнения n и a в предложенном диапазоне на критическое состояние ТЦО незначительно (рис. 1–3).

6. При растяжении полого стержня характеристика состояния предразрушения – предел прочности – совпадает с пределом прочности, полученным при растяжении сплошного стержня.

Литература

1. Системная надежность трубопроводного транспорта углеводородов / В.Д. Черняев, К.В. Черняев, В.Л. Березин и др. – М.: Наука, 1997. – 516 с.
2. Бородавкин, П.П. Сооружение магистральных трубопроводов / П.П. Бородавкин, В.Л. Березин. – М.: Недра, 1987. – 471 с.
3. Hector, S.S. Deformation of steel pipes with internal pressure under axial compression and bending load under seismic action / S.S. Hector, S.C. Carlos // The 14-th World Conference on Earthquake Engineering. October 12–17, 2008. Beijing, China.
4. Eiber, P.J. Outside Force Causes Most Natural Gas Pipeline Failures / P.J. Eiber // Oil and Gas J. – 1987. – Vol. 85, no. 11. – P. 52–57.
5. Малинин, Н.Н. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек / Н.Н. Малинин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 2. – С. 115–118.

6. Моношков, А.Н. Пластическая устойчивость и ее роль в оценке прочности труб / А.Н. Моношков, С.И. Пыхов, И.А. Пустин // Производство труб с покрытиями, отделка и контроль качества труб. – М.: Metallurgiya, 1972. – С. 77–81.
7. Куркин, С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением / С.А. Куркин. – М.: Машиностроение, 1976. – 183 с.
8. Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179–185.
9. Дильман, В.Л. О потере пластической устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 5. – С. 50–57.
10. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 141–151.
11. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 201 с.
12. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2011. – 275 с.
13. Дильман, В.Л. Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей прослойку из менее прочного материала / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2013. – № 10. – С. 21–24.
14. Swift, H.W. Plastic Instability under Plane Stress / H.W. Swift // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1952. – Vol. 1, no. 1. – P. 1–18.
15. Marciniak, Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych / Z. Marciniak // Mech. teoretyczna i stosowana. – 1966. – Vol. 4, no. 3. – P. 209–220.
16. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11–16.
17. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 415 с.
18. Дяб А.Н. Критические состояния однородных тонкостенных цилиндрических оболочек при внутреннем давлении и осевом сжатии / А.Н. Дяб // Фундамент. проблемы основных направлений научно-техн. исследований: сб. трудов Междунар. научно-практ. конференции (Волгоград, 17 марта 2018 г.). – Стерлитамак: АМИ, 2018. – С. 35–39.
19. Dilman, V.L. Modelling of Critical Conditions Thin-Walled Cylindrical Shells with a Negative Coefficient Biaxial Loading / V.L. Dilman, T.V. Karpeta, A.N. Dheyab // “Modern problems of innovative technologies in oil and gas production and apply mathematics”. Proceeding of international conference. Baku, December 13–14, 2018. – 2018. – P. 45–47.
20. Dil'man, V.L. Strength of Straight-Seam and Spiral-Seam Pipes in Transmission Gas and Oil Pipelines / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2001. – Vol. 15, Iss. 7. – pp. 557–562.
21. Dil'man, V.L. Static Strength of Welded Joints in Spiral-Seam Pipes / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin, A.A. Voronin // Welding International. – 2001. – Vol. 15, Iss. 10. – P. 812–815.
22. Dil'man, V.L. Evaluation of the Effect of Defects and Service Reliability of Welded Joints in Straight-Seam and Spiral-Seam Pipes / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2002. – Vol. 16, Iss. 2. – P. 139–144.
23. Dil'man, V.L. Load-Carrying Capacity of Straight-Seam Large Diameter Pipes with Defects at the Fusion Boundary of the Welded Joint / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2003. – Vol. 17, Iss. 5. – P. 376–380.
24. Dil'man, V.L. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion Line of the Weld / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2004. – Vol. 18, no. 10. – P. 805–808.
25. Dil'man, V.L. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of Large Diameter by the Method of Slip Lines / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Strength of Materials. – 2004. – Vol. 36, Iss. 3. – P. 274–281.

26. Dil'man, V.L., Bearing Capacity of Large-Diameter Helical-Seam Pipes / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Chemical and Petroleum Engineering. – 2002. – Vol. 38, Iss. 5–6. – P. 326–333.

27. Ostsemin, A.A. Calculating Wall Thickness for Major Oil Product Pipelines: Analysis of Regulation Documents / A.A. Ostsemin, V.L. Dil'man // Chemical and Petroleum Engineering. – 2002. – Vol. 38, Iss. 1–2. – P. 58–63.

28. Dil'man, V.L. Effects of Surface Defects on the Static Strength of Welds in Spiral-Seam Tubes / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Chemical and Petroleum Engineering. – 2004. – Vol. 40, Iss. 1–2. – P. 87–93.

29. Ostsemin, A.A. Calculation of Test Pressure for Arterial Pipelines / A.A. Ostsemin, V.L. Dil'man // Chemical and Petroleum Engineering. – 2003. – Vol. 39, Iss. 1–2. – P. 16–22.

30. Воронцов, А.Л. Об аппроксимации кривых упрочнения / А.Л. Воронцов // Вестник машиностроения. – 2002. – № 1. – С. 51–54.

31. Кроха, В.А. О зависимости показателя деформационного упрочнения от степени деформации и выполнении степенного закона упрочнения / В.А. Кроха // Проблемы прочности. – 1981. – № 8. – С. 72–77.

32. Дильман, В.Л. О влиянии аппроксимации диаграммы деформирования на точность критериев несущей способности тонкостенных оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Эбель // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 638–639.

Поступила в редакцию 30 сентября 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 47–55*

DOI: 10.14529/mmph190406

MATHEMATICAL MODELING OF FRACTURE CONDITIONS OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE AND AXIAL TENSION

T.V. Karpeta

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: etv1980@mail.ru

The stability loss conditions under plastic deformation of a thin-walled cylindrical shell, including large-diameter pipes, under tensile (positive) axial stresses and compressive (negative) ring stresses are considered. The purpose of the article is to specify the dependences of critical deformations, stresses, pressures, and axis loads on the shell on the parameters and loading conditions. The research method is based on the application of Swift–Marciniak criterion on the loss in stability of the plastic deformation process. The material of the shell is assumed to be isotropic with exponential-power deformation diagram. Explicit analytical expressions for the target values were obtained. Considering the given parameters of the shell and loading conditions, the results allow to determine critical pressures, critical axial loads and wall thickness at a given working pressure.

Keywords: thin-walled cylindrical shell; large-diameter pipe; plastic stability; Swift criterion; critical deformations; critical stresses; critical pressures; localization of plastic deformation.

References

1. Chernyaev V.D., Chernyaev K.V., Berezin V.L. *et al. Sistemnaya nadezhnost' truboprovodnogo transporta uglevodorodov* (System Reliability of Hydrocarbon Pipeline Transport). Moscow, Nauka Publ., 1997, 516 p. (in Russ.).

2. Borodavkin P.P., Berezin V.L. *Sooruzhenie magistral'nykh truboprovodov* (Main pipeline construction). Moscow, Nedra Publ., 1987, 471 p. (in Russ.).

3. Hector S.S., Carlos S.C. Deformation of Steel Pipes with Internal Pressure under Axial Compression and Bending Load Under Seismic Action. *The 14-th World Conference on Earthquake Engineering*. October 12–17, 2008, Beijing, China.

4. Eiber P.J. Outside Force Causes Most Natural Gas Pipeline Failures. *Oil and Gas J.*, 1987, Vol. 85, no. 11, pp. 52–57.

5. Malinin N.N. Ustoychivost' dvukhosnogo plasticheskogo rastyazheniya anizotropnykh listov i tsilindricheskikh obolochek (Biaxial Plastic Extension Stability of Anisotropic Sheets and Cylindrical Shells). *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1971, no. 2, pp. 115–118. (in Russ.).

6. Monoshkov A.N., Pykhov S.I., Pustin I.A. Plasticheskaya ustoychivost' i ee rol' v otsenke prochnosti trub (Plastic Stability and its Role in Assessing Pipes Strength). *Proizvodstvo trub s pokrytiami, otdelka i kontrol' kachestva trub* (Coated Pipe Manufacturing, Pipe Finishing and Quality Control), Moscow, Metallurgiya Publ., 1972, pp. 77–81. (in Russ.).

7. Kurkin S.A. *Prochnost' svarnykh tonkostennykh sosudov, rabotayushchikh pod davleniem* (Strength of Welded Thin-Walled Pressure Vessels). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 183 p. (in Russ.).

8. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. O vliyaniy dvukhosnosti nagruzheniya na nesushchuyu sposobnost' trub magistral'nykh gazonefteprovodov (On the Effect of the Deformation Diagram Approximation on the Accuracy of the Criteria of the Thin-Walled Shells Bearing Capacity). *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2000, no. 5, pp. 179–185. (in Russ.).

9. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. O potere plasticheskoy ustoychivosti tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek (On the Loss of Plastic Stability of Thin-Walled Cylindrical Shells). *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, 2002, no. 5, pp. 50–57. (in Russ.).

10. Dil'man V.L. Plastic Instability of Thin-Walled Cylindrical Shells. *Mech. Solids*, 2005, Vol. 40, Iss. 4, pp.113–121.

11. Dil'man V.L. *Matematicheskie modeli napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek* (Mathematical Models of the Stress State of Inhomogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells), Chelyabinsk, Izd-vo YuUrGU Publ., 2007, 201 p. (in Russ.).

12. Dil'man V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy myagkikh prosloek v neodnorodnykh soedineniyakh* (Mathematical Modeling of Soft Layers Critical State in Inhomogeneous Compounds). Chelyabinsk, Izdatel'skiy Tsentr YuUrGU Publ., 2011, 275 p. (in Russ.).

13. Dilman V.L., Karpeta T.V. Critical State of a Thin-Walled Cylindrical Shell Containing an Interlayer Fabricated from a Material of Lesser Strength. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2014, Vol. 49, Issue 9–10, pp. 668–674.

14. Swift H.W. Plastic Instability under Plane Stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1952, Vol. 1, no. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90002-1

15. Marciniak Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych. *Mech. teoretyczna i stosowana*, 1966, Vol. 4, no. 3, pp. 209–220.

16. Koval'chuk G.I. K voprosu o potere ustoychivosti plasticheskogo deformirovaniya obolochek (On the Issue of Plastic Deformation Stability Loss of the Shells). *Problemy prochnosti*, 1983, no. 5, pp. 11–16. (in Russ.).

17. Pisarenko G.S. *Deformirovanie i prochnost' materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii* (Deformation and Strength of Materials under Complex Stress State). Kiev, Naukova dumka Publ., 1976, 415 p. (in Russ.).

18. Diyab A.N. Kriticheskie sostoyaniya odnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek pri vnutrennem davlenii i osevom szhatii (Critical States of Homogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells under Internal Pressure and Axial Compression). *Fundament. problemy osnovnykh napravleniy nauchno-tekhn. issledovaniy: sb. trudov Mezhdunar. nauchno-prakt. Konferentsii, Volgograd, 17 marta 2018 g.* (Proceedings of the International Scientific and Practical Conference “Fundamental Problems of the Main Directions of Scientific and Technical Research”, Volgograd, March 17, 2018), Sterlitamak, AMI Publ., 2018, pp. 35–39. (in Russ.).

19. Dilman V.L., Karpeta T.V., Dheyab A.N. Modelling of Critical Conditions Thin-Walled Cylindrical Shells with a Negative Coefficient Biaxial Loading. *Proc. Int. conference «Modern problems of innovative technologies in oil and gas production and apply mathematics»*, Baku, December 13–14, 2018, pp. 45–47.

20. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Strength of Straight-Seam and Spiral-Seam Pipes in Transmission Gas and Oil Pipelines. *Welding International*, 2001, Vol. 15, Iss. 7, pp. 557–562. DOI: 10.1080/09507110109549404

21. Dilman V.L., Ostsemin A.A., Voronin A.A. Static Strength of Welded Joints in Spiral-Seam Pipes. *Welding International*, 2001, Vol. 15, Iss. 10, pp. 812–815. DOI: 10.1080/09507110109549447

22. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Evaluation of the Effect of Defects and Service Reliability of Welded Joints in Straight-Seam and Spiral-Seam Pipes. *Welding International*, 2002, Vol. 16, Iss. 2, pp. 139–144. DOI: 10.1080/09507110209549507

23. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Load-Carrying Capacity of Straight-Seam Large Diameter Pipes with Defects at the Fusion Boundary of the Welded Joint. *Welding International*, 2003, Vol. 17, Iss. 5, pp. 376–380. DOI: 10.1533/wint.2003.3013

24. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion line of the Weld. *Welding International*, 2004, Vol. 18, Iss. 10, pp. 805–808. DOI: 10.1533/weli.17.5.376.22011

25. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of large Diameter by the Method of Slip Lines. *Strength of Materials*, 2004, Vol. 36, Iss. 3, pp. 274–281. DOI: 10.1023/B:STOM.0000035761.47001.4c

26. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Bearing Capacity of Large-Diameter Helical-Seam Pipes. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2002, Vol. 38, Iss. 5–6, P. 326–333. DOI: 10.1023/A:1020146314335

27. Ostsemin A.A., Dil'man V.L. Calculating Wall Thickness for Major Oil Product Pipelines: Analysis of Regulation Documents. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2002, Vol. 38, Iss. 1–2, pp. 58–63. DOI: 10.1023/A:1015278306138

28. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Effects of Surface Defects on the Static Strength of Welds in Spiral-Seam Tubes. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2004, Vol. 40 (1–2), pp. 87–93. DOI: 10.1023/B:CAPE.0000024143.53688.ca

29. Ostsemin A.A., Dil'man V.L. Calculation of Test Pressure for Arterial Pipelines. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2003, Vol. 39, Iss. 1–2, pp. 16–22. DOI: 10.1023/A:1023730221885

30. Vorontsov A.L. Ob approksimatsii krivykh uprochneniya (On the Approximation of Hardening Curves). *Vestnik mashinostroeniya*, 2002, no. 1, pp. 51–54. (in Russ.).

31. Krokha V.A. O zavisimosti pokazatelya deformatsionnogo uprochneniya ot stepeni deformatsii i vypolnenii stepennogo zakona uprochneniya (On the Approximation of Hardening Curves Dependence of the Strain Hardening Index on the Degree of Deformation and the Fulfillment of the Power Hardening Law). *Problemy prochnosti*, 1981, no. 8, pp. 72–77. (in Russ.).

