

# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2020  
Т. 12, № 2**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

## «МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

### Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИННА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

2020

Vol. 12, no. 2

SERIES

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

**S.A. Zagrebina**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**E.V. Golubev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.P. Beskachko**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.I. Zalyapin**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**Yu.M. Kovalev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

**A.V. Bogomolov**, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

**M.M. Brzhezinskaya**, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany

**G.L. Brovko**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**V.D. Buchelnikov**, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**D. Guidetti**, University of Bologna, Bologna, Italy

**V.I. Zhukovsky**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**I.V. Zalyapin**, University of Nevada, Reno, United States of America

**S.V. Zelik**, University of Surrey, Guildford, United Kingdom

**A.I. Korotkii**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

**Jaewan Kim**, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

**Kisik Kim**, INHA-University, Incheon, South Korea

**N.D. Kundikova**, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

**V.V. Menshikh**, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

**S.I. Pinchuk**, Indiana University, Bloomington, United States of America

**Y.S. Puzyrev**, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

**N.K. Ravshanov**, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

**L.V. Utkin**, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

**I. Verpoest**, Catholic University, Leuven, Belgium

**V.A. Strauss**, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- ДИЛЬМАН В.Л. Линейные функциональные уравнения в гильбертовых классах функций на простой гладкой кривой ..... 5
- КАРАЧИК В.В. Условия разрешимости задачи Неймана  $N_2$  для полигармонического уравнения в шаре ..... 13
- РОЙТЕНБЕРГ В.Ш. О структуре пространства однородных полиномиальных дифференциальных уравнений на окружности ..... 21

### Физика

- ГУРЕВИЧ С.Ю., ПЕТРОВ Ю.В. Дифракция на цилиндрической полости ультразвуковых волн, возбужденных импульсным лазерным излучением ..... 31
- ЗАВОЛОКИН В.В. Модель шума квантования вектора с ненулевыми математическими ожиданиями ..... 37
- ZAGREBIN M.A., MATYUNINA M.V., SOKOLOVSKIY V.V., BUCHELNIKOV V.D. Structural and Elastic Properties of Fe-Ge Alloys: *ab initio* studies ..... 49
- МАТЮНИНА М.В., БУЧЕЛЬНИКОВ В.Д., ЗАГРЕБИН М.А., СОКОЛОВСКИЙ В.В. Объемная магнитострикция сплавов Fe-Ga: расчет из первых принципов ..... 57

### Персоналии

- Василий Дмитриевич Бучельников. К 65-летию со дня рождения ..... 63

# CONTENTS

## Mathematics

DILMAN V.L. Linear Functional Equations in the Hölder Class Functions on a Simple Smooth Curve.....	5
KARACHIK V.V. Solvability Conditions of the $N_2$ Neumann-type Problem for Polyharmonic Equation in a Ball .....	13
ROITENBERG V.Sh. On the Structure of the Space of Homogeneous Polynomial Differential Equations of a Circle.....	21

## Physics

GUREVICH S.Yu., PETROV Yu.V. Diffraction on the Cylindrical Cavity of Ultrasonic Waves Excited by Pulse Laser Radiation .....	31
ZAVOLOKIN V.V. Noise Model of Quantization of the Vector with Non-Zero Mathematical Expectations .....	37
ZAGREBIN M.A., MATYUNINA M.V., SOKOLOVSKIY V.V., BUCHELNIKOV V.D. Structural and Elastic Properties of Fe-Ge Alloys: <i>ab initio</i> studies.....	49
MATYUNINA M.V., BUCHELNIKOV V.D., ZAGREBIN M.A., SOKOLOVSKIY V.V. Volume Magnetostriction of Fe-Ga Alloys: Calculation from First Principles.....	57

## Personalia

To the 65 <sup>th</sup> Anniversary of Vasilij Buchel'nikov .....	63
---	----

## ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

**В.Л. Дильман**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: diltmanvl@susu.ru

Рассматриваются линейные функциональные уравнения на простых гладких кривых с функцией сдвига, имеющей ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, и неподвижные точки только на концах кривой. Цель статьи – найти условия существования и единственности решения таких уравнений в классах гельдеровских функций с коэффициентами и правыми частями, удовлетворяющими условиям Гельдера. Эти условия получены в зависимости от значений коэффициентов уравнений на концах кривой. Рассматриваются различные особенности решений на концах кривой. Установлены показатели Гельдера для решений. Показаны возможности применения линейных функциональных уравнений к исследованию и решению сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими особенностями.

*Ключевые слова:* сингулярные интегральные уравнения со сдвигом; линейные функциональные уравнения от одной переменной; условия Гельдера.

### Введение

Начиная с уравнения

$$\int_0^1 \ln|\tau - t| \varphi(\tau) d\tau = f(t),$$

решенного в 1922 г. в замкнутой форме Т. Карлеманом [1], интегральные уравнения первого рода с логарифмическими особенностями постоянно привлекали внимание исследователей теории краевых задач аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений. Действительно, интеграл типа Коши, у которого один или оба предела интегрирования переменные, можно трактовать как обобщенное логарифмическое ядро, так как в случае постоянной плотности у интеграла типа Коши ядро является чисто логарифмическим. На этом пути были получены многочисленные результаты, относящиеся к исследованию и решению многих типов уравнений и конкретных уравнений, исследованию свойств интегральных операторов с логарифмическими особенностями в различных функциональных классах и пространствах. Чаще всего рассматривались гельдеровские классы или пространства  $H_\mu$ ,  $\mu \in (0; 1]$  и лебеговские пространства  $L_p$ ,  $p \in [1; \infty)$ . К этой тематике тесно примыкает теория дробного дифференцирования и интегрирования [2]. В качестве весьма общего модельного интегрального уравнения первого рода с «подвижной» логарифмической особенностью в ядре было предложено [3] уравнение вида:

$$A(t) \int_t^{b(t)} \varphi(\tau) d\tau + B(t) \int_\Gamma \varphi(\tau) d\tau \int_{a(\tau)}^\tau \frac{C(\xi)}{\xi - t} d\xi = f(t). \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$ ,  $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ ,  $j \neq k$ ,  $\Gamma_j = [a_j b_j]$ ,  $j = \overline{1, n}$ ; если  $t \in \Gamma_j$ , то  $b(t), \tau, a(\tau) \in \Gamma_j$ ;  $[a_i b_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$  – простая ориентированная кривая на комплексной плоскости с концами  $a_i$  и  $b_i$  (ориентация от  $a_i$  до  $b_i$ ; возможно  $a_i = b_i$ ), а функции  $a$  и  $b$  кусочно-постоянны, то есть постоянны на каждой дуге  $\Gamma_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Уравнение (1) можно трактовать как обобщение уравнения

$$A(t) \int_a^t \varphi(\tau) d\tau + B(t) \int_a^b \ln \frac{|t-\tau|}{b-t} \varphi(\tau) d\tau = f(t),$$

исследованного многими авторами (см. ссылки в [3]).

В связи с теорией краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [4–6] представляет интерес изучение интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями в ядре, одна из которых получается из другой в результате сдвига. Как обобщение уравнения (1) на случай двух «подвижных» логарифмических особенностей, содержащихся в интегральном уравнении, в работе [7] было предложено в качестве модельного уравнение:

$$A_0(t) \int_t^{b(t)} \varphi(\tau) d\tau + A(t) \int_{\alpha_{-1}(t)}^{b(\alpha_{-1}(t))} \varphi(\tau) d\tau + B(t) \int_{\Gamma} \varphi(\tau) d\tau \left( \int_{a(\tau)}^{\tau} \frac{C_0(\xi)}{\xi-t} d\xi + \int_{a(\alpha(\tau))}^{\alpha(\tau)} \frac{C(\xi)}{\xi-t} d\xi \right) = f(t). \quad (2)$$

Здесь  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$ , причем допускается пересечение простых кривых  $\Gamma_j$  в конечном числе точек; функция  $\alpha$  определена на  $\Gamma$ , причем  $\alpha_j = \alpha|_{\Gamma_j}$  – взаимно-однозначное непрерывное отображение дуги  $\Gamma_j$  на себя, не имеющее неподвижных точек, кроме концов дуги (более подробно свойства функции  $\alpha$  будут изложены ниже).

С помощью формулы перестановки порядка интегрирования уравнение (2) приводится к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} A_0(t)\psi(t) + A(t)\psi(\alpha_{-1}(t)) + B(t) \int_{\Gamma} \frac{\theta(\xi)}{\xi-t} d\xi = f(t), \\ C_0(t)\psi(t) + C(t)\psi(\alpha_{-1}(t)) = \theta(t), \\ \psi(t) = \int_t^{b(t)} \varphi(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим два существенно различных случая [7].

**Первый случай.** Определитель системы (3):

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} A_0 & A \\ C_0 & C \end{vmatrix},$$

не является тождественным нулем. Тогда система (3) приводится к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом относительно функции  $\theta$  с последующим решением чисто функционального уравнения системы (3).

**Второй случай.** Пусть  $\Delta(t) \equiv 0$  (случай вырождения). Рассмотрим два варианта. *Первый вариант.* Если  $A \equiv C \equiv 0$ , либо  $A_0 \equiv C_0 \equiv 0$ , уравнение (2) сводится к уравнению (1). Если указанные тождества не имеют места (*второй вариант*), система (3) сводится к системе из характеристического сингулярного интегрального уравнения и функционального уравнения:

$$\begin{cases} A(t)v(t) + B(t) \int_{\Gamma} \frac{C(\tau)v(\tau)}{\tau-t} d\tau = f(t), \\ \Phi_g(\psi)(t) \equiv \psi(\alpha_{-1}(t)) - g(t)\psi(t) = v(t). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $v = \theta/C$ ,  $g = -C_0/C$ .

В любом случае следует исследовать и решать линейные функциональные уравнения из систем (3) и (4). Коэффициенты и правые части этих уравнений, в зависимости от условий исходных задач, принадлежат, как правило, гильбертовским классам (или пространствам)  $H_{\mu}$ ,  $\mu \in (0;1]$  и

лебеговским пространствам  $L_p$ ,  $p \in [1; \infty)$ , а также классам первообразных от функций из этих пространств. В работе будет рассмотрено линейное функциональное уравнение

$$\psi(\alpha(t)) - g(t)\psi(t) = h(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5)$$

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (5) и его обобщениями (ссылки см. в [2, 8]). В работе [8] исследования проводились в классах непрерывных функций. В [2] даны достаточные условия существования единственного решения уравнения (5) в классе  $L_p$ ,  $p \in (1; \infty)$ . В [9] найден критерий непрерывной обратимости оператора  $\Phi_g(\psi)$  в классе непрерывных функций. В [10] найден при некоторых условиях критерий обратимости оператора  $\Phi_g(\psi)$  в классе гильбертовских функций. Целью работы является исследование уравнения (5), когда  $\Gamma = [ab]$  простая ориентированная кривая на комплексной плоскости, нахождения условий единственности решения этого уравнения и нахождения показателя Гельдера для решения (5) в зависимости от этих параметров функций  $g$  и  $h$ .

### Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Рассмотрим линейное функциональное уравнение (5), где  $\Gamma = [ab]$  – простая ориентированная кривая на комплексной плоскости с концами  $a$  и  $b$  (ориентация от  $a$  до  $b$ ; возможно  $a = b$ ).

Класс функций  $\varphi$ , удовлетворяющий условию Гельдера на  $\Gamma$ :

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < K|t_1 - t_2|^\mu, \quad t_1, t_2 \in \Gamma$$

обозначим  $H_\mu^\Gamma(K)$ , или сокращенно,  $H_\mu(K)$  или  $H_\mu$ . Будем писать  $h \in H_\mu(a^*, \nu)$ , если  $h(t)(t-a)^\nu \in H_\mu$ . Аналогично,  $h \in C(a^*, \nu)$ , если  $h(t)(t-a)^\nu \in C$ .

Пусть  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $t \in \Gamma$  – отображение кривой  $\Gamma$  на себя со свойствами:

1.  $\alpha$  – взаимно однозначное непрерывное отображение кривой  $\Gamma$  на себя с сохранением принятой на  $\Gamma$  ориентации.
2. На  $\Gamma$  не существует других неподвижных точек (н.т.), кроме  $a$  и  $b$ .
3. Для всех  $t \in \Gamma$  существует  $\alpha'(t) \neq 0$ , причем  $\alpha' \in H_\theta$  на  $\Gamma$ ,  $\theta \in (0; 1]$ .
4.  $|\alpha'(a)| \neq 1$ ,  $|\alpha'(b)| \neq 1$ .

Будем применять обозначения:  $\alpha_0(t) \equiv t$ ,  $\alpha_1(t) \equiv \alpha(t)$ ,  $\alpha_n(t) \equiv \alpha(\alpha_{n-1}(t))$ ,  $\alpha_{-1}(t)$  – обратное к  $\alpha$  отображение,  $\alpha_{-n}(t) \equiv \alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Очевидно,  $\alpha_n(\alpha_{-n}(t)) \equiv \alpha_{-n}(\alpha_n(t)) \equiv t$ .

Если для всех  $t \in (ab)$   $\alpha(t) \in (at)$ , то точку  $a$  будем называть *притягивающей неподвижной точкой* (п. н. т.).  $\alpha_n(\alpha_{-n}(t)) \equiv \alpha_{-n}(\alpha_n(t)) \equiv t$ . Если для всех  $t \in (ab)$   $\alpha(t) \in (bt)$ , то точку  $b$  будем называть *отталкивающей неподвижной точкой* (о.н.т.). Очевидно, что всегда либо точка  $a$  – п. н. т., а точка  $b$  – о. н. т., либо наоборот,  $a$  – о. н. т., а точка  $b$  – п. н. т.

Всюду в работе полагаем, что  $a$  – п. н. т., а точка  $b$  – о. н. т. В этом случае условие 4 можно заменить на условие:

$$4^*. |\alpha'(a)| < 1, \quad |\alpha'(b)| > 1.$$

Заметим, что все утверждения, относящиеся к о. н. т., следуют из соответствующих утверждения для п. н. т. Поэтому все утверждения будут сформулированы для точки  $a$ .

Пусть  $c \in (ab)$ . Введем обозначение:  $I_n(c) = [\alpha_n(c) \alpha_{n-1}(c)]$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\Gamma = [ab]$  – гладкая в некоторой окрестности точки  $a$  кривая,  $r$  и  $r^*$  – действительные числа, такие что

$$|\alpha'(a)| < r < 1, \quad |\alpha'(a)|^{-1} < r^*.$$

Тогда существуют такая окрестность  $V(a)$  точки  $a$  на кривой  $\Gamma$  и такое натуральное число  $N(N^*)$ , зависящее только от  $r(r^*)$ , что для любых точек  $t_1, t_2 \in V(a)$  и любых целых  $m, n \geq N(m, n \geq N^*)$

$$\begin{aligned} |\alpha_n(t_1) - \alpha_m(t_2)| &< r |\alpha_{n-1}(t_1) - \alpha_{m-1}(t_2)|, \\ |\alpha_{n-1}(t_1) - \alpha_{m-1}(t_2)| &< r^* |\alpha_n(t_1) - \alpha_m(t_2)|; \end{aligned}$$

существуют числа  $K, K_1$  такие, что для любых точек  $t \in V(a)$

$$K(r^*)^{-n} < |\alpha_n(t) - a| < K_1 r^n.$$

Пусть  $t \in I_n(c)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ . Тогда для некоторых постоянных  $K_2 > 0, K_3 > 0$ , не зависящих от  $n$ ,

$$\log_{r^*} \frac{K_2}{|t-a|} < n < \log_{r^{-1}} \frac{K_3}{|t-a|}.$$

Введем обозначение:

$$G_n(t) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{g(\alpha_j(t))}{g(a)}, \quad G_0(t) \equiv 1, \quad G_{-n}(t) = \prod_{j=1}^n \frac{g(b)}{g(\alpha_{-j}(t))}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (6)$$

**Лемма 2.** Пусть  $\Gamma = [ab]$  – гладкая в некоторой окрестности  $[ac]$  точки  $a$  кривая, функция  $g(t) \neq 0, g(t) \in H_\mu, t \in [ac]$ . Тогда последовательность  $\{G_n(t), n = \overline{1, \infty}\}$  равномерно сходится на  $[ac]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(t) = G_a(t) \neq 0, \infty. \quad (7)$$

В частности, если функция  $g$  непрерывна на  $[ab]$ , то и  $G_a(t)$  непрерывна на  $[ab]$ ;  $G_a(a) = 1$ .

Рассмотрим однородное уравнение

$$\psi(\alpha(t)) - g(t)\psi(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (8)$$

**Лемма 3.** Пусть  $\psi$  – непрерывное решение уравнения (8) на  $[ab]$ . Тогда

1) равносильны утверждения:

а) существует  $\psi$  такое, что  $\psi(a) \neq 0$ ,

б) для каждого  $[ab] t \in [ab]$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(a)G_n(t) \neq 0, \infty$ .

Если существует  $\psi$  такое, что  $\psi(a) \neq 0$ , то все не равные тождественно нулю решения обладают этим свойством;

2) равносильны утверждения:

а) существует не равное тождественно нулю  $\psi$  такое, что  $\psi(a) = 0$ ,

б) существует множество  $[ab] V \subseteq [ab]$  с непустой внутренностью такое, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(a)G_n(t) = 0$  для  $t \in V$ , причем сходимость этого предела на  $V$  равномерная;

3) равносильны утверждения:

а) уравнение (8) не имеет решений, кроме тождественного нуля,

б) не выполняются условия 1 б) и 2 б).

Следующая теорема дает классификацию уравнений вида (8) с точки зрения количества непрерывных на  $(ab)$  решений в терминах значений функции  $g$  в неподвижных точках.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma = [ab]$  – гладкая в некоторой окрестности точки  $a$  кривая,  $g \in H$  на  $[ab]$ ,  $g(a) \neq 0$ . Тогда:

1. Условие 1 а леммы 3 равносильно условию  $g(a)=1$ . Если  $g(a)=1$ , то все тождественно не равные нулю решения  $\psi$  уравнения (8) не равны нулю в некоторой окрестности точки  $a$ ; если  $g(t) \neq 0$  на  $[ab]$ , то и  $\psi \neq 0$  на  $[ab]$ .

2. Условие 2 а леммы 3 равносильно условию  $|g(a)| < 1$ .

3. Условие 3 а леммы 3 равносильно условию  $|g(a)| \geq 1, g(a) \neq 1$ .

**Доказательство.** Из (7) индукцией по  $n$  получается:

$$\psi(\alpha_n(t)) = g^n(a) G_n(t) \psi(t), \quad t \in [ab].$$

1. При условии 1 а леммы 3 из (7) следует:  $g(a)=1$ . Обратно, пусть  $g(a)=1$ . Тогда функция

$$\psi(t) = \frac{1}{G_a(t)} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty} g(\alpha_n(t))}, \quad (9)$$

по лемме 2, определена, непрерывна и не равна нулю в некоторой окрестности точки  $a$  (если  $g(t) \neq 0$  на  $[ab]$ , то эта функция  $\psi(t) \neq 0$  на  $[ab]$ ). Подстановкой проверяется, что она удовлетворяет уравнению (8). По лемме 3, пункт 1), все не равные тождественно нулю решения (8) удовлетворяют условию  $\psi(a) \neq 0$ . Из (9) следует, что

$$\psi(t) = \frac{\psi(\alpha_n(t))}{G_n(t)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  получим

$$\psi(t) = \frac{\psi(a)}{G_a(t)},$$

а из леммы 2 следует, что  $\psi(t) \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $a$ ; если  $g(t) \neq 0$  на  $[ab]$ , то и  $\psi \neq 0$  на  $[ab]$ .

2. Пусть  $\psi$  – решение (8),  $\psi(a)=0, \psi(t_0) \neq 0$  для некоторого  $t \in (ab)$ . Переходя к пределу в (9) при  $n \rightarrow \infty, t = t_0$ , получим:  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(a) = 0$ , откуда  $|g(a)| < 1$ . Обратно, пусть  $|g(a)| < 1$ . Зафиксируем произвольную точку  $c \in (ab)$  и непрерывную на  $I_0(c) = [c, \alpha_{-1}(c)]$  функцию  $\psi_0$  с условием:

$$\psi_0(\alpha(c)) = g(c) \psi_0(c). \quad (10)$$

Тогда функция

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t = a, \\ \prod_{k=0}^{n-1} g(\alpha_{k-n}(t)) \psi_0(\alpha_{-n}(t)) = g^n(a) G_n(\alpha_{-n}(t)) \psi_0(\alpha_{-n}(t)), & t \in I_{-n}(c), \quad n = 1, 2, \dots \\ \psi_0(t), & t \in I_0(c), \\ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{g(\alpha_{k-n}(t))} \psi_0(\alpha_n(t)), & t \in I_{-n}(c), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (8), непрерывна на  $[ab]$  (так как  $|g(a)| < 1$  и выполняется (10)) и не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  (если  $g(t) \neq 0$  на  $[ab]$ , то и  $\psi \neq 0$  на  $[ab]$ ).

3. Следует из пунктов 1) и 2).

Заметим, что в случае интервала действительной оси утверждения: из  $g(a)=1$  следует 1а) леммы 3; из  $|g(a)| < 1$  следует 2 а) леммы 3, – для интервала действительной оси известны [11, с. 51].

## Основные результаты

Рассмотрим условия единственности решения уравнения (5).

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma = [ab]$  – гладкая кривая,  $g, h \in H_\mu$  на  $[ab]$ ,  $g(t) \neq 0$ ,  $|g(a)| > 1$ . Тогда уравнение (5) имеет единственное в классе  $C^{[ab]}$  решение:

$$\psi(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{\prod_{j=0}^k g(\alpha_j(t))} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}, \quad (11)$$

причем  $\psi \in H_\mu^{[ab]}$ .

**Доказательство.** Из уравнения (5) индукцией по  $n$  получается:

$$\psi(\alpha_n(t)) = G_n(t)g^n(a)\psi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} g^{n-1-k}(a) \frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Поделив это равенство на  $g^n(a)$  и перейдя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим как следствие (5) равенство (11). Поэтому решение уравнения (5) при данных условиях единственно в классе  $C^{[ab]}$ , и  $\psi(t)$  (11) – решение (5). Из леммы 2 следует, что функция  $|h(\alpha_k(t))/G_{k+1}(t)|$  равномерно ограничена относительно  $t \in [ac]$  и  $k$  натурального. Поэтому ряд (11) имеет числовую сходящуюся мажоранту. Следовательно,  $\psi(t)$  (11) определена и непрерывна на  $[ab]$ . Покажем:  $\psi \in H_\mu$ . Так как  $|g(t)|^{-1} < 1$  для  $t$ , близких к  $a$ , то  $\prod_{j=0}^k \frac{h(\alpha_k(t))}{g(\alpha_j(t))} \in H_\mu(M^k)$  для некоторого  $M \in (0; 1)$ . Тогда

$$\psi \in H_\mu \left( \sum_{k=0}^{\infty} M^k \right).$$

**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma = [ab]$  – гладкая кривая,  $g \in H_\mu$ ,  $h \in H_\mu(a^*, \nu)$ ,  $g(t) \neq 0$  на  $[ab]$ ,  $|g(a)||\alpha'(a)|^\nu > 1$ . Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в классе  $C(a^*, \nu)$ . Это решение  $\psi$  имеет вид (11), и  $\psi \in H_{\mu_1}(a^*, \nu)$ , где  $\mu_1 = \min\{\mu; |\nu|\theta\}$ , где  $\alpha' \in H_\theta$ .

**Доказательство.** Введем обозначения:

$$\varphi(t) = |t-a|^\nu \psi(t), \quad g_a(t) = \left| \frac{\alpha(t)-a}{t-a} \right|^\nu g(t), \quad h_a(t) = |\alpha(t)-a|^\nu h(t)$$

Тогда уравнение (5) можно записать в виде:

$$\varphi(\alpha(t)) - g_a(t)\varphi(t) = h_a(t). \quad (12)$$

Пусть  $h(t) = \frac{h_1(t)}{|t-a|^\nu}$ ,  $h_1 \in H_\mu^{[ab]}$ . Так как  $\alpha' \in H_\theta$ , то  $\frac{\alpha(t)-a}{t-a} \in H_\theta$ . Поэтому

$h_a(t) = \left| \frac{\alpha(t)-a}{t-a} \right|^\nu h_1(t) \in H_{\mu_1}$ . Аналогично  $g_a(t) \in H_\mu$ . Из условия  $|g(a)||\alpha'(a)|^\nu > 1$  и условия 4\* следует  $|g_a(a)| > 1$ . Тогда, применяя теорему 2 к уравнению (12), получим  $\psi \in H_{\mu_1}(a^*, \nu)$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\Gamma = [ab]$  – гладкая кривая,  $g, h \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0$  на  $[ab]$ ,  $|g(a)| = 1$ ,  $g(a) \neq 1$ . Тогда уравнение (5) имеет единственное в классе  $C^{[ab]}$  решение:

$$\psi(t) = \frac{h(a)}{1-g(a)} - \frac{1}{1-g(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( (1-g(a))h(\alpha_k(t)) - h(a)(1-g(\alpha_k(t))) \right)}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}, \quad (13)$$

причем  $\psi \in H_{\mu_1}^{(ab)}$ ,  $\mu_1 = \frac{\mu\theta}{1+\theta}$ .

**Доказательство.** Из теоремы 2, пункт 3, следует единственность. Докажем остальное. Предположим сначала, что  $h(a) = 0$ . Пусть  $\nu$  такое, что  $-\mu < \nu < 0$ . Тогда  $|g(a)||\alpha'(a)|^\nu < 1$ ,  $h \in H_{\mu-\nu}^{(ab)}$  и  $h_a \in H_{\min\{\nu\theta, \mu-\nu\}}^{(ab)}$ . Заметим,  $\mu_1 = \frac{\mu\theta}{1+\theta} = \min\{\nu\theta, \mu-\nu\}$ . Из теоремы 3 следует, что (5) имеет единственное решение  $\psi \in C(a^*, \nu)$  на  $[ab]$  вида (11), который совпадает с (13) при  $h(a) = 0$  причем  $\psi \in H_{\mu_1}^{(ab)}(a^*, \nu) \subseteq H_{\mu_1}^{(ab)}$ , так как  $\nu < 0$ . Пусть теперь  $h(a) \neq 0$ . Введем обозначения:

$$\chi(t) = \psi(t) - \frac{h(a)}{1-g(a)}, \quad h_1(t) = \frac{h(a)}{1-g(a)}(1-g(t)). \quad (14)$$

Сделаем замену переменных в уравнении (5) по формулам (14). Получим равносильное (5) уравнение:

$$\chi(\alpha(t)) - g(t)\chi(t) = h_1(t),$$

в котором  $h_1(a) = 0$ . Обратная замена дает формулу (13).

**Следствие.** Пусть  $g \in H$ ,  $g \neq 0$ ,  $h \in H^{(ab)}(a^*)$ , и  $|g(a)||\alpha'(a)| \geq 1$ . Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в классе  $H^{(ab)}(a^*)$ , которое записывается в виде (11). Если  $h \in H^{(ab)}(a^*, \nu)$ , то  $\psi \in H^{(ab)}(a^*, \nu)$ .

**Замечание.** Хотя среди решений уравнения (5) в классе  $C^{(ab)}$  только одно при условии  $|g(a)||\alpha'(a)| \geq 1$ , принадлежит классу  $H^{(ab)}(a^*)$ , решений из класса  $H^{(ab)}$  «много» – континуум линейно независимых.

### Литература

1. Carleman T. Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen / T. Carleman // Mathematische Zeitschrift. – 1922. – Vol. 15. – P. 111–120.
2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
3. Чибрикова, Л.И. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами / Л.И. Чибрикова, Н.Б. Плещинский // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 6. – С. 91–104.
4. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Science +Business Media, 2012. – 378 p.
5. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media, 2014. – 308 p.
6. Карлович, Ю.И. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.
7. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в  $L_p$ ,  $p > 1$  / В. Л. Дильман, Л. И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.
8. Kuczma, M. An introduction to the theory of functional equations and inequalities / M. Kuczma. – Warszawa–KraKow–Katowice: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Slaski, 1985.
9. Кравченко, В.Г. Об одном функциональном уравнении со сдвигом в пространстве непрерывных функций / В.Г. Кравченко // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 303–311.
10. Карлович, Ю.И. О сингулярных интегральных операторах со сдвигом в пространствах Гельдера / Ю.И. Карлович, Б. Турсункулов // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 3. – С. 71–74.

11. Kuczma, M. *Functional equations in a single variable* / M. Kuczma. – Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers, 1968. – 383 p.

Поступила в редакцию 28 апреля 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University*  
Series “*Mathematics. Mechanics. Physics*”  
2020, vol. 12, no. 2, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph200201

### LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN THE HÖLDER CLASS FUNCTIONS ON A SIMPLE SMOOTH CURVE

**V.L. Dilman**

Ural South State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: [dilmanvl@susu.ru](mailto:dilmanvl@susu.ru)

The article describes linear functional equations on simple smooth curves with a shift function having a non-zero derivative satisfying the Hölder condition, and fixed points only at the ends of the curve. The objective of the article is to find the conditions of the existence and uniqueness of the solution of such equations in the Hölder class functions with the coefficient and the right-hand side satisfying the Hölder conditions. These conditions are obtained depending on the values of the equation coefficient at the ends of the curve. Various specifics at the ends of the curve are considered. The indicators of the Hölder solutions are determined. The possibilities of applying linear functional equations to the study and solution of singular integral equations with logarithmic singularities are shown.

