

# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2020  
Т. 12, № 3**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

**СЕРИЯ**

## **«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»**

**Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий**

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

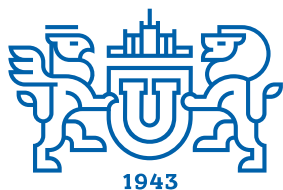
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### **Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

### **Редакционный совет**

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гуйдетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

2020

Vol. 12, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

**S.A. Zagrebina**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**E.V. Golubev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.P. Beskachko**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.I. Zalyapin**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**Yu.M. Kovalev**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

**A.V. Bogomolov**, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

**M.M. Brzhezinskaya**, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany

**G.L. Brovko**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**V.D. Buchelnikov**, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**D. Guidetti**, University of Bologna, Bologna, Italy

**V.I. Zhukovsky**, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**I.V. Zalyapin**, University of Nevada, Reno, United States of America

**S.V. Zelik**, University of Surrey, Guildford, United Kingdom

**A.I. Korotkii**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

**Jaewan Kim**, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

**Kisik Kim**, INHA-University, Incheon, South Korea

**N.D. Kundikova**, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

**V.V. Menshikh**, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

**S.I. Pinchuk**, Indiana University, Bloomington, United States of America

**Y.S. Puzyrev**, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

**N.K. Ravshanov**, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

**L.V. Utkin**, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

**I. Verpoest**, Catholic University, Leuven, Belgium

**V.A. Strauss**, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

AKIMOVA A.A. Tabulation of Prime Projections of Links in the Thickened Surface of Genus 2 with no more than 4 Crossings.....	5
ALA V., MAMEDOV Kh.R. On Basis Property of Root Functions for a Class of the Second Order Differential Operators .....	15
ИСЛОМОВ Б.И., УСМОНОВ Б.З. Локальная краевая задача для одного класса уравнения третьего порядка эллипτικο-гиперболического типа.....	22
КОМИССАРОВА Д.А. Признаки устойчивости разностных уравнений Вольтерра.....	29
ТАГИЕВ Р.К., МАГЕРРАМЛИ Ш.И. Вариационная постановка одной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями .....	34
TURSUNOV D.A., OROZOV M.O. Asymptotic Solution of the Perturbed First Boundary Value Problem with a Non-Smooth Coefficient.....	41

### Механика

КОВАЛЕВ Ю.М. Уравнение состояния полимерного композита, армированного S2 стекло-волокном .....	48
--	----

### Персоналии

Ахмаджон Кушакович Уринов. К 70-летию со дня рождения .....	56
---	----

## CONTENTS

### Mathematics

AKIMOVA A.A. Tabulation of Prime Projections of Links in the Thickened Surface of Genus 2 with no more than 4 Crossings.....	5
ALA V., MAMEDOV Kh.R. On Basis Property of Root Functions for a Class of the Second Order Differential Operators.....	15
ISLOMOV B.I., USMONOV B.Z. Local Boundary Value Problem for a Class of Third-Order Elliptic-Hyperbolic Type Equation.....	22
KOMISSAROVA D.A. Criteria for Stability of Volterra Difference Equations.....	29
TAGIEV R.K., MAHARRAMLI Sh.I. Variational Formulation of an Inverse Problem for a Parabolic Equation with Integral Conditions.....	34
TURSUNOV D.A., OROZOV M.O. Asymptotic Solution of the Perturbed First Boundary Value Problem with a Non-Smooth Coefficient.....	41

### Mechanics

KOVALEV Yu.M. Equation of State for S2 Glass-Fiber Reinforced Polymer Composite.....	48
--	----

### Personalia

To the 70 <sup>th</sup> Anniversary of Akhmadjon Urinov.....	56
--	----

## TABULATION OF PRIME PROJECTIONS OF LINKS IN THE THICKENED SURFACE OF GENUS 2 WITH NO MORE THAN 4 CROSSINGS<sup>1</sup>