32. Dil'man V.L., Ebel' A.A. O vliyanii approksimatsii diagrammy deformirovaniya na tochnost' kriteriev nesushchey sposobnosti tonkostennykh obolochek (On the Dependence of the Strain Hardening Index on the Degree of Deformation and the Implementation of the Power Law of Hardening). *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2006, Vol. 13, Iss. 4, pp. 638–639. (in Russ.).

Received September 30, 2019

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СКОРОСТИ НА ДОСТУПНОМ УЧАСТКЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЧЕНИЯ

А.И. Короткий, И.А. Цепелев

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Российская Федерация
E-mail: korotkii@imm.uran.ru*

Построен метод и разработан алгоритм определения неизвестного распределения скорости втекания вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в общий ее поток по дополнительным измерениям скорости течения жидкости на каком-либо доступном наблюдению участке свободной поверхности этого потока. Задача формализуется как обратная граничная задача для модели движения рассматриваемой жидкости. Задача является, вообще говоря, некорректной и решается вариационным методом. Для этого вводится некоторый функционал качества, представляющий собой среднеквадратичную норму разницы (невязки) между наблюдениями скорости на доступной свободной поверхности и виртуальными скоростями, вычисляемыми с помощью специально поставленной вспомогательной задачи граничного управления, которую обычно называют прямой задачей. В нашем случае управлением является скорость жидкости, втекающей в общий поток на недоступном прямому наблюдению участке границы. Искомое решение задачи есть точка минимума этого функционала. Для ее нахождения используется метод градиентного спуска. Этот метод позволяет построить минимизирующие функционал последовательности с помощью предварительно аналитически найденных градиентов функционала. Реализация метода минимизации сводится к последовательному решению соответствующих задач граничного управления. Проведены расчеты модельного примера.

Ключевые слова: вязкая жидкость; модель Навье–Стокса; обратная граничная задача; вариационный метод; численное моделирование.

Введение

Опишем содержательную сторону задачи. Пусть жидкость втекает в некоторую область Ω через участок Γ_2 границы $\Gamma = \partial\Omega$ этой области. Наблюдение за движением жидкости на этом участке невозможно. Возможно наблюдение и измерение скорости движения жидкости на участке Γ_0 границы Γ ($\Gamma_2 \cap \Gamma_0 = \emptyset$). На Γ_0 движение жидкости считается свободным. Содержательным примером описанной ситуации может служить истечение жидкости через вертикальную щель или канал на горизонтальную поверхность (рис. 1). Задача состоит в том, чтобы по измерениям скорости движения жидкости на доступной наблюдению свободной поверхности определить неизвестное распределение скоростей втекающей жидкости.

Математическая модель движения жидкости в области Ω включает в себя уравнение Навье–Стокса (уравнение Стокса) и уравнение несжимаемости. На границе Γ области Ω задаются подходящие граничные условия для скорости, давления или напряжения. Соответствующую краевую задачу для определения поля скоростей втекающей жидкости и определения поля скоростей движения жидкости во всей области Ω назовем обратной задачей.

Обратные задачи по своей сущности являются некорректными [1–4]. На практике это приводит к тому, что малые ошибки в задании исходных данных и (или) неустранимые погрешности вычислений приводят к неконтролируемым искажениям в определении решения задачи. Обычно это проявляется в неустойчивости решения или нарушении фундаментальных законов физики, которые лежат в основе математического моделирования. Методы и алгоритмы, представленные в работе, позволяют найти адекватное решение поставленной обратной задачи. Вариационный метод регуляризации Тихонова позволяет заменить исходную некорректную задачу задачей оп-

тимизации квадратичного целевого функционала [1–5]. Для решения экстремальной задачи выбран метод градиентного спуска, при этом исходная задача сводится к последовательному решению корректно поставленных краевых задач граничного управления. Для тестирования предлагаемого метода проведен вычислительный эксперимент, демонстрирующий работоспособность предложенного метода. Подобные задачи находят многочисленные приложения в теории и практике [1–7]. Работа продолжает исследования [6, 7].

Постановка задачи

Рассмотрим 2D-вариант задачи. Будем считать, что жидкость является ньютоновской высоковязкой неоднородной и несжимаемой, а ее движение является изотермическим и стационарным. В случае высокой вязкости и (или) малой скорости движения жидкости число Рейнольдса для такого течения можно считать равным нулю. Таким образом, в ряде случаев уравнение Стокса можно принять в качестве основного при моделировании движения такой жидкости [8, 9]. В безразмерном виде уравнения движения имеют вид

$$\Omega: \nabla \cdot (\mu (\nabla u + \nabla u^T)) = \nabla p + \rho e_2, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad (1)$$

где $x \in \Omega$ – пространственная координата; $u = (u_1(x); u_2(x))$ – скорость жидкости; $p = p(x)$ – давление; $\mu = \mu(x)$ – вязкость; $\rho = \rho(x)$ – плотность; $e_2 = (0, 1)$ – единичный вектор; T – транспонирование тензора; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^2 ; ∇ – градиент; $\nabla \cdot$ – дивергенция.

На границе $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ рассматриваются граничные условия (см. рис. 1)

$$\Gamma_0: p = 0, \sigma(u) \triangleq \mu (\nabla u + \nabla u^T) = 0, u = u_0; \Gamma_1: \langle u, n \rangle = 0, \sigma(u)n - \langle \sigma(u)n, n \rangle n = 0; \Gamma_3: u = 0. \quad (2)$$

Граница Γ_0 свободна и на ней измеряется скорость движения жидкости u_0 . На границе Γ_1 задано условие симметрии. На границе Γ_2 жидкость втекает с известными плотностью и вязкостью, но скорость ее втекания неизвестна. На границе Γ_3 задано условие прилипания.

Обратная задача состоит в том, чтобы по результатам измерения скорости движения жидкости на свободной поверхности Γ_0 найти скорость втекания жидкости на границе Γ_2 и поле скоростей движения жидкости в Ω , т. е. требуется найти решение задачи (1), (2).

Задача (1), (2), вообще говоря, не обладает свойством устойчивости [4–7] по отношению к возмущению измеряемой скорости u_0 , для ее решения требуются специальные методы.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим вспомогательную задачу граничного управления, которую будем называть прямой задачей. Она в области Ω описывается уравнениями (1) со следующими граничными условиями:

$$\Gamma_0: p = 0, \sigma(u) = 0; \Gamma_1: \langle u, n \rangle = 0, \sigma(u)n - \langle \sigma(u)n, n \rangle n = 0; \Gamma_2: u = \xi; \Gamma_3: u = 0. \quad (3)$$

Вопросы корректности прямой и близких к ней задач обсуждались в [4, 5, 7, 8].

Метод решения обратной задачи

Для построения алгоритма решения задачи перейдем к вариационной постановке обратной задачи. Пусть наблюдаемая скорость движения жидкости u_0 на Γ_0 в обратной задаче соответствует некоторому заранее неизвестному распределению скорости (управляющему параметру) $u = \xi^*$ на границе Γ_2 в прямой задаче. Обозначим $u^* \in \Omega$ решение задачи (1), (3) при заданном граничном условии $u = \xi^* \in \Gamma_2$. Ясно, что $u^* = u_0$ на Γ_0 . Рассмотрим функционал качества

$$I(\xi) = \int_{\Gamma_0} \| u[\xi] - u_0 \|_{\mathbb{R}^2}^2 d\Gamma,$$

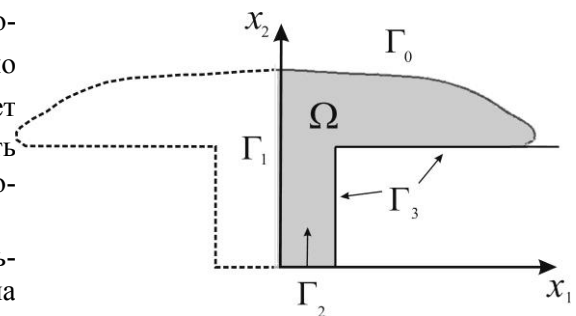


Рис. 1. Модельная область и ее граница

где $u[\xi]$ – решение прямой задачи (1), (3), где граничным условием Γ_2 служит управляющее воздействие $u = \xi$. Данный функционал примет нулевое значение при $\xi = \xi^*$ ($I(\xi^*) = 0$). Искомое граничное управление ξ^* на Γ_2 является минимизирующим элементом в вариационной задаче

$$I(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V. \quad (4)$$

здесь V – некоторое множество допустимых управлений на Γ_2 и элемент $\xi^* \in V$.

От решения обратной задачи (1), (2) можно перейти к решению задачи (4). Для решения данной вариационной задачи применим итерационный метод градиентного спуска [10]. Для того чтобы придать вычислительному процессу большую устойчивость, добавим к функционалу качества регуляризирующую добавку (параметр регуляризации $\beta > 0$ выбирается эмпирически)

$$J(\xi) = I(\xi) + \beta \int_{\Gamma_2} \|\xi\|_{\mathbb{R}^2}^2 d\Gamma. \quad (5)$$

Минимизирующая последовательность в задаче (5) строится по правилу

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\xi^{(n)}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Шаг спуска вычисляется из скалярной задачи условной минимизации

$$J(\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\xi^{(n)})) \rightarrow \min : \gamma^{(n)} > 0,$$

$$\gamma^{(n)} = J(\xi^{(n)}) \left\| \nabla J(\xi^{(n)}) \right\|_{L^2(\Gamma_2)}^{-2}.$$

Градиент функционала определяется по правилу

$$\nabla J(\xi) = \nabla I(\xi) + 2\beta\xi = (-qn + \sigma(w)n) \Big|_{\Gamma_2} + 2\beta\xi,$$

где (w, q) – решение сопряженной краевой задачи

$$\Omega: \nabla \cdot (\mu (\nabla w + \nabla w^T)) = \nabla q, \quad \nabla \cdot w = 0,$$

$$\Gamma_0: q = 0, \quad \sigma(w)n = 2(u[\xi] - u_0); \quad \Gamma_1: \langle w, n \rangle = 0, \quad \sigma(w)n - \langle \sigma(w)n, n \rangle n = 0; \quad \Gamma_2: w = 0;$$

$$\Gamma_3: w = 0.$$

Таким образом, последовательное решение прямой и сопряженной задач граничного управления позволяет аппроксимировать решение обратной задачи. При этом градиент функционала определяется аналитически. Затраты ресурсов ЭВМ на практике практически полностью состоят в качественном решении двух односторонних задач граничного управления для систем дифференциальных уравнений. Вопросы разрешимости таких задач исследованы в [3–5, 7, 10].

Численное моделирование

Для тестирования приведенного алгоритма были разработаны программные коды в пакете OpenFOAM [11]. Такой подход позволяет эффективно решать задачи механики сплошной среды в областях произвольной геометрии на современных вычислительных кластерах. Метод конечных объемов применялся для аппроксимации задач граничного управления. Тестовый пример рассчитывался на сетке из 10^4 гексаэдральных ячеек.

Расчетная область и исходные данные для решения обратной задачи определялись в пакете ANSYS Fluent [12] следующим образом. В области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается двухфазное ламинарное течение ньютоновской вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Это движение описывается известными уравнениями Навье–Стокса [8]

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \langle u, \nabla(\rho u) \rangle - \nabla \cdot (\eta(u) (\nabla u + \nabla u^T)) = -\nabla p - \rho g, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0;$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \Omega_1; \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega_1;$$

перенос двухкомпонентной несжимаемой жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha u) = 0, \quad \alpha(0, x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0,$$

плотность и вязкость среды может быть вычислена

$$\rho(t, x) = \rho_{ref}(1 - \alpha(t, x)) + \rho\alpha(t, x), \quad \eta(t, x) = \eta_{ref}(1 - \alpha(t, x)) + \eta(x)\alpha(t, x).$$

Здесь $\mu_{ref} = 10^{-4}$ Па·с; $\rho_{ref} = 1$ кг/м³; $\eta = 10^7$ Па·с, $\rho = 2500$ кг/м³, $h = 100$ м. Тогда число Рейнольдса [9] в задаче примет значение $\sim 10^{-4}$. Поэтому далее в моделировании жидкости мы отбрасываем инерционные члены в уравнении движения и переходим к уравнению Стокса. Функция $\alpha(t, x) \in [0, 1]$ характеризует объемное задержание жидкости в момент времени $t \geq 0$ в точке пространства $x \in \Omega_1$. Область Ω определяется как объединение ячеек области Ω_1 , в которых $\alpha(t = 8000s, x) \geq 0,99$ (рис. 2).

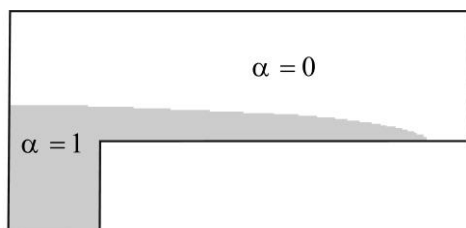


Рис. 2. Определение области Ω

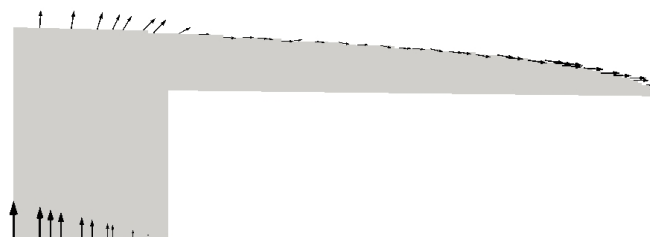


Рис. 3. Тестовая функция для обратной задачи

На границе Γ_2 заданы скорости по правилу $\xi^* = 0,01(1 - x_1)/u_*$, $x_1 \in [0, 1]$, и вычислены соответствующие скорости u_0 на границе между жидкостью и воздухом (см. рис. 3). Эти распределения будут использованы в OpenFOAM для тестирования алгоритма. Параметр регуляризации $\beta = 10^{-6}$, $\xi^{(0)} = 0$.



Рис. 4. Погрешности восстановления скорости

На рис. 4 приведены погрешности восстановления поля скоростей $\|u[\xi^{(n)}] - u[\xi^*]\|_{R^2}$ при $n = 0$ (левый кадр) и $n = 25$ (правый кадр). Далее итерационный процесс не приводит к уменьшению погрешности восстановления. Оттенки серого цвета обозначают градацию относительной погрешности от 9 % до 300 %. Относительная погрешность в наихудшем случае составляет 9 %. Это связано с тем, что погрешности в исходных данных довольно большие. Более подробно данный вопрос для моделей механики высоковязкой жидкости изучен в работе [13].