*Keywords:* singular integral equations with a shift; linear functional equations with a single variable; Hölder conditions.

#### References

1. Carleman T. Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. *Mathematische Zeitschrift*, 1922, Vol. 15, pp. 111–120. DOI: 10.1007/bf01494386
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* (Fractional integrals and derivatives and some of their applications). Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987, 687 p. (in Russ.).
3. Chibrikova L.I., Pleshchinskiĭ N.B. *Integral equations with generalized logarithmic and power kernels*. Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 1976, Vol. 20, no. 6, pp. 80–92.
4. Litvinchuk G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Springer Science +Business Media, 2012, 378 p.
5. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Science+Business Media, 2014, 308 p.
6. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's theory of singular integral operators with shift. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.
7. Dil'man V. L., Chibrikova L.I. Solutions of an integral equation with generalized logarithmic kernel in  $L_p$ ,  $p > 1$ . *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.
8. Kuczma M. An Introduction to the *Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Warszawa-Krakow-Katowice: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Slaski, 1985.
9. Kravchenko V.G. One functional equation with displacement in the space of continuous functions. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, Vol. 22, no. 8, pp. 660–665. DOI: 10.1007/bf01780978
10. Karlovich Yu.I., Tursunkulov B. Singular integral operators with shift in a generalized Hölder space. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1984, Vol. 28, no. 3, pp. 97–101.
11. Kuczma M. *Functional equations in a single variable*. Warszawa, PWN – Polish Scientific Publishers, 1968, 383 p.

Received April 28, 2020

## УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА $\mathcal{N}_2$ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

**В.В. Карачик**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: karachik@susu.ru

Рассмотрен класс задач типа Неймана, зависящий от натурального параметра  $k$ , для полигармонического уравнения в единичном шаре. Задачи этого класса обобщают как известную задачу Дирихле, так и задачу Неймана. В ряде работ для класса таких задач было найдено множество необходимых условий разрешимости этой задачи и было выдвинуто предположение, что наиболее полный вариант найденных необходимых условий является также и набором достаточных условий разрешимости задачи. Для задачи  $\mathcal{N}_1$  этот факт был известен. В настоящей работе для задачи  $\mathcal{N}_2$ , для одно-родного  $m$ -гармонического уравнения в единичном шаре, доказывается предположение о совпадении найденного ранее множества необходимых условий с достаточными условиями разрешимости этой задачи. Сначала с помощью замены переменных задача  $\mathcal{N}_2$  сводится к более простой задаче Дирихле  $\mathcal{N}_0$ , решение которой считается известным. Затем находят условия, при которых сделанная замена переменных обратима. Найденные здесь условия связаны с наличием у решения задачи Дирихле членов первого порядка малости в ее разложении в окрестности нуля. Затем используются ранее полученные результаты о связи значения  $m$ -гармонической в единичном шаре функции в центре шара со значениями нормальных производных этой функции на границе шара. Полученные условия разрешимости преобразуются к условиям, связанным со значениями интегралов по сфере от полиномов от нормальных производных искомого решения на единичной сфере, коэффициенты которых являются элементами арифметического треугольника Неймана. Найденные условия совпадают с полученными ранее необходимыми условиями разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$ .

*Ключевые слова:* задача типа Неймана; полигармоническое уравнение; условия разрешимости.

**Введение.** Пусть  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  – единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , а  $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  – единичная сфера, где  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . В работе [1] были найдены необходимые условия разрешимости следующего класса краевых задач типа Неймана  $\mathcal{N}_k$ , зависящего от параметра  $k \in \mathbb{N}_0$  для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in S; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(x), \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_2(x), \dots, \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – внешняя нормальная производная к единичной сфере,  $m \in \mathbb{N}$ . Класс задач  $\mathcal{N}_k$  является частным случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [2]. Задача  $\mathcal{N}_0$  является задачей Дирихле, которая, безусловно разрешима, а задача  $\mathcal{N}_1$  совпадает с задачей Неймана [3, 4]. В работе [5] А.В. Бицадзе выписал необходимые и достаточные условия разрешимости задачи  $\mathcal{N}_1$  при  $m = 1, 2$  и показал, что она решается в квадратурах.

Исследования разрешимости некоторых постановок задач типа Неймана в единичном шаре, кроме перечисленных выше работ, можно найти также для бигармонического уравнения (в частности задачи  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$ ) в работах [6–11], а для полигармонического уравнения в работах [12,

13]. В работе [14] для краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными в граничных условиях получено достаточное условие фредгольмовости этих задач и приведена формула их индекса. В [15] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения при полиномиальных данных и приведены формулы, позволяющие легко строить полиномиальные решения задачи.

**Задача  $\mathcal{N}_2$ .** Исследуем частный случай задачи (1)–(2) – задачу  $\mathcal{N}_2$  для однородного полигармонического уравнения, которую можно переписать в виде

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S; \quad \Lambda^{[2]}u|_{\partial S} = \varphi_1(x), \dots, \Lambda^{[m+1]}u|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S, \quad (3)$$

где  $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $t^{[m]} = t(t-1) \dots (t-m+1)$  –  $m$ -я факториальная степень  $t$ , причем  $t^{[0]} = 1$ , и

справедливо равенство  $\Lambda^{[i]}u = \frac{\partial^i u}{\partial v^i}$  на  $\partial S$ . Рассмотрим  $m$ -гармоническую в  $S$  функцию  $v = \Lambda^{[2]}u$ . Относительно этой функции получим следующую задачу:

$$\Delta^m v = 0, \quad x \in S, \quad v|_{\partial S} = \varphi_1(x), (\Lambda - 2)v|_{\partial S} = \varphi_2(x), \dots, (\Lambda - 2)^{[m-1]}v|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S,$$

приводящуюся к задаче Дирихле, которая безусловно разрешима, и решение которой будем считать известным и таким, что  $v \in C^{m-1}(\bar{S})$ .

Рассмотрим уравнение  $v = \Lambda^{[2]}u$  относительно функции  $u(x)$  в  $m$ -гармонических в  $S$  функциях. Докажем, что это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда  $m$ -гармоническая в  $S$  функция  $v(x)$  в своем разложении в окрестности нуля не имеет членов нулевого и первого порядка малости, а значит задача  $\mathcal{N}_2$  разрешима. Действительно, если уравнение  $v = \Lambda^{[2]}u$  разрешимо, то раскладывая функции  $u(x)$  и  $v(x)$  в ряд Тейлора в окрестности нуля  $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$  и

$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x)$ , учитывая единственность этого разложения и возможность почленного дифференцирования ряда для однородных многочленов  $u_i(x)$  и  $v_i(x)$  степени  $i$  получаем равенство  $v_i(x) = \Lambda^{[2]}u_i(x)$ . Значит, так как  $\Lambda^{[2]}u_i(x) = 0$  при  $i = 0, 1$ , то получаем необходимость условий  $v_0(x) = v_1(x) \equiv 0$ . Достаточность этих условий следует из формулы

$$u(x) = -\int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t} + \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t^2} + c_0(x) + c_1(x),$$

где  $c_i(x)$  – произвольные однородные полиномы степени  $i$ . Правая часть этой формулы корректна, поскольку  $v(x) = O(|x|^2)$ ,  $|x| \rightarrow 0$ , а значит, несобственные интегралы сходятся. Проверим, что  $\Lambda^{[2]}u = v$ . Действительно, так как

$$\Lambda v(tx) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} v(tx) = t \sum_{i=1}^n x_i v_{x_i}(tx) = t D_t v(tx),$$

и  $\Lambda^{[2]}c_i(x) = 0$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda^{[2]}u &= -(\Lambda - 1) \int_0^1 D_t v(tx) dt + \Lambda \int_0^1 \left( \frac{1}{t} D_t v(tx) - \frac{1}{t^2} v(tx) \right) dt = \\ &= -(\Lambda - 1)(v(x) - v(0)) + \Lambda \left( \frac{1}{t} v(tx) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{1}{t^2} v(tx) - \frac{1}{t^2} v(tx) \right) dt \right) = \\ &= -(\Lambda - 1)v(x) + \Lambda v(x) = v(x). \end{aligned}$$

Поэтому при условиях  $v_0(x) = v_1(x) \equiv 0$   $m$ -гармоническая в  $S$  функция  $u(x)$  существует и для нее выполнены граничные условия (3). Что и требовалось доказать.

**Вспомогательные утверждения.** В работе [16] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Для любой  $m$ -гармонической в  $S$  функции  $v \in C^{m-1}(\bar{S})$  верно равенство

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} (h_0^{(m-1)} + h_1^{(m-1)} \Lambda + \dots + h_{m-1}^{(m-1)} \Lambda^{[m-1]}) v ds_x,$$

где числа  $h_i^{(m-1)}$  – коэффициенты многочлена  $H_{m-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)} \lambda^i$  (считаем  $H_0 = 1$ ), такого что

$$H_{[m-1]}(\lambda) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} (\lambda-2)\dots(\lambda-2m+2). \quad (4)$$

Следует заметить, что если рассмотреть дискретную производную многочлена  $P(\lambda)$  в виде  $P^{(1)}(\lambda) = P(\lambda+1) - P(\lambda)$ , то из (4) будем иметь

$$h_i^{(m-1)} = \frac{1}{i!} (H_{[m-1]})^{(i)}(0). \quad (5)$$

Из теоремы 1 вытекает, что для функции  $w(x) = \Lambda u(x)$ , при  $m$ -гармонической в  $S$  функции  $u(x)$ , верна формула

$$w(0) = \frac{1}{\omega_n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \int_{\partial S} \sum_{i=1}^m p_i^{(m)} \Lambda^{[i]} u ds_x,$$

где числа  $p_i^{(k)}$  находятся из равенств

$$p_i^{(k)} = (-1)^{k-i} \binom{2k-i-1}{i-1} \frac{(2k-2i+1)!!}{2k-2i+1}. \quad (6)$$

Эти числа составляют целочисленный треугольник Неймана  $\mathbb{P}$  [1]

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & 1 & \\ & & & & -3 & & 1 \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \end{matrix}$$

Преобразуем равенство  $v(0) = \Lambda^{[2]} u(0)$  к аналогичному виду. Для факториальных полиномов

$P_{[k]}(\lambda) = \sum_{i=1}^k p_i^{(k)} \lambda^{[i]}$ , соответствующих  $P_k(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^k p_i^{(k)} \lambda^i$ , верно представление [17]

$$P_{[k]}(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^k p_i^{(k)} \lambda^{[i]} = (\lambda, -2)_k \equiv \lambda(\lambda-2)\dots(\lambda-2k+2), \quad (7)$$

где  $(a, b)_l = a(a+b)\dots(a+(l-1)b)$  – обобщенный символ Похгаммера.

**Лемма 1.** При  $k, s \in \mathbb{N}$  справедливо следующее равенство

$$\lambda^{[k]} \lambda^{[s]} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \lambda^{[k+i]} k^{[s-i]}.$$

*Доказательство.* Проведем индукцию по  $s$ . При  $s=1$  лемма верна

$$\lambda^{[k]} \lambda^{[1]} = \lambda^{[k]} (\lambda - k + k) = k \lambda^{[k]} + \lambda^{[k+1]}.$$

Пусть лемма верна при некотором целом  $s \geq 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda^{[k]} \lambda^{[s+1]} &= (\lambda - s) \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \lambda^{[k+i]} k^{[s-i]} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} k^{[s-i]} (\lambda^{[k+i+1]} + \\ &+ (k+i-s) \lambda^{[k+i]}) = \sum_{i=1}^{s+1} \binom{s}{i-1} k^{[s-i+1]} \lambda^{[k+i]} + \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} k^{[s-i+1]} \lambda^{[k+i]} = \\ &= \sum_{i=0}^{s+1} \left( \binom{s}{i-1} + \binom{s}{i} \right) k^{[s+1-i]} \lambda^{[k+i]} = \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} \lambda^{[k+i]} k^{[s+1-i]}. \end{aligned}$$

Шаг индукции доказан, а значит, лемма верна.

**Замечание 2.** Если в формуле из леммы 1 заменить индекс суммирования  $i \rightarrow s - i$ , то будем иметь

$$\lambda^{[k]} \lambda^{[s]} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \lambda^{[k+s-i]} k^{[i]}.$$

**Первое условие разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$ .** В силу леммы 1 при  $s=2$  имеем  $\lambda^{[k]} \lambda^{[2]} = k^{[2]} \lambda^{[k]} + 2k \lambda^{[k+1]} + \lambda^{[k+2]}$  и, значит, по теореме 1 можно записать

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)} \Lambda^{[i]} v(x) ds_x = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)} \Lambda^{[i]} \Lambda^{[2]} u(x) ds_x = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^{(m-1)} (\Lambda^{[i+2]} + 2i \Lambda^{[i+1]} + i^{[2]} \Lambda^{[i]}) u(x) ds_x = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \left( \sum_{i=2}^{m+1} h_{i-2}^{(m-1)} + 2 \sum_{i=2}^m (i-1) h_{i-1}^{(m-1)} + \sum_{i=2}^{m-1} i(i-1) h_i^{(m-1)} \right) \Lambda^{[i]} u(x) ds_x. \end{aligned}$$

Если добавить нулевые члены  $h_m^{(m-1)}$  во вторую сумму и нулевые члены  $h_m^{(m-1)}$  и  $h_{m+1}^{(m-1)}$  в третью, то будем иметь

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=2}^{m+1} (h_{i-2}^{(m-1)} + 2(i-1)h_{i-1}^{(m-1)} + i(i-1)h_i^{(m-1)}) \Lambda^{[i]} u(x) ds_x.$$

Используя формулу (5) найдем

$$\begin{aligned} h_{i-2}^{(m-1)} + 2(i-1)h_{i-1}^{(m-1)} + i(i-1)h_i^{(m-1)} &= \frac{1}{(i-2)!} (H_{[m-1]}(\lambda) + \\ &+ 2(H_{[m-1]})^{(1)}(\lambda) + (H_{[m-1]})^{(2)}(\lambda))^{(i-2)}(0) = \frac{1}{(i-2)!} \times \\ &\times (H_{[m-1]}(\lambda) + (H_{[m-1]})^{(1)}(\lambda) + (H_{[m-1]})^{(1)}(\lambda+1))^{(i-2)}(0) = \frac{1}{(i-2)!} \times \\ &\times (H_{[m-1]}(\lambda+1) + (H_{[m-1]})^{(1)}(\lambda+1))^{(i-2)}(0) = \frac{1}{(i-2)!} (H_{[m-1]}(\lambda+2))^{(i-2)}(0). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=2}^{m+1} \frac{1}{(i-2)!} (H_{[m-1]}(\lambda+2))^{(i-2)}(0) \Lambda^{[i]} u(x) ds_x = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!} (H_{[m-1]}(\lambda+2))^{(i)}(0) \Lambda^{[i+2]} u(x) ds_x. \end{aligned}$$

Из (4) с учетом (7) получаем  $H_{[m-1]}(\lambda+2) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} P_{[m-1]}(\lambda)$ , а значит

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{\omega_n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \int_{\partial S} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!} P_{[m-1]}^{(i)}(0) \Lambda^{[i+2]} u(x) ds_x = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \int_{\partial S} \sum_{i=0}^{m-1} p_i^{(m-1)} \Lambda^{[i+2]} u(x) ds_x = \frac{1}{\omega_n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!!} \int_{\partial S} \sum_{i=1}^{m-1} p_i^{(m-1)} \varphi_{i+1}(x) ds_x, \end{aligned}$$

где было учтено, что  $p_0^{(m-1)} = 0$ , а коэффициенты  $p_i^{(m-1)}$  находятся из (6). Значит, первое достаточное условие  $v(0) = 0$  разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$  приводится к виду

$$\int_{\partial S} (p_1^{(m-1)} \varphi_2(x) + \dots + p_{m-1}^{(m-1)} \varphi_m(x)) ds_x = 0. \tag{8}$$

**Второе условие разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$ .** Выясним, что означает условие  $v_1(x) \equiv 0$  в терминах граничных функций задачи (3). Воспользуемся теоремой 6 из [18].

**Теорема 2.** Пусть  $w(x)$  – гармоническая в  $S$  и непрерывная в  $\bar{S}$  функция, тогда имеет место равенство

$$\int_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)w(\xi) ds_{\xi} = g_{\nu}G_{(\nu)}(D)w(x)|_{x=0},$$

где  $\{G_{(\nu)}(x) : \nu \in \mathbb{N}_0^n, \nu_1 \geq \dots \geq \nu_n, \nu_n = 0, 1\}$  – полная система гармонических полиномов [18, теорема 2], а  $g_{\nu} > 0$  – некоторая константа.

Используя эту теорему, в примере 4 из [18], была доказана следующая формула

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \xi_i w(\xi) ds_{\xi} = \frac{1}{n} w_{x_i}(0).$$

Пусть  $w_1(x)$  – однородный полином первой степени в разложении  $w(x)$  в окрестности нуля, тогда в силу формулы выше для гармонической в  $S$  и непрерывной в  $\bar{S}$  функции  $w(x)$  верно утверждение

$$w_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall H_1(x) \int_{\partial S} H_1(\xi)w(\xi) ds_{\xi} = 0,$$

где  $H_1(x)$  – произвольный однородный гармонический полином первой степени. Заметим, что для  $m$ -гармонической ( $m > 1$ ) в  $S$  функции  $v(x)$  это не так, например, для функции  $v(x) = x_i(1 - |x|^2)$ . Это так, поскольку под интегралом суммируются однородные составляющие 1-го порядка всех гармонических компонент из разложения Альманси функции  $v(x)$ .

Продолжением полученного утверждения на  $m$ -гармонические функции является следующая лемма.

**Лемма 2.** Пусть  $m$ -гармоническая в  $S$  функция  $v \in C^{m-1}(\bar{S})$ , тогда

$$v_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall H_1(x) \int_{\partial S} H_1(\xi)(\Lambda - 3)\dots(\Lambda - 2m + 1)v(\xi) ds_{\xi} = 0,$$

где  $H_1(x)$  – однородный гармонический полином степени 1.

*Доказательство.* В силу следующего свойства  $(\Lambda + 2m)\Delta^m u = \Delta^m \Lambda u$  оператора  $\Lambda$  функция

$$\hat{v}(x) = (\Lambda - 3)\dots(\Lambda - 2m + 1)v(x)$$

является  $m$ -гармонической в  $S$  и непрерывной в  $\bar{S}$  и пусть ее разложение Альманси в  $S$  имеет вид

$$\hat{v}(x) = \hat{v}^{(0)}(x) + |x|^2 \hat{v}^{(1)}(x) + \dots + |x|^{2m-2} \hat{v}^{(m-1)}(x),$$

где  $\hat{v}^{(i)}(x)$  – гармонические в  $S$  функции. Это возможно в силу звездности области  $S$ . Рассмотрим гармоническую в  $S$  функцию  $w(x) = \hat{v}^{(0)}(x) + \hat{v}^{(1)}(x) + \dots + \hat{v}^{(m-1)}(x)$ .

Докажем, что  $\hat{v}(x)$  обладает свойствами

$$\hat{v}_1(x) = (-1)^{m-1} (2m - 2)!! v_1(x), \quad w_1(x) = \hat{v}_1(x),$$

где  $w_1(x)$  и  $\hat{v}_1(x)$  – однородные полиномы 1-го порядка в разложении  $w(x)$  и  $\hat{v}(x)$  в окрестности нуля. Если это так, то

$$v_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \hat{v}_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall H_1(x) \int_{\partial S} H_1(\xi)w(\xi) ds_{\xi} = 0$$

и поскольку

$$\int_{\partial S} H_1(\xi)w(\xi) ds_{\xi} = \int_{\partial S} H_1(\xi)\hat{v}(\xi) ds_{\xi},$$

то утверждение леммы будет доказано.

Нетрудно видеть, что поскольку  $\Lambda |x|^{2i} v^{(i)}(x) = |x|^{2i} (\Lambda + 2i)v^{(i)}(x)$ , то можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} |x|^{2i} \hat{v}^{(i)}(x) &= \hat{v}(x) = (\Lambda - 3)\dots(\Lambda - 2m + 1) \sum_{i=0}^{m-1} |x|^{2i} v^{(i)}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} |x|^{2i} (\Lambda - 3 + 2i)\dots(\Lambda - 2m + 1 + 2i)v^{(i)}(x) \end{aligned}$$

и, значит, в силу единственности разложения функции в формулу Альманси имеем

$$\hat{v}^{(i)}(x) = (\Lambda - 3 + 2i) \dots (\Lambda - 2m + 1 + 2i)v^{(i)}(x).$$

Поскольку  $\hat{v}_1(x) = \hat{v}_1^{(0)}(x)$  и  $v_1(x) = v_1^{(0)}(x)$ , то отсюда следует

$$\hat{v}_1(x) = \hat{v}_1^{(0)}(x) = (\Lambda - 3) \dots (\Lambda - 2m + 1)v_1^{(0)}(x) = (-2) \dots (-2m + 2)v_1(x)$$

и значит  $v_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \hat{v}_1(x) \equiv 0$ . Кроме того, из этой формулы будем также иметь

$$w_1(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \hat{v}_1^{(i)}(x) = \hat{v}_1^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \hat{v}_1^{(i)}(x) = \hat{v}_1(x) + \sum_{i=1}^{m-1} (2i - 2) \dots (2i - 2m + 2)v_1^{(i)}(x) = \hat{v}_1(x)$$

и значит  $\hat{v}_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w_1(x) \equiv 0$ . Лемма доказана.

Преобразуем условие ортогональности из леммы 2. Пусть  $H_1(x)$  – однородный гармонический полином первой степени. С помощью (7), учитывая что  $v = \Lambda^{[2]}u$ , запишем

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} H_1(\xi) (\Lambda - 3) \dots (\Lambda - 2m + 1) v(\xi) ds_\xi &= \int_{\partial S} H_1(\xi) \prod_{j=1}^m (\Lambda - 2j + 1) \Lambda u(\xi) ds_\xi = \\ &= \int_{\partial S} H_1(\xi) \sum_{j=1}^m p_j^{(m)} (\Lambda - 1)^{[j]} \Lambda u(\xi) ds_\xi = \int_{\partial S} H_1(\xi) \sum_{j=1}^m p_j^{(m)} \Lambda^{[j+1]} u(\xi) ds_\xi = \\ &= \int_{\partial S} H_1(\xi) \sum_{j=1}^m p_j^{(m)} \varphi_j(\xi) ds_\xi \end{aligned}$$

и значит второе достаточное условие разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$  примет вид

$$\int_{\partial S} H_1(\xi) (p_1^{(m)} \varphi_1(\xi) + \dots + p_m^{(m)} \varphi_m(\xi)) ds_\xi = 0. \quad (9)$$

Итак, достаточные условия разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$  при условии  $v \in C^{m-1}(\bar{S})$  имеют вид (8)–(9). Заметим, что условия (8)–(9), согласно результатам работы [1], являются и необходимыми условиями разрешимости задачи  $\mathcal{N}_2$ . Например, для 3-гармонического уравнения ( $m = 3$ ) условия (8)–(9) с помощью строк треугольника Неймана  $\mathbb{P}$  записываются в виде

$$\int_{\partial S} (-\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)) ds_\xi = 0, \quad \int_{\partial S} H_1(\xi) (3\varphi_1(\xi) - 3\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)) ds_\xi = 0.$$

## Литература

1. Карачик, В.В. Класс задач типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Вычислительная математика и математическая физика. – 2020. – Т. 60, № 1. – С. 132–150.
2. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.
3. Бицадзе, А.В. К задаче Неймана для гармонических функций / А.В. Бицадзе // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311, № 1. – С. 11–13.
4. Карачик, В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238.
5. Бицадзе, А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций / А.В. Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 825–831.
6. Turmetov, V. On solvability of the Neumann boundary value problem for non-homogeneous biharmonic equation / V. Turmetov, R. Ashurov // British Journal of Mathematics & Computer Science. – 2014. – Iss. 4. – P. 557–571.
7. Карачик В.В. Обобщённая третья краевая задача для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 761–770.
8. Turmetov, V. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions / V. Turmetov, V. Karachik // Filomat. – 2018. – Vol. 32, Iss. 3. – P. 947–953.
9. Popivanov, P. Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball / P. Popivanov // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2159. – Iss. 1. – 030028.

10. Карачик, В.В. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Б.Т. Торбек // Математические заметки. – 2017. – Т. 102, № 1. – С. 39–51.
11. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.
12. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.
13. Карачик, В.В. Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 653–662.
14. Кошанов, Б.Д. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости / Б.Д. Кошанов, А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 12. – С. 1666–1681.
15. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.
16. Карачик, В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре / В.В. Карачик // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 69–88.
17. Карачик, В.В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 533–551.
18. Карачик, В.В. О некоторых специальных полиномах и функциях / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 205–226.

Поступила в редакцию 1 марта 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 2, pp. 13–20*

DOI: 10.14529/mmph200202

## SOLVABILITY CONDITIONS OF THE $\mathcal{N}_2$ NEUMANN-TYPE PROBLEM FOR POLYHARMONIC EQUATION IN A BALL

**V.V. Karachik**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: karachik@susu.ru

The  $\mathcal{N}_k$  Neumann-type class of problems for a polyharmonic equation in the unit ball is considered. The problems of this class generalize both the well-known Dirichlet problem and the Neumann problem. In a number of works, the set of the necessary conditions for the solvability of this problem has been found for the problems of such class, and it has been assumed that the most complete version of the found necessary conditions is also a set of the sufficient conditions for the solvability of the problem. This was a known fact with regard to the  $\mathcal{N}_1$  problem. In this study, an assumption that the found set of the necessary conditions coincides with the sufficient conditions of solvability of the  $\mathcal{N}_2$  problem for a homogeneous  $m$ -harmonic equation in a unit ball is proved. First, by changing the variables, the  $\mathcal{N}_2$  problem is reduced to a simpler  $\mathcal{N}_0$  Dirichlet problem, the solution to which is considered to be known. Next, the conditions, under which the performed change of the variables is reversible, are found. The conditions found here are connected with the Dirichlet problem's solution having terms of the first order of smallness in the expansion in the neighborhood of zero. Finally, the previously obtained results are used, which concern the value of the  $m$ -harmonic function in the unit ball in the center of the ball with the values of the normal derivatives of this function at the boundary of the ball. These solvability conditions are transformed to the conditions associated with the values of the integrals over the sphere of polynomials in the normal derivatives of the desired solution on the unit sphere, the coefficients of which

which are the elements of the arithmetic Neumann triangle. The found conditions coincide with the previously obtained necessary conditions for the solvability of the  $\mathcal{N}_2$  problem.

*Keywords:* Neumann-type problem; polyharmonic equation; solvability conditions

### References

1. Karachik V.V. Class of Neumann-Type Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, Vol. 60, no. 1, pp. 144–162. DOI: 10.1134/S096554251912011X
2. Karachik V.V. A problem for the polyharmonic equation in the sphere. *Siberian Mathematical Journal*, 1991, Vol. 32, Iss. 5, pp. 767–774. DOI: 10.1007/BF00971175
3. Bitsadze A.V. K zadache Neymana dlya garmonicheskikh funktsiy (To the Neumann problem for harmonic functions). *DAN SSSR*, 1990, Vol. 311, no. 1, pp. 11–13. (in Russ.).
4. Karachik V. V. On the arithmetic triangle arising from the solvability conditions for the Neumann problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232
5. Bitsadze A.V. Some properties of polyharmonic functions. *Differential Equations*, 1988, Vol. 24, no. 5, pp. 543–548.
6. Turmetov B., Ashurov R. On Solvability of the Neumann Boundary Value Problem for Non-homogeneous Biharmonic Equation. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 2014, Vol. 4, Iss. 4, pp. 557–571. DOI: 10.9734/BJMCS/2014/6825
7. Karachik V.V. Generalized third boundary value problem for the biharmonic equation. *Differential Equations*, 2017, Vol. 53, no. 6, pp. 756–765.
8. Turmetov B., Karachik V. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions. *Filomat*, 2018, Vol. 32, Iss. 3, pp. 947–953. DOI: 10.2298/FIL1803947T
9. Popivanov P. Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball. *AIP Conference Proceedings*, 2019, Vol. 2159, Iss. 1, 030028. DOI: 10.1063/1.5127493.
10. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet–Riquier problem for biharmonic equations. *Mathematical Notes*, 2017, Vol. 102, no. 1-2, pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0001434617070045
11. Karachik V.V. A Neumann-type problem for the biharmonic equation. *Siberian Advances in Mathematics*, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 103–118. DOI: 10.3103/S105513441702002X
12. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirichlet Boundary Value Problem for the 3-harmonic Equation in a Ball. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Matematika i fizika* (Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics), 2012, Vol. 5, no. 4, pp. 527–546.
13. Karachik V.V. Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball. *Differential Equations*, 2018, Vol. 54, no. 5, pp. 648–657. DOI: 10.1134/S0012266118050087
14. Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a high-order elliptic equation on the plane. *Differential Equations*, 2016, Vol. 52, no. 12, pp. 1594–1609. DOI: 10.1134/S0012266116120077
15. Karachik V.V. Solution of the Dirichlet problem with polynomial data for the polyharmonic equation in a ball. *Differential Equations*, 2015, Vol. 51, no. 8, pp. 1033–1042. DOI: 10.1134/S0012266115080078
16. Karachik V.V. On the mean value property for polyharmonic functions in the ball. *Siberian Advances in Mathematics*, 2014, Vol. 24, no. 3, pp. 169–182. DOI: 10.3103/S1055134414030031
17. Karachik V.V. Integral identities on the sphere for normal derivatives of a polyharmonic function. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* (Siberian Electronic Mathematical Reports), 2017, Vol. 14, pp. 533–551. DOI: 10.17377/semi.2017.14.046
18. Karachik V.V. On some special polynomials and functions. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* (Siberian Electronic Mathematical Reports), 2013, Vol. 10, pp. 205–226.