**A.A. Akimova**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: akimovaaa@susu.ru*

In this article, we present the result of the first step of tabulation of prime links in the thickened surface of genus 2 that admit diagrams with no more than 4 crossings. Namely, we describe all three steps of tabulation of prime link projections in the surface of genus 2 with no more than 4 crossings. First, we define primality of a link projection in the surface of genus 2. Second, we tabulate prime link projections in the surface of genus 2 with no more than 4 crossings. For this purpose, it is sufficient to consider graphs having special type and enumerate all possible embeddings of the graphs into the surface of genus 2 giving prime link projections. At this step, we prove some auxiliary statements to simplify enumeration of the embeddings. Finally, we show that all obtained projections are nonequivalent in the sense of homeomorphism of the surface of genus 2 onto itself. Our main result states that there exist exactly 15 pairwise nonequivalent prime link projections in the surface of genus 2 with no more than 4 crossings. Several new and known tricks allow rigorously theoretically prove the completeness of the obtained tabulation, as well as to keep the process within reasonable limits. Further, we intend to use the obtained table to classify prime diagrams, i.e. to obtain table of prime links.

*Keywords: prime projection; link; thickened surface of genus 2; tabulation.*

### Introduction

In the knot theory, one of the oldest and the most important problems is to recognize a knot (or a link), i. e., to associate the considered object with a unique tabulated one. This problem involves the problem on complete classification of knots and links ordered taking into account some their properties. Many researchers worked in this area during last 150 years. Most of the obtained classifications consider knots and links in the 3-dimensional sphere, see [1–3]. Recently, increasing interest in the theory of knots and links in arbitrary 3-manifolds (i. e., global knots and links) leads to tabulation of knots and links in manifolds different from the 3-dimensional sphere. However, in contrast to the case of knots and links in the 3-dimensional sphere, there is a gap between global knots and links in the sense of tabulation. In order to show this gap, compare presence of classifications of global knots and links.

As regards tabulation of global knots, note that knots in the solid torus [4] and the thickened Klein bottle [5], as well as prime knots in the lens spaces [6] are tabulated. In the knot theory, recent classifications consider only the so-called prime objects, which can not be obtained by some known operations from already tabulated objects. Knots in the thickened surfaces and virtual knots have been of particular interest during last 20 years. Hence, some classifications of such knots were also obtained. In particular, the works [7] and [8] present perfect classifications of virtual knots ordered taking into account the number of classical crossings and obtain a list of some characteristics of each knot. However, in these classifications, such important properties of a knot as primality and genus are not taken into account. Recall that genus of a virtual knot is the minimal genus of the thickened surface which can contain the considered knot. We propose to tabulate virtual knots taking into account both numerical characteristics, i. e. not only the number of classical crossings as usual, but also the genus of a knot, see the articles [9, 10] for classifications of prime knots in the thickened torus and the thickened surface of genus 2, respectively. In a sense, such classifications can be considered as classifications of prime virtual knots of genus 1 and 2, respectively.

<sup>1</sup> The work was supported by RFBR (grant number 20-01-00127).

As regards tabulation of global links, note classifications of links in the projective space [11] and prime links in the thickened torus [12]. Also, note a classification of virtual links of special type, namely, alternating virtual links [13], see also [14] for the associated database, which include alternating virtual knots as well.

We begin tabulation of prime links in the thickened surface of genus 2. For this purpose, in this article, we present the result of the first step, i. e. we obtain a classification of prime projections of links in the surface of genus 2 with no more than 4 crossings. Our main result states that there exist exactly 15 pairwise nonequivalent (in the sense of homeomorphism of the surface of genus 2 onto itself) such projections. Further, we intend to use the obtained classification of prime projections in order to obtain classification of prime diagrams, i. e. classification of prime links.

The article is organized as follows. Section 1 describes required definitions and the main result of the article. Section 2 gives classification of prime projections of links in the surface of genus 2.

**1. Main Result**

A direct product of two copies of a 1-dimensional sphere  $S^1$  is said to be a 2-dimensional torus  $T = S^1 \times S^1$ . Hereinafter, for shortness, a 2-dimensional torus  $T$  is called a torus  $T$ . As an example, consider a torus  $T$  endowed with a pair “meridian-longitude” of  $T$  shown in Fig. 1(a).