Заключение

В работе предложен подход численного решения некорректной обратной граничной задачи об определении неизвестного распределения поля скоростей втекающей в некоторую область ньютоновской вязкой неоднородной несжимаемой жидкости по результатам измерения скорости движения жидкости на некоторой части границы области, на которой движение жидкости считается свободным. Развитие вычислительной техники, сочетание аналитических методов исследования систем дифференциальных уравнений, задач управления и устойчивых методов решения экстремальных задач позволяют решать сложные задачи механики сплошной среды. Проведены расчеты характерного примера обратной задачи. При численном моделировании был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН.

Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 18-1-1-8).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – М.: УРСС, 2004. – 480 с.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
5. Алексеев, Г.В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 364 с.
6. Ismail-Zadeh, A. Data-Driven Numerical Modelling in Geodynamics: Methods and Applications / A. Ismail-Zadeh, A. Korotkii, I. Tsepelev. – Berlin: Springer International Publishing, 2016. – 105 p.
7. Короткий, А.И. Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2015. – 168 с.
8. Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability / S. Chandrasekhar. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – 652 p.
9. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
10. Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – New York: Springer, 1999. – 664 p.
11. <http://www.openfoam.org/>
12. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent/>
13. Quantitative reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements / A. Korotkii, D. Kovtunov, A. Ismail-Zadeh *et al.* // Geophysical Journal International. – 2016. – Vol. 205. – Issue 3. – P.1767–1779.

Поступила в редакцию 1 октября 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 56–61*

DOI: 10.14529/mmph190407

RECONSTRUCTION OF THE INLET VISCOUS FLUID FLOW BY VELOCITY MEASUREMENTS ON ANY OBSERVABLE PART OF THE FREE MOVING SURFACE

A.I. Korotkii, I.A. Tsepelev

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: korotkii@imm.uran.ru*

A method has been developed and an algorithm has been elaborated in order to determine an unknown distribution of inflow velocity of viscous heterogeneous incompressible fluid into its common flow. The main data for solution of this problem are changes in the fluid velocity at some observable section of free surface of this flow. Also, movement of the fluid is considered isothermal and stationary. In order to simplify the model of fluid movement, let us believe that the Reynolds number for the fluid flow under consideration is very small. The number indeed is very small at a high viscosity and (or) slow motion of the fluid. Smallness of the Reynolds number allows discarding the total derivative from the time velocity vector in the Navier–Stokes equation of fluid motion. Thus, in a number of cases, the Stokes equation may be considered as the main one when simulating the motion of viscous fluid. The formulated problem gets formalized as an inverse boundary value problem for the model of motion of viscous fluid. The model includes the Stokes equation, the incompressibility equation, and the corre-

sponding boundary conditions. The problem is ill-posed in regard to perturbation of the velocity under measurement. Therefore, numerical solution of the problem requires development of special sustainable methods. We offer using the variational method. For that, we introduce some assessment function which is a disparity between the observed velocity and the virtual velocity calculated out of a specially-set auxiliary boundary control problem, which is usually called the direct problem. Control is the inflow velocity. Desired solution of the problem is the minimum point of the residual functional which is obtained through the gradient descent method. Implementation of the method leads to a sequential solution of the corresponding correctly-posed boundary control problem. Model example has been calculated.

Keywords: viscous fluid; Navier–Stokes equations; inverse boundary value problem; variational method; numerical simulation.

References

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *On the Solution of Ill-Posed Problems*. New York, John Wiley and Sons, 1977, 258 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i eye prilozheniya* (Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications). Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).
3. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* (Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics). Moscow, URSS Publ., 2004, 480 p. (in Russ.).
4. Kabanikhin, S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).
5. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoy zhidkosti* (Analysis and Optimization in Viscous Fluid Hydrodynamics). Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2008, 364 p. (in Russ.).
6. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I. *Data-driven Numerical Modelling in Geodynamics: Methods and Applications*. Berlin, Springer International Publishing, 2016, 105 p. DOI:10.1007/978-3-319-27801-8
7. Korotkiy A.I., Starodubtseva Yu.V. *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modeley teplomassoperenosa* (Modelling of Direct and Inverse Boundary Value Problems for Stationary Models of Heat and Mass Transfer). Ekaterinburg, Izdatel'stvo Ural'skogo universiteta Publ., 2015, 168 p. (in Russ.).
8. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford, Clarendon Press, 1961. 652 p. DOI: 10.1017/s0022112062210592
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. Pergamon, 1987, 554 p.
10. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical Optimization*. New York, Springer, 1999, 664 p. DOI: 10.1007/b98874
11. <http://www.openfoam.org/>
12. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent/>
13. Korotkii A., Kovtunov D., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O. Quantitative Reconstruction of Thermal and Dynamic Characteristics of Volcanic Lava from Surface Thermal Measurements. *Geophysical Journal International*, 2016, Vol. 205, Issue 3, pp. 1767–1779. DOI: 10.1093/gji/ggw117

Received October 1, 2019

АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ С НАКЛОННОЙ КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕЙ И НАРУЖНЫМ МАКРОДЕФЕКТОМ В БОЛЕЕ ПРОЧНОЙ ЧАСТИ

А.И. Носачева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: nosali00@mail.ru

Рассматривается напряженное состояние соединения в виде упруго-пластической полосы с прямолинейными параллельными краями в условиях плоской деформации. Полоса состоит из двух частей разной прочности из однородных изотропных материалов, разделенных прямой, образующей произвольный угол с краем полосы. Соединение подвержено растягиваемой нагрузке. В более прочной части расположен поверхностный макродефект в форме наружного разреза или углубления. Цель работы – исследование критического состояния соединения при всевозможных геометрических и механических параметрах и на этой основе вычисление критического усилия растяжения. Метод основан на исследовании полей характеристик (линий скольжения) в пластической зоне с учетом наличия разрыва напряжений в более прочной части. Дан полный анализ вариантов картин полей характеристик, приводящих к различным эпюрам напряжений по нетто-сечению, в зависимости от взаимного расположения дефекта и контактной границы, размеров дефекта, угла наклона контактной границы и коэффициента механической неоднородности соединения. Разработан алгоритм для вычисления критического растягивающего усилия в общем случае. Вычислены средние критические напряжения в наиболее характерных случаях.

Ключевые слова: упруго-пластическое напряженное состояние; плоская деформация; критические напряжения; поверхностный макродефект; неоднородное соединение.

Введение. Знание распределения напряжений в различных частях неоднородных конструкций необходимо для оценки несущей способности этих конструкций. Измерение распределений напряжений в неоднородных образцах и конструкциях с осложненной геометрией, в том числе при наличии дефектов, вызывает в натуральных экспериментах труднопреодолимые сложности, не говоря о высокой стоимости экспериментов. Поэтому актуально теоретическое, на основе разработки адекватных математических моделей, исследование напряженного состояния (НС) таких конструкций, особенно в критический момент нагружения. Возникающие в этих моделях граничные задачи для нелинейных уравнений в частных производных требуют для их изучения разработки соответствующих аналитических и численных методов. В случае плоской деформации во многих случаях простым и эффективным оказывается метод характеристик (линий скольжения). При этом необходимо учитывать возможность в некоторых случаях разрыва полей напряжений (нарушение гладкости характеристик) [1, 2].

В работе рассматривается НС неоднородной полосы с поверхностным макродефектом в форме наружного разреза или углубления, в более прочной части или на контактной границе, под растягивающей нагрузкой (рис. 1, а). Граница между более прочной (БП) и менее прочной (МП) частью (контактная граница) прямолинейна, но, как нередко бывает в реальных сварных соединениях, не предполагается ортогональной направлению нагрузки, т. к. существуют различные разделки кромок свариваемых частей с наклонными контактными границами [3, 4] (см. рис. 1, а). БП часть соединения может испытывать в процессе пластического деформирования ослабляющее влияние МП части. Изучение НС таких неоднородных соединений необходимо для определения прочностных свойств реальных соединений, содержащих наклонные контактные границы и дефекты, поверхностные и внутренние, различной формы и расположения, в сварных конструкциях, в том числе трубах большого диаметра, сосудах давления, соединительных деталях и др. [4–14].

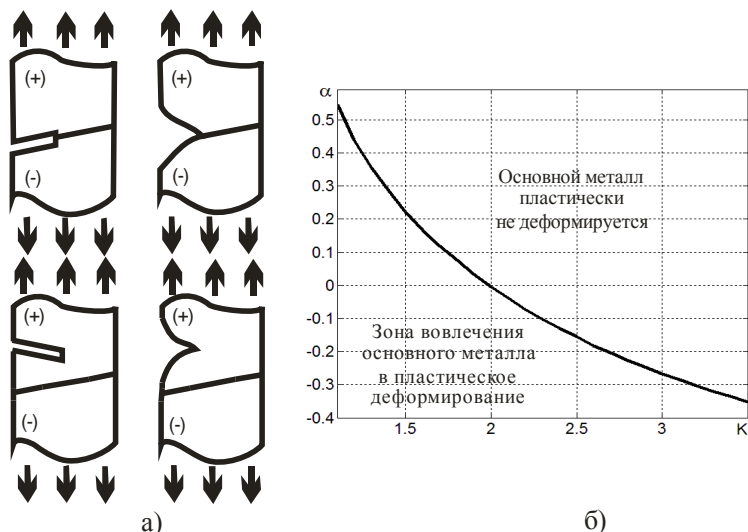


Рис. 1: а) варианты расположения дефектов; б) критерий вовлечения БП части соединения в пластическое деформирование в зависимости от угла α и коэффициента K

Математической моделью НС рассматриваемой полосы является граничная задача для системы уравнений пластического равновесия гиперболического типа (при плоской деформации) относительно компонент тензора напряжений. Она, в частности, содержит внутреннее граничное условие на контактной границе и, в общем случае, оказывается переопределенной [1, 15–17]: участки, которые однозначно определяют решения в окрестностях свободной и контактной поверхности, могут накладываться друг на друга. Следствием этого является разрывность решения задачи и негладкость характеристик. Вид и расположение линий разрыва напряжений определяются формой границы и внутренними граничными условиями [1, 15–18].

В работе исследуется критический момент нагружения. Для неоднородных соединений с поперечной менее прочной прослойкой и не очень большой механической неоднородностью он характеризуется началом течения основного металла в приконтактных зонах [4, 17]. Это явление положено в основу создания вычислительной схемы нахождения критической нагрузки в листовых и стержневых образцах и тонкостенных цилиндрических оболочках, содержащих менее или более прочные поперечные прослойки, в том числе с дефектами.

Исследование критических состояний неоднородных соединений в виде полосы с наклонной контактной границей рассматривалось в работах [19–24]. Заметим, что решение задачи сопряжения для напряжений на наклонной контактной границе позволило установить [20, 21, 23] критерий вовлечения БП части соединения в пластическое деформирование в зависимости от угла наклона α и коэффициента механической неоднородности соединения K (рис. 1, б). В работе [25] изучался случай, когда дефект находился в МП части соединения при $\alpha = 0$.

Цель работы – на основе полного описания полей характеристик, характеризующих критические состояния растягиваемой неоднородной полосы с наружным макродефектом в более прочной части или на контактной границе, при использовании численного решения [21, 23] задачи сопряжения для напряжений на наклонной контактной границе получить алгоритмы для нахождения критической нагрузки, необходимой для разрушения неоднородного соединения в виде полосы в зависимости от его параметров: размеров и расположения дефекта, угла наклона контактной границы α и коэффициента механической неоднородности K .

Всюду в работе верхний индекс «+» указывает на отношение данной величины к БП участку соединения, верхний индекс «-» – к МП участку.

Задача сопряжения для напряжений на контактной границе. Метод нахождения напряженного состояния в различных точках полосы основан на использовании полей характеристик (линий скольжения) участков, находящихся в зоне пластического деформирования. Он в равной мере эффективен для задач растяжения и сжатия [26, 27].

Уравнения равновесия для напряжений на контактной поверхности в безразмерных координатах имеют вид [15–17]:

$$\sigma_{y'}^- = K\sigma_{y'}^+; \quad \tau_{x'y'}^- = K\tau_{x'y'}^+, \quad K = k^+/k^-, \quad (1)$$

где k^+ и k^- – параметры пластичности БП и МП участков соответственно. Здесь $(x'; y')$ – декартовы координаты с осью Ox' , направленной вдоль контактной границы. Безразмерные напряжения получены делением размерных напряжений в БП части на k^+ , а в МП части – на k^- . Благодаря такой искусственной нормировке различными величинами условие пластичности и, как следствие, система уравнений равновесия с условием пластичности в целом всюду имеет одинаковый вид. Будем называть уравнения (1) *условиями сопряжения*. После нахождения условных напряжений для вычисления критических нагрузок, определяемых в БП и МП частях полосы, и построения соответствующих эпюр следует вернуться к естественной нормировке, например, делением размерных напряжений на k^- всюду в соединении, что равносильно умножению на K напряжений $\sigma_{y'}^+$ и $\tau_{x'y'}^+$.

Задача сопряжения для напряжений на контактной границе, впервые рассмотренная одним из авторов для плоской контактной поверхности, ортогональной направлению внешней нагрузки, формулируется так: *на основе граничных условий и заданных на контактной поверхности условий сопряжения (1) для напряжений найти напряжения $\sigma_{y'}^\pm$ и $\tau_{x'y'}^\pm$ на контактной поверхности*.

В работах [15–17] показано, что если угол α наклона контактной поверхности к направлению, ортогональному направлению нагрузки, равен нулю, то БП материал начинает течь в критическом состоянии тогда, когда $K < 2$. В работах [20, 21] установлено, что при $\alpha \neq 0$ начало течения БП материала зависит не только от коэффициента механической неоднородности K , но и от угла α , и найден количественный критерий вовлечения материала БП участка в процесс пластического деформирования. Эта зависимость связана с ограниченностью угла ω^- поворота характеристик в МП части величиной $\pi/4 - \alpha$. С увеличением внешней нагрузки угол ω^- возрастает от нуля до тех пор, пока либо выполняется неравенство

$$\omega^- < \pi/4 - \alpha,$$

либо в какой-то момент БП материал перейдет в пластическое состояние и рост угла ω^- прекратится.