*Received March 1, 2020*

# О СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

**В.Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация  
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Рассматриваются дифференциальные уравнения, правые части которых являются однородными тригонометрическими полиномами степени  $n$ . Фазовым пространством таких уравнений является окружность. Описаны грубые уравнения – уравнения, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к близкому уравнению. Уравнение является грубым тогда и только тогда, когда его правая часть имеет только простые нули, то есть все особые точки которого – гиперболические. Множество всех грубых уравнений открыто и всюду плотно в пространстве  $E_h(n)$  рассматриваемых уравнений. Описаны связанные компоненты этого множества. Два грубых уравнения, имеющие особые точки, принадлежат одной компоненте тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны. Во множестве всех негрубых уравнений выделено открытое и всюду плотное подмножество, состоящее из уравнений первой степени негрубости – уравнений, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к близкому негрубому уравнению. Оно является аналитическим подмногообразием коразмерности один в  $E_h(n)$  (бифуркационным многообразием) и состоит из уравнений, для которых все особые точки гиперболические, за исключением двух седло-узловых особых точек. Доказано, что любые два грубых уравнения можно соединить в  $E_h(n)$  гладкой дугой с конечным числом бифуркационных точек, в которых эта дуга трансверсальна бифуркационному многообразию.

*Ключевые слова:* дифференциальное уравнение на окружности; тригонометрический полином; грубость; бифуркационное многообразие; связанная компонента.

## Введение

В настоящей работе рассматривается пространство  $E_h(n)$  дифференциальных уравнений на окружности, правые части которых однородные тригонометрические полиномы степени  $n$ . Описаны уравнения грубые относительно этого пространства и их типичные бифуркации.

Ж. Палисом и Ч. Пью в [1] была поставлена задача о существовании простой дуги, соединяющей две грубые динамические системы на замкнутом многообразии. Для простейших грубых систем – систем Морса–Смейла, эта задача была решена в работе [2]. Было показано, что любые две системы Морса–Смейла на произвольном замкнутом многообразии можно соединить дугой, состоящей только из систем Морса–Смейла, за исключением конечного числа «простых» бифуркационных точек. Аналогичная задача изучалась и для диффеоморфизмов [3–4]. Полностью она решена только для диффеоморфизмов окружности [4].

Естественна постановка задачи о существовании простых дуг и в более узких пространствах динамических систем. Мы ее рассмотрим для пространства  $E_h(n)$ .

Частным случаем задачи о существовании простой дуги является следующий вопрос. Какие две грубые системы можно соединить дугой, не содержащей бифуркационных точек? Иными словами, речь идет об описании связанных компонент множества грубых динамических систем. Эта задача рассматривалась в работах [5–8].

Здесь мы опишем связанные компоненты множества грубых уравнений из  $E_h(n)$ .

## 1. однородные полиномиальные дифференциальные уравнения на окружности

На окружности  $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad (1)$$

где

$$a(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_i \cos^i \varphi \sin^{n-i} \varphi \quad (2)$$

– однородный тригонометрический полином степени  $n \geq 2$ . Удобно не исключать случай равенства нулю всех коэффициентов  $a_i$ . Уравнение (1) естественно отождествляется с функцией  $a$ , а также с упорядоченным набором чисел  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , а множество  $E_h(n)$  таких уравнений с пространством  $\mathbf{R}^{n+1}$  с нормой  $\|a\| := \max_{i=0, \dots, n} |a_i|$ .

Уравнения из  $E_h(n)$  обладают симметрией:

$$a(\varphi + \pi) \equiv (-1)^n a(\varphi). \quad (3)$$

Поэтому множество особых точек любого уравнения  $a \in E_h(n)$  (нулей его правой части  $a(\varphi)$ ) инвариантно при сдвиге  $\varphi \mapsto \varphi + \pi$  окружности.

Нам понадобится

**Лемма 1.** Правую часть ненулевого уравнения  $a \in E_h(n)$  можно представить в виде

$$a(\varphi) = q(\varphi) \prod_{i=1}^s \sin(\varphi - \varphi_i), \quad (4)$$

где  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_s < \varphi_1 + \pi$ ,

$$q(\varphi) = q_{n-s} \sin^{n-s} \varphi + \dots + q_1 \sin \varphi \cos^{n-s-1} \varphi + q_0 \cos^{n-s} \varphi \quad (5)$$

– однородный тригонометрический полином,  $q(\varphi) \neq 0$  для всех  $\varphi \in \mathbf{S}^1$ .

**Доказательство леммы 1.** Пусть  $a(\varphi)$  имеет вид (2). Рассмотрим сначала случай  $a_0 \neq 0$ .

Многочлен  $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^{n-i}$  разложим на множители:  $P(t) = Q(t)(t-t_1) \dots (t-t_s)$ , где

$Q(t) = Q_{n-s} t^{n-s} + \dots + Q_1 t + Q_0$  – многочлен с  $Q_{n-s} = a_0$ , не имеющий действительных корней, а  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_s$ . Пусть  $\varphi_i = \arctg t_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Тогда при  $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi$   $a(\varphi)$  можно представить в виде

$$a(\varphi) = \cos^n \varphi P(\operatorname{tg} \varphi) = \cos^n \varphi \left( Q_{n-s} \frac{\sin^{n-s} \varphi}{\cos^{n-s} \varphi} + \dots + Q_1 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + Q_0 \right) \prod_{i=1}^s \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} \right),$$

а потому и в виде (4), где  $q(\varphi)$  имеет вид (5) с  $q_j = Q_j / \prod_{i=1}^s \cos \varphi_i$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-s$ ,  $q(\varphi) \neq 0$  для всех  $\varphi$ . По непрерывности равенство (4) справедливо и при  $\varphi = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ .

Если  $a_0 = 0$ , то можно выбрать такое  $\alpha$ , что при замене  $\tilde{\varphi} = \varphi + \alpha$  уравнение  $a$  перейдет в уравнение  $\tilde{a} \in E_h(n)$ , для которого соответствующий коэффициент  $\tilde{a}_0 \neq 0$ . По доказанному  $\tilde{a}(\tilde{\varphi}) = \tilde{q}(\tilde{\varphi}) \prod_{i=1}^s \sin(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_i)$ . Сделав обратную замену  $\varphi = \tilde{\varphi} - \alpha$ , получим равенство (4) с  $q(\varphi) = \tilde{q}(\varphi + \alpha)$ ,  $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i - \alpha$ .

## 2. Грубые уравнения

Будем говорить, что уравнения  $a$  и  $\tilde{a}$  топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм  $h: \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ , переводящий траектории уравнения  $\tilde{a}$  в траектории уравнения  $a$  с сохранением ориентации на них.

Уравнение  $a \in E_h(n)$  назовем *грубым относительно множества*  $\Lambda \subset E_h(n)$ , если  $a \in \Lambda$  и существует такая его окрестность  $U(a)$  в  $\Lambda$ , что уравнение  $a$  и любое уравнение  $\tilde{a} \in U(a)$  топологически эквивалентны.

Уравнение  $a \in E(n)$ , грубое относительно  $E_h(n)$ , будем называть просто *грубым уравнением*.

Обозначим  $\Sigma^0(n)$  множество уравнений  $a \in E_h(n)$ , все особые точки которого гиперболические, то есть для которых функция  $a(\varphi)$  либо не имеет нулей, либо имеет только простые нули. В разложении (4) правой части уравнения  $a \in \Sigma^0(n)$  все числа  $\varphi_i$  разные.

**Теорема 1.** 1. Множество  $\Sigma^0(n)$  открыто и всюду плотно в  $E_h(n)$ .

2. Уравнение  $a \in E_h(n)$  является грубым тогда и только тогда, когда принадлежит  $\Sigma^0(n)$ .

**Доказательство.** Докажем что  $\Sigma^0(n)$  всюду плотно в  $E_h(n)$ . Пусть уравнение  $a \in E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$ . Покажем, что в любой его окрестности  $U(a)$  есть уравнение из  $\Sigma^0(n)$ . Для уравнения с нулевой правой частью это очевидно, поэтому будем считать, что  $a(\varphi)$  – ненулевая функция. Представим ее в виде (4). Рассмотрим уравнение  $a_\mu$  с правой частью

$$a_\mu(\varphi) = q(\varphi) \prod_{i=1}^s \sin(\varphi - \varphi_i - \mu\alpha_i),$$

где все числа  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, s$ , различны. При достаточно малом  $\mu > 0$   $a_\mu \in \Sigma^0(n) \cap U(a)$ .

Докажем, что из грубости уравнения  $a \in E_h(n)$  следует, что  $a \in \Sigma^0(n)$ . Предположим противное:  $a \in E(n) \setminus \Sigma^0(n)$ . Пусть  $U(a)$  – окрестность, фигурирующая в определении грубости. Поскольку в  $U(a)$  есть уравнение из  $\Sigma^0(n)$ , то все нули  $a(\varphi)$  имеют нечетную кратность, причем хотя бы один из них, который обозначим  $\varphi_0$ , имеет кратность  $2m+1 \geq 3$ . Тогда  $a(\varphi) = l(\varphi - \varphi_0)^{2m+1} + o((\varphi - \varphi_0)^{2m+1})$ ,  $l \neq 0$ . Рассмотрим уравнение  $a_\mu: \dot{\varphi} = a(\varphi) - \mu(\operatorname{sgn} l)b(\varphi)$ , где

$$b(\varphi) = \sin(\varphi - \varphi_0) = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^k \sin(\varphi - \varphi_0), \text{ если } n = 2k + 1,$$

$$b(\varphi) = \sin(\varphi + \alpha) \sin(\varphi - \varphi_0) = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{k-1} \sin(\varphi + \alpha) \sin(\varphi - \varphi_0), \text{ если } n = 2k,$$

число  $\alpha$  подобрано так, чтобы  $\sin(\varphi + \alpha) \neq 0$  в нулях функции  $a(\varphi)$ ,  $\sin(\varphi_0 + \alpha) > 0$ . При достаточно малом  $\mu > 0$  уравнение  $a_\mu$  принадлежит  $U(a)$  и имеет больше особых точек, чем  $a$ . Поскольку существует гомеоморфизм  $h$ , переводящий особые точки уравнения  $a_\mu$  и только их в особые точки уравнения  $a$ , то получаем противоречие. Тем самым, грубое уравнение  $a \in \Sigma^0(n)$ .

Открытость  $\Sigma^0(n)$  и грубость уравнений из  $\Sigma^0(n)$  очевидны.

### 3. Уравнения первой степени негрубости

Уравнения  $a \in E(n)$ , грубые относительно  $E(n) \setminus \Sigma^0(n)$ , назовем уравнениями *первой степени негрубости*.

Заметим, что вследствие (3), если правая часть  $a(\varphi)$  уравнения  $a \in E(n)$  имеет нуль  $\varphi_0$  кратности  $s$ , то она имеет и нуль  $\varphi_0 + \pi$  кратности  $s$ .

Обозначим  $\Sigma^1(n)$  множество всех уравнений  $a \in E(n)$ , у которых все особые точки гиперболические, за исключением двух двукратных (седло-узловых) особых точек.

**Теорема 2.** 1. Множество  $\Sigma^1(n)$  открыто и всюду плотно в  $E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$  и является вложенным аналитическим подмногообразием  $E_h(n)$  коразмерности один.

2. Уравнение  $a \in E_h(n)$  является уравнением первой степени негрубости тогда и только тогда, когда принадлежит  $\Sigma^1(n)$ .

**Доказательство.** Докажем что  $\Sigma^1(n)$  всюду плотно в  $E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$ . Пусть уравнение  $a \in E_h(n) \setminus \Sigma^0(n) \setminus \Sigma^1(n)$ . Покажем, что в любой его окрестности  $U(a)$  есть уравнение из  $\Sigma^1(n)$ .

Для нулевого уравнения это очевидно. Поэтому будем считать, что  $a(\varphi)$  ненулевая функция. Ее представление в виде (4) перепишем в следующей форме:

$$a(\varphi) = q(\varphi) \prod_{j=1}^r \sin^{k_j}(\varphi - \varphi_j), \quad (6)$$

где  $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_r$ ,  $k_1 + \dots + k_r = s$ . Так как  $a \notin \Sigma^k(n)$ ,  $k = 0, 1$ , то хотя бы одно из чисел  $k_j$  больше 1. Для определенности пусть  $k_1 \geq 2$ . Заменяем в (6) множитель  $\sin^{k_1}(\varphi - \varphi_1)$  на  $\sin^2(\varphi - \varphi_1) \prod_{s=1}^{k_1-2} \sin(\varphi - \varphi_1 - \mu\alpha_{1,s})$ , где все числа  $\alpha_{1,s} > 0$  и различны, а множители  $\sin^{k_j}(\varphi - \varphi_j)$ ,  $j = 2, \dots, r$ , на  $\prod_{s=1}^{k_j} \sin(\varphi - \varphi_j - \mu\alpha_{j,s})$ , где все числа  $\alpha_{j,s} > 0$  и различны. Полученную функцию обозначим  $a_\mu(\varphi)$ . При достаточно малом  $\mu > 0$  уравнение  $\dot{\varphi} = a_\mu(\varphi)$  принадлежит  $\Sigma^1(n) \cap U(a)$ . Тем самым, плотность  $\Sigma^1(n)$  в  $E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$  доказана.

Докажем, что  $\Sigma^1(n)$  – аналитическое подмногообразие в  $E_h(n)$ . Пусть  $a_0 \in \Sigma^1(n)$  и  $\varphi_0$  – двукратный нуль функции  $a_0(\varphi)$ . Согласно лемме 1  $a_0(\varphi) = q(\varphi) \sin^2(\varphi - \varphi_0) \Pi(\varphi)$ , где  $q(\varphi)$  – однородный тригонометрический полином четной степени  $n - s - 2$ , не обращающийся нигде в нуль,  $\Pi(\varphi) = \prod_{i=1}^s \sin(\varphi - \varphi_i)$  или  $\Pi(\varphi) = 1$ .

Функция  $\hat{a}: \mathbf{S}^1 \times E_h(n) \rightarrow \mathbf{R}$ , определенная равенством  $\hat{a}(\varphi, a) := a(\varphi)$ , является аналитической. Так как  $\hat{a}'_\varphi(\varphi_0, a_0) = 0$ ,  $\hat{a}''_{\varphi\varphi}(\varphi_0, a_0) \neq 0$ , то по теореме о неявной функции существуют число  $\varepsilon > 0$ , окрестность  $V(a_0)$  уравнения  $a_0$  в  $E_h(n)$  и аналитическая функция  $\hat{\varphi}: V(a_0) \rightarrow (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$ , такие, что  $\hat{\varphi}(a_0) = \varphi_0$  и для любых  $\varphi \in (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$ ,  $a \in V(a_0)$ :

$$a''(\varphi) \neq 0 \text{ и } a'(\varphi) = \hat{a}'_\varphi(\varphi, a) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \hat{\varphi}(a). \quad (7)$$

Определим аналитическую функцию  $g: V(a_0) \rightarrow \mathbf{R}$ , положив  $g(a) := \hat{a}(\hat{\varphi}(a), a) = a(\hat{\varphi}(a))$ . Обозначим  $h$  уравнение из  $E_h(n)$  с правой частью  $h(\varphi) = q(\varphi) \Pi(\varphi) = q(\varphi)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \Pi(\varphi)$ .

Так как

$$\begin{aligned} g'(a_0)h &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} g(a_0 + \tau h) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} [a_0(\hat{\varphi}(a_0 + \tau h)) + \tau h(\hat{\varphi}(a_0 + \tau h))] = \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} a_0(\hat{\varphi}(a_0 + \tau h)) + h(\varphi_0) = a'_0(\varphi_0) \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \hat{\varphi}(a_0 + \tau h) + h(\varphi_0), \end{aligned} \quad (8)$$

а  $a'_0(\varphi_0) = 0$ , то  $g'(a_0)h = h(\varphi_0) \neq 0$ . Таким образом,  $g'(a_0) \neq 0$ . Уменьшив при необходимости окрестность  $V(a_0)$ , мы можем считать, что  $\forall a \in V(a_0)$   $g'(a) \neq 0$  и все нули функции  $a(\varphi)$ , не принадлежащие интервалу  $(\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$ , простые. Отсюда и из (7) получаем, что  $\Sigma^1(n) \cap V(a_0) = g^{-1}(0)$ , и потому  $\Sigma^1(n)$  – вложенное аналитическое подмногообразие коразмерности один.

Пусть уравнение  $a$  имеет первую степень негрубости. По определению существует такая его окрестность  $U(a)$  в  $E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$ , что уравнение  $a$  и любое уравнение  $\tilde{a} \in U(a)$  топологически эквивалентны. Поскольку в  $U(a)$  есть уравнение из  $\Sigma^1(n)$ , то  $a$  имеет две особые точки четной кратности, а остальные особые точки имеют нечетную кратность. Покажем, что  $a \in \Sigma^1(n)$ . Запишем  $a(\varphi)$  в виде (6). Без ограничения общности можно считать, что особые точки четной кратности  $\varphi_1 \bmod 2\pi$  и  $(\varphi_1 + \pi) \bmod 2\pi$ . Предположим, что  $a \notin \Sigma^1(n)$ . Тогда либо а)  $k_1 \geq 4$ , либо б)  $k_1 = 2$  и для некоторого  $s \in \{2, \dots, r\}$   $k_s = 2m - 1 \geq 3$ .

В случае а) заменим в (6) множитель  $\sin^{k_1}(\varphi - \varphi_1)$  на

$$\sin^{k_1}(\varphi - \varphi_1) - \mu \sin^2(\varphi - \varphi_1) (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{k_1-2}.$$

Полученную функцию обозначим  $a_\mu(\varphi)$ . При достаточно малом  $\mu > 0$  уравнение  $\dot{\varphi} = a_\mu(\varphi)$  принадлежит  $U(a) \setminus \Sigma^0(n)$  и имеет больше особых точек чем уравнение  $a$ . Но это противоречит топологической эквивалентности уравнений  $a$  и  $a_\mu$ . Таким образом,  $a \in \Sigma^1(n)$ .

В случае б) пусть  $a_\mu(\varphi)$  – функция, полученная заменой в (б) множителя  $\sin^{k_s}(\varphi - \varphi_1)$  на  $\sin^{k_s}(\varphi - \varphi_s) - \mu \sin(\varphi - \varphi_s)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{k_s - 1}$ . Если  $\mu > 0$  достаточно мало, то уравнение  $\dot{\varphi} = a_\mu(\varphi)$  принадлежит  $U(a) \setminus \Sigma^0(n)$  и имеет больше особых точек, чем уравнение  $a$ . Снова получаем противоречие, и потому  $a \in \Sigma^1(n)$ .

Пусть уравнение  $a \in \Sigma^1(n)$  кроме двух седло-узловых особых точек имеет  $2r \geq 0$  гиперболических особых точек. Норма  $\|\cdot\|$  в  $E_h(n)$  эквивалентна  $C^2$ -норме

$$\|a\|_2 := \max_{\varphi \in S^1} \max\{|a(\varphi)|, |a'(\varphi)|, |a''(\varphi)|\}.$$

Поэтому из [9, с. 18–21] с учетом равенства (3) следует, что существует такая окрестность  $U(a)$  уравнения в  $E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$ , что любое уравнение  $\tilde{a} \in U(a)$  имеет две седло-узловые особые точки и  $2r$  гиперболических особых точек. Тем самым,  $\Sigma^1(n)$  открыто в  $E_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$ . Ясно, что уравнения  $a$  и  $\tilde{a}$  топологически эквивалентны. Поэтому уравнение  $a$  имеет первую степень негрубости.

#### 4. Связные компоненты множества грубых уравнений

Дугой (путем) в пространстве  $E_h(n)$ , соединяющей уравнение  $a^0$  с уравнением  $a^1$  будем называть непрерывное отображение  $\xi: I \rightarrow E_h(n)$ ,  $I = [0, 1]$ , такое, что  $\xi(0) = a^0$ ,  $\xi(1) = a^1$ . Если дуга  $\xi$  соединяет  $a^0$  с  $a^1$ , а дуга  $\eta$  соединяет  $a^1$  с  $a^2$ , то определено их произведение – дуга  $\chi = \xi \cdot \eta$ , определенная равенством  $\chi(\tau) = \xi(2\tau)$  при  $0 \leq \tau \leq 1/2$  и равенством  $\chi(\tau) = \eta(2\tau - 1)$  при  $1/2 \leq \tau \leq 1$ . Произведение  $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n$  дуг  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , таких, что  $\xi_j(1) = \xi_{j+1}(0)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , определяется по индукции. Дуга  $\xi^{-1}$ , обратная к дуге  $\xi$ , соединяющей  $a^0$  с  $a^1$ , определяется равенством  $\xi^{-1}(\tau) := \xi(1 - \tau)$ . Она соединяет  $a^1$  с  $a^0$ .

Из (3) следует, что  $\Sigma^0(n)$  при нечетном  $n = 2l - 1$  является объединением множеств  $\Sigma_m^0(n)$ ,  $m = 1, \dots, l$ , состоящее из уравнений, имеющих  $4m - 2$  (гиперболических) особых точек, а при четном  $n = 2l$  является объединением множеств  $\Sigma_m^0(n)$ ,  $m = 0, \dots, l$ , состоящее из уравнений, имеющих  $4m$  (гиперболических) особых точек. Обозначим также при четном  $n$   $^+\Sigma_0^0(n)$  ( $^-\Sigma_0^0(n)$ ) – подмножество  $\Sigma_0^0(n)$ , состоящее из таких уравнений  $a$ , что  $\forall \varphi$   $a(\varphi) > 0$  ( $a(\varphi) < 0$ ).

**Теорема 3.** Связными компонентами множества  $\Sigma^0(n)$  являются при четном  $n = 2l$  множества  $^+\Sigma_0^0(n)$ ,  $^-\Sigma_0^0(n)$  и  $\Sigma_m^0(n)$ , а при нечетном  $n = 2l - 1$  множества  $\Sigma_m^0(n)$  ( $m = 1, \dots, l$ ).

**Замечание.** Ясно, что множества  $\Sigma_m^0(n)$  – классы топологической эквивалентности уравнений из  $\Sigma^0(n)$ . Поэтому из теоремы 3 следует, что два грубых уравнения, имеющих особые точки, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует дуга  $\xi: I \rightarrow \Sigma^0(n)$ , их соединяющая.

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим случай четного  $n = 2l$ . Случай нечетного  $n$  рассматривается аналогично. Пусть уравнения  $a^k \in \Sigma_m^0(n)$ ,  $m = 1, \dots, l$ ;  $k = 0, 1$ . Представим их правые части по формуле (4):

$$a^k(\varphi) = q_k(\varphi) \prod_{i=1}^{2m} \sin(\varphi - \varphi_i^k), \quad (9)$$

где  $q_k(\varphi)$  – однородные полиномы, не обращающиеся в нуль, а

$$\varphi_1^k < \varphi_2^k < \dots < \varphi_{2m}^k < \varphi_1^k + \pi \quad (k = 0, 1). \quad (10)$$

Тогда  $\varphi_i^k \bmod 2\pi$ ,  $(\varphi_i^k + \pi) \bmod 2\pi$  ( $i = 1, \dots, 2m$ ) – все особые точки уравнения  $a^k$ . Мы можем считать, что числа  $\varphi_i^k$  в представлении (8) выбраны так, что

$$\operatorname{sgn} q_0(\varphi) = \operatorname{sgn} q_1(\varphi). \quad (11)$$

Действительно, если  $\operatorname{sgn} q_0(\varphi) = -\operatorname{sgn} q_1(\varphi)$ , то, обозначив  $\tilde{\varphi}_1^1 = \varphi_2^1, \dots, \tilde{\varphi}_{2m-1}^1 = \varphi_{2m}^1, \tilde{\varphi}_{2m}^1 = \varphi_1^1 + \pi$ , мы получим последовательность чисел  $\tilde{\varphi}_1^1 < \tilde{\varphi}_2^1 < \dots < \tilde{\varphi}_{2m-1}^1 < \tilde{\varphi}_{2m}^1 < \tilde{\varphi}_1^1 + \pi$  и равенство  $a^1(\varphi) = \tilde{q}_1(\varphi) \prod_{i=1}^{2m} \sin(\varphi - \tilde{\varphi}_i^1)$  с  $\tilde{q}_1(\varphi) = -q_1(\varphi)$ . Теперь  $\operatorname{sgn} q_0(\varphi) = \operatorname{sgn} \tilde{q}_1(\varphi)$ . Вернувшись к прежним обозначениям будем иметь (9)–(11).

Обозначим  $\varphi_i(\tau) := (1 - \tau)\varphi_i^0 + \tau\varphi_i^1$ . Для любого  $\tau \in I$  уравнение

$$\xi(\tau): \dot{\varphi} = [(1 - \tau)q_0(\varphi) + \tau q_1(\varphi)] \prod_{i=1}^{2m} \sin(\varphi - \varphi_i(\tau))$$

принадлежит  $E_h(n)$  и имеет ровно  $4m$  гиперболических особых точек  $\varphi_i(\tau) \bmod 2\pi$ ,  $(\varphi_i(\tau) + \pi) \bmod 2\pi$ ,  $i = 1, \dots, 2m$ . Следовательно,  $\xi: I \rightarrow \Sigma_m^0$  – дуга, соединяющая в  $\Sigma_m^0(n)$  уравнения  $a^0$  и  $a^1$ . Таким образом,  $\Sigma_m^0(n)$  ( $m = 1, \dots, l$ ) – связное множество.

Если  $a^0, a^1 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$  (соответственно,  $a^0, a^1 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$ ), то дуга  $\xi: I \rightarrow {}^+\Sigma_0^0(n)$  (соответственно,  $\xi: I \rightarrow {}^-\Sigma_0^0(n)$ ) задается равенством  $\xi(\tau) = (1 - \tau)a^0 + \tau a^1$ . Следовательно, множества  ${}^+\Sigma_0^0(n)$  и  ${}^-\Sigma_0^0(n)$  также связны.

Если грубые уравнения  $a^0$  и  $a^1$  можно соединить дугой в  $\Sigma^0(n)$ , то они топологически эквивалентны. Уравнения из  $\Sigma_m^0(n)$  и  $\Sigma_s^0(n)$  при  $m \neq s$  между собой топологически не эквивалентны. Следовательно, множества  $\Sigma_m^0(n)$ ,  $m = 1, \dots, l$ , – связные компоненты  $\Sigma^0(n)$ . При четном  $n$  любая дуга, соединяющая уравнение  $a^0 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$  (соответственно,  $a^0 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$ ), с уравнением из  $\Sigma^0(n) \setminus {}^+\Sigma_0^0(n)$  (соответственно, из  $\Sigma^0(n) \setminus {}^-\Sigma_0^0(n)$ ) содержит бифуркационные точки. Следовательно,  ${}^+\Sigma_0^0(n)$  и  ${}^-\Sigma_0^0(n)$  – связные компоненты  $\Sigma^0(n)$ .

### 5. Простые дуги в пространстве $E_h(n)$ .

Дугу  $\xi: I \rightarrow E_h(n)$ , соединяющую два грубых уравнения  $a^0$  и  $a^1$  назовем *простой*, если  $\xi \in C^\infty(I, E_h(n))$ ,  $\xi(\tau) \in \Sigma^0(n)$  всех  $\tau \in I$ , кроме, возможно, их конечного множества, для точек которого  $\xi(\tau) \in \Sigma^1(n)$ , причем  $\xi$  трансверсальна  $\Sigma^1(n)$  в этих точках.

**Теорема 4.** Для любых грубых уравнений  $a^0$  и  $a^1$  из  $E_h(n)$  существует простая дуга  $\xi: I \rightarrow E_h(n)$ , соединяющая  $a^0$  с  $a^1$ . Если  $a^0 \in \Sigma_m^0(n)$ ,  $a^1 \in \Sigma_p^0(n)$ ,  $0 < m \leq p$ , или  $0 \leq m < p$ , то  $\xi = \zeta_m \cdot \zeta_{m+1} \cdots \zeta_p$ , где  $\zeta_i: I \rightarrow \bar{\Sigma}_i^0(n)$ ,  $m \leq i \leq p$ . Если  $a^0 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$ ,  $a^1 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$ , то  $\xi = {}^+\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot {}^-\zeta_0$ , где  ${}^\pm\zeta_0: I \rightarrow {}^\pm\bar{\Sigma}_0^0(n)$ ,  $\zeta_1: I \rightarrow \bar{\Sigma}_1^0(n)$ .

