

# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2020  
Т. 12, № 1**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

## «МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

### Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY  
SERIES

2020  
Vol. 12, no. 1

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

**S.A. Zagrebina**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**E.V. Golubev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.P. Beskachko**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.I. Zalyapin**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**Yu.M. Kovalev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

**A.V. Bogomolov**, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation  
**M.M. Brzhezinskaya**, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany  
**G.L. Brovko**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**V.D. Buchelnikov**, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**D. Guidetti**, University of Bologna, Bologna, Italy  
**V.I. Zhukovsky**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**I.V. Zalyapin**, University of Nevada, Reno, United States of America  
**S.V. Zelik**, University of Surrey, Guildford, United Kingdom  
**A.I. Korotkii**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**Jaewan Kim**, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea  
**Kisik Kim**, INHA-University, Incheon, South Korea  
**N.D. Kundikova**, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**V.V. Menshikh**, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation  
**S.I. Pinchuk**, Indiana University, Bloomington, United States of America  
**Y.S. Puzyrev**, Vanderbilt University, Nashville, United States of America  
**N.K. Ravshanov**, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan  
**L.V. Utkin**, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation  
**I. Verpoest**, Catholic University, Leuven, Belgium  
**V.A. Strauss**, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

AKIMOVA A.A. Classification of Prime Projections of Knots in the Thickened Torus of Genus 2 with at most 4 Crossings .....	5
GAVRILOVA O.V. Optimal Control over Solutions of a Multicomponent Model of Reaction-Diffusion in a Tubular Reactor .....	14
ГАМЗАЕВ Х.М. Обратная задача нестационарного течения несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой .....	24
РАСУЛОВ К.М. О явном решении краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций в единичном круге.....	31
ШАРМИН В.Г., ШАРМИН Д.В. Исследование глобальных свойств замкнутой нерегулярной гиперповерхности с биективным гауссовым отображением с помощью функции уровня. 37	

### Механика

ХОХЛОВ А.В. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полого цилиндра из нелинейно наследственного материала под действием внутреннего и внешнего давлений .....	44
--	----

### Физика

ANIKINA E.V., BESKACHKO V.P. Basis Set Superposition Error: Effects of Atomic Basis Set Optimization on Value of Counterpoise Correction .....	55
ЗАВОЛОКИН В.В., ТАМБОВЦЕВ В.И. Влияние условий измерения и квантования на информативные параметры эхо-сигнала дождя .....	63

### Персоналии

Лев Михайлович Беляков. К 85-летию со дня рождения.....	73
Сергей Юрьевич Гуревич. К 75-летию со дня рождения.....	76

# CONTENTS

## Mathematics

AKIMOVA A.A. Classification of Prime Projections of Knots in the Thickened Torus of Genus 2 with at most 4 Crossings.....	5
GAVRILOVA O.V. Optimal Control over Solutions of a Multicomponent Model of Reaction-Diffusion in a Tubular Reactor .....	14
GAMZAEV Kh.M. Inverse Problem of Unsteady Incompressible Fluid Flow in a Pipe with a Permeable Wall .....	24
RASULOV K.M. On the Explicit Solution of the Boundary Value Problem of Neumann Type for the Generalized Analytic Functions in the Unit Circle .....	31
SHARMIN V.G., SHARMIN D.V. Studying Global Properties of a Closed Non-Regular Hypersurface with a Bijective Gaussian Mapping using the Level Function .....	37

## Mechanics

KHOKHLOV A.V. Exact Solution of the Boundary Value Problem for Strain and Stress Fields in a Thick Tube Made of Physically Non-Linear Elasto-Viscoplastic Material under Given Internal and External Pressures .....	44
--	----

## Physics

ANIKINA E.V., BESKACHKO V.P. Basis Set Superposition Error: Effects of Atomic Basis Set Optimization on Value of Counterpoise Correction .....	55
ZAVOLOKIN V.V., TAMBOVTSEV V.I. Effects of Measurement and Quantization Conditions on Informative Parameters of Raindrop Echo Signal .....	63

## Personalia

To the 85 <sup>th</sup> Anniversary of Lev Belyakov.....	73
To the 75 <sup>th</sup> Anniversary of Sergey Gurevich .....	76

## CLASSIFICATION OF PRIME PROJECTIONS OF KNOTS IN THE THICKENED TORUS OF GENUS 2 WITH AT MOST 4 CROSSINGS

**A.A. Akimova**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: akimovaaa@susu.ru*

We begin classification of prime knots in the thickened torus of genus 2 having diagrams with at most 4 crossings. To this end, it is enough to construct a table of prime knot projections with at most 4 crossings, and use the table to obtain table of prime diagrams, i. e. table of prime knots. In this paper, we present the result of the first step, i. e. we construct a table of prime projections of knots in the thickened torus of genus 2 having at most 4 crossings. First, we introduce definition of prime projection of a knot in the thickened torus of genus 2. Second, we construct a table of prime projections of knots in the thickened torus of genus 2 having at most 4 crossings. To this end, we enumerate graphs of special type and consider all possible embeddings of the graphs into the torus of genus 2 that lead to prime projections. In order to simplify enumeration of the embeddings, we prove some auxiliary statements. Finally, we prove that all obtained projections are inequivalent. Several known and new tricks allow us to keep the process within reasonable limits and rigorously theoretically prove the completeness of the constructed table.

*Keywords: prime projection; knot; thickened torus of genus 2; table.*

### Introduction

One of the main problems of the knot theory is to find an algorithm to recognize a knot (or link), i. e., to provide the studied object with a unique identifier. For instance, the identifier can be given by a catalog number. This approach involves the problem to construct complete tables of knots and links arranged with respect to some their numerical characteristics. Many researchers worked in this area during last 150 years. Most of the constructed tables consider knots and links in the 3-dimensional sphere, see [1–3]. Recently, increasing interest in the theory of global knots (i. e., knots in arbitrary 3-manifolds) leads to tabulation of knots in manifolds different from the 3-dimensional sphere. Note tables of links in the projective space [4], knots in the solid torus [5], knots in the thickened Klein bottle [6], as well as prime knots in the lens spaces [7]. Note that, in the knot theory, recent tables includes only the so-called prime objects, which can not be obtained by some known operations from already tabulated objects. Virtual knots and knots in the thickened surfaces have been of particular interest in the last 20 years. Therefore, some tables of such knots were also constructed. In particular, the works [8] and [9] present perfect tables of virtual knots arranged with respect to number of classical crossing and construct a list of some properties of each knot. However, these tables are constructed without taking into account primeness and such important property of a knot as the genus determined by the minimal genus of the thickened surface which can contain the given knot. The natural idea is to classify virtual knots taking into account both parameters, i. e. not only number of classical crossings, but also the genus of a knot, see the papers [10, 11] for tables of prime knots and links in the thickened torus. In a sense, such tables can be considered as tables of prime virtual knots and links of genus 1.

We begin classification of prime knots in the thickened torus of genus 2. To this end, in this paper, we present the result of the first step, i. e. we construct a table of prime projections of knots in the thickened torus of genus 2 having at most 4 crossings. Our main result states that there exist exactly 14 pairwise inequivalent such projections. Further, we intend to use the obtained table of prime projections in order to construct table of prime diagrams, i. e. table of prime knots.

The paper is organized as follows. Section 1 gives required definitions and the main result of the paper. Section 2 describes main ideas of the tabulation of prime projections of knots in the thickened torus of genus 2.

1. Main Result

A direct product of two copies of a 1-dimensional sphere  $S^1$  is called a 2-dimensional torus  $T = S^1 \times S^1$ . Further, for shortness, we refer to a 2-dimensional torus  $T$  as a torus  $T$ . Fig. 1, a shows an example of a torus  $T$  endowed with a pair “meridian-longitude” of  $T$ .

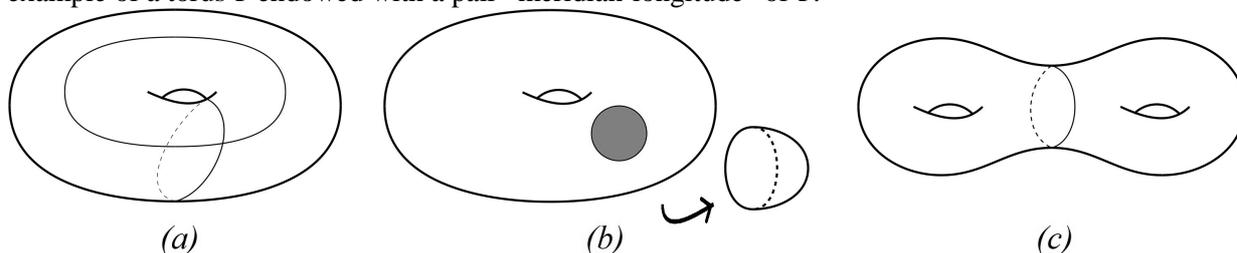


Fig. 1. (a) A torus  $T$  endowed with a pair “meridian-longitude”, (b) a torus  $T^\circ$  with a hole and a disk  $D$ , (c) a 2-dimensional torus  $T_2$  of genus 2 formed by a connected sum of two copies of a torus  $T^\circ$  with a hole

A surface  $F^\circ$  with a hole is obtained from the original surface  $F$  by removing the interior of a 2-dimensional disk  $D$ . Further, for shortness, we refer to a 2-dimensional disk  $D$  as a disk  $D$ . Fig. 1, b shows an example: a torus  $T^\circ$  with a hole is obtained from a torus  $T$  by removing the interior of a disk  $D$ . Hereinafter, we write  $^\circ$  to show that a surface has one hole,  $^{\circ\circ}$  to show that a surface has two holes, etc.

By a 2-dimensional torus  $T_2$  of genus 2 we mean a surface formed by a sum of two copies of a 2-dimensional torus  $T^\circ$  with a hole constructed by identifying (gluing together) their holes, see Fig. 1, c. Here each torus  $T^\circ$  is called a handle of a 2-dimensional torus  $T_2$  of genus 2. Further, for shortness, we refer to a 2-dimensional torus  $T_2$  of genus 2 as a torus  $T_2$ .

Let us define types of simple closed circles, which can be considered in a torus  $T_2$ .

A simple closed circle  $C \subset T_2$  is said to be *cut*, if the complement  $T_2 \setminus C$  consists of two components.

In the torus  $T_2$ , a cut circle  $C$  can be either *trivial*, i. e. bounding a disk  $D$ , or *nontrivial*. In the first case, the complement  $T_2 \setminus C$  is formed by a disk  $D$  and a torus  $T_2^\circ$  with a hole. In the second case, the complement  $T_2 \setminus C$  is formed by two copies of a torus  $T^\circ$  with a hole.

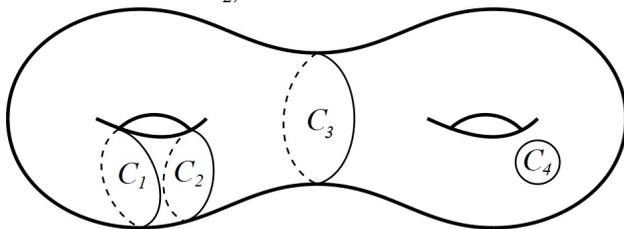


Fig. 2. Examples of circles in the torus  $T_2$

A simple closed circle  $C \subset T_2$  is said to be *noncut*, if the complement  $T_2 \setminus C$  consists of the unique component. Namely, the complement  $T_2 \setminus C$  is a torus  $T^{\circ\circ}$  with two holes.

Two noncut simple closed circles  $C_1, C_2 \subset T_2$  are said to be *parallel to each other*, if the complement  $T_2 \setminus (C_1 \cup C_2)$  consists of two components, which are a torus  $T^{\circ\circ}$  with two holes and an *annulus*  $A$ , i. e. a 2-dimensional sphere  $S^{\circ\circ}$  with two holes.

Fig. 2 shows examples:  $C_1, C_2 \subset T_2$  are two noncut circles parallel to each other, while  $C_3, C_4 \subset T_2$  are nontrivial and trivial cut circles, respectively.

Consider a torus  $T_2$  and an interval  $I = [0, 1]$ . By a *thickened torus of genus 2* we mean a 3-dimensional manifold homeomorphic to the direct product  $T_2 \times I$ .

A smooth embedding of the set of  $m$  pairwise disjoint circles in the interior  $Int(T_2 \times I)$  of the thickened torus  $T_2 \times I$  is called an *m-component link* in  $T_2 \times I$ . In particular, if  $m=1$ , we have a smooth embedding of the unique circle in  $Int(T_2 \times I)$ , which is called a *knot* in  $T_2 \times I$  and denoted by  $K \subset T_2 \times I$ .

As in the classical case, knots in the thickened torus  $T_2 \times I$  can be given by their *diagrams*, which are defined by analogy with a classical knot diagram except that a knot is projected into the torus  $T_2$  instead of a 2-dimensional sphere  $S^2$ .

A *projection* of a knot  $K$  in the torus  $T_2$  is a diagram of  $K$  such that the crossings of the diagram contain no under/over-crossing information. Therefore, a projection can be considered as an embedding of a connected regular graph of degree 4, i. e. valence of each vertex of the graph is equal to 4. Vertices of  $G$  are called *crossings* of  $G$ , while connected components of the complement  $T_2 \setminus G$  are called *faces* of  $G$ .

Two projections  $G$  and  $G'$  in the torus  $T_2$  are said to be *equivalent*, if there exists a homeomorphism  $f: T_2 \rightarrow T_2$  such that  $f(G) = G'$ .

We say that an intersection point  $P$  of two circles  $C_1, C_2 \subset T_2$  is *nontransversal*, if only two of four angles near  $P$  are formed by both circles  $C_1$  and  $C_2$ , while the third and the fourth angles are formed only

by the circle  $C_1$  and  $C_2$ , respectively. Otherwise, i. e. if all four angles near  $P$  are formed by both circles  $C_1$  and  $C_2$ , the intersection point  $P$  is called *transversal*.

We define the following three types of projections in the torus  $T_2$ .

1. The projection  $G$  is called *essential*, if each face of  $G$  is homeomorphic to a disk  $D$ .

2. The projection  $G$  is called *composite*, if at least one of the following conditions holds.

(a) There exists a disk  $D \subset T_2$  such that the boundary  $\partial D$  intersects  $G$  transversally exactly in two points, which are internal for two distinct edges of  $G$ , and at least one vertex of  $G$  is inside  $D$ .

(b) There exist two parallel noncut simple closed circles  $C_1, C_2 \subset T_2$ , and two distinct edges  $e_1, e_2$  of  $G$  such that for  $i = 1, 2$  the circle  $C_i$  intersects the edge  $e_i$  transversally at exactly one internal point, and both surfaces (a torus  $T^{\circ\circ}$  with two holes and an annulus  $A$ ) to which the circles divide the torus  $T_2$  contain vertices of  $G$ .

(c) There exists nontrivial cut simple closed circle  $C$  and two distinct edges  $e_1, e_2$  of  $G$  such that for  $i = 1, 2$  the circle  $C$  intersects the edge  $e_i$  transversally at exactly one internal point, and both surfaces (two copies of a torus  $T^{\circ}$  with a hole) to which the circle  $C$  divide the torus  $T_2$  contain vertices of  $G$ .

3. The projection  $G$  is called *prime*, if  $G$  is essential and noncomposite.

Our table contains only prime projections. Indeed, nonessential projections correspond to knots that can be found in already existing tables of knots in the 3-dimensional sphere  $S^3$  [1–3], thickened annulus  $A \times I$  (solid torus) [5], or thickened torus  $T \times I$  [10]. In its turn, composite projections correspond to knots, which can be constructed using already known knots mentioned above. Namely, composite projections of types (a)–(c) correspond to knots, which can be constructed as sums of a classical knot and a knot in the thickened torus  $T_2 \times I$ , a knot in the thickened torus  $T_2 \times I$  and a knot in the thickened torus  $T \times I$ , or two knots in the thickened torus  $T \times I$ , respectively.

**Theorem 1.** In the torus  $T_2$ , there exist exactly 14 pairwise inequivalent prime projections with at most 4 crossings. The projections are given in Fig. 5.

Theorem 1 is proved by three steps described in Section 2.

**2. Proof of the main result**

Let us describe main ideas of the tabulation of prime projections given in this section. We do this in three steps. First, Subsection 2.1 enumerates graphs of special type. Then, Subsection 2.2 considers all possible embeddings of the graphs into the torus  $T_2$  giving prime projections. Finally, Subsection 2.3 proves that all constructed projections are pairwise inequivalent.

**2.1. Enumeration of graphs with at most 4 vertices whose embeddings into the torus  $T_2$  can be prime projections**

**Lemma 1.** If a projection  $G \subset T_2$  is prime, then  $G$  is connected and contains no loop nor any cut pair of edges (i. e., removing the pair of edges gives a disconnected graph).

Proof of Lemma 1 is similar to arguments used to prove Lemma 2 in [11].

**Lemma 2.** Let  $G \subset T_2$  be a prime projection with  $n$  crossings, then  $G$  contains exactly  $(n-2)$  faces.

**Proof.** Take into account the Euler characteristic of the torus  $T_2$  and the fact that  $G$  is essential.

**Lemma 3.** There exist exactly 3 graphs with at most 4 vertices whose embeddings into the torus  $T_2$  can be prime projections, see graphs  $a - c$  given in Fig. 3.

**Proof.** By virtue of Lemma 2, it is easy to see that any graph which embedding into the torus  $T_2$  gives a prime projection contains at least 3 vertices. Lemma 1 gives conditions on an abstract quadrivalent graph, which embedding into the torus  $T_2$  gives a prime projection. All graphs with at most 4 vertices satisfying the first and second conditions are enumerated in [10]. In this list, there are exactly 3 graphs satisfying the third condition, see graphs  $a - c$  given in Fig. 3.

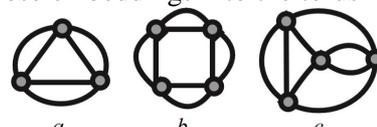


Fig. 3. The graphs of special type

**2.2. Construction of prime projections**

**Lemma 4.** All projections shown in Fig. 5 can be obtained as embeddings of the graphs  $a - c$  given in Fig. 3. Namely, the graph  $a$  gives the projection  $3_1$ , the graph  $b$  gives the projections  $4_1$  and  $4_6$ , and the graph  $c$  gives the projections  $4_2 - 4_5$  and  $4_7 - 4_{13}$ .

**Proof.** We construct all the projections by the following method [11].

Let  $G \subset T_2$  be a prime projection represented as a union  $U$  of the circles  $C_i, i = 1, 2, \dots, m$ , having  $k$  nontransversal points.

Let  $l_1, l_2$  be small arcs containing a nontransversal point of the projection  $G$ . We can remove the point by the move  $M$  shown in Fig. 4. The dashed arc  $\beta$  shows how to perform the inverse move  $M^{-1}$ .

Remove each nontransversal point of the projection  $G$  by the move  $M$ . The obtained union  $U^k$  of the same circles  $C_i, i = 1, 2, \dots, m$  contains only transversal points and is endowed with  $k$  dashed arcs  $\beta$  to show where the move  $M$  was performed. Of course, the initial projection  $G$  can be obtained from  $U^k$  by the inverse move  $M^{-1}$  performed along each dashed arc  $\beta$ , see Fig. 4.

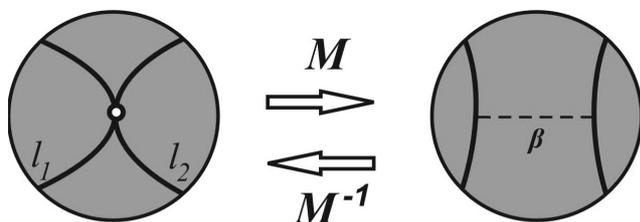


Fig. 4. Move  $M$  removes a nontransversal point, while  $M^{-1}$  is performed along the dashed arc  $\beta$  and creates the point

According to Lemma 3, all prime projections in the torus  $T_2$  with at most 4 crossings can be obtained as embeddings of the graphs  $a-c$ . In order to construct all the projections, we represent an embedding of each graph as a union of a number of circles and enumerate all possible combinations of types of circles and intersection points.

Let us give three obvious statements, which allow to reduce such enumeration.

**Lemma 5.** Let  $G \subset T_2$  be a prime projection represented as a union of circles with  $n$  intersection points. Then

- (i) this union contains no more than  $(n-3)$  cut circles,
- (ii) for  $n \leq 4$ , all cut circles are trivial.

**Proof.** Statement (i) is true according to Lemma 2 and the fact that each cut circle involves an additional face. If Statement (ii) is not satisfied, then  $G$  is either a link projection, or a nonessential projection. This completes the proof of Lemma 5.

**Lemma 6.** Let  $G \subset T_2$  be a prime projection represented as a union  $U$  of circles, and  $C \subset U$  be a circle having exactly two intersection points with other circles embedded in the torus  $T_2$ . Then both points are nontransversal, if  $C$  is cut, and at least one of two points is nontransversal, if  $C$  is noncut.

**Proof.** If both intersection points are transversal, then  $C$  forms a projection of a component of a link, while we consider only projections of knots. If  $C$  is cut, then both intersection points are either transversal, or nontransversal. This completes the proof of Lemma 6.

**Lemma 7.** Let  $G \subset T_2$  be a prime knot projection obtained from the union  $U^k$ , which is endowed with  $k$  dashed arcs  $\beta$ . Then the following conditions hold.

- (i) The union of  $U^k$  and all  $k$  dashed arcs  $\beta$  divide the torus  $T_2$  into disks.
- (ii) For any two circles  $C_1, C_2 \subset U^k$ , there exists a sequence of dashed arcs  $\beta$  and other circles that connect  $C_1$  and  $C_2$ .

**Proof.** If Condition (i) is not satisfied, then the projection  $G$  is nonessential, and we arrive at contradiction with the fact that the projection  $G$  is prime. If Condition (ii) is not satisfied, then  $G$  is a projection of a link, while  $G$  is a knot projection. This completes the proof of Lemma 7.

Let us enumerate all possible embeddings of the graphs  $a-c$  giving prime projections.

**Graph a.** Let the projection  $G$  be an embedding of the graph  $a$  in the torus  $T_2$ . The pairs of double edges form three circles in the torus  $T_2$  such that each circle has exactly one intersection point with each of two other circles. According to Lemma 5, all circles are noncut. Note that there exists at most 1 transversal intersection point, otherwise there exists a circle with two transversal intersection points and we arrive at contradiction with Lemma 6.

**Case 1.** If all intersection points are nontransversal, then we remove all the points by the move  $M$  and see that the three circles without common points divide the torus  $T_2$  into more than one part, i. e. we arrive at contradiction with Lemma 2.

**Case 2.** If exactly one of three intersection points is transversal, then, without loss of generality, we consider the circles  $C_1$  and  $C_2$  to be a pair “meridian-longitude” of one of the handles of the torus  $T_2$ , and the circle  $C_3$  to be a meridian of another handle. We remove both nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all the three circles to obtain a sphere  $S^{ooo}$  with three holes. By virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw two dashed arcs  $\beta$  such that to connect each of two holes corresponded to the circle  $C_3$  with the hole formed by the circles  $C_1$  and  $C_2$  under the condition that there exists exactly one endpoint of a dashed arc  $\beta$  on each circle  $C_i, i = 1, 2$ . Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection  $\mathfrak{3}_1$ .

*Graph b.* Let the projection  $G$  be an embedding of the graph  $b$  in the torus  $T_2$ . The pairs of double edges form four circles in the torus  $T_2$  such that each circle has exactly one intersection point with each of the two other circles and does not intersect the fourth circle. Note that there exist at most 2 transversal intersection points (moreover, each circle contains no more than one transversal intersection point), otherwise there exists a circle with two transversal intersection points and we arrive at contradiction with Lemma 6.

*Case 1.* Suppose that all four intersection points are nontransversal.

Remove all the points by the move  $M$  and see that the four circles without common points divide the torus  $T_2$  into more than two parts, i. e. we arrive at contradiction with Lemma 2.

*Case 2.* Suppose that exactly one of four intersection points is transversal.

According to Lemma 5, there exists at most one cut circle, moreover, this circle is trivial. Therefore, without loss of generality, we consider the circles  $C_1$  and  $C_2$  to be a pair “meridian-longitude” of one of the handles of the torus  $T_2$ , and the circle  $C_3$  to be a meridian of another handle, while the circle  $C_4$  can be either cut or noncut. We remove all three nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all the four circles.

*Case 2.1.* If the circle  $C_4$  is cut, then we obtain a sphere  $S^{ooo}$  with four holes. By virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw three dashed arcs  $\beta$  such that to connect one of two holes corresponded to the circle  $C_3$  and the hole corresponded to the circle  $C_4$  with the hole formed by the circles  $C_1$  and  $C_2$  and to connect another hole corresponded to the circle  $C_3$  with the hole corresponded to the circle  $C_4$  under the condition that there exists exactly one endpoint of a dashed arc  $\beta$  on each circle  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ . Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection  $4_1$ .

*Case 2.2.* If the circle  $C_4$  is noncut, then we obtain a sphere  $S^{ooo}$  with three holes and an annulus  $A$ . In  $S^{ooo}$ , by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw two dashed arcs  $\beta$  such that to connect the hole corresponded to the circle  $C_3$  and the hole corresponded to the circle  $C_4$  with the hole formed by the circles  $C_1$  and  $C_2$  under the condition that there exists exactly one endpoint of a dashed arc  $\beta$  on each circle  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ . In  $A$ , by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw a dashed arc  $\beta$  such that to connect the hole corresponded to the circle  $C_3$  and the hole corresponded to the circle  $C_4$ . Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection  $4_6$ .

*Case 3.* Suppose that exactly two of four intersection points are transversal.

According to Lemma 6, these transversal points belong to different pairs of circles. Therefore, without loss of generality, we consider the circles  $C_1$  and  $C_2$  to be a pair “meridian-longitude” of one of the handles of the torus  $T_2$ , while the circles  $C_3$  and  $C_4$  form a pair “meridian-longitude” of another handle. We remove both nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all the four circles to obtain an annulus  $A$ . By virtue of Lemma 7, there exists no ways to draw two dashed arcs  $\beta$  such that to connect two holes under the condition that there exist exactly one endpoint of a dashed arc  $\beta$  on each circle  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

*Graph c.* Let the projection  $G$  be an embedding of the graph  $c$  in the torus  $T_2$ , then  $G$  can be represented as a union of three circles such that the circles  $C_1$  and  $C_2$  have no common points, while the circle  $C_3$  intersects each of them alternately. Further, without loss of generality, we consider the circle  $C_1$  to be a representative of the circles  $C_1$  and  $C_2$ . Note that there exist at most 2 transversal intersection points (moreover, each of the circles  $C_1$  and  $C_2$  contains no more than one transversal intersection point), otherwise there exists a circle with two transversal intersection points and we arrive at contradiction with Lemma 6. Also, according to Lemma 5, there exists at most one cut circle, moreover, this circle is trivial.

*Case 1.* Suppose that all intersection points are nontransversal.

*Case 1.1.* Suppose that there exists no cut circles and consider all possible cases of parallel circles.

If there are no parallel circles, then we remove all the nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all the three circles to obtain two copies of a sphere  $S^{ooo}$  with three holes. In each  $S^{ooo}$ , by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw two dashed arcs  $\beta$  such that to connect the hole corresponded to the circle  $C_3$  with each of the other holes. Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection  $4_{12}$ .

If the circles  $C_1$  and  $C_2$  are parallel to each other, then they bound an annulus  $A$  without crossings, therefore, the projection  $G$  is nonessential, and, therefore,  $G$  is nonprime.

If the circles  $C_1$  and  $C_3$  are parallel to each other, then we remove all the nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all the three circles to obtain a sphere  $S^{ooo}$  with three holes and an annulus  $A$ . In  $S^{ooo}$ , by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw three dashed arcs  $\beta$  such that to connect the hole corresponded to the circle  $C_3$  with each of the other holes. In  $A$ , by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw a dashed arc  $\beta$  such that to connect two holes. Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>10</sub>**.

*Case 1.2.* Suppose that there exists a cut circle and remove all the points by the move  $M$  to obtain a sphere  $S^{oooo}$  with five holes.

If the cut circle is  $C_1$ , then, by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw four dashed arcs  $\beta$  such that to connect each of two holes corresponded to the circle  $C_2$  with the corresponded hole formed by the circle  $C_3$  and to connect the hole formed by the circle  $C_1$  with both holes formed by the circle  $C_3$ . Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>3</sub>**.

If the cut circle is  $C_3$ , then, by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw four dashed arcs  $\beta$  such that to connect each of holes corresponded to the circles  $C_1$  and  $C_2$  with the hole formed by the circle  $C_3$  alternately. Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain a projection of a link.

*Case 2.* Suppose that exactly one of four intersection points is transversal. Without loss of generality, we consider the circles  $C_1$  and  $C_3$  to be a pair “meridian-longitude” of one of the handles of the torus  $T_2$ , while the circle  $C_2$  can be either cut or noncut. We remove all three nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all the three circles.

If the circle  $C_2$  is cut, then we obtain a torus  $T^{oo}$  with two holes. By virtue of Lemma 7, there exists the unique way to draw three dashed arcs  $\beta$  such that to connect twice the hole corresponded to the circle  $C_2$  with the hole formed by the circles  $C_1$  and  $C_3$ , and the last hole with itself. Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>2</sub>**.

If the circle  $C_2$  is noncut, then, without loss of generality, we consider the circle  $C_4$  to be a meridian of another handle of the torus  $T_2$ , and obtain a sphere  $S^{ooo}$  with three holes. By virtue of Lemma 7, there exist two ways to draw three dashed arcs  $\beta$  such that to connect each of the holes corresponded to the circle  $C_2$  and with the hole formed by the circles  $C_1$  and  $C_3$ , and the last hole with itself alternately. Indeed, the third possible way leads to a link projection. Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projections **4<sub>5</sub>** and **4<sub>8</sub>**.

*Case 3.* Suppose that exactly two of four intersection points are transversal.

According to Lemma 6, each of the circles  $C_1$  and  $C_2$  contains exactly one transversal point, therefore, both the circles  $C_1$  and  $C_2$  are noncut. The circle  $C_3$  is also noncut, since the circles  $C_1$  and  $C_2$  do not intersect each other and the circle  $C_3$  has exactly one transversal point with the circle  $C_i$ , where  $i = 1, 2$ .

*Case 3.1.* Suppose that the circles  $C_1$  and  $C_2$  are parallel to each other. Without loss of generality, we consider the circles  $C_1$  and  $C_2$  to be two meridians of one of the handles of the torus  $T_2$ , while the circle  $C_3$  is a longitude of the same handle. We remove both nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all three circles to obtain a torus  $T^o$  with a hole and a disk  $D$ . In  $D$ , there exists no dashed arcs  $\beta$ , otherwise we obtain either a link projection, or a nonessential (therefore, nonprime) knot projection. In  $T^o$ , by virtue of Lemma 7, there exists the unique way to connect the hole with itself by two dashed arcs  $\beta$  such that there exist exactly one endpoint of a dashed arc  $\beta$  on each circle  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , and two endpoints of different dashed arcs  $\beta$  on the circle  $C_3$ . Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>9</sub>**.

*Case 3.2.* Suppose that the circles  $C_1$  and  $C_2$  are not parallel to each other. Without loss of generality, we consider the circle  $C_i$  to be a meridian of the  $i$ -th handle of the torus  $T_2$ , where  $i = 1, 2$ , while the circle  $C_3$  is a connected sum of two longitudes of both handles. We remove both nontransversal points by the move  $M$  and cut the torus  $T_2$  along all three circles to obtain a sphere  $S^{oo}$  with two holes. By virtue of Lemma 7, there exist exactly four possible ways to connect the two holes by two dashed arcs  $\beta$  such that there exist exactly one endpoint of a dashed arc  $\beta$  on each circle  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , and two endpoints of different dashed arcs  $\beta$  on the circle  $C_3$ . These four ways are different in the sense of the following two facts. First, either there exists a dashed arc  $\beta$  connecting a hole with itself, or both dashed arcs  $\beta$  connect different holes. Second, either there exists a fragment of the circle  $C_3$  having both endpoints of different dashed arcs  $\beta$ , or there exist two fragments of the circle  $C_3$  that belong to the same hole, and each frag-

ment contains an endpoint of a dashed arc  $\beta$ . Apply the inverse move  $M^{-1}$  along each dashed arc  $\beta$  and obtain the projections  $4_4$ ,  $4_7$ ,  $4_{11}$ , and  $4_{13}$ . This completes the proof of Lemma 4.