Известно [25], что углы поворота характеристик ω^- и ω^+ связаны с напряжениями на наклонной контактной поверхности уравнениями

$$\sigma_{y'}^+ = 1 - 2\omega^+ + \cos(2\omega^+ + 2\alpha), \quad \sigma_{y'}^- = 1 + 2\omega^- + \cos(2\omega^- + 2\alpha).$$

Эти уравнения и условия сопряжения (1) приводят к системе трансцендентных уравнений для нахождения неизвестных ω^- и ω^+ . Представляя неизвестные функции ω^- и ω^+ в виде степенных рядов по параметру $\lambda = K - 1$:

$$\omega^- = \sum \omega_k^- \lambda^k, \quad \omega^+ = \sum \omega_k^+ \lambda^k$$

в уравнения этой системы, можно последовательно находить коэффициенты $\omega_k, k = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом получены приближенные аналитические выражения для вычисления углов ω^- и ω^+ . Эти выражения, приведенные в [20, 21], имеют в общем случае (когда $\alpha \neq 0$) громоздкий вид и неудобны для использования. Кроме того, ничего неизвестно о сходимости получающихся рядов. В работах [21, 23] разработан алгоритм численного решения упомянутой системы методом итераций. Написанная на его основе в среде MATLAB программа позволяет вычислять значения углов ω^- и ω^+ на каждом участке контактной границы в зависимости от вида поля характеристик на этом участке.

Напряженное состояние по нетто-сечению в полосе, содержащей в более прочной части поверхностный макродефект. Критическую растягивающую нагрузку можно определять через среднее предельное напряжение σ_{yav} по самому слабому сечению. Это сечение – либо нетто-сечение, определяемое положением дефекта в БП части соединения, либо любое сечение в МП части. Обозначим через σ_{yav}^+ – среднее предельное напряжение по нетто-сечению в БП части, проходящее через дно дефекта ортогонально боковой (свободной) поверхности полосы, а через σ_{yav}^- среднее предельное напряжение в МП части. Здесь

$$N_{cr} = \min(N_{cr}^+, N_{cr}^-), \quad N_{cr}^+ = m K \sigma_{yav}^+, \quad N_{cr}^- = t \sigma_{yav}^-. \quad (2)$$

Здесь t – ширина полосы, m – ширина полосы в области дефекта (нетто-сечение), N_{cr}^- – предельное растягивающее усилие для МП части, N_{cr}^+ – предельное растягивающее усилие для БП части, то есть по нетто-сечению. Критические значения нормальных напряжений σ_y^\pm вычисляются по формулам [17, 28]:

$$\sigma_y = 1 - 2\omega + \cos(2\omega), \quad (3)$$

где в простых однородных полях либо $\omega = 0$, когда характеристики одного из семейств образуют угол $\pi/4$ с нетто-сечением, либо $\omega = \omega^+$, $\omega = 0$, когда характеристики одного из семейств образуют угол $\pi/4 - \omega^+$ с нетто-сечением. В веерно-центрированных полях угол ω изменяется от $\pi/4 - \omega^+$ до $\pi/4$.

Произвольность угла наклона контактной поверхности и расположения относительно этой поверхности дефекта приводят к большому разнообразию распределений напряжений по нетто-сечению. Существенна не форма дефекта, а положение точки, расположенной на дне дефекта, относительно свободной и контактной поверхности, которое определяется параметрами g и m (рис. 2, 3), а точнее, отношениями g/t и m/t . На рис. 2 и 3 показаны всевозможные варианты полей характеристик при наличии дефекта с дном в БП части или на контактной поверхности (показаны основные характеристики, определяющие всю картину характеристик).

Случаи, когда $\alpha < 0$, показаны на рис. 2.

Случай а) – дно дефекта расположено на контактной поверхности. Тогда, в соответствии с (2) и (3),

$$N_{cr}^+ = K \left[(1 - 2\omega^+ + \cos(2\omega^+))(m - g) + 2g \right], \quad (4)$$

$$N_{cr}^- = 2t.$$

Известно [21], что угол ω^+ , как правило, не превышает 0,2 (при $|\alpha| \geq 20^\circ$ $\omega^+ \leq 0,1$). Поэтому формулу (4) можно упростить с небольшой ошибкой:

$$N_{cr}^+ \approx K \left[(2 - 2\omega^+ - 0,5(\omega^+)^2)m + (2\omega^+ + 0,5(\omega^+)^2)g \right] \approx K \left[(2 - 2\omega^+)m + 2\omega^+g \right]. \quad (5)$$

Для того чтобы разрушение произошло по нетто-сечению, нужно, чтобы $N_{cr}^+ < N_{cr}^-$, то есть чтобы

$$m - \frac{t}{K} < \omega^+ (m - g).$$

Это имеет место, в частности, если $K < t/m$.

Чтобы рассмотреть другие случаи, введем систему координат, приняв за начало координат точку O на дне дефекта, направив ось Ox по нетто-сечению, ось Oy – в направлении БП части. Для получения приведенных ниже соотношений использовались элементарные соображения из аналитической геометрии.

Случай б) (см. рис. 2). Если дно дефекта расположено достаточно далеко от контактной границы, МП часть не оказывает ослабляющее влияние на БП участок и эпюра напряжений σ_y постоянна вдоль контактной линии. Ограничением на этот случай является условие:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega^+\right) > \frac{g}{m - 2r},$$

где

$$r = \frac{g - m \operatorname{tg}|\alpha|}{1 - \operatorname{tg}|\alpha|} \quad (6)$$

– абсцисса точки пересечения характеристики, проходящей через точку O и линии контакта.

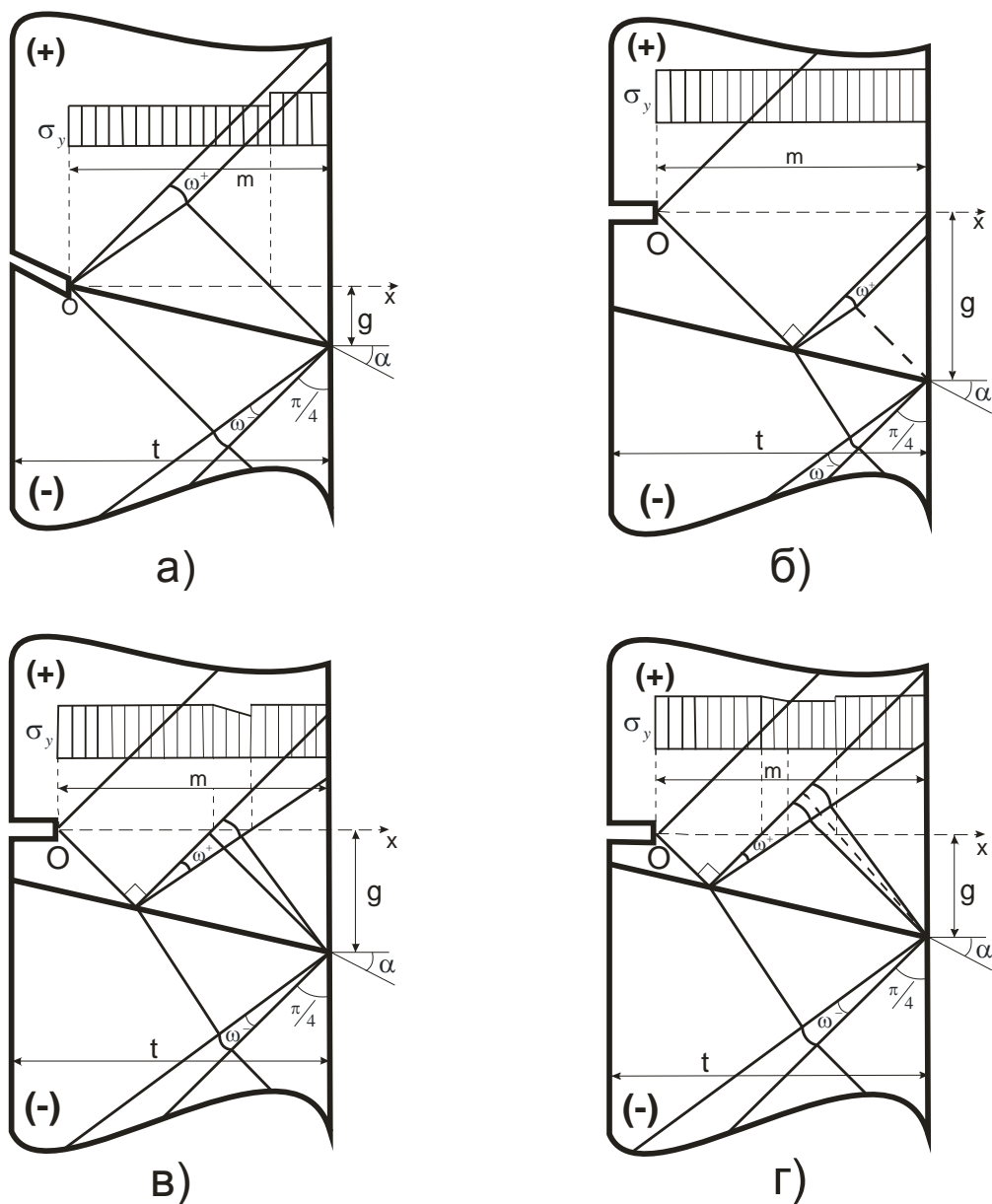


Рис. 2. Схемы полей характеристик и эпюры критических напряжений при отрицательном угле α наклона контактной поверхности: а) дно дефекта на контактной поверхности; б) – г) дно дефекта в БП части соединения: б) линия разрыва напряжений не пересекает нетто-сечение. Нетто-сечение целиком расположено в простом однородном поле характеристик; в) линия разрыва напряжений пересекает нетто-сечение внутри угла ω^+ ; г) линия разрыва напряжений пересекает нетто-сечение до пересечения угла ω^+

В этом случае по нетто-сечению $\sigma_y = 2K$, поэтому $N_{cr}^+ = 2Km$. Чтобы разрушение произошло по нетто-сечению, требуется, в соответствии с (2), выполнение условия $K < t/m$.

Случай в) (см. рис. 2). Ограничением на этот случай является условие:

$$\frac{m-2r}{g} \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \omega^+\right) \leq \frac{m-g-r}{r} \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$\frac{r}{m-g-r} \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega^+\right) \leq \frac{g}{m-2r}.$$

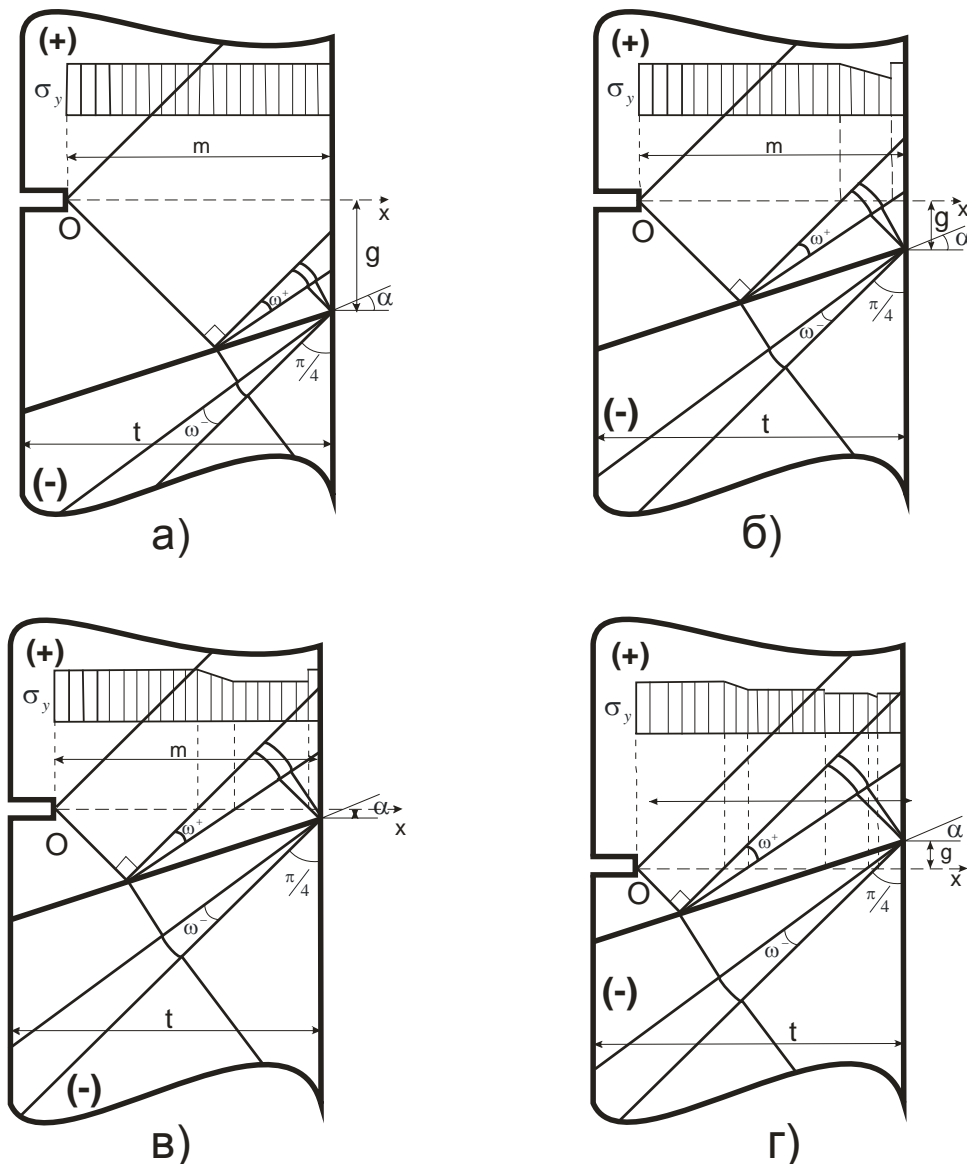


Рис. 3. Схемы полей характеристик и эпюры критических напряжений при положительном угле α наклона контактной поверхности. а) – в) нетто-сечение расположено целиком внутри БП части соединения; а) линия разрыва напряжений не пересекает нетто сечение. Нетто-сечение целиком расположено в простом однородном поле характеристик; б) Линия разрыва напряжений пересекает нетто-сечение внутри угла ω^+ ; в) Линия разрыва напряжений пересекает нетто-сечение до пересечения угла ω^+ ; г) нетто-сечение пересекает контактную границу

Здесь, за исключением небольшого промежутка в средней части, длина которого равна $\omega^+ g$, по нетто-сечению $\sigma_y = 2K$, а на этом промежутке среднее значение σ_y мало отличается от $2K$ и вычисляется по формуле

$$\sigma_y = K(1 - \omega^+ + \cos(2\omega^+)).$$

Поэтому $N_{cr}^+ \approx 2Km$.