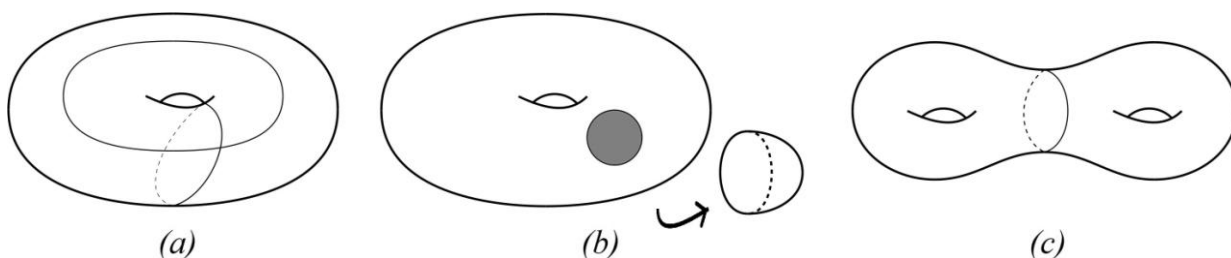


Fig. 1. (a) A torus  $T$  endowed with a pair “meridian-longitude”, (b) a torus  $T^\circ$  with a hole and a disk  $D^2$ , (c) a 2-dimensional surface  $T_2$  of genus 2 formed by gluing two copies of a torus  $T^\circ$  with a hole

Let us remove the interior of a 2-dimensional disk  $D^2$  from the initial surface  $F$ . As a result, we obtain a surface  $F^\circ$  with a hole. Hereinafter, for shortness, a 2-dimensional disk  $D^2$  is called a disk  $D^2$ . As an example, consider Fig. 1, b, where a torus  $T^\circ$  with a hole is obtained from a torus  $T$  by removing the interior of a disk  $D^2$ . Hereinafter, the notation of a surface with holes is endowed with the symbols of the form  $^\circ$ , the number of which coincides with the number of holes.

A 2-dimensional surface  $T_2$  of genus 2 is a surface obtained by identifying (gluing together) holes of two copies of a 2-dimensional torus  $T^\circ$  with a hole, see Fig. 1, c. Here each surface  $T^\circ$  is said to be a handle of a 2-dimensional surface  $T_2$  of genus 2. Hereinafter, for shortness, a 2-dimensional surface  $T_2$  of genus 2 is called a surface  $T_2$ .

We define types of simple closed curves, which can be considered in a surface  $T_2$ .

A simple closed curve  $C \subset T_2$  is called *cut*, if the complement  $T_2 \setminus C$  consists of two components.

In the surface  $T_2$ , a cut curve  $C$  can be either *trivial*, i. e. bounding a disk  $D^2$ , or *not trivial*. In the first case, the complement  $T_2 \setminus C$  is formed by a disk  $D^2$  and a surface  $T_2^\circ$  with a hole. In the second case, the complement  $T_2 \setminus C$  is formed by two copies of a torus  $T^\circ$  with a hole.

A simple closed curve  $C \subset T_2$  is called *not cut*, if the complement  $T_2 \setminus C$  consists of the unique component. Namely, the complement  $T_2 \setminus C$  is a torus  $T^{\circ\circ}$  with two holes. Two not cut simple closed curves  $C_1, C_2 \subset T_2$  are called *parallel to each other*, if the complement  $T_2 \setminus (C_1 \cup C_2)$  consists of two components, which are a torus  $T^{\circ\circ}$  with two holes and an *annulus*  $A$ , i. e. a 2-dimensional sphere  $S^{\circ\circ}$  with two holes.

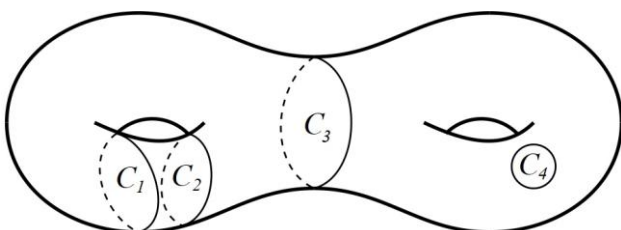


Fig. 2. Examples of curves in the surface  $T_2$

Fig. 2 gives examples:  $C_1, C_2 \subset T_2$  are two not cut curves parallel to each other, while  $C_3, C_4 \subset T_2$  are not trivial and trivial cut curves, respectively.

Consider a surface  $T_2$  and an interval  $I = [0, 1]$ . A 3-dimensional manifold homeomorphic to the direct product  $T_2 \times I$  is called a *thickened surface of genus 2*.

A smooth embedding of a set of  $m$  pairwise disjoint closed curves in the interior  $\text{Int}(T_2 \times I)$  of the thickened surface  $T_2 \times I$  is said to be an *m-component link* in  $T_2 \times I$  and denoted by  $L \subset T_2 \times I$ . In particular, a knot in  $T_2 \times I$  is obtained, if  $m = 1$ , i. e. we consider a smooth embedding of a unique curve in  $\text{Int}(T_2 \times I)$ .