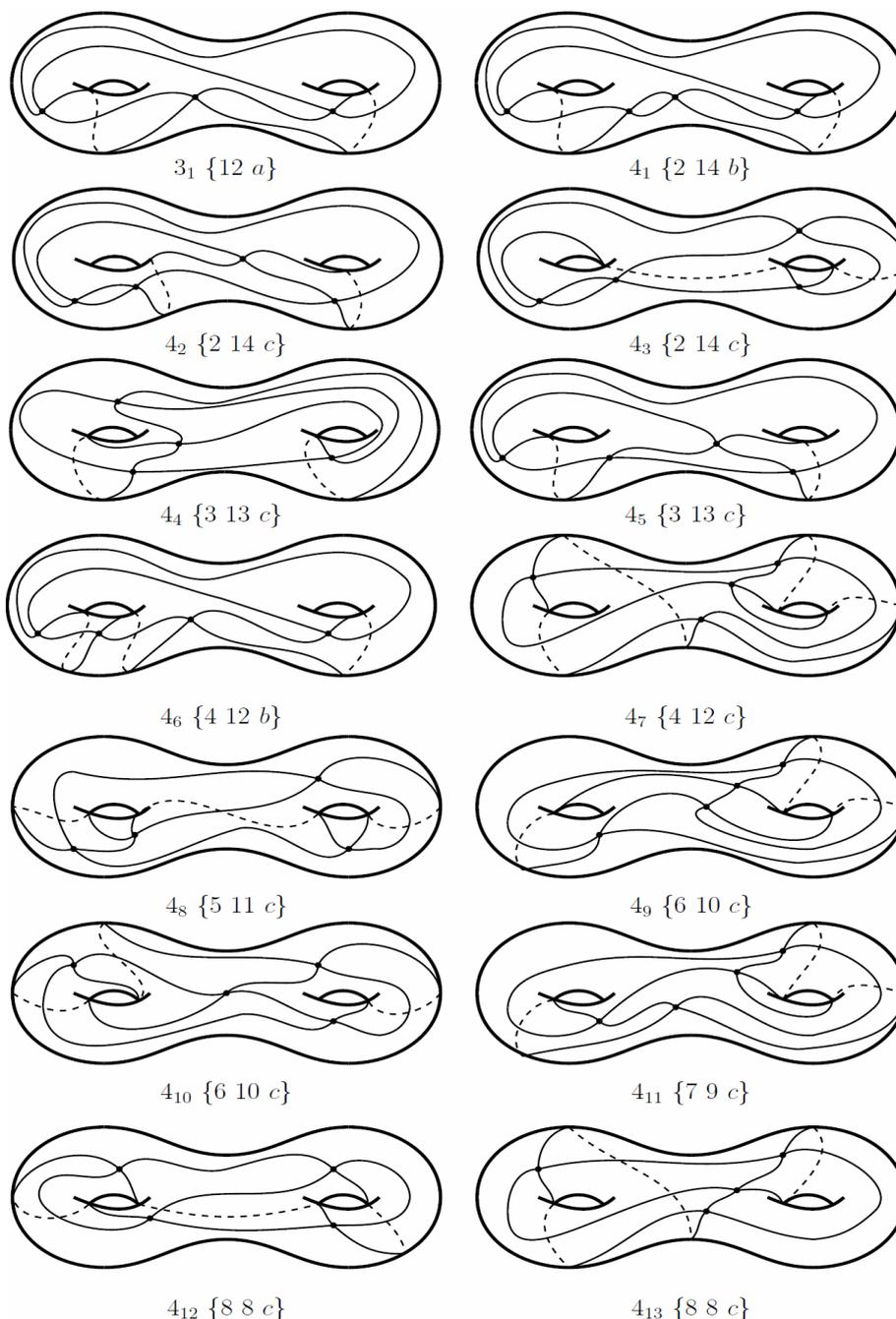


Fig. 5. Prime knot projections in the torus  $T_2$  with at most 4 crossings

### 3.3. Proof of the fact that all constructed projections are pairwise inequivalent

**Lemma 8.** All 14 projections given in Fig. 5 are pairwise inequivalent.

**Proof.** We associate each face of a projection with a natural number, which is equal to the number of edges which form the boundary of the face. Each face of a prime projection is homeomorphic to a disk. According to Lemma 2, the number of faces of each projection given in Fig. 5 is equal to 2 with the exclusion of the projection  $3_1$ .

Associate each projection (except for the projection  $3_1$ ) given in Fig. 5 with an ordered set  $\{i_1 i_2 x\}$ , where  $i_1$  and  $i_2$  are natural numbers, which are associated with faces of the projection and taking in non-

decreasing order, and  $x$  is the graph such that the projection is an embedding of  $x$  in the torus  $T_2$ ,  $x \subset \{b, c\}$ . By analogy, the projection  $\mathbf{3}_1$  is associated with the ordered set  $\{12 a\}$ .

Such ordered sets are enough to prove that all projections given in Fig. 5 are pairwise inequivalent, with the exception of the following 4 pairs:  $(4_2, 4_3)$ ,  $(4_4, 4_5)$ ,  $(4_9, 4_{10})$ , and  $(4_{12}, 4_{13})$ .

Let us prove that projections in each of the pairs are also inequivalent. We say that an edge  $e$  of the projection  $G$  has type  $(i, j)$  if  $e$  is a common edge of the  $i$ -gonal and  $j$ -gonal faces of the projection  $G$ .

1. Projections  $(4_2, 4_3)$  are inequivalent. Indeed, recall that the “straight ahead” rule determines a cycle composed of all edges of the projection. Only in  $4_3$ , the cycle is such that there are the same number of edges of type  $(14, 14)$  between two edges of type  $(2, 14)$ .

2. Projections  $(4_4, 4_5)$  are inequivalent, because there exists no bijective mapping between their Gauss codes: 12324143 and 12324134, respectively.

3. Projections  $(4_9, 4_{10})$  are inequivalent, because only  $4_9$  contains the edge of type  $(6, 6)$ , while the type of each edge of  $4_{10}$  is either  $(10, 10)$ , or  $(6, 10)$ .

4. Projections  $(4_{12}, 4_{13})$  are inequivalent, because only  $4_{13}$  contains the edges that are common for the same 8-gonal face, while all edges of  $4_{12}$  are common for both 8-gonal faces.

Note that all tabulated projections are prime by construction.

This completes the proof of both Lemma 8 and Theorem 1.

### Acknowledgments

The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 20-01-00127.

### References

1. Hoste J., Thistlethwaite M., Weeks J. The first 1,701,936 knots. *The Mathematical Intelligencer*, 1998, Vol. 20, Iss. 4, pp. 33–48. DOI: 10.1007/BF03025227
2. Rolfsen D. *Knots and Links*. Berkeley, CA: Publish or Perish, 1976.
3. Bar-Natan D., *The Knot Atlas*. – [http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page)
4. Drobotukhina Yu.V. Classification of links in  $\mathbb{R}P^3$  with at most 6 crossings, Geometry and topology. Part 1. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, Vol. 193, Leningrad, Nauka publ., 1991, pp. 39–63. [Drobotukhina Yu.V. Classification of links in  $\mathbb{R}P^3$  with at most six crossings, *Advances in Soviet Mathematics*, 1994, Vol. 18, no. 1, pp. 87–121.]
5. Gabrovšek B., Mroczkowski M. Knots in the Solid Torus up to 6 Crossings. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2012, Vol. 21, no. 11, pp. 1250106-1–1250106-43. DOI: 10.1142/S0218216512501064C
6. Matveev S.V., Nabeeva L.R. Tabulating knots in the thickened Klein bottle. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, Vol. 57, Iss. 3, pp. 542–548. DOI: 10.1134/S0037446616030174
7. Gabrovšek B. Tabulation of Prime Knots in Lens Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 14, no. 88. DOI: 10.1007/s00009-016-0814-5
8. Green J. *A table of virtual knots*, <https://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>
9. Stenlund E. *Classification of virtual knots*, <http://evertstenlund.se/knots/Virtual%20Knots.pdf>
10. Akimova A.A., Matveev S.V. Virtual Knots Having at most Five Classical Crossings. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2014, Vol. 23, no. 6, pp. 1450031-1–1450031-19. DOI: 10.1142/S021821651450031X
11. Akimova A.A., Matveev S.V., Tarkaev V.V. Classification of Links of Small Complexity in the Thickened Torus. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, Vol. 303, Suppl. 1, pp. 12–24. DOI: 10.1134/s008154381809002x

*Received December 22, 2019*

**КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИМАРНЫХ ПРОЕКЦИЙ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ РОДА 2 С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ 4 ПЕРЕКРЕСТКАМИ<sup>1</sup>****А.А. Акимова***Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация**E-mail: akimovaaa@susu.ru*

Мы начинаем классификацию примарных узлов в утолщенном торе рода 2, имеющих диаграммы с не более чем 4 перекрестками. Классификация проводится в два шага. На первом шаге строится таблица примарных проекций с не более чем 4 перекрестками. На втором шаге полученная таблица используется для построения таблицы примарных диаграмм, т.е. таблицы примарных узлов. В этой статье мы представляем результат первого шага, т.е. строим таблицу всех примарных проекций узлов в утолщенном торе рода 2, имеющих не более 4 перекрестков. Таблица строится в три этапа. На первом этапе мы вводим определение примарной проекции узла в утолщенном торе рода 2. На втором этапе мы строим таблицу примарных проекций узлов в утолщенном торе рода 2, имеющих не более 4 перекрестков. Для этого мы перечисляем графы специального вида и рассматриваем все возможные вложения этих графов в тор рода 2, которые приводят к примарным проекциям. Здесь мы доказываем несколько вспомогательных утверждений, сокращающих перечисление таких вложений. Наконец, на третьем этапе, мы доказываем, что все полученные проекции неэквивалентны. Ряд известных и новых приемов позволил удержать процесс в разумных пределах и строго теоретически доказать полноту построенной таблицы.

*Ключевые слова: примарная проекция; узел; утолщенный тор рода 2; таблица.*

**Литература**

1. Hoste, J. The first 1,701,936 knots / J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks // The Mathematical Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, Iss. 4. – pp. 33–48.
2. Rolfsen, D. Knots and Links / D. Rolfsen. – Berkeley, CA: Publish or Perish, 1976.
3. Bar-Natan D., The Knot Atlas, [http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page)
4. Дроботухина, Ю.В. Классификация зацеплений в  $RP^3$  с небольшим числом точек скрещивания / Ю.В. Дроботухина // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 193. – С. 39–63.
5. Gabrovšek, B. Knots in the Solid Torus up to 6 Crossings / B. Gabrovšek, M. Mroczkowski // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2012. – Vol. 21, no. 11. – P. 1250106-1–1250106-43.
6. Матвеев, С.В. Табулирование узлов в утолщенной бутылке Клейна / С.В. Матвеев, Л.Р. Набеева // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 688–696.
7. Gabrovšek, B. Tabulation of Prime Knots in Lens Spaces / B. Gabrovšek // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 14, no. 88.
8. Green, J. A table of virtual knots. – <https://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>
9. Stenlund, E. Classification of virtual knots. – <http://evertstenlund.se/knots/Virtual%20Knots.pdf>
10. Akimova, A.A. Classification of Genus 1 Virtual Knots Having at most Five Classical Crossings / A.A. Akimova, S.V. Matveev // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2014. – Vol. 23, no. 6. – P. 1450031-1–1450031-19.
11. Акимова, А.А. Классификация зацеплений малой сложности в утолщенном торе / А.А. Акимова, С.В. Матвеев, В.В.Таркаев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, Вып. 4. – С. 18–31.

*Поступила в редакцию 22 декабря 2019 г.*

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-01-00127.

# OPTIMAL CONTROL OVER SOLUTIONS OF A MULTICOMPONENT MODEL OF REACTION-DIFFUSION IN A TUBULAR REACTOR

**O.V. Gavrilova**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: gavrilovaov@susu.ru

This article studies a mathematical model of reaction-diffusion in a tubular reactor based on degenerate equations of reaction-diffusion type defined on a geometric graph. It is precisely the degenerate case that is studied, since when building the mathematical model it is taken into account that the speed of one sought function is significantly higher than the speed of the other. This model belongs to a wide class of semilinear Sobolev-type equations. We give sufficient conditions for the simplicity of the phase manifold of the abstract Sobolev-type equation in the case of  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator; we prove the existence and uniqueness of a solution to the Showalter–Sidorov problem in the weak generalized sense, and the existence of optimal control over weak generalized solutions to this problem. On the basis of the abstract theory, we find sufficient conditions for the existence of optimal control for a mathematical model of neural signal transmission.

*Keywords:* Sobolev-type equations; phase manifold; Showalter–Sidorov problem; reaction-diffusion equations; optimal control problem.

## Introduction

Take a finite connected oriented graph  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(V; E)$  with vertex set  $V = \{V_i\}_{i=1}^M$  and edge set  $E = \{E_j\}_{j=1}^K$ , where each edge is of length  $l_j > 0$  and transverse cross-section area  $d_j > 0$ . Consider on  $\mathbf{G}$  the multicomponent system of reaction-diffusion equations

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1jt} = \alpha_1 v_{1jss} + f_{1j}(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{mj}) + u_{1j}, \\ v_{2jt} = \alpha_2 v_{2jss} + f_{2j}(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{mj}) + u_{2j}, \\ \dots \\ v_{kjt} = \alpha_k v_{kjss} + f_{kj}(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{mj}) + u_{kj}, \\ 0 = \alpha_{k+1} v_{(k+1)jss} + f_{(k+1)j}(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{mj}) + u_{(k+1)j}, \\ \dots \\ 0 = \alpha_m v_{mjss} + f_{mj}(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{mj}) + u_{mj} \\ \text{for all } s \in (0, l_j), t \in R, j = \overline{1, K}, \end{array} \right. \quad (1)$$

with positive parameters  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  and some functions  $f_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  for  $i = \overline{1, m}$  and  $j = \overline{1, K}$ . Here the functions  $v_i = v_i(s, t)$ ,  $i = \overline{1, k}$  and  $v_i = v_i(s, t)$ ,  $i = \overline{k+1, m}$  characterize the concentrations of reagents (activator and inhibitor);  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  are the diffusion coefficients; the functions  $f_i$  correspond to the interaction between the reagents; the prescribed functions  $u_i = u_i(s, t)$  characterize exterior actions. For (1) at each vertex  $V_i$  for  $i = \overline{1, m}$  impose flow balance and continuity conditions

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j v_{js}(0, t) - \sum_{r: E_r \in E^\omega(V_i)} d_r v_{rs}(l_r, t) = 0, \quad (2)$$

$$v_r(0, t) = v_j(0, t) = v_h(l_h, t) = v_n(l_n, t) \quad (3)$$

for all  $E_r, E_j \in E^\alpha(V_i)$  and  $E_h, E_n \in E^\omega(V_i)$ . Here  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  stands for the set of edges starting (ending) at  $V_i$ . Conditions (2), (3) and the system (1) constitute our mathematical model of reaction-diffusion in a tubular reactor. Complement (2), (3) with the Showalter–Sidorov initial conditions

$$v_{ij}(s, 0) = v_{0ij}(s) \text{ for all } s \in (0, l_j), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, K}. \quad (4)$$

Initially, a nondegenerate system of equations of the reaction-diffusion type

$$\begin{cases} \varepsilon v_t = \alpha \Delta v + f_1(v, w) + u_1, \\ w_t = \beta \Delta w + f_2(v, w) + u_2. \end{cases} \quad (5)$$

was obtained in [1–3], depending on the two desired functions  $v = v(s, t)$  and  $w = w(s, t)$ . These systems model a large class of processes. In the case

$$f_1(v, w) = \gamma - (\delta + 1)v + v^2 w, \quad f_2(v, w) = \delta v - v^2 w \quad (6)$$

the system (5) describes the Lefever–Prigogine Brusselator [1], proposed as a model of an autocatalytic reaction with diffusion. The FitzHugh–Nagumo model [2, 3] is of this type with

$$f_1(v, w) = \beta_1 w - \kappa_1 v, \quad f_2(v, w) = \beta_2 w - \kappa_2 v - w^3. \quad (7)$$

The first qualitative analysis of the system (5) appeared in [4] under the assumption that the rate of change of one concentration is much greater than that of the other. This assumption leads to the degenerate system

$$\begin{cases} 0 = \alpha \Delta v + f_1(v, w) + u_1, \\ w_t = \beta \Delta w + f_2(v, w) + u_2. \end{cases} \quad (8)$$

The analysis of the morphology [4] of the phase spaces of the degenerate FitzHugh–Nagumo model (7), (8) and the Lefever–Prigogine Brusselator (6), (8) on open bounded regions showed that these phase spaces contain fold and cusp singularities [4]. Multicomponent reaction-diffusion models are studied in [5, 6]. They usually involve many inhibitors. Models with three and four components, one activator and two or three inhibitors, and their stability were studied in [5]. Goal of this article is research of multicomponent reaction-diffusion with different numbers of inhibitors and activators not only inhibitors.

Consider two Banach spaces  $\mathcal{X}$  and  $\mathcal{U}$ . The preimage of the degenerate system (1) with conditions (2), (3) is the abstract semilinear Sobolev-type equation

$$\frac{d}{dt} Lx + M(x) = u, \quad \ker L \neq \{0\}. \quad (9)$$

Here  $L$  is a continuous linear operator and  $M$  is a smooth nonlinear operator to be specified. The analytic and qualitative aspects of initial (multipoint initial-final) value problems for linear and semilinear Sobolev-type models are studied in [7–12]. Complement (9) with the Showalter–Sidorov initial condition

$$L(x(0) - x_0) = 0. \quad (10)$$

Considering this initial condition instead of the classical Cauchy condition

$$x(0) = x_0 \quad (11)$$

in the case of degenerate equation (9), we can avoid the lack of existence of a solution for arbitrary initial data [8]. Condition (10) directly generalizes condition (11) since Cauchy and Showalter–Sidorov problems are equivalent in the case that  $L^{-1}$  exists and is continuous. However, condition (10) fails to guarantee the uniqueness of solution to problem (9), (10), for instance in the cases that the phase manifold of (9) lies in a Banach manifold with singularities [4, 8]. Thus, to find conditions under which the solution is unique, we must study the structure of the phase manifold.

Our goal is to study the optimal control problem

$$J(x, u) \rightarrow \min \quad (12)$$

by the solutions to (9), (10) in the weak generalized sense [13, 14]. Here  $J(x, u)$  is a certain purpose-built quality functional with control  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ , where  $\mathcal{U}_{ad}$  is a closed convex set in the control space  $\mathcal{U}$ . The optimal control problem for linear Sobolev-type equations with the Cauchy initial condition was originally posed and studied in [9]. That article initiated a series of studies of optimal control problems for linear Sobolev-type equations with various initial conditions [10–12]. Sufficient conditions for the existence of a solution to problem (9), (10), (12) when  $L$  is a Fredholm operator were obtained in [11]. We give sufficient conditions for the simplicity of the phase manifold of problem (1)–(3) in case  $L$  is not Fredholm operator. Optimal control problems in various reaction-diffusion models are studied in [12]. The Showalter–Sidorov problem and the optimal control problem for degenerate two-component FitzHugh–Nagumo model (7), (8) is considered in [12] in the case that  $\beta_2 \leq 0$  and  $\beta_1 = \kappa_2$ .

This article is organized as follows. In the first section we talk about abstract semilinear Sobolev-type equations and discuss sufficient conditions for the simplicity of the phase manifold of the abstract equations (9) in the case of  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator  $M$  and prove the existence and uniqueness of a solution to (9), (10) in the weak generalized sense using the Galerkin method. In the second section we construct a mathematical model of reaction-diffusion in a tubular reactor basing on the initial-boundary value problem for degenerate reaction-diffusion equations defined on a geometric graph. In the third section we study the optimal control problem for a mathematical model of neural signal transmission and give sufficient conditions for the existence of a solution to it.

## 1. Abstract semilinear Sobolev-type equation in the case of $s$ -monotone and $p$ -coercive operator

Consider abstract semilinear Sobolev-type equation (9) with the Showalter–Sidorov initial condition (10). All our arguments in this section will be based on the general theory of abstract Sobolev-type equations, which is described in sufficient detail in [8, 11]. Take a separable real Hilbert space  $\mathbf{H} = (\mathbf{H}; [\cdot, \cdot])$  identified with its adjoint, as well as an adjoint pair  $(A; A^*)$  with respect to  $[\cdot, \cdot]$  of reflexive separable Banach spaces such that the embeddings

$$A \subset \mathbf{H} \subset A^* \quad (13)$$

are dense and continuous. Take a selfadjoint nonnegative definite operator  $L \in L(A; A^*)$  with

$$\mathbf{H} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathbf{H}^*, A = \ker L \oplus \text{coim } L, A^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L. \quad (14)$$

Remark 1. Condition (14) is satisfied, for instance, in the case that  $L \in L(A; A^*)$  is a selfadjoint nonnegative definite Fredholm operator [11].

Take an  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator  $M \in C^r(A; A^*)$  with  $r \geq 1$  (that is,  $[M'_{y,x}, x] > 0 \forall x, y \in A \setminus \{0\}$  and  $\exists C_M, C^M \in \mathbb{R}_+$  such that  $[M(x), x] \geq C_M \|x\|^p$  and  $\|M(x)\|_* \leq C^M \|x\|^{p-1}$ , where  $p \geq 2$ ) possessing symmetric Fréchet derivative. Note that every strongly monotone operator is  $s$ -monotone, while every  $s$ -monotone operator is strictly monotone. In turn, every  $p$ -coercive operator is strongly coercive.

By condition (14), there exists a projection  $Q$  along  $\text{coker } L$  onto  $\text{im } L$ . Make the assumption that

$$(I - Q)u \text{ is independent of } t \in (0, T). \quad (15)$$

Consider the set

$$M = \begin{cases} \{x \in A : (I - Q)Mx = (I - Q)u\}, & \text{if } \ker L \neq \{0\}; \\ A, & \text{if } \ker L = \{0\}. \end{cases} \quad (16)$$

Introduce

$$\text{coim } L = \{x \in A : [x, \varphi] = 0 \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}.$$

Denote by  $P$  the projection along  $\ker L$  onto  $\text{coim } L$ . Given a point  $x_0 \in M$ , put  $x_0^1 = Px_0 \in \text{coim } L$ .

Definition 1. [8] Call a set  $M$  a Banach  $C^r$ -manifold at  $x_0 \in M$  whenever there exist neighborhoods  $O \subset M$  and  $O_1 \subset \text{coim } L$  of the points  $x_0$  and  $x_0^1 = Px_0$  respectively and a  $C^r$ -diffeomorphism  $D: O_1 \rightarrow O$  such that  $D^{-1}$  is the restriction of the projection  $P$  to  $O$ . Refer to the pair  $(D, O_1)$  as a chart. The set  $M$  is called a Banach  $C^r$ -manifold modeled on the space  $\text{coim } L$  whenever each of its points admits a chart.

Theorem 1. [8] Suppose that condition (15) is met and  $M$  is  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator. Then the set  $M$  is a Banach  $C^r$ -manifold projecting diffeomorphically along  $\ker L$  onto  $\text{coim } L$  everywhere with the possible exception of the origin.

The proof of the Theorem 1 is analogous to the proof of Theorem 1 in [8].

Remark 2. Observe that if  $x = x(t)$  for  $t \in [0, T]$  is a solution to (9) then it must lie in  $M$ . Refer to  $M$  as the phase manifold of equation (9).

Since the space  $A$  is separable, there is an orthonormal system (in the sense of  $\mathbf{H}$ ) of functions  $\{\varphi_i\}$  which is complete in  $A$ . Construct Galerkin approximations to the solution to (9), (10) as

$$x^n(s, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(s), \quad (17)$$

where the coefficients  $a_i = a_i(t)$  for  $i = 1, \dots, n$  are determined from the following problem:

$$\left[ Lx_t^n, \varphi_i \right] + \left[ M(x^n), \varphi_i \right] = [u, \varphi_i], \tag{18}$$

$$\left[ L(x^n(0) - x_0), \varphi_i \right] = 0, i = 1, \dots, n, \tag{19}$$

$$Lx^n(0) \rightarrow Lx_0 \text{ for } n \rightarrow +\infty \text{ strongly in the subspace } \text{im } L. \tag{20}$$

In the case  $\dim L < +\infty$  it is necessary to have  $n > \dim L$ . Equation (18) constitute a degenerate system of ordinary differential equations. Suppose that  $T_n \in \mathbb{R}_+, T_n = T_n(x_0)$ , and  $A^n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ .

Lemma 1. [17] Let  $M$  be  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator. For every  $x_0 \in A$  there exists a unique local solution  $x^n \in C^r(0, T_n; A^n)$  to problem (18), (19).

The proof rests on the existence Theorem for solutions to a system of algebraic-differential equations with the Showalter–Sidorov condition [17].

Construct the space

$$\mathbf{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; A), \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Definition 2. [11] Call a weak generalized solution to (9) the vector function  $x \in \mathbf{X}$  satisfying the condition

$$\int_0^T \varphi(t) \left[ \frac{d}{dt} Lx + M(x), w \right] dt = \int_0^T \varphi(t) [u, w] dt, \forall w \in A, \forall \varphi \in L_2(0, T). \tag{21}$$

Call a solution to (9) a solution to the Showalter–Sidorov problem whenever it satisfies (10).

Theorem 2. [11] Let  $M$  be  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator. For every  $x_0 \in A, T \in \mathbb{R}_+, u \in L_2(0, T; A^*)$  there exists a unique solution  $x \in \mathbf{X}$  to problem (9), (10).

This goes in several stages and relies on the monotonicity method of [13, 14].

Assume that all requirements of the previous section are satisfied and the embedding  $A \subset \mathbf{H}$  is compact. Construct the space  $\mathbf{U} = L_q(0, T; A^*), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  and define in it a nonempty closed convex set  $\mathbf{U}_{ad}$ .

Consider the optimal control problem

$$J(x, u) \rightarrow \inf, u \in \mathbf{U}_{ad} \tag{22}$$

defining the objective functional as

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_A^p dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{A^*}^q dt, \beta \in (0, 1), \tag{23}$$

Here  $z_d = z_d(t)$  is the required state.

Definition 3. [11] Refer to a pair  $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U}_{ad}$  as a solution to the optimal control problem (9), (10), (22) if

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

where the pairs  $(x, u) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U}_{ad}$  satisfy (9), (10) in the sense of Definition 2; call the vector function  $\tilde{u}$  the optimal control.

Remark 3. Refer as an admissible element of problem (9), (10), (23) to a pair  $(x, u) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U}_{ad}$ , satisfying problem (9), (10) with

$$J(x, u) < +\infty.$$

If  $\mathbf{U}_{ad} \neq \emptyset$  then for every  $u \in \mathbf{U}_{ad} \subset \mathbf{U}$  by Theorem 2 there exists a unique solution  $x = x(u)$  to problem (9), (10). Hence, the set of admissible elements of the problem is nonempty. Using the results obtained in the paper [11] we can show that

Theorem 3. [11] Let  $M$  be  $s$ -monotone and  $p$ -coercive operator. Given  $x_0 \in A$  and  $T \in \mathbb{R}_+$ , there exists a solution to problem (9), (10), (22).

## 2. A mathematical model of reaction-diffusion in a tubular reactor

In this section we construct a mathematical model of reaction-diffusion in a tubular reactor basing on the initial-boundary value problem for degenerate reaction-diffusion equations defined on a geometric graph and reduce it to the abstract Showalter–Sidorov problem (9), (10), we construct

## Математика

functional spaces and establish the main properties of operators. Take on finite connected oriented graph  $\mathbf{G}$  the multicomponent system of reaction-diffusion equations (1) with flow balance and continuity conditions (2), (3) and the Showalter–Sidorov initial conditions (4).

Consider the Hilbert space

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_K) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

equipped with the inner product

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} g_j(s) h_j(s) ds.$$

Construct the Banach space

$$H = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_K) : g_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ and conditions (3) holds}\}$$

with the norm

$$\|g\|_H^2 = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (g_{j_s}^2(s) + g_j^2(s)) ds.$$

Put

$$L_p(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_K) : g_j \in L_p(0, l_j)\}.$$

The set  $L_p(\mathbf{G})$  is a Banach space with the norm

$$\|g\|_{L_p(\mathbf{G})}^p = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} |g_j(s)|^p ds.$$

By the Sobolev embedding theorem, the space  $W_2^1(0, l_j)$  consists of absolutely continuous functions, and so  $H$  is well-defined, dense, and compactly embedded into  $L_2(\mathbf{G})$ . Fix  $a > 0$  and construct the operator

$$\langle \mathbf{A}g, h \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (g_{j_s}(s) h_{j_s}(s) + a g_j(s) h_j(s)) ds, \quad g, h \in H.$$

The operator  $\mathbf{A} \in L(H; H^*)$  is bijective, its spectrum is real, discrete, of finite multiplicity, and accumulates only at  $+\infty$ , while its eigenfunctions constitute a basis for the space  $H$  [15]. Denote by  $\{\varphi_i\}$  a sequence of eigenfunctions of the homogeneous Dirichlet problem for the operator  $\mathbf{A}$  on the graph  $\mathbf{G}$ , and by  $\{\mu_i\}$  the associated sequence of eigenvalues in decreasing order with multiplicities taken into account.

Consider the Hilbert space

$$\mathbf{H} = L_2^m(\mathbf{G}) = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_m) : v_i \in L_2(\mathbf{G})\}$$

equipped with the inner product

$$[v, \zeta] = \sum_{i=1}^m \langle v_i, \zeta_i \rangle$$

and identified with its adjoint. By analogy, construct the space  $A = H^m$  and denote by  $A^*$  the adjoint to  $A$  with respect to the inner product in  $\mathbf{H}$ . Writing  $x = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ , and  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , define the operators

$$\begin{aligned} [Lx, \zeta] &= \langle v_1, \eta_1 \rangle + \dots + \langle v_k, \eta_k \rangle, \quad x, \zeta \in A \\ [M(x), \zeta] &= \alpha_1 \langle v_{1s}, \zeta_{1s} \rangle + \langle f_1(x), \zeta_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_{2s}, \zeta_{2s} \rangle + \langle f_2(x), \zeta_2 \rangle + \dots \\ &\quad + \alpha_m \langle v_{ms}, \zeta_{ms} \rangle + \langle f_m(x), \zeta_m \rangle, \quad x, \zeta \in A. \end{aligned}$$

Lemma 2. (i) The operator  $L \in L(A; A^*)$  is selfadjoint and nonnegative definite.

(ii) Suppose that  $f_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  for  $i = \overline{1, m}$  and  $j = \overline{1, K}$ . Then  $M \in C^\infty(A; A^*)$ .

Proof. Claim (i) follows from the construction of  $L$ . The containment  $M \in C^\infty(A; A^*)$  is a classical result [16].

Thus, problem (1)–(4) reduces to the Showalter–Sidorov problem (9), (10).

### 3. Optimal control problem for a mathematical model of neural signal transmission

In this section we apply the abstract results of the second section to study the optimal control problem for a mathematical model of neural signal transmission, which can be obtained from a multicomponent reaction-diffusion model (1) if  $f_i$  take as (6). Proceed to a mathematical model of neural signal transmission based on the FitzHugh–Nagumo system

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1jt} - \alpha_1 v_{1jss} + \beta_{11} v_{1j} + \beta_{12} v_{2j} + \dots + \beta_{1m} v_{mj} + \kappa_1 v_{1j}^3 = u_{1j}, \\ v_{2jt} - \alpha_2 v_{2jss} + \beta_{21} v_{1j} + \beta_{22} v_{2j} + \dots + \beta_{2m} v_{mj} + \kappa_2 v_{2j}^3 = u_{2j}, \\ \dots \\ v_{kjt} - \alpha_k v_{kjss} + \beta_{k1} v_{1j} + \beta_{k2} v_{2j} + \dots + \beta_{km} v_{mj} + \kappa_k v_{kj}^3 = u_{kj}, \\ -\alpha_{k+1} v_{(k+1)jss} + \beta_{(k+1)1} v_{1j} + \beta_{(k+1)2} v_{2j} + \dots + \beta_{(k+1)m} v_{mj} = u_{(k+1)j}, \\ \dots \\ -\alpha_m v_{mjss} + \beta_{m1} v_{1j} + \beta_{m2} v_{2j} + \dots + \beta_{mm} v_{mj} = u_{mj} \end{array} \right. \quad (24)$$

for all  $s \in (0, l_j), t \in R, j = \overline{1, K}$ ,

defined on a finite connected oriented graph  $\mathbf{G}$  and complemented with conditions (2), (3), where the matrix  $B = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^m$  has the property

$$\exists C_B, C_B > 0: C_B [x, x] \leq [Bx, x] \leq C^B [x, x]. \quad (25)$$

By analogy with Section 2, consider the Hilbert space  $\mathbf{H} = (L_2^m(\mathbf{G}), [\cdot, \cdot])$  and the Banach space  $A = H^m$ . By the Sobolev embedding theorem, there are dense continuous embeddings (13); furthermore, the embedding  $A \subset \mathbf{H}$  is compact. Write  $x = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ , and  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ . Then the operator  $M = M_1 + M_2$  becomes

$$\begin{aligned} [M_1(x), \zeta] &= \alpha_1 \langle v_{1s}, \zeta_{1s} \rangle + \langle \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \dots + \beta_{1m} v_m, \zeta_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_{2s}, \zeta_{2s} \rangle + \\ &+ \langle \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \dots + \beta_{2m} v_m, \zeta_2 \rangle + \dots + \alpha_m \langle v_{ms}, \zeta_{ms} \rangle + \\ &+ \langle \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \beta_{mm} v_m, \zeta_m \rangle, \quad x, \zeta \in A, \\ [M_2(x), \zeta] &= \kappa_1 \langle v_1^3, \zeta_1 \rangle + \kappa_2 \langle v_2^3, \zeta_2 \rangle + \dots + \kappa_k \langle v_k^3, \zeta_k \rangle, \quad x, \zeta \in A, \end{aligned}$$

where  $v_m^3 = (v_{m1}^3, v_{m2}^3, \dots, v_{mk}^3)$ .

Lemma 3. (i) Suppose that  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, m}$  and condition (25) is satisfied. Then the operator  $M_1 \in C^\infty(A; A^*)$  is  $s$ -monotone and 2-coercive.

(ii) Suppose that  $\kappa_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, k}$ . Then the operator  $M_2 \in C^\infty(L_4^k(\mathbf{G}), L_4^k(\mathbf{G}))$  is  $s$ -monotone and  $4 - \frac{4}{3}$

coercive.