Случай г) (см. рис. 2). Ограничением на этот случай является условие:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega^+\right) > \frac{r}{m - g - r}. \tag{8}$$

Или, что то же самое,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \omega^+\right) < \frac{m - g - r}{r}.$$

Напряжения σ_y по нетто-сечению распределены следующим образом. На правом краю на отрезке длиной $g - \omega^+$, до наклонной пунктирной линии на рис. 2, *з*), являющейся линией разрыва напряжений [1], $\sigma_y = 2K$. Левее, после разрыва, напряжения снова постоянны: $\sigma_y = K(1 - 2\omega^+ + \cos(2\omega^+))$, на отрезке $[2r + 2\omega^+; m - g - \omega^+]$. Затем, на отрезке $[2r; 2r + 2\omega^+]$ они возрастают до $\sigma_y = 2K$ и, наконец, в окрестности дна дефекта напряжения снова постоянны: $\sigma_y = 2K$. Поэтому среднее критическое напряжение по нетто-сечению можно представить в виде:

$$N_{cr}^+ = 2K(2r + \omega^+) + K(1 - 2\omega^+ + \cos(2\omega^+))(m - g - 2r) + 2K(g - \omega^+).$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения нетто-сечения и контактной границы, когда $\alpha > 0$ (см. рис. 3). Если дно дефекта расположено достаточно далеко от контактной границы, МП часть не оказывает ослабляющее влияние на БП участок, и эпюра напряжений σ_y постоянна вдоль контактной линии. Ограничением на этот случай (см. рис. 3, *а*) является условие:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega^+\right) < \frac{g}{m - 2r},$$

то есть такое же, как в случае рис. 2, *б*), где на этот раз абсцисса точки пересечения характеристики, проходящей через точку O , и линии контакта имеет вид:

$$r = \frac{g + m \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Аналогично, условия реализации случаев рис. 3, *б*) и *в*) такие же, как в случаях на рис. 2, *в*) и *з*), то есть определяются формулами (7) и (8) соответственно. По тем же формулам вычисляются критические напряжения на нетто-сечении. Случай рис. 3, *з*) исследован в работе [23].

Заключение. В работе дано полное описание случаев взаимного расположения нетто-сечения и контактной границы, приводящих к существенно различным картинам полей характеристик, то есть описаны все случаи, требующие различных вычислительных схем для нахождения критической нагрузки (в работе рассмотрено наиболее важное с точки зрения приложений условие $|\alpha| < \pi/4$). Приведенные аналитические выражения вместе с условиями их реализации, данными также в аналитической форме, позволяют создать несложный алгоритм нахождения критического растягивающего усилия в общем случае расположения дефекта в БП части полосы или на контактной границе, в зависимости от ширины полосы, глубины дефекта, угла наклона и удаленности от дефекта контактной границы и коэффициента механической неоднородности соединения.

Литература

1. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 89–102.
2. Дильман, В.Л. Анализ напряженного состояния неоднородной полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 463–464.
3. Оптимизация конструктивных и геометрических параметров стыковых сварных соединений теплоустойчивых разнородных сталей / М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев, Л.И. Хмарова и др. // Автоматическая сварка. – 1987. – № 8. – С. 27–31.
4. Когут, Н.С. Несущая способность сварных соединений / Н.С. Когут, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Львов: Свит, 1991. – 182 с.
5. Остсемин, А.А. Прочность нефтепровода с поверхностными дефектами / А.А. Остсемин, В.Ю. Заварухин // Проблемы прочности. – 1993. – № 12. – С. 51–59.
6. Dil'man, V.L. Strength of Mechanically Heterogeneous Welded Joints with a Slit-Like Defect / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 1999. – Vol. 13, no. 8. – P. 648–650.

7. Dil'man, V.L. Evaluation of the Effect of Defects and Service Reliability of Welded Joints in Straight-Seam and Spiral-Seam Pipes / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // *Welding International*. – 2002. – Vol. 16, Iss. 2. – P. 139–144.

8. Dil'man, V.L. Load-Carrying Capacity of Straight-Seam Large Diameter Pipes with Defects at the Fusion Boundary of the Welded Joint / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // *Welding International*. – 2003. – Vol. 17, Iss. 5. – P. 376–380.

9. Dil'man, V.L. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion Line of the Weld / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // *Welding International*. – 2004. – Vol. 18, no. 10. – P. 805–808.

10. Dil'man, V.L. Effects of surface defects on the static strength of welds in spiral-seam tubes / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // *Chemical and Petroleum Engineering*. – 2004. Vol. 40, Iss. 1–2. – P. 87–93.

11. Dil'man, V.L. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of Large Diameter by the Method of Slip Lines / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // *Strength of Materials*. – 2004. – Vol. 36, Iss. 3. – P. 274–281.

12. Dil'man, V.L. Static Strength of Mechanically Nonuniform Welded Joints with a One-Sided Surface Defect Subject to Ductile Failure / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // *Chemical and Petroleum Engineering*. – 2005. – Vol. 41, Iss. 9–10. – P. 522–529.

13. Dil'man, V.L. Effect of Defects on the Load Carrying Capacity of Pipes of Transmission Oil and Gas Pipelines under Biaxial Loading / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // *Welding International*. – 2006. – Vol. 20, no. 1. – P. 63–67.

14. Остсемина, А.А. Влияние дефектов сварки, расположенных на границе сплавления, на прочность сварного соединения / А.А. Остсемина, В.Л. Дильман // *Вестник машиностроения*. – 2006. – № 2. – С. 21–26.

15. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2009. – Вып. 3. – № 17 (150). – С. 36–58.

16. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 201 с.

17. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2011. – 275 с.

18. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2011. – № 11. – С. 12–22.

19. Дильман, В.Л. О задаче сопряжения в плоских задачах теории пластичности неоднородных сред / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // *Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна ВЗМШ-2010 (Воронеж, 25–30 января 2010 г.)*. – Воронеж: ВорГУ, 2010. – С. 55.

20. Дильман, В.Л. Особенности напряженного состояния неоднородной полосы с наклонной контактной границей / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // *Труды всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Стерлитамак, 27–30 июня 2011 г.)*. – Уфа: Гилем, 2011. – С. 303–305.

21. Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного твердого тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2012. – Вып. 14. – № 40 (299). – С. 167–171.

22. Носачева, А.И. Анализ напряженного состояния неоднородной полосы с наклонной контактной границей и макродефектом в более прочной части / А.И. Носачева, В.Л. Дильман // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 273–274.

23. Носачева, А.И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом / А.И. Носачева // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 79–84.

24. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний неоднородного слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 46: Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. – Казань: Казанский ун-т, 2013. – С. 176–178.25.

25. Дильман, В.Л. Анализ зависимости напряженного состояния неоднородной полосы с дефектом в менее прочной части / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Наука ЮУрГУ: материалы 66-й научной конференции. Секции естественных наук. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С. 178–185.

26. Dilman, V.L. Features of Stress State of Less Durable Layers in Welded Joints / V.L. Dilman, T.V. Karpeta // Proc. of international conference «Modern problems of innovative technologies in oil and gas production and apply mathematics». Baku, December 13–14, 2018. – P. 48–49.

27. Dilman, V.L. Stress-Strain State of a Plastic Layer under Compression by Two Rigid Parallel Rough Plates / V.L. Dilman, T.V. Karpeta, A.N. Dheyab // Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 946. – P. 768–774.

28. Kachanov, L.M. Foundations of the Theory of Plasticity / L.M. Kachanov. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971.

Поступила в редакцию 30 сентября 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 62–72*

DOI: 10.14529/mmph190408

ANALYSIS OF THE CRITICAL STATE OF A DISCRETE-INHOMOGENEOUS STRIP WITH A TILTED CONTACT BOUNDARY AND AN EXTERNAL MACRODEFECT IN ITS MORE DURABLE PART

A.I. Nosacheva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: nosali00@mail.ru

The article considers the stress state of a joint in the form of an elastic-plastic strip with rectilinear parallel edges under conditions of plane deformation. The strip consists of two parts of different strengths made of homogeneous isotropic materials, separated by a straight line which is forming an arbitrary angle with the edge of the strip. The joint is subjected to tensile stress. In its stronger part, there is a surface macrodefect in the form of an external incision or recess. The purpose of the article is to study the critical state of the joint using various geometrical and mechanical parameters and, on this basis, calculate the critical tensile force. The method is based on the study of characteristic fields (slip lines) in the plastic zone, taking into account the presence of a voltage break in the more durable part. A complete analysis of variations of the patterns of characteristic fields leading to different stress diagrams over the net cross section is given, depending on the relative position of the defect and the contact boundary, the size of the defect, the angle of inclination of the contact boundary, and the coefficient of mechanical heterogeneity of the joint. An algorithm has been developed to calculate the critical tensile force in the general case. The average critical stresses in the most characteristic cases have been calculated.

Keywords: elastic-plastic stress state; plane deformation; critical stresses; surface macrodefect; inhomogeneous connection.

References

1. Dil'man V.L. Stress State and Strength of an Inhomogeneous Plastic Strip with a Defect in a Stronger Part. *Mechanics of Solids*, 2010, Vol. 45, no. 2, pp. 226–237. DOI: 10.3103/s0025654410020081

2. Dil'man V.L. Analiz napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnoy polosy s defektom v bolee prochnoy chasti (Analysis of the Stressed State of an Inhomogeneous Strip with a Defect in its More

Durable Part). *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2008, Vol. 15, no. 3, pp. 463–464. (in Russ.).

3. Shakhmatov M.V., Erofeev V.V., Khmarova L.I. *et al.* Optimizatsiya konstruktivnykh i geometricheskikh parametrov stykovykh svarnykh soedineniy teploustoychivykh raznorodnykh staley (Optimization of Structural and Geometrical Parameters of Butt-Welded Joints of Inhomogeneous Thermal-Resistant Steels). *Avtomaticheskaya svarka*, 1987, no. 8, pp. 27–31. (in Russ.).

4. Kogut N.S., Shakhmatov M.V., Erofeev V.V. *Nesushchaya sposobnost' svarnykh soedineniy* (Bearing Capacity of Welded Joints). L'vov, Svit Publ., 1991, 182 p. (in Russ.).

5. Ostsemin A.A., Zavarukhin V.Yu. Prochnost' nefteprovoda s poverkhnostnyimi defektami (Strength of a Petroleum Pipeline with Surface Defects). *Problemy prochnosti*, 1993, no. 12, pp. 51–59. (in Russ.).

6. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Strength of Mechanically Heterogeneous Welded Joints with a Slit-Like Defect. *Welding International*, 1999, Vol. 13, no. 8, pp. 648–650.

7. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Evaluation of the Effect of Defects and Service Reliability of Welded Joints in Straight-Seam and Spiral-Seam Pipes. *Welding International*, 2002, Vol. 16, Iss. 2, pp. 139–144. DOI: 10.1080/09507110209549507

8. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Load-Carrying Capacity of Straight-Seam Large Diameter Pipes with Defects at the Fusion Boundary of the Welded Joint. *Welding International*, 2003, Vol. 17, Iss. 5, pp. 376–380. DOI: 10.1533/wint.2003.3013

9. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion Line of the Weld. *Welding International*, 2004, Vol. 18, Iss. 10, pp. 805–808. DOI: 10.1533/weli.17.5.376.22011

10. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Effects of Surface Defects on the Static Strength of Welds in Spiral-Seam Tubes. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2004, vol. 40 (1–2), pp. 87–93. DOI: 10.1023/B:CAPE.0000024143.53688.ca

11. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Analysis of the ductile strength of welds weakened by notches in longitudinally welded pipes of large diameter by the method of slip lines. *Strength of Materials*, 2004, Vol. 36, Iss. 3, pp. 274–281. DOI: 10.1023/B:STOM.0000035761.47001.4c

12. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Static Strength of Mechanically Nonuniform Welded Joints with a One-Sided Surface Defect Subject to Ductile Failure. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2005, Vol. 41, Iss. 9–10, pp. 522–529. DOI: 10.1007/s10556-006-0012-6

13. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Effect of Defects on the Load Carrying Capacity of Pipes of Transmission Oil and Gas Pipelines under Biaxial Loading. *Welding International*, 2006, Vol. 20, no. 1, pp. 63–67.

14. Ostsemin A.A., Dil'man V.L. Vliyanie defektov svarki, raspolozhennykh na granitse splavleniya, na prochnost' svarnogo soedineniya (The impact of welding defects positioned on the weld fusion boundary on the joint weld efficiency). *Vestnik mashinostroeniya*, 2006, no. 2, pp. 21–26. (in Russ.).

15. Dil'man V.L. Research of the Mathematical Models of the Stress Condition of the Thin-Walled Heterogeneous Cylindrical Shells Based on Analytical Methods. *Bulletin of the South Ural State University, Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2009, Vol. 3, no. 17(150), pp. 36–58. (in Russ.).

16. Dil'man V.L. *Matematicheskie modeli napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek* (Mathematical Models of the Stress State of Inhomogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells), Chelyabinsk, Izd-vo YuUrGU Publ., 2007, 201 p. (in Russ.).

17. Dil'man V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy myagkikh prosloek v neodnorodnykh soedineniyakh* (Mathematical Modeling of the Critical States of Soft Layers in Inhomogeneous Compounds). Chelyabinsk, Izdatel'skiy Tsentr YuUrGU Publ., 2011, 275 p. (in Russ.).

18. Eroshkina T.V., Dilman V.L. Mathematical Modeling of the State Stress of a Transverse Plastic Layer in a Round Rod. *Russian Mathematics*, 2011, Vol. 55, Iss. 11, pp. 9–17. DOI: 10.3103/S1066369X111110028

19. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. O zadache sopryazheniya v ploskikh zadachakh teorii plastichnosti neodnorodnykh sred (On the Conjunction Problem in Plane Problems of the Theory of

Elasticity of Inhomogeneous Media) *Tezisy dokladov Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly S.G. Kreyna VZMSh-2010 (Voronezh, 25–30 yanvarya 2010 g.)* (Proc. of the Voronezh Winter Mathematical School named after S.G. Kreina VZMSh-2010 (Voronezh, January 25–30, 2010).), Voronezh, VorGU Publ., 2010, pp. 55. (in Russ.).

20. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. Osobennosti napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnoy polosity s naklonnoy kontaktnoy granitsej (Specific Features of the Stress State of an Inhomogeneous Strip with a Tilted Contact Boundary). *Trudy vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya" (g. Sterlitamak, 27–30 iyunya 2011 g.)* (Proceedings of the All-Russian Scientific Conference with International Participation "Differential Equations and Their Applications" (Sterlitamak, June 27–30, 2011).). Ufa, Gilem, Publ., 2011, pp. 303–305. (in Russ.).

21. Dilman V.L., Nosacheva A.I. The Numerical Analysis of Tensions on the Inclined Contact Surface at Stretching of Discrete-Heterogeneous Solid. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, vol. 14, no. 40 (299), pp. 167–171. (in Russ.).