As in the classical case, a link  $L$  in the thickened surface  $T_2 \times I$  can be represented by its *diagram*, which is defined by analogy with a classical link diagram except that  $L$  is projected into the surface  $T_2$  instead of a 2-dimensional sphere  $S^2$ .

A *link projection* in the surface  $T_2$  is a diagram such that the crossings of the diagram contain no information about under/over-crossings. Hence, a link projection can be considered as an embedding of a regular graph of degree 4, i. e. valence of each vertex of the graph is equal to 4. Vertices of  $G$  are said to be *crossings* of  $G$ , connected components of the complement  $T_2 \setminus G$  are said to be *faces* of  $G$ , while each projection of a component of the link is said to be a *component* of  $G$ .

Two link projections  $G$  and  $G'$  in the surface  $T_2$  are called *equivalent*, if there exists a homeomorphism  $f: T_2 \rightarrow T_2$  such that  $f(G) = G'$ .

An intersection point  $P$  of two curves  $C_1, C_2 \subset T_2$  is said to be *not transversal*, if only two of four angles near  $P$  are formed by small arcs of both curves  $C_1$  and  $C_2$ , while the third and the fourth angles are formed only by small arcs of the curve  $C_1$  and  $C_2$ , respectively. Otherwise, i. e. if all four angles near  $P$  are formed by both curves  $C_1$  and  $C_2$ , the intersection point  $P$  is said to be *transversal*. Note that there exist situations when  $C_1$  and  $C_2$  are the same curve  $C$ . In this case, we take into account the relative position of two small arcs of the curve  $C$  as described above.

We define the following four types of link projections in the surface  $T_2$ .

1. The projection  $G$  is said to be *essential*, if each face of  $G$  is homeomorphic to a disk  $D^2$ .
2. The projection  $G$  is said to be *composite*, if at least one of the following conditions holds.
  - (a) There exists a disk  $D^2 \subset T_2$  such that the boundary  $\partial D^2$  intersects  $G$  transversally exactly in two points, which are internal for two distinct edges of  $G$ , and at least one vertex of  $G$  is inside  $D^2$ .
  - (b) There exist two parallel not cut simple closed curves  $C_1, C_2 \subset T_2$  and two distinct edges  $e_1, e_2$  of  $G$  such that for  $i = 1, 2$  the curve  $C_i$  intersects the edge  $e_i$  transversally at the unique internal point, and both surfaces (a torus  $T^{\circ\circ}$  with two holes and an annulus  $A$ ) to which the curves divide the surface  $T_2$  contain vertices of  $G$ .
  - (c) There exists not trivial cut simple closed curve  $C$  and two distinct edges  $e_1, e_2$  of  $G$  such that for  $i = 1, 2$  the curve  $C$  intersects the edge  $e_i$  transversally at the unique internal point, and both surfaces (two copies of a torus  $T^{\circ}$  with a hole) to which the curve  $C$  divides the surface  $T_2$  contain vertices of  $G$ .
3. The projection  $G$  is said to be *not split*, if each component of  $G$  contains at least two crossings.
4. The projection  $G$  is said to be *prime*, if  $G$  is essential, not composite, not split and contains more than one component.

In this article, we consider only prime projections, i. e. only those that correspond to objects, which can not be obtained by some known operations from already tabulated ones.

Indeed, not essential projections correspond to links that can be found in the classifications of links in the 3-dimensional sphere  $S^3$  [1–3], solid torus (thickened annulus  $A \times I$ ) or thickened torus  $T \times I$  [12]. Here we note that today there exist no classification of links in the solid torus, but, as well as in the case of knots, we consider the construction of such a classification as an independent problem, which is beyond the scope of our interests in this article.

In their turn, composite projections correspond to links, which can be obtained using already known links. Namely, composite projections of types (a)–(c) correspond to links, which can be obtained as sums of a classical link and a link in the thickened surface  $T_2 \times I$ , a link in the thickened surface  $T_2 \times I$  and a link in the thickened torus  $T \times I$ , or two links in the thickened torus  $T \times I$ , respectively. Note that one of two terms in the sum can be a knot (see classifications obtained in [1–4, 9]), since the result is a link anyway.