Proof. The Fréchet derivatives of  $M_1$  and  $M_2$  at  $x \in A$  are defined as

$$\begin{aligned} [M'_{1x} \xi, \zeta] &= \alpha_1 \langle \xi_{1s}, \zeta_{1s} \rangle + \langle \beta_{11} \xi_1 + \beta_{12} \xi_2 + \dots + \beta_{1m} \xi_m, \zeta_1 \rangle + \\ &+ \alpha_2 \langle \xi_{2s}, \zeta_{2s} \rangle + \langle \beta_{21} \xi_1 + \beta_{22} \xi_2 + \dots + \beta_{2m} \xi_m, \zeta_2 \rangle + \dots + \\ &+ \alpha_m \langle \xi_{ms}, \zeta_{ms} \rangle + \langle \beta_{m1} \xi_1 + \beta_{m2} \xi_2 + \dots + \beta_{mm} \xi_m, \zeta_m \rangle, \quad x, \zeta \in A, \\ [M'_{2x} \xi, \zeta] &= 3\kappa_1 \langle v_1^2 \xi_1, \zeta_1 \rangle + 3\kappa_2 \langle v_2^2 \xi_2, \zeta_2 \rangle + \dots + 3\kappa_k \langle v_k^2 \xi_k, \zeta_k \rangle, \quad x, \zeta \in A. \end{aligned}$$

Then the continuous embedding  $W_2^1(\mathbf{G}) \subset L_2(\mathbf{G})$  yields

$$\begin{aligned} |[M'_{1x} \xi, \zeta]| &\leq C \|\xi\|_A \|\zeta\|_A, \\ |[M'_{2x} \xi, \zeta]| &\leq 3C \|\xi\|_A \|x\|_A^2 \|\zeta\|_A, \\ |[M''_{2x}(\xi_1, \xi_2), \zeta]| &\leq 6C \|\xi_1\|_A \|\xi_2\|_A \|x\|_A \|\zeta\|_A, \\ |[M'''_{2x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \zeta]| &\leq 6C \|\xi_1\|_A \|\xi_2\|_A \|\xi_3\|_A \|\zeta\|_A, \quad C = \max_i \kappa_i, \end{aligned}$$

where  $M'_{1x}$  and  $M'_{2x}$  stand for the Fréchet derivatives of  $M_1$  and  $M_2$  at  $x$ . Since  $M_{1x}^{(2)} \equiv O$  and  $M_{2x}^{(4)} \equiv O$ , the operators  $M_1$  and  $M_2$  are  $C^\infty$ -smooth. Since

$$\begin{aligned}
 [M'_{1x}\xi, \xi] &= \alpha_1 \langle \xi_{1s}, \xi_{1s} \rangle + \langle \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \dots + \beta_{1m}\xi_m, \xi_1 \rangle + \\
 &+ \alpha_2 \langle \xi_{2s}, \xi_{2s} \rangle + \langle \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \dots + \beta_{2m}\xi_m, \xi_2 \rangle + \dots + \\
 &+ \alpha_m \langle \xi_{ms}, \xi_{ms} \rangle + \langle \beta_{m1}\xi_1 + \beta_{m2}\xi_2 + \dots + \beta_{mm}\xi_m, \xi_m \rangle > 0, \quad x, \xi \in A, \\
 [M'_{2x}\xi, \xi] &= 3\kappa_1 \langle v_1^2 \xi_1, \xi_1 \rangle + 3\kappa_2 \langle v_2^2 \xi_2, \xi_2 \rangle + \dots + 3\kappa_k \langle v_k^2 \xi_k, \xi_k \rangle > 0, \quad x, \xi \in A,
 \end{aligned}$$

it follows that the operators  $M_1$  and  $M_2$  are  $s$ -monotone. Since

$$\begin{aligned}
 C_1 \|x\|_A^2 &\leq [M_1(x), x] \leq C_2 \|x\|_A^2, \\
 [M_2(x), x] &= \kappa_1 \|v_1\|_{L_4}^4(\mathbf{G}) + \kappa_2 \|v_2\|_{L_4}^4(\mathbf{G}) + \dots + \kappa_k \|v_k\|_{L_4}^4(\mathbf{G}),
 \end{aligned}$$

it follows that  $M_1$  is 2-coercive and  $M_2$  is 4-coercive.

Remark 4. By the construction of  $L$ , the sets  $\ker L$ ,  $\text{coim } L$ ,  $\text{coker } L$ , and  $\text{im } L$  are defined as

$$\begin{aligned}
 \ker L &= \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_k \times \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_{m-k}, \\
 \text{coim } L &= \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_k \times \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_{m-k}, \\
 \text{coker } L &= \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_k \times \underbrace{H^* \times H^* \times \dots \times H^*}_{m-k}, \\
 \text{im } L &= \underbrace{H^* \times H^* \times \dots \times H^*}_k \times \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}}_{m-k}.
 \end{aligned}$$

Hence, condition (14) is satisfied.

Construct the set

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \{x \in A : &\langle \alpha_{k+1} v_{(k+1)s}, \xi_{(k+1)s} \rangle + \langle \beta_{(k+1)1} v_1 + \beta_{(k+1)2} v_2 + \dots + \\
 &+ \beta_{(k+1)m} v_m, \xi_{k+1} \rangle + \dots + \langle \alpha_m v_{ms}, \xi_{ms} \rangle + \langle \beta_{m1} v_1 + \beta_{m2} v_2 + \dots + \\
 &+ \beta_{mm} v_m, \xi_m \rangle = \langle u_{(k+1)}, \xi_{k+1} \rangle + \dots + \langle u_m, \xi_m \rangle\}.
 \end{aligned}$$

Condition (15) becomes

$$(0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_m) \text{ is independent of } t \in (0, T) \tag{26}$$

Then Theorem 1 and Lemmas 2 and 3 imply the following theorem.

Theorem 4. Suppose that  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, m}$ ,  $\kappa_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, k}$  and conditions (25) and (26) are satisfied. Then the set  $\mathbf{M}$  is a simple Banach  $C^\infty$ -manifold modeled on the subspace  $\text{coim } L$ .

Construct the spaces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \{x = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m) : v_i \in L_\infty(0, T; H) \cap L_4(0, T; H)\}, \\
 \frac{dv_i}{dt} &\in L_2(0, T; H), i = 1, \dots, k; v_i \in L_\infty(0, T; H) \cap L_2(0, T; H), \\
 \mathbf{U} &= \{u = (u_1, u_2, \dots, u_m) : u_i \in L_4(0, T; L_4(G)), i = 1, \dots, k; \\
 &u_i \in L_2(0, T; H^*), i = k + 1, \dots, m\}.
 \end{aligned}$$

By analogy with Section 2, construct an orthonormal system  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i\}$ , where  $\{\varphi_i\}$  are eigenvectors of  $A$ , which in view of the embedding (13) constitutes a basis for the space  $\mathbf{H}$ . Construct Galerkin approximations to the solution to problem (2), (3), (24) as

$$v_i^n(s, t) = \sum_{l=1}^n a_i^l(t) \varphi_l(s), i = 1, \dots, m,$$

where the coefficients  $a_i^l$  for  $i = \overline{1, m}$  and  $l = \overline{1, n}$  are determined by the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle v_{1t}^n - \alpha_1 v_{1ss}^n + \beta_{11} v_1^n + \beta_{12} v_2^n + \dots + \beta_{1m} v_m^n + \kappa_1 (v_1^n)^3, \varphi_i \rangle = \langle u_1, \varphi_i \rangle, \\ \langle v_{2t}^n - \alpha_2 v_{2ss}^n + \beta_{21} v_1^n + \beta_{22} v_2^n + \dots + \beta_{2m} v_m^n + \kappa_2 (v_2^n)^3, \varphi_i \rangle = \langle u_2, \varphi_i \rangle, \\ \dots \\ \langle v_{kt}^n - \alpha_k v_{kss}^n + \beta_{k1} v_1^n + \beta_{k2} v_2^n + \dots + \beta_{km} v_m^n + \kappa_k (v_k^n)^3, \varphi_i \rangle = \langle u_k, \varphi_i \rangle, \\ \langle -\alpha_{k+1} v_{(k+1)ss}^n + \beta_{(k+1)1} v_1^n + \beta_{(k+1)2} v_2^n + \dots + \beta_{(k+1)m} v_m^n, \varphi_i \rangle = \langle u_{(k+1)}, \varphi_i \rangle, \\ \dots \\ \langle -\alpha_m v_{mss}^n + \beta_{m1} v_1^n + \beta_{m2} v_2^n + \dots + \beta_{mm} v_m^n, \varphi_i \rangle = \langle u_m, \varphi_i \rangle, \\ i = \overline{1, n}, \end{array} \right.$$

and the Showalter–Sidorov conditions

$$\langle v_1(0) - v_{01}, \varphi_i \rangle = 0, \dots, \langle v_k(0) - v_{0k}, \varphi_i \rangle = 0, i = \overline{1, n}.$$

Then Theorem 2 and Lemmas 2 and 3 imply the following theorem.

Theorem 5. Suppose that  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, m}$ ,  $\kappa_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, k}$  and conditions (25) are satisfied. Given  $x_0 \in A$  and  $u \in \mathcal{U}$ , there exists a unique solution  $x \in \mathcal{X}$  to problem (2)–(4), (24).

Choose a nonempty closed convex set  $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ . Consider the optimal control problem

$$J(x, u) \rightarrow \inf \tag{27}$$

by solutions to problem (2)–(4), (25), where the objective functional is defined as

$$\begin{aligned} J(x, u) = & \beta \sum_{i=1}^k \int_0^T \|v_i - z_i^d\|_{L_2(G)}^2 dt + \beta \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|v_i - z_i^d\|_{L_4(G)}^4 dt + \\ & + (1 - \beta) \sum_{i=1}^k \int_0^T \|u_i\|_{L_2(G)}^2 dt + (1 - \beta) \sum_{i=k+1}^m \int_0^T \|u_m\|_{L_4(G)}^{\frac{4}{3}} dt, \beta \in (0, 1), \end{aligned}$$

Then Theorem 3 and Lemmas 2 and 3 imply the following Theorem.

Theorem 6. Suppose that  $\alpha_i, \kappa_i \in \mathbb{R}_+$  for  $i = \overline{1, m}$  and conditions (26) are satisfied. Then for every  $x_0 \in A$  problem (2)–(4), (24), (27) admits optimal control.

The author is grateful to Professors N.A. Manakova and G.A. Sviridyuk for setting the problem and productive discussions.

## References

1. Prigogine I., Lefever R. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems II. *The Journal of Chemical Physics*, 1968, Vol. 48, Iss. 4, pp. 1695–1700. DOI: 10.1063/1.1668896
2. FitzHugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, Vol. 1, no. 6, pp. 445–466. DOI: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6
3. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, Vol. 50, Iss. 10, pp. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235
4. Bokareva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney assemblies of phase spaces of certain semilinear equations of Sobolev type. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776
5. Gubernov V.V., Kolobov A.V., Polezhaev A.A., Sidhu H.S., McIntosh A.C., Brindley J. Stabilization of combustion wave through the competitive endothermic reaction. *Proceeding of the Royal Society A*, 2015, Vol. 471, no. 2180, pp. 20150293. DOI: 10.1098/rspa.2015.0293
6. Savchik J., Chang Br., Rabitz H. Application of moments to the general linear multicomponent reaction-diffusion equation. *Journal of Physical Chemistry*, 1983, Vol. 87, no. 11, pp. 1990–1997. DOI: 10.1021/j100234a031
7. Zagrebina S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 5–22. DOI: 10.14529/mmp140301

8. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Phase Space of the Cauchy–Dirichlet Problem for the Oskolkov Equation of Nonlinear Filtration. *Russian Mathematics*, 2003, Vol. 47, no. 9, pp. 33–38.
9. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity  $p$ -Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, Vol. 31, no. 11, pp. 1882–1890.
10. Zamyshlyayeva A.A., Tsyplenkova O.N., Bychkov E.V. Optimal Control of Solutions to the Initial-Final for the Sobolev Type Equation of Higher Order. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, Vol. 3, no. 2, pp. 57–67. DOI: 10.14529/jcem1602007
11. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An optimal control problem for the Hoff equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, Vol. 1, no. 2, pp. 247–253.
12. Manakova N.A., Gavrilova O.V. Optimal Control for a Mathematical Model of Nerve Impulse Spreading. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 4, pp. 120–126. DOI: 10.14529/mmp150411
13. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Svешnikov A.G. *Blow-up in nonlinear sobolev-type equations*. Berlin, N.Y., Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011, 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294
14. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).
15. Bayazitova A.A. The Sturm–Liouville problem on geometric graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16 (192), Issue 5, pp. 4–10. (in Russ.).
16. Hassard D.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.-H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1981, 311 p.
17. Sviridyuk G.A. О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (On the Solvability of Singular Systems of Ordinary Differential Equations). *Differentsial'nye Uravneniya*, 1987, Vol. 23, no. 9, pp. 1637–1639. (in Russ.).

*Received December 26, 2019*

---

**Bulletin of the South Ural State University  
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”  
2020, vol. 12, no. 1, pp. 14–23**

---

УДК 517.9

DOI: 10.14529/mmph200102

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ТРУБЧАТОМ РЕАКТОРЕ

**О.В. Гаврилова**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: gavrilovaov@susu.ru*

Статья посвящена изучению математической модели реакции-диффузии в трубчатом реакторе на основе вырожденных уравнений типа реакции-диффузии, заданных на геометрическом графе. Исследуется именно вырожденный случай, так как при построении математической модели учитывается, что скорость одной искомой функции значительно превышает скорость другой. Изучаемая модель относится к широкому классу полулинейных моделей соболевского типа. Приводятся достаточные условия простоты фазового многообразия абстрактного уравнения соболевского типа в случае  $s$ -монотонного и  $p$ -коэрцитивного оператора; доказываются существование и единственность решения задачи Шоултера–Сидорова в слабом обобщенном смысле и существование оптимального управления слабыми обобщенными решениями рассматриваемой задачи. На основе абстрактной теории найдены достаточные условия существования оптимального управления для математической модели передачи импульса по нейронам.

*Ключевые слова: уравнения соболевского типа; фазовое многообразие; задача Шоултера–Сидорова; система уравнений реакция-диффузия; задача оптимального управления.*

## Литература

1. Prigogine, I. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems II / I. Prigogine, R. Lefever // The Journal of Chemical Physics. – 1968. – Vol. 48, Iss. 4. – P. 1695–1700.
2. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // Biophysical Journal. – 1961. – Vol. 1, no. 6. – P. 445–466.
3. Nagumo, J. An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // Proceedings of the IRE. – 1962. – Vol. 50, Iss. 10. – P. 2061–2070.
4. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.
5. Stabilization of combustion wave through the competitive endothermic reaction / V.V. Gubernov, A.V. Kolobov, A.A. Polezhaev *et al.* // Proceeding of the Royal Society A. – 2015. – Vol. 471, no. 2180. – P. 20150293.
6. Savchik, J. Application of moments to the general linear multicomponent reaction-diffusion equation / J. Savchik, Br. Chang, H. Rabitz // Journal of Physical Chemistry. – 1983. – Vol. 87, no. 11. – P. 1990–1997.
7. Zagrebina, S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid / S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 3. – P. 5–22.
8. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Серия: Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.
9. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно  $p$ -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
10. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal control of solutions to the initial-final for the Sobolev type equation of higher order / A.A. Zamyshlyayeva, O.N. Tsyplenkova, E.V. Bychkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – Vol. 3, no. 2. – P. 57–67.
11. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова, // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.
12. Манакова, Н.А. Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 120–126.
13. Al'shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev-type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011. – 648 p.
14. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 p.
15. Баязитова, А.А. Задача Штурма–Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – Вып. 5. – № 16 (192). – С. 4–10.
16. Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
17. Свиридюк, Г.А. О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1637–1639.

Поступила в редакцию 26 декабря 2019 г.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКОЙ

**Х.М. Гамзаев**

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку,  
Азербайджан

E-mail: xan.h@rambler.ru

Рассматривается процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой, описываемый нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных в переменных скорость–давление. Эта система уравнений сводится к одному нелинейному уравнению параболического типа относительно скорости. В рамках полученной модели поставлена обратная задача по определению коэффициента проницаемости стенки трубы, зависящего лишь от временной переменной. При этом на выходе трубы задается дополнительное условие относительно давления жидкости. Построен разностный аналог поставленной коэффициентной обратной задачи с использованием конечно-разностных аппроксимаций. Для решения полученной разностной задачи предложено специальное представление, позволяющее на каждом дискретном значении временной переменной расщепить задачу на две взаимно независимые линейные разностные задачи второго порядка.

В результате получена явная формула для определения приближенного значения коэффициента проницаемости стенки при каждом дискретном значении временной переменной. На основе предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач.

*Ключевые слова:* нестационарное течение жидкости; труба с проницаемой стенкой; коэффициент проницаемости стенки трубы; коэффициентная обратная задача; разностная задача.

### Введение

Гидродинамические исследования движения однофазных жидкостей в перфорированных трубах помимо теоретического значения, имеют и многочисленные практические применения в пневмо- и гидротранспорте, химической технологии, разработке нефтяных и газовых месторождений горизонтальными скважинами, ракетной технике, мелиорации, гидрологии, биомеханике и т. д. [1–4]. При исследовании таких задач дискретное распределение точек перфорации (точек отбора или подкачки жидкости) заменяется непрерывным и исследования задач сводятся к изучению нестационарного движения жидкости в трубах с проницаемыми стенками. Численному и аналитическому исследованию математических моделей нестационарного течения жидкостей с различными реологическими свойствами в трубах с проницаемыми стенками посвящены работы [1–7].

Необходимо отметить, что для практики транспорта однофазных жидкостей в трубах с проницаемыми стенками важное значение имеет определение коэффициента проницаемости стенки трубы. Однако определить коэффициент проницаемости стенки экспериментальным путем практически не представляется возможным. В связи с этим в данной работе задача определения коэффициента проницаемости стенки трубы представляется как коэффициентная обратная задача и предлагается численный метод ее решения.

### Постановка задачи и метод решения

Пусть рассматривается процесс нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в горизонтально расположенной трубе с проницаемой стенкой, длиной  $l$ , диаметром  $d$ . Математическую модель данного процесса представим в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, включающую в себя уравнение движения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\lambda |u(x,t)|}{2d} u(x,t), \quad (1)$$

и дифференциальное уравнение неразрывности потока с учетом расхода жидкости через стенки трубы:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{4}{d} q(x,t), \quad (2)$$

где  $p(x,t)$  – давление жидкости в трубе,  $u(x,t)$  – средняя скорость по сечению трубы,  $q(x,t)$  – скорость оттока жидкости через стенку трубы,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления.

Предположим, что отток жидкости через проницаемую стенку трубы происходит в соответствии с законом Старлинга [5, 6], согласно которому скорость оттока жидкости прямо пропорциональна разнице между давлением жидкости внутри трубы и давлением в окружающей среде:

$$q(x,t) = k(t)(p(x,t) - p_e(x,t)), \quad (3)$$

где  $p_e(x,t)$  – давление внешней среды,  $k(t)$  – коэффициент проницаемости стенки трубы. Учитывая соотношение (3), уравнение (2) запишем в виде:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{4}{d} k(t)(p(x,t) - p_e(x,t)). \quad (4)$$

Преобразуем систему уравнений (1), (4). Найдем  $p(x,t)$  из уравнения (4)

$$p(x,t) = p_e(x,t) - \frac{d}{4k(t)} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (5)$$

и полученное выражение подставим в уравнение (1). В результате получим:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e(x,t)}{\partial x} + \frac{d}{4\rho k(t)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\lambda |u(x,t)|}{2d} u(x,t), \quad (6)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T.$$

Предположим, что для уравнения (6) известно следующее начальное

$$u(x,0) = \phi(x) \quad (7)$$

и граничные условия

$$u(0,t) = \theta(t), \quad (8)$$

$$u(l,t) = w(t). \quad (9)$$

Очевидно, что, задавая функции  $\phi(x)$ ,  $\theta(t)$ ,  $w(t)$ ,  $k(t)$ , решив прямую задачу (6)–(9), можно найти распределение скорости течения в трубе  $u(x,t)$ . А по формуле (5) – распределение давления по длине трубы. Теперь предположим, что коэффициент проницаемости стенки трубы  $k(t)$  неизвестен и подлежит определению наряду с функцией  $u(x,t)$ . Однако для корректной постановки задачи необходимо задавать дополнительное условие. Пусть в конце трубы  $x=l$  наряду со скоростью течения одновременно задается и давление жидкости

$$p(l,t) = \gamma(t).$$

Тогда, записав уравнение (4), при  $x=l$  с учетом краевого условия для давления, в качестве дополнительного условия для уравнения (6) будем иметь

$$-\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{4}{d} k(t)(\gamma(t) - p_e(l,t)). \quad (10)$$

Таким образом, задача заключается в определении пары функций  $\{u(x,t), k(t)\}$ , удовлетворяющих уравнению (6) и условиям (7)–(10). Поставленная задача (6)–(10) относится к классу коэффициентных обратных задач математической физики [8, 9].

Для численного решения коэффициентной обратной задачи (6)–(10), сначала построим ее дискретный аналог. С этой целью введем равномерную разностную сетку

$$\bar{\omega} = \{(t_j, x_i) : x_i = i\Delta x, t_j = j\Delta t, i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\},$$

в прямоугольной области  $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  с шагами  $\Delta x = l/n$  по переменной  $x$  и  $\Delta t = T/m$  по времени  $t$ . Используя полуявную аппроксимацию по времени для нелинейных членов уравнения (6), дискретный аналог задачи (6)–(10) на сетке  $\bar{\omega}$  представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + u_i^{j-1} \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} &= v \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{1}{k^j} \frac{d}{4\rho} \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\lambda |u_i^{j-1}|}{2d} u_i^j - \frac{1}{\rho} \frac{p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j}{2\Delta x} \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ u_i^0 &= \phi_i, \quad i = 0, 2, \dots, n, \\ u_0^j &= \theta^j, \quad u_n^j = w^j, \\ -\frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{\Delta x} &= \frac{4}{d} k^j (\gamma^j - p_{en}^j), \end{aligned}$$

где  $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$ ,  $p_{ei}^j \approx p_e(x_i, t_j)$ ,  $k^j \approx k(t_j)$ ,  $\gamma^j = \gamma(t_j)$ ,  $w^j = w(t_j)$ ,  $\theta^j = \theta(t_j)$ ,  $\phi_i = \phi(x_i)$ .

Полученная разностная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных выступают приближенные значения искомого функций  $u(x, t)$  и  $k(t)$  в узлах разностной сетки  $\bar{\omega}$ , т. е.  $u_i^j$ ,  $k^j$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Данную систему разностных уравнений преобразуем к виду:

$$a_i u_{i-1}^j - c_i u_i^j + b_i u_{i+1}^j = \frac{1}{k^j} g_i^{j-1} + f_i^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (11)$$

$$u_0^j = \theta^j, \quad (12)$$

$$u_n^j = w^j, \quad (13)$$

$$u_n^j = u_{n-1}^j - k^j \frac{4}{d} (\gamma^j - p_{en}^j) \Delta x, \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

$$u_i^0 = \phi_i, \quad i = 0, 2, \dots, n, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= v\Delta t + u_i^{j-1} \Delta t \Delta x, \quad b_i = v\Delta t, \quad c_i = a_i + b_i + \Delta x^2 + \frac{\lambda |u_i^{j-1}|}{2d} \Delta x^2 \Delta t, \\ g_i^{j-1} &= -\frac{d(u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1})\Delta t}{4\rho}, \quad f_i^{j-1} = \frac{(p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j)\Delta t \Delta x}{2\rho} - \Delta x^2 u_i^{j-1}. \end{aligned}$$

С целью разделения разностной задачи (11)–(15) на взаимно независимые подзадачи, каждая из которых может решаться самостоятельно, решение этой системы при каждом фиксированном значении  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  представим в виде [10, 11]:

$$u_i^j = \xi_i^j + \frac{1}{k^j} \eta_i^j, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (16)$$

где  $\xi_i^j$ ,  $\eta_i^j$  – неизвестные переменные. Подставляя выражение для  $u_i^j$  в (11)–(13), получим

$$\left[ a_i \xi_{i-1}^j - c_i \xi_i^j + b_i \xi_{i+1}^j - f_i^{j-1} \right] + \frac{1}{k^j} \left[ a_i \xi_{i-1}^j - c_i \xi_i^j + b_i \xi_{i+1}^j - g_i^{j-1} \right] = 0, \quad \xi_0^j + \frac{1}{k^j} \eta_0^j = \theta^j, \quad \xi_n^j + \frac{1}{k^j} \eta_n^j = w^j.$$

Из последних соотношений получим следующие разностные задачи для определения вспомогательных переменных  $\xi_i^j$ ,  $\eta_i^j$

$$a_i \xi_{i-1}^j - c_i \xi_i^j + b_i \xi_{i+1}^j = f_i^{j-1}, \quad (17)$$

$$\xi_0^j = \theta^j, \quad (18)$$

$$\xi_n^j = w^j. \quad (19)$$

$$a_i \eta_{i-1}^j - c_i \eta_i^j + b_i \eta_{i+1}^j = g_i^{j-1}, \quad (20)$$

$$\eta_0^j = 0, \quad (21)$$

$$\eta_n^j = 0. \quad (22)$$

Разностные задачи (17)–(19) и (20)–(22) при каждом фиксированном значении  $j = 1, 2, \dots, m$  представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, и решения этих систем можно найти методом Томаса [9].

Подставив представление (16) в (14), будем иметь:

$$\xi_n^j + \frac{1}{k^j} \eta_n^j = \xi_{n-1}^j + \frac{1}{k^j} \eta_{n-1}^j - k^j \frac{4}{d} (\gamma^j - p_{en}^j) \Delta x.$$

Отсюда можно определить приближенное значение коэффициента проницаемости стенки трубы  $k^j$  как положительный корень данного уравнения

$$k^j = \frac{-d(\xi_n^j - \xi_{n-1}^j) \pm \sqrt{d^2(\xi_n^j - \xi_{n-1}^j)^2 - 16d\Delta x(\eta_n^j - \eta_{n-1}^j)(\gamma^j - p_{en}^j)}}{4(\gamma^j - p_{en}^j)\Delta x/d}. \quad (23)$$

Определив  $k^j$  по формуле (23), можно последовательно найти  $u_1^j, u_2^j, \dots, u_{n-1}^j$  по рекуррентной формуле (16).

После определения распределения скорости жидкости по длине трубопровода можно перейти к определению распределения давления. Построив дискретный аналог уравнения (5) на сетке  $\bar{\omega}$ , получим следующую расчетную формулу для вычисления давления

$$p_i^j = p_{ei}^j - \frac{d}{4k^j} \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (24)$$

Таким образом, вычислительный алгоритм решения коэффициентной обратной задачи (6)–(10) по определению коэффициента проницаемости стенки трубы  $k(t)$  при каждом дискретном значении временной переменной  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  основан на:

- 1) решении двух линейных разностных задач второго порядка (17)–(19) и (20)–(22) относительно вспомогательных переменных  $\xi_i^j, \eta_i^j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
- 2) определении  $k^j$  из (23);
- 3) использовании представления (16) для вычисления  $u_i^j$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

### Результаты численных расчетов

Предложенный вычислительный алгоритм был опробован на модельных задачах. Численные расчеты проводились по следующей схеме:

– для заданных функций  $\phi(x)$ ,  $\theta(t)$ ,  $w(t)$ ,  $k(t)$  определяется решение прямой задачи (6)–(9), т. е. функция  $u(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;

– найденная зависимость  $p(l, t) = p_e(l, t) - \frac{d}{4k(t)} \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \gamma(t)$  принимается в качестве точ-

ных данных для решения обратной задачи по восстановлению  $k(t)$ .

Численные расчеты выполнялись на разностной сетке с шагами  $\Delta x = 0,5$  м,  $\Delta t = 0,01$  с. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая  $d = 0,4$  м,  $l = 100$  м,  $\theta(t) = 1,5$  м/с,  $w(t) = 0,5$  м/с,  $\phi(x) = 1,5 - x/l$  м/с,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $k(t) = 0,05$  м<sup>2</sup>·с/кг,  $k(t) = 0,4 - 0,3 \sin 10t$  м<sup>2</sup>·с/кг,  $k(t) = 0,1/\sqrt{t}$  м<sup>2</sup>·с/кг,  $\lambda = 0,02$  представлены в таблице.

Результаты численного эксперимента свидетельствуют, что предложенный вычислительный алгоритм с высокой точностью восстанавливает зависимость коэффициента проницаемости стенки трубы от времени.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что предложенный метод численного моделирования можно применять при исследовании процессов течения однофазных жидкостей в трубах с проницаемыми стенками.

Численные результаты по определению функции  $k(t)$

$t_j, c$	$k(t) = 0,05$		$k(t) = 0,4 - 0,3\sin 10t$		$k(t) = 0,1/\sqrt{t}$	
	Точное	Вычисл.	Точное	Вычисл.	Точное	Вычисл.
0,5	0,05	0,05	0,688	0,688	0,141	0,141
1,0	0,05	0,05	0,563	0,563	0,100	0,100
1,5	0,05	0,05	0,205	0,205	0,082	0,082
2,0	0,05	0,05	0,126	0,126	0,071	0,071
2,5	0,05	0,05	0,440	0,440	0,063	0,063
3,0	0,05	0,05	0,696	0,696	0,058	0,058
3,5	0,05	0,05	0,528	0,528	0,053	0,053
4,0	0,05	0,05	0,176	0,176	0,050	0,050
4,5	0,05	0,05	0,145	0,145	0,047	0,047
5,0	0,05	0,05	0,479	0,479	0,045	0,045
5,5	0,05	0,05	0,700	0,700	0,043	0,043
6,0	0,05	0,05	0,491	0,491	0,041	0,041
6,5	0,05	0,05	0,152	0,152	0,039	0,039
7,0	0,05	0,05	0,168	0,168	0,038	0,038
7,5	0,05	0,05	0,516	0,516	0,037	0,037
8,0	0,05	0,05	0,698	0,698	0,035	0,035
8,5	0,05	0,05	0,453	0,453	0,034	0,034
9,0	0,05	0,05	0,132	0,132	0,033	0,033
9,5	0,05	0,05	0,195	0,195	0,032	0,032
10,0	0,05	0,05	0,552	0,552	0,032	0,032

## Заключение

В рамках одномерной модели нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой рассмотрена коэффициентная обратная задача по определению зависимости коэффициента проницаемости стенки от времени. Предложенный безитерационный вычислительный алгоритм позволяет в каждом временном слое последовательно определять коэффициент проницаемости стенки, распределение скорости жидкости и давление по всей длине трубы.

## Литература

1. Marshall, E.A. Flow of a Newtonian Fluid through a Permeable Tube: The application to the Proximal Renal Tubule / E.A. Marshall, E.A. Trowbridge // *Bulletin of Mathematical Biology*. – 1974. – Vol. 36, Iss. 5–6. – pp. 457–476.
2. Ross, S.M. A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection / S.M. Ross // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1974. – Vol. 63, Iss. 1. – P. 157–175.
3. Pozrikidis, C. Stokes flow through a permeable tube / C. Pozrikidis // *Archive of Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 80, Iss. 4. – P. 323–333.
4. Zhang, Q. Modeling Study on Fluid Flow in Horizontal Perforated Pipes with Wall Influx / Q. Zhang, Z. Wang // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. – 2014. – Vol. 41, Iss. 6. – pp. 556–566.
5. Elshahed, M. Blood flow in capillary under starling hypothesis / M. Elshahed // *Applied Mathematics and Computation*. – 2004. – Vol. 149, Iss. 2. – pp. 431–439.
6. Muthu, P. Mathematical model of flow in renal tubules / P. Muthu, T. Berhane // *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2010. – Vol. 6, no. 20. – pp. 94–107.
7. Mariamma, N.K. Flow of a Newtonian Fluid in a Blood Vessel with Permeable Wall – A theoretical model / N.K. Mariamma, S.N. Majhi // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2000. – Vol. 40, Iss. 12. – pp. 1419–1432.
8. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009. – 457 с.

9. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: URSS, ЛКИ, 2014. – 478 с.

10. Vabishchevich, P.N. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations / P.N. Vabishchevich, V.I. Vasil'ev // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 24, Iss. 1. – pp. 42–59.

11. Gamzaev, Kh.M. Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation / Kh.M. Gamzaev // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2017. – Vol. 221, Iss. 6. – pp. 833–839.

Поступила в редакцию 26 января 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University*  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 1, pp. 24–30

DOI: 10.14529/mmph200103

## INVERSE PROBLEM OF UNSTEADY INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN A PIPE WITH A PERMEABLE WALL

**Kh.M. Gamzaev**

*Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*  
E-mail: xan.h@rambler.ru

The process of unsteady flow of viscous incompressible fluid in a pipe with a permeable wall described by a nonlinear system of partial differential equations in the velocity–pressure variables is considered. This system of equations is reduced to a single nonlinear equation of parabolic type with respect to velocity. Within the framework of the obtained model, the inverse problem is posed to determine the permeability coefficient of the pipe wall, which depends only on the time variable. In this case, an additional condition relative to the fluid pressure is set at the outlet of the pipe. A difference analogue of the coefficient inverse problem is built using finite-difference approximations. For the solution of the received difference problem, the special representation is offered allowing to split problems into two mutually independent linear difference problems of the second order on each discrete value of a time variable.

As a result, an explicit formula is obtained to determine the approximate value of the wall permeability coefficient for each discrete value of the time variable. On the basis of the proposed computational algorithm, numerical experiments were carried out for model problems.

*Keywords: unsteady fluid flow; pipe with permeable wall; coefficient of permeability of the pipe wall; coefficient inverse problem; difference problem.*

### References

1. Marshall E.A., Trowbridge E.A. Flow of a Newtonian Fluid through a Permeable Tube: The application to the Proximal Renal Tubule. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1974, Vol. 36, Iss. 5–6, pp. 457–476. DOI: 10.1007/BF02463260

2. Ross S.M. A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, Vol. 63, Iss. 1, pp. 157–175. DOI: 10.1017/S0022112074001066

3. Pozrikidis C. Stokes flow through a permeable tube. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, Vol. 80, Iss. 4, pp. 323–333. DOI: 10.1007/s00419-009-0319-9

4. Zhang Q., Wang Z. Modeling Study on Fluid Flow in Horizontal Perforated Pipes with Wall Influx. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2014, Vol. 41, Iss. 6, pp. 556–566. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v41.i6.80

5. Elshahed M. Blood flow in capillary under starling hypothesis. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, Vol. 149, Iss. 2, pp. 431–439. DOI: 10.1016/S0096-3003(03)00151-6

6. Muthu P., Berhane T. Mathematical model of flow in renal tubules. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, Vol. 6, no. 20, pp. 94–107.

7. Mariamma N.K., Majhi S.N. Flow of a Newtonian Fluid in a Blood Vessel with Permeable Wall – A theoretical model. *Computers & Mathematics with Applications*, 2000, Vol. 40, Iss. 12, pp. 1419–1432. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00250-9

8. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*. De Gruyter, Germany, 2011, 459 p.

9. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* (Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics). Moscow, URSS, LKI Publ., 2014, 478 p. (in Russ.).

10. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2016, Vol. 24, Iss. 1, pp. 42–59. DOI: 10.1080/17415977.2014.993984

11. Gamzaev Kh.M. Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, Vol. 221, Iss. 6, pp. 833–839. DOI: 10.1007/s10958-017-3271-1

*Received January 26, 2019*

## О ЯВНОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

**К.М. Расулов**

Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация  
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Для качественного исследования краевых задач в тех или иных классах функций комплексного переменного существенное значение имеет проблема разрешимости этих задач в явном виде, т. е. возможности построения общих решений рассматриваемых задач, используя лишь формулы решения классических скалярных краевых задач Римана или Гильберта для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений и/или линейных дифференциальных уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах. В представленной статье рассматривается на комплексной плоскости одно семейство дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с коэффициентом при искомой функции, зависящим от натурального параметра  $n$ , а решения которого принято называть обобщенными аналитическими функциями порядка  $n$ . Кроме того, в статье сформулирована общая постановка краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций произвольного порядка  $n$ , а также получен явный метод решения поставленной краевой задачи в классе обобщенных аналитических функций первого порядка в случае, когда носителем краевых условий является единичная окружность. Установлено, что в рассматриваемом случае решение задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций первого порядка редуцируется к последовательному решению простейшей скалярной задачи Римана в классе ограниченных на бесконечности кусочно аналитических функций и одного линейного дифференциального уравнения Эйлера второго порядка, т. е. искомая задача в рассматриваемом случае допускает полное описание картины ее разрешимости. Полученные общие результаты иллюстрируются на конкретном примере.