22. Nosacheva A.I., Dil'man V.L. Analiz napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnoy polosity s naklonnoy kontaktnoy granicej i makrodefektom v bolee prochnoy chasti (Analysis of the Stress State of an Inhomogeneous Strip with a Tilted Contact Boundary and a Macro Defect in its More Durable Part). *Obozrenie prikladnoj i promishlennoj matematiki*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 273–274. (in Russ.).

23. Nosacheva A.I. Mathematical Modelling a Stress State of Inhomogeneous Band with External Macrodefect. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, Vol. 6, no. 3, pp. 79–84. (in Russ.).

24. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy neodnorodnogo sloya pri ploskoy deformatsii (Mathematical Modeling of Critical States of an Inhomogeneous Layer under Plain Deformation). *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo. T. 46: Teoriya funktsiy, ee prilozheniya i smezhnye voprosy* (Proceedings of the Mathematical Center named after N.I. Lobachevsky. Vol. 46: Function theory, its applications and related issues). Kazan': Kazanskiy un-t Publ., 2013, pp. 176–178. (in Russ.).

25. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. Analiz zavisimosti napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnoy polosity s defektom v menee prochnoy chasti (Analysis of dependency of the stress state of an inhomogeneous strip with a defect in its less durable part). *Nauka YuUrGU: materialy 66-y nauchnoy konferentsii. Sektsii estestvennykh nauk* (Proc. of the 66th scientific conference "Science of SUSU". Section of Natural Sciences). Chelyabinsk, Izdatel'skiy tsentr YuUrGU Publ., 2014, pp. 178–185. (in Russ.).

26. Dilman V.L., Karpeta T.V. Features of Stress State of Less Durable Layers in Welded Joints. *Proc. of international conference "Modern problems of innovative technologies in oil and gas production and apply mathematics"*. Baku, December 13–14, 2018, pp. 48–49.

27. Dilman V.L., Karpeta T.V., Dheyab A.N. Stress-Strain State of a Plastic Layer under Compression by Two Rigid Parallel Rough Plates. *Materials Science Forum*, 2019, Vol. 946, pp. 768–774. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.946.768

28. Kachanov L.M. *Foundations of the Theory of Plasticity*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1971.

Received September 30, 2019

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРОВОГО КОНТРОЛЯ С УЧЕТОМ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ВИХРЕТОКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

В.А. Вебер

*Трехгорный технологический институт, филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Трехгорный, Российская Федерация
E-mail: vebervera@gmail.com*

Рассматриваются вопросы математического моделирования при многопараметровом контроле. Цель работы – обоснование необходимости учета конструктивной особенности датчика при построении математических моделей многопараметрового контроля и разработка методологии определения обобщающей характеристики – коэффициента конструктивной чувствительности вихретокового преобразователя. Методология определения основана на анализе годографов вихретокового контроля. Произведены вычислительные эксперименты для расчета конструктивной чувствительности для каждой измерительной точки и всех толщин образцов и величин зазоров. Результаты позволяют оценить конструктивную эффективность используемого вихретокового датчика.

Ключевые слова: вихретоковый контроль; конструктивная особенность датчика; конструктивная чувствительность вихретокового преобразователя.

Введение. В условиях эксплуатации на протяжении длительного времени трубопроводы подвергаются различным внешним и внутренним воздействиям, в результате чего происходит деградация материала, коррозионные повреждения, возникают и развиваются трещины усталости на поверхностях труб и другие виды дефектов. Кроме того, возможны внутренние дефекты технологического происхождения. Несмотря на то, что проектирование трубопроводов по современным меркам и технология изготовления и монтажа должно обеспечить реализацию назначенного ресурса, исключить возможность возникновения таких дефектов нельзя. Чтобы избежать серьезных последствий влияния дефектов, вплоть до нарушений сплошности конструкций, ведущих к аварийным ситуациям, проводятся теоретические исследования работы конструкций, содержащих дефекты, моделирование критических состояний труб и вычислительные эксперименты [1–12].

Современные методы и средства неразрушающего контроля [13, 14], используемые для диагностики трубопроводов, получили широкое развитие и распространение. Одним из широко используемых методов неразрушающего контроля является метод вихревых токов.

Основными сферами использования вихретокового измерительного преобразования являются структуроскопия, дефектоскопия, толщинометрия, измерение угловых и линейных геометрических параметров, селективное обнаружение металлических предметов, измерение электрических и магнитных характеристик материалов и изделий, измерение механических напряжений и деформаций и т. д. [15]. Наряду с указанными выше достоинствами очевидно, что для получения информации об объекте при большом числе влияющих параметров требуется и большое число измеряемых параметров сигнала вихретокового преобразователя, связанных независимыми функциями преобразования с измеряемыми параметрами объекта [16]. Принципы обработки сигналов вихретокового преобразователя при многопараметровом контроле сводятся к решению системы нелинейных уравнений [17]. При составлении данных уравнений не учитывается конструктивная особенность используемого датчика. Построение математической модели ориентировано на модельный вариант: датчик, представляющий собой одновитковую катушку, расположенный непосредственно на плоскости объекта контроля.

Цель работы – обоснование необходимости учета конструктивной особенности датчика при построении математических моделей многопараметрового контроля и разработка методологии определения обобщающей характеристики – коэффициента конструктивной чувствительности вихретокового преобразователя.

Обозначения и допущения. В работах российских и зарубежных авторов рассматриваются различные подходы и разные параметры для оценки эффективности вихретокового преобразователя [18].

В работе [19] предлагается использовать параметр ξ , равный внесённой объектом контроля относительной индуктивности или относительному реактивному сопротивлению при значении обобщенного параметра $\beta \rightarrow \infty$ (на большой рабочей частоте ВТП). При проведении измерений достижение больших значений β проблематично, в связи с чем значение ξ не точно отображает эффективность вихретокового преобразователя.

Введем обозначение для обобщенной характеристики вихретокового преобразователя – конструктивной чувствительности S_c .

Приведенная теория параметрического накладного датчика с магнитопроводом рассматривает понятие коэффициента взаимной индукции между катушкой и ее зеркальным отображением и представлено формулой:

$$M = M_0 e^{-\frac{3h}{R_0}} \quad (1)$$

Формула отображает взаимосвязь – экспоненциальную зависимость выходного сигнала от зазора и эквивалентного радиуса обмотки измерительной катушки. Зазор представляет совокупность реального зазора между ВТП и объектом контроля и расстояния между витками и рабочей поверхностью датчика.

Рассмотрим поведение годографов на примере решения задачи толщинометрии электропроводящего покрытия (Pb) на ферромагнитном основании (сталь 12X18НТ). Годографы приведены на рис. 1.

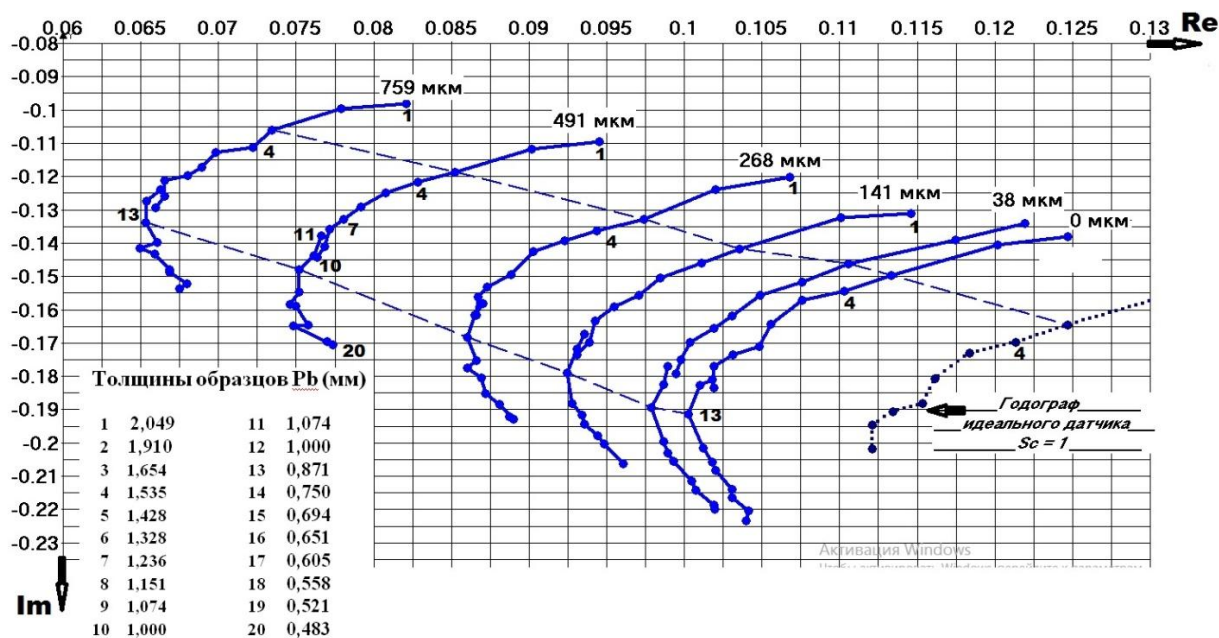


Рис. 1. Годографы обобщенных составляющих Re и Im при различных толщинах покрытия (0,483–2,049 мм) и различных зазорах (0, 38, 141, 268, 491, 759 мкм)

Измерения для построения годографов проводились в два этапа: на диапазоне измерения толщины 0,5–1,0 и 1,0–2,0 мм и с разными зазорами. Необходимость двух этапов обусловлена ограниченностью поверхности основания для размещения 20 образцов.

Эквивалентные точки по толщине покрытия для годографов с различными зазорами, соединённые между собой образуют квазилинию, уходящую в точку с координатами, близкими к 0;0 (по Re и Im составляющим).

Пусть существует годограф, который является идеальным и подобен построенным на основе измерения годографам.

Предложение 1. Предположим, что отношение длины вектора любой точки годографа с 0 зазором к длине соответствующей точки идеального годографа равно 0,90909. Обозначим данное соотношение как конструктивную чувствительность вихрекового преобразователя и представим в виде:

$$S_c = l_0 / l_{ид} \tag{2}$$

Тогда все годографы, расположенные левее идеального, имеют параметр конструктивной чувствительности вихрекового преобразователя меньше указанного выше нулевого годографа.

Вычислительные эксперименты. Рассчитаем значение конструктивной чувствительности для каждой измерительной точки и всех толщин образцов и величин зазоров.

Проведем расчет координат Re, Im и длину вектора для предполагаемого идеального годографа с использованием предполагаемого коэффициента 0,90909. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Расчет координат и длин векторов

0,5–1,0 мм			1,0–2,0 мм		
Re	Im	l	Re	Im	l
0,11200	-0,19912	0,22846	0,13714	-0,15181	0,20458
0,11108	-0,20085	0,22952	0,13220	-0,15448	0,20332
0,11029	-0,21038	0,23754	0,12468	-0,16466	0,20654
0,11134	-0,22169	0,24808	0,12132	-0,16985	0,20873
0,11200	-0,22642	0,25261	0,11836	-0,17297	0,20959
0,11220	-0,22918	0,25516	0,11612	-0,18077	0,21486
0,11338	-0,23526	0,26116	0,11533	-0,18809	0,22064
0,11338	-0,23796	0,26359	0,11342	-0,19074	0,22192
0,11457	-0,24236	0,26807	0,11210	-0,19460	0,22458
0,11437	-0,24563	0,27095	0,11210	-0,20170	0,23076

Подобным образом рассчитываем длины векторов для всех толщин для годографов с зазорами.

Для каждого зазора рассчитаем S_c согласно вышеприведенной формуле. Результаты сведены в табл. 2.

Таблица 2

Конструктивная чувствительность для каждого зазора при разных толщинах

0,88743	0,88561	0,83868	0,85071	0,79054	0,78565	0,69058	0,70690	0,61492	0,62542
0,90333	0,89526	0,85107	0,84628	0,79908	0,78954	0,70883	0,70657	0,62343	0,62144
0,89721	0,88788	0,84840	0,84957	0,79614	0,79740	0,69894	0,70730	0,62696	0,62470
0,89782	0,89044	0,84601	0,85065	0,78770	0,79440	0,69349	0,70540	0,62315	0,63500
0,89435	0,89594	0,84399	0,85767	0,78044	0,79722	0,69307	0,70986	0,61639	0,63300
0,89438	0,89297	0,84488	0,85367	0,78530	0,78551	0,68858	0,70476	0,61792	0,63291
0,89662	0,88149	0,83951	0,84102	0,78398	0,78791	0,69393	0,69876	0,62196	0,62360
0,89770	0,88921	0,84068	0,84947	0,78884	0,79429	0,68659	0,70434	0,61857	0,62315
0,90012	0,89710	0,84907	0,86389	0,79210	0,79525	0,69880	0,71495	0,62196	0,63414
0,89495	0,88861	0,83955	0,85312	0,78117	0,79451	0,68696	0,70731	0,61975	0,62970

Вычислим относительное отклонение от среднего. Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Относительное отклонение от среднего

0,01000	0,00544	0,00653	0,00105	0,00255	0,00823	0,00490	0,00039	0,00899	0,00459
0,00774	0,00540	0,00815	0,00626	0,01338	0,00332	0,02140	0,00007	0,00472	0,01093
0,00091	0,00288	0,00499	0,00239	0,00966	0,00660	0,00715	0,00096	0,01040	0,00575
0,00159	0,00002	0,00216	0,00113	0,00105	0,00281	0,00070	0,00172	0,00428	0,01064
0,00227	0,00617	0,00023	0,00712	0,01026	0,00638	0,00132	0,00458	0,00662	0,00746
0,00224	0,00282	0,00082	0,00242	0,00410	0,00841	0,00778	0,00263	0,00415	0,00732
0,00025	0,01006	0,00554	0,01243	0,00577	0,00537	0,00007	0,01112	0,00235	0,00750
0,00146	0,00140	0,00416	0,00251	0,00039	0,00268	0,01066	0,00322	0,00310	0,00821
0,00417	0,00746	0,00578	0,01442	0,00452	0,00389	0,00695	0,01180	0,00235	0,00927
0,00160	0,00206	0,00549	0,00177	0,00933	0,00295	0,01011	0,00098	0,00121	0,00222

Физика

В результате анализа получаем из 120 измерительных точек (20 образцов, 6 зазоров) 13 точек – погрешность примерно 1 %, 1 точка = 2,14 %. Полученные погрешности определения S_c обусловлены наличием инструментальной погрешности при проведении измерений.