**Доказательство.** Для сокращения формулировок, дугу  $\xi: I \rightarrow E_h(n)$ , являющуюся произведением  $C^\infty$ -дуг, с теми же свойствами что у простой дуги, кроме гладкости, которая может нарушаться только в точках  $\tau \in (0, 1)$ , таких, что  $\xi(\tau) \in \Sigma^0(n)$ , будем называть *полупростой*. Нам понадобится:

**Лемма 2.** При четном  $n = 2l$  для любого  $j = 0, 1, \dots, l - 1$ , а при нечетном  $n = 2l - 1$  для любого  $j = 1, \dots, l - 1$  существует  $C^\infty$ -дуга  $\xi_j: I \rightarrow E_h(n)$  такая, что  $\xi_j(1/2) \in \Sigma^1(n)$ ,  $\xi_j(0, 1/2) \in \Sigma_j^0(n)$ ,

$\xi_j(1/2, 1) \in \Sigma_{j+1}^0(n)$ ,  $\xi_j$  трансверсальна  $\Sigma^1(n)$ . При  $j=0$  дуга  $\xi_0 = \xi_0^+$  (соответственно,  $\xi_0 = \xi_0^-$ ) может быть выбрана так, что  $\xi_0^+(0, 1/2) \in {}^+\Sigma_0^0(n)$  (соответственно,  $\xi_0^-(0, 1/2) \in {}^-\Sigma_0^0(n)$ ).

**Доказательство леммы 2.** Пусть  $n = 2l$  или  $n = 2l - 1$ . Определим  $C^\infty$ -дугу  $\xi_j : I \rightarrow E_h(n)$ , поставив в соответствие числу  $\tau \in I$  уравнение

$$\dot{\varphi} = \sigma[\sin^2 \varphi - (\tau - 0,5)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)](\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{l-j-1} \Pi(\varphi),$$

где для  $n = 2l$   $\Pi(\varphi) = \prod_{k=1}^{2j} \sin(\varphi - \pi k / 2j)$ ,  $\sigma = 1$  при  $j = 1, \dots, l-1$  и  $\Pi(\varphi) = 1$ ,  $\sigma = \pm 1$  при  $j = 0$ , а для  $n = 2l - 1$   $\Pi(\varphi) = \prod_{k=1}^{2j-1} \sin(\varphi - \pi k / (2j - 1))$ ,  $\sigma = 1$  при  $j = 1, \dots, l-1$ .

То, что дуги  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, l-1$  имеют свойства, сформулированные в лемме, за исключением трансверсальности, очевидно. Трансверсальность  $\xi_j$  подмногообразию  $\Sigma^1(n)$  в точке  $\tau = 1/2$  равносильна неравенству  $\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=1/2} g(\xi_j(\tau)) \neq 0$ , где функция  $g$  – функция, задающая  $\Sigma^1(n)$  в окрестности уравнения  $a_0 = \xi_j(1/2)$ . Это неравенство доказывается аналогично неравенству (8).

Перейдем к непосредственному доказательству утверждений теоремы. Пусть  $a^0 \in \Sigma_m^0(n)$ ,  $a^1 \in \Sigma_p^0(n)$ . Можно считать, что  $m \leq p$ .

Если  $m = p \geq 1$ , то согласно доказательству теоремы 3 существует  $C^\infty$ -дуга  $\tilde{\xi} : I \rightarrow E_h(n)$ , соединяющая  $a^0$  и  $a^1$ .

Пусть  $0 \leq m < p$ , а  $\xi_j : I \rightarrow E_h(n)$ ,  $j = m, \dots, p-1$  – дуги, определенные в лемме 2. Из теоремы 3 следует, что существуют  $C^\infty$ -дуги  $\eta_j : I \rightarrow \Sigma_j^0(n)$ ,  $j = m, \dots, p$ , такие, что  $\eta_m(0) = a^0$ ,  $\eta_p(1) = a^1$ ,  $\eta_i(0) = \xi_{i-1}(1)$ ,  $\eta_{i-1}(1) = \xi_{i-1}(0)$  для  $i = m+1, \dots, p$ . Теперь  $\tilde{\xi} = \eta_m \cdot \xi_m \cdots \eta_{p-1} \cdot \xi_{p-1} \cdot \eta_p$  – полупростая дуга, соединяющая  $a^0$  и  $a^1$ .

Пусть  $m = p = 0$ ,  $\xi_0^+$  и  $\xi_0^-$  – дуги, определенные в лемме 2. Если  $a^0$  и  $a^1$  принадлежат одной компоненте  ${}^+\Sigma_0^0(n)$  или  ${}^-\Sigma_0^0(n)$ , то существует  $C^\infty$ -дуга  $\xi : I \rightarrow \Sigma_0^0(n)$ , соединяющая  $a^0$  и  $a^1$ . Пусть  $a^0$  и  $a^1$  принадлежат разным множествам  ${}^+\Sigma_0^0(n)$  и  ${}^-\Sigma_0^0(n)$ . Для определенности, пусть  $a^0 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$ ,  $a^1 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$ . Согласно теореме 3 существуют  $C^\infty$ -дуги  ${}^\pm\eta_0 : I \rightarrow {}^\pm\Sigma_0^0(n)$  и  $\eta_1 : I \rightarrow \Sigma_1^0(n)$  такие, что  ${}^+\eta_0(0) = a^0$ ,  ${}^+\eta_0(1) = {}^+\xi_0(0)$ ,  ${}^-\eta_0(0) = {}^-\xi_0(0)$ ,  ${}^-\eta_0(1) = a^1$ ,  $\eta_1(0) = {}^+\xi_0(1)$ ,  $\eta_1(1) = {}^-\xi_0(1)$ . Тогда  $\tilde{\xi} = {}^+\eta_0 \cdot {}^+\xi_0 \cdot \eta_1 \cdot ({}^-\xi_0)^{-1} \cdot {}^-\eta_0$  – полупростая дуга, соединяющая  $a^0$  и  $a^1$ .

Осталось показать, как полупростую дугу  $\tilde{\xi}$  заменить простой дугой  $\xi$ , соединяющей  $a^0$  и  $a^1$ . Пусть гладкость  $\tilde{\xi}$  нарушается для конечного числа значений параметра  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$ , таких, что  $\tilde{\xi}(\tau_j) \in \Sigma^0(n)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Для уравнений  $\tilde{\xi}(\tau_j)$  выберем окрестности  $U_j = \{a : \|a - \tilde{\xi}(\tau_j)\| < \rho\}$ , содержащиеся в  $\Sigma^0(n)$  и не пересекающиеся между собой, а затем число  $\varepsilon_0 > 0$  так, чтобы  $\tilde{\xi}$  было определено на интервалах  $I_j^0 = (\tau_j - \varepsilon_0, \tau_j + \varepsilon_0)$ . Ограничения  $\tilde{\xi}$  на промежутки  $[0, \tau_j + \varepsilon_0)$  и  $(\tau_j - \varepsilon_0, 0]$  можно продолжить, соответственно, до  $C^\infty$ -отображений  $\xi_j^+ : I_j^0 \rightarrow E_h(n)$  и  $\xi_j^- : I_j^0 \rightarrow E_h(n)$  (теми же формулами, что была определена  $\tilde{\xi}$  на промежутках  $[0, \tau_j + \varepsilon_0)$  и  $(\tau_j - \varepsilon_0, 0]$ ). Выберем  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  столь малым, что

$$\forall j=1, \dots, N \quad \forall \tau \in I_j = (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon) \quad \xi_j^\pm(\tau) \in U_j.$$

Пусть  $\chi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow I$  – такая  $C^\infty$ -функция, что  $\chi(\tau) = 0$  при  $\tau \in (-\varepsilon, -\varepsilon/2)$  и  $\chi(\tau) = 1$  при  $\tau \in (\varepsilon/2, \varepsilon)$ . Определим теперь  $C^\infty$ -дугу  $\xi: I \rightarrow E_h(n)$ , положив  $\xi(\tau) = \tilde{\xi}(\tau)$  для всех  $\tau$  вне интервалов  $I_j$  и  $\xi(\tau) = (1 - \chi(\tau - \tau_j))\xi_j^-(\tau) + \chi(\tau - \tau_j)\xi_j^+(\tau) \quad \forall \tau \in I_j$ . Так как окрестность  $U_j$  выпукла, то  $\forall \tau \in I_j \quad \xi(\tau) \in U_j$  и потому  $\xi(\tau) \in \Sigma^0(n)$ . Следовательно,  $\xi$  –  $C^\infty$ -гладкая дуга, соединяющая уравнение  $a^0$  с уравнением  $a^1$ , с теми же точками бифуркации, что и  $\tilde{\xi}$ .

Представление  $\xi$  в виде произведения дуг  $\zeta_i$  следует из конструкции  $\xi$ .

**Замечание.** Дуга  $\xi$ , существование которой утверждается в теореме 4, содержит наименьшее число точек бифуркаций среди всех дуг, соединяющих уравнения  $a^0$  и  $a^1$ .

### Литература

1. Palis, J. Fifty problems in dynamical systems / J. Palis, C.C. Pugh // Manning A. (eds.) Dynamical Systems–Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 468. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. – P. 345–353.
2. Newhouse, S. There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows / S. Newhouse, M.M. Peixoto // Trois études en dynamique qualitative, Astérisque. – Paris: Soc. Math. France, 1976. – Vol. 31. – P. 15–41.
3. Matsumoto Sh., There are two isotopic Morse – Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs / Sh. Matsumoto // Inventiones mathematicae. – 1979. – Vol. 51, no. 1. – P. 1–7.
4. Nozdrinova E.V. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle / E.V. Nozdrinova // Нелинейная динамика. – 2018. – Т. 14, № 4. – С. 543–551.
5. Gutiérrez C. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds / C. Gutiérrez, W. De Melo // Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 597. – Springer. – 1977. – P. 230–251.
6. Ройтенберг В.Ш. О связных компонентах множества векторных полей Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Труды вторых Колмогоровских чтений. – Ярославль: ЯГПУ, 2004. – С. 352–358.
7. Ройтенберг В.Ш. О связных компонентах множества полиномиальных векторных полей, грубых в окрестности экватора сферы Пуанкаре // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. – 2015. – № 4. – С. 22–29.
8. Ройтенберг В.Ш. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2018. – Т. 50, № 4. – С. 398–404.
9. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.
10. Хирш, М. Дифференциальная топология / М. Хирш. – М.: Мир, 1979. – 280 с.

*Поступила в редакцию 18 декабря 2019 г.*

**ON THE STRUCTURE OF THE SPACE OF HOMOGENEOUS POLYNOMIAL  
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A CIRCLE****V.Sh. Roitenberg**Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation  
E-mail: vroitenberg@mail.ru

In this paper, differential equations with their right-hand sides as homogeneous trigonometric polynomials of  $n$  degree are examined. The phase space of such equations is a circle. Rough equations, for which the topological structure of the phase portrait does not change when considering a close equation, are described. An equation can be seen as rough if and only if its right-hand side has only simple zeros, that is, all the singular points of which are hyperbolic. The set of all the rough equations is open and is everywhere dense in the space  $E_n(n)$  of the equations under consideration. The connected components of this set are described. Two rough equations with singular points are attributed to the same component if and only if they are topologically equivalent. In the set of all the non-rough equations, an open and everywhere dense subset is selected, consisting of the equations of the first degree of non-roughness; these are the equations, for which the topological structure of the phase portrait does not change when considering a close non-rough equation. It is an analytic submanifold of codimension one in  $E_n(n)$  (the bifurcation manifold) and consists of the equations, for which all the singular points are hyperbolic, with the exception of two saddle-node singular points. It is proved that any two rough equations can be connected in  $E_n(n)$  by a smooth arc with a finite number of bifurcation points where this arc is transversal to the bifurcation manifold.

*Keywords: differential equation on a circle; trigonometric polynomial; roughness; bifurcation manifold; connected component.*

**References**

1. Palis J., Pugh C.C. Fifty problems in dynamical systems. In: Manning A. (eds) *Dynamical Systems–Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 468, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. DOI: 10.1007/BFb0082633
2. Newhouse S., Peixoto M.M. There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows. *Trois études en dynamique qualitative, Astérisque*, Vol. 31, Paris: Soc. Math. France, 1976, pp. 15–41. [http://www.numdam.org/item/AST\\_1976\\_\\_31\\_\\_15\\_0/](http://www.numdam.org/item/AST_1976__31__15_0/)
3. Matsumoto Sh. There are two isotopic Morse–Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs. *Inventiones mathematicae*, 1979, Vol. 51, no. 1, pp. 1–7. DOI: 10.1007/BF01389908
4. Nozdrinova E.V. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, Vol. 14, no. 4, pp. 543–551. DOI: 10.20537/nd180408
5. Gutiérrez C., De Melo W., The connected components of Morse-Smale vector fields on two manifolds, *Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976)*, 230–251, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 597, Springer, Berlin, 1977, pp. 230–251.
6. Roytenberg V.Sh. O svyaznykh komponentakh mnozhestva vektornykh poley Morsa–Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh (O the connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds). *Trudy vtorykh Kolmogorovskikh chteniy*, Yaroslavl', YaGPU Publ., 2004, pp. 352–358. (in Russ.).
7. Roytenberg V.Sh. On connected components of the set of polynomial vector fields, structurally stable in a neighborhood of the equator of the Poincare sphere. *The Bulletin of the Adyge State University, the series "Natural-Mathematical and Technical Sciences"*, 2015, no. 4, pp. 22–29. (in Russ.).

8. Roitenberg V.Sh. Structural Stability of Planar Vector Fields that are Invariant Under the Rotation Group. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*, 2018, Vol. 50, no. 4, pp. 398–404. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-4-398-404. (in Russ.).

9. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Teoriya bifurkatsiy dinamicheskikh sistem na ploskosti* (The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane). Moscow, Nauka Publ., 1967, 487 p. (in Russ.).

10. Hirsch M.W. *Differential topology*. Springer-Verlag, 1976, 222 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9449-5

*Received December 18, 2019*

## ДИФРАКЦИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН, ВОЗБУЖДЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

**С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*

*E-mail: gurevichsi@susu.ru*

Цель работы – создание методики и средств выявления несплошностей в металле с помощью теневого и зеркально-теневого методов контроля ультразвуковой дефектоскопии с использованием бесконтактных способов генерации и регистрации УЗ волн. Для достижения этой цели на специальном стенде проведены исследования по дифракции объемных упругих волн на цилиндрической полости. Для возбуждения ультразвука и приема дифрагированных волн используются импульсный лазер и широкополосный ЭМА приемник. Установлено, что наряду с уменьшением амплитуды УЗ импульсов продольных и поперечных волн, прошедших через несплошность, количественными оценками брака могут служить изменение длительности импульсов и частоты, на которую приходится максимум их спектра

*Ключевые слова: лазерное возбуждение ультразвука; ЭМА-приемник; объемный дефект; теневой метод лазерно-акустического контроля; спектр импульса ультразвуковых волн.*

### Введение

Неразрушающий контроль качества металлических материалов и изделий основан, как правило, на применении акустических методов. При этом ввод и прием упругих волн в изделие осуществляется пьезопреобразователями через контактные среды. Однако, при больших скоростях движения, высоких и низких температурах, шероховатой и загрязненной поверхности объекта контроля, а также, когда механический контакт и контактные жидкости применять недопустимо, указанные методы должны быть преимущественно бесконтактными. Одним из таких методов является генерация ультразвуковых (УЗ) волн наносекундными лазерными импульсами и их регистрация на основе обратного электромагнитоакустического (ЭМА) преобразования с помощью широкополосных (ШП) ЭМА приёмников [1–2]. В этом случае отпадает необходимость в пьезопреобразователях и контактных средах, так как источником ультразвука становится освещаемая поверхность контролируемого изделия. Размеры и форма такого термоакустического (ТА) источника легко регулируются с помощью линз, а сам лазер может быть достаточно удален от объекта контроля. Кроме того, появляется возможность генерировать в изделии относительно короткие импульсы, с непрерывным спектром частот. Поскольку ШП ЭМА приемник регистрирует такие импульсы практически без искажений, то анализ амплитудно-частотных спектров импульсов дифрагированных УЗ волн может существенно расширить информацию о структуре, природе, форме выявляемых дефектов, величине «мертвой зоны» и т. п.

В практике традиционной УЗ дефектоскопии металлических материалов и изделий нашли широкое применение теневой и зеркально-теневого методы УЗ контроля [3]. Однако сведения о методике и средствах выявления несплошностей с использованием бесконтактных способов возбуждения и приема ультразвука в литературе практически отсутствуют [4, 5].

В данной работе были проведены исследования по дифракции УЗ волн на дефекте типа «цилиндрическая полость». Возбуждение волн осуществлялось лазерными импульсами наносекундной длительности, прием дифрагированных УЗ волн – ЭМА приемником.

Так как полоса пропускания частоты электрических колебаний ЭМА приемника достаточно велика (до 200 МГц), то форма, амплитуда, длительность и амплитудно-частотный спектр *регу-*

стрируемых ЭМА приёмником электрических импульсов отличаются от соответствующих параметров возбуждаемых в металле ультразвуковых импульсов, незначительно. В дальнейшем электрические импульсы, наблюдаемые на экране осциллографа, будем называть «псевдо» упругими. Признаками обнаружения дефектов в этом случае могут служить уменьшение амплитуды УЗ волн, прошедших через контролируемое изделие, увеличение времени их прохождения, изменение длительности и амплитудно-частотного спектра УЗ импульсов.

### Методика проведения исследований

Для проведения экспериментальных исследований была разработана и изготовлена установка, структурная схема которой приведена на рис. 1. Источником УЗ импульсов служит термоакустический излучатель (ТА) – нагреваемый лазерными импульсами участок поверхности контролируемого изделия (7). Возбуждаемые в нем УЗ импульсы регистрируются бесконтактным широкополосным ЭМА приемником (8) и поступают на вход цифрового осциллографа (11). В осциллографе осуществляется запоминание формы импульсов, измерение их амплитудно-временных параметров, быстрое преобразование Фурье (БПФ). Результаты наблюдений и измерений выводятся на экран дисплея. Кроме того, в состав установки входят оптический аттенюатор (2) для плавной регулировки мощности лазерного излучения, измеритель мощности излучения (3), набор диафрагм (4), оптическая линза (5) для изменения формы и размеров ТА излучателя, поворотное зеркало (6).

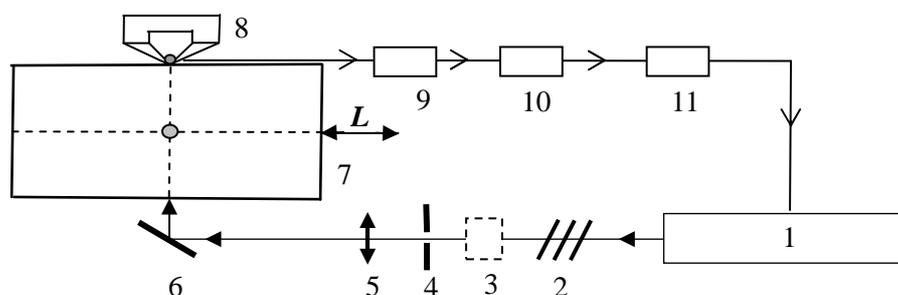


Рис. 1. Структурная схема экспериментальной установки:

1 – лазер; 2 – оптический аттенюатор; 3 – измеритель мощности лазерного излучения; 4 – диафрагма; 5 – линза; 6 – поворотное зеркало; 7 – объект контроля с дефектом; L – миллиметровая шкала; 8 – ЭМА приемник; 9 – усилитель тока; 10 – усилитель напряжения; 11 – цифровой осциллограф

Для отработки методики контроля на стенде были проведены исследования по выявлению объёмного дефекта в дюралюминиевом прямоугольном образце размерами 100×45×25 мм. Дефект имел вид сквозного полого цилиндра с осью симметрии, ориентированной параллельно облучаемой поверхности бруска.

Положение ЭМА приемника на поверхности контролируемого изделия определялось в зависимости от выбранного метода ультразвукового контроля. При теневом методе он располагается на поверхности образца противоположной той, где действует ТА излучатель. При зеркально-теневом методе ЭМА приемник размещается на облучаемой поверхности образца. Конструкция стенда предусматривает перемещение образца с дефектом относительно неподвижных ТА излучателя и ЭМА приемника в обе стороны от оси симметрии дефекта.

Нагрев поверхности металла осуществлялся импульсным лазером Brilliant-B фирмы QUANTEL. Длина волны лазерного излучения – 1064 нм, длительность световых импульсов 4 – 6 нс, их максимальная энергия 0,85 Дж. Диаметры ТА излучателя и моделируемого дефекта были соответственно равны 9 и 5 мм. Считается, что упругие колебания, возбуждаемые таким ТА излучателем в образце, ограничены «ближней» зоной (область действия) в форме прямого цилиндра [6]. Площадь основания такого цилиндра определяется площадью лазерного пятна, а его высота – шириной образца

### Результаты измерений и их обсуждение

На рис. 2 приведены осциллограммы «псевдо» упругих импульсов при «прозвучивании» образца теневым методом: *а)* без дефекта и *б)* с дефектом. Эксперимент показал, что в образце возбуждаются достаточно интенсивные импульсы поперечных (3) и продольных (2) УЗ волн, причем если в качестве критерия рассматривать размах колебаний, то последние являются более «чувствительными» к дефекту.

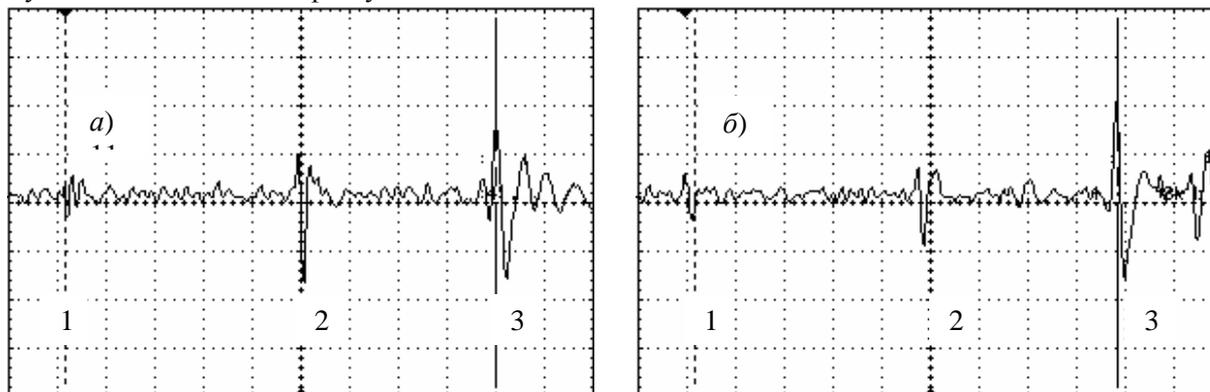


Рис. 2. Осциллограммы «псевдо» упругих импульсов, прошедших от излучателя к приемнику в контролируемом образце: *а)* – без дефекта; *б)* – с дефектом.  
1 – «зондирующий»; 2 – продольной волны; 3 – поперечной волны.  
Цена деления шкалы по вертикали – 1,0 В/дел, по горизонтали – 2,5 мкс/дел

На рис. 3 отражены результаты измерений амплитуд «псевдо» упругих импульсов поперечных и продольных волн в зависимости от расстояния  $L$  между осью симметрии дефекта и прямой, проходящей через центры ТА излучателя и ЭМА приемника  $U = f(L)$ .

Диапазон сканирования образца с дефектом относительно ТА излучателя  $\pm 10$  мм, шаг сканирования – 1 мм. Видно, что по мере выхода дефекта из области действия ТА излучателя интенсивность импульсов заметно увеличивается. Минимальные значения амплитуд волн обоих типов приходятся на ось симметрии моделируемого дефекта. За пределами дефекта амплитуды изменяются незначительно. По результатам измерений можно оценить средний коэффициент выявляемости дефекта [3]  $k_c = U_d / U_0$ , где  $U_0$  – амплитуда сигнала при отсутствии дефекта,  $U_d$  – минимальная амплитуда сигнала при наличии дефекта. Для продольных волн он равен 0,53, для поперечных – 0,46.

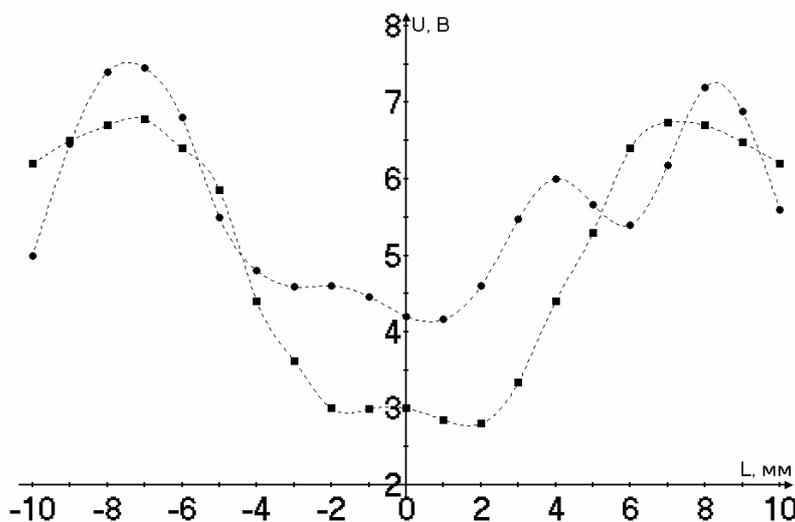


Рис. 3. Зависимость амплитуд «псевдо» упругих импульсов от расстояния между осью симметрии дефекта и прямой, соединяющей центры ТА излучателя и ЭМА-приемника:  
● – продольные волны; ■ – поперечные волны

На рис. 4 приведена зависимость  $t = f(L)$ , где  $t$  – длительность «псевдо» упругих импульсов поперечных и продольных волн.

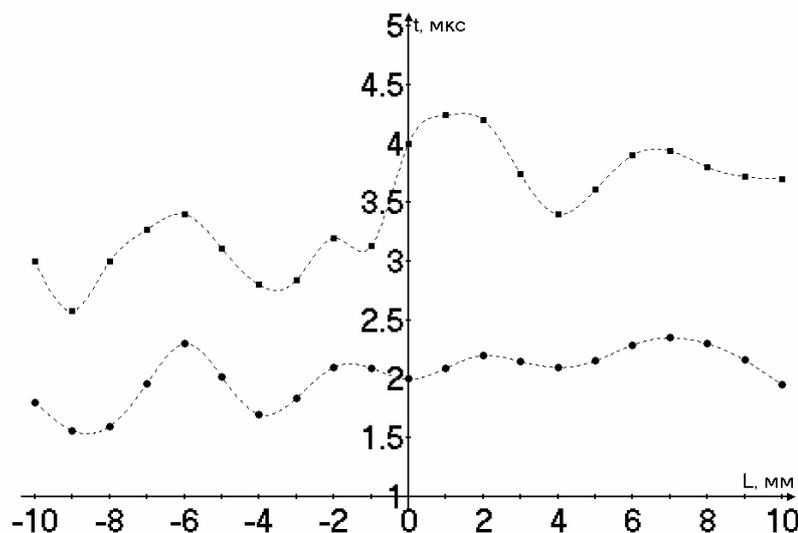


Рис. 4. Зависимость длительности «псевдо» упругих импульсов от расстояния между осью симметрии дефекта и прямой, соединяющей центры ТА излучателя и ЭМА-приемника: ● – продольные волны; ■ – поперечные волны

За длительность импульсов принято время  $t$  от начала и до конца основного колебательного процесса (см. рис. 6, 7). Из графика следует, что длительность импульсов упругих волн, прошедших через контролируемое изделие с дефектом, изменяется, причем для поперечных волн это изменение более существенно, чем для продольных.

На рис. 5 приведены результаты исследования зависимости  $F = f(L)$ , где  $F$  – частота, на которую приходится максимум амплитуды в спектре «псевдо» упругих импульсов поперечных и продольных волн.

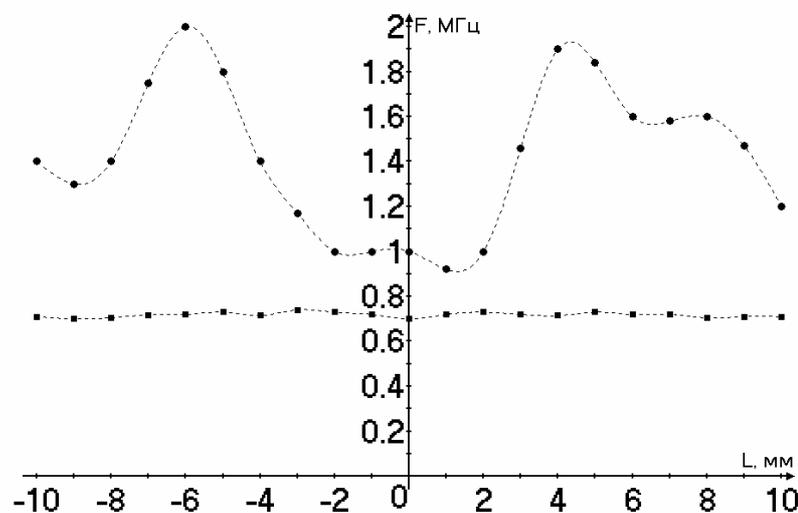


Рис. 5. Зависимость частоты, на которую приходится максимум амплитуды в спектре «псевдо» упругих импульсов, от расстояния между осью симметрии дефекта и прямой, соединяющей центры ТА излучателя и ЭМА приемника: ● – продольные волны; ■ – поперечные волны

Эта зависимость определялась по полученным осциллограммам, форма которых показана на рис. 6 и 7. Приведенные осциллограммы относятся к случаю, когда прямая, соединяющая центры ТА излучателя и ЭМА приемника совпадает с осью симметрии дефекта ( $L = 0$  мм) и когда она находится за его пределами ( $L = \pm 10$  мм).