*Ключевые слова:* краевая задача; задача типа Неймана; явное решение, обобщенная аналитическая функция; дифференциальное уравнение Эйлера; единичная окружность.

1. Для  $z \in T^+$ , где  $T^+$  – некоторая область на плоскости переменного  $z = x + iy$ , рассмотрим семейство дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

здесь  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – искомая функция.

Насколько нам известно, впервые на некоторые качественные свойства решений семейства уравнений (1) обратил внимание К.В. Бауэр (K.W. Bauer) в работе [1]. Более подробно функциональные свойства решений семейства уравнений (1) изложены в монографии [2]. В частности, в [2] установлено, что при каждом фиксированном значении параметра  $n$  общее решение дифференциального уравнения (1) в некоторой односвязной области  $T^+$  можно представить в виде

$$W(z) = (1+z\bar{z})^{n+1} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[ \frac{\varphi^+(z)}{(1+z\bar{z})^{n+1}} \right] + \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \left[ \frac{f^+(z)}{(1+z\bar{z})^{n+1}} \right] \right\}, \quad z \in T^+, \quad (2)$$

где  $\varphi^+(z)$ ,  $f^+(z)$  – голоморфные в  $T^+$  функции.

Далее, следуя [3], функции вида (2) будем называть *обобщенными аналитическими функциями порядка  $n$*  в области  $T^+$ , а функции  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$ , входящие в правую часть равенства (2), для удобства назовем соответственно *первой и второй голоморфными компонентами* обобщенной аналитической функции  $W(z)$ . При этом класс всех обобщенных аналитических функций порядка  $n$  в области  $T^+$  будем обозначать символом  $GA_n(T^+)$ .

Пусть граница  $L$  области  $T^+$  – гладкая кривая Жордана. Для удобства символом  $GA_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$  будем обозначать класс обобщенных аналитических порядка  $n$  ( $n \geq 1$ ) в области  $T^+$  функций  $W(z)$ , голоморфные компоненты которых непрерывны в смысле Гельдера в  $T^+ \cup L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно, т. е.  $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ .

Сформулируем теперь общую постановку задачи Неймана для обобщенных аналитических функций порядка  $n$  или, короче, задачи  $N_n$ : *найти все функции  $W(z)$ , принадлежащие классу  $GA_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ , граничные значения которых удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = h(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где  $\partial/\partial n_-$  – производная по внешней нормали к  $L$ , а  $h(t)$  – заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера, т. е.  $h(t) \in H(L)$ .

Далее, говоря о том, что краевая (граничная) задача *решается в явном виде* (см. также [4–5]), мы будем иметь ввиду, что ее общее решение можно найти, используя лишь формулы для решения скалярной задачи сопряжения для голоморфных функций, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых определяются с помощью квадратур.

Ранее автором [7] было установлено, что краевая задача Дирихле для функций класса  $GA_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  в круговых областях решается в явном виде. Главной целью данной статьи является установление того факта, что задачу  $N_n$  в классах  $GA_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$  также можно решить в явном виде, например, в случае, когда  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ .

2. Явный метод решения задачи  $N_n$  в случае, когда  $n=1$ ,  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $L = \{t: |t|=1\}$ . В силу представления (2) при  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  всякую обобщенную аналитическую функцию  $W(z)$  из класса  $GA_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$  можно задавать так:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z) + \frac{df^+(z)}{dz} - \frac{2z}{1+z\bar{z}}\overline{f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где  $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ .

Итак, решения краевой задачи  $N_1$  будем искать в виде (4). Тогда учитывая, что на  $L = \{t: |t|=1\}$  выполняется тождество  $\bar{t} = \frac{1}{t}$  и справедливо соотношение (см., например, [4, с. 37] или [5, с. 303])

$$\frac{\partial W}{\partial n_-} = t \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}}, \quad (5)$$

граничное условие (3) в рассматриваемом случае примет вид:

$$t \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + t \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} - \frac{df^+(t)}{dt} = h(t), \quad t \in L. \quad (6)$$

В свою очередь, из (6) получаем равенство

$$\Phi^+(t) = -F^+(t) + h(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

при получении которого были приняты обозначения:

$$\Phi^+(z) = z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{d\varphi^+(z)}{dz}, \quad F^+(z) = z \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} - \frac{df^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+. \quad (8)$$

Пусть  $T^-$  – дополнение замкнутого единичного круга  $T^+ \cup L$  до расширенной комплексной плоскости (т. е.  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ ). Тогда, вводя в рассмотрение вспомогательную голоморфную в  $T^-$  функцию  $F^-(z)$ , связанную с  $F^+(z)$  по формуле

$$F^-(z) = \overline{F^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-, \quad (9)$$

равенству (7) можно придать следующий вид:

$$\Phi^+(t) = -F^-(t) + h(t), \quad t \in L. \quad (10)$$

Полученное равенство (10) служит граничным условием простейшей задачи сопряжения относительно ограниченной на бесконечности кусочно голоморфной функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), F^-(z)\}$  (см. [6, с. 106]).

Решения задачи сопряжения (10) задаются формулами (см., например, [6, с. 112]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h(\tau)}{\tau - z} d\tau - C, \quad z \in T^+, \quad (11)$$

$$F^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{h(\tau)}{\tau - z} d\tau + C, \quad z \in T^-, \quad (12)$$

где  $C = \alpha + i\beta$  – произвольная константа.

В силу формул (9) и (12) получаем

$$F^+(z) = \overline{F^-\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{2\pi i} \int \frac{h(\tau)}{z\tau - 1} d\bar{\tau} + \bar{C}, \quad z \in T^+. \quad (13)$$

На основании (8), (11) и (12), относительно голоморфных компонент  $\varphi^+(z)$ ,  $f^+(z)$  искомой обобщенной аналитической функции  $W(z)$ , получаем следующие уравнения:

$$z \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{d\varphi^+(z)}{dz} = \Phi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (14)$$

$$z \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} - \frac{df^+(z)}{dz} = F^+(z), \quad z \in T^+, \quad (15)$$

здесь  $\Phi^+(z)$  и  $F^+(z)$  – функции, определяемые по формулам (11) и (13) соответственно.

Поскольку дифференциальные уравнения (14) и (15) отличаются лишь правыми частями, то достаточно построить общее решение одного из них, например, (14).

Сначала с помощью подстановки  $\psi^+(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz}$  уравнение (14) перепишем в виде

$$\frac{d\psi^+(z)}{dz} - \psi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T, \quad (16)$$

Уравнение (16) в классе голоморфных функций  $\psi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  разрешимо тогда и только тогда, когда выполняются условия [5, с. 161]:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi^+(0)}{dz} = 0, \\ \left| \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz + \frac{\Phi^+(z)}{z} \right| \leq \frac{M_1}{(1-r)^{1-\lambda_1}}, \\ \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{d^+ \Phi(z)}{dz} \right| \leq \frac{M_2}{(1-r)^{1-\lambda_2}}, \end{cases} \quad (17)$$

здесь  $r = |z|$ ;  $M_k, \lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ) – положительные константы, при этом  $0 < \lambda_k \leq 1$ ;  $\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz$  – вполне конкретная первообразная функции  $\frac{\Phi^+(z)}{z^2}$  в  $T^+$ .

Предположим, что условие (17) выполняется и найдено общее решение уравнения (16) по формуле [5, с. 161]:

$$\psi^+(z) = A_1 z + z \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz, \quad z \in T^+, \quad (18)$$

здесь  $A_1 = \alpha_1 + i\beta_1$  – произвольная комплексная константа. Тогда, в силу  $\psi^+(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz}$ , общее решение уравнения (14) задается так:

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2} A_1 z^2 + \int \Psi^+(z) dz + A_2, \quad z \in T^+, \quad (19)$$

при этом  $A_k = \alpha_k + i\beta_k$ , ( $k = 1, 2$ ) – произвольные константы, а  $\int \Psi^+(z) dz$  – какая-нибудь первообразная функции  $\Psi^+(z) = z \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz$ , в  $T^+$ .

Рассуждая аналогично, получаем, что при выполнении следующих условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF^+(0)}{dz} = 0, \\ \left| \int \frac{F^+(z)}{z^2} dz + \frac{F^+(z)}{z} \right| \leq \frac{P_1}{(1-r)^{1-\mu_1}}, \\ \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{d^+ F(z)}{dz} \right| \leq \frac{P_2}{(1-r)^{1-\mu_2}}, \end{array} \right. \quad (20)$$

где  $r = |z|$ ;  $P_k, \mu_k$  ( $k = 1, 2$ ) – положительные константы, причем  $0 < \mu_k \leq 1$ , все решения уравнения (15) определяются по формуле

$$f^+(z) = \frac{1}{2} B_1 z^2 + \int \Omega^+(z) dz + B_2, \quad z \in T^+, \quad (21)$$

$B_k = \gamma_k + i\delta_k$  ( $k = 1, 2$ ) – произвольные константы,  $\int \Omega^+(z) dz$  – некоторая первообразная функции  $\Omega^+(z) = z \int \frac{F^+(z)}{z^2} dz$  в  $T^+$ .

Если в правую часть формулы (4) подставим вместо  $\varphi^+(z)$  и  $f^+(z)$  их значения, определяемые формулами (19) и (21) соответственно, то получим решение задачи  $N_1$ :

$$W(z) = A_1 z + \Psi^+(z) - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \left( \frac{1}{2} A_1 z^2 + \int \Psi^+(z) dz + A_2 \right) + \frac{\bar{B}_1 \bar{z} + \overline{\Omega^+(z)}}{1+z\bar{z}} - \frac{2z}{1+z\bar{z}} \left( \frac{1}{2} B_1 z^2 + \int \Omega^+(z) dz + B_2 \right), \quad (22)$$

здесь  $A_k = \alpha_k + i\beta_k$ ,  $B_k = \gamma_k + i\delta_k$  ( $k = 1, 2$ ) – произвольные константы,

$$\Psi^+(z) = z \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz, \quad \Omega^+(z) = z \int \frac{F^+(z)}{z^2} dz. \quad (23)$$

Вышеизложенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема А.** Краевая задача  $N_1$  в классе функций  $GA_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ , где  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ , решается в явном виде, причем для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция

$h(t)$  удовлетворяла условиям (17) и (20). В случае выполнения этих условий общее решение задачи  $N_1$  определяется по формулам (22)–(23).

Здесь важно отметить, что рассуждения, изложенные при доказательстве теоремы А, позволяют применить следующее *общее правило* для решения задачи  $N_1$  в  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ :

1. Учитывая формулу (4), приводим граничное условие (3) к виду (6) и переходим к 2.
2. Рассматривая вспомогательные функции (8) и (9), из граничного условия (6) получаем равенство (10) и переходим к 3.
3. Решая задачу сопряжения (10), определяем функции (11)–(13) и переходим к 4.
4. Составляем дифференциальные уравнения (14), (15) и проверяем выполнение условий (17) и (20). Если выполняются оба условия (17) и (20), то по формулам (22), (23) находим решение искомой задачи  $N_1$ , и на этом завершается алгоритм. Если же не выполняется хотя бы одно из условий (17) и (20), то заключаем, что задача  $N_1$  не имеет решения, и на этом завершается алгоритм.

**Пример.** Требуется найти функции  $W(z) \in GA_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ , где  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ ,  $L = \{t : |t| = 1\}$ , удовлетворяющие граничному условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = t^3 + \frac{1}{t^4}, \quad t \in L. \quad (24)$$

*Решение.* Здесь  $h(t) = t^3 + 1/t^4$ . Следовательно, в данном случае по формулам (11) и (13), получаем:  $\Phi^+(z) = z^3 - C$ ,  $F^+(z) = z^4 + \bar{C}$ , где  $C = \alpha + i\beta$  – свободная константа. Нетрудно проверить, что функции  $\Phi^+(z) = z^3 - C$  и  $F^+(z) = z^4 + \bar{C}$  удовлетворяют требованиям (17) и (20) соответственно. Значит, в силу формул (22)–(23), все решения задачи (24) определяются по формуле:

$$W(z) = A_1 z + \frac{z^3}{2} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \left( \frac{1}{2} A_1 z^2 + \frac{z^4}{6} + Cz + A_2 \right) + \\ + \overline{B_1 z + \frac{z^{-4}}{3}} - \frac{2z}{1+z\bar{z}} \left( \frac{1}{2} \overline{B_1 z^2} + \frac{z^{-5}}{15} - C\bar{z} + \bar{B}_2 \right),$$

здесь  $C = \alpha + i\beta$ ,  $A_k = \alpha_k + i\beta_k$ ,  $B_k = \gamma_k + i\delta_k$  ( $k = 1, 2$ ) – свободные комплексные константы.

### Литература

1. Bauer, K.W. Über eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie / K.W. Bauer // Bonn. Math. Schr. – 1965. – Schriften 23. – 98 s.
2. Bauer, K.W. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications / K.W. Bauer, S. Ruscheweyh. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980. – 264 p. DOI: 10.1007/BFb0103468
3. Heersink, R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen / R. Heersink // Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungsges. Johanneum. – 1986. – Bericht № 268. – S. 1–9.
4. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2011. – Т. 11, Вып. 2. – С. 9–20.
5. Расулов, К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
6. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
7. Rasulov, K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk / K.M. Rasulov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, no. 1. – P. 142–145.

Поступила в редакцию 7 октября 2019 г.

**ON THE EXPLICIT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM  
OF NEUMANN TYPE FOR THE GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS  
IN THE UNIT CIRCLE****K.M. Rasulov***Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation  
E-mail: kahrmanr@yandex.ru*

To research the boundary value problems in some classes of functions of a complex variable and to develop the effective numerical solving methods for these problems, the problem of the explicit solution is of substantial significance, i.e. the possibility of solving these problems with formulas of the classical Riemann problem and Hilbert problem for analytical functions and finite number of linear algebraic equations and/or linear differential equations when the matrix of the system can be written in quadratures. In this article, on the complex plane we consider one family of differential equations with second-order partial derivatives and a coefficient at the sought-for function, depending on a natural parameter  $n$ . Solutions of these equations are commonly called generalized analytic functions of  $n$  order. In addition, in this article we give general formulation of the boundary value problem of Neumann type for the generalized analytic functions of the arbitrary order  $n$ . We obtain a new method of solving of the formulated problem for the generalized analytic functions of the first order in case when boundary is the unit circle. It is established that in the case under consideration the solution of the Neumann type problem for the generalized analytic functions is reduced to the consecutive solution of simple scalar Riemann problem in the class of limited at infinity piecewise analytic functions and Euler linear differential equation of the second order. The obtained general results are given as applied to a specific example.

*Keywords: boundary value problem; Neumann type problem; explicit solution; generalized analytic function; Euler differential equation; unit circle.*

**References**

1. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie. *Bonn. Math. Schr.*, 1965, Schriften 23, 98 S. (in German).
2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 791, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980, 264 p. DOI: 10.1007/BFb0103468
3. Heersink, R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen. *Ber. Math.-Stat. Sect. Forschungsges. Johanneum*, 1986, Bericht no. 268, pp. 1–9.
4. Adukov V.M., Patrushev A.A. On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, Vol. 11, Iss. 2, pp. 9–20. (in Russ.).
5. Rasulov K.M. *Metod sopryazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* (Method of conjugation analytic functions and its applications). Smolensk, Izd-vo SmolGU Publ., 2013, 188 p. (in Russ.).
6. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).
7. Rasulov K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, Vol. 39, no. 1, pp. 142–145. DOI: 10.1134/S1995080218010237

*Received October 7, 2019*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ЗАМКНУТОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С БИЕКТИВНЫМ ГАУССОВЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ УРОВНЯ

**В.Г. Шармин, Д.В. Шармин**

*Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация*

*E-mail: d.v.sharmin@utmn.ru*

Строение замкнутых и незамкнутых регулярных гиперповерхностей с инъективным гауссовым отображением достаточно хорошо изучено. При решении ряда задач дифференциальной геометрии может оказаться, что искомая гиперповерхность с биективным гауссовым отображением будет нерегулярной. В настоящей статье изучаются глобальные свойства нерегулярных замкнутых гиперповерхностей в четырехмерном евклидовом пространстве, особое множество которых является объединением замкнутых ориентируемых двумерных многообразий. В работе используются: теория Морса, свойства полярного преобразования относительно гиперсферы, теорема Гаусса–Бонне, методы классической дифференциальной геометрии гиперповерхностей и поверхностей, коразмерность которых больше 1. Доказано, что при некоторых условиях компонентами особого множества рассматриваемых гиперповерхностей могут быть только торы и сферы, причем вдоль сферы касаются друг друга выпуклая и седловая компоненты регулярности. Выяснено, что замкнутая нерегулярная гиперповерхность с «отсекаемыми» краями и биективным гауссовым отображением состоит из двух локально выпуклых компонент, гомеоморфных трехмерному шару, и одной седловой компоненты, гомеоморфной топологическому произведению двумерной сферы на отрезок. Построены примеры замкнутых невыпуклых гиперповерхностей с биективным гауссовым отображением.

*Ключевые слова: евклидово пространство; гауссово отображение; невыпуклая замкнутая нерегулярная гиперповерхность; эйлерова характеристика; функция уровня.*

## Введение

Строение замкнутых и незамкнутых регулярных гиперповерхностей с инъективным гауссовым отображением достаточно хорошо изучено. При решении ряда задач дифференциальной геометрии может оказаться, что искомая гиперповерхность с инъективным гауссовым отображением будет нерегулярной.

В работе [1] проведена классификация поверхностей без параболических точек, гауссово отображение которых обладает некоторыми специальными свойствами, в трехмерном пространстве Лоренца–Минковского.

В статье [2] получена полная классификация квазиминимальных поверхностей Лоренца с поточечным 1-типа гауссовым отображением в псевдоевклидово 4-пространство.

В работе [3] изучены некоторые характеристики поверхностей вращения с поточечным 1-типа гауссовым отображением в четырехмерном евклидовом пространстве.

Локальным и глобальным свойствам замкнутых невыпуклых гиперповерхностей, имеющих геометрические особенности, с биективным сферическим отображением посвящены работы А.Л. Вернера [4], А.А. Дудкина [5] и В.Г. Шармина [6].

В настоящей статье изучено топологическое строение замкнутых нерегулярных гиперповерхностей специального вида с биективным гауссовым отображением в четырехмерном евклидовом пространстве.

## Основные определения и примеры

**Определение 1.** Контингенция гиперповерхности  $\vec{r}(u_1, u_1, \dots, u_n)$  в данной точке  $\vec{r}(u_{1_0}, u_{2_0}, \dots, u_{n_0})$  – это множество предельных положений лучей, имеющих начало в точ-

ке  $\vec{r}(u_{1_0}, u_{2_0}, \dots, u_{n_0})$  и проходящих через точку  $\vec{r}(u_1, u_1, \dots, u_n) \neq \vec{r}(u_{1_0}, u_{2_0}, \dots, u_{n_0})$ , при  $(u_1, u_1, \dots, u_n) \rightarrow (u_{1_0}, u_{2_0}, \dots, u_{n_0})$ .

**Замечание.** В регулярной точке контингенция совпадает с касательной гиперплоскостью.

**Определение 2.** Типом седлообразности гиперповерхности  $V^n$  класса  $C^2$  евклидова пространства  $E^{n+1}$  в точке  $M \in V^n$  называется пара чисел  $(p, q)$ , где  $p$  – число положительных главных кривизн, а  $q$  – число отрицательных главных кривизн в рассматриваемой точке.

Если гиперплоскость в евклидовом пространстве  $E^{n+1}$  задана уравнением  $A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + \dots + A_{n+1} \cdot X_{n+1} - 1 = 0$ , то ее полюсом относительно некоторой гиперсферы  $S^n$  является точка с координатами  $(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ .

**Определение 3.** Гиперповерхность  $V^n \subset E^{n+1}$  называется полярной для гиперповерхности  $V^n \subset E^{n+1}$  относительно некоторой гиперсферы  $S^n$ , если каждая ее точка  $X^*$  есть полюс гиперплоскости  $\alpha_X$ , касательной в точке  $X \in V^n$  (либо гиперплоскости, содержащей контингенцию в точке  $X \in V^n$  для особых точек).

**Определение 4.** Пусть регулярная гиперповерхность задана погружением  $f: W^n \rightarrow E^{n+1}$  и  $\omega \in W^n$ . Окрестность  $\Omega$  точки  $\omega$  называется канонической, если среди касательных гиперплоскостей в точках множества  $f(\Omega)$ , отличных от точки  $f(\omega)$ , нет параллельных касательной гиперплоскости в точке  $f(\omega)$ . Если сужение отображения  $f$  на  $\Omega$  является вложением, то  $f(\Omega)$  называется канонической окрестностью точки  $f(\omega)$ , а точка  $f(\omega)$  – регулярной в смысле А.В.Погорелова [7, с. 208].

**Определение объекта исследования.** Рассмотрим гиперповерхность  $V^3 \subset E^4$ , удовлетворяющую следующим условиям:

1)  $V^3$  является замкнутой невыпуклой гиперповерхностью, заданной топологическим погружением  $\vec{r}: S^3 \rightarrow E^4$ , причем вектор-функция  $\vec{r}$  является непрерывно-дифференцируемой;

2) на гиперповерхности  $V^3$  существует непустое множество особых точек  $V^2$ , в которых  $\text{rank}(d\vec{r}) = 2$ , причем это множество является образом объединения конечного числа попарно непересекающихся замкнутых ориентируемых двумерных подмногообразий гиперсферы  $S^3$ , и особенность на гиперповерхности  $V^3$  является геометрической, регулярные компоненты  $V^3$  принадлежат классу  $C^k, k \geq 2$ ;

3) гиперповерхность  $V^3$  допускает взаимно однозначное гауссово отображение в следующем смысле: в каждой точке  $V^3$  существует единственная гиперплоскость, содержащая контингенцию гиперповерхности в этой точке, и можно так выбрать поле нормалей  $\vec{n}$  к этим гиперплоскостям, что с помощью этих нормалей будет осуществляться гомеоморфизм  $V^3$  на  $S^3$ ;

4) гиперповерхность  $V^3$  является огибающей построенного поля гиперплоскостей;

5) сферический образ каждой компоненты  $V_i^2$  особого множества  $V^2$  гиперповерхности  $V^3$  является регулярной поверхностью на гиперсфере  $S^3$ ;

6) для любой компоненты  $V_i^2$  поверхности  $V^2$  в каждой точке величины  $K_1$  и  $K_2$  не равны нулю, где  $K_1$  и  $K_2$  кривизны в направлениях векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$ , образующих базис нормальной плоскости двумерной поверхности  $V_i^2$ , причем вектор  $\vec{n}$  принадлежит векторному полю, определенному в пункте 3.

**Замечание.** С помощью векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$  вычисляются вторые квадратичные формы поверхности  $V_i^2$ , которые используются для нахождения величин  $K_1$  и  $K_2$ . Гауссова кривизна поверхности равна сумме величин  $K_1$  и  $K_2$ .

Построим пример гиперповерхности в  $E^4$ , удовлетворяющей условиям 1–6.

Рассмотрим на плоскости  $E^2$  замкнутую кривую  $l$  с четырьмя точками возврата, имеющую биективное сферическое отображение и состоящую из четырех дуг: две дуги – части двух ветвей гиперболы, симметричные относительно мнимой оси, две другие – это дуги окружностей одного радиуса, обращенные выпуклостью внутрь ограниченной компоненты множества  $E^2 \setminus l$ . В точках возврата касательные к окружности и гиперболе совпадают. Вращая эту кривую вокруг мнимой оси гиперболы в евклидовом пространстве  $E^3$ , получим замкнутую невыпуклую поверхность с биективным сферическим отображением, состоящую из одной седловой компоненты и двух выпуклых компонент и имеющую два ребра возврата.

Будем вращать полученную поверхность в пространстве  $E^4$  вокруг плоскостей симметрии. При вращении вокруг плоскости, не пересекающей ребра возврата, получим гиперповерхность  $V^3$ , имеющую взаимно однозначное сферическое отображение и состоящую из двух седловых компонент с типами седлообразности  $(2, 1)$  и  $(1, 2)$ . Особое множество представляет собой тор Клиффорда, т.е. тор в  $E^4$ , гауссова кривизна во всех точках которого равна нулю.

Если же плоскость вращения пересекает ребра возврата, то получим гиперповерхность, состоящую из трех компонент: двух локально выпуклых, гомеоморфных трехмерному шару, и одной седловой компоненты, гомеоморфной цилиндру  $S^2 \times I$ . Особое множество – два непересекающихся многообразия, каждое из которых гомеоморфно двумерной сфере.

### Топологическое строение компонент особого множества

**Теорема 1.** Полная кривизна  $\iint_{V_i^2} K d\sigma$  компоненты  $V_i^2$  особого множества  $V^2$  гиперповерхности  $V^3$ , удовлетворяющей условиям 1–6, является неотрицательной.

**Доказательство.** Предположим противное, т. е.  $\iint_{V_i^2} K d\sigma < 0$ .

По определению объекта исследования величины  $K_1$  и  $K_2$  не обращаются в ноль в точках многообразия  $V_i^2$ . В силу предположения хотя бы одна из них строго отрицательна. Для определенности положим  $K_2 < 0$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение на  $V_i^2$

$$b_{11}du_1^2 + 2b_{12}du_1du_2 + b_{22}du_2^2 = 0, \quad (1)$$

где  $b_{11}, b_{12}, b_{22}$  – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности  $V_i^2$  в направлении вектора  $\vec{m}$ .

Так как по теореме Гаусса–Бонне эйлерова характеристика компоненты  $V_i^2$  строго отрицательна, то любое дифференциальное уравнение на этом многообразии должно иметь особые точки [8, с. 232]. В особых точках дифференциального уравнения (1) имеем  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ . Получили противоречие с условием 6 определения основного объекта исследования.

**Следствие 1.** Компонентой  $V_i^2$  особого множества  $V^2$  гиперповерхности  $V^3$ , удовлетворяющей условиям 1–6, может быть либо двумерная сфера, либо двумерный тор.

**Следствие 2.** Если компонента  $V_i^2$  есть двумерная сфера, то величины  $K_1$  и  $K_2$  положительны.

### Связь рода компоненты особого множества с типом касающихся вдоль нее регулярных компонент гиперповерхности $V^3$

**Теорема 2.** Если компонента  $V_i^2$  особого множества  $V^2$  гиперповерхности  $V^3$  гомеоморфна сфере, то вдоль нее касаются друг друга эллиптическая и седловая компоненты.

**Доказательство.** Компоненту  $V_i^2$  в дальнейшем будем обозначать  $S^2$ . Пусть  $\omega$  есть окрестность особой точки  $M \in S^2$  такая, что ее полярный образ  $\omega^*$  является канонической окрестностью точки  $M^*$  на полярной гиперповерхности  $V^{3*}$ . Окрестность  $\omega$  можно выбрать так, что граница канонической окрестности  $\partial\omega^*$  точки  $M^*$  будет пересекать полярный образ  $S^{2*}$  компо-

ненты  $S^2$  особого множества  $V^2$  по замкнутой кривой, делящей  $\partial\omega^*$  на две области  $u_1^2$  и  $u_2^2$ , а множество  $S^{2*}$  будет делить  $\omega^*$  на области  $u_1^3$  и  $u_2^3$  [6, с. 94, лемма 2].

Через точку  $M$  не проходят касательные гиперплоскости к  $V^3$  в точках  $X \neq M$  множества  $S^2 \cap \omega$ , поскольку величины  $K_1$  и  $K_2$  в точке  $M \in S^2$  положительны. Поэтому на касательной гиперплоскости к гиперповерхности  $V^{3*}$  в точке  $M^*$  нет точек из  $S^{2*} \cap \omega^*$ , т. е.  $T_{M^*}V^{3*} \cap (S^{2*} \cap \omega^*) = M^*$ .

Точка  $M^*$  – полярный образ точки  $M$ , принадлежащей особому множеству рассматриваемой гиперповерхности  $V^3$ . Согласно результатам работы [6, с. 96, лемма 5], точка  $M^*$  является параболической точкой на гиперповерхности  $V^{3*}$ . Тогда множество  $T_{M^*}V^{3*} \cap \omega^*$  представляет собой один конус и лежит либо в области  $u_1^3$ , либо в области  $u_2^3$ . Отсюда следует, что касательная плоскость к гиперповерхности  $V^{3*}$  в точке  $M^*$  имеет с одной из замкнутых областей  $\bar{u}_1^3$  либо  $\bar{u}_2^3$  только одну общую точку  $M^*$ , т. е. либо  $u_1^3$ , либо  $u_2^3$  является локально выпуклой в окрестности края. Тогда соответствующая область на гиперповерхности  $V^{3*}$  в окрестности точки  $M$ , принадлежащая ее краю, является выпуклой. Из этого и локального результата о строении в окрестности особой точки гиперповерхности с инъективным сферическим отображением [6, с. 95, теорема 2] следует, что вдоль компоненты  $S^2$  касаются друг друга локально выпуклая и седловая компоненты.

**Следствие 3.** Если вдоль компоненты  $V_i^2$  особого множества  $V^2$  гиперповерхности  $V^3$ , удовлетворяющей условиям 1 – 6, касаются друг друга две седловых компоненты, то поверхность  $V_i^2$  гомеоморфна тору.

## Гиперповерхности с «отсекаемыми» краями гладких компонент

Пусть для гиперповерхности  $V^3$ , удовлетворяющей условиям 1–6, существует прямая  $l$ , такая, что для любой регулярной компоненты  $V_i^3$  каждая компонента ее края  $V_j^2$  является «отсекаемой», т. е. существует гиперплоскость  $E_j^3$ , перпендикулярная прямой  $l$ , и  $E_j^3 \cap V_j^2 = \emptyset$ . При этом многообразии  $\tilde{V}_i^3$  с плоскими краями, полученное «отсечением» связанных компонент края регулярной гиперповерхности  $V_i^3$ , гомеоморфно  $V_i^3$ . Предположим, что каждая гиперповерхность  $V_i^3$  имеет не более двух компонент связности края, и существует хотя бы одна регулярная компонента со связным краем. Пусть точки, в которых касательные гиперплоскости к  $V^3$  перпендикулярны  $l$ , принадлежат  $\text{int} \cup_i \tilde{V}_i^3$ .

Для каждого многообразия  $\tilde{V}_i^3$  построим функцию уровня  $f_l$  относительно прямой  $l$ . Построенная функция является допустимой функцией Морса [9, с. 206]. Легко видеть, что множество критических точек этой функции, рассматриваемой на  $\text{int} \cup_i \tilde{V}_i^3$ , состоит только из двух точек, причем эти точки являются невырожденными критическими точками.

**Замечание.** Для изучения топологических свойств и типа седлообразности компоненты  $V_i^3$  достаточно изучить топологические свойства и тип седлообразности компоненты  $\tilde{V}_i^3$ .

**Лемма 1.** Если индекс особой точки равен  $k$ , то тип седлообразности компоненты  $\tilde{V}_i^3$  равен  $(3-k, k)$ .

**Доказательство.** В окрестности критической точки  $p \in \tilde{V}_i^3$  индекса  $k$  функцию  $f_l$  можно задать следующим образом [9, с. 192, лемма Морса]:

$$f_l(u_1, u_2, u_3) = f_l(p) - \sum_{i=0}^k u_i^2 + \sum_{i=k+1}^3 u_i^2, \quad (2)$$

при этом касательная гиперплоскость в точке  $p$  перпендикулярна прямой  $l$ . Тогда уравнение (2) можно рассматривать как уравнение соприкасающегося параболоида с типом седлообразности  $(3-k, k)$  поверхности  $\tilde{V}_i^3$  в точке  $p$  с осью  $l$ .

**Лемма 2.** Компонента  $\tilde{V}_i^3$  со связным краем содержит критическую точку, индекс которой равен нулю, причем эта компонента является локально выпуклой.

**Доказательство.** Так как число Бетти группы гомологий  $H_0(\tilde{V}_i^3, Z)$  равно единице, то в силу неравенств Морса [9, с. 212, теорема 3.7] функция  $f_l$  имеет на  $\tilde{V}_i^3$  хотя бы одну критическую точку индекса ноль. В силу леммы 1 и постоянства типа седлообразности на регулярной компоненте,  $\tilde{V}_i^3$  является локально выпуклой.

**Лемма 3.** На гиперповерхности  $V^3$  с допустимой функцией уровня  $f_l$  не существует компоненты со связным краем, гомеоморфной полноторию.

**Доказательство.** Поскольку полноторий не является локально выпуклой компонентой, то на нем должна существовать точка с типом седлообразности  $(2, 1)$  или  $(1, 2)$ . С другой стороны, по лемме 2 на этой компоненте существует точка индекса ноль, в которой тип седлообразности равен  $(3, 0)$ .

**Теорема 3.** Компонента  $\tilde{V}_i^3$  со связным краем гомеоморфна трехмерному шару, содержит ровно одну критическую точку функции  $f_l$  и является локально выпуклой.

**Доказательство.** В соответствии с леммами 2 и 3,  $\tilde{V}_i^3$  является локально выпуклой компонентой, гомеоморфной трехмерному шару, на которой функция уровня имеет критические точки. Эйлерова характеристика этой компоненты равна единице.

Докажем, что на рассматриваемой компоненте не существует двух критических точек функции уровня  $f_l$ .

Предположим, что на  $\tilde{V}_i^3$  функция  $f_l$  имеет две критические точки индексов 0 и 3, тогда  $\tilde{V}_i^3$  является деформационным ретрактом объединения нульмерной и трехмерной клеток [9, с. 210, теорема 3.3]. Так как эйлерова характеристика есть гомотопический инвариант, получаем, что для компоненты  $\tilde{V}_i^3$  она равна нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

**Теорема 4.** Компонента  $\tilde{V}_i^3$  с краем, состоящим из двух компонент связности, гомеоморфна  $S^2 \times I$ , и функция  $f_l$  не имеет на ней критических точек.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3. При доказательстве используется тот факт, что вместо функции уровня  $f_l$  можно рассматривать функцию уровня  $(-f_l)$ . Тогда, если критическая точка функции  $f_l$  имеет индекс  $k$ , то для функции  $(-f_l)$  эта же точка будет иметь индекс  $(3 - k)$  [9, с. 211].