Основные результаты. Выполненные расчеты показывают, что методология определения S_c инвариантна к измерительной точке.

Предложение 2. В рассмотренном вычислительном эксперименте идеальный годограф выбран произвольно. Проведя итерационные вычисления при изменении значений S_c и эквивалентного радиуса вихретокового преобразователя возможно получить экспоненту совпадающей с идеальной.

Вычислительные эксперименты. Вычисления проведены с помощью среды визуального программирования LabView. На рис. 2 показан модуль расчета требуемой компоненты.

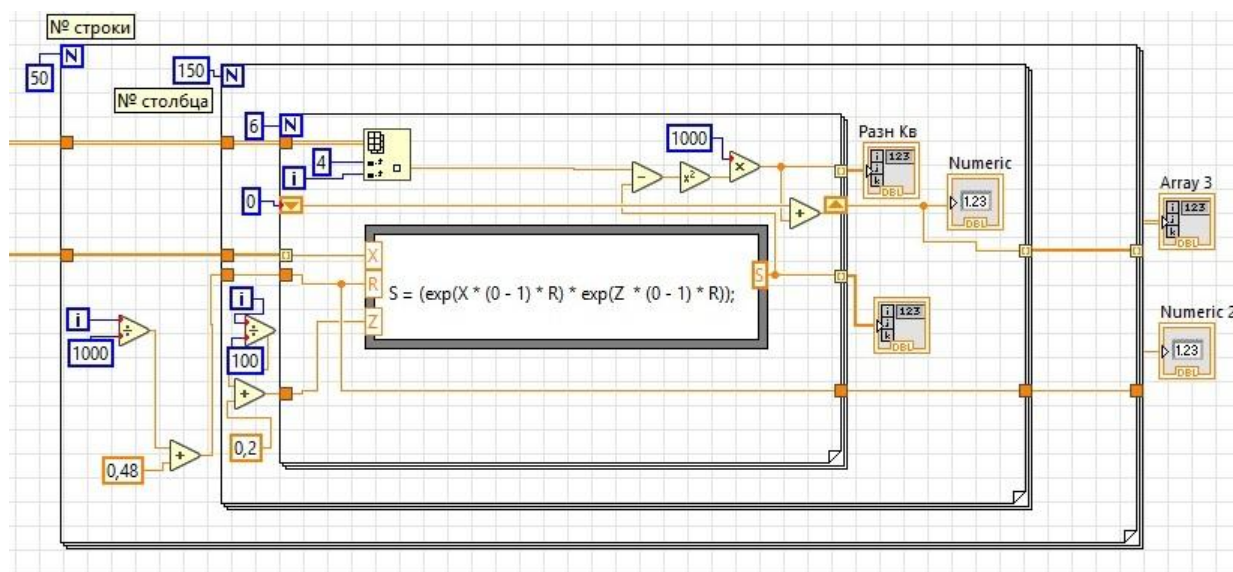


Рис. 2. Модуль расчета требуемой компоненты

В результате вычислений (табл. 4) для трех рабочих частот и трех диапазонов толщин полученные коэффициенты S_c лежат в пределах от 0,69 до 0,75.

Такой разброс обусловлен наличием инструментальной погрешности в измерениях и соответственно большим разбросом определения параметров $R_{экв}$. Полученная точность определения S_c вполне удовлетворяет запросам практического использования.

Полученные коэффициенты S_c

Таблица 4

	Рабочие частоты	Полученные коэффициенты S_c						Среднее
		0,5–1,0 мм		1,0–2,0 мм		2,0–4,0 мм		
		S_c	Дэкв	S_c	Дэкв	S_c	Дэкв	
								0,75
								0,70
	1,88 кГц	0,75	15,20	0,71	11,50	0,70	11,50	0,70
	4,2 кГц	0,70	11,50	0,71	12,10	0,68	10,60	0,71
	8,8 кГц	0,70	11,50	0,69	11,10	0,69	11,10	0,71
								0,69
								0,70
								0,68
								0,69
								0,70

Заключение. В результате работы обоснована необходимость учета конструктивной особенности датчика при построении математических моделей многопараметрового контроля и разработана методология определения обобщающей характеристики – коэффициента конструктивной чувствительности вихретокового преобразователя. Произведены вычислительные эксперименты

для расчета конструктивной чувствительности для каждой измерительной точки и всех толщин образцов и величин зазоров. Создана программа в среде визуально графического программирования – LabView для итерационного вычисления при изменении значений S_c и эквивалентного радиуса вихретокового преобразователя.

Литература

1. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 89–102.
2. Когут, Н.С. Несущая способность сварных соединений / Н.С. Когут, М.В. Шахматов, В.В. Ерофеев. – Львов: Свит, 1991. – 182 с.
3. Dil'man, V.L. Strength of Mechanically Heterogeneous Welded Joints With a Slit-Like Defect / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 1999. – Vol. 13, no. 8. – P. 648–650.
4. Dil'man, V.L. Load-Carrying Capacity of Straight-Seam Large Diameter Pipes with Defects at the Fusion Boundary of the Welded Joint / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2003. – Vol. 17, Iss. 5. – P. 376–380.
5. Dil'man, V.L. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion Line of the Weld / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2004. – Vol. 18, no. 10. – P. 805–808.
6. Dil'man, V.L. Effects of surface defects on the static strength of welds in spiral-seam tubes / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Chemical and Petroleum Engineering. – 2004. – Vol. 40, Iss. 1–2. – P. 87–93.
7. Dil'man, V.L. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of Large Diameter by the Method of Slip Lines / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Strength of Materials. – 2004. – Vol. 36, Iss. 3. – P. 274–281.
8. Dil'man, V.L. Static Strength of Mechanically Nonuniform Welded Joints with a One-Sided Surface Defect Subject to Ductile Failure / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Chemical and Petroleum Engineering. – 2005. – Vol. 41, Iss. 9–10. – P. 522–529.
9. Dil'man, V.L. Effect of Defects on the Load Carrying Capacity of Pipes of Transmission Oil and Gas Pipelines under Biaxial Loading / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2006. – Vol. 20, no. 1. – P. 63–67.
10. Остсемин, А.А. Влияние дефектов сварки, расположенных на границе сплавления, на прочность сварного соединения / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Вестник машиностроения. – 2006. – № 2. – С. 21–26.
11. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2011. – 275 с.
12. Носачева, А.И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом / А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 79–84.
13. Петин, С.В. Обзор методов дефектоскопии при обследовании трубопроводов / С.В. Петин, В.Г. Сидоренко // Молодой ученый. – 2016. – № 2. – С. 194–199. <https://moluch.ru/archive/106/25262/>
14. Внутренние и международные стандарты методов неразрушающего контроля обсадных колонн / XU Jin-long, CAO Biao, HONG Wu-xing, LU Shan-sheng, FENG Jun-han, HUA Bin, YANG Shu-jie // Методы неразрушающего контроля. – 2014. – Т. 36, № 10. – С. 72–77.
15. Ян, Ч. Физическое и математическое моделирование измерительных преобразования в полях вихревых токов / Ч. Ян // Вестник науки Сибири. – 2013. – № 3. – С. 75–85.
16. Гольдштейн, А.Е. Физические основы получения информации: учебник / А.Е. Гольдштейн. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 291 с.
17. Veber, V. Ongoing Control of Technological Processes for Thickness Measurement Tasks Using Eddy-Current Testing Technique / V. Veber, V. Dilman, A. Veber // 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8501607>

18. Capobianco, T.E. Eddy Current Probe Sensitivity as a Function of Coil Constuction Parametrs / T.E. Capobianco, J.D. Splett, H.K. Iyer // *Reseach in Nondestructive Evaluation*. – 1990. – Vol. 2. – Iss. 3. – P. 169–186.

19. Учанин, В.Н. Инвариантная оценка эффективности вихретоковых обмоток для разработки новых преобразователей и технологий контроля / В.Н. Учанин // *Материалы 7-й национальной конференции «Неразрушающий контроль и техническая диагностика UkrNTD-2012»*. – Киев: УТ НКТД, 2012. – С. 66–71.

Поступила в редакцию 1 октября 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 73–79*

DOI: 10.14529/mmph190409

MATHEMATICAL MODELING FOR MULTI-PARAMETER CONTROL CONSIDERING DESIGN FEATURES OF EDDY-CURRENT CONVERTERS

V.A. Veber

*Trekhgornyy Technological Institute, Branch of Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «National Research Nuclear University "MEPhI", Trekhgornyy, Russian Federation
E-mail: vebervera@gmail.com*

This study considers the issues of mathematical modeling in case of multi-parameter control. The purpose of the article is to substantiate the necessity of taking into account the design features of the sensor when constructing mathematical models for multi-parameter control, and to develop a methodology for determining the generalizing characteristics - the design sensitivity coefficient of an eddy-current converter. The methodology is based on the analysis of hodographs of the eddy-current control. Simulation experiments in order to calculate design sensitivity for each control points as well as for every thickness of samples and for each size of gaps have been carried out. The obtained results allow us estimate design efficiency of the used eddy-current sensor.

Keywords: eddy-current test; design feature of the sensor; design sensitivity of eddy-current converter.

References

1. Dil'man V.L. Stress State and Strength of an Inhomogeneous Plastic Strip with a Defect in a Stronger Part. *Mechanics of Solids*, 2010, Vol. 45, no. 2, pp. 226–237. DOI: 10.3103/s0025654410020081
2. Kogut N.S., Shakhmatov M.V., Erofeev V.V. Nesushchaya sposobnost' svarnykh soedineniy (Bearing Capacity of Welded Joints). L'vov, Svit Publ., 1991, 182 p. (in Russ.).
3. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Strength of Mechanically Heterogeneous Welded Joints with a Slit-Like Defect. *Welding International*, 1999, Vol. 13, no. 8, pp. 648–650.
4. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Load-Carrying Capacity of Straight-Seam Large Diameter Pipes with Defects at the Fusion Boundary of the Welded Joint. *Welding International*, 2003, Vol. 17, Iss. 5, pp. 376–380. DOI: 10.1533/wint.2003.3013
5. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion Line of the Weld. *Welding International*, 2004, Vol. 18, Iss. 10, pp. 805–808. DOI: 10.1533/weli.17.5.376.22011
6. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Effects of Surface Defects on the Static Strength of Welds in Spiral-Seam Tubes. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2004, Vol. 40 (1–2), pp. 87–93. DOI: 10.1023/B:CAPE.0000024143.53688.ca
7. Dilman V.L., Ostsemin A.A. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of Large Diameter by the Method of Slip Lines. *Strength of Materials*, 2004, Vol. 36, Iss. 3, pp. 274–281. DOI: 10.1023/B:STOM.0000035761.47001.4c

8. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Static Strength of Mechanically Nonuniform Welded Joints with a One-Sided Surface Defect Subject to Ductile Failure. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2005, Vol. 41, Iss. 9–10, pp. 522–529. DOI: 10.1007/s10556-006-0012-6

9. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Effect of Defects on the Load Carrying Capacity of Pipes of Transmission Oil and Gas Pipelines under Biaxial Loading. *Welding International*, 2006, Vol. 20, no. 1, pp. 63–67.

10. Ostsemin, A.A., Dil'man V.L. Vliyanie defektov svarki, raspolozhennykh na granitse splavleniya, na prochnost' svarnogo soedineniya (The Impact that Welding Defects Located at the Fusion Boundary Have on the Strength of a Welded Joint). *Vestnik mashinostroeniya*, 2006, no. 2, pp. 21–26. (in Russ.).

11. Dil'man V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy myagkikh prosloek v neodnorodnykh soedineniyakh* (Mathematical Modeling of Soft Layers Critical State in Inhomogeneous Compounds). Chelyabinsk, Izdatel'skiy Tsentr YuUrGU Publ., 2011, 275 p. (in Russ.).

12. Nosacheva A.I. Mathematical Modelling a Stress State of Inhomogeneous Band with External Macrodefect. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 79–84. (in Russ.).

13. Petinov S.V., Sidorenko V.G. Obzor metodov defektoskopii pri obsledovanii truboprovodov (A Review of Flaw Detection Methods for Pipeline Inspection). *Molodoy uchenyy*, 2016, no. 2, pp. 194–199. URL <https://moluch.ru/archive/106/25262/> (in Russ.).

14. XU Jin-long, CAO Biao, HONG Wu-xing, LU Shan-sheng, FENG Jun-han, HUA Bin, YANG Shu-jie Vnutrennie i mezhdunarodnye standarty metodov nerazrushayushchego kontrolya obsadnykh kolonn (Domestic and International Standards for Non-Destructive Casing String Testing). *Metody nerazrushayushchego kontrolya*, 2014, Vol. 36, no. 10, pp. 72–77. (in Russ.).

15. Yan Ch. Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie izmeritel'nykh preobrazovaniya v polyakh vikhrevykh tokov (Physical and mathematical modeling of measurement transformations in eddy current fields). *Vestnik nauki Sibiri*, 2013, no. 3, pp. 75–85. (in Russ.).

16. Gol'dshteyn A.E. *Fizicheskie osnovy polucheniya informatsii: uchebnyk* (Physical Fundamentals of Information Obtainment: Textbook). Tomsk, Izd-vo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta Publ, 2010, 291 p. (in Russ.).

17. Veber V., Dilman V., Veber A. Ongoing Control of Technological Processes for Thickness Measurement Tasks Using Eddy-Current Testing Technique. *Proc. 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8501607>. DOI: 10.1109/RUSAUTOCON.2018.8501607

18. Capobianco T.E., Splett J.D., Iyer H.K. Eddy Current Probe Sensitivity as a Function of Coil Constuction Parametrs. *Reseach in Nondestructive Evaluation*, 1990, Vol 2, Iss. 3, pp. 169–186. DOI: 10.1007/BF01606356

19. Uchanin V.N. Invariantnaya otsenka effektivnosti vikhretokovykh obmotok dlya razrabotki novykh preobrazovateley i tekhnologiy kontrolya (Invariant Estimation of the Efficiency of Eddy-Current Winding for the Development of New Converters and Control Techniques). *Materialy 7-y natsional'noy konferentsii "Nerazrushayushchiy kontrol' i tekhnicheskaya diagnostika UkrNTD-2012"* (Proc. 7th National Conference "Non-Destructive Testing and Technical Diagnostics UkrNTD-2012"), Kiev, UT NKTD Publ., 2012, pp. 66–71. (in Russ.).

Received October 1, 2019

Персоналии

ВАЛЕРИЙ ЛЕЙЗЕРОВИЧ ДИЛЬМАН. К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

25 июля 2019 года исполнилось 70 лет со дня рождения и 48 лет с момента начала трудовой деятельности в ЧПИ – ЧГТУ – ЮУрГУ доктора физико-математических наук (2011), заведующего кафедрой математического анализа и методики преподавания математики факультета математики, механики и компьютерных технологий Института естественных и технических наук ЮУрГУ Валерия Лейзеровича Дильмана.