Из анализа рис. 5 следует, что для поперечных волн частота  $F$  практически не зависит от наличия дефекта. Для продольных волн, после того как дефект вышел за область действия ТА излучателя, наблюдается её существенное увеличение.

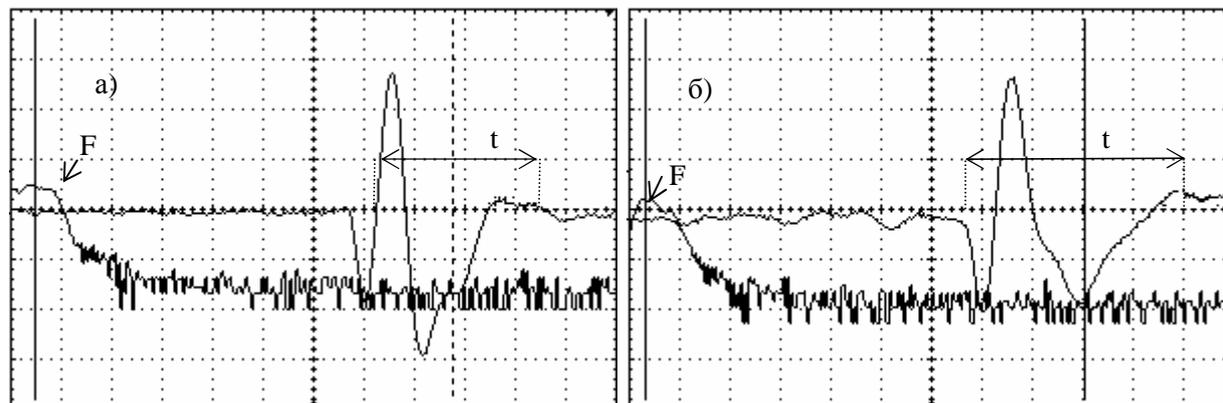


Рис. 6. Осциллограммы «псевдо» упругих импульсов продольных волн и их спектров, прошедших через контролируемый образец с дефектом: а)  $L = \pm 10$  мм,  $F = 1,2$  МГц, б)  $L = 0$  мм,  $F = 0,8$  МГц.  
Цена деления шкалы по вертикали – 1,0 В/дел, по горизонтали – 500 нс/дел

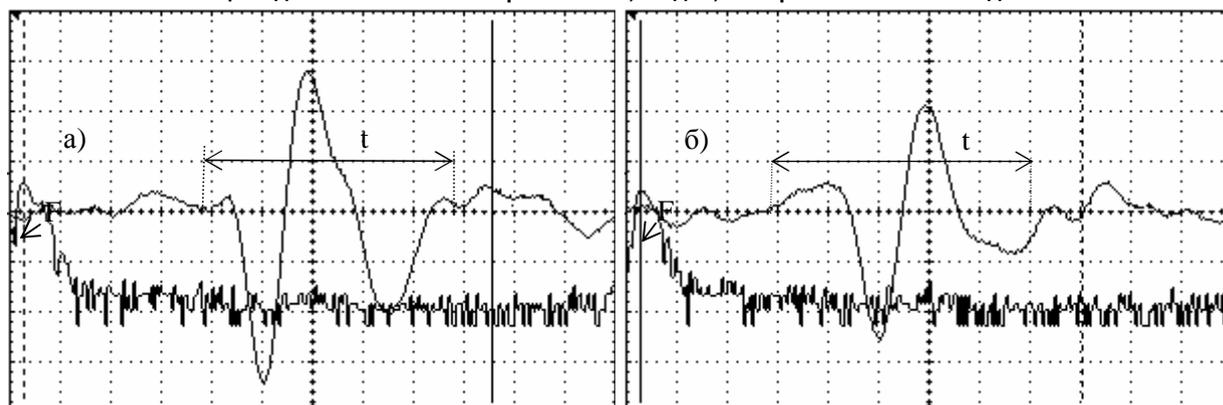


Рис. 7. Осциллограммы «псевдо» упругих импульсов поперечных волн и их спектров, прошедших через контролируемый образец с дефектом: а)  $L = \pm 10$  мм,  $F = 1,2$  МГц, б)  $L = 0$  мм,  $F = 0,7$  МГц.  
Цена деления шкалы по вертикали – 1,0 В/дел, по горизонтали – 500 нс/дел

## Выводы

1. Установлено, что для практической реализации теневого и зеркально-теневого методов УЗ дефектоскопии металлических материалов и изделий можно успешно использовать бесконтактные способы возбуждения и приема УЗ волн с помощью наносекундного лазера и широкополосного ЭМА приемника.

2. Из результатов исследований по выявлению искусственного объемного дефекта в дюралюминии с помощью теневого метода следует, что для количественной оценки качества материалов и изделий можно использовать такие параметры, как: отношение минимальной амплитуды сигнала при наличии дефекта к амплитуде сигнала при отсутствии дефекта; увеличение длительности импульсов поперечных волн, увеличение частоты, на которую приходится максимум спектра импульсов продольных волн.

## Литература

1. Лямшев, Л.М. Лазерное термооптическое возбуждение звука / Л.М. Лямшев. – М.: Наука, 1989. – 237 с.
2. Гуревич, С.Ю. Лазерная генерация и электромагнитная регистрация нормальных акустических волн в ферромагнитных материалах / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров // Журнал технической физики. – 2016. – Том 86. – Вып. 3. – С.114–117.
3. Ермолов, И.Н. Неразрушающий контроль. Кн. 2. Акустические методы контроля / И.Н. Ермолов, И.П. Алешин, А.И. Потапов. – М.: Высшая школа, 1991. – 283 с.
4. Лазерно-акустический метод контроля дефектов в металлах и металлизированных покрытиях диэлектриков / В.А. Голенищев-Кутузов, Р.И. Калимуллин, С.А. Мигачев и др. // Дефектоскопия. – 2011. – № 2. – С. 40–44.

5. Обнаружение поверхностных и объемных дефектов в металлах лазерно-акустическим способом / И.П. Исмагилов, В.А. Голенищев-Кутузов, Р.И. Калимуллин и др. // Дефектоскопия. – 2014. – № 6. – С. 16–24.

6. Гуревич, С.Ю. Характеристики направленности лазерного импульсного термоакустического излучателя в немагнитных металлах / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Е.В. Голубев // Дефектоскопия. – 2017. – № 4. – С. 22–26.

*Поступила в редакцию 21 мая 2019 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 2, pp. 31–36*

---

DOI: 10.14529/mmph200104

## **DIFFRACTION ON THE CYLINDRICAL CAVITY OF ULTRASONIC WAVES EXCITED BY PULSE LASER RADIATION**

**S. Yu. Gurevich, Yu. V. Petrov**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: gurevichsi@susu.ru*

The goal of the research is to create techniques and tools for detecting the discontinuities in metal with the help of the shadow and shadow-mirror methods of monitoring the ultrasonic flaw detection using the non-contact methods of ultrasonic wave generation and registration. To achieve this goal, studies on the diffraction of bulk elastic waves in a cylindrical cavity have been carried out on a special stand. A pulsed laser and a broadband EMA receiver are used to excite ultrasound and receive the diffracted waves. It is established that along with a decrease in the amplitude of the ultrasound pulses of longitudinal and shear waves transmitted through a discontinuity, a change in the pulse duration and frequency, which accounts for the maximum of their spectrum, can be used as the quantitative estimate of the defects.

*Keywords: laser excitation of ultrasound; EMA receiver; volumetric defect; shadow method of laser-acoustic control; pulse spectrum of ultrasonic waves.*

### **References**

1. Lyamshev L.M. *Lazernoe termoopticheskoe vozbuзhdenie zvuka* (Laser thermo-optical sound excitation). Moscow, Nauka Publ., 1989, 237 p. (in Russ.).
2. Gurevich S. Yu., Petrov Yu. V. Laser generation and electromagnetic detection of normal acoustic waves in ferromagnetic metals. *Technical Physics*, 2016, Vol. 61, p. 432–435. DOI: 10.1134/S1063784216030099
3. Ermolov I.N., Aleshin I.P., Potapov A.I. *Nerazrushayushchiy kontrol'. Kn. 2. Akusticheskie metody kontrolya* (Nondestructive testing. Vol. 2. Acoustic methods of control.). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991, 283 p.
4. Golenishchev-Kutuzov V.A., Kalimullin R.I., Migachev S.A., Petrushenko Yu.Ya., Khasanov A.A. Laser acoustic method for the inspection of flaws in metals and the metallized coatings of dielectrics. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2011, Vol. 47, no. 2, pp. 118–121. DOI: 10.1134/s1061830911020069
5. Ismagilov I.R., Golenishchev-Kutuzov V.A., Kalimullin R.I., Migachev S.A., Khasanov A.A. Detecting surface and volume defects in metals by the laser-acoustic method. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2014, Vol. 50, no. 6, pp. 318–324. DOI: 10.1134/s1061830914060060
6. Gurevich S.Y., Petrov Y.V., Golubev E.V. Directional Characteristics of a Laser Pulsed Thermoacoustic Emitter in Nonmagnetic Metals. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2017, Vol. 53, no. 4, pp. 260–264. DOI: 10.1134/s1061830917040027

*Received May 21, 2019*

## МОДЕЛЬ ШУМА КВАНТОВАНИЯ ВЕКТОРА С НЕНУЛЕВЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ

**В.В. Заволокин**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zavolokinvv@susu.ru

Получена математическая модель шума квантования, возникающая в высокоточных измерительных системах. Новая формула плотности распределения вероятности получена для алгоритма квантования с округлением до ближайшего целого нормального вектора с ненулевыми математическими ожиданиями. Эта формула – обобщение результата, полученного для плотности вероятности эхо-сигнала от капель атмосферной влаги. Формула получена на основе теории вероятностей, разложений в ряды Фурье и интеграла Фурье. Для данной плотности получены формулы векторов математического ожидания и второго начального момента.

*Ключевые слова:* разложение в ряды Фурье, интеграл Фурье; нормальная плотность распределения с ненулевыми математическими ожиданиями, порождающая шум квантования.

### Введение

При формировании цифрового кода возникает шум квантования. Характеристика формирования шума квантования изображена на рис. 1. Этот шум складывается с обрабатываемым сигналом.

Любая излучающая (принимающая) антенна радиосигнала, так же, как и любой приемопередающий датчик (в случае ультразвукового сигнала), в силу условий его физической реализуемости, имеет боковые лепестки диаграммы направленности. По ним может приниматься сигнал от побочного (неинформативного) импульсного объема, расположенного на той же дальности, что и исследуемый импульсный объем, находящийся в створе главного лепестка, но расположенный под другими углами азимута и места. В нем могут быть отражатели, совокупность которых в тексте работы и называется отражающей доминантой. Квантуется сигнал, отраженный от капель дождя (от однородной и изотропной среды), в смеси с сигналами отражающих доминант. Таким образом, эхо-сигнал есть нормальный случайный процесс с математическим ожиданием  $m = m(t)$ .

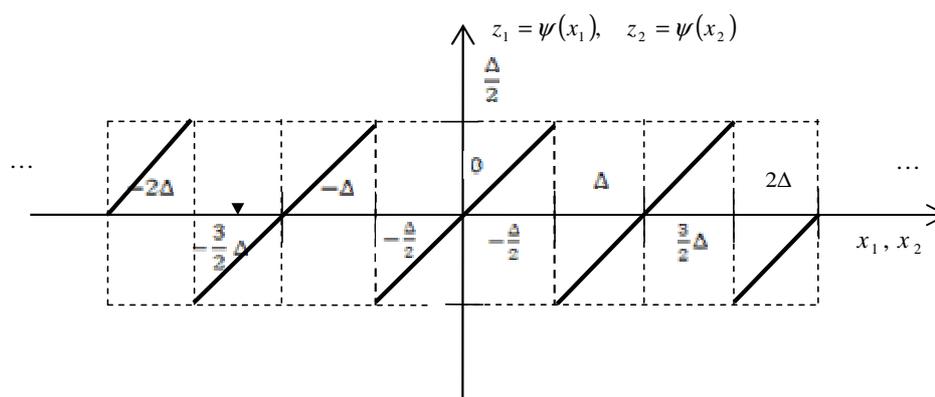


Рис. 1. Нелинейная пилообразная характеристика преобразования значений  $x_1$  и  $x_2$  координат вектора  $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$  в шум квантования

### Сущность математической модели

При формировании эхо-сигнала складываются: центрированный нормальный случайный процесс эхо-сигнала дождя с детерминированной, повторяющейся вдоль развертки во времени сферической координаты дальности при повторяющихся угловых координатах главного лепестка, функцией  $m = m(t)$ . Она имеет место вдоль сферической координаты дальности и вызвана

отражающими доминантами, эхо-сигнал которых принят по боковым лепесткам. Плотность распределения вероятности вектора, являющегося результата сложения сигнала метеозо и сигналов отражающих доминант имеет вид:

$$W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1-m(t))^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau)(x_1-m(t))(x_2-m(t+\tau)) + (x_2-m(t+\tau))^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))}}, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$  – значения координат вектора  $\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ ;  $\sigma_{\bar{\eta}}^2$  — дисперсия значений координат  $x_1$  и  $x_2$  вектора  $\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2)$ ;  $m(t)$  – математическое ожидание координат вектора  $\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2)$ ;  $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \bar{n} + \bar{\xi}$ ;  $\bar{n} = (n_1, n_2)$  – вектор теплового шума приемника;  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – нормальный вектор эхо-сигнала от облачно-дождевой системы. Здесь  $\sigma_{\bar{\xi}} = \sigma_{\xi_1} = \sigma_{\xi_2}$  информативные величины, необходимые для формирования оценок  $\hat{K}_w$ , а затем  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\varepsilon}$ .  $\rho_{\bar{\eta}}(\tau)$  – коэффициент корреляции координат  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .  $\tau = t_2 - t_1$  – шаг дискретизации.

Так как  $m = m(t)$  неслучайная функция, повторяющаяся от зондирования к зондированию, то обозначим  $m(t) = m_1$ , а  $m(t + \tau) = m_2$  формулу (1) перепишем с учетом этих обозначений:

$$W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1-m_1)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau)(x_1-m_1)(x_2-m_2) + (x_2-m_2)^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))}}. \quad (2)$$

Из определения шума квантования [2] известно, что вектор шума квантования есть разность векторов  $\bar{\zeta} = \bar{\eta} - \bar{\chi}$ , где  $\bar{\eta}$  – входной вектор алгоритма квантования, и  $\bar{\chi}$  выходной квантованный вектор. На рис. 1 видна периодичность функций  $\psi(x_j)$ , формирующих шум квантования с периодом  $\Delta$ . Учитывая их «периодичность» разложим в ряд Фурье функции  $\psi(x_j)$ .

### Математические преобразования

Выполним математические преобразования аналогичные преобразованиям, проделанным в работе [1], но с той разницей, что квантуемый сигнал в данной работе имеет не центрированную плотность вероятности, описываемую выражением (2). Из [2] известно разложение периодической функции  $\psi(x_j)$  (см. рис. 2) в ряд Фурье:

$$\psi(x_j) = \frac{\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2\pi n}{\Delta} x_j, \quad (3)$$

где  $j = s, c$  – синфазная или квадратурная составляющая комплексного сигнала.

Характеристическая функция вектора  $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$  (см. [2]) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\zeta}}(\bar{v}) &= \Phi_{\bar{\zeta}}(jv_1, jv_2) = M \{ i \exp(v_1\psi(x_1) + v_2\psi(x_2)) \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v_1\psi(x_1) + v_2\psi(x_2))} W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $i$  – мнимая единица, а  $M\{\}$  – символ математического ожидания.

Разложим периодические функции  $e^{i(v_1\psi(x_1))}$  и  $e^{i(v_2\psi(x_2))}$  в ряды Фурье:

$$e^{i(v_1\psi(x_1))} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{1n} \frac{e^{in_1 2\pi\psi(x_1)}}{\Delta}, \quad (5)$$

$$e^{i(v_2\psi(x_2))} = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{2n} \frac{e^{in_2 2\pi\psi(x_2)}}{\Delta}. \quad (6)$$

Здесь  $\Delta$  играет роль периода, а функции  $\psi(x_1)$  и  $\psi(x_2)$  на каждом из отрезков линейности  $\left[\frac{\Delta}{2}, -\frac{\Delta}{2}\right]$  длиной  $\Delta$ , изображенные на рис. 1, есть периодические куски прямых линий:

$$\psi(x_1) = x_1, \psi(x_2) = x_2 \tag{7}$$

в центре системы координат  $z0x$  и смещенные по оси  $z$  в зависимости от текущего значения  $x_j$ .

После подстановки  $\psi(x_1), \psi(x_2)$  в (5) и(6) разложения примут следующий вид:

$$e^{i(\vartheta_1\psi(x_1))} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{1n} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta}, \tag{8}$$

$$e^{i(\vartheta_2\psi(x_2))} = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{2n} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta}. \tag{9}$$

Коэффициенты разложения функций  $e^{i(\vartheta_1\psi(x_1))}$  и  $e^{i(\vartheta_2\psi(x_2))}$  (см. [2]) есть интегралы:

$$c_{1n} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} 2e^{i\vartheta_1 x_1} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} dx_1 = \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}, \tag{10}$$

$$c_{2n} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} 2e^{i\vartheta_2 x_2} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} dx_2 = \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}. \tag{11}$$

Подставив формулы (10) и (11) в (8) и (9), а результаты подстановки в (4), перепишем (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\zeta}}(\bar{\vartheta}) &= \Phi_{-\zeta}(j\vartheta_1, j\vartheta_2) = M\left(i \exp(\vartheta_1\psi(x_1) + \vartheta_2\psi(x_2))\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} \right) W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования и оставив под знаком интеграла только выражения, зависящие от переменных интегрирования, получим иной вид выражения (12):

$$\Phi_{\bar{\zeta}}(j\vartheta_1, j\vartheta_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{13}$$

Вычисляя интеграл формулы (13), являющийся интегралом преобразования Фурье, подставив формулу (2) вместо  $W_{\bar{\eta}}(x_1, x_2)$ , получим (см. [2]) следующий вид этого интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in_1 2\pi x_1}}{\Delta} \frac{e^{in_2 2\pi x_2}}{\Delta} \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))} e^{\frac{1(x_1-m_1)^2 - \rho_{-\eta}(\tau)(x_1-m_1)(x_2-m_2) - (x_2-m_2)^2}{2\sigma_{\bar{\eta}}^2(1-\rho_{\bar{\eta}}^2(\tau))}} dx_1 dx_2 = \\ & = e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau)\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)\left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)}. \end{aligned} \tag{14}$$

После этого искомая характеристическая функция (13) вектора  $\bar{\zeta}$  примет вид:

$$\Phi_{\bar{\zeta}}(j\vartheta_1, j\vartheta_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times$$

$$\times e^{\left( i \left( m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right)} \quad (15)$$

Плотность распределения шума квантования есть обратное преобразование Фурье (см. [2]) выражения (15):

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times$$

$$\times e^{\left[ i \left( m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right]} \times$$

$$\times e^{-i(\vartheta_1 z_1 + \vartheta_2 z_2)} d\vartheta_1 d\vartheta_2; \quad |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (16)$$

Из вида функций  $z_1 = \psi(x_1)$ ,  $z_2 = \psi(x_2)$  изображенных на рис. 1, следует, что область определения функции (16) есть:  $|z_1| \leq \frac{\Delta}{2}$  и  $|z_2| \leq \frac{\Delta}{2}$ . Это обстоятельство и учтено в формуле (16). Изменив порядок интегрирования и суммирования, оставив под знаком интеграла множители, зависящие от переменных интегрирования, перепишем (16) иначе:

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right) \right) \times$$

$$\times e^{i \left( m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} \times e^{-i(\vartheta_1 z_1 + \vartheta_2 z_2)} d\vartheta_1 d\vartheta_2; \quad |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (17)$$

Обозначим интеграл в формуле (17) как  $I_1$ . Тогда подынтегральное выражение формулы (17) есть произведение множителей с независимыми переменными и  $I_1$  будет иметь вид:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi n_1}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} e^{-i\vartheta_1 z_1} d\vartheta_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}}{\left(\vartheta_2 - \frac{2\pi n_2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2}} e^{-i\vartheta_2 z_2} d\vartheta_2; \quad |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (18)$$

В интегралах(18) сделаем замену переменных  $\Delta x_1/2 = \Delta \vartheta_1/2 - \pi n_1$  и  $\Delta x_2/2 = \Delta \vartheta_2/2 - \pi n_2$ . Тогда  $dx_1 = d\vartheta_1$ ,  $\vartheta_1 = x_1 + 2\pi n_1/\Delta$ ,  $dx_2 = d\vartheta_2$ ,  $\vartheta_2 = x_2 + 2\pi n_2/\Delta$  и (18) примет вид:

$$I_1 = e^{-i2\pi n_1 z_1} e^{-i2\pi n_2 z_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta x_1/2)}{(\Delta x_1/2)} e^{-ix_1 z_1} dx_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta x_2/2)}{(\Delta x_2/2)} e^{-ix_2 z_2} dx_2. \quad (19)$$

Характеристическая функция (см. [2]) одномерного равномерного  $W_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{\Delta}$  закона распределения случайной величины  $\varphi$  на интервале  $[a, b]$  имеет вид:

$$\Phi_{\varphi}(i\vartheta) = \frac{e^{ib\vartheta} - e^{-ib\vartheta}}{i\vartheta(a-b)}. \tag{20}$$

Тогда для нашего случая имеем, что  $[a,b] = \Delta$ ,  $a = \frac{\Delta}{2}$ ,  $b = -\frac{\Delta}{2}$ .

$$\Phi_{\phi}(i\vartheta) = \frac{e^{ib\vartheta} - e^{-ib\vartheta}}{i\vartheta(a-b)} = \frac{e^{i\frac{\Delta\vartheta}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\vartheta}{2}}}{i\vartheta\Delta} = \frac{-i2\sin\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}{i\vartheta\Delta} = \frac{-2\sin\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}{\vartheta\Delta}. \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что интегралы в (19), дополненные множителями  $1/2\pi$  с точностью до знака функции (21), это обратные преобразования Фурье. Выражение «характеристическая функция равномерной плотности распределения» следует понимать лишь в контексте промежуточного преобразования. Результат вычисления обратных преобразований Фурье (19) примет вид:

$$I_1 = \frac{(2\pi)^2}{\Delta^2} e^{-i\frac{2\pi n_1 z_1}{\Delta}} e^{-i\frac{2\pi n_2 z_2}{\Delta}}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{22}$$

Искомая плотность распределения после подстановки  $I_1$  (22) в формулу (17) примет вид:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{i\left(m_1 \frac{n_1 2\pi}{\Delta} + m_2 \frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)} \times \\ \times e^{\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times e^{-i\frac{2\pi n_1 z_1}{\Delta}} e^{-i\frac{2\pi n_2 z_2}{\Delta}}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{23}$$

Для удобства дальнейших преобразований формулу (23) перепишем следующим образом:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi}{\Delta}(n_1(z_1 - m_1) + n_2(z_2 - m_2))} \times \\ \times e^{\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{24}$$

Учитывая нечетность функции  $\sin(x)$ , выражение (25) перепишем иначе:

$$W_{\bar{z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\Delta} (n_2((z_2 - m_2) + n_1((z_1 - m_1)))) \times \\ \times e^{\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \tag{25}$$

Графики  $W_{\bar{z}}(z_1, z_2)$  (25) (см. рис. 2) построены для различных значений  $m_1$  и  $m_2$  и для одинаковых  $\rho_{\bar{\eta}}(\tau)$ . Список параметров процедуры `plot(t, ... u2)` пакета Maple: `t, rho, m1, m2, u1, u2`.

Здесь  $m1 = m_1$ ,  $m2 = m_2$ ,  $rho = \rho_{\bar{\eta}}(\tau)$ ,  $z_1 = u1$ ,  $z_2 = u2$ ,  $\beta = \frac{\Delta^2}{\sigma_{\bar{\eta}}^2}$  – глубина квантования,  $t = \frac{2\pi^2}{\beta}$  – вспомогательный параметр.

При  $m_1 \neq m_2$  график не симметричен (рис. 2, в). Вектор математического ожидания плотности (показано ниже) в общем виде всегда имеет нулевые координаты  $\bar{M}_{\bar{z}} = (M_{\bar{z}_1}, M_{\bar{z}_2}) = (0, 0)$  при любых  $m_1$  и  $m_2$ . Заметим, что равенство  $m_1 = m_2$ , не является достаточным условием симметрии графика плотности как может показаться из рис. 2.

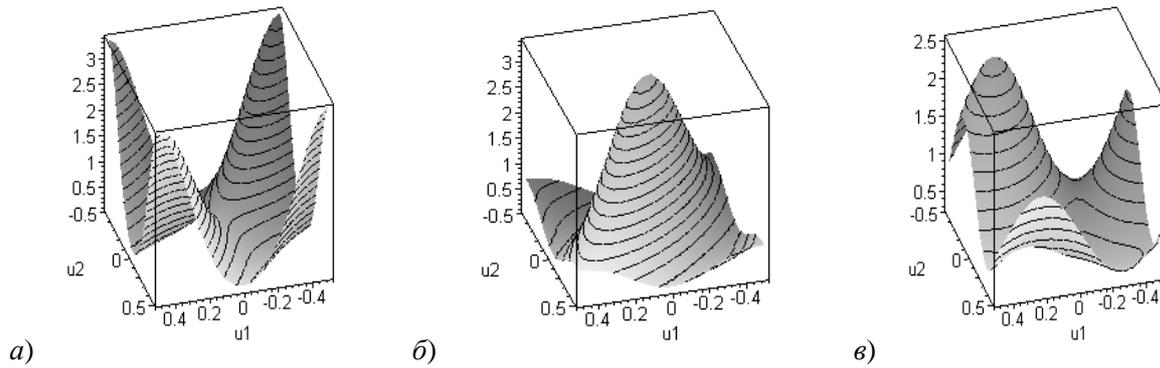


Рис. 2. Плотность распределения шума квантования при различных  $m_1$  и  $m_2$ . Здесь а) это плотность распределения при  $\text{rroc}(1,3, 0,7, 0,5, 0,5, u_1, u_2)$ , б) плотность распределения при  $\text{rroc}(1,3, 0,7, 0,0, 0,0, u_1, u_2)$ , в) плотность распределения при  $\text{rroc}(1,3, 0,3, 0,3, 0,75, u_1, u_2)$

**Статистические характеристики двумерной плотности вероятности шума квантования**

Вычислим векторы математического ожидания  $\bar{M}_{\bar{\zeta}} = (M_{\bar{\zeta}_1}, M_{\bar{\zeta}_2})$  и дисперсии  $\bar{D}_{\bar{\zeta}} = (\bar{D}_{\bar{\zeta}_1}, \bar{D}_{\bar{\zeta}_2})$  для плотности (26). Разобьем индексы суммирования в формуле (25) на девять групп и запишем ее в виде суммы девяти сумм:

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = S_1(n_1 = 0, n_2 = 0) + S_2(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^+) + S_3(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 = 0) + S_4(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^+) + S_5(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^-) + S_6(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 = 0) + S_7(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^-) + S_8(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^-) + S_9(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^+) \quad (26)$$

где

$$S_1(n_1 = 0, n_2 = 0) = \frac{1}{\Delta^2} \quad (27)$$

$$S_2(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^+) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right); \quad (28)$$

$$S_3(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 = 0) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right); \quad (29)$$

$$S_4(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^+) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right); \quad (30)$$

$$S_5(n_1 = 0, n_2 \in \mathbb{Z}^-) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right); \quad (31)$$

$$S_6(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 = 0) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right); \quad (32)$$

$$S_7(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^-) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right); \quad (33)$$

$$S_8(n_1 \in \mathbb{Z}^+, n_2 \in \mathbb{Z}^-) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_1 ((z_2 - m_2)) - (n_2 ((z_1 - m_1))))\right); \quad (34)$$

$$S_9(n_1 \in \mathbb{Z}^-, n_2 \in \mathbb{Z}^+) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right). \quad (35)$$

Объединяя совпадающие слагаемые: (28) с (31), (29) с (32), (30) с (33) и (34) с (35) получим:

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right) + \right. \\ \left. 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_1 2\pi}{\Delta}\right) \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left(\frac{n_2 2\pi}{\Delta}\right)^2\right)} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_1 ((z_2 - m_2)) - (n_2 ((z_1 - m_1))))\right) \right\}; |z_1| \leq \frac{\Delta}{2}; |z_2| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (36)$$

По определению значения координаты  $M_{\bar{\zeta}_1}$  (см. [2, 3]) можем записать:

$$\begin{aligned}
 M_{\zeta_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i=2}^5 I_i = \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1 \left\{ 1 + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) \right\} dz_1 dz_2. \tag{37}
 \end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования в слагаемых суммы (37) после вычисления простейших интегралов, получаем:  $I_2 = 0$ ,  $I_3 = 0$  и  $I_4 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times \\
 &\quad \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) dz_1 = 0. \tag{38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times \\
 &\quad \times \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) dz_1 = 0. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Повторные интегралы в выражениях  $I_5$  и  $I_6$  содержит по восемь слагаемых, каждое из которых содержит нулевой интеграл-множитель и поэтому  $I_5 = 0$  и  $I_6 = 0$ . В результате  $M_{\zeta_1} = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0$ . Аналогично  $M_{\zeta_1}$  получаем  $M_{\zeta_2} = 0$  и  $\bar{M}_{\zeta} = (M_{\zeta_1}, M_{\zeta_2}) = (0, 0)$ .