**Следствие 4.** На гиперповерхности  $V^3$  существуют ровно две компоненты локальной выпуклости, гомеоморфные трехмерному шару, на каждой из которых функция уровня  $f_l$  имеет ровно одну критическую точку.

**Теорема 5.** Компонента  $V_i^3$ , гомеоморфная  $S^2 \times I$ , является седловой.

**Доказательство.** Предположим противное. Отсечем края этой компоненты. Получим цилиндр  $S^2 \times I$  с краями, лежащими в 3-плоскостях. Пересечем этот цилиндр трансверсально 2-плоскостью, параллельной прямой  $l$ . Тогда, с одной стороны, в пересечении должна получиться локально выпуклая кривая, а, с другой стороны, эта кривая не должна быть локально выпуклой, так как компонента  $V_i^3$  обращена выпуклостью внутрь гиперповерхности  $V^3$  [6, с. 96, лемма 6].

**Теорема 6.** Гиперповерхность  $V^3$  с отсекаемыми краями регулярных компонент состоит из трех компонент: двух локально выпуклых, гомеоморфных трехмерному шару, и одной седловой компоненты, гомеоморфной цилиндру  $S^2 \times I$ .

**Доказательство.** Гиперповерхность  $V^3$  не может состоять только из двух компонент локальной выпуклости, гомеоморфных трехмерному шару, так как это противоречит теореме 2. Следовательно, она содержит хотя бы одну седловую компоненту, гомеоморфную  $S^2 \times I$ . Если бы седловых компонент было не менее двух, то нашлись бы две седловых компоненты, которые касались бы друг друга вдоль некоторого множества, гомеоморфного сфере, что опять противоречит теореме 2.

### Литература

1. Baba-Hamed, C. On the Gauss Map of Surfaces of Revolution in the Three-Dimensional Minkowski Space / C. Baba-Hamed, M. Bekkar // Tsukuba J. Math. – 2013. – Vol. 36, no. 2. – P. 193–215.
2. Milousheva, V. Quasi-Minimal Lorentz Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map in Pseudo-Euclidean 4-space / V. Milousheva, N.C. Turgay // Journal of Geometry and Physics. – 2016. – Vol. 106. – pp. 171–183.
3. Dursun, U. Surfaces in the Euclidean Space  $E^4$  with Pointwise 1-Type Gauss Map / U. Dursun, G.G. Arsan // Hacet. J. Math. Stat. – 2011. – Vol. 40, no. 5. – P. 617–625.
4. Вернер, А.Л. Конусы со взаимно однозначным сферическим отображением / А.Л. Вернер // Ученые записки Ленинградского государственного педагогического института им. А.И. Герцена. – 1967. – Т. 328. – С. 44–75.
5. Дудкин, А.А. Замкнутые невыпуклые поверхности с биективным сферическим отображением, вложенные в  $E^3$  / А.А. Дудкин // Современная геометрия. – 1981. – С. 19–39.
6. Шармин, В.Г. Замкнутые невыпуклые гиперповерхности с биективным сферическим отображением в  $E^4$  / В.Г. Шармин // Вопросы глобальной и римановой геометрии. – 1983. – С. 92–96.
7. Бакельман, И.Я. Введение в дифференциальную геометрию «в целом» / И.Я. Бакельман, А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор. – М.: Наука, 1973. – 440 с.
8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 239 с.
9. Хирш, М. Дифференциальная топология / М. Хирш. – М.: Мир, 1979. – 280 с.

*Поступила в редакцию 7 сентября 2018 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 1, pp. 37–43*

---

DOI: 10.14529/mmph200105

## STUDYING GLOBAL PROPERTIES OF A CLOSED NON-REGULAR HYPERSURFACE WITH A BIJECTIVE GAUSSIAN MAPPING USING THE LEVEL FUNCTION

**V.G. Sharmin, D.V. Sharmin**

*Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation  
E-mail: dsharmin@mail.ru*

The structure of closed and non-closed regular hypersurfaces with an injective Gaussian mapping is thoroughly studied. When solving some problems of differential geometry, the desired hypersurface with a bijective Gaussian mapping may prove to be non-regular. In this paper, we study global properties of non-regular closed hypersurfaces in four-dimensional Euclidean space. A singular set of these surfaces is the sum total of closed oriented two-dimensional manifolds. The paper uses the Morse theory, the properties of the polar transformation with respect to the hypersphere, the Gauss–Bonnet theorem, the methods of the classical differential geometry of hypersurfaces and surfaces, the codimension of which is greater than 1. It is proved that under certain conditions the components of the singular set of

the hypersurfaces under consideration can be only tors and spheres. In this case, the convex and saddle components of the regularity are tangent relative of each other along the sphere. It is found that a closed non-regular hypersurface with "cut off" borders and with bijective Gaussian mapping consists of two locally convex components homeomorphic to a three-dimensional ball, and one saddle component homeomorphic to the topological product of a two-dimensional sphere on the closed interval. The article provides examples of closed non-convex hypersurfaces with a bijective Gaussian mapping.

*Keywords: Euclidean space; Gaussian mapping; non-convex closed non-regular hypersurface; Euler characteristic; level function.*

### References

1. Baba-Hamed C., Bekkar M. On the Gauss Map of Surfaces of Revolution in the Three-Dimensional Minkowski Space. *Tsukuba J. Math.*, 2013, Vol. 36, no. 2, pp. 193–215. DOI: 10.21099/tkbjm/1358776999
2. Milousheva V., Turgay N.C. Quasi-Minimal Lorentz Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map in Pseudo-Euclidean 4-space. *Journal of Geometry and Physics*, 2016, Vol. 106, pp. 171–183. DOI: 10.1016/j.geomphys.2016.03.023
3. Dursun U., Arsan G.G. Surfaces in the Euclidean Space  $E^4$  with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Hacet. J. Math. Stat.*, 2011, Vol. 40, no. 5, pp. 617–625.
4. Verner A.L. Konusy so vzaimno odnoznachnym sfericheskim otobrazheniem (Cones with a One-to-one Spherical Mapping). *Uchenye zapiski Leningradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. A. I. Gertsena*, 1967, Vol. 328, pp. 44–75. (in Russ.).
5. Dudkin A.A. Zamknutyne nevyuklye poverkhnosti s biektivnym sfericheskim otobrazheniem, vlozhennye v  $E^3$  (Closed Non-convex Surfaces with Bijective Spherical Mapping, Nested in  $E^3$ ). *Sovremennaya geometriya*, 1981, pp. 19–39. (in Russ.).
6. Sharmin V.G. Zamknutyne nevyuklye giperpoverkhnosti s biektivnym sfericheskim otobrazheniem v  $E^4$  (Closed non-convex hypersurfaces with bijective spherical mapping in  $E^4$ ). *Voprosy global'noy i rimanovoy geometrii*, 1983, pp. 92–96. (in Russ.).
7. Bakel'man I.Ya., Verner A.L., Kantor B.E. *Vvedenie v differentsial'nyu geometriyu "v tselom"* (Introduction to differential geometry "in general"). Moscow, Nauka Publ., 1973, 440 p. (in Russ.).
8. Arnol'd V.I. *Obyknoennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary differential equations). Moscow, Nauka Publ., 1975, 239 p. (in Russ.).
9. Hirsch M.W. *Differential topology*. Springer-Verlag, 1976, 222 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9449-5

*Received September 7, 2018*

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕЛИНЕЙНО НАСЛЕДСТВЕННОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЙ

**А.В. Хохлов**

Научно исследовательский институт механики, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Построено точное решение квазистатической краевой задачи, аналогичной классической задаче Ламе для полого цилиндра в теории упругости, но для цилиндра из физически нелинейного реономного материала, подчиняющегося определяющему соотношению вязкоупругости Работнова с двумя произвольными материальными функциями, и для произвольных, зависящих от времени давлений, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра. Предполагается, что давления меняются медленно – так, чтобы влиянием инерционных членов можно было пренебречь, деформированное состояние предполагается плоским (т. е. труба бесконечно длинной или конечной, но с нулевыми осевыми перемещениями точек торцов), а материал – однородным, изотропным и несжимаемым. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены через одну функцию времени, которая находится в результате решения выведенного нелинейного функционального уравнения, содержащего материальные функции ОС и заданную нагрузку. Из построенного решения краевой задачи следует, что эта функция времени является непосредственно измеряемой в эксперименте функцией. Это позволяет использовать полученное решение для определения материальных функций нелинейного определяющего соотношения Работнова по данным испытания толстой трубки.

*Ключевые слова:* вязкоупругопластичность; физическая нелинейность; определяющее соотношение вязкоупругости Работнова; задача Ламе; поле напряжений; ползучесть; идентификация.

### Введение

Данная статья продолжает цикл работ [1–7] по системному аналитическому исследованию физически нелинейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругопластичности вида

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad (1)$$

$$L(t) := \Pi \sigma, \quad L_0(t) := \Pi_0 \sigma_0, \quad \Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau), \quad (2)$$

с произвольными материальными функциями (МФ)  $\Pi(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$  ( $\Pi$  и  $\Pi_0$  – функции сдвиговой и объемной ползучести,  $\Phi$  и  $\Phi_0$  – функции нелинейности). Его цель – выявление комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них; разработка способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). ОС (1) – один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [8–13]

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

на сложное напряженное состояние, получающийся в предположении изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров и пренебрежения влиянием третьих инвариантов. ОС (1) описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и (малых) деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  в произвольной точке тела (в предположении независимости объемной деформации  $\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t)$  от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения  $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ ). В (1)  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{0.5}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{0.5}$  – интенсивности деформаций и напряжений (вторые инварианты девиаторов  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0\mathbf{I}$ ), напряжение и время предполагаются обезразмеренными, входные процессы  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  – кусочно-гладкими при  $t \geq 0$ .

Одноосный вариант ОС (3) был предложен Ю.Н. Работновым [8–13] для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\boldsymbol{\sigma}(\tau) = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) = \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad t > 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ  $\varphi(u)$ . В (4) и (3) функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $R(t)$ , связаны интегральным уравнением

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau) d\tau = t, \quad (5)$$

выражающим условие взаимной обратности операторов (4) и (3)). В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости («QLV»), а его автором считается Я.Ч. Фанг (Y.C. Fung) [14–23]. В работах [8–13, 24–27] и др. ОС (3) прилагалось к описанию одномерного поведения стеклопластиков, графита, металлов и сплавов, композитов, а в [14–23] – связок, сухожилий и других биологических тканей. Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в статьях [2, 4–6].

Конкретная цель данной статьи – построение точного решения квазистатической краевой задачи, аналогичной классической задаче Ламе для полого цилиндра в теории упругости, но для цилиндра из физически нелинейного реономного материала, подчиняющегося определяющему соотношению вязкоупругости Работнова (1) с произвольными материальными функциями, и для произвольных, зависящих от времени давлений, заданных на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

## 1. Ограничения на материальные функции ОС Работнова

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon})$  (композиция нелинейного оператора действия функции  $\boldsymbol{\varphi}$  и линейного интегрального оператора  $\mathbf{R}$  из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) (т. е. (1)), для любых возрастающих МФ  $\Phi$  и  $\Phi_0$ , имеет вид

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)^{-1}e_{ij}(t), \quad (6)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с  $\Pi$  и  $\Pi_0$  интегральными уравнениями вида (5).

Из трех материальных функций  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\Pi$ ,  $R$  в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимых МФ. На функции ползучести и релаксации в ОС (3) и (1) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости:  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  – возрастающими и выпуклыми вверх [28–30], а  $R$  и  $R_0$  – убывающими и выпуклыми вниз на  $(0; \infty)$ ,  $R(t)$  и  $R_0(t)$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в т.  $t = 0$  (слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция). Из этих условий следует существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$  ( $R(0) = +\infty$ , если  $R$  не ограничена сверху) и  $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$  ( $y(0) := y(0+)$  – обозначение предела функции  $y(t)$  справа в т.  $t = 0$ ).

На МФ  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\varphi_0$  в ОС (3) и (6) и на МФ  $\Phi(x)$  и  $\Phi_0(x)$  в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [5, 7]: функция  $\boldsymbol{\varphi}(u)$  непрерывно дифференцируема и строго возрастает на

$(0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ , а  $\varphi_0(u)$  – на множестве  $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$  (где  $\omega_- \omega_+ < 0$ ), причем  $\varphi(0+) = 0$  и  $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$  (иначе входному процессу  $\varepsilon(t) \equiv 0$  соответствует ненулевой отклик  $\sigma(t)$ ). Из возрастания  $\varphi(u)$  и  $\varphi_0(u)$  следует существование и возрастание (и непрерывная дифференцируемость) обратных функций  $\Phi(x) = \varphi^{-1}$ ,  $x \in (0; X)$ ,  $X := \sup \varphi(u)$ , и  $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$ ,  $x \in (\underline{x}; \bar{x})$ , где  $\underline{x} = \inf \varphi_0(u) = \varphi_0(\omega_- + 0)$ ,  $\bar{x} = \sup \varphi_0(u) = \varphi_0(\omega_+ - 0)$ , и обратимость ОС (1). Аналогично, обратимость ОС (1) следует из возрастания  $\Phi$  и  $\Phi_0$ . Величины  $\bar{x}$ ,  $\underline{x}$  и  $X$ , их конечность или бесконечность, – важные характеристики МФ, существенно влияющие на свойства теоретических кривых ОС (1) [1–7]. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии функции  $\Phi_0$  и  $\varphi_0$  нечетны и  $\underline{x} = -\bar{x}$ ,  $\omega_- = -\omega_+$ . Примеры семейств функций, которые можно (и удобно) использовать для задания МФ  $\Phi$ ,  $\Phi_0$  или  $\varphi$ ,  $\varphi_0$ , приведены в [3–7].

В частности, для задания выпуклой вверх МФ  $\varphi$  и  $\varphi_0$  с конечным  $\bar{x}$  удобно использовать функции вида:

$$\varphi(u) = w \sum_1^m \gamma_k \varphi_k(u) = w \sum_1^m \gamma_k (1 - e^{-\lambda_k u}), \quad w^{-1} = \sum_1^m \gamma_k \lambda_k$$

(множитель  $w$  введен для выполнения условия нормировки  $\varphi'(0) = 1$ ). При  $\lambda_k > 0$ ,  $\gamma_k > 0$  все ограничения на МФ  $\varphi$  выполнены, так как они выполнены для каждого слагаемого  $\varphi_k(u)$  и сохраняются для комбинаций с положительными коэффициентами. Для задания выпуклой вниз МФ  $\varphi$  можно использовать суммы с положительными показателями экспоненты.

**2. Постановка краевой задачи и вывод разрешающего уравнения**

Рассмотрим задачу об определении напряжений и деформаций в толстостенной трубе из наследственного несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному ОС Работнова, под действием переменных внутреннего и внешнего давлений. Инерционными членами пренебрегаем, полагая, что давления меняются медленно (квазистатическая постановка). Будем использовать цилиндрическую систему координат. В силу несжимаемости материала дивергенция тензора деформации совпадает с ним, а ОС Работнова (1) редуцируется к одномерному ОС  $\varepsilon = \Phi(\Pi\sigma)$  с двумя произвольными МФ ( $\Phi$  и  $\Pi$  или  $\varphi$  и  $R$ ), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию пропорциональности дивергентов:

$$s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \sigma(t) \varepsilon(t)^{-1} e_{ij}(t), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon). \tag{7}$$

Первое уравнение ОС (6) не используется, и среднее напряжение будет найдено из решения краевой задачи, как обычно бывает при использовании условия несжимаемости.

Пусть  $r_1$  и  $r_2$  – внутренний и внешний радиусы ненагруженного цилиндра (при  $t = 0$ ),  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  – заданные давления на внутренней и внешней поверхностях цилиндра при  $t > 0$ , т. е. краевые условия имеют вид

$$\sigma_r|_{r_1} = -p_1(t), \quad \sigma_r|_{r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r_1} = \sigma_{rz}|_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r_2} = \sigma_{rz}|_{r_2} = 0. \tag{8}$$

Задача осесимметрична, и потому в любой точке  $(r, \theta, z)$  в любой момент времени все компоненты перемещений, деформаций и напряжений не зависят от угла  $\theta$  и

$$\sigma_{r\theta} \equiv 0, \quad \sigma_{\theta z} \equiv 0, \quad u_\theta(t) \equiv 0, \tag{9}$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = r^{-1}(u_{\theta,\theta} + u_r) = u/r, \quad \varepsilon_r(r, t) = u_{r,r} = \partial u / \partial r, \quad \varepsilon_z(r, t) = u_{z,z}, \tag{10}$$

где введено обозначение  $u := u_r(r, t)$  для радиального перемещения.

Будем считать трубу бесконечно длинной (очень длинной) или конечной, но закрепленной на торцах так, что осевое перемещение  $u_z = 0$  и касательные напряжения на торцах отсутствуют:  $\sigma_{z\theta} = 0$  и  $\sigma_{rz} = 0$ . Если труба бесконечно длинная, она находится в состоянии плоской деформации, все координатные линии цилиндрической системы координат не искривляются и, в силу наличия дополнительной группы симметрий (сдвигов вдоль оси  $z$  и отражений в плоскостях, перпендикулярных ей)  $u_r$  и  $\sigma_z$ , не зависят от  $z$  и справедливы равенства:

$$\sigma_{rz} \equiv 0, \varepsilon_{z\theta} \equiv 0, \varepsilon_{r\theta} \equiv 0, \varepsilon_z \equiv 0, u_z \equiv 0, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \equiv 0, \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}(u_{\theta,z} + r^{-1}u_{z,\theta}) \equiv 0, \quad (11)$$

(помимо (9)). Если труба конечной длины, то в зависимости от характера граничных условий на торцах возможно наличие сдвиговых напряжений и деформаций вблизи торцов. Но если на торцах заданы указанные условия  $u_z = 0$ ,  $\sigma_{z\theta} = 0$  и  $\sigma_{rz} = 0$ , то она находится в состоянии плоской деформации и выполняются равенства (11). Из (9) и (11) следует, что тензоры деформаций и напряжений диагональны:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\}$ , причем зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид:  $u_r(r, t)$ ,  $\varepsilon_r(r, t)$ ,  $\varepsilon_\theta(r, t)$ ,  $\sigma_r(r, t)$ ,  $\sigma_\theta(r, t)$ ,  $\sigma_z(t)$ .

Система уравнений равновесия среды в цилиндрической системе координат

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}\sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r = 0,$$

$$\sigma_{r\theta,r} + r^{-1}\sigma_{\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z} + 2r^{-1}\sigma_{r\theta} + F_\theta = 0,$$

$$\sigma_{rz,r} + r^{-1}\sigma_{\theta z,\theta} + \sigma_{z,z} + r^{-1}\sigma_{rz} + F_z = 0,$$

в силу симметрий поля напряжения (9) и (11) эквивалентна лишь одному уравнению в проекции на радиус, принимающему вид

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (12)$$

Второе уравнение выполнено тождественно, так как  $\sigma_{r\theta} \equiv 0$ ,  $\sigma_{\theta z} \equiv 0$ ,  $\sigma_{\theta,\theta} = 0$  (все эти свойства сохраняются и в задаче с осевой нагрузкой, равномерно распределенной по торцам). Третье уравнение принимает вид  $\sigma_{rz,r} + r^{-1}\sigma_{rz} = 0$  (так как  $\sigma_{z,z} = 0$ ), общее решение этого обыкновенного ДУ имеет вид  $\sigma_{rz} = C(t, z)r^{-1}$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $t \geq 0$ , но из нулевых краевых условий (8) для  $\sigma_{rz}(r, z, t)$  при  $r = r_1$  и  $r = r_2$  получаем  $C(t, z) \equiv 0$  и  $\sigma_{rz} \equiv 0$ .

Условие несжимаемости материала  $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$  в силу  $\varepsilon_z \equiv 0$  принимает вид

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0. \quad (13)$$

Используя (10), получим обыкновенное ДУ  $\partial u / \partial r + u / r = 0$  для  $u(r, t)$ , откуда

$$u = C(t)r^{-1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t > 0. \quad (14)$$

Произвольная функция  $C(t)$  выражается через радиальное перемещение точек внутренней или внешней поверхности трубы:  $C(t) = r_1 u(r_1, t) = r_1 u_1(t)$  или  $C(t) = r_2 u(r_2, t) = r_2 u_2(t)$ . Из (14) и (10) все ненулевые компоненты тензора деформации выражаются через одну неизвестную функцию  $C(t)$ :

$$\varepsilon_\theta(r, t) = u / r = C(t)r^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = \partial u / \partial r = -C(t)r^{-2}. \quad (15)$$

Воспользуемся ОС Работнова (7), связывающим интенсивности напряжений и деформаций и компоненты девиаторов. Так как деформации сдвига отсутствуют (оси главные) и  $\varepsilon_z \equiv 0$ , то девиатор тензора деформации имеет вид  $\mathbf{e} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$ , а интенсивность деформаций –

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2]^{0,5} = \frac{2}{3} [\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\theta]^{0,5} = \frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2} \quad (16)$$

(в зависимости от соотношения предысторий давлений  $p_1(\tau)$  и  $p_2(\tau)$  возможен любой знак  $C(t)$ ). Девиатор тензора напряжений в любой точке тоже диагонален в силу тензорной линейности ОС:

$$\mathbf{s} := \mathbf{diag}\{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0\},$$

где  $\sigma_0(r, t) = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) / 3$  – среднее напряжение. Так как по (7) девиаторы пропорциональны, то из  $\varepsilon_z \equiv 0$  следует  $\sigma_z - \sigma_0 \equiv 0$  (при тех  $t$ , когда  $\varepsilon(t) \neq 0$ , т.е.  $C(t) \neq 0$ ), т. е.

$$\sigma_z = \sigma_0, \quad \text{или} \quad \sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta) / 2. \quad (17)$$

Тогда  $|\sigma_r - \sigma_0| = |\sigma_\theta - \sigma_0|$ ,  $|\sigma_r - \sigma_z| = |\sigma_\theta - \sigma_z| = 0,5|\sigma_r - \sigma_\theta|$  и потому выражение для интенсивности напряжений упрощается:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]^{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 0,5(\sigma_r - \sigma_\theta)^2]^{0,5} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta|.$$

Из условия пропорциональности девиаторов (7)

$$\sigma_r - \sigma_0 = \frac{2}{3} \varepsilon_r \sigma / \varepsilon, \quad \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{2}{3} \varepsilon_\theta \sigma / \varepsilon,$$

где по (15) и (16)

$$\varepsilon_r / \varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2} C(t) / |C(t)| = -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sgn} C(t), \quad \varepsilon_\theta / \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} C(t) / |C(t)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sgn} C(t).$$

Итак,

$$\sigma_r - \sigma_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sgn} C(t) \sigma, \quad \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sgn} C(t) \sigma, \quad (18)$$

где в силу (7) и (16) интенсивность напряжений равна

$$\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon) = \mathbf{R}\varphi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2}\right). \quad (19)$$

Уравнение равновесия в проекции на радиус (два других выполнены автоматически в силу симметрий поля напряжения (9)) имеет вид (12). Вычитая формулы (18) друг из друга, найдём  $\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \sigma$  и подставим это выражение в (12):  $\sigma_{r,r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \sigma r^{-1}$ , т. е.

$$\sigma_{r,r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R}[r^{-1} \varphi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2}\right)] \quad (20)$$

(так как умножение на функцию от  $r$  коммутирует с линейным наследственным оператором  $\mathbf{R}$ ).

Проинтегрируем уравнение (20) от  $r_1$  до  $r$ , пользуясь перестановочностью операторов интегрирования по  $r$  и по  $\tau$ , и сделаем замену переменной  $x = \frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| \rho^{-2}$ :

$$\sigma_r(r) - \sigma_r(r_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R}\left[\int_{r_1}^r \rho^{-1} \varphi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} |C| \rho^{-2}\right) d\rho\right] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R}\left[\int_{\frac{2}{\sqrt{3}} |C| r_1^{-2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}} |C| r^{-2}} \varphi(x) x^{-1} dx\right].$$

Введём обозначения  $\bar{r} := r / r_1$ ,  $q := (r_1 / r_2)^2 \in (0; 1)$ ,  $y(t) := \frac{2}{\sqrt{3}} C(t) r_1^{-2}$  (в силу (16))

$|y(t)| = \varepsilon(r_1)$  – интенсивность деформаций при  $r = r_1$  и  $|y(t)| = \varepsilon(r_2) / q$ , и

$$F(s) := \int_0^s \varphi(x) x^{-1} dx, \quad s > 0. \quad (21)$$

Тогда  $C(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2$  и  $\sigma_r(\bar{r}) + p_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} y(t) \mathbf{R}\left[\int_{|y(t)|}^{|y(t)|/\bar{r}^2} \varphi(x) x^{-1} dx\right]$ , т. е.

$$\sigma_r(\bar{r}) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} y(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad \bar{r} \in [1, r_2 / r_1], \quad t \geq 0. \quad (22)$$

Если существует правая производная  $\varphi'(0+0)$  или хотя бы  $\varphi(x) = A|x|^\alpha + o(|x|^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , при  $x \rightarrow 0+0$ , то несобственный интеграл (21) (возможно, имеющий особенность в точке  $x=0$ ) сходится,  $F(s)$  непрерывна справа в точке  $s=0$  и  $F(0+) = 0$  (а при  $\alpha \geq 1$  еще и  $F'(0+) = 0$ ). Из возрастания  $\varphi(x)$  и условия  $\varphi(0) = 0$  (тогда  $\varphi(x) > 0$ ) следует *возрастание*  $F(s)$  на интервале  $s > 0$ :  $F'(s) = \varphi(s) s^{-1} > 0$ .

При  $r = r_2$  в (22), используя второе краевое условие (8), получим интегральное уравнение для определения  $y(t)$  (и всех компонент напряжений и деформаций):

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} y(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)], \quad t > 0.$$

В силу возрастания  $F(s)$  всегда справедливо неравенство  $F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) > 0$  (так как  $q \in (0; 1)$ ). Поскольку функция релаксации положительна, то в любой момент времени функция  $f(t) = \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)]$  положительна и потому знак  $\operatorname{sgn} y(t)$  совпадает с  $z(t) := \operatorname{sgn}(p_1(t) - p_2(t))$ . Таким образом,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)], \quad q := (r_1 / r_2)^2 \in (0; 1), \quad t > 0. \quad (23)$$

Применяя к (23) обратный к  $\mathbf{R}$  линейный оператор  $\mathbf{\Pi}$ , получим функциональное уравнение для функции  $Y := |y(t)|$ :

$$F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) = P(t), \quad P(t) := \sqrt{3} \mathbf{\Pi}[z(p_1 - p_2)] = \sqrt{3} \mathbf{\Pi}|p_1 - p_2|, \quad t > 0. \quad (24)$$

Здесь  $P(t)$  – известная функция времени, если заданы функция ползучести и нагрузка. Очевидно, уравнение (24) можно свести к дифференциальному уравнению (задаче Коши) для  $y(t)$ .

**3. Выражения для полей деформаций и напряжений**

После определения (в общем случае приближённого)  $y(t)$  и  $C(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2$  из уравнения (24) находятся поля перемещений, деформаций и напряжений по (14), (15) и (22):

$$u_r(r, t) = C(t)r^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2 r^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1 / \bar{r}, \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0; \quad (25)$$

$$\varepsilon_r(r, t) = -C(t)r^{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2 r^{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} y(t) \bar{r}^{-2}, \quad (26)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = -\varepsilon_r(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) \bar{r}^{-2}, \quad (27)$$

$$\sigma_r(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad (28)$$

где  $z(t) := \text{sgn}(p_1(t) - p_2(t))$ ,  $\bar{r} := r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$ . Интенсивности деформаций и напряжений:

$$\varepsilon(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2} = |y(t)| r_1^2 r^{-2} = |y(t)| / \bar{r}^2, \quad \sigma(r, t) = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon) = \mathbf{R}\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2). \quad (29)$$

Напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$  можно выразить из уравнения равновесия (12), но проще использовать (18):  $\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sgn} C(t) \sigma = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)$ , т. е.

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2)] + \frac{2}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2),$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad (30)$$

$$\sigma_z(r, t) = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2 = \sigma_r + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sgn} C(t) \sigma = \sigma_r + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2),$$

т. е.

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + \varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)] \quad (31)$$

В силу (17) среднее напряжение  $\sigma_0 = \sigma_z$  и  $\sigma_2 = \sigma_z = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ .

Можно доказать, что, если разность давлений  $p_1(t) - p_2(t)$  положительна и нестрого возрастает, то функции  $Y := |y(t)|$  и  $y(t)$  тоже возрастают (строго), и потому  $u_r(r, t)$  и  $\varepsilon_\theta(r, t)$  положительны и возрастают по времени, а деформация  $\varepsilon_r(r, t)$  отрицательна и убывает (в силу формул (25)–(27)).

Существенно, что функция  $y(t)$ , полностью определяющая поля перемещений и деформаций в любой момент времени, может быть найдена не только в результате решения уравнения (24), но и является непосредственно измеряемой в эксперименте функцией, поскольку она пропорциональна относительному изменению внешнего радиуса трубы и кольцевой деформации на поверхности (см. формулы (25) и (27) при  $r = r_2$ ). Это позволяет использовать полученное решение краевой задачи (25)–(31) для идентификации ОС (7).

Полученное общее решение краевой задачи при любых МФ позволяет решать задачи для многослойных (составных) труб из разных материалов, следующих ОС Работнова (с разными парами материальных функций), и определять контактные давления слоёв. Отметим также, что если положить  $\Pi(t) = \text{const}$ ,  $\Pi_0(t) \equiv 0$ , то ОС (1) вырождается в ОС для упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ  $\Phi(x)$ , т. е. приводит к теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина, а построенное в этой статье решение задачи для трубы превращается в классические решения [31–33].

**Заключение**

В статье построено точное решение квазистатической краевой задачи, аналогичной классической задаче Ламе для полого цилиндра в теории упругости, но для цилиндра из физически нелинейного несжимаемого реономного материала, подчиняющегося определяющему соотношению Работнова (1) с двумя произвольными материальными функциями, и для произвольных (медленно меняющихся) зависимостей давлений от времени, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражаются по формулам (25)–(31), (11) через одну функцию времени, которая находится в результате решения выведенного нелинейного функционального уравнения (24), содержащего ма-

териальные функции ОС и заданную нагрузку. Из построенного решения краевой задачи следует, что эта функция времени может быть найдена не только из уравнения (24), но и является непосредственно измеряемой в эксперименте функцией (она пропорциональна относительному изменению внешнего радиуса трубы и кольцевой деформации на поверхности). Это позволяет использовать полученное решение (25)–(31) для определения материальных функций нелинейного определяющего соотношения Работнова по данным испытания толстой трубы (если испытания показывают, что принятые при постановке задачи предположения достаточно хорошо выполняются для материала).

В последующих статьях планируется детально исследовать свойства напряженно-деформированного состояния (25)–(31) в случае задачи о ползучести толстой трубы из физически нелинейного наследственного материала под действием постоянных давлений, сравнить их со свойствами решения задачи в рамках линейной теории вязкоупругости, получить общее выражение для времени разрушения трубы (с использованием деформационного критерия разрушения и критериев, учитывающих историю деформирования, предложенных в [34]), вывести уравнение кривой длительной прочности, разработать методику идентификации ОС Работнова и построить решения аналогичных краевых задач в менее ограничительных предположениях: 1) с учетом инерционных членов в уравнениях равновесия (чтобы получить возможность моделировать виброползучесть при периодически меняющемся внутреннем давлении); 2) с заданием произвольной осевой силы (а не нулевого осевого перемещения) на торцах для описания испытаний образца на совместное действие давления и заданной продольной силы; 3) отказаться в постановке задачи от постулата несжимаемости материала, заменив его на условие постоянства коэффициента Пуассона  $\Pi_0(t) = c\Pi(t)$  или на постулат об упругом изменении объема (когда  $\Pi_0 = \text{const} = 1/K$ ,  $\Phi_0(x) = x$  в ОС (1) и  $\sigma_0 = K\varepsilon_0$ ) [5, 7, 30]; 4) построить решения этих задач для составных (многослойных) труб с разными сочетаниями вязкоупругих свойств слоев и цилиндрических баллонов с полусферическими «торцами» под давлением (ползучесть и т. п.).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146\_a).*

### Литература

1. Хохлов, А.В. Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти / А.В. Хохлов // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.
2. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А.В. Хохлов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – № 3(72). – С. 93–123.
3. Хохлов, А.В. О способности нелинейного определяющего соотношения Работнова для наследственных материалов моделировать диаграммы деформирования с падающим участком / А.В. Хохлов // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80, № 4. – С. 477–493.
4. Хохлов, А.В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гауп-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова / А.В. Хохлов // Механика композитных материалов. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 687–708.
5. Хохлов, А.В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова / А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 407–436.
6. Хохлов, А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 2. – С. 29–47.
7. Хохлов, А.В. Свойства кривых объемной, осевой и поперечной ползучести при одноосном растяжении, порождаемых нелинейным соотношением вязкоупругости Работнова / А.В. Хохлов // Проблемы прочности и пластичности. – 2019. – Т. 81, № 2. – С. 146–164. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-146-164

8. Работнов, Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю.Н. Работнов // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.
9. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
10. Дергунов, Н.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории / Н.Н. Дергунов, Л.Х. Паперник, Ю.Н. Работнов // ПМТФ. – 1971. – № 2. – С. 76–82.
11. Работнов, Ю.Н. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах / Ю.Н. Работнов, Л.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 1. – С. 74–87.
12. Работнов, Ю.Н. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии / Ю.Н. Работнов, Л.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1973. – № 5. – С. 779–785.
13. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
14. Fung, Y.C. Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation / Y.C. Fung // Biomechanics: Its Foundations and Objectives (Eds. Y.C. Fung, N. Perrone, and M. Anliker): сб. науч. тр. – Prentice Hall, New Jersey, 1972. – P. 181–208.
15. Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues / Y.C. Fung. – N.-Y.: Springer, 1993. – 568 p.
16. Linear and Quasi-Linear Viscoelastic Characterization of Ankle Ligaments / J.R. Funk, G.W. Hall, J.R. Crandall, W.D. Pilkey // Journal of Biomechanical Engineering. – 2000. – Vol. 122, Iss. 1. – pp. 15–22.
17. Sarver, J.J. Methods for Quasi-Linear Viscoelastic Modeling of Soft Tissue: Application to Incremental Stress-Relaxation Experiments / J.J. Sarver, P.S. Robinson, D.M. Elliott // Journal of Biomechanical Engineering. – 2003. – Vol. 125, Iss. 5. – P. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247
18. Abramowitch, S.D. An Improved Method to Analyze the Stress Relaxation of Ligaments Following a Finite Ramp Time Based on the Quasi-Linear Viscoelastic Theory / S.D. Abramowitch, S.L.-Y. Woo // Journal of Biomechanical Engineering. – 2004. – Vol. 126, Iss. 1. – P. 92–97.
19. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling / A. Nekouzadeh, K.M. Pryse, E.L. Elson, G.M. Genin // Journal of Biomechanics. – 2007. – Vol. 40, Iss. 14. – P. 3070–3078.
20. DeFrate, L.E. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model / L.E. DeFrate, G. Li // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2007. – Vol. 6, Iss. 4. – P. 245–251.
21. Duenwald, S.E. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment / S.E. Duenwald, R. Vanderby Jr, R.S. Lakes // Acta Mechanica. – 2009. – Vol. 205. – P. 23–33.
22. Lakes, R.S. Viscoelastic Materials / R.S. Lakes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.
23. De Pascalis, R. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model / R. De Pascalis, I.D. Abrahams, W.J. Parnell // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2014. – Vol. 470, Iss. 2166. – 20140058.
24. Ломакин, В.А. Моделирование процесса деформации нелинейных вязко-упругих сред / В.А. Ломакин, М.А. Колтунов // Механика полимеров. – 1967. – № 2. – С. 221–227.
25. Суворова, Ю.В. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния / Ю.В. Суворова, С.И. Алексеева // Механика композитных материалов. – 1993. – № 5. – С. 602–607.
26. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях / Ю.В. Суворова // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2004. – № 1. – С. 174–181.
27. Алексеева, С.И. Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями / С.И. Алексеева, М.А. Фроня, И.В. Викторова // Композиты и наноструктуры. – 2011. – № 2. – С. 28–39.
28. Хохлов, А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности / А.В. Хохлов // Вестник Самар-

ского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 326–361.