Finally, a split projection corresponds to a link, which can be considered as a trivial union of already tabulated links, while a link having the unique component is a knot.

**Theorem 1.** In the surface  $T_2$ , there exist exactly 15 pairwise nonequivalent prime link projections with no more than 4 crossings. The projections are shown in Fig. 5.

We prove Theorem 1 by three steps presented in Section 2.

2. Proof of the main result

In this section, we present main ideas of the tabulation of prime link projections. The tabulation is performed by three steps. First, Subsection 2.1 presents some auxiliary statements. Then, Subsection 2.2 enumerates all possible embeddings of the graphs into the surface  $T_2$  giving prime projections. Finally, Subsection 2.3 shows that all obtained projections are pairwise nonequivalent.

2.1. Some auxiliary statements

**Lemma 1.** (Lemma 2 in [15]). Let  $G \subset T_2$  be a prime projection with  $n$  crossings, then  $G$  contains exactly  $(n-2)$  faces.

**Lemma 2.** (Lemma 3 in [15]). There exist exactly 3 graphs with no more than 4 vertices whose embeddings into the surface  $T_2$  can be prime projections, see graphs  $a-c$  shown in Fig. 3.

**Lemma 3.** Let  $G \subset T_2$  be a prime link projection represented as a union of curves with  $n$  intersection points. Then this union contains at most  $(n-3)$  cut curves.

**Proof.** The statement is true in accordance with Lemma 1 and the fact that each cut curve involves an additional face. This completes the proof of Lemma 3.

In this article, in order to obtain all the projections, we use the method of removing not transversal points [12] and the cutting technique [15].

Let  $G \subset T_2$  be a prime link projection represented as a union  $U$  of the curves  $C_i, i = 1, 2, \dots, m$  with  $k$  not transversal intersection points.

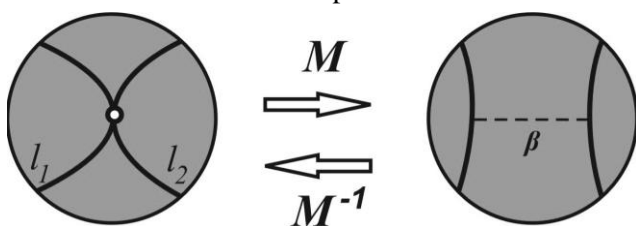


Fig. 4. Move  $M$  removes a nontransversal point, while  $M^{-1}$  is performed along the dotted line  $\beta$  and creates the point

Let  $l_1, l_2$  be small arcs containing a not transversal point of the projection  $G$ . We can remove the point by the move  $M$  given in Fig. 4. The dotted line  $\beta$  shows how to perform the inverse move  $M^{-1}$ .

Remove each not transversal point of the projection  $G$  by the move  $M$ . The obtained union  $U^k$  of the same curves  $C_i, i = 1, 2, \dots, m$  includes only transversal points and is endowed with  $k$  dotted lines  $\beta$  to show where the move  $M$  was performed. Of course, the initial projection  $G$  can be obtained from  $U^k$  by the inverse move  $M^{-1}$  performed along each dotted line  $\beta$ , see Fig. 4.

**Lemma 4.** Let  $G \subset T_2$  be a prime link projection obtained from the union  $U^k$ , which is endowed with  $k$  dotted lines  $\beta$ . Then the union of  $U^k$  and all  $k$  dotted lines  $\beta$  divide the surface  $T_2$  into disks.

**Proof.** Otherwise, the projection  $G$  is not essential, and we arrive at contradiction with the fact that the projection  $G$  is prime. This completes the proof of Lemma 4.

2.2. Construction of prime projections

**Lemma 5.** All projections given in Fig. 5 can be obtained as embeddings of the graphs  $a - c$  shown in Fig. 3. Namely, the graph  $a$  involves the projection  $3_1$ , the graph  $b$  involves the projections  $4_4, 4_{11}$ , and  $4_{14}$ , and the graph  $c$  involves the projections  $4_1-4_3, 4_5-4_{10}$  and  $4_{12}, 4_{13}$ .

**Proof.** In accordance with Lemma 2, all prime projections in the surface  $T_2$  with no more than 4 crossings can be obtained as embeddings of the graphs  $a - c$ . In order to obtain all the projections, we represent an embedding of each graph as an union of a number of curves and enumerate all possible combinations of types of intersection points and curves.