Квантование с округлением до ближайшего целого не смещает квантуемую амплитуду сигнала или данных (в отличие от других видов квантования).

Из [2, 3] известно, что значения координаты  $D_{\bar{z}_1}$  вектора  $D_{\bar{z}}$  для двумерной плотности (25) вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned}
 D_{\bar{z}_1} &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 W_{\bar{z}}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \left[ 1 + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 z_2\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_2 m_2\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) + (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) \right] dz_1 dz_2 = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^5 I_{2j}. \tag{40}
 \end{aligned}$$

Вычислим сумму (40), обозначив ее слагаемые как  $I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}$  и  $I_{25}$ . В результате вычисления простейших интегралов получаем  $I_{21} = \frac{\Delta^2}{12}$  и  $I_{22} = 0$ .

Изменяя порядок суммирования и интегрирования, вынося за знаки интегралов множители, не зависящие от переменных интегрирования в  $I_{23}$ ,  $I_{24}$  и  $I_{25}$ , получим:

$$I_{23} = \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1\right) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} n_1 z_1\right) dz_1. \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 I_{24} &= \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 + \rho_{\bar{\eta}}(\tau) \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{\eta}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times \\
 &\quad \times \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1))))\right) dz_1 dz_2 = 0. \tag{42}
 \end{aligned}$$

$$I_{25} = \frac{2}{\Delta^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \sigma_{\bar{n}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2 - \rho_{\bar{n}}(\tau) \sigma_{\bar{n}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right) \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right) + \sigma_{\bar{n}}^2 \left( \frac{n_2 2\pi}{\Delta} \right)^2 \right)} \times$$

$$\times \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} z_1^2 \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} (n_2 ((z_2 - m_2)) - (n_1 ((z_1 - m_1)))) \right) dz_1 dz_2 = 0. \quad (43)$$

Вычисляя интеграл выражения  $I_{23}$  выполним замену переменной вида  $x = \frac{2\pi n_1 z_1}{\Delta}$ ;  
 $z_1 = \frac{x\Delta}{2\pi n_1}$   $dx = \frac{2\pi n_1}{\Delta} dz_1$ ;  $x_g = \pi n_1$ ;  $x_n = -\pi n_1$ :

$$I_{23} = \frac{\Delta}{4(\pi)^3} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^3} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{n}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 \int_{-\pi n}^{\pi n} x^2 \cos x dx. \quad (44)$$

Воспользовавшись очевидным соотношением:

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C \quad (45)$$

и учитывая, что  $\sin \pi n = 0$ , значение внешнего интеграла в (44) равно  $\Delta$ , и то, что множитель  $\cos(\pi n)$  есть чередующаяся последовательность  $\mp 1$ , где знак « $\rightarrow$ » – соответствует нечетным  $n$ , а « $\leftarrow$ » – четным, то получим следующий результат:

$$I_{23} = \frac{\Delta}{(\pi)^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^2} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{n}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right) (\cos(\pi n)) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dz_2 =$$

$$= \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{1}{2} \sigma_{\bar{n}}^2 \left( \frac{n_1 2\pi}{\Delta} \right)^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right) = \frac{(\Delta)^2}{(\pi)^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1)^2} q^{n_1^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n_1 m_1 \right), \quad (46)$$

где

$$q = e^{-t} = e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}. \quad (47)$$

Повторный интеграл выражения  $I_{24}$  является суммой восьми выражений, каждое из которых имеет нулевой интеграл-множитель. Аналогично выражению  $I_{24}$  формула  $I_{25}$  также является суммой из восьми выражений, каждое из которых содержит нулевой интеграл-множитель. Следовательно  $I_{24} = I_{25} = 0$ . Окончательно сложив  $I_{21}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{24}$  и  $I_{25}$  получим значение  $D_{\zeta 1}$ :

$$D_{\zeta 1} = I_{21} + I_{23} = \frac{\Delta^2}{12} + \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n m_1 \right). \quad (48)$$

Выражение для  $D_{\zeta 2}$  с точностью до номера индекса  $m_2$  совпадает с выражением (48). Таким образом, окончательный вид вектора второго начального момента следующий:

$$\bar{D}_{\zeta} = (D_{\zeta 1}, D_{\zeta 2}) = \left( \frac{\Delta^2}{12} + \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n m_1 \right); \frac{\Delta^2}{12} + \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\Delta} n m_2 \right) \right). \quad (49)$$

**Основные выводы**

Из выражения (49) видно, что значения координат вектора второго начального момента для двумерной плотности шума квантования зависят от величин математических ожиданий  $m_1$  и  $m_2$  квантуемого нормального двумерного вектора (2). Значения координат второго начального момента в свою очередь являются информативными величинами в радиометеорологии и содержат интересные физические величины. Тогда вторые члены в суммах в (48) приводят к смещению оценок значений координат этого вектора из-за присутствия величин  $m_1$  и  $m_2$ . Например, в радиометеорологии  $\bar{D}$  (см. [5]) несет информацию о наведенном дипольном моменте  $K_w$  каплей дождя, затухании радиосигнала туда и обратно на трассе распространения  $l(r_0, K_w, \omega)$ , интенсивности дождя  $R$  и водности облачно-дождевой системы  $M$ .

Для физической реализуемости высокоточных измерений заключающейся в формировании несмещенной и состоятельной оценки  $\hat{D}$  с последующим вычислением оценок  $\hat{K}_w$ ,  $\hat{l}(r_0, K_w, \omega)$ ,  $\hat{R}$  и  $\hat{M}$ , необходимо избавиться от второго слагаемого в выражении (49), так как шум квантования по мощности (не когерентно) складывается с сигналом дождя. Ранее было показано (37)–(39), что значения координаты вектора  $\bar{M}_\zeta$  равны нулю при квантовании с округлением до ближайшего целого. По этой причине оценки  $\hat{m}_1$  и  $\hat{m}_2$  могут быть вычислены с требуемой наперед заданной точностью, но с физическим ограничением на интервал времени пока величины  $K_w$ ,  $l(r_0, K_w, \omega)$ ,  $R$  и  $M$  можно считать постоянными. В этом случае, очевидно, что для оценки  $\hat{D}_\zeta$  будет иметь место следующее выражение:

$$\hat{D}_\zeta = (D_{\zeta 1}, D_{\zeta 2}) = \left( \frac{\Delta^2}{12} + \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos\left( \frac{2\pi}{\Delta} n \hat{m}_1 \right); \frac{\Delta^2}{12} + \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)^2} q^{n^2} \cos\left( \frac{2\pi}{\Delta} n \hat{m}_2 \right) \right). \quad (50)$$

Наконец, поскольку дисперсия квантованного сигнала, согласно теореме о дисперсии [см. (4)] суммы есть величина:

$$\bar{D}_{\bar{\chi}} = \bar{D}_{\bar{\eta}} + \bar{D}_{\bar{\zeta}} + 2 \sum_{i < j}^2 K_{\eta_i \zeta_j} \quad i, j = 1, 2; \quad (51)$$

где

$$\bar{D}_{\bar{\chi}} = \bar{D}_{\bar{\zeta}} + \bar{D}_{\bar{\eta}}. \quad (52)$$

Тогда, заранее вычислив оценки  $\hat{m}_1$  и  $\hat{m}_2$ , легко избавиться от вторых слагаемых в выражении (51) что и позволит сделать искомую оценку  $D[\xi_i]$  несмещенной и состоятельной при априорно известной величине  $\Delta$  и апостериорных, не смещенных, состоятельных оценках  $\hat{D}_{\bar{\eta}}$  и  $\hat{D}_{\bar{\zeta}}$ , вычисление которых на практике не вызывает затруднений с помощью алгоритма выборочного второго начального момента. Материалы работы важны при организации высокоточных измерений в связи, медицине, радиометеорологии и других областях науки и техники.

**Литература**

1. Математическая модель шума квантования сигналов, отраженных от протяженных пространственных помех / Б.М. Балясников, М.С. Ворона, В.В. Заволокин и др. // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. – 2011. – Вып. 633. – Ч. 2. – С. 131–138.
2. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
3. Пугачев, В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.
4. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

5. Довиак, Р. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения / Р. Довиак, Д. Зрнич. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 511 с.

*Поступила в редакцию 7 июля 2019 г.*

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 2, pp. 37–48*

DOI: 10.14529/mmph200205

## **NOISE MODEL OF QUANTIZATION OF THE VECTOR WITH NON-ZERO MATHEMATICAL EXPECTATIONS**

**V.V. Zavolokin**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: zavolokinvv@susu.ru*

The mathematical model of quantization noise arising in high-precision measuring systems is obtained. A new formula of the probability distribution density is obtained for the quantization algorithm with rounding to the nearest whole normal vector with non-zero mathematical expectations. This formula is a generalization of the result obtained for the probability density of the echo signal from drops of atmospheric moisture. The formula is obtained on the basis of the probability theory, Fourier series expansions and Fourier integral. For this density, the formulas of the expectation vectors and the second initial moment are obtained.

*Keywords: Fourier series expansion; Fourier integral; normal distribution density with non-zero mathematical expectations resulting in quantization noise.*

### **References**

1. Balyasnikov B.M., Vorona M.S., Zavolokin V.V., Korshunov A.Yu., Maksimenko M.D., Odinochenko N.M. Matematicheskaya model' shuma kvantovaniya signalov, otrazhennykh ot protyazhennykh prostranstvennykh pomekh (A Mathematical model of the quantization of the signals reflected from expended spatial interference). *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhayskogo* (Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy), 2011, Vol. 633, no. 2, pp. 131–138. (in Russ.).
2. Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* (Statistical Radio Engineering). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982, 624 p. (in Russ.).
3. Pugachev V.S. *Teoriya sluchaynykh funktsiy i ee primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* (Theory of Random Process and Its Application to Automatic Control Problems). Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 883 p. (in Russ.).
4. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostey* (Probability Theory). Moscow, Nauka Publ., 1969, 576 p. (in Russ.).
5. Doviak R.J., Zrnic D.S. *Doppler Radar and Weather Observations*. Orlando, San Diego, San Francisco, New York, London, Toronto, Montreal, Sydney, Tokyo, São Paulo: Academic Press Inc., 1984, 458 p.

*Received July 7, 2019*

# STRUCTURAL AND ELASTIC PROPERTIES OF FE-GE ALLOYS: *AB INITIO* STUDIES

M.A. Zagrebin<sup>1,2</sup>, M.V. Matyunina<sup>1</sup>, V.V. Sokolovskiy<sup>1,3</sup>, V.D. Buchelnikov<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>3</sup>National University of Science and Technology "MISiS", Moscow, Russian Federation

E-mail: matunins.fam@mail.ru

In this paper, with the help of the density functional theory, the structural and elastic properties of A2, B2, D0<sub>3</sub>, and L1<sub>2</sub> phases of Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> alloys (12,5 ≤ x ≤ 28,125 at. %) have been studied. The electronic and full ionic relaxations were used for the investigation of crystal structures. The concentration dependencies of the atomic volumes, structural phase transition temperatures, tetragonal and rhombohedral shear moduli have been calculated. We show that the atomic volume curves correlate with the sequence of phase transitions observed experimentally: A2→B2→D0<sub>3</sub> (x ≤ 22 at. % of Ge content). The structural phase transition temperatures increase with the Ge concentration. The calculated tetragonal moduli for the D0<sub>3</sub>, A2, and L1<sub>2</sub> structures decrease with the increasing of the Ge content, what agrees with the experimental results. The dependence of rhombohedral shear moduli as a function of Ge concentration does not change significantly with increasing Ge atoms. The C<sub>44</sub> is increased for the D0<sub>3</sub> phase, while for A2, B2, and L1<sub>2</sub>, it decreases.

*Keywords:* *ab initio*; crystal structure; phase transformations; elastic moduli.

## Introduction

The discovery of large magnetostrictive strains in iron-gallium alloys in 1999 started the extensive study of rare-earth-free binary alloys based on α-Fe [1, 2]. These alloys are promising materials for sensors and actuator applications. Among them, iron-gallium alloys are the most thoroughly investigated. The phase diagram of Fe-Ge alloys is very similar to Fe-Ga systems in the Fe-rich region [3]. Ga and Ge are *p*-elements that have a significant influence on electronic structures of binary compounds, which, in turn, determines their structural and magnetic properties. In both alloys, in the range of Ga(Ge) content up to 12 at. %, the phase diagram is characterized by the existence of the disordered α-phase (A2 structure). At these compositions, the values of magnetostriction ( $\lambda_{100}$ ) for Fe-Ga and Fe-Ge are similar and positive [1]. The further increase of Ga content up to 19 at. % leads to the formation of mixing phase D0<sub>3</sub>+A2 [4]. The magnetostriction of Fe<sub>81</sub>Ga<sub>19</sub> reaches  $340 \cdot 10^{-6}$  in slowly cooled samples. In the case of Fe<sub>81.5</sub>Ge<sub>18.5</sub>, B2 and D0<sub>3</sub> phases are observed [6], and  $\lambda_{100} = -96 \cdot 10^{-6}$  [1]. In contrast to Fe-Ga alloys, the properties of Fe-Ge systems are not well investigated. Experimental studies of phase formation and transitions in alloys with Ge additives are presented in [5–13, etc.]. For Fe-Ge alloys in the phase region x ≤ 22 at. %, three types of the base-centered cubic (*bcc*) structures with different ordering (fully disordered A2, partially ordered B2, and ordered D0<sub>3</sub>) exist [5, 7, 9, 10, 13]. In the concentration range of Ge content 22 ≤ x ≤ 28 at. %, low temperature face-centered cubic (*fcc*) L1<sub>2</sub> and high-temperature hexagonal D0<sub>19</sub> phases were also observed [5, 6, 8, 10–12]. The effect of the addition of Ge atoms on the elastic properties of Fe-Ge alloys is considered in [1, 14]: with the increase of Ge atoms in Fe lattice the tetragonal elastic modulus decreases.

The magnetic moments and Curie temperatures of Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> alloys were investigated theoretically in [15–18]. With adding of Ge atoms the total magnetic moment and Curie temperature reduced. Cao *et al.* [19] with the help of a full-potential-linearized augmented plane wave method studied the magnetostriction as a function of Ge concentration. They found that  $\lambda_{100}$  increased linearly with x up to 11 at. % and then decreased. In our recent work [15, 18] based on the total energy calculation of Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> alloys with different structures, the phase diagram as a function of x was constructed. Nevertheless, the existing theoretical results are insufficient to understand the relation between phase transformations and magneto-elastic properties.

Therefore, this study aims to investigate the structural and elastic properties of cubic phases of Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> (12,5 ≤ x ≤ 28,125 at. %) alloys within different approaches to geometry optimization. The paper is organized as follows. Section 2 presents the details of *ab initio* calculations. Section 3 contains

the main results and discussion. Conclusions are provided at the end of the article (Section 4).

### 1. Calculation details

*Ab initio* calculations were performed by using the projector augmented wave (PAW) method implemented in the Vienna *ab initio* simulation package (VASP) [20, 21]. The exchange-correlation effects were treated in generalized gradient approximation (Perdew–Burke–Ernzerhof formalization [22]). Pseudopotentials were taken for the following electronic configurations: Fe( $3p^6 3d^7 4s^1$ ) and Ge( $4s^2 4p^2$ ). Kinetic energy cut-off was 450 eV, and kinetic energy cut-off for the augmentation charges was 800 eV. The Brillouin zone integration was performed by the Monkhorst–Pack scheme [23] with  $8 \times 8 \times 8$   $k$ -point sampling. The calculations were converged with the energy accuracy of  $10^{-7}$  eV. The geometry optimization of 32-atom supercells was carried out with the help of electronic and ionic relaxation. In the case of electronic relaxation, the equilibrium lattice parameters  $a_0$  were obtained from the dependency of total energy  $E$  on the cell volume with a fitting to the Birch–Murnaghan equation of states. While the ionic optimization was fulfilled assuming that the cell shapes and ions degrees of freedom were fixed. The following phases in Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> ( $12,5 \leq x \leq 28,125$  at. %) alloys, which were observed experimentally, were considered: A2 ( $\alpha$ -Fe-type structure, space group  $Im\bar{3}m$  no. 229), B2 (CsCl-type structure, space group  $Pm\bar{3}m$  no. 221), D0<sub>3</sub> (BiF<sub>3</sub>-type structure, space group  $Fm\bar{3}m$  no. 225), and L1<sub>2</sub> (Cu<sub>3</sub>Au-type structure, space group  $Pm\bar{3}m$  no. 221). To create off-stoichiometric compositions in 32-supercell for each structure, either Fe or Ge atoms were replaced by Ge or Fe on randomly chosen lattice sites, respectively. This allowed us to change the composition with the step of 3,125 at. %.

After obtaining the lattice constants, we calculated the elastic moduli for cubic structures using strain tensors, which correspond to isotropic, orthorhombic, and monoclinic deformations. We assumed that the volume of the unit cell was constant, and the distortion parameter changed in the range of  $\pm 3$  %. Additional calculation details can be found in [24].

### 2. Calculation results

The calculated equilibrium lattice parameters  $a_0$ , total energies per atom  $E_0$ , and formation energies  $E_{\text{form}}$  for electronic and ionic relaxation are presented in Table. The formation energy can be defined as a difference between the total energy per atom of an alloy and total energies per atom of its components in their equilibrium bulk structures:

$$E_{\text{form}} = E_0(\text{Fe}_{100-x}\text{Ge}_x) - 32 \left[ (100-x) E_{\text{at}}^{\text{Fe}}(\text{Fe}) + x E_{\text{at}}^{\text{Ge}} \right] / 100,$$

where  $E_{\text{at}}^{\text{Fe(Ge)}}$  is the total energy per atom of alloys components,  $x$  is the Ge content concentration. For A2, B2, D0<sub>3</sub>, and L1<sub>2</sub> cubic structures, the lattice parameter increases with Ge content. In the case of B2 and D0<sub>3</sub> phases, the lattice constant decreases for systems with an excess of Ge ( $x > 25$  at. %). For the comparison, the experimentally obtained lattice constants are also included in Table. For both relaxations, the values of lattice parameters are in good agreement with each other and with experimental results. The difference between  $a_0^{\text{el}}$  and  $a_0^{\text{ion}}$  is less than 0,5 %, and between  $a_0^{\text{el}}$  and  $a_0^{\text{exp}}$  is approximately 1 %. The differences between the obtained total energy values are negligible, and the D0<sub>3</sub> structure is energetically favorable for all considered Ge concentrations.

B2, D0<sub>3</sub>, and L1<sub>2</sub> structures are stable because their formation energies are negative ( $E_{\text{form}} < 0$ ). A2 phase is stable at Ge content  $x < 18$  at. %. However, in the disordered A2 structure, the arrangement of atoms in the lattice has a significant effect on the ground state properties and formation energy, and we considered only one configuration.

Fig. 1(a) shows the atomic volume  $V_a$  as a function of Ge concentration in the range of  $12,5 \leq x \leq 28,125$  at. %. The available experimental values [6, 9, 10] for the A2 structure are also presented in Fig. 1(a). The closest to the experiment are A2 phase results obtained with electronic relaxation and Ge content of up to  $x = 21,875$  at. %. In the range of  $x > 22$  at. %, the experimental volume changes slightly, while the theoretical estimation continues to increase. The lowest and the largest  $V_a$  are observed for the most stable phase D0<sub>3</sub> and A2 structure, respectively. The  $V_a$  of the B2 structure is close to D0<sub>3</sub>. Under the transition from disordered to ordered state, the unit-cell parameters decrease slightly and, therefore, the atomic volume also decreases [25–27]. The obtained dependencies of  $V_a$  on Ge content correspond to the sequence of phase transitions observed experimentally [5, 13]:

A2→B2→D0<sub>3</sub> ( $8 \leq x \leq 22$  at. %). The *fcc* phase L1<sub>2</sub> in the range of  $21,875 \leq x \leq 28,125$  at. % has a minimum of  $V_a$  in stoichiometric composition Fe<sub>75</sub>Ge<sub>25</sub>, which is in agreement with the experimental data [11]. The L1<sub>2</sub> phase is experimentally observed in the narrow Ge concentration range  $x \approx 22 \div 25,7$  at. % [5, 11, 28, 29]. Here, we simulated a wider range of concentrations for the L1<sub>2</sub> phase, since the minimal concentration step in the 32-atoms supercell is 3,125 at. %.

Table  
Optimized lattice constant  $a_0$  (Å), total energy  $E_0$  (eV/atom), and formation energy  $E_{\text{form}}$  (meV/atom) of Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> alloys in comparison with experimental data ( $a_0^{\text{exp}}$ ). The positive values of formation energy are bolded

x	Phase	Electronic relaxation			Ionic relaxation			$a_0^{\text{exp}}$
		$a_0^{\text{el}}$	$E_0$	$E_{\text{form}}$	$a_0^{\text{ion}}$	$E_0$	$E_{\text{form}}$	
12,5	A2	2,874	-7,803	-12,845	2,867	-7,802	-11,566	2,885 (13,03 at.%) <sup>1</sup>
	B2	2,865	-7,809	-18,965	2,857	-7,809	-19,022	
	D0 <sub>3</sub>	5,72	-7,851	-60,717	5,707	-7,851	-60,709	
15,625	A2	2,879	-7,680	-6,744	2,873	-7,680	-6,697	2,885 (16,13 at.%) <sup>1</sup> , 2,891 (14 at.%) <sup>2</sup>
	B2	2,865	-7,695	-22,112	2,862	-7,696	-22,087	
	D0 <sub>3</sub>	5,720	-7,743	-69,712	5,708	-7,743	-69,665	
18,75	A2	2,889	-7,556	<b>0,718</b>	2,883	-7,556	<b>0,737</b>	2,899 (20 at.%) <sup>2</sup>
	B2	2,870	-7,580	-23,354	2,863	-7,580	-23,306	
	D0 <sub>3</sub>	5,722	-7,636	-79,794	5,709	-7,636	-78,904	
21,875	A2	2,898	-7,418	<b>21,643</b>	2,890	-7,418	<b>22,019</b>	2,902 (22.5 at.%) <sup>2</sup> 2,885 (21 at.%) <sup>3</sup>
	B2	2,868	-7,462	-22,965	2,860	-7,463	-23,219	
	D0 <sub>3</sub>	5,725	-7,530	-90,285	5,711	-7,529	-89,203	
	L1 <sub>2</sub>	3,640	-7,505	-65,941	3,633	-7,505	-65,358	
25	A2	2,909	-7,275	<b>47,329</b>	2,903	-7,275	<b>47,684</b>	2,903 (25 at.%) <sup>2</sup>
	B2	2,867	-7,343	-19,991	2,861	-7,343	-19,911	
	D0 <sub>3</sub>	5,720	-7,423	-100,095	5,707	-7,423	-100,083	
	L1 <sub>2</sub>	3,638	-7,413	-90,031	3,629	-7,412	-89,481	
28,125	A2	2,920	-7,135	<b>70,431</b>	2,914	-7,136	<b>70,408</b>	2,901 (27,5 at.%) <sup>2</sup>
	B2	2,867	-7,218	-12,121	2,860	-7,218	-12,141	
	D0 <sub>3</sub>	5,716	-7,277	-71,689	5,707	-7,277	-70,947	
	L1 <sub>2</sub>	3,655	-7,247	-41,225	3,649	-7,247	-41,201	

<sup>1</sup> Data were taken from [6].

<sup>2</sup> Data were extrapolated from [10].

<sup>3</sup> Data were taken from [7].

<sup>4</sup> Data were taken from [11].

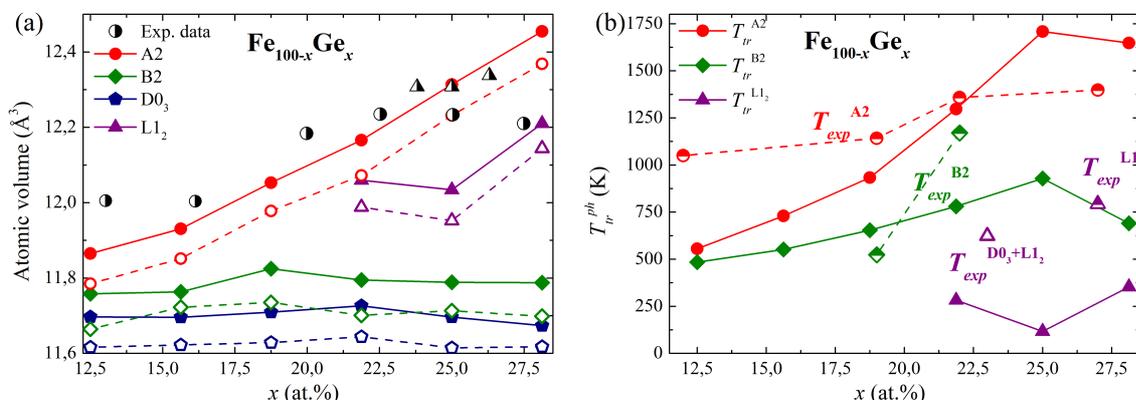


Fig. 1. Dependence of (a) Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> atomic volume  $V_a$ , and (b) calculated temperatures of structural phase transitions on Ge concentration,  $x$ . Atomic volumes  $V_a(x)$  were obtained by two types of relaxations: electronic (filled symbols) and full ionic (open symbols). Experimental atomic volumes (half-filled symbols) for A2 (circles) and L1<sub>2</sub> (triangles) structures were taken from [6, 9–11]. The experimental values of  $T_r$  were taken from [8, 11–13]

Fig. 1 (b) presents the calculated temperatures of structural phase transitions  $T_{tr}^{ph}$  as a function of Ge concentration and their comparison with the available experimental data [8, 11–13]. The estimations of  $T_{tr}^{ph}$  can be obtained from  $\Delta E \approx k_B T_{tr}^{ph}$ , where  $\Delta E = E_0 - E_{min}$ ,  $E_{min}$  is the energy of the most energetically favorable structure (D0<sub>3</sub> in this case), and  $k_B$  is the Boltzmann constant. The structural phase transition temperature is the temperature, above which the corresponding phase exists. For all considered structures,  $T_{tr}^{ph}$  values increase with Ge concentration. The slope of the theoretical  $T_{tr}^{A2}(x)$  curve is steeper than the experimental one. For  $x > 22$  at. %, the experimental  $T_{exp}^{A2}$  curve changes slightly, while the theoretical estimation of  $T_{tr}^{A2}$  continues to increase up to 25 at. % of Ge. For the B2 structure, the experimental  $T_{exp}^{B2}$  curve increases more rapidly than the theoretical one. The pure structure L1<sub>2</sub> is experimentally observed at about 25 at. % of Ge content (through the D0<sub>19</sub>→L1<sub>2</sub> transition). The range  $22 \leq x \leq 27$  at. % is characterized by different mixtures of the B2, D0<sub>3</sub>, D0<sub>19</sub>, and L1<sub>2</sub> phases [5, 8, 13].