29. Хохлов, А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гаупр-деформировании и методики её идентификации / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 3. – С. 81–104.

30. Хохлов, А.В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления / А.В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Vol. 25, no. 2. – С. 259–280.

31. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.

32. Ильюшин, А.А. Упруго-пластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с.

33. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.

34. Хохлов, А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности / А.В. Хохлов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 121–135.

*Поступила в редакцию 7 октября 2019 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 1, pp. 44–54*

---

DOI: 10.14529/mmph200106

### **EXACT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR STRAIN AND STRESS FIELDS IN A THICK TUBE MADE OF PHYSICALLY NON-LINEAR ELASTO-VISCOPLASTIC MATERIAL UNDER GIVEN INTERNAL AND EXTERNAL PRESSURES**

**A. V. Khokhlov**

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

*E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru*

We construct the analytic solution of the quasi-static boundary value problem for a hollow cylinder (a thick tube) under given pressure similar to the Lamé problem in the elasticity theory but for a cylinder made of physically non-linear elasto-viscoplastic material governed by the Rabotnov constitutive equation with an arbitrary material functions. We assume that pressure values preset on an internal and external surfaces of the thick tube depend on time but change slowly enough to neglect inertia terms in the equilibrium equations. We also suppose that a material is homogeneous, isotropic and incompressible and a plain strain state is realized, i. e. the tube is long enough or zero axial displacements are given on the edge cross sections of the tube. We derive explicit closed form expressions for displacement, strain and stress fields via the unknown function of time and obtain functional equation to determine this function implying radii of the tube, pressure values dependence on time and material functions of the Rabotnov constitutive equation are given. It follows from the exact solution of the boundary value problem that this unknown function of time can be simply measured in pressure tests of tubular specimen. This observation allows to use the solution constructed for identification of the Rabotnov constitutive equation.

*Keywords: elastoviscoplasticity; physical non-linearity; the Rabotnov constitutive equation; the Lamé problem; stress field; creep; identification.*

## References

1. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2017, Vol. 72, no. 5, pp. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016
2. Khokhlov A.V. Analysis of Creep Curves General Properties under Step Loading Generated by the Rabotnov Nonlinear Relation for Viscoelastic Plastic Materials. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no. 3(72), pp. 93–123. (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
3. Khokhlov A.V. O sposobnosti nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya rabotnova dlya nasledstvennykh materialov modelirovat' diagrammy deformirovaniya s padayushchim uchastkom (On the Ability of the Rabotnov Non-linear Relation for Hereditary Materials to Simulate Stress-strain Curves with a Decreasing Segment). *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2018, Vol. 80, no. 4, pp. 477–493. (in Russ.). DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-477-493.
4. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, Vol. 54, Iss. 4, pp. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1
5. Khokhlov A.V. Simulation of Hydrostatic Pressure Influence on Creep Curves and Poisson's Ratio of Rheonomic Materials under Tension using the Rabotnov Non-Linear Hereditary Relation. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, Vol. 24, no. 3, pp. 407–436. (in Russ.). DOI: 10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407\_436.07
6. Khokhlov A.V. Svoystva semeystva diagramm deformirovaniya, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Yu.N. Rabotnova dlya vyazkoupругoplastichnykh materialov (Properties of Stress-strain Curves Family Generated by the Rabotnov Non-linear Relation for Viscoelastic Materials). *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 2, pp. 29–47. DOI: 10.1134/S0572329919020077
7. Khokhlov A.V. Svoystva krivyykh ob'emnoy, osevoy i poperechnoy polzuchesti pri odnoosnom rastyazhenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem vyazkoupругosti Rabotnova (General Properties of the Creep Curves for Volumetric, Axial and Lateral Strain Generated by the Rabotnov Non-linear Viscoelasticity Relation under Uni-axial Loadings). *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2019, Vol. 81, no. 2, pp. 146–164. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-146-164
8. Rabotnov Yu.N. Ravnovesie upругoy sedy s posledeystviem (Equilibrium of Elastic Medium with Heredity). *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1948, Vol. 12, no. 1, pp. 53–62. (in Russ.).
9. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksiy* (Creep Problems in Structural Members), Moscow, Nauka Publ., 1966, 752 p. (in Russ.).
10. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analysis of behavior of graphite on the basis of nonlinear heredity theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, Vol. 12, no. 2, pp. 235–240. DOI: 10.1007/BF00850695
11. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev Y.I. Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric materials. *Polimer mechanics*, 1971, Vol. 7, no. 1, pp. 63–73. DOI: 10.1007/BF00856616
12. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E. I. Description of creep of composition materials under tension and compression. *Polymer Mechanics*, 1973, Vol. 9, pp. 690–695. DOI: 10.1007/BF00856259
13. Rabotnov Yu.N. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publishers, 1980, 387 p.
14. Fung, Y.C. Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation. In “*Biomechanics: Its Foundations and Objectives*” (Eds. Y.C. Fung, N. Perrone, and M. Anliker). Prentice Hall, New Jersey, 1972, pp. 181–208.
15. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. N.-Y.: Springer, 1993, 568 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2257-4
16. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and Quasi-Linear Viscoelastic Characterization of Ankle Ligaments. *Journal of Biomechanical Engineering*. – 2000. – Vol. 122, Iss. 1. – pp. 15–22. DOI: 10.1115/1.429623

17. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for Quasi-Linear Viscoelastic Modeling of Soft Tissue: Application to Incremental Stress-Relaxation Experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2003, Vol. 125, Iss. 5, pp. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247
18. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An Improved Method to Analyze the Stress Relaxation of Ligaments Following a Finite Ramp Time Based on the Quasi-Linear Viscoelastic Theory. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2004, Vol. 126, Iss. 1, pp. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528
19. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanics*, 2007, Vol. 40, Iss. 14, pp. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019
20. DeFrate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2007, Vol. 6, Iss. 4, pp. 245–251. DOI: 10.1007/s10237-006-0056-8
21. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive Equations for Ligament and other Soft Tissue: Evaluation by Experiment. *Acta Mechanica*, 2009, Vol. 205, pp. 23–33. DOI: 10.1007/s00707-009-0161-8
22. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 462 p.
23. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2014, Vol. 470, Iss. 2166. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058
24. Lomakin V.A., Koltunov M.A. Simulation of the deformation processes of nonlinear viscoelastic media. *Polymer Mechanics*, 1967, Vol. 3., Iss. 2, pp. 147–150. DOI: 10.1007/BF00858852
25. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nonlinear model of an isotropic hereditary medium in state of complex stress. *Mech Compos Mater.*, 1994, Vol. 29, Iss. 5, pp. 443–447. DOI: 10.1007/BF00611945
26. Suvorova Yu.V., Yu.N. Rabotnov's nonlinear hereditary-type equation and its applications. *Mechanics of Solids*, 2004, Vol. 39, no. 1, pp. 132–138.
27. Alexeeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analysis of viscoelastic properties of polymer based composites with carbon nanofillers. *Composites and nanostructures*, 2011, no. 2, pp. 28–39.
28. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivyykh polzuchesti pri tsiklicheskiykh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriey nasledstvennosti (Analysis of Creep Curves Produced by the Linear Heredity Theory under Cyclic Stepwise Loadings). *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2017, Vol. 21, no. 2, pp. 326–361. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1533
29. Khokhlov A.V. Two-Sided Estimates for the Relaxation Function of the Linear Theory of Heredity via the Relaxation Curves during the Ramp-Deformation and the Methodology of Identification. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, no. 3, pp. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105
30. Khokhlov A.V. Applicability Indicators of the Linear Viscoelasticity Theory using Creep Curves under Tensile Load Combined with Constant Hydrostatic Pressure. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol. 25, no. 2, pp. 259–280. (in Russ.). DOI: 10.33113/mkmm.ras.2019.25.02.259\_280.09
31. Nadai A.L. *Theory of flow and fracture of solids. Vol. 1*. New York, McGraw-Hill, 1950, 572 p.
32. Il'yushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugo-plasticheskie deformatsii polykh tsilindrov* (Elastic-plastic Deformations of Hollow Cylinders). Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1960, 227 p. (in Russ.).
33. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* (Applied Theory of Plasticity and Creep). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 400 p. (in Russ.).
34. Khokhlov A.V. Fracture criteria under creep with strain history taken into account, and long-term strength modeling. *Mechanics of Solids*, 2009, Vol. 44, no. 4, pp. 596–607. DOI: 10.3103/S0025654409040104

*Received October 7, 2019*

## BASIS SET SUPERPOSITION ERROR: EFFECTS OF ATOMIC BASIS SET OPTIMIZATION ON VALUE OF COUNTERPOISE CORRECTION

**E.V. Anikina, V.P. Beskachko**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: anikinaev@susu.ru

Using the DFT method, we simulated the adsorption of a single hydrogen molecule on pristine low-dimensional carbon nanomaterials: carbon nanotubes (CNT), en-yne (CEY), and graphdiyne (GDY). For wave function decomposition, we employed two approaches: localized pseudoatomic orbitals (SIESTA package) and plane waves (VASP package). For CNT, CEY, GDY, and bulk carbon (graphite), we optimized atomic basis sets. Delta test of used DFT packages showed a good agreement for carbon:  $\Delta_C = 0,36$  meV/atom. We demonstrated that after atomic basis set optimization the value of counterpoise (CP) correction of basis set superposition error (BSSE) in calculations of hydrogen adsorption energies reduces. Moreover, this CP correction could be by several times bigger than the corrected hydrogen adsorption energy. Therefore, to obtain reasonable results in weakly interacting systems, CP-corrected adsorption energies in the optimized PAOs are needed. In considered systems, hydrogen adsorption energies, which were calculated in this way, agree with the energies obtained using the BSSE-free plane-wave basis set.

*Keywords: Density functional theory (DFT); localized pseudoatomic orbitals (PAOs); projector-augmented wave method (PAW); delta test; hydrogen adsorption; carbon nanomaterials.*

### Introduction

On the way to the hydrogen economy, several problems should be solved. Among one of them is the creation of effective and compact hydrogen storages. Carbon nanostructures are promising materials for such utilization since they have unique mechanical properties [1, 2], porosity, low density and high surface area [3]. However, there are numerous allotropes of carbon. Therefore, in search of a material with the needed properties, computer modelling could decrease the experimental costs and shorten trial and error loop.

Density functional theory, a popular approach in atomistic simulations, allows researchers to obtain precise results even for big systems [4], which can be useful in modelling of, for example, carbon nanotubes (CNTs), where simulation cell could contain up to several hundred atoms [5]. Though this method does not require empirical data of a simulated system, to reduce the many-electron problem to one-electron, some theoretical approximations are needed.

One of the key approximations is the wave function decomposition over a certain finite basis. The most common approaches are localized pseudoatomic orbitals (PAOs) and plane waves. For big systems or structures with a large vacuum volume (like in the case of adsorption modelling), PAOs are an effective method since they give accurate results with the low computational cost [6]. However, PAO basis set is prone to a significant basis set superposition error, BSSE (an over-estimation of binding energy due to the unequal basis sets between the interacting bonded system and non-interacting separated systems), in weakly interacted systems [7]. To reduce BSSE, counterpoise (CP) correction by Boys and Bernardi [8] can be used. Though, it is not clear, how atomic basis set optimization influences the value of this correction and corrected hydrogen adsorption energy. And if it is possible to get similar to the BSSE-free plane-waves results, using PAOs.

Therefore, in this work, we consider different allotropes of carbon and their interaction with the molecular hydrogen. For each carbon system, we optimize PAO basis set (for carbon atom). Then we calculate CP-corrected hydrogen adsorption energies before (with the default SIESTA basis set parameters) and after basis set optimization. The resulting hydrogen adsorption energies for 2D structures are com-

pared with the BSSE-free plane-wave basis calculations. Additionally, we perform delta-test of utilized DFT packages, using different PAO basis set parameters.

### Models and simulation parameters

Spin-polarized DFT calculations were performed in SIESTA package [9, 10], where PAOs are implemented as a basis set. Adsorption on 2D carbon structures (CEY and GDY) was also investigated using the Vienna ab initio simulation package (VASP) [11] with the projector-augmented wave (PAW) method [12] and BSSE-free plane-wave basis set. The local density approximation, LDA (Ceperley–Alder functional [13]), and the generalized gradient approximation, GGA (Perdew–Burke–Ernzerhof functional [14]), were employed as the exchange-correlation functional. Geometry relaxation was performed by the conjugate-gradient method. For all SIESTA calculations, pseudopotentials were taken from the FHI pseudodatabase [15]. In the VASP simulations, we used the 2012 version of pseudopotentials, which treats the following electrons as valence: 1s for H and  $2s^2 2p^2$  for C.

*Carbon nanotubes.* We considered internal and external adsorption of a single hydrogen molecule on the pristine CNT(5,5). The simulation cell contains four primitive cells of the nanotube (80 carbon atoms in total). The optimized translational parameter in GGA (LDA) is 9,87 Å (9,78 Å). In non-periodic directions (perpendicular to the tube's axis) we put ~100 Å of vacuum. The force convergence criterion is  $10^{-4}$  Ry/Bohr. The mesh cut-off [16] is 360 Ry (210 Ry) for GGA (LDA) calculations. With the  $1 \times 1 \times 32$  Monkhorst–Pack set of  $k$ -points, the numerical precision of hydrogen adsorption energy calculations is 10 meV.

*En-yne.* We considered the adsorption of a single hydrogen molecule. The simulation cell contains two primitive cells of the CEY (20 carbon atoms in total). SIESTA simulation parameters: optimized sizes of an orthorhombic cell for GGA (LDA) calculations – 11,28·9,76·50 Å<sup>3</sup> (11,20·9,69·50 Å<sup>3</sup>); the mesh cut off for GGA (LDA) calculations – 350 Ry (210 Ry);  $k$ -points set –  $11 \times 11 \times 1$ ; the force convergence criterion –  $5 \cdot 10^{-5}$  Ry/Bohr. All these parameters allowed us to calculate hydrogen adsorption energies with the precision of ~7 meV. VASP simulation parameters: optimized sizes of an orthorhombic cell for GGA (LDA) calculations – 11,26·9,74·20 Å<sup>3</sup> (11,20·9,69·20 Å<sup>3</sup>); plane-wave basis set cut-off – 600 eV;  $k$ -points set –  $9 \times 9 \times 1$ ; the force convergence criterion –  $10^{-3}$  eV/Å. All these parameters allowed us to calculate hydrogen adsorption energies with the precision of ~3 meV.

*Graphdiyne.* We considered two configurations of a single hydrogen molecule: on top of the big trigonal pore, and on top of the small hexagonal pore. The simulation cell contains one hexagonal GDY primitive cell (18 carbon atoms in total). SIESTA simulation parameters: the optimized translational parameter in GGA (LDA) is 9,48 Å (9,39 Å), the distance between the structure and its image – ~ 100 Å; the mesh cut off for GGA (LDA) calculations – 350 Ry (210 Ry);  $k$ -points set –  $9 \times 9 \times 1$ ; the force convergence criterion –  $5 \cdot 10^{-5}$  Ry/Bohr. All these parameters allowed us to calculate hydrogen adsorption energies with the precision of ~ 7 meV. VASP simulation parameters: the optimized translational parameter in GGA (LDA) is 9,46 Å (9,39 Å), the distance between the structure and its image – 20 Å; plane-wave basis set cut-off – 600 eV;  $k$ -points set –  $9 \times 9 \times 1$ ; the force convergence criterion –  $10^{-3}$  eV/Å. All these parameters allowed us to calculate hydrogen adsorption energies with the precision of ~ 3 meV.

### PAO basis set optimization

For basis set optimization, we used the methodology described in [17]. For all considered structures (pristine CNT, CEY, and GDY), we separately optimized basis set parameters for carbon atoms. All parameters for hydrogen were taken from [17]. Since all considered adsorbents consist of one atom type (carbon), during the basis set optimization, we tracked only the structure total energy and the characteristic bond length.

As an example, in Fig. 1 we demonstrated the optimization procedure for C(2p) orbital in the case of CEY. In the presented example, we chose the optimal values for orbital cut-off and SplitNorm using the criterion of minimal total energy. Additionally, we monitored the length of a C–C bond,  $d_{C-C}$ . After orbital cut-off reached the value  $r_{cut} = 7,5$  Bohr,  $d_{C-C}$  remains on the same level (1,3942 Å). Since bigger  $r_{cut}$  employs higher computational costs, we chose  $r_{cut} = 7,5$  Bohr as an optimal value. The dependence of the structure total energy on SplitNorm parameter has a pronounced minimum at SplitNorm 0,25, which has been chosen as an optimal value.

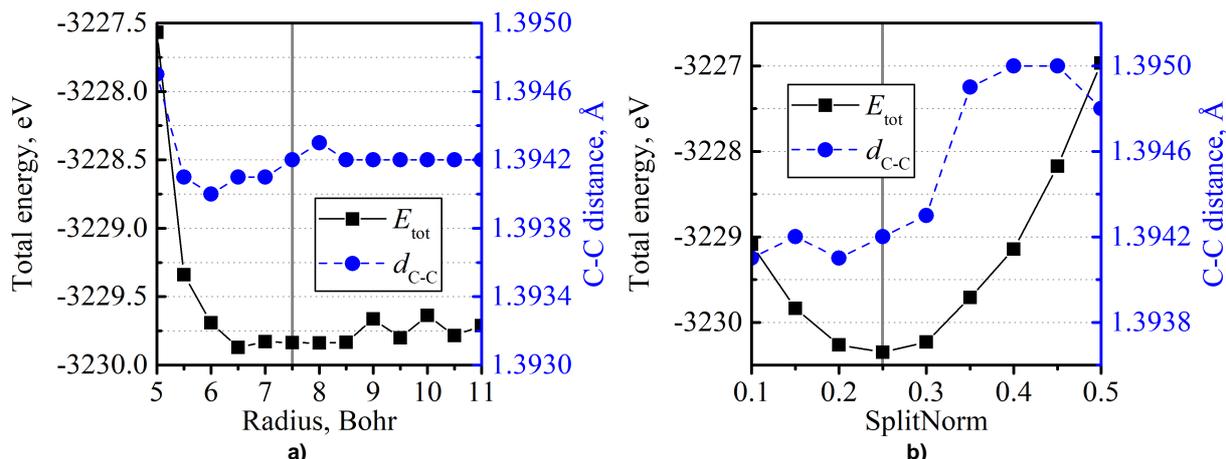


Fig. 1. Dependence of CEY total energy and C–C bond length on a) cut-off radius of C(2p) orbital; b) SplitNorm parameter of C(2p) orbital. Solid grey lines note the chosen value of orbital parameters

Optimal basis set parameters are shown in Table 1 ( $r_{mcut}$  is a cut-off radius of a modified orbital, it derives from  $r_{cut}$  and SplitNorm). For comparison, we also presented optimized parameters for graphite and default PAO parameters in SIESTA.

Table 1

Optimal parameters for C(2s) and C(2p) orbitals for different carbon allotropes

Structure		CNT	CEY	GDY	Bulk	Default PAO
C(2s)	$r_{cut}$ , Bohr	8,03	8,66	8,03	7,64	4,09
	SplitNorm	0,27	0,35	0,35	0,35	0,15
	$r_{mcut}$ , Bohr	3,03	2,81	2,81	2,81	3,35
C(2p)	$r_{cut}$ , Bohr	10,06	7,64	9,57	8,66	4,87
	SplitNorm	0,26	0,24	0,20	0,24	0,15
	$r_{mcut}$ , Bohr	3,18	3,27	3,52	3,27	3,48

Table 1 shows that, firstly, for different reference systems, we got slightly different optimal basis set parameters using the same pseudopotential in all cases. Secondly, all optimized parameters differ noticeably from the default ones (especially,  $r_{cut}$ ). Therefore, default basis set parameters should be used cautiously, and each new system requires basis set optimization.

### Delta test

To compare used DFT packages (VASP and SIESTA), we performed the delta test [18] between SIESTA results for different sets of orbital parameters and VASP data [19]. The obtained results are presented in Table 2.

Table 2 shows that the biggest  $\Delta_C$  (and, consequently, the worst agreement with the VASP data) was obtained with the default basis set for carbon. Furthermore, different PAO basis sets resulted in different delta parameters (it can be seen in relative  $\Delta_C$ ). Generally speaking, the reference system used in the current version of delta test is a bulk structure (and for this reason delta test cannot be used for comparison of pseudopotential, for this purpose consideration of different allotropes is needed). Therefore, to compare DFT packages, where atomic basis sets are utilized, it is necessary to optimize PAOs parameters on the needed reference system (bulk). So, the correct value in our case is  $\Delta_C$  for graphite:  $\Delta_C = 0,36$  meV/atom. This small value implies the good agreement between VASP and SIESTA results for carbon structures with the used pseudopotentials (results of the delta test considerably depend on the quality of pseudopotentials).

Delta parameters, obtained for different PAO basis sets					
Structure	CNT	CEY	GDY	Bulk	Default PAO
$\Delta_C$ , meV/atom	1,88	1,47	0,32	0,36	2,86
Relative $\Delta_C$ , %	15,1	11,8	2,6	2,9	22,4

**CP-corrected hydrogen adsorption energies**

We simulated the adsorption of a single hydrogen molecule on CNT(5,5), CEY, and GDY. Relaxed structures are presented in Fig. 2.

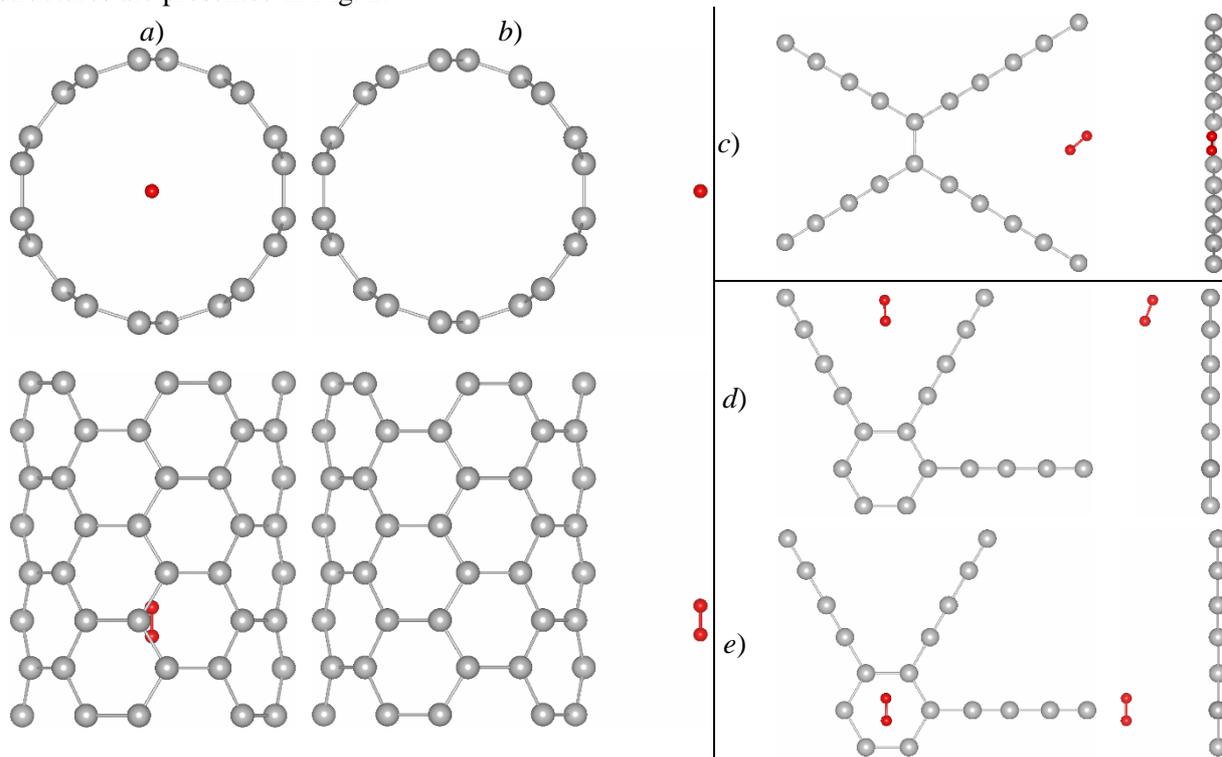


Fig. 2. Relaxed in SIESTA (GGA) structures of adsorbed hydrogen on: a) internal surface of CNT(5,5); b) external surface of CNT(5,5); c) CEY; d) top of the GDY big pore; e) top of the GDY small pore. Carbon and hydrogen atoms are grey and red, respectively

Hydrogen adsorption energy was calculated as follows:

$$E_{bind}^{BSSE} = E_{base} + E_{H_2} - E_{base+H_2},$$

where  $E_{base+H_2}$  is the total energy of a complex “carbon nanomaterial + hydrogen molecule”,  $E_{base}$  is the total energy of a carbon nanomaterial,  $E_{H_2}$  is the total energy of an isolated hydrogen molecule. Here, if  $E_{bind} > 0$ , hydrogen attracts to the base structure, and the bigger is  $E_{bind}$  the stronger is this binding.

CP corrections by Boys and Bernardi were calculated as follows:

$$E_{CP} = E_{base-ghost} - E_{base}^0 + E_{H_2-ghost} - E_{H_2}^0,$$

where  $E_{base-ghost}$  is the total energy of a carbon nanomaterial calculated in the full basis of a complex “carbon nanomaterial + hydrogen molecule”,  $E_{base}^0$  is the total energy of a carbon nanomaterial calculated in the basis of a carbon structure,  $E_{H_2-ghost}$  is the total energy of a hydrogen molecule calculated in the full basis of a complex “carbon nanomaterial + hydrogen molecule”,  $E_{H_2}^0$  is the total energy of a hydrogen molecules calculated in the basis of this molecule. All these energies are calculated in relaxed geometries presented in Fig. 2 without further structural optimization. This correction,  $E_{CP}$ , should be always negative. Then the final hydrogen adsorption energy was calculated

as  $E_{bind} = E_{bind}^{BSSE} + E_{CP}$ . The results of hydrogen adsorption energy calculations, as well as the value of CP correction by Boys and Bernardi, are presented in Table 3.

Table 3

Hydrogen adsorption energy (meV) and the value of CP correction by Boys and Bernardi (meV)

Basis set	CNT(5,5)				CEY		GDY			
	external		internal		$E_{bind}$	$ E_{CP} $	big pore		small pore	
	$E_{bind}$	$ E_{CP} $	$E_{bind}$	$ E_{CP} $			$E_{bind}$	$ E_{CP} $	$E_{bind}$	$ E_{CP} $
GGA										
optimized	5	44	35	231	12 (18)	43	8 (15)	47	10 (14)	57
default	-15	205	22	318	40	230	-34	369	-17	184
LDA										
optimized	70	71	238	234	104 (105)	44	120 (122)	86	91 (87)	110
default	69	233	168	345	112	301	127	428	169	117

Table 3 shows that almost in all cases  $|E_{CP}|$  drops after basis set optimization (for example, in the case of GDY big pore,  $|E_{CP}|$  decreased by almost 8 times). However, even with the optimized basis set,  $|E_{CP}|$  is significant in comparison with  $E_{bind}$  (especially for GGA calculations). Mostly, in LDA calculations  $|E_{CP}|$  is bigger than in GGA calculations, though, as expected,  $E_{bind}$  is bigger too (since LDA overestimates the energy of vdW interaction, and GGA underestimates it [20]). As a result,  $|E_{CP}|/E_{bind}$  is lower in LDA calculations than in GGA. All in all, we have not found the general trend in  $E_{bind}$  and basis set optimization. In some cases (for example, LDA calculations of external adsorption on CNT(5,5) or adsorption on top of the GDY big pore)  $E_{bind}$  changes only slightly after basis set optimization, while in other cases the change in  $E_{bind}$  can be significant.

To compare results, obtained with PAO basis set, with the BSSE-free plane-wave basis, we calculated hydrogen adsorption energies on 2D carbon nanomaterials in VASP. Results of these calculations are presented in Table 3 within the brackets. And the difference between the CP-corrected hydrogen adsorption energies, calculated with the optimized basis set, and the VASP adsorption energies is within the numerical precision. This is not true for  $E_{bind}$  obtained with the default basis set of carbon. To summarize, if one wants to get fast and precise hydrogen adsorption energies in weakly interacting systems, using PAOs, one should both optimize the basis set and employ CP correction by Boys and Bernardi.

## Conclusions

In this work, we obtained the optimal parameters of PAOs basis sets, implemented in SIESTA, for CNTs, CEY, GDY, and graphite. The delta-test of VASP and SIESTA showed good agreement for carbon ( $\Delta_C = 0,36$  meV/atom). Simulation of hydrogen adsorption on low-dimensional carbon nanomaterials indicated the necessity of basis set optimization for each considered system and BSSE correction in the case of atomic basis set usage for modelling of weakly interacted systems. If these are done, the resulting adsorption energies will coincide with the ones, obtained with the BSSE-free plane-wave basis, within the numerical precision.

*The reported study utilized the supercomputer resources of South Ural State University [21].*

## References

1. Sakintuna B., Yürüm Y. Templated porous carbons: a review article. *Industrial & engineering chemistry research*, 2005, Vol. 44, no. 9, pp. 2893–2902. DOI: 10.1021/ie049080w.