*Graph a.* Suppose that the projection  $G$  is an embedding of the graph  $a$  in the surface  $T_2$ . The pairs of double edges form three curves in the surface  $T_2$  such that each curve has the unique intersection point with each of two other curves. In accordance with Lemma 3, all curves are not cut.

*Step 1.* Assume that all three intersection points are not transversal, then, following [15], we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 2.* Assume that exactly one of three intersection points is transversal, then, following [15], we obtain the knot projection only.

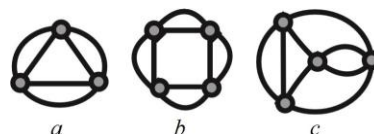


Fig. 3. The graphs of special type



*Step 3.* Assume that exactly two of three intersection points are transversal, then there exists a curve (e.g.,  $C_1$ ), which has the unique transversal intersection point with each of the rest curves. Hence, all three curves are not cut. We remove the unique not transversal point by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the three curves.

If the not cut curves  $C_2$  and  $C_3$  are not parallel to each other, then we obtain an annulus  $A$ . In accordance with Lemma 4, there is the unique way to construct a dotted line  $\beta$  such that to connect two holes. Perform the inverse move  $M^{-1}$  along the dotted line  $\beta$  and obtain the projection  $\mathbf{3}_1$ .

If the not cut curves  $C_2$  and  $C_3$  are parallel to each other, then we obtain a disk  $D^2$  and a torus  $T^0$  with a hole, i. e. the projection contains more than one face, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 4.* Assume that all three intersection points are transversal, then the projection contains a 3-angle face, i. e. more than one face, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Graph b.* Suppose that the projection  $G$  is an embedding of the graph  $b$  in the surface  $T_2$ . The pairs of double edges form four curves in the surface  $T_2$  such that each curve has the unique intersection point with each of the two other curves and does not intersect the fourth curve.

*Step 1.* Assume that all four intersection points are not transversal, then, following [15], we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 2.* Assume that exactly one of four intersection points is transversal, then, following [15], we obtain the knot projections only.

*Step 3.* Assume that exactly two of four intersection points are transversal. Note that these transversal points belong to different pairs of curves, since each pair of curves has no more than 1 common point. Hence, without loss of generality, we consider the curves  $C_1$  and  $C_2$  to be a pair “meridian-longitude” of one of the handles of the surface  $T_2$ , while the curves  $C_3$  and  $C_4$  form a pair “meridian-longitude” of another handle. We remove both not transversal points by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the four curves to obtain an annulus  $A$ . There is the unique way to construct two dotted lines  $\beta$  such that to connect two holes under the condition that there exists the unique endpoint of a dotted line  $\beta$  on each curve  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projection  $\mathbf{4}_4$ .

*Step 4.* Assume that exactly three of four intersection points are transversal, then there exists two curves (e.g.,  $C_1$  and  $C_2$ ), each of which has the unique transversal intersection point with two other curves. Namely,  $C_1$  has the unique transversal intersection point with  $C_2$  and, e.g.,  $C_3$ , while  $C_2$  has the unique transversal intersection point with  $C_1$  and  $C_4$ . Hence, all four curves  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , are not cut and pairwise not parallel. We remove the unique not transversal point by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the four curves to obtain a disk  $D^2$ . There is the unique way to construct a dotted line  $\beta$  such that to connect the hole with itself under the condition that there exists the unique endpoint of a dotted line  $\beta$  on both curves  $C_3$  and  $C_4$ . Perform the inverse move  $M^{-1}$  along the dotted line  $\beta$  and obtain the projection  $\mathbf{4}_{11}$ .

*Step 5.* Assume that all four intersection points are transversal, then each curve has the unique transversal intersection point with two other curves. Hence, all four curves  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , are not cut and pairwise not parallel. Obviously, we have the projection  $\mathbf{4}_{14}$ .

*Graph c.* Suppose that the projection  $G$  is an embedding of the graph  $c$  in the surface  $T_2$ , then  $G$  can be represented as a union of three curves such that the curves  $C_1$  and  $C_2$  have no common points, while the curve  $C_3$  intersects each of them alternately. Hereinafter, without loss of generality, we consider the curve  $C_1$  to be a representative of the curves  $C_1$  and  $C_2$ . In accordance with Lemma 3, there exists no more than one cut curve.

*Step 1.* Assume that all intersection points are not transversal.

*Step 1.1.* Assume that there exists no cut curves, then, following [15], we obtain the knot projections only.