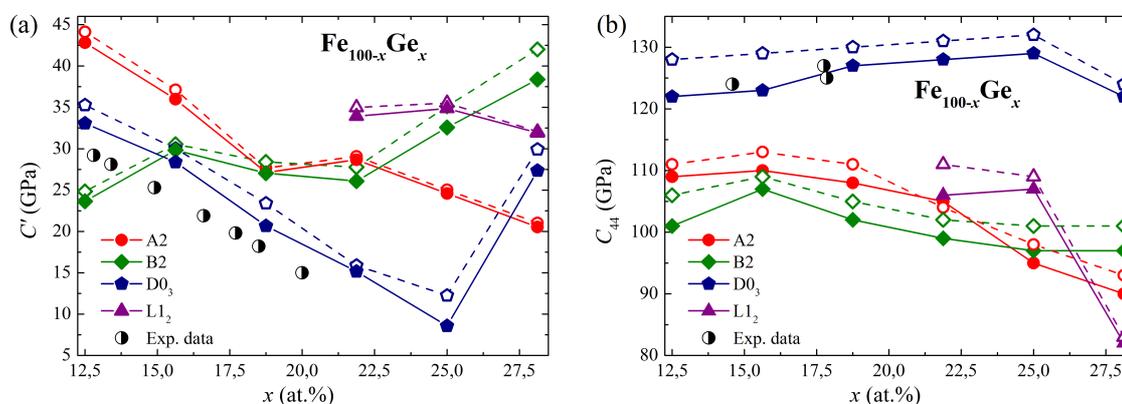


Fig. 2. Dependence of (a) tetragonal  $C'$  and (b) rhombohedral  $C_{44}$  shear moduli of  $Fe_{100-x}Ge_x$  alloys on Ge concentration,  $x$ . The results were obtained by two types of relaxations: electronic (filled symbols) and full ionic (open symbols). Experimental values (half-filled symbols) were taken from [1] for  $C'$  and from [14] for  $C_{44}$

The concentration dependencies of tetragonal  $C'$  and rhombohedral  $C_{44}$  shear moduli are presented in Fig. 2 (a, b) together with the room-temperature experimental results. For both elastic moduli, the closest to the experimental values were calculation results for the D0<sub>3</sub> structure obtained by electronic relaxation. The increase of Ge concentration up to  $x = 25$  at. % leads to a decrease in the tetragonal elastic modulus. This indicates a pronounced softening of the D0<sub>3</sub> structure. The rhombohedral shear modulus  $C_{44}$  does not change significantly with  $x$ , only slightly decrease for structures with Ge excess ( $x > 25$  at. %). The same concentration dependencies for both  $C'$  and  $C_{44}$  were obtained theoretically for the D0<sub>3</sub> phase in the Fe-Ga system [24]. In the case of A2 and L1<sub>2</sub> structures, the tetragonal shear modulus decreases in the considered range of  $12,5 \leq x \leq 28,125$  at.%. For A2, B2, and L1<sub>2</sub> structures, the rhombohedral shear modulus  $C_{44}$  has a trend similar to  $C'$ .

### Conclusion

We have studied the structural and elastic properties of Fe-Ge alloys by using the first-principles methods. Crystal structure optimization was performed for phases A2, B2, D0<sub>3</sub>, and L1<sub>2</sub> of  $Fe_{100-x}Ge_x$  ( $12,5 \leq x \leq 28,125$  at. %). We considered two types of relaxations: electronic and full ionic. We showed that the lattice constants increase with Ge concentration in both approaches, and the difference between obtained lattice constant, total energy, and formation energy is negligible. The D0<sub>3</sub> structure is energetically favourable for all considered Ge concentrations. The dependence of atomic volume  $V_a(x)$  on Ge content corresponds to the sequence of phase transitions observed experimentally (A2→B2→D0<sub>3</sub>) in the range  $8 \leq x \leq 22$  at. %. We estimated the temperature of structural phase transitions  $T_{tr}^{ph}$  as a function of Ge concentration and found that the slope of the calculated curve for the A2 phase is steeper than for the experimental one. Moreover, we obtained the dependencies of tetragonal  $C'$  and rhombohedral  $C_{44}$  shear

moduli on Ge content. For A2, D0<sub>3</sub>, and L1<sub>2</sub> structures the increase of Ge concentration leads to a decrease in the tetragonal elastic moduli. The rhombohedral shear moduli do not change significantly with  $x$ . In general, results obtained by electronic relaxation are in good agreement with the experimental data.

### Acknowledgments

This work was supported by Russian Science Foundation grant No. 18-12-00283 (Sections 2 and 3), V. Sokolovskiy and V. Buchelnikov gratefully acknowledge the financial support of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of increase Competitiveness Program of NUST "MISIS" (Grant No. K2-2019-006), implemented by a governmental decree dated 16<sup>th</sup> of March 2013, No 211, M. Zagrebin acknowledge the financial support of Young Scientist Support Foundations of Chelyabinsk State University.

### References

1. Restorff J.B., Wun-Fogle M., Hathaway K.B., Clark A.E., Lograsso T.A., Petculescu G. Tetragonal magnetostriction and magnetoelastic coupling in Fe-Al, Fe-Ga, Fe-Ge, Fe-Si, Fe-Ga-Al, and Fe-Ga-Ge alloys. *Journal of Applied Physics*, 2012, Vol. 111, pp. 023905. DOI:10.1063/1.3674318
2. Clark A.E., Hathaway K.B., Wun-Fogle M., Restorff J.B., Lograsso T.A., Keppens V.M., Petculescu G., Taylor R.A. Extraordinary magnetoelasticity and lattice softening in bcc Fe-Ga alloys. *Journal of Applied Physics*, 2003, Vol. 93, Iss. 10, pp. 8621–8623. DOI:10.1063/1.1540130
3. Turtelli R.S., Nunesa C.B., Teixeira L.C., Grössinger R., Suzuki P.A., Barbatti C. Magnetostriction of polycrystalline Fe-Ge alloys. *Journal of Alloys and Compounds*, 2009, Vol. 471, Iss. 1–2, pp. 52–55. DOI:10.1016/j.jallcom.2008.03.038
4. Ikeda O., Kainuma R., Ohnuma I., Fukamichi K., Ishida K. Phase equilibria and stability of ordered b.c.c. phases in the Fe-rich portion of the Fe-Ga system. *Journal of Alloys and Compounds*, 2002, Vol. 347, Iss. 1–2, pp. 198–205. DOI:10.1016/S0925-8388(02)00791-0
5. Enoki H., Ishida K., Nishizawa T. Miscibility gap due to ordering in the bcc Fe-Ge system. *Metallurgical transactions A*, 1987, Vol. 18A, pp. 949–955. DOI:10.1007/BF02668543
6. Chessin H., Araj S., Colvin R.V., Miller D.S. Paramagnetism and lattice parameters of Iron-rich iron-germanium alloys. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1963, Vol. 24, Iss. 2, pp. 261–273. DOI:10.1016/0022-3697(63)90131-8
7. Golovin I.S., Ivleva T.V., Jäger S., Jencus P., Neuhäuser H., Redfern S.A.T., Siemers C. Structure and anelasticity of Fe-Ge alloys. *Solid State Phenomena*, 2008, Vol. 137, pp. 59–68. DOI:10.4028/www.scientific.net/SSP.137.59
8. Golovin I.S., Jäger S., Mennerich Chr., Siemers C., Neuhäuser H. Structure and anelasticity of Fe<sub>3</sub>Ge alloy. *Intermetallics*, 2007, Vol. 15, Iss. 12, pp. 1548–1557. DOI:10.1016/j.intermet.2007.06.004
9. Konygin G.N., Yelsukov E.P., Porsev V.E. The structure and magnetic properties of the non-equilibrium Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> ( $x=5-40$  at%) system produced by mechanical alloying. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2005, Vol. 288, pp. 27–36. DOI:10.1016/j.jmmm.2004.07.052
10. Cabrera A.F., Sánchez F.H. Mössbauer study of ball-milled Fe-Ge alloys. *Phys. Rev. B*, 2002, Vol. 65, pp. 094202. DOI: 10.1103/PhysRevB.65.094202
11. Kanematsu K., Ohoyama T. Magnetic and X-ray studies of iron-germanium system II. Phase diagram and magnetism of each phase. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1965, Vol. 20, pp. 236–242. DOI:10.1143/JPSJ.20.236
12. Sarkar S., Bansal C., Chatterjee A. Gibbs-Thomson effect in nanocrystalline Fe-Ge. *Phys. Rev. B*, 2000, Vol. 62, pp. 3218–3222. DOI: 10.1103/PhysRevB.62.3218
13. Belamri Z., Hamana D., Golovin I.S. Study of order–disorder transitions in Fe-Ge alloys and related anelastic phenomena. *Journal of Alloys and Compounds*, 2013, Vol. 554, pp. 348–356. DOI: 10.1016/j.jallcom.2012.11.012
14. Petculescu G., LeBlanc J.B., Wun-Fogle M., Restorff J.B., Yuhasz W.M., Lograsso T.A., Clark A.E. Magnetoelastic coupling in Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> single crystals with  $4 < x < 18$ . *Journal of Applied Physics*, 2009, Vol. 105, p. 07A932. DOI: 10.1063/1.3061864
15. Matyunina M.V., Zagrebin M.A., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. The structural Phase Diagrams of Fe-Y (Y=Ga, Ge, Al) alloys. *Materials Research Proceedings*, 2018, Vol. 9, pp. 162–166. DOI: 10.21741/9781644900017-31

16. Khmelevska T., Khmelevskiy S., Ruban A.V., Mohn P. Magnetism and origin of non-monotonous concentration dependence of the bulk modulus in Fe-rich alloys with Si, Ge and Sn: a first-principles study. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2006, Vol. 18, no. 29, pp. 6677–6689. DOI: 10.1088/0953-8984/18/29/009
17. Zagrebin M.A., Matyunina M.V., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. the effect of exchange-correlation potentials on magnetic properties of Fe- (Ga, Ge, Al) alloys. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, Vol. 1389, VII Euro-Asian Symposium "Trends in Magnetism", 8–13 September 2019, Ekaterinburg, Russian Federation, pp. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012087
18. Matyunina M.V., Zagrebin M.A., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. First principles study of structural and magnetic properties in  $\text{Fe}_{100-x}\text{Ge}_x$  alloys. *Physica B: Condensed Matter*, 2020, Vol. 580, pp. 411934. DOI:10.1016/j.physb.2019.411934
19. Cao J.X., Zhang Y.N., Ouyang W.J., Wu R.Q. Large magnetostriction of  $\text{Fe}_{1-x}\text{Ge}_x$  and its electronic origin: Density functional study. *Physical Review B*, 2009, Vol. 80, Iss. 10, p. 104414. DOI:10.1103/PhysRevB.80.104414
20. Kresse G., Joubert D. From ultrasoft pseudopotentials to the projector augmented-wave method *Phys. Rev. B*, 1999, Vol. 59, Iss. 3, pp. 1758. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.1758
21. Kresse G., Furthmüller J. Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set. *Physical Review B*, 1996, Vol. 54, Iss. 16, pp. 11169–11186. DOI:10.1103/PhysRevB.54.11169
22. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized gradient approximation made simple. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, Vol. 77, Iss. 18, pp. 3865–3868. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3865
23. Monkhorst H.J., Pack J.D. Special points for Brillouin-zone integrations. *Physical Review B*, 1976, Vol. 13, Iss. 12, pp. 5188–5192. DOI: 10.1103/physrevb.13.5188
24. Matyunina M.V., Zagrebin M.A., Sokolovskiy V.V., Pavluchina O.O., Buchelnikov V.D., Balagurov A.M., Golovin I. S. Phase diagram of magnetostrictive Fe-Ga alloys: insights from theory and experiment. *Phase Transitions*, 2019, Vol. 92, Iss. 2, pp. 101–116. DOI: 10.1080/01411594.2018.1556268
25. Warren B.E. *X-ray diffraction*. New York (NY), Dover Publications, 1990, 400 p.
26. Balagurov A.M., Bobrikov I.A., Sumnikov S.V., Golovin I.S. Dispersed clusters in  $(\text{Fe, Cr})_3\text{Al}$  alloys: Neutron time-of-flight diffraction study. *Physical Review Materials*, 2019, Vol. 3, Iss. 1, pp. 013608. DOI: 10.1103/physrevmaterials.3.013608
27. Balagurov A.M., Samoylova N.Yu., Bobrikov I.A., Sumnikova S.V., Golovin I.S. The first- and second-order isothermal phase transitions in  $\text{Fe}_3\text{Ga}$ -type compounds. *Acta Crystallographica*, 2019, Vol. B75, pp. 1–10. DOI: 10.1107/S2052520619013106
28. Fernandez A., Tejedor L., Bru L. Electron microscopy study of phase change  $\text{DO}_{19} \rightarrow \text{L}1_2$  in the  $\text{Fe}_3\text{Ge}$  compound. *Physica Status Solidi (a)*, 1976, Vol. 34, p. K17. DOI: 10.1002/pssa.2210340147
29. Chen Q.Z., Ngan A.H.W., Duggan B.J. The  $\text{L}1_2 \leftrightarrow \text{D}0_{19}$  transformation in the intermetallic compound  $\text{Fe}_3\text{Ge}$ . *Journal of Materials Science*, 1998, Vol. 33, P. 5405–5414. DOI: 10.1023/A:1004454402007

Received March 16, 2020

## СТРУКТУРНЫЕ И УПРУГИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ FE-GE: ИССЛЕДОВАНИЯ *AB INITIO*

М.А. Загребин<sup>1,2</sup>, М.В. Матюнина<sup>1</sup>, В.В. Соколовский<sup>1,3</sup>, В.Д. Бучельников<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>3</sup> Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация

E-mail: matunins.fam@mail.ru

В работе представлены исследования структурных и упругих свойств фаз A2, B2, D0<sub>3</sub> и L1<sub>2</sub> сплавов Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> (12,5 ≤ x ≤ 28,125 ат. %), выполненные при помощи теории функционала плотности. Кристаллические структуры исследовались при помощи двух типов релаксаций: электронной и полной ионной. Построены концентрационные зависимости атомных объемов, температур структурных фазовых переходов, тетрагональных и ромбоэдрических модулей сдвига. Кривые зависимостей величин атомного объема соответствует последовательности фазовых переходов, наблюдаемых экспериментально: A2 → B2 → D0<sub>3</sub> (x ≤ 22 ат. % содержания Ge). Показано, что температуры структурных фазовых переходов возрастают с увеличением концентрации Ge. В соответствии с экспериментальными результатами рассчитанные тетрагональные модули для структур D0<sub>3</sub>, A2 и L1<sub>2</sub> уменьшаются с ростом атомов Ge в сплавах. Величина ромбоэдрического модуля сдвига существенно не изменяется с увеличением числа атомов Ge. C<sub>44</sub> увеличивается для фазы D0<sub>3</sub>, в то время как для A2, B2 и L1<sub>2</sub> уменьшается.

*Ключевые слова:* *ab initio*; кристаллическая структура; фазовые превращения; упругие модули.

### Литература

1. Tetragonal magnetostriction and magnetoelastic coupling in Fe-Al, Fe-Ga, Fe-Ge, Fe-Si, Fe-Ga-Al, and Fe-Ga-Ge alloys / J.B. Restorff, M. Wun-Fogle, K.B. Hathaway *et al.* // J. of Applied Physics. – 2012. – Vol. 111. – P. 023905.
2. Clark, A.E. Extraordinary magnetoelasticity and lattice softening in bcc Fe-Ga alloys / A.E. Clark, K.B. Hathaway, M. Wun-Fogle *et al.* // J. of Applied Physics. – 2003. – Vol. 93, Iss. 10. – P. 8621–8623.
3. Magnetostriction of polycrystalline Fe–Ge alloys / R.S. Turtelli, C.B. Nunesa, L.C. Teixeira *et al.* // Journal of Alloys and Compounds. – 2009. – Vol. 471, Iss. 1–2. – pp. 52–55.
4. Ikeda, O. Phase equilibria and stability of ordered b.c.c. phases in the Fe-rich portion of the Fe-Ga system / O. Ikeda, R. Kainuma, I. Ohnuma *et al.* // J. of Alloys and Compounds. – 2002. – Vol. 347, Iss. 1–2. – P. 198–205.
5. Enoki, H. Miscibility gap due to ordering in the bcc Fe-Ge system / H. Enoki, K. Ishida, T. Nishizawa // Metallurgical Transactions A. – 1987. – Vol. 18A. – P. 949–955.
6. Paramagnetism and lattice parameters of Iron-rich iron-germanium alloys / H. Chessin, S. Araj, R.V. Colvin, D.S. Miller // J. of Physics and Chemistry of Solids. – 1963. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 261–273.
7. Golovin, I.S. Structure and anelasticity of Fe-Ge alloys / I.S. Golovin, T.V. Ivleva, S. Jäger *et al.* // Solid State Phenomena. – 2008. – Vol. 137. – P. 59–68.
8. Golovin, I.S. Structure and anelasticity of Fe<sub>3</sub>Ge alloy / I.S. Golovin, S. Jäger, Chr. Mennerich *et al.* // Intermetallics. – 2007. – Vol. 15. – P. 1548–1557.
9. Konygin, G.N. The structure and magnetic properties of the non-equilibrium Fe<sub>100-x</sub>Ge<sub>x</sub> (x=5–40 at%) system produced by mechanical alloying / G.N. Konygin, E.P. Yelsukov, V.E. Porsev // J. of Magnetism and Magnetic Materials. – 2005. – Vol. 288. – P. 27–36.

10. Cabrera, A.F. Mössbauer study of ball-milled Fe-Ge alloys / A.F. Cabrera, F.H. Sánchez // *Physical Review B*. – 2002. – Vol. 65. – P. 094202.
11. Kanematsu, K. Magnetic and X-ray studies of iron-germanium system II. Phase diagram and magnetism of each phase / K. Kanematsu, T. Ohoyama // *J. of the Physical Society of Japan*. – 1965. – Vol. 20. – P. 236–242.
12. Sarkar, S. Gibbs-Thomson effect in nanocrystalline Fe-Ge / S. Sarkar, C. Bansal, A. Chatterjee // *Physical Review B*. – 2000. – Vol. 62. – P. 3218–3222.
13. Belamri, Z. Study of order – disorder transitions in Fe–Ge alloys and related anelastic phenomena / Z. Belamri, D. Hamana, I.S. Golovin // *J. of Alloys and Compounds*. – 2013. – Vol. 554. – P. 348–356.
14. Petculescu, G. Magnetoelastic coupling in  $\text{Fe}_{100-x}\text{Ge}_x$  single crystals with  $4 < x < 18$  / G. Petculescu, J.B. LeBlanc, M. Wun-Fogle *et al.* // *J. of Applied Physics*. – 2009. – Vol. 105. – 07A932.
15. The structural Phase Diagrams of Fe-Y (Y=Ga, Ge, Al) alloys / M.V. Matyunina, M.A. Zagrebin, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov // *Materials Research Proceedings*. – 2018. – Vol. 9. – P. 162–166.
16. Magnetism and origin of non-monotonous concentration dependence of the bulk modulus in Fe-rich alloys with Si, Ge and Sn: a first-principles study/ T. Khmelevska, S. Khmelevskiy, A.V. Ruban, P. Mohn // *J. of Physics: Condensed Matter*. – 2006. – Vol. 18, no. 29. – P. 6677–6689.
17. The effect of exchange-correlation potentials on magnetic properties of Fe- (Ga, Ge, Al) alloys / M.A. Zagrebin, M.V. Matyunina, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov // *J. of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1389. – P. 012087.
18. First principles study of structural and magnetic properties in  $\text{Fe}_{100-x}\text{Ge}_x$  alloys / M.V. Matyunina, M.A. Zagrebin, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov // *Physica B: Condensed Matter*. – 2020. – Vol. 580. – P. 411934.
19. Large magnetostriction of  $\text{Fe}_{1-x}\text{Ge}_x$  and its electronic origin: Density functional study / J.X. Cao, Y.N. Zhang, W.J. Ouyang, R.Q. Wu // *Physical Review B*. – 2009. – Vol. 80, Iss. 10. – P. 104414.
20. Kresse, G. From ultrasoft pseudopotentials to the projector augmented-wave method / G. Kresse, D. Joubert // *Physical Review B*. – 1999. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 1758.
21. Kresse, G. Efficient iterative schemes for ab-initio total-energy calculations using a plane-wave basis set / G. Kresse, J. Furthmüller // *Physical Review B*. – 1996. – Vol. 54, Iss. 16. – P. 11169–11186.
22. Perdew, J.P. Generalized Gradient Approximation Made Simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // *Physical Review Letters*. – 1997. – Vol. 78, Iss. 18. – P. 1396.
23. Monkhorst, H.J. Special points for Brillouin-zone integrations / H.J. Monkhorst, J.D. Pack // *Physical Review B*. – 1976. – Vol. 13, Iss. 12. – P. 5188–5192.
24. Phase diagram of magnetostrictive Fe-Ga alloys: insights from theory and experiment / M.V. Matyunina, M.A. Zagrebin, V.V. Sokolovskiy *et al.* // *Phase Transitions*. – 2019. – Vol. 92, Iss. 2. – P. 101–116.
25. Warren, B.E. X-ray diffraction / B.E. Warren. – New York: Dover Publications, 1990. – 400 p.
26. Dispersed clusters in  $(\text{Fe}, \text{Cr})_3\text{Al}$  alloys: Neutron time-of-flight diffraction study / A.M. Balagurov, I.A. Bobrikov, S.V. Sumnikov, I.S. Golovin // *Physical Review Materials*. – 2019. – Vol. 3, Iss. 1. – P. 013608.
27. Balagurov, A.M. The first- and second-order isothermal phase transitions in  $\text{Fe}_3\text{Ga}$ -type compounds / A.M. Balagurov, N.Yu. Samoylova, I.A. Bobrikov, S.V. Sumnikova, I.S. Golovin // *Acta Crystallographica Section B: Structural Science, Crystal Engineering and Materials*. – 2019. – Vol. B75. – P. 1–10.
28. Fernandez, A. Electron microscopy study of phase change  $\text{DO}_{19} \rightarrow \text{L}1_2$  in the  $\text{Fe}_3\text{Ge}$  compound / A. Fernandez, L. Tejedor, L. Bru // *Physica Status Solidi (a)*. – 1976. – Vol. 34. – P. K17.
29. Chen, Q.Z. The  $\text{L}1_2 \leftrightarrow \text{D}0_{19}$  transformation in the intermetallic compound  $\text{Fe}_3\text{Ge}$  / Q.Z. Chen, A.H.W. Ngan, B.J. Duggan // *J. of Materials Science*. – 1998. – Vol. 33. – P. 5405–5414.

*Поступила в редакцию 16 марта 2020 г.*

## ОБЪЕМНАЯ МАГНИТОСТРИКЦИЯ СПЛАВОВ FE-GA: РАСЧЕТ ИЗ ПЕРВЫХ ПРИНЦИПОВ

**М.В. Матюнина<sup>1</sup>, В.Д. Бучельников<sup>1,2</sup>, М.А. Загребин<sup>1,3</sup>, В.В. Соколовский<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: matunins.fam@mail.ru

Представлены исследования магнитных и магнитоупругих свойств кристаллических структур A2 и D0<sub>3</sub> сплавов Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub> (x = 18 – 22 ат. %), выполненные при помощи теории функционала плотности. Расчеты выполнены при помощи программного пакета SPR-KKR. Рассчитаны обменные интегралы, значения объемной магнитоупругой постоянной  $B_0$  и объемной магнитострикции  $\Delta V/V$ . Полученная зависимость констант магнитного обменного взаимодействия от параметра кристаллической решетки является убывающей функцией как для структуры A2 так и для D0<sub>3</sub>. Показано, что ферромагнитное взаимодействие между атомами железа в первой координационной сфере усиливается с ростом концентрации Ga в полностью неупорядоченной фазе A2, в то время как в упорядоченной кристаллической структуре D0<sub>3</sub> данное взаимодействие ослабляется. Рассчитанные величины  $\Delta V/V$  для различных композиций сплавов Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub> лежат в области отрицательных значений. Зависимость объемной магнитострикции от содержания Ga является возрастающей функцией для структуры A2 и убывающей  $\Delta V/V$  для фазы D0<sub>3</sub>. Характер зависимости объемной магнитострикции от концентрации Ga структуры A2 согласуется с экспериментальными данными и с результатами, полученными для соединений на основе Ni.

*Ключевые слова:* Fe-Ga; обменное взаимодействие; объемная магнитострикция; первопринципные вычисления.

### Введение

Сплавы Fe-Ga являются широко исследуемыми, перспективными магнитострикционными материалами, актуальными в технике в качестве датчиков микроэлектромеханических систем и преобразователей энергии. Небольшая добавка Ga в структуру  $\alpha$ -Fe приводит к десятикратному увеличению магнитострикции сплавов относительно чистого железа [1, 2]. На магнитострикционные свойства сплавов существенное влияние оказывает фазовый состав композиций, который в свою очередь зависит от термических условий обработки образцов [2–6]. В медленно охлажденных образцах величина тетрагональной магнитострикции  $\lambda_{100}$  в слабом магнитном поле достигает двух пиков:  $180 \cdot 10^{-6}$  при  $x \approx 19$  ат. % и  $156 \cdot 10^{-6}$  при  $x \approx 27$  ат. %. В закаленных образцах эти значения выше и составляют  $\sim 263 \cdot 10^{-6}$  вблизи 19 % Ga и  $233 \cdot 10^{-6}$  около 27 % Ga [2]. Величина ромбоэдрической магнитострикции  $\lambda_{111}$  составляет  $25,3 \cdot 10^{-6}$  и  $32 \cdot 10^{-6}$  в сплавах Fe<sub>79,1</sub>Ga<sub>20,9</sub> и Fe<sub>71,2</sub>Ga<sub>28,8</sub>, соответственно. Добавка немагнитных атомов Ga к железу влияет не только на величину линейной, но и объемной магнитострикции  $\Delta V/V$ . В работах [7, 8] показано, что в сильном магнитном поле в *as-cast* сплавах Fe<sub>81</sub>Ga<sub>19</sub> объемная магнитострикция достигает значения  $20 \cdot 10^{-6}$ , что в пять раз больше относительно чистого Fe [7]. В поликристаллических сплавах с содержанием 15, 20 и 29 ат. % Ga в сильных полях (до 5 Тл) вклад объемной магнитострикции составил около 33 % [7, 8]. Авторы статей [7, 8] связывают полученные результаты с наличием полностью неупорядоченной структуры A2 в исследуемых образцах.

В рамках первопринципных вычислений постоянные магнитострикции  $\lambda_{100}$  и  $\lambda_{111}$  кристаллов кубической симметрии можно рассчитать исходя из зависимости энергии магнитокристаллической анизотропии  $E_{MKA}$  от небольших деформаций [6, 9]. Для определения тетрагональной магнитострикции энергия системы вычисляется в направлениях [001] и [111], в случае ромбоэдрической – вдоль осей [111] и  $[11\bar{2}]$ . Разность энергий, полученных вдоль указанных направлений

позволяет определить энергию магнитокристаллической анизотропии, а затем и постоянные магнитострикции согласно формулам

$$\lambda_{001} = \frac{3}{2V} \frac{dE_{MKA}/d\varepsilon}{d^2 E_{полн}/d\varepsilon^2} = -\frac{b_1}{3C'}; \lambda_{111} = \frac{3}{2V} \frac{dE_{MKA}/d\varepsilon}{d^2 E_{полн}/d\varepsilon^2} = -\frac{b_2}{3C_{44}},$$

где  $V$  – объем структуры,  $C'$ ,  $C_{44}$  – упругие константы,  $\varepsilon$  – малые искажения при постоянном объеме,  $E_{полн}$  – полная энергия. Результаты расчетов магнитострикции хорошо согласуются с экспериментальными данными и представлены в работах [6, 9–11]. В отличие от констант линейной магнитострикции, величину объемной магнитострикции можно оценить из зависимости энергии обменного взаимодействия от расстояния между парами спинов [12].

Целью данной работы является вычисление объемной магнитострикции сплавов  $Fe_{100-x}Ga_x$  ( $x = 18 - 22$  ат.%) в структурных фазах A2 и D0<sub>3</sub> в зависимости от концентрации атомов Ga методом теории функционала плотности.

### 1. Детали вычислений

Расчеты выполнены с использованием теории функционала плотности, реализованной в пакете SPR-KKR (*a spin-polarized relativistic Korringa–Kohn–Rostoker code*) [13]. Учет обменно-корреляционных эффектов проводился в приближении обобщенного градиента (general gradient approximations – GGA) в формулировке Пердью, Бурке и Эрнцернхофа (Perdew, Burke, Ernzerhof – PBE) [14]. Самосогласованные вычисления выполнены с использованием  $k$ -сетки 45<sup>3</sup> с 2880  $k$ -точками. Для оптимизации кристаллической структуры были использованы две кубические структуры: A2 ( $Im\bar{3}m$ , группа симметрии № 229, прототип  $\alpha$ -Fe) и D0<sub>3</sub> ( $Fm\bar{3}m$ , группа симметрии № 225, прототип  $BiF_3$ ). Химический беспорядок моделировался с использованием приближения когерентного потенциала. Равновесные параметры решетки  $a_0$  и объемный модуль упругости  $B$  были получены из зависимости полной энергии от объема ячейки в соответствии с уравнением состояния Берча–Мурнагана. Для каждой композиции  $Fe_{100-x}Ga_x$  ( $x = 18 - 22$  ат. %) были вычислены константы магнитного обменного взаимодействия в гамилтониане Гейзенберга в зависимости от параметра решетки. Расчеты проводились на  $k$ -сетке 57<sup>3</sup> с 4495  $k$  точками. Объемная магнитострикция определялась по следующей формуле [12, 15]

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{r_0 n z}{3B} \frac{\partial J_{ij}}{\partial r} \langle S_i \cdot S_j \rangle = \frac{B_0}{B}, \quad (1)$$

где  $n$  – количество атомов, приходящихся на объем элементарной ячейки,  $J_{ij}$  – обменный интеграл между атомами  $i$  и  $j$ , расположенных на наименьшем расстоянии  $r$ ,  $z$  – число ближайших соседей,  $r_0$  – расстояние между атомами  $i$  и  $j$  для немагнитного состояния системы,  $S_{i(j)}$  – спин единичной длины ( $|S_i| = 1$ ),  $B_0$  – объемная магнитоупругая постоянная.