2. Beskachko V.P., Sozykin S.A., Sokolova E.R. Mekhanicheskie svoystva odnosloynnykh uglerodnykh nanotrubok (The mechanical properties of single-walled carbon nanotubes). *Vse materialy. Entsiklopedicheskiy spravochnik* (All materials. Encyclopedic Handbook.), 2010, no. 7, pp. 19–23. (in Russ.).
3. Xia Y.D., Yang Z.X., Zhu Y.Q. Porous carbon-based materials for hydrogen storage: advancement and challenges. *Journal of Materials Chemistry A*, 2013, Vol. 1, no. 33, pp. 9365–9381. DOI: 10.1039/c3ta10583k
4. Jones R.O. Density functional theory: Its origins, rise to prominence, and future. *Reviews of Modern Physics*, 2015. Vol. 87, Iss. 3, pp. 897–923. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.897
5. Hunt M.R.C., Clark S.J. Extraordinarily Long-Ranged Structural Relaxation in Defective Achiral Carbon Nanotubes. *Physical Review Letters*, 2012, Vol. 109, Iss. 26, p. 265502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.265502
6. Junquera J., Paz Ó., Sánchez-Portal D., Artacho E. Numerical atomic orbitals for linear-scaling calculations. *Physical Review B*, 2001, Vol. 64, Iss. 23, p. 235111. DOI: 10.1103/PhysRevB.64.235111
7. Lee K., Yu J., Morikawa Y. Comparison of localized basis and plane-wave basis for density-functional calculations of organic molecules on metals. *Physical Review B*, 2007, Vol. 75, Iss. 4, p. 045402. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.045402
8. Boys S.F., Bernardi F. The calculation of small molecular interactions by the differences of separate total energies. Some procedures with reduced errors. *Molecular Physics*, 2002, Vol. 100, Iss. 1, pp. 65–73. DOI: 10.1080/00268970110088901 (Reprinted from Boys S.F., Bernardi F. The calculation of small molecular interactions by the differences of separate total energies. Some procedures with reduced errors. *Molecular Physics*, 1970, Vol. 19, Iss. 4, pp. 553–566. DOI: 10.1080/00268977000101561).
9. Soler J.M., Artacho E., Gale J.D., García A., Junquera J., Ordejón P., Sánchez-Portal D. The SIESTA method for *ab initio* order-N materials simulation. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2002, Vol. 14, no. 11, pp. 2745–2779. DOI: 10.1088/0953-8984/14/11/302
10. Ordejón P., Artacho E., Soler J.M. Self-consistent order-N density-functional calculations for very large systems. *Physical Review B*, 1996, Vol. 53, Iss. 16, pp. R10441–R10444. DOI: 10.1103/PhysRevB.53.R10441
11. Kresse G., Furthmüller J. Efficient iterative schemes for *ab initio* total-energy calculations using a plane-wave basis set. *Physical Review B*, 1996, Vol. 54, Iss. 16, pp. 11169–11186. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.11169
12. Kresse G., Joubert D. From ultrasoft pseudopotentials to the projector augmented-wave method. *Physical Review B*, 1999, Vol. 59, Iss. 3, pp. 1758–1775. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.1758
13. Ceperley D.M., Alder B.J. Ground State of the Electron Gas by a Stochastic Method. *Physical Review Letters*, 1980, Vol. 45, Iss. 7, pp. 566–569. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.566
14. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized Gradient Approximation Made Simple. *Physical Review Letters*, 1996, Vol. 77, Iss. 18, pp. 3865–3868. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3865
15. Abinit's Fritz-Haber-Institute (FHI) pseudo database. [https://departments.icmab.es/leem/SIESTA\\_MATERIAL/Databases/Pseudopotentials/periodictable-intro.html](https://departments.icmab.es/leem/SIESTA_MATERIAL/Databases/Pseudopotentials/periodictable-intro.html) (accessed 25.11.2018).
16. Artacho E., Sánchez-Portal D., Ordejón P., García A., Soler J.M. Linear-Scaling *ab initio* Calculations for Large and Complex Systems. *Physica Status Solidi B*, 1999, Vol. 215, Iss. 1, P. 809–817. DOI: 10.1002/(SICI)1521-3951(199909)215:1<809::AID-PSSB809>3.0.CO;2-0
17. Anikina E.V., Beskachko V.P. Optimizatsiya parametrov bazisnogo nabora dlya modelirovaniya adsorbtsii vodoroda na uglerodnykh metananotrubkakh v pakete SIESTA (Basis Set Parameter Optimization for Hydrogen Adsorption on Carbon Metananotubes Simulation in SIESTA Package). *Nauchnyy poisk. Materialy devyatoy nauchnoy konferentsii aspirantov i doktorantov* (Scientific search. Proc. IX scientific conference of graduate and doctoral students), Chelyabinsk, Izdatel'skiy tsentr YuUrGU, Chelyabinsk, 2017, pp. 126–134. (in Russ.).
18. Lejaeghere K., Van Speybroeck V., Van Oost S., Cottenier G. Error Estimates for Solid-State Density-Functional Theory Predictions: An Overview by Means of the Ground-State Elemental Crystals. *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*, 2014, Vol. 39, Iss. 1, P. 1–24. DOI: 10.1080/10408436.2013.772503

19. Lejaeghere K., Bihlmayer G., Björkman T., Blaha P., Blügel S., Blum V., Caliste D., Castelli I.E., Clark S.J., Dal Corso A., de Gironcoli S., Deutsch T., Dewhurst J.K., Di Marco I., Draxl C., Duřak M., Eriksson O., Flores-Livas J.A., Garrity K.F., Genovese L., Giannozzi P., Giantomassi M., Goedecker S., Gonze X., Grånäs O., Gross E.K.U., Gulans A., Gygi F., Hamann D.R., Hasnip P.J., Holzwarth N.A.W., Iuřan D., Jochym D.B., Jollet F., Jones D., Kresse G., Koepnick K., Küçükbenli E., Kvashnin Y.O., Locht I.L.M., Lubeck S., Marsman M., Marzari N., Nitzsche U., Nordström L., Ozaki T., Paulatto L., Pickard C.J., Poelmans W., Probert M.I.J., Refson K., Richter M., Rignanese G.-M., Saha S., Scheffler M., Schlipf M., Schwarz K., Sharma S., Tavazza F., Thunström P., Tkatchenko A., Torrent M., Vanderbilt D., van Setten M. J., Van Speybroeck V., Wills J.M., Yates J.R., Zhang G.-X., Cottenier S. Reproducibility in density functional theory calculations of solids. *Science*, 2016, Vol. 351, Iss. 6280, aad3000. DOI: 10.1126/science.aad3000

20. Klimeř J., Michaelides A. Perspective: Advances and challenges in treating van der Waals dispersion forces in density functional theory. *The Journal of Chemical Physics*, 2012, Vol. 137, Iss. 12, 120901. <https://doi.org/10.1063/1.4754130>

21. Kostenetskiy P., Semenikhina P. SUSU Supercomputer Resources for Industry and fundamental Science. *Proc. 2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC)*, Chelyabinsk, 2018, pp. 1–7. DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570068

Received December 13, 2019

*Bulletin of the South Ural State University*  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 1, pp. 55–62

УДК 004.942-539.2

DOI: 10.14529/mmph200107

## ОШИБКА СУПЕРПОЗИЦИИ БАЗИСНОГО НАБОРА: ВЛИЯНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ АТОМНОПОДОБНОГО БАЗИСА НА ВЕЛИЧИНУ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕЙ ПОПРАВКИ

**Е.В. Аникина, В.П. Бескачко**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: anikinaev@susu.ru

Промоделирована адсорбция молекулы водорода на чистых углеродных наноматериалах низкой размерности: углеродных нанотрубках (УНТ), ерине и графидине. Использовались два подхода к разложению волновой функции системы: плоские волны (пакет VASP) и атомноподобные орбитали (пакет SIESTA). Для УНТ, ерина, графидина и графита были получены оптимальные параметры атомноподобного базисного набора. Дельта-тест использованных DFT пакетов на атоме углерода показал хорошее согласие:  $\Delta_C = 0,36$  мэВ/атом. Вычисление энергии адсорбции водорода с поправками Бойса–Бернарди показало, что после оптимизации атомноподобного базисного набора ошибка суперпозиции базисного набора (BSSE) уменьшается. При этом, эта ошибка может вносить значительный вклад в энергию адсорбции, поэтому для получения корректных результатов в слабосвязанных системах необходимо вычислять энергию адсорбции с «уравновешивающими» поправками после оптимизации базиса. Вычисленные таким образом энергии адсорбции с точностью до погрешности вычисления согласуются с результатами, полученными с помощью базиса из плоских волн, не подверженного BSSE.

*Ключевые слова:* теория функционала электронной плотности; атомноподобный базисный набор; метод проекционных соединительных волн; дельта-тест; адсорбция водорода; углеродные наноматериалы.

### Литература

1. Sakintuna, B. Templated porous carbons: a review article / B. Sakintuna, Y. Yürüm // *Industrial & engineering chemistry research*. – 2005. – Vol. 44, no. 9. – P. 2893–2902.

2. Бескачко, В.П. Механические свойства однослойных углеродных нанотрубок / В.П. Бескачко, С.А. Созыкин, Е.Р. Соколова // *Все материалы. Энциклопедический справочник*. – 2010. – № 7. – С. 19–23.

3. Xia, Y.D. Porous carbon-based materials for hydrogen storage: advancement and challenges / Y.D. Xia, Z.X. Yang, Y.Q. Zhu // *Journal of Materials Chemistry A*. – 2013. – Vol. 1, no. 33. – P. 9365–9381.
4. Jones, R.O. Density functional theory: Its origins, rise to prominence, and future / R.O. Jones // *Reviews of Modern Physics*. – 2015. – Vol. 87, Iss. 3. – C. 897–923.
5. Extraordinarily Long-Ranged Structural Relaxation in Defective Achiral Carbon Nanotubes / M.R.C. Hunt, S.J. Clark // *Physical Review Letters*. – 2012. – Vol. 109, Iss. 26. – P. 265502.
6. Numerical atomic orbitals for linear-scaling calculations / J. Junquera, Ó. Paz, D. Sánchez-Portal, E. Artacho // *Physical Review B*. – 2001. – Vol. 64, Iss. 23. – P. 235111.
7. Lee, K. Comparison of localized basis and plane-wave basis for density-functional calculations of organic molecules on metals / K. Lee, J. Yu, Y. Morikawa // *Physical Review B*. – 2007. – Vol. 75, Iss. 4. – P. 045402.
8. Boys, S.F. The calculation of small molecular interactions by the differences of separate total energies. Some procedures with reduced errors / S.F. Boys, F. Bernardi // *Molecular Physics*. – 2002. – Vol. 100, Iss. 1. – P. 65–73. (Boys, S.F. The calculation of small molecular interactions by the differences of separate total energies. Some procedures with reduced errors / S.F. Boys, F. Bernardi // *Molecular Physics*. – 1970. – Vol. 19, Iss. 4. – P. 553–566.)
9. The SIESTA method for ab initio order-N materials simulation / J.M. Soler, E. Artacho, J.D. Gale *et al.* // *Journal of Physics-Condensed Matter*. – 2002. – Vol. 14, no. 11. – P. 2745–2779.
10. Ordejón P., Artacho E., Soler J.M. Self-consistent order-N density-functional calculations for very large systems / P. Ordejón, E. Artacho, J.M. Soler // *Physical Review B*. – 1996. – Vol. 53, Iss. 16. – P. R10441–R10444.
11. Kresse, G. Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set / G. Kresse, J. Furthmüller // *Physical Review B*. – 1996. – Vol. 54, Iss. 16. – P. 11169–11186.
12. Kresse, G. From ultrasoft pseudopotentials to the projector augmented-wave method / G. Kresse, D. Joubert // *Physical Review B*. – 1999. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 1758–1775.
13. Ceperley, D.M. Ground State of the Electron Gas by a Stochastic Method / D.M. Ceperley, B.J. Alder // *Physical Review Letters*. – 1980. – Vol. 45, Iss. 7. – P. 566–569.
14. Perdew, J.P. Generalized gradient approximation made simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // *Physical Review Letters*. – 1996. – Vol. 77, Iss. 18. – P. 3865–3868.
15. Abinit's Fritz-Haber-Institute (FHI) pseudo database. URL: [https://departments.icmab.es/leem/SIESTA\\_MATERIAL/Databases/Pseudopotentials/periodictable-intro.html](https://departments.icmab.es/leem/SIESTA_MATERIAL/Databases/Pseudopotentials/periodictable-intro.html) (дата обращения: 25.11.2018).
16. Linear-scaling ab-initio calculations for large and complex systems / E. Artacho, D. Sánchez-Portal, P. Ordejón *et al.* // *Physica Status Solidi B*. – 1999. – Vol. 215, no. 1. – P. 809–817.
17. Аникина, Е.В. Оптимизация параметров базисного набора для моделирования адсорбции водорода на углеродных метананотрубках в пакете SIESTA / Е.В. Аникина, В.П. Бескачко // *Научный поиск. Материалы девятой научной конференции аспирантов и докторантов*. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, Челябинск, 2017. – С. 126–134.
18. Error Estimates for Solid-State Density-Functional Theory Predictions: An Overview by Means of the Ground-State Elemental Crystals / K. Lejaeghere, V. Van Speybroeck, G. Van Oost, S. Cottenier // *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*. – 2014. – Vol. 39, Iss. 1. – P. 1–24.
19. Reproducibility in density functional theory calculations of solids / K. Lejaeghere, G. Bihlmayer, T. Björkman *et al.* // *Science*. – 2016. – Vol. 351, Iss. 6280. – aad3000. DOI: 10.1126/science.aad3000
20. Klimeš, J. Perspective: Advances and challenges in treating van der Waals dispersion forces in density functional theory / J. Klimeš, A. Michaelides // *The Journal of Chemical Physics*. – 2012. – Vol. 137, Iss. 12. – P. 120901.
21. Kostenetskiy, P. SUSU Supercomputer Resources for Industry and fundamental Science / P. Kostenetskiy, P. Semenikhina // *2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC)*. – Chelyabinsk, 2018. – P. 1–7.

*Поступила в редакцию 13 декабря 2019 г.*

## ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ИЗМЕРЕНИЯ И КВАНТОВАНИЯ НА ИНФОРМАТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЭХО-СИГНАЛА ДОЖДЯ

**В.В. Заволокин, В.И. Тамбовцев**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zavolokinvv@susu.ru

Приведена и обоснована физико-математическая модель эхо-сигнала отраженного от облачно-дождевых систем. Предложены алгоритмы получения несмещенных, эффективных и состоятельных оценок первого и второго начальных моментов эхо-сигнала от дождя. Предложены схемы оценки физических параметров капель дождя на основе оценки мощности отраженного сигнала: наведенного дипольного момента капли дождя, затухания при распространении сигнала вдоль сферической координаты дальности туда и обратно и параметров облачно-дождевой системы: интенсивности дождя, водности облачно-дождевой системы. Показана связь наведенного дипольного момента капель дождя с оценками диэлектрической проницаемости и проводимости дождевых капель. Эта связь выражается через соотношения между оптическими и электрическими характеристиками капель дождя. Эти соотношения позволяют составить и решить системы алгебраических уравнений относительно статистических оценок диэлектрической проницаемости и проводимости капель дождя, на основе предварительно выполненных оценок наведенного дипольного момента капель дождя, которые получаются на основе статистических алгоритмов формирования состоятельных и несмещенных оценок первого и второго моментов эхо-сигнала дождя. Показана связь формирования оценок с условиями проведения измерений, зависящими от времени года и суток. Предложенные статистические алгоритмы позволяют устранить смещение указанных оценок физических параметров вызванное тремя составляющими: тепловым шумом приемника, эхо-сигналами принимаемыми по боковых лепесткам антенны и шумом квантования. Это делает данные оценки не только несмещенными, но и физически реализуемыми. Формирование оценок по предлагаемым алгоритмам предполагает истинно когерентную измерительную систему.

*Ключевые слова:* оценки мощности сигнала метеозо; численное решение уравнения метеоцели; наведенный дипольный момент капли дождя; проводимость и диэлектрическая проницаемость дождевой капли; шум квантования; радиофизические и электрохимические задачи.

### Введение

Известно [см. 1–3], что данные о физических свойствах дождевых капель:  $K_w$  – наведенном дипольном моменте капли,  $I(r_0, K_w, R)$  – затухании при распространении сигнала вдоль сферической координаты дальности, а также данные о физических свойствах облачно-дождевых систем:  $R$  – интенсивности дождя и  $M$  – водности облачно-дождевой системы лежат в основе физико-математических моделей ориентированных на решения трех групп задач: радиофизические, задачи обработки сигналов и электрохимические.

Это следующие задачи: исследование загрязнения воздушной среды, построение зон радио покрытия сотовой связи в осадках и зон ослабления сигнала при радиорелейной связи, построение карт солёности (и/или загрязнений акваторий, или воздушного бассейна), обнаружения патогенных ионов в каплях дождя, измерение водности облачно-дождевых систем с целью предотвращения возгорания двигателей реактивных самолетов, измерение водности  $M$  при принудительном поливе сельскохозяйственных угодий в засушливые годы из кучевых облаков, построении метеорологических карт.

### Формулировка радиофизической модели формирования сигнала метеозо

Алгоритм селекции физических свойств капель дождя и физических свойств облачно-дождевых систем изложен в [1, 2]. В [1] доказано, а в [2] обосновано, что эхо-сигнал от однород-

ных и изотропных импульсных объемов дождя есть центрированный двумерный нормальный вектор. Этот вектор является информативным относительно  $K_w, l(r_0, K_w, R), R$  и  $M$ . Комплексная диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\varepsilon}(\omega)$  (см. [2]) связана с комплексным относительным показателем преломления и с наведенным дипольным моментом капли  $K_w$  (см. [2, 3]) так:

$$K_w = \frac{(m^2(\omega) - 1)}{(m^2(\omega) + 2)}, \quad (1)$$

где

$$m(\omega) = n(\omega) - jk(\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)\mu = (\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega))\mu \quad (2)$$

комплексный относительный показатель преломления;  $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$  – относительная комплексная диэлектрическая проницаемость капель дождя;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость воды  $\mu \approx 1$  (0,999991) (см. [4]);

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + (\varepsilon''(\omega))^2} - \varepsilon'(\omega)\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + \left(\frac{\sigma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 c}\right)^2} - \varepsilon'(\omega)\right)} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + (599,758\lambda\sigma)} - \varepsilon'(\omega)\right)}; \quad (3)$$

– коэффициент поглощения;

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + (\varepsilon''(\omega))^2} + \varepsilon'(\omega)\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + \left(\frac{\sigma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 c}\right)^2} + \varepsilon'(\omega)\right)} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{(\varepsilon'(\omega))^2 + (599,758\lambda\sigma)^2} + \varepsilon'(\omega)\right)} \quad (4)$$

– действительный показатель преломления;  $\varepsilon'$  – вещественная часть комплексной диэлектрической проницаемости;  $\varepsilon''$  – мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости;  $\sigma$  – удельная проводимость среды распространения (капли воды);  $\lambda$  – длина волны зондирующего сигнала;  $\omega$  – круговая частота зондирующего сигнала;  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  – скорость света в вакууме;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная (электрическая (диэлектрическая) проницаемость вакуума);  $\mu_0$  – магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума).

Многokrатно зондируя на каждой из рабочих частот (см. [2]) и каждый раз (по результатам четырех зондирований) численно решая систему из трех уравнений (5), каждое из которых получается для текущего зондирования, получаем выборочные значения  $K_w, l(r_0, K_w, R)$  и  $R$ . На основе выборочных значений  $K_w$  получаем прямоугольные матрицы выборок  $\|K_w\|$ . Затем, из выборок  $\|K_w\|$ , формируем матрицы оценок  $\|\hat{K}_w\|$ . И, наконец, используя формулы (1)–(4) и уточненные формулы Дебая (см. [5, 6]), связывающие между собой величины: комплексную диэлектрическую проницаемость,  $T$  – температуру окружающей среды  $\sigma, \omega$  и учитывающие зависимость  $\sigma$  и  $\varepsilon$  от  $T$  и  $\omega$ , формируем матрицы оценок  $\|\hat{\sigma}\|$  и  $\|\hat{\varepsilon}'\|$ . Заметим при этом, что физические величины  $K_w$  и  $R$  не зависят от давления в диапазоне возможных значений атмосферного давления на трассе распространения радиосигнала (см. [2, 3]).

Связь мощности эхосигнала  $P(r_0)$  и  $K_w$  (см. [3]) имеет вид:

$$P(r_0) = \frac{P_u g^2 \lambda^2 l^2(r_0, K_w, R) \eta(r_0, K_w, R)}{(4\pi)^3 r_0^2} \int_r |W(r, r_0)|^2 dr \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f^4(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi =$$

$$= \frac{P_u g^2 \lambda^2 l^2(r_0, K_w, R) \pi^3 |K_w|^2 N_0 \Lambda^{-7} \gamma(7, \Lambda D_{\max}) \frac{\theta_1^2}{8 \ln 2} [\operatorname{cth}(aF\tau) - 1/(aF\tau)] \frac{c\tau}{2}}{2^6 r_0^2} = Al^2 |K_w|^2 N_0 (\alpha R^{-\beta})^{-7} \gamma(7, \alpha R^{-\beta} D_{\max}). \quad (3)$$

В (5) приняты следующие обозначения.  $P(r_0)$  – мощность эхо-сигнала отраженного от дождевого импульсного объема.  $\eta = \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K_w|^2 Z$  – удельная эффективная площадь рассеяния.

$Z = \frac{1}{\Delta V} \sum_i D_i$  – отражаемость разрешаемого импульсного объема  $\Delta V$  (см. [2]),  $D_i$  – диаметр капли,  $\Delta V$  – величина импульсного объема на удалении  $r_0$ ,  $r_0$  – значение наклонной дальности (сферической координаты) до центра импульсного объема  $\Delta V$ ,  $P_u$  – мощность, излучаемая передатчиком,  $g^2$  – коэффициент усиления датчика (антенны) одновременно на прием и передачу,

$$W(r, r_0) = \frac{1}{2} \{ \operatorname{erf} [(2aF/c)(r_0 - r + c\tau/4)] - \operatorname{erf} [(2aF/c)(r_0 - r - c\tau/4)] \};$$

– вид весовой функции по дальности.  $r$  – значение текущей сферической координаты;

$$a = \frac{\pi}{2\sqrt{\ln 2}} \quad (6)$$

– первый коэффициент формирования амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) согласованного фильтра приемника,  $F$  – ширина полосы пропускания приемника по уровню половинной мощности,  $\tau$  – длительность зондирующего импульса,  $R$  – интенсивность осадков мм/час. При использовании распределения капель по размерам Маршала–Пальмера  $N(D) = N_0 e^{-\Lambda D}$ , (см. [7]), уточняющих коэффициентов Литвинова и Циркунова и результатов из [8], имеет место выражение для уточненной отражаемости дождя  $Z = N_0 \Lambda^{-7} \gamma(7, d)$  (параметры  $N_0$  и  $\Lambda$  входящие в формулу, описывающую распределение капель по размерам). При этом, при метеорологических измерениях используют следующие пары параметров  $N_0$  и  $\Lambda$ :  $\Lambda = \alpha R^\beta = 3,7 \cdot R^{-0,37} \text{ мм}^{-1}$ ,  $N_0 = 5,5 \cdot 10^3 \text{ мм}^{-1}$  – для осадков в течение первых 15 мин выпадения днём (см. [8]),  $\Lambda = 4,3 \cdot R^{-0,23} \text{ мм}^{-1}$ ,  $N_0 = 1 \cdot 10^4 \text{ мм}^{-1}$  – для осадков спустя 30 мин после начала их выпадения днём (см. [9, 10]) и  $\Lambda = 4,6 \cdot R^{-0,23} \text{ мм}^{-1}$ ,  $N_0 = 1,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^{-1}$  – для ночных осадков (см. [8, 9]).  $\gamma(7, d)$  – неполная гамма функция (см. [10]),  $d = \Lambda D_{\max}$  и  $D_{\max}$  – максимальный диаметр капли ( $D_{\max} = 6,5 \text{ мм}$  (см. [3])).

$$l = \exp \left( - \int_0^r (k_g + k) dr \right) = \exp \left( - \int_0^r ((k_{g_{\text{H}_2\text{O}}} + k_{g_{\text{O}_2}}) + (k_\partial + k_c)) dr \right)$$

– потери в одну сторону за счет ослабления в атмосферных газах, в дожде и на каплях.  $k_g = (k_{g_{\text{H}_2\text{O}}} + k_{g_{\text{O}_2}})$  – коэффициент равный сумме коэффициентов затухания в атмосферном кислороде и парах воды.  $k = (k_\partial + k_c)$  – коэффициент ослабления в дожде и на каплях облаков. Поскольку  $k_c$  и  $k_\partial$  зависят от неизвестных  $K_w$ ,  $R$ ,  $M$ , а также от температуры среды, сезонного вида осадков и времени суток, то и величина  $l(r_0, K_w, R)$  формально является неизвестным в выражении (5) так как зависит от неизвестных физических величин.

$$\int_0^\infty (W(r, r_0))^2 dr = \int_0^\infty l_0 f_w^2(r_0 - r) dr = \frac{l_r(a, F, \tau) c\tau}{2} \quad (7)$$

– результат вычисления внешнего интеграла выражения,  $l_0 = \operatorname{erf}(b)$  – коэффициент при весовой функции  $f_w^2(r_0 - r)$ , который нормирует ее максимальное значение к единице,

$l_r(a, F, \tau) = [\text{cth}(aF\tau) - 1/(aF\tau)]$  – коэффициент потерь в приемнике обусловленный ограниченной полосой пропускания

$$f_w(r_0 - r) = \frac{1}{2\text{erf}(b)} (\text{erf}(x+b) - \text{erf}(x-b)); \quad (8)$$

– нормированная АЧХ приемника

$$b = F\tau\pi/4\ln\sqrt{2}; \quad (9)$$

– второй коэффициент формирования формы АЧХ приемника

$$x = (2aFc)(r_0 - r); \quad (10)$$

– формальная переменная функции (8).

Аналитическое решение  $l_r(a, F, \tau)$  получается при известной аппроксимации функции  $\text{erf}(y)$  функцией  $\text{th}(y)$ . Аппроксимация учитывает реальные значения величин (9)–(10) и выполняется с большой точностью (см. [2]).

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f^4(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{\pi\theta_1^2}{8\ln 2}.$$

– значение внутреннего интеграла выражения (5) (см. [3]). Вычисление внутреннего интеграла (5) выполнено при предположении, что функция  $f(\theta, \phi)$  – есть осесимметричная кривая гауссовского вида.  $\theta_1$  – угловая ширина (в радианах) однократно используемой (либо на прием, либо на передачу) диаграммы направленности антенны (или датчика);  $\phi$  – азимут;  $\theta$  – угол места.

Объединим по общим признакам все параметры формулы (5) в три группы. Первая группа (образует множитель  $A = \frac{P_u g^2 \pi^3 \theta_1^2}{2^6 r_0^2 \lambda^2 8\ln 2} \left[ \text{cth}(aF\tau) - \frac{1}{aF\tau} \right] \frac{c\tau}{2}$  в (5)) и объединяет априорно известные конструктивные параметры измерительной системы (постоянные параметры фиксированные для каждого текущего зондирования). Вторая группа образует вектор  $\vec{B} = (N_0, \alpha, \beta)$  априорно известных параметров дождя, координаты которого определены выше. Третья группа это неизвестные и статистически оцениваемые величины  $l(r_0, K_w, R)$ ,  $K_w$  и  $R$ .

Заметим, что неизвестные параметры  $l(r_0, K_w, R)$ ,  $K_w$  и  $R$  можно грубо оценить по трем зондированиям  $(P_1(r_0), P_2(r_0), (r_0))$ , численно решая систему из трех уравнений (5). Для  $n$  зондирований каждой из  $m$  частот строится матрица статистической выборки  $\|P(r_0)\|$  необходимая для расчета оценок  $\hat{l}(r_0, K_w, R)$ ,  $\hat{K}_w$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{M}$ , а затем и оценок  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\epsilon}$  по формулам (1)–(4) и уточненным эмпирическим формулам Дебая (см. [5, 6]). Меняя частоты зондирования в окрестности частоты  $f = 2,99792$  ГГц ( $\lambda = 10$  см, где  $K_w$  лежит в окрестности точки 0,9286 при  $t = 20$  °С) и  $f = 48,353622$  ГГц ( $\lambda = 0,62$  см, где  $K_w$  лежит в окрестности точки 0,8926 при  $t = 20$  °С) формируем матрицы  $\|\hat{\sigma}\|$  и  $\|\hat{\epsilon}\|$  по уточненным эмпирическим формулам Дебая (см. [5, 6]). Эти матрицы нужны для решения радиофизических и электрохимических задач. Заметим, что информацию о физических свойствах дождевых капель несет  $K_w$ , а информацию о свойствах облачно-дождевой системы  $l(r_0, K_w, M)$ ,  $R$ ,  $M$ . При этом,  $|K_w|^2$  изменяется всего в пределах от 0,8312 до 0,9340 [3] для длин волн в диапазоне от 0,06 м до 0,10 м в диапазоне температур от 0 до 20 °С. Тогда очевидно, что смещение оценки величины  $P(r_0)$ , вызываемое как процессом формирования эхо-сигнала (тепловой шум приемника также искажает оценку  $P(r_0)$ ), так и квантованием, недопустимо. Для ледяных сфер  $|K_w|^2$  составляет около 0,18 [3] и не зависит ни от температуры, ни от длины волны. Поэтому зимой затруднено измерение физических свойств атмосферной влаги.

**Алгоритмы формирования состоятельных и несмещенных оценок первого и второго начальных моментов эхо-сигнала дождя**

Окончательный вид вектора второго начального момента эхо-сигнала дождя будет иметь вид:

$$\bar{P} = (P(r_0), P(r_0 + c\tau)) = \bar{P}_{\xi}, \quad (11)$$

где  $\tau$  – шаг дискретизации при выборке сигнала или интервал времени между соседними выборочными отсчетами данных;  $c$  – скорость света.

Напомним, что первое и второе предложения раздела Формулировка радиофизической задачи имеет следующий вид: в [1] доказано, а в [2] обосновано, что эхо-сигнал от однородных и изотропных импульсных объемов дождя есть центрированный двумерный нормальный вектор. Этот случайный вектор является информативным относительно  $K_w, l(r_0, K_w, R), R$  и  $M$ .

Действительно каждый элементарный отражатель – капля дождя находится на случайном расстоянии от излучателя и случайным образом ориентирована относительно плоского фронта падающей электромагнитной волны. Капли дождя приобретают скорость в поле тяготения земли. Форма капли при этом будет отличаться от сферической формы. Причина отклонения от сферической формы в том, что на движущиеся капли действуют: сопротивления воздуха, ветер и столкновения капель (см. [2]). Кроме того, капли имеют различные размеры. Поэтому эхо-сигнал от каждой капли будет иметь случайную фазу, распределенную в интервале от  $[0, 2\pi]$ .

Таким образом, цитируя фразу из [2] запишем. Теперь мы можем применить центральную предельную теорему к действительной и мнимой частям сигнала. Теорема устанавливает, что распределение суммы независимых случайных величин стремится к нормальному закону при условии, что число слагаемых велико и ни одно из них не выделяется по величине в сравнении с остальными. Очевидно, что оба эти условия справедливы для гидрометеоров (дождевых капель), откуда следует, что синфазная и квадратурная составляющая распределены по нормальному закону с нулевым средним.

Поэтому на входе приемника происходит сложение двух векторов в каждой из квадратур комплексного сигнала: вектора сигнала эхо-сигнала дождя  $\bar{\xi}$  и вектора сигнала теплового шума приемника  $\bar{n}$ . Тогда обрабатывается вектор сигнала  $\bar{\eta} = \bar{\xi} + \bar{n}$ , который пройдя частотно-избирательные цепи (что учтено в (5)), поступает на аналого-цифровой преобразователь, где подвергается дискретизации по времени и квантованию по уровню.

В итоге получается суммарный вектор  $\bar{\delta} = \bar{\xi} + \bar{n} + \bar{\zeta}$ , из которого и надлежит выделить информативную составляющую вектор  $\bar{\xi}$ .

Поскольку тепловой шум и эхо-сигнал дождя имеют различную природу, то координаты векторов  $\bar{\xi}$  и  $\bar{n}$  не коррелированы. С другой стороны вектор  $\bar{\zeta}$  статистически связан с вектором,  $\bar{\eta} = \bar{\xi} + \bar{n}$  так как получается из него с помощью нелинейного преобразования. В этом случае, следуя теореме дисперсий [12, 13]:

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2\sum_{i<j} K_{ij}; \quad (12)$$

И, переходя к системе обозначений данной статьи, можем записать:

$$\bar{D}_{\delta} = \bar{D}_{\xi} + \bar{D}_{\bar{n}} + \bar{D}_{\bar{\zeta}} + 2K_{\bar{\zeta},\bar{\xi}} + 2K_{\bar{\zeta},\bar{n}}. \quad (13)$$

Видим, что из выражения (13) следует следующее очевидное соотношение, позволяющее вычислить искомую информативную физическую величину  $\bar{P}_{\xi} = \bar{D}_{\xi}$ :

$$\bar{P}_{\xi} = \bar{D}_{\xi} = \bar{D}_{\delta} - \bar{D}_{\bar{n}} - \bar{D}_{\bar{\zeta}} - 2K_{\bar{\zeta},\bar{\xi}} - 2K_{\bar{\zeta},\bar{n}} = \bar{D}_{\delta} - \bar{D}_{\bar{n}} - \bar{D}_{\bar{\zeta}} - 2K_{\bar{\zeta},\bar{\eta}}. \quad (14)$$

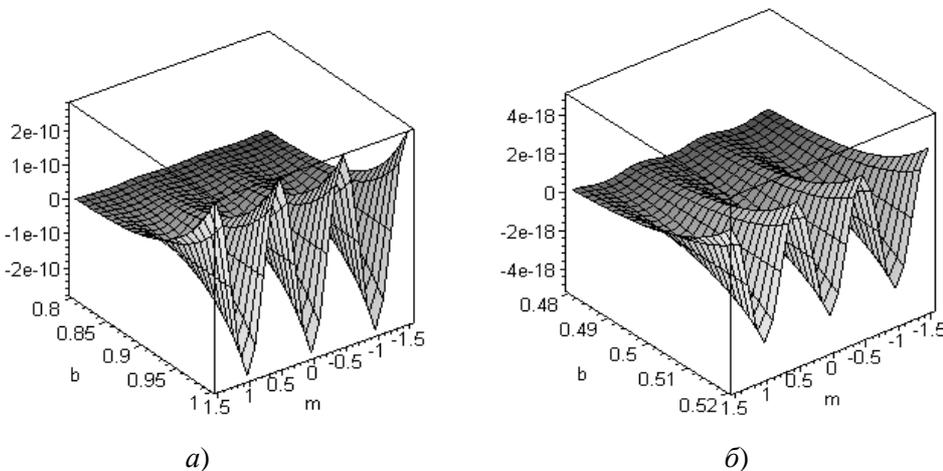
В работе [14] получено выражение для вектора второго начального момента шума квантования  $\bar{D}_{\bar{\zeta}}$ :

$$\bar{D}_{\bar{\zeta}} = (D_{\zeta_1}, D_{\zeta_2}) = \left( \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^2}{(\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} nm_1\right); \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^2}{(\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} nm_2\right) \right). \quad (15)$$

Второе слагаемое в формуле (15), как следует из (14), приводит к смещению оценки вектора  $\hat{P}_{\xi} = \hat{D}_{\xi}$  при выполнении оценки даже по выборочному алгоритму оценки второго центрального момента (учитывая предварительно вычисленные оценки  $\hat{m}_1$  и  $\hat{m}_2$  первого момента, выполненные по выборочному алгоритму первых моментов).

Рассмотрим результат (10) с учетом формулировки радиофизической задачи. Известно, что реальное значение проводимости дождевых капель  $\sigma$  достаточно мало. Например (см. [15, 16]),  $\sigma = 0,38 \cdot 10^{-5}$  см·м<sup>-1</sup> для тщательно очищенной воды,  $\sigma = 5 \cdot 10^{-4} - 100 \cdot 10^{-4}$  см·м<sup>-1</sup> – для дождевой воды и линейно зависит от ее минерализации (см. [16]) (т. е. от загрязнения атмосферной влаги промышленными выбросами). Сначала из численного решения уравнений вида (5), учитывая априорно известный вектор  $\bar{B} = (N_0, \alpha, \beta)$  и коэффициент  $A$ , получается выборочное значение  $K_w$ . Затем, по ансамблю выборочных значений  $K_w$  строится матрица оценок  $\|\hat{K}_w(\lambda_i)\|$ . И, наконец, по формулам (1)–(4) и уточненным формулам Дебая (см. [5, 6]), получаем оценки  $\|\hat{\epsilon}\|$  и  $\|\hat{\sigma}\|$  для решения указанных во введении радиофизических и электрохимических задач.