В.Л. Дильман родился 25 июля 1949 года в г. Стерлитамаке Башкирской АССР в рядовой советской семье, которая в 1957 году переехала в Челябинск. Отец, Лейзор Абович, инженер-строитель, мама, Мая Моисеевна, – воспитатель, впоследствии – заведующая детским садом. В семье уже был ребенок, брат, старше Валеры на полтора года. Материальные условия жизни семьи были обычными для того времени, их можно назвать удовлетворительными, но не более того.

Так сложилось, что из-за занятости родителей на работе детство маленький Валера большей частью провел под присмотром бабушки.

В 1956 году Валера пошел в школу. В младших классах он ничем особым специально не интересовался – ни учебой, ни литературой, ни искусством. Например, все попытки родителей приобщить его к музыке закончились неудачей. Как говорил позднее Валерий Лейзерович – не пошло.

По мере взросления стал проявлять интерес к математике. С 7 по 10 класс был призером и победителем областных и городских олимпиад по математике. Одновременно Валера стал заниматься спортом – легкой атлетикой, был чемпионом области в своей возрастной группе.

Понимая, что дальнейшая его судьба будет зависеть от того, насколько успешно он завершит обучение в школе, Валера в старших классах «собрался» и без видимых усилий окончил школу в 1966 году с золотой медалью. Отметим, что это был первый выпуск 31-й школы, известной сегодня как физико-математический лицей № 31.

Будучи человеком компанейским, Валера недолго выбирал место дальнейшего приложения своих сил и энергии. Он присоединился к группе одноклассников и в этом же, 1966 году, поступил на математический факультет Новосибирского университета¹.

В университете Валера достаточно сдержанно относился к академическим занятиям, не проявляя особого интереса к наукам. Учеба (в особенности естественнонаучные и математические направления) давалась ему легко, чего нельзя сказать о предметах «неестественных» и «противоестественных». По политэкономии социализма, историческому материализму и научному коммунизму имел тройки.

Как и все советские студенты того времени, два лета провел в студенческих стройотрядах. Был не чужд различным внеучебным активностям – год занимался бальными танцами.

Однако и для научной деятельности выкраивал время. На кафедре алгебры и математической логики написал дипломную работу «*Решение проблемы изоморфизма для коммутативных полугрупп с линейным порядком на идемпотентах*».

Отдал долг Родине – достойно завершил обучение на военной кафедре. Ему было присвоено воинское звание инженер-лейтенант.

Завершив обучение в НГУ в 1971 году, Валерий Лейзерович поступает на работу на кафедру высшей математики № 1 Челябинского политехнического института (ЧПИ).



¹ Новосибирский государственный университет был составной частью Академгородка, основанного по инициативе академиков М.А. Лаврентьева, С.Л. Соболева и С.А. Христиановича в 1957 году. Это был один из самых молодых (занятия в нем начались в 1959 году) университетов страны.

Следует здесь заметить, что ЧПИ тех времен – один из базовых вузов союзного Министерства высшего и среднего специального образования – отличался высоким научным уровнем подготовки специалистов, который обеспечивали квалифицированные ученые-прикладники. Они предъявляли к математической подготовке своих студентов высокие требования.

Заведующий кафедрой – доцент А.Д. Кацман – хорошо понимал, что только высокая научная квалификация преподавателей кафедры может обеспечить достаточную для нужд специалистов математическую подготовку. Он много сил и энергии прикладывал для формирования достойного коллектива, способного решать задачи математической подготовки на должном уровне, привлекая к работе на кафедре молодых выпускников лучших вузов страны.

Выпускник Новосибирского университета В.Л. Дильман, будучи отлично подготовленным математиком, органично вписался в коллектив сотрудников кафедры. Здесь уже трудились выпускники Московского, Уральского, Новосибирского, Казанского, Одесского и других университетов страны, и Валерий Лейзерович составил им достойную компанию.

Работы было много. В те времена средняя недельная нагрузка преподавателя составляла 24–26 (!) часов. Обладая хорошей профессиональной подготовкой и неожиданно открывшимися педагогическими способностями, В.Л. Дильман легко справлялся с порученной ему работой.

Однако он не оставлял мыслей о совершенствовании своего научного статуса и продолжении образования в аспирантуре. Почти 10 лет отдал Валерий Лейзерович попыткам решить эту задачу. В списке возможных научных школ, где он мог бы реализовать свои чаяния, были *Новосибирский, Уральский, Саратовский, Ленинградский университеты, Ленинградский пединститут*. Проявляя недюжинную активность, Валерий Лейзерович ездил по стране, встречался с предполагаемыми научными руководителями, согласовывал тематику будущей научной деятельности, но каждый раз, когда дело доходило до сдачи вступительных экзаменов в аспирантуру, что-то, какие-то технические и/или формальные обстоятельства не давали довести усилия В.Л. Дильмана до логического конца.

Наконец, после 10 лет безуспешных попыток, в 1981 году ему удалось поступить в аспирантуру на кафедру дифференциальных уравнений в Казанский государственный университет. Научный руководитель, проф. Любовь Ивановна Чибрикова, предложила поработать над сингулярными интегральными уравнениями и краевыми задачами для аналитических функций¹. При поступлении не знал ничего из этого, кроме базовых понятий из ТФКП.

Тем не менее, не убоившись трудностей, Валерий Лейзерович приступил к работе над предложенной темой и к 1984 году представил к защите диссертацию под названием *«Интегральные уравнения первого рода с одной или двумя подвижными логарифмическими особенностями в ядре»*. В 1984 г. В.Л. Дильман окончил аспирантуру, а в 1985 году успешно защитил кандидатскую диссертацию в Совете Казанского государственного университета.

Будучи человеком разносторонним и общительным, Валерий Лейзерович демонстрировал завидную широту интересов и наклонностей. Наряду с занятиями наукой и преподавательской деятельностью был не чужд искусству, музыке, спорту и т.п. Он увлекся входившим в то время в моду спортивным бриджем и на протяжении более чем 10 лет активно участвовал в работе Челябинского бридж-клуба. Благодаря врожденной сообразительности и склонности к логическим умозаключениям достиг в этом виде спорта значительных успехов – в составе сборной команды Челябинска неоднократно принимал участие в первенстве СССР.

После завершения обучения в аспирантуре В.Л. Дильман вернулся на работу в ЧПИ, однако, по техническим причинам, на свою кафедру принят не был, а был приглашен заведующим кафедрой прикладной математики профессором В.А. Цыганковым на кафедру ПРИМА. Здесь проработал всего полгода и окончательно осел на кафедре высшей математики № 2, которой заведовал Л.М. Беляков. Читал лекции и вел практические занятия на различных факультетах (*ДПА – впоследствии АК, АТ, Ф, ПС, заочном и др.*).

В 1990 г. ему было присвоено ученое звание доцента.

К этому моменту у В.Л. Дильмана подросли сыновья. В связи с попытками приобщить их к математике с 1989 г. он начал работать в своем родном 31-м лицее преподавателем спецкурсов и кружков по олимпиадной математике. С 1991 г. эта работа приобрела систематический характер. Через несколько лет его ученики начали побеждать на математических соревнованиях, а с 1996 г.

¹ Это специальность 01.01.01 – Действительный, комплексный и функциональный анализ.

Персоналии

среди них появились призеры Всероссийской олимпиады (финальный этап). Всего их было около 20, в том числе 5 победителей.

В 1989 г., с целью улучшить материальное положение семьи, Валерий Лейзерович стал работать по хозяйственной тематике с к.т.н. А.А. Остсеминым. Здесь В.Л. Дильман был «негром», т.е. зарплату ему платили, но научные результаты присваивались руководителем.

Тема его исследований была – критические состояния (прочность) неоднородных соединений, прежде всего сварных швов, и конструкций с такими соединениями, в т.ч. труб и других тонкостенных оболочек. Валерий Лейзерович настолько глубоко погрузился в эту тематику, что и после расставания с работодателем продолжил её развивать самостоятельно и добился в этой работе значительных успехов. В конце концов В.Л. Дильман подготовил на эту тему докторскую диссертацию под названием «*Математическое моделирование критических состояний тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек*», которую успешно защитил в ЮУрГУ в 2011 г.

Наряду с научными достижениями Валерий Лейзерович стремительно продвигается и по административной лестнице. В 2004 году он становится заведующим кафедрой общей математики механико-математического факультета ЮУрГУ. В этой должности В.Л. Дильман проработал вплоть до 2012 года. В 2012 году его назначают заведующим кафедрой прикладной математики, а в 2015 году В.Л. Дильман становится заведующим кафедрой математического и функционального анализа¹, в какой должности пребывает и поныне.

Обладая широким кругозором, В.Л. Дильман много сил и энергии отдает учебному процессу. Подготовленные им курсы для студентов и школьников выдержали проверку временем и дали слушателям прочные навыки использования математического аппарата в специальных и общетехнических дисциплинах. Многие разделы этих курсов снабжены учебными пособиями и методическими разработками, подготовленными В.Л. Дильманом. Его занятия, отличаясь высоким научным содержанием и методическим мастерством, представляют собой гармоничное сочетание простоты изложения с глубиной содержания.

С первых дней работы в вузе В.Л. Дильман показал себя высококвалифицированным специалистом, эрудированным ученым и талантливым педагогом.

Он автор двух монографий и более 150 публикаций по математике и ее приложениям (теория пластичности, математическое моделирование и др.), более 50 его работ переведены на английский и опубликованы за рубежом. В.Л. Дильман автор более 30 учебно-методических изданий. Два учебных пособия, подготовленные им и его коллегой, профессором В.А. Дрозиной, стали в 2010 г. победителями Первого Всероссийского конкурса учебно-методической литературы. Список его наиболее значимых работ приведен ниже.

В.Л. Дильман – руководитель магистерской программы и аспирантуры. Будучи ученым с большим научным багажом и широким кругозором, В.Л. Дильман очень ответственно подходит к работе с учениками. Они могут обратиться к нему с любыми вопросами, и он всегда, несмотря на свою занятость, уделяет им время, давая исчерпывающие разъяснения. Валерий Лейзерович всесторонне опекает своих учеников, помогая им не только в научных исследованиях, но и в сложных жизненных ситуациях. Его ученики с большим теплом вспоминают годы совместной работы с Валерием Лейзеровичем, отмечая, что работать с ним было легко, интересно, продуктивно и весело. Заинтересованное и уважительное отношение к младшим коллегам, потрясающее чувство юмора стимулируют его учеников к овладению профессией, помогают им стать классными специалистами, вырасти как в профессиональном, так и в личностном отношении.

Валерий Лейзерович подготовил двух кандидатов физико-математических наук по специальности 05.13.18 – *Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ*. В настоящее время под его руководством работают над кандидатской диссертацией два аспиранта.

В.Л. Дильман – член Совета по защитах докторских диссертаций, член Ученого Совета Университета и Ученого Совета ИЕТН.

Он награжден Грамотой Минобрнауки, а в 2013 г. ему присвоено звание «Почетный работник Высшей школы». В.Л. Дильман – ветеран труда и ветеран ЮУрГУ.

Валерий Лейзерович хороший семьянин. У него с женой трое сыновей: Даниил (1976 г. р.), Степан (1981 г. р.) и Глеб (1987 г. р.). Даниил по образованию историк, закончил ЧелГУ и аспи-

¹ В настоящее время – кафедра математического анализа и методики преподавания математики

рантуру в СПбГУ. Степан и Глеб закончили механико-математический факультет МГУ, работают аналитиками и программистами.

В.Л. Дильман иногда пишет стихи, посвящая их своим многочисленным друзьям. Любимым занятием являются ежедневные прогулки с собакой.

Валерий Лейзерович глубоко эрудированный, всесторонне образованный человек. Он пользуется заслуженным уважением своих коллег и студентов.

Коллеги и друзья сердечно поздравляют Валерия Лейзеровича с семидесятилетием и желают ему дальнейших успехов на поприще науки и преподавания.

Литература

1. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 201 с.

2. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2011. – 275 с.

3. Дильман В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p , $p > 1$ / В.Л. Дильман, Л.И. Чибрикова // Известия вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.

4. Dil'man, V.L. Compression of a Plastic Layer by Two Rough Plates / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Strength of Materials. – 1991. – Vol. 22, Iss. 7. – P. 1076–1085.

5. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 141–148.

6. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115–124.

7. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии пластического кольца при растяжении / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109–120.

8. Dil'man, V.L. Static Strength of a Welded Joint with Hard Interlayers and Defect at the Fusion Line of the Weld / V.L. Dil'man, A.A. Ostsemin // Welding International. – 2004. – Vol. 18, no. 10. – P. 805–808.

9. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 141–151.

10. Дильман, В.Л. Прочность механически неоднородных сварных соединений стержней арматуры / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин, Т.В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – № 9. – С. 13–16.

11. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 89–102.

12. Дильман, В.Л. Пластическая устойчивость и прочность торовых тонкостенных оболочек и отводов при нагружении внутренним давлением / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 2. – С. 105–112.

13. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2011. – № 11. – С. 12–22.

14. Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного твердого тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40 (299). – С. 167–171.

15. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.

Персоналии

16. Дильман, В.Л. Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей прослойку из менее прочного материала / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2013. – № 10. – С. 21–24.

17. Дильман, В.Л. Анализ прочности неоднородных сварных швов стержней арматуры / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Вестник машиностроения. – 2015. – № 2. – С. 29–33.

18. Dilman, V.L. The Critical State of Inclined Layer in a Sheet Specimen with Negative Loading Biaxiality Coefficient / V.L. Dilman, A.N. Dheyab // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9, № 1. – С. 123–129.

19. Dilman, V.L. Critical State of Thin Underlayers under Tensile Afford / V.L. Dilman, A.N. Dheyab // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2018. – Vol. 5, no. 4. – P. 3–15.

20. Dilman, V.L. Stress-Strain State of a Plastic Layer under Compression by Two Rigid Parallel Rough Plates / V.L. Dilman, T.V. Karpeta, A.N. Dheyab // Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 946. – P. 768–774.

***В.И. Заляпин, Т.В. Карпета,
В.В. Карачик, Е.В. Харитонова***

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 11, № 4
2019

16+

Редакторы: *С.И. Уварова, Е.В. Федорова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 25.10.2019. Дата выхода в свет 31.10.2019.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23.

Тираж 500 экз. Заказ 419/474. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект им. В.И. Ленина, 76.