### 2. Результаты вычислений

На первом этапе были проведены самосогласованные расчеты для структур A2 и D0<sub>3</sub> сплавов  $Fe_{100-x}Ga_x$  ( $x = 18-22$  ат. %) при различных параметрах решетки. Основываясь на полученных данных для различных концентраций  $x$  были вычислены константы магнитного обменного взаимодействия  $J_{ij}$ . Наибольшие взаимодействия в A2 и D0<sub>3</sub> структурах наблюдаются между атомами железа, расположенными в первой координационной сфере ( $r^{A2} = a\sqrt{3}/2$ ,  $r^{D03} = a\sqrt{3}/4$ ). В случае фазы A2 имеется один сорт атомов Fe, в то время как в кристаллической решетке D0<sub>3</sub> в зависимости от занимаемой позиции можно выделить три типа атомов: Fe<sub>1</sub> – занимающие позиции 8c (1/4, 1/4, 1/4); Fe<sub>2</sub> – размещенные на позиции 4b (1/2, 1/2, 1/2); Fe<sub>3</sub> – расположенные на позициях 4a (0, 0, 0) совместно с атомами Ga. Наибольшее значение констант  $J_{ij}^{D03}$  наблюдается между атомами Fe<sub>1</sub>–Fe<sub>2</sub>.

На рис. 1 представлены концентрационные зависимости констант магнитного обменного взаимодействия атомов железа в первой координационной сфере. Видно, что с увеличением параметра решетки обменное взаимодействие уменьшается в обеих структурах, что объясняется увеличением расстояния между ближайшими спинами. В неупорядоченной фазе A2 значения  $J_{ij}$  больше, чем в фазе D0<sub>3</sub>. При увеличении концентрации Ga в структуре A2 происходит усиление

ферромагнитного взаимодействия между атомами Fe. Данный факт можно объяснить тем, что в неупорядоченной фазе A2 увеличение количества атомов Ga приводит к сближению атомов железа из-за большего радиуса атомов Ga и их случайного расположения в решетке. В упорядоченной D0<sub>3</sub> фазе, напротив, ферромагнитное взаимодействие Fe<sub>1</sub>-Fe<sub>2</sub> ослабляется по мере увеличения атомов Ga в решетке из-за того, что они вынуждены размещаться по узлам упорядоченной кристаллической структуры, тем самым, увеличивая расстояние между ближайшими атомами железа.

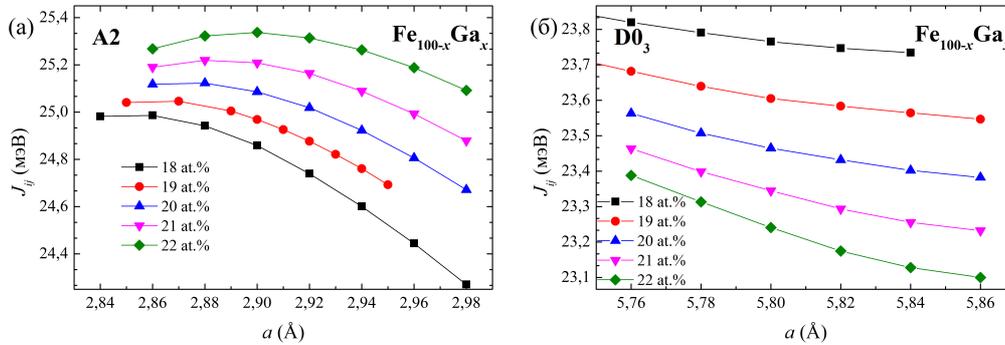


Рис. 1. Концентрационные зависимости констант магнитного обменного взаимодействия  $J_{ij}$  от параметра кристаллической решетки  $a$  в первой координационной сфере для (а) A2 и (б) D0<sub>3</sub> фаз сплавов Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub>

В соответствии с соотношением (1) рассчитаны объемные магнитоупругие постоянные, значения которых представлены в таблице. В таблице также приведены равновесные значения параметров решетки  $a_0$  и объемные модули упругости  $B$ . В исследуемом диапазоне концентраций  $18 \leq x \leq 22$  ат. % значение равновесного параметра практически не меняется с увеличением концентрации Ga и составляет  $a_0 \approx 2,92 \text{ \AA}$  для полностью разупорядоченной структуры A2 и  $a_0/2 \approx 2,90 \text{ \AA}$  для упорядоченной фазы D0<sub>3</sub>. Добавка галлия в решетку A2 приводит к уменьшению значений объемного модуля упругости  $B$ , в то время как в D0<sub>3</sub> фазе данный параметр практически не изменяется. Значения объемной магнитоупругой постоянной  $B_0$  отрицательны. По абсолютной величине значения  $B_0^{A2}$  уменьшаются почти в два раза для композиции Fe<sub>78</sub>Ga<sub>22</sub> по сравнению с составом Fe<sub>82</sub>Ga<sub>18</sub>. Для D0<sub>3</sub> наблюдается обратная зависимость поведения  $B_0(x)$  в исследуемом диапазоне.

Равновесный параметр решетки  $a_0$  (Å), объемный модуль упругости  $B$  (ГПа) и объемная магнитоупругая постоянная  $B_0$  (ГПа) кристаллических структур A2 и D0<sub>3</sub> сплавов Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub>

Таблица

$x$ , ат. %	A2			D0 <sub>3</sub>		
	$a_0$	$B$	$B_0$	$a_0/2$	$B$	$B_0$
18	2,915	171,0	-0,663	2,902	158,2	-0,060
19	2,917	158,7	-0,508	2,903	157,9	-0,063
20	2,919	166,5	-0,445	2,903	157,7	-0,088
21	2,923	164,1	-0,337	2,904	157,8	-0,115
22	2,924	163,5	-0,300	2,905	158,0	-0,145

На основании данных таблицы получены значения объемной магнитоупругости  $\Delta V/V$  в зависимости от концентрации Ga, показанные на рис. 2.

Как следует из таблицы и рис. 2, поведение зависимости  $\Delta V/V(x)$  повторяет зависимость  $B_0(x)$ . Порядок значений магнитоупругости составляет  $10^{-3}$ , что в сто раз больше экспериментальных данных, представленных в работах [7, 8]. В работе [8] значения  $\Delta V/V$ , полученные для поликристаллов с содержанием  $x = 15, 20, 29$  ат. % в магнитных полях до 5 Тл составляют  $15 \cdot 10^{-6}$ ,  $29 \cdot 10^{-6}$  и  $27 \cdot 10^{-6}$  соответственно. В *as-cast* сплавах Fe<sub>81</sub>Ga<sub>19</sub> объемная магнитоупругость достигает значения  $20 \cdot 10^{-6}$  [7]. Различие между экспериментальными данными [7, 8] и полученными в данной работе результатами может быть объяснено тем, что измерения магнитоупругости в работах [7, 8] проводились при комнатной температуре, а расчеты выполнены при 0 К. В работе [15] значение  $\Delta V/V$  для Ni при температурах, близких к 0 К, составляет порядка  $-12 \cdot 10^{-4}$ ; при увеличении температуры постоянная объемной магнитоупругости уменьшается. Согласно данным, по-

лученным в работе [16], объемная магнитострикция для сплавов Ni-Mn-Ga при комнатной температуре составляет  $-198 \cdot 10^{-4}$ . Таким образом, рассчитанные в данной работе значения объемной магнитострикции для сплавов Fe-Ga, согласуются с результатами, полученными для других соединений.

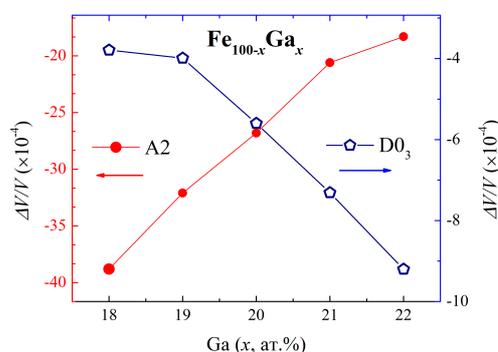


Рис. 2. Концентрационные зависимости объемной магнитострикции кристаллических структур A2 (левая ось) и D0<sub>3</sub> (правая ось) сплавов Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub>

### Заключение

В данной работе из первых принципов проведено исследование зависимости объемной магнитострикции от концентрации Ga в сплавах Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub> (x = 18 – 22 ат. %). Рассмотрены две кристаллические структуры кубической симметрии A2 и D0<sub>3</sub>, наблюдаемые экспериментально в указанном диапазоне концентраций. При температуре 0 К рассчитаны параметры обменного взаимодействия в зависимости от параметра решеток. Из них определена объемная магнитоупругая постоянная. Показано, что величина констант магнитного обменного взаимодействия  $J_{ij}$  и объемной магнитоупругой постоянной  $B_0$  возрастает с содержанием Ga для структуры A2 и уменьшается для структуры D0<sub>3</sub>. Получена композиционная зависимость объемной магнитострикции  $\Delta V/V$ . Показано, что теоретические значения объемной магнитострикции по абсолютной величине на два порядка выше, чем экспериментально измеренные в поликристаллических образцах в сильном магнитном поле. Различие между экспериментальными данными и полученными в данной работе результатами может быть объяснено тем, что измерения магнитострикции проводились при комнатной температуре, а расчеты выполнены при 0 К. Значения объемной магнитострикции для сплавов Fe-Ga согласуются с результатами для других соединений.

*Работа выполнена при поддержке гранта № 17-72-20022 Российского Научного Фонда (разделы 1 и 2), М. Загребин выражает благодарность Фонду поддержки молодых ученых Челябинского государственного университета.*

### Литература

1. Buschow, K.H.J. (ed.) Handbook of Magnetic Materials / K.H.J. Buschow (ed.). – North Holland, 2012. – Vol. 20. – 380 p.
2. Clark, A.E. Extraordinary magnetoelasticity and lattice softening in bcc Fe-Ga alloys / A.E. Clark, K.B. Hathaway, M. Wun-Fogle *et al.* // J. of Applied Physics. – 2003. – Vol. 93, Iss. 10. – P. 8621–8623.
3. Srisukhumbowornchai, N. Large magnetostriction in directionally solidified FeGa and FeGaAl alloys / N. Srisukhumbowornchai, S. Guruswamy // J. of Applied Physics. – 2001. – Vol. 90, Iss. 11. – P. 5680–5688.
4. Xing, Q. Structural investigations of Fe-Ga alloys: Phase relations and magnetostrictive behavior / Q. Xing, Y. Du, R.J. McQueeney, T.A. Lograsso // Acta Materialia. – 2008. – Vol. 56, Iss. 16. – P. 4536–4546.
5. Wu, R. Origin of large magnetostriction in Fe-Ga alloys / R. Wu // J. of Applied Physics. – 2002. – Vol. 91, Iss. 10. – P. 7358–7360.
6. Wang, H. Understanding strong magnetostriction in Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub> alloys / H. Wang, Y.N. Zhang, R.Q. Wu *et al.* // Scientific Reports. – 2013. – Vol. 3. – P. 03521.

7. Gao, F. Volume magnetostriction of  $\text{Fe}_{81}(\text{Ga}_{1-x}\text{Ge}_x)_{19}$  alloys / F. Gao, Ch. Jiang, J. Liu, H. Xu // *J. of Applied Physics*. – 2006. – Vol. 100, Iss. 12. – P. 123916.
8. Bormio-Nunes, C. Volume magnetostriction and structure of copper mold-cast polycrystalline Fe-Ga alloys / C. Bormio-Nunes, M.A. Tirelli, R. Sato Turtelli *et al.* // *J. of Applied Physics*. – 2005. – Vol. 97, Iss. 3. – P. 033901.
9. Zhang, Y. First principles determination of the rhombohedral magnetostriction of  $\text{Fe}_{100-x}\text{Al}_x$  and  $\text{Fe}_{100-x}\text{Ga}_x$  alloys / Y. Zhang, H. Wang, R. Wu // *Physical Review B*. – 2012. – Vol. 86, Iss. 22. – P. 224410.
10. Wang, H. Ab initio studies of the effect of nanoclusters on magnetostriction of  $\text{Fe}_{1-x}\text{Ga}_x$  alloys / H. Wang, Y.N. Zhang, T. Yang, Z.D. Zhang, L.Z. Sun, R. Q. Wu // *Applied Physics Letters*. – 2010. – Vol. 97, Iss. 26. – P. 262505
11. Матюнина, М.В. Моделирование ромбоэдрической магнитострикции в сплавах Fe-Ga / М.В. Матюнина, М.А. Загребин, В.В. Соколовский, В.Д. Бучельников // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 158–165.
12. Chikazumi, S. *Physics of Ferromagnetism* / S. Chikazumi. – New York, Oxford University Press, 1997. – 672 p.
13. Ebert, H. Calculating condensed matter properties using the KKR-Green's function method—recent developments and applications / H. Ebert, D. Ködderitzsch, J. Minár // *Reports on Progress in Physics*. – 2011. – Vol. 74, no. 9. – P. 096501.
14. Perdew, J.P. Generalized gradient approximation made simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // *Physical Review Letters*. – 1996. – Vol. 77, Iss. 18. – P. 3865–3868.
15. Tremolet de Lacheisserie *Magnetism*, E.W. (Ed.) *Magnetism* / E.W. Tremolet de Lacheisserie (Ed.), D. Gignoux (Ed.), M. Schlenker (Ed.). – Springer-Verlag New York, 2005. – 518 p.
16. Khovaylo, V.V. Phase transitions in  $\text{Ni}_{2+x}\text{Mn}_{1-x}\text{Ga}$  with a high Ni excess / V.V. Khovaylo, V.D. Buchelnikov, R. Kainuma, V.V. Koledov, M. Ohtsuka, V.G. Shavrov, T. Takagi, S.V. Taskaev, A.N. Vasiliev // *Physical Review B*. – 2005. – Vol. 72, Iss. 22. – P. 224408.

Поступила в редакцию 16 марта 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2020, vol. 12, no. 2, pp. 57–62

DOI: 10.14529/mmph200207

## VOLUME MAGNETOSTRICTION OF FE-GA ALLOYS: CALCULATION FROM FIRST PRINCIPLES

M.V. Matyunina<sup>1</sup>, V.D. Buchelnikov<sup>1,2</sup>, M.A. Zagrebina<sup>1,3</sup>, V.V. Sokolovskiy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup>National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: matunins.fam@mail.ru

In this paper, with the help of the density functional theory, the magnetic and magnetoelastic properties of the crystal structures A2 and D0<sub>3</sub> of  $\text{Fe}_{100-x}\text{Ga}_x$  alloys ( $x = 18\text{--}22$  at.%) have been studied. The calculations were performed using the SPR-KKR software package. The exchange integrals, the values of the volume magnetoelastic constant  $B_0$ , and the volume magnetostriction  $\Delta V/V$  have been calculated. The obtained dependence of the exchange interaction constants on the crystal lattice parameter is a decreasing function for both A2 and D0<sub>3</sub> structures. It has been shown that the ferromagnetic interaction between iron atoms in the first coordination sphere increases with increasing Ga concentration in the fully disordered A2 phase, while this interaction weakens in the ordered crystal structure D0<sub>3</sub>. The obtained values of  $\Delta V/V$  for various compositions of  $\text{Fe}_{100-x}\text{Ga}_x$  alloys are negative. It is shown that an increase in the Ga content leads to an increase in volume magnetostriction for the A2 structure and a decrease in  $\Delta V/V$  for the D0<sub>3</sub> phase. The character of the volume magnetostriction dependence on the concentration of Ga for structure A2 is consistent with the experimental data and with the results obtained for compounds based on Ni.

*Keywords: Fe-Ga; exchange interaction; volume magnetostriction; first principles calculations.*

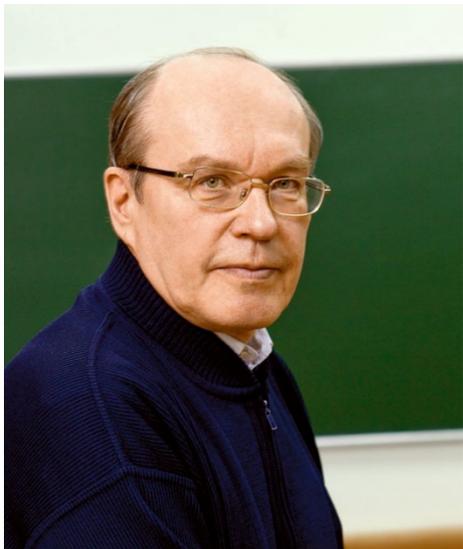
## References

1. Buschow K.H.J. (ed.) *Handbook of Magnetic Materials*. Vol. 20, North Holland, 2012, 380 p.
2. Clark A.E., Hathaway K.B., Wun-Fogle M., Restorff J.B., Lograsso T.A., Keppens V.M., Petculescu G., Taylor R.A. Extraordinary magnetoelasticity and lattice softening in bcc Fe-Ga alloys. *Journal of Applied Physics*, 2003, Vol. 93, Iss. 10, pp. 8621–8623. DOI:10.1063/1.1540130
3. Srisukhumbowornchai N., Guruswamy S. Large magnetostriction in directionally solidified Fe-Ga and Fe-Ga-Al alloys. *Journal of Applied Physics*, 2001, Vol. 90, Iss. 11, pp. 5680–5688. DOI:10.1063/1.1412840
4. Xing Q., Du Y., McQueeney R.J., Lograsso T.A. Structural investigations of Fe-Ga alloys: Phase relations and magnetostrictive behavior. *Acta Materialia*, 2008, Vol. 56, Iss. 16, pp. 4536–4546. DOI:10.1016/j.actamat.2008.05.011
5. Wu, R. Origin of large magnetostriction in Fe-Ga alloys. *Journal of Applied Physics*, 2002, Vol. 91, Iss. 10, pp. 7358–7360. DOI: 10.1063/1.1450791
6. Wang H. Zhang Y.N., Wu R.Q., Sun L.Z., Xu D.S., Zhang Z.D. Understanding strong magnetostriction in Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub> alloys. *Scientific Reports*, 2013, Vol. 3, pp. 03521. DOI:10.1038/srep03521
7. Gao F., Jiang Ch., Liu J., Xu H. Volume magnetostriction of Fe<sub>81</sub>(Ga<sub>1-x</sub>Ge<sub>x</sub>)<sub>19</sub> alloys. *Journal of Applied Physics*, 2006, Vol. 100, Iss. 12, pp. 123916. DOI:10.1063/1.2401310
8. Bormio-Nunes C., Tirelli M.A., Turtelli R.S., Grössinger R., Müller H., Wiesinger G., Sassik H., Reissner M. Volume magnetostriction and structure of copper mold-cast polycrystalline Fe-Ga alloys. *Journal of Applied Physics*, 2005, Vol. 97, Iss. 3, pp. 033901. DOI:10.1063/1.1834692
9. Zhang Y., Wang H., Wu R. First principles determination of the rhombohedral magnetostriction of Fe<sub>100-x</sub>Al<sub>x</sub> and Fe<sub>100-x</sub>Ga<sub>x</sub> alloys. *Phys. Rev. B.*, 2012, Vol. 86, Iss. 22, pp. 224410. DOI:10.1103/PhysRevB.86.224410
10. Wang H., Zhang Y.N., Yang T., Zhang Z.D., Sun L.Z., and Wu R.Q. *Ab initio* studies of the effect of nanoclusters on magnetostriction of Fe<sub>1-x</sub>Ga<sub>x</sub> alloys. *Applied Physics Letters*, 2010, Vol. 97, Iss. 26, pp. 262505. DOI:10.1063/1.3533659
11. Matyunina M.V., Zagrebina M.A., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. Modelling of rhombohedral magnetostriction in Fe–Ga alloys. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 158–165. DOI: 10.14529/mmp190214
12. Chikazumi S. *Physics of Ferromagnetism*. New York, Oxford University Press, 1997, 672 p.
13. Ebert H., Ködderitzsch D., Minár J. Calculating condensed matter properties using the KKR-Green's function method—recent developments and applications. *Reports on Progress in Physics*, 2011, Vol. 74, no. 9, pp. 096501. DOI: 10.1088/0034-4885/74/9/096501
14. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized gradient approximation made simple. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, Vol. 77, Iss. 18, pp. 3865–3868. DOI:10.1103/PhysRevLett.77.3865
15. Tremolet de Lacheisserie E.W. (Ed.), Gignoux D. (Ed.), Schlenker M. (Ed.) *Magnetism*. Springer-Verlag New York, 2005, 518 p. DOI: 10.1007/978-0-387-23063-4
16. Khovaylo V.V., Buchelnikov V.D., Kainuma R., Koledov V.V., Ohtsuka M., Shavrov V.G., Takagi T., Taskaev S.V., Vasiliev A.N. Phase transitions in Ni<sub>2+x</sub>Mn<sub>1-x</sub>Ga with a high Ni excess. *Phys. Rev. B.*, 2005, Vol 72, Iss. 22, pp. 224408. DOI:10.1103/PhysRevB.72.224408

Received March 16, 2020

# Персоналии

## ВАСИЛИЙ ДМИТРИЕВИЧ БУЧЕЛЬНИКОВ. К 65-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



3 апреля 2020 года исполняется 65 лет известному физику-теоретику, специалисту в области физики магнетизма, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному работнику высшего образования РФ Василию Дмитриевичу Бучельникову.

В.Д. Бучельников родился и все свое детство провел в поселке Косья Свердловской области. В 1972 году он поступил, а в 1978 году окончил физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Сразу по окончании университета В.Д. Бучельников поступил в целевую аспирантуру физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова от Челябинского государственного университета, которую успешно окончил в 1981 году и, защитив в следующем году диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, поступил на работу в Челябинский государственный

университет. С тех пор вся научная и образовательная деятельность В.Д. Бучельникова связана с этим университетом, где он прошел по карьерной лестнице от ассистента до профессора и заведующего кафедрой, был деканом физического факультета и проректором по научной работе. Здесь он подготовил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.11 – физика магнитных явлений, которую в 1992 году с успехом защитил в диссертационном совете Института физики металлов Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург). В.Д. Бучельников создал научную школу «физики магнитных явлений».

На данном этапе исследовательская деятельность В.Д. Бучельникова затрагивает широкий круг теории конденсированного состояния. Можно отметить основные устойчиво работающие научные направления, развиваемые непосредственно им и его учениками. Сюда можно отнести следующее:

- создана теория электромагнитно акустического преобразования (ЭМАП) в магнитоупорядоченных веществах [1, 2];
- создана теория связанных электромагнитных, спиновых, упругих и релаксационных колебаний в магнетиках в области магнитных и ориентационных фазовых переходов [3–6];
- создана теория связанных магнитных и структурных переходов в сплавах Гейслера [7–11];
- предложен гамильтониан, позволяющий описывать магнитные и структурные фазовые переходы и магнитокалорический эффект в сплавах Гейслера [12–14];
- создан прототип устройства для магнитного охлаждения [2007 г., два патента].

Отметим, что теория связанных магнитных и структурных переходов в сплавах Гейслера [7] была высоко оценена мировым научным сообществом, о чем свидетельствует большое количество цитирований (более 450). Отметим, что в рамках научной школы по данным направлениям было защищено 11 кандидатских (среди которых Ph.D. в University of Duisburg Essen, Germany) и 3 докторских диссертации.

Новый этап в развитии научной школы начинается в 2008 году. В этом году ученики под руководством В.Д. Бучельникова начинают заниматься экспериментальными исследованиями магнитных и магнитокалорических свойств магнитоупорядоченных сплавов. Для этого используется автоматизированная измерительная система для измерения магнитокалорического эффекта (группа компаний АМТ&С, Москва), а также оригинальная установка по измерению низкополевой магнитной восприимчивости. В 2017 году для измерительной системы по измерению магнитокалорического эффекта дополнительно была приобретена вставка для измерения теплоемко-

## Персоналии

сти. По материалам экспериментальных исследований учениками школы было защищено три диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. На данный момент коллектив научной школы работает в трех больших направлениях. Первое из них связано с первопринципными исследованиями свойств магнитоупорядоченных материалов, теоретическими и экспериментальными исследованиями магнитокалорического эффекта. Второе большое направление связано с исследованиями мультиферроиков, СВЧ-нагревом металлических порошков, высокопоглощающими и высокоотражающими материалами, средами с отрицательными показателями преломления, а также плазмоникой на основе структур графен-магнетик. Третье направление связано с исследованиями свойств сплавов, подвергнутых холодной прокатке, а также сжижением газов по технологии магнитного охлаждения.

В 2009 году на базе Челябинского государственного университета под руководством В.Д. Бучельникова организована (совместная с ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва) лаборатория физики магнитных явлений. Кроме этого, коллектив научной школы сотрудничает с различными группами в России и за границей.

В.Д. Бучельников активно ведет организационно-научную деятельность. Он является главным редактором Челябинского физико-математического журнала, а также членом редакционного совета журнала «Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математика. Механика. Физика». Он вместе с учениками участвовал в организации и проведении международной зимней школы-конференции физиков-теоретиков «Коуровка» (1998, 2000, 2002 гг.). На базе Челябинского государственного университета коллективом научной школы организованы и проведены международная конференция «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (2015 г.) и III международная конференция «Сплавы с эффектом памяти формы» (2018 г.).

Коллеги и друзья сердечно поздравляют Василия Дмитриевича с юбилеем и желают ему дальнейших успехов на поприще науки и преподавания.

**И.В. Бычков, М.А. Загребин, С.А. Загребина,  
Г.А. Свиридюк, В.В. Соколовский, С.В. Таскаев**

### Литература

1. Бучельников, В.Д. Электромагнитное возбуждение ультразвука в ферромагнетиках / В.Д. Бучельников, А.Н. Васильев // *Успехи физ. наук.* – 1992. – Т. 162, № 3. – С. 89–128.
2. Электромагнитное возбуждение звука в металлах / А.Н. Васильев, В.Д. Бучельников, С.Ю. Гуревич и др. – Челябинск; М.: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 338 с.
3. Магнитоакустика редкоземельных ортоферритов / В.Д. Бучельников, Н.К. Даньшин, Л.Т. Цымбал, В.Г. Шавров // *Успехи физ. наук.* – 1996. – Т. 166, № 6. – С. 585–612.
4. Соотношение вкладов прецессионных и продольных колебаний в динамике магнетиков / В.Д. Бучельников, Н.К. Даньшин, Л.Т. Цымбал, В.Г. Шавров // *Успехи физ. наук.* – 1999. – Т. 169, № 10. – С. 1049–1084.
5. Влияние взаимодействия подсистем на динамические свойства магнетиков / И.В. Бычков, Д.А. Кузьмин, В.Д. Бучельников, В.Г. Шавров. – М.: Физматлит, 2016. – 172 с.
6. Шавров, В.Г. Связанные волны в магнетиках / В.Г. Шавров, В.Д. Бучельников, И.В. Бычков. – М.: Физматлит, 2019. – 476 с.
7. Vasil'ev, A.N. Structural and magnetic phase transitions in shape-memory alloys  $Ni_{2+x}Mn_{1-x}Ga$  / A.N. Vasil'ev, A.D. Bozhko, V.V. Khovailo *et al.* // *Phys. Rev. B.* – 1999. – V. 59, Iss. 2. – P. 1113.
8. Ферромагнетики с памятью формы / А.Н. Васильев, В.Д. Бучельников, Т. Такаги и др. // *Успехи физ. наук.* – 2003. – Т. 173, № 6. – С. 577–608.
9. Khovaylo, V.V. Phase transitions in  $Ni_{2+x}Mn_{1-x}Ga$  with a high Ni excess / V.V. Khovaylo, V.D. Buchelnikov, R. Kainuma *et al.* // *Phys. Rev. B.* – 2005. – Vol. 72, Iss. 22. – P. 224408.
10. Entel, P. Modelling the phase diagram of magnetic shape memory Heusler alloys / P. Entel, V.D. Buchelnikov, V.V. Khovailo *et al.* // *J. of Physics D: Appl. Physics.* – 2006. – Vol. 39, no. 5. – P. 865–889.
11. Магнитные сплавы с памятью формы: фазовые переходы и функциональные свойства / В.Д. Бучельников, А.Н. Васильев, В.В. Коледов и др. // *Успехи физ. наук.* – 2006. – Т. 176, № 8. – С. 900–906.

12. Buchelnikov, V.D. Monte Carlo study of the influence of antiferromagnetic exchange interactions on the phase transitions of ferromagnetic Ni-Mn-X alloys (X = In, Sn, Sb) / V.D. Buchelnikov, P. Entel, S.V. Taskaev *et al.* // Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 78, Iss. 18. – P. 184427.

13. Buchelnikov, V.D. First-principles and Monte Carlo study of magnetostructural transition and magnetocaloric properties of Ni<sub>2+x</sub>Mn<sub>1-x</sub>Ga / V.D. Buchelnikov, V.V. Sokolovskiy, H.C. Herper *et al.* // Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 81, Iss. 9. – P. 094411.

14. Buchelnikov, V.D. Magnetocaloric effect in Ni-Mn-X (X = Ga, In, Sn, Sb) Heusler alloys / V.D. Buchelnikov, V.V. Sokolovskiy // The Physics of Metals and Metallography. – 2011. – Vol. 112. – P. 633–665.

*Поступила в редакцию 17 марта 2020 г.*

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 12, № 2  
2020

16+

Редактор: *Н.Н. Егорьева*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 29.04.2020. Дата выхода в свет 27.05.2020.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,90.

Тираж 500 экз. Заказ 86/169. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.