Информацию о  $K_w$  несет мощность принятого сигнала  $P(r_0)$ . Но,  $P(r_0)$  прямо пропорциональна  $\sigma_{\xi}^2$  (с точностью до коэффициента  $A$  из (5)). Поэтому при  $m_1 \neq 0$  и  $m_2 \neq 0$ , как следует из (14), появляется смещение вектора  $\bar{D}_{\xi}$  принимаемых сигналов на основании теоремы сложения дисперсий, которое зависит от вторых слагаемых в формуле (14). Тогда, если не применить алгоритм (14), то оценки  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\sigma}$  также становятся смещенными и несостоятельными. На рис. изображено второе слагаемое в формуле (15), которое есть функция  $\beta$  и  $m_j$ .



**Зависимости второго слагаемого в выражениях  $\bar{D} = (D_1, D_2)$  как функции  $\beta = \Delta^2 / \sigma_{\eta}^2$ , ( $\beta = b$ ) и  $m_j$  для формулы (14) при  $\Delta = 1$  (отражающие доминанты есть).**

На рисунке: *a* – зависимость получена при  $\beta = 0,8 - 1$ , *b* – при  $\beta = 0,48 - 0,52$ .

**Основные выводы**

Оценки  $\hat{D}_{\xi_i}$   $i = 1, 2, \dots, n$  формируются из выборок мощности  $P(r_{0i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (5). Где  $n$  – количество анализируемых сканов при фиксированной длительности импульса и длине волны зондирующего импульса при секторном сканировании. Квадрат амплитуды эхо-сигнала от капельной структуры, центр импульсного объема которой расположен на удалении  $r_{0j}$ , имеет вид:

$$x_i = \frac{P(r_{0i})}{A}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{16}$$

Из [12] известно, что оценки первого и второго центрального момента формируются в виде выборочных алгоритмов:

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \text{sgn}(\sqrt{x'_{ij}}) \right) \sqrt{x'_{ij}}, j=1,2; \quad (17)$$

$$\hat{D}_{\eta_j} = \sigma_{\eta_j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \left( \text{sgn}(\sqrt{x'_{ij}}) \right) \sqrt{x'_{ij}} - \hat{m}_j \right)^2, j=1,2, \quad (18)$$

где  $\text{sgn}(\sqrt{x'_{ij}})$  – алгоритм определения знака амплитуды эхо-сигнала;  $\sqrt{x'_{ij}}$  – модуль амплитуды эхо-сигнала.

Возвращаясь к формулировке четвертого абзаца предыдущего раздела и учитывая строгое доказательство центрированности случайного вектора эхо-сигнала, отраженного от дождя сделанное в [1] не трудно видеть, что для того, чтобы оценка  $D_\delta$  стала несмещенной, величину оценки  $m_j$  мы вынуждены формировать (копить) когерентно в каждом из квадратурных каналов по алгоритму (17). Вычисление оценки  $\hat{D}_{\eta_j}$  в каждом из квадратурных каналов по выборочному алгоритму второго центрального момента все равно оставит ее смещенной, поскольку, при выполнении операции квантования, добавляется смещение этой оценки в виде второго слагаемого в выражении (15).

В когерентной измерительной системе (см. [17]) знак величины (амплитуды сигнала)  $\sqrt{x'_{ij}}$  всегда определяется. Из [17] известно, что (18) это некогерентное накопление выборок (при возведении в квадрат теряется информация о знаке). Из [17] известно, что выигрыш сигнал/шум при некогерентном накоплении  $d_{\text{вых}} = \sigma_{\xi_{\text{вых}}}^2 / \sigma_{\text{швых}}^2 \sim \sqrt{N}$ . Выигрыш при когерентном накоплении  $d_{\text{вых}j} = (\hat{m}_j)^2 / \sigma_{\text{швых}}^2 \sim N$ . По этой причине для формирования оценки в соответствии с (17) объем выборки требуется меньший, чем при формировании оценки (18) при совпадающих дисперсиях оценок. Подставляя в (14) выражение для координаты (15) и учитывая то, что  $m_j \approx \hat{m}_j$  перепишем (14) в следующем виде:

$$\hat{P}_{\xi_j} = \hat{D}_{\xi_j} = \hat{D}_{\delta_j} - \hat{D}_{\eta_j} - \left( \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^2}{(\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \sigma_{\eta_j}^2 n^2}{\Delta^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n \hat{m}_j\right) + 2 \sum_{i < j} \hat{K}_{\eta_i \xi_j} \right). \quad (19)$$

Из [2, 3, 18] известно, что диапазон изменения  $d = \sigma_{\xi_{\text{вых}}}^2 / \sigma_{\text{швых}}^2$  имеет место от значений  $\sigma_{\xi}^2$ , когда эхо от капель «спрятано» в шуме  $\sigma_{\text{ш}}^2$ , до значений, когда  $\sigma_{\xi}^2$  может «занимать» весь динамический диапазон. Скорость сходимости оценки  $\hat{P}_{\xi_i}$  определяется величиной  $d$ . Здесь оценки  $\hat{D}_{\xi_i}$  требуют такие объемы выборок, чтобы оценка  $|\hat{K}_w|^2$ , лежащая в пределах от 0,8312 до 0,9340 была сформирована с наперед заданной точностью. При этом формирование  $|\hat{K}_w|^2$  не должно противоречить условию физической реализуемости измерения. Под реализуемостью следует понимать отсутствия изменений  $l(r_0, K_w, R)$ ,  $K_w$ ,  $R$ ,  $M$  вызванных ветром. Тогда (19) это алгоритм адаптивного оценивания  $\bar{P}_{\xi_i}$  мощности, отраженной от изотропной капельной структуры (дождя), устраняющий также и влияние отражающей доминанты. По этой причине оценки  $\|\hat{\sigma}\|$  и  $\|\hat{\epsilon}\|$  будут состоятельными и несмещенными.

Таким образом, видим, что если не отстроиться от сигнала отражающей доминанты, который при формировании оценки  $\hat{D}_{\xi} = \hat{P}_{\xi}$  накопится когерентно, то смещение оценок  $\hat{D}_{\xi} = \hat{P}_{\xi}$  может полностью исказить результаты радиофизических измерений и не позволить решить предпола-

гаемые радиофизические и электрохимические задачи. Это произойдет по той причине, что  $\hat{m}_j \sim N$ , а  $\hat{D}_{\xi_j} \sim \sqrt{N}$ , где  $N$  – объем выборки

А, поскольку при формировании оценок берутся выборки нескольких импульсных объемов (на интервале времени определяющем физическую реализуемость системы), то несмотря на исчезающе малые значения второго слагаемого в формуле (15), объем выборок столь велик, что сигнал отражающей доминанты в некоторых случаях сместит оценку  $\hat{D}_{\xi_i}$  до значений не позволяющих получить несмещенные оценки  $K_w$ ,  $l(r_0, K_w, \omega)$ ,  $R$  и  $M$  и, соответственно оценки  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\sigma}$  станут не состоятельными.

### Литература

1. Заволокин, В.В. Построение математической модели метео сигналов для когерентно-импульсных РЛС / В.В. Заволокин, В.А. Зубков, Е.В. Чепель // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Радиолокационная техника (РЛТ). – 2008. – Вып. 2. – С. 129–136.
2. Довиак, Р. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения / Р. Довиак, Д. Зрнич. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 511 с.
3. Степаненко, В.Д. Радиолокация в метеорологии (Радиометеорология) / В.Д. Степаненко – Л.: Гидрометеиздат, 1966. – 351 с.
4. Ландсберг, Г.С. Элементарный учебник физики. Т. 2. Электричество и магнетизм / Г.С. Ландсберг. – М.: Наука, 1985. – 479 с.
5. Садовский И.Н., Кузьмин А.В., Шарков Е.А., Сазонов Д.С., Пашинов Е.В., Ашеко А.А., Батулин С.А. Анализ моделей диэлектрической проницаемости водной среды, используемых в задачах дистанционного зондирования акваторий / И.Н. Садовский, А.В. Кузьмин, Е.А. Шарков и др. // Препринт Пр-2172. – М.: ИКИ РАН, 2013. – 60 с.
6. Пенской, А.С. Волны в волноводах при наличии тонких пленок полярных диэлектриков: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / А.С. Пенской. – Волгоград, 2016. – 111 с.
7. Marshall, J.S. The distribution of raindrops with size / J.S. Marshall, W. Palmer // J. Meteorol. – 1948. – Vol. 5. – С. 165–166.
8. Шишкин, Н.С. Исследование заряжения капель тумана при наличии коронных разрядов между заряженными крупными каплями / Н.С. Шишкин, Т.А. Першина // Тр. ГГО. – 1973. – Вып. 302. – С. 55–61.
9. Сталевич, Д.Д. Изменение числа сближения капель дождя в процессе выпадения осадков / Д.Д. Сталевич, Т.С. Учеваткина // Труды ордена красного знамени главной геофизической обсерватории им. А.И. Воейкова (ГГО). Физика облаков и активных воздействий. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – Вып. 420. – С. 3–14.
10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
11. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
12. Пугачев, В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.
13. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
14. Математическая модель шума квантования сигналов, отраженных от протяженных пространственных помех / Б.М. Балясников, М.С. Ворона, В.В. Заволокин и др. // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. – 2011. – Вып. 633. – Ч. 2. – С. 131–138.
15. Мучник, В.М. Физика грозы / В.М. Мучник. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 351 р.
16. Бондаренко Т.Г. Некоторые данные по электропроводности атмосферных осадков / Т.Г. Бондаренко // Труды ГГО. – 1962. – Вып. 134. – С. 33–37.
17. Ширман, Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
18. Бин, Б.Р. Радиометеорология / Б.Р. Бин, Е.Дж. Даттон. – Л.: Гидрометеиздат, 1971. – 362 с.

*Поступила в редакцию 7 сентября 2019 г.*

## EFFECTS OF MEASUREMENT AND QUANTIZATION CONDITIONS ON INFORMATIVE PARAMETERS OF RAINDROP ECHO SIGNAL

V.V. Zavolokin, V.I. Tambovtsev

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: zavolokinvv@susu.ru

The physical and mathematical model of the echo signal reflected from cloud-rain systems was presented and substantiated. The algorithms for obtaining unbiased, efficient and consistent estimates of the first and second initial moments of raindrop echo signal were proposed. The estimation schemes of physical parameters of raindrop were proposed based on the reflected signal power estimation, such as induced dipole moment of a raindrop, attenuation during signal propagation along the spherical coordinate of the distance back and forth, and the parameters of the cloud-rain system, such as rain intensity, water content of the cloud-rain system. The correlation between the estimation of dielectric permittivity and conductivity of raindrops was shown. The relationship between the induced dipole moment of raindrops and the estimates of the dielectric permittivity and conductivity of raindrops is shown. This relationship is expressed through the relationship between the optical and electrical characteristics of raindrops. These relations make it possible to create and solve systems of algebraic equations for statistical estimates of the dielectric permittivity and conductivity of raindrops, based on previously performed estimates of the induced dipole moment of raindrops, which are obtained on the basis of statistical algorithms for generating consistent and unbiased estimates of the first and second moments of the rain echo. The relationship of estimation formation with measurement conditions that depend on the time of year and day is shown. The proposed statistical algorithms allow us to eliminate the bias of these estimates of physical parameters caused by three components: thermal noise of the receiver, echo signals received on the side lobes of the antenna and quantization noise. This makes these estimates not only unbiased, but also physically realizable. The formation of estimates based on the proposed algorithms assumes a truly coherent measurement system.

*Keywords:* signal power estimation of meteorological echo; numerical solution of meteorological goal equation; dipole moment of a raindrop; conductivity and dielectric permittivity of a raindrop; quantization noise; radiophysical and electrochemical problems.

### References

1. Zavolokin V.V., Zubkov V.A., Chepel' E.V. Postroenie matematicheskoy modeli meteo signalov dlya kogerentno-impul'snykh RLS (Mathematical Model Construction of Meteorological Signals for Coherent Pulse Radar). *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Radiolokatsionnaya tekhnika (RLT)*, 2008, Iss. 2., pp. 129–136. (in Russ.).
2. Doviak R.J., Zrnic D.S. *Doppler Radar and Weather Observations*. Orlando, San Diego, San Francisco, New York, London, Toronto, Montreal, Sydney, Tokyo, São Paulo: Academic Press Inc., 458 p.
3. Stepanenko V.D. *Radiolokatsiya v meteorologii (Radiometeorologiya)* (Radiolocation in Meteorology (Radiometeorology)). Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1966, 351 p. (in Russ.).
4. Landsberg G.S. *Elementarnyy uchebnyk fiziki. T. 2. Elektrichestvo i magnetizm* (Elementary Textbook of Physics. Vol. 2. Electricity and Magnetism), Moscow, Nauka Publ., 1985, 479 p. (in Russ.).
5. Sadvoskiy I.N., Kuz'min A.V., Sharkov E.A., Sazonov D.S., Pashinov E.V., Asheko A.A., Batulin S.A. Analiz modeley dielektricheskoy pronitsaemosti vodnoy sredy, ispol'zuemykh v zadachakh distantsionnogo zondirovaniya akvatorii. Preprint Pr-2172 (Analysis of Dielectric Permittivity Models of Aquatic Environment Used in Water Areas Sounding. Preprint Pr-2172). Moscow, IKI RAN Publ., 2013, 60 p. (in Russ.).

6. Penskoy A.S. *Volny v volnovodakh pri nalichii tonkikh plenok polyarnykh dielektrikov : dissertatsiya kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* (Waves in Waveguides in Terms of Polar Dielectric Films: Cand. phys. and math. sci. diss). Volgograd, 2016, 111 p. (in Russ.).
7. Marshall J.S., Palmer W. The Distribution of Raindrops with Size. *J. Meteorol.*, 1948, Vol. 5, pp. 165–166.
8. Shishkin N.S., Pershina T.A. Issledovanie zaryazheniya kapel' tumana pri nalichii koronnykh razryadov mezhdru zaryazhennymi krupnymi kaplyami (Research on Mist Droplets Charging in Terms of Corona Discharges among Charged Large Droplets). *Tr. GGO*, 1973, Iss. 302, pp. 55–61. (in Russ.).
9. Stalevich D.D., Uchevatkina T.S. Izmenenie chisla sbliženiya kapel' dozhdy v protsesse vypadeniya osadkov (Change in Number of Raindrops Convergence during Precipitation). *Trudy ordena krasnogo znamenii glavnoy geofizicheskoy observatorii im. A.I. Voeykova (GGO). Fizika oblakov i aktivnykh vozdeystviy* (Proceedings of the order of the red banner of the main geophysical Observatory. A.I. Voeikov (GGO). Cloud Physics and Active Impacts), Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1979, Iss. 420, pp. 3–14. (in Russ.).
10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* (Tables of Integrals, Sums, Series and Products). Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 1100 p. (in Russ.).
11. Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* (Statistical Radio Engineering). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982, 624 p. (in Russ.).
12. Pugachev V.S. *Teoriya sluchaynykh funktsiy i ee primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* (Theory of Random Process and Its Application to Automatic Control Problems). Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 883 p. (in Russ.).
13. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostey* (Probability Theory). Moscow, Nauka Publ., 1969, 576 p. (in Russ.).
14. Balyasnikov B.M., Vorona M.S., Zavolokin V.V., Korshunov A.Yu., Maksimenko M.D., Odinochenko N.M. Matematicheskaya model' shuma kvantovaniya signalov, otrazhennykh ot protyazhennykh prostranstvennykh pomekh (A Mathematical model of the quantization of the signals reflected from expended spatial interference). *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhayskogo* (Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy), 2011, Vol. 633, no. 2, pp. 131–138. (in Russ.).
15. Muchnik V.M. *Fizika grozy* (Physics of Thunderstorm). Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1974, 351 p. (in Russ.).
16. Bondarenko T.G. *Nekotorye dannye po elektroprovodnosti atmosferykh osadkov* (Some Data on Electrical Conductivity of Precipitation). *Trudy GGO*, 1962, Iss. 134, pp. 33–37. (in Russ.).
17. Shirman Ya.D., Manzhos V.N. *Teoriya i tekhnika obrabotki radiolokatsionnoy informatsii na fone pomekh* (Theory and Processing Technology of Radar Data in Terms of Background Noise). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1981, 416 p. (in Russ.).
18. Bean B.R., Dutton E.J. *Radio Meteorology*. Washington, U.S. Govt. Print. Office, 1966, 435 p.

*Received September 7, 2019*

# Персоналии

## ЛЕВ МИХАЙЛОВИЧ БЕЛЯКОВ. К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

20 ноября 2019 года исполняется 85 лет со дня рождения Льва Михайловича Белякова, квалифицированного математика и замечательного педагога, проработавшего в ЧПИ–ЧГТУ–ЮУрГУ почти сорок лет (с 1957 по 1996) и внесшего значительный вклад в дело организации и становления математического образования в нашем вузе. Лев Михайлович родился 20 ноября 1934 года в городе Челябинске. С детства демонстрировал незаурядные математические способности и, одновременно, склонность к физическому труду, рисованию, чтению, музыке. Из-за травмы, полученной по неосторожности, с шести лет много времени проводил в больницах, пока не зарубцевалась часть ампутированной ноги. Поэтому с раннего детства много читал. Отец, вернувшийся с фронта, привозил ему книги «мешками». С тех пор Лев Михайлович начал собирать книги по математике, искусству, философии. Он предпочитал «Литературные памятники», «Жизнь замечательных людей», «Биографическая серия» и т. д. Любимыми (настольными) книгами со студенческих лет были «Сочинения Козьмы Пруtkова» и «Мои воспоминания» Алексея Николаевича Крылова – академика, математика, кораблестроителя, механика. Многими историями из этой книги он делился с друзьями, студентами, коллегами. Эта книга, видимо, помогала его становлению в качестве молодого руководителя одной из крупнейших кафедр института (ЧПИ, около 60 человек). В последние (перестроечные) годы часто цитировал «Воспоминания» Н.В. Тимофеева-Ресовского.



Закончив в 1952 году среднюю школу № 27, Лев Михайлович поехал поступать в Московский государственный университет на механико-математический факультет. Математику сдавал А.Н. Колмогорову, получил пятёрки, но политически не выдержанное сочинение о войне 1812 года не позволило ему стать студентом МГУ. Мысли и идеи Андрея Николаевича Колмогорова оказали заметное влияние на его становление как математика.

Вернувшись в Челябинск, за три дня сдал вступительные экзамены и был принят на физико-математический факультет Челябинского педагогического института.

Учеба давалась Льву Михайловичу легко, без особых усилий постигал он азы науки. В учебе демонстрировал поразительную целеустремленность. Уже на первом курсе Л.М. Беляков посещал кружок математического анализа, который вел Степан Иванович Дергачев – образованный математик и педагог, человек добрый и немного своеобразный, еще не до конца расставшийся с военным прошлым. На третьем курсе Лева Беляков стал посещать кружок по теории функций, который вел Иван Яковлевич Барков – человек, сыгравший решающую роль в его судьбе<sup>1</sup>.

Лев Михайлович был активным участником этого кружка и еще в студенческие годы (1956) был награжден грамотой Министерства высшего образования СССР за научную работу «Сингулярный интеграл Валле–Пуассена для функций двух переменных».

Помимо учебы Л.М. Беляков, как уже было отмечено выше, проявлял интерес к музыке, литературе, неплохо рисовал. Еще когда он учился в школе, посещал занятия художественной студии при Дворце культуры ЧТЗ.

Эти его «внематематические» потенции не остались незамеченными в институте, и он стал ответственным за выпуск стенгазеты факультета.

После окончания института Л.М. Беляков был распределен на работу в школу Златоуста-20. В посёлке не хватало учителей, учеников было мало, и Лев Михайлович, помимо математики, вёл

<sup>1</sup> В конце пятидесятых И.Я. Барков вместе с Николаем Аристарховичем Сенчищевым организовали для выпускников физико-математического факультета ЧГПИ семинар по функциональному анализу. Участники семинара изучали книги признанного специалиста по функциональному анализу, ученика Г.М. Фихтенгольца, Б.З. Вулиха, работы Л.В. Канторовича и других математиков, специалистов по функциональному анализу. И.Я. Барков много внимания уделял слушателям семинара, рекомендовал им темы для рефератов и докладов и настоятельно нацеливал участников на продолжение образования в аспирантуре.

## Персоналии

---

физику, черчение, рисование и даже труд (столярное и слесарное дело). Он с детства любил возиться с деревом, столярничал, слесарничал и здесь ему это пригодилось.

В Златоусте-20 Л.М. Беляков проработал год. В 1957 он вернулся в Челябинск и был принят на должность ассистента кафедры высшей математики ЧПИ.

В этом году покинул должность заведующего кафедрой высшей математики ЧПИ Н.А. Сенчищев. Он исполнял эти обязанности с 1950 года, параллельно с основной работой в ЧИМЭСХе и педагогическом институте. Кафедрой стал заведовать Б.Г. Литвиненко<sup>1</sup>, один из создателей филиала Челябинского политехнического института при ЧМЗ. Учебная нагрузка была, по современным понятиям «бешенная» – около 28 часов в неделю, при этом зарплата ассистента составляла 1050 руб.<sup>2</sup> и почти никаких подработок – лишь летом можно было заработать до 1500–2000 руб., и эти деньги представлялись целым состоянием.

В 1958 году Б.Г. Литвиненко сменил И.Н. Гурьянов – кандидат физико-математических наук, до этого работавший в Киргизском государственном университете. Он много внимания уделял научному росту сотрудников кафедры, в частности, способствуя их поступлению в аспирантуру.

На этой волне, в 1959 г., Лев Михайлович поступает в аспирантуру на кафедру математического анализа Казанского государственного университета (этой кафедрой заведовал известный математик, д.ф.-м.н., проф. Б.М. Гагаев). Но проучился Л.М. Беляков в очной аспирантуре только один год – вынужден был уйти по семейным обстоятельствам. Он продолжил обучение уже в заочной аспирантуре, совмещая работу над диссертацией с обязанностями ассистента, старшего преподавателя, а позднее и заведующего кафедрой.

Диссертацию на тему «Приближенное решение и нахождение собственных значений некоторых функциональных уравнений с операторами, мероморфно зависящими от параметра» Лев Михайлович защитил под руководством профессора Б.М. Гагаева в 1968 году в совете Казанского государственного университета. Звание доцента было присвоено Л.М. Белякову в 1971 г.

В связи с ростом численности сотрудников кафедры и расширением сферы их преподавательской деятельности общеполитическую кафедру высшей математики в 1963 году делят на две: кафедру высшей математики № 1 и кафедру высшей математики № 2. Заведующим первой кафедрой становится доцент А.Д. Кацман, второй – старший преподаватель В.А. Лезин.

В 1965 году Льва Михайловича Белякова избирают по конкурсу на должность заведующего кафедрой высшей математики № 2, в которой он проработал бессменно 22 года – вплоть до 1987 года.

Здесь проявилась еще одна сторона его дарования – выдающиеся организаторские способности. Л.М. Беляков сосредоточил основные усилия на активизации и совершенствовании методической и научной деятельности сотрудников кафедры. Эффективным и естественным путем решения поставленной задачи было привлечение молодых выпускников ведущих вузов страны, и Лев Михайлович с этой задачей справился – в короткий срок руководимая Л.М. Беляковым кафедра пополнилась хорошо образованными специалистами, способными решать стоящие перед ней учебно-методические задачи.

Под его руководством активизировалась научная деятельность в разных областях математики. Первая в Челябинске (за всю историю его существования) математическая диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук была защищена сотрудником кафедры высшей математики № 2 С.И. Пинчуком – одним из ведущих специалистов в области комплексного анализа.

Не менее значительны были и достижения кафедры в области педагогической и методической деятельности. Приоритет в использовании новых технологий в обучении математике принадлежит сотрудникам кафедры № 2. Они активно использовали в своей работе классы «Репетитор» (методическая новинка 1964 г.!), системы «Диалог» и «Фотон», а также другие технические средства и методы активизации познавательной деятельности студентов. Они же были инициаторами внедрения компьютерных и информационных технологий в учебный процесс, первопроходцами в области компьютерного тестирования.

---

<sup>1</sup> Блестящий методист и педагог, он вел методический семинар кафедры до 80-х годов, помогая в работе нескольким поколениям молодых преподавателей

<sup>2</sup> После реформы 1961 г. – 105 рублей.

Зав. кафедрой высшей математики № 2 Л.М. Беляков стал первым представителем высших учебных заведений Урала в научно-методическом Совете по математике Госкомвуза России. Благодаря его усилиям по совершенствованию методической работы кафедры, дважды за историю ее существования на базе кафедры проводились выездные заседания НМС по математике Госкомвуза России с целью пропаганды ее методического опыта среди математических кафедр вузов России. Лев Михайлович был членом научно-методического Совета по математике при Минвузе СССР (впоследствии – Минобрнауки России) с 1979 по 1992 год.

Л.М. Беляков был инициатором создания в ЧПИ научно-методического Совета по математике, призванного организовывать и направлять деятельность всех математических кафедр вуза, он же стал его первым председателем.

Заслуги Л.М. Белякова в области методической и учебной работы были высоко оценены. В 1973 году одним из первых вузовских работников в Челябинске Лев Михайлович был награжден<sup>1</sup> Почётным знаком «За отличные успехи в области высшего образования СССР». А в 1981 году он был удостоен ордена «Знак Почёта».

В 1987 году Л.М. Беляков, по не зависящим от него причинам, покинул пост заведующего кафедрой и вплоть до 1996 года работал на кафедре высшей математики № 2 в должности профессора.

В 1996 году Лев Михайлович был переведен на должность профессора кафедры математического анализа Челябинского государственного педагогического университета. Здесь, с сентября 1998 года он возглавил объединённую кафедру алгебры и геометрии ЧГПУ. За короткое время сплотил коллектив, оснастил кафедру новейшим информационным оборудованием, активизировал учебную и методическую работу кафедры, реанимировал работу методического семинара.

На этой кафедре он и проработал до своей кончины в 2002 году.

Лев Михайлович удостоен почетных званий Ветеран ЧПИ и Ветеран труда.

Лев Михайлович Беляков был разносторонне образованным человеком. Его математические наклонности и педагогические устремления гармонично сочетались с общекультурными. Значительную часть собранной им библиотеки занимают альбомы картин выдающихся художников и музеев мира. Трудно сказать, кому из художников он отдавал предпочтение. Ему явно нравились картины Маковского Константина Егоровича (их было несколько братьев). Копия портрета княгини Волконской, этого художника, висит в его кабинете.

Лев Михайлович очень любил музыку. Обожал Ф.И. Шаляпина. Пластинки, записи, диски с его голосом, а также книги о нём собирал много лет. Сам часто рисовал его портреты карандашом. В последние годы жизни подготовил холст и хотел скопировать картину К.А. Коровина, где Ф.И. Шаляпин изображён сидящим за столом, но успел сделать только карандашный набросок.

Из современных певцов любил слушать Б.Т. Штоколова, Р. Ибрагимов, В. Высоцкого, А. Вертинского, Э. Пьеху. К великим актёрам относил И. Смоктуновского, особенно ему нравились в его исполнении стихи А.С. Пушкина.

Занимался кино- и видеосъемкой, делал прекрасные фотопортреты своих детей и внуков. Был не чужд спорту – волейбол, велосипед и лыжи до последних дней входили в круг его интересов.

Л.М. Беляков был заядлым автомобилистом, аккуратно и уверенно водил машину, и всегда приходил на помощь «безлошадным» коллегам и друзьям, когда у тех возникала потребность что-нибудь перевезти или куда-нибудь доехать.

Лев Михайлович был тверд в своих убеждениях и постоянен в привязанностях. Не любил шумных компаний и многолюдных мест. Он был сдержан в проявлении эмоций, с уважением относился к старшим, с энтузиазмом и любовью делился с младшими.

Таким запомнился Лев Михайлович его коллегам, друзьям и студентам.

**В.И. Заляпин, А.Б. Самаров**

---

<sup>1</sup> Этим знаком награждались преподаватели высших учебных заведений Советского Союза, имеющие учёные степени и звания (как правило, доктор наук, профессор) за особые заслуги в области высшего образования, подготовку высококвалифицированных кадров и многолетнюю (не менее 15 лет) работу в вузах страны.

## СЕРГЕЙ ЮРЬЕВИЧ ГУРЕВИЧ. К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

6 февраля 2020 года исполнится 75 лет со дня рождения и 49 лет с момента начала трудовой деятельности доктора физико-математических наук, профессора кафедры оптоинформатики физического факультета Института естественных и технических наук ЮУрГУ Сергея Юрьевича Гуревича.

Научную деятельность Сергей Юрьевич начал еще на старших курсах во время учебы на специальности «Физико-химические исследования металлургических процессов» в Челябинском политехническом институте под руководством доктора технических наук, профессора Владимира Александровича Кожеурова и доктора технических наук, профессора Геннадия Георгиевича Михайлова.

В 1967 г. окончил с отличием Челябинский политехнический институт и в этом же году был зачислен в аспирантуру, которую окончил в 1970 г. с защитой кандидатской диссертации в срок аспирантской подготовки. С 16 ноября 1970 года начался непрерывный 49-летний стаж работы С.Ю. Гуревича в Челябинском политехническом институте (сейчас ЮУрГУ).

С 1970 г. и до 2019 г. работал в ЮУрГУ старшим преподавателем, доцентом, профессором на кафедре «Физика № 2», которая затем была переименована в кафедру общей и экспериментальной физики, и на кафедре оптоинформатики. С 1983 по 2019 – заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики ЧПИ–ЧГТУ–ЮУрГУ. С 1995 по 1998 гг. работал деканом автоматомеханического, затем механико-технологического факультета, с 1998 по 2006 гг. – проректор ЮУрГУ по учебной работе. В 1995 году Сергей Юрьевич защищает докторскую диссертацию «Основы теории и практического применения высокотемпературного ультразвукового контроля ферромагнитных металлоизделий».

Являясь крупным учёным в области физики магнитных явлений, создал фундаментальную теорию взаимодействия импульсных лазерных, электромагнитных и акустических полей в ферромагнитных металлах, находящихся при температуре магнитного фазового перехода. С.Ю. Гуревич является автором научного открытия «Закономерность взаимного преобразования электромагнитных и упругих волн в ферромагнетиках» (диплом № 226) и зарегистрированной научной гипотезы «Гипотеза о зонах повышенной электромагнитной сейсмоактивности» (свидетельство № А-300). Им созданы физические основы высокотемпературных и высокоскоростных методов и средств бесконтактного акустического контроля качества металлоизделий.

Он успешно руководит созданной по его инициативе вузовско-академической лабораторией акустики металлов, которая выполняла научные работы по программам СЭВ, ГКНТ СССР, АН СССР, РФФИ, Минобрнауки РФ. Участник ВДНХ СССР (бронзовая медаль), а также международных научно-технических выставок в Варшаве (1988) и Брно (1989).

С.Ю. Гуревич – автор более 220 научных и учебных публикаций, 24 авторских свидетельств СССР и патентов РФ; опубликовал пять научных монографий, в том числе монографию «Теория физических полей» в 3-х томах, учебное пособие «Физика» с грифом Минобрнауки РФ в двух томах, имеет европейский и российский сертификаты эксперта высшей категории по акустическим методам контроля качества металлопродукции. Подготовил одного доктора и двух кандидатов наук, руководит научными работами по грантам РФФИ и Минобрнауки РФ.

С.Ю. Гуревич является членом редакционной коллегии журнала «Дефектоскопия» Уральского отделения РАН, а с 2001 по 2013 гг. также являлся членом редакционной коллегии Вестника ЮУрГУ, серии «Математика. Физика. Химия» (с 2009 г. – «Математика. Механика. Физика»).

За многолетний добросовестный труд С.Ю. Гуревичу присвоено почетное звание «Заслуженный работник высшей школы» (1998), он награжден орденом Дружбы (2004), медалями и почетной грамотой губернатора Челябинской области.



Говорит Шахин Евгений Леонидович, доцент кафедры оптоинформатики: «Немного о личном – знаю Сергея Юрьевича более пятидесяти лет. С гордостью для себя считаю его наставником – ученым, педагогом, воспитателем молодежи. От своего имени и от имени многих коллег, знающих Сергея Юрьевича, желаю ему хорошего здоровья, неиссякаемой творческой энергии, доброты и любви друзей, родных и близких. Спасибо за то, что ты есть, дорогой Сережа!»

Шульгинов Александр Анатольевич – доцент кафедры оптоинформатики: «Я благодарен Сергею Юрьевичу за то, что он так щедро делился и продолжает делиться своим опытом учебной, научной и административной работы в вузе».

Коллеги и друзья сердечно поздравляют Сергея Юрьевича с семидесятипятилетием и желают ему дальнейших успехов в науке, преподавании и личной жизни.

### **Литература**

1. Комаров, В.А. Теория физических полей Т. 1: Электромагнитное поле / В.А. Комаров, В.Ф. Мужичкий, С.Ю. Гуревич. – Челябинск; Ижевск: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 210 с.
2. Комаров, В.А. Теория физических полей: Основы неразрушающих методов измерения и оценки физико-механических свойств материалов и изделий Т. 2: Акустическое поле / В.А. Комаров, В.Ф. Мужичкий, С.Ю. Гуревич. – Челябинск; Ижевск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 300 с.
3. Комаров, В.А. Теория физических полей: Основы неразрушающих методов измерения и оценки физико-механических свойств материалов и изделий Т. 3: Связанные поля / В.А. Комаров, В.Ф. Мужичкий, С.Ю. Гуревич. – Челябинск; Ижевск: Изд-во ЮУрГУ, 2000. – 627 с.
4. Электромагнитное возбуждение звука в металлах / А.Н. Васильев, В.Д. Бучельников, С.Ю. Гуревич и др. – Челябинск; М.: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 338 с.
5. Гуревич, С.Ю. Краткий курс физики. Ч. 1: учеб. пособие для бакалавров / С.Ю. Гуревич. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – 182 с.
6. Гуревич, С.Ю. Краткий курс физики. Ч. 2: учеб. пособие для бакалавров / С.Ю. Гуревич. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – 233 с.

**Е.Л. Шахин, А.А. Шульгинов, Е.В. Голубев**

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 12, № 1  
2020

16+

Редактор: *Н.Н. Егорьева*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 24.01.2020. Дата выхода в свет 31.01.2020.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 9,30.

Тираж 500 экз. Заказ 13/28. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект им. В.И. Ленина, 76.