*Step 1.2.* Assume that there exists a cut curve.

*Step 1.2.1.* Suppose that the cut curve is trivial. As mentioned above, in accordance with Lemma 3, the rest curves are not cut. Also, note that the rest curves are not parallel to each other, otherwise as a result of cutting the surface  $T_2$  along each curve  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , we obtain a disk  $D^2$ , an annulus  $A$  and a torus  $T^{\infty}$  with three holes, i. e. the projection contains more than two faces, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

If the trivial cut curve is  $C_1$ , then, as mentioned above, the curves  $C_2$  and  $C_3$  are not cut and not parallel to each other. We remove each of four not transversal points by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the three curves to obtain a disk  $D^2$  and a sphere  $S^{oooo}$  with five holes. Note that the hole associated with the curve  $C_1$  is connected by a dotted line  $\beta$  with each of different holes associated with the curve  $C_3$ , since otherwise the projection contains more than two faces, and we arrive at contradiction with Lemma 1. Note that there is a misprint in [15], since we have the knot projection, if two holes associated with the curve  $C_2$  are connected with different (but not the same as it was mentioned in [15]) holes associated with the curve  $C_3$ . Indeed, if each of two holes associated with the curve  $C_2$  is connected by a dotted line  $\beta$  with the same hole associated with the curve  $C_3$ , then we perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>1</sub>**.

If the trivial cut curve is  $C_3$ , then, as mentioned above, the curves  $C_1$  and  $C_2$  are not cut and not parallel to each other. We remove each of four not transversal points by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the three curves to obtain a disk  $D^2$  and a sphere  $S^{oooo}$  with five holes. There is the unique way to construct four dotted lines  $\beta$  such that to connect each of holes associated with the curves  $C_1$  and  $C_2$  with the hole formed by the curve  $C_3$  alternately. We perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>5</sub>**.

*Step 1.2.2.* Suppose that the cut curve is not trivial. Then this curve is  $C_3$ , since otherwise we have a not essential, i. e. nonprime, projection. For the same reason, the curves  $C_1$  and  $C_2$  are not parallel to each other. We remove each of four not transversal points by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the three curves to obtain two copies of a sphere  $S^{ooo}$  with three holes. In each  $S^{ooo}$ , there is the unique way to construct two dotted lines  $\beta$  such that to connect the hole associated with the curve  $C_3$  with each of the holes corresponded to the curves  $C_1$  and  $C_2$ . Perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>8</sub>**.

*Step 2.* Assume that exactly one of four intersection points is transversal. Without loss of generality, we consider the curves  $C_1$  and  $C_3$  to be a pair “meridian-longitude” of one of the handles of the surface  $T_2$ , while the curve  $C_2$  can be either cut or not cut. We remove all three not transversal points by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all the three curves.

*Step 2.1.* If the curve  $C_2$  is cut, then  $C_2$  is trivial, otherwise we have a not essential, i. e. nonprime, projection. Hence, as a result of cutting the surface  $T_2$  along all the three curves, we obtain a torus  $T^{oo}$  with two holes and a disk  $D^2$ . Note that there is the unique way to connect by a dotted line  $\beta$  a fragment corresponded to the curve  $C_1$  with a fragment corresponded to the curve  $C_3$ , since another way leads to a projection that contains more than two faces, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 2.1.1.* If the hole associated with the curve  $C_2$  is connected with different fragments of the curve  $C_3$ , then, following [15], we have the knot projection.

*Step 2.1.2.* If the hole associated with the curve  $C_2$  is connected with the same fragment of the curve  $C_3$ , then we consider the following two possible situations.

First, there exists a fragment of the curve  $C_3$  that contains no endpoints of the dotted lines  $\beta$ . In this case, we perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projection **4<sub>2</sub>**.

Second, both fragments of the curve  $C_3$  contain endpoints of the dotted lines  $\beta$ . In this case, we have a projection that contains more than two faces, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 2.2.* If the curve  $C_2$  is not cut, then as a result of cutting the surface  $T_2$  along all the three curves, we obtain a sphere  $S^{ooo}$  with three holes.

*Step 2.2.1.* If both holes associated with the curve  $C_2$  are connected with the same fragment of the curve  $C_3$ , then, following [15], we have the knot projections both when there exists a fragment of the curve  $C_3$  that contains no endpoints of the dotted lines  $\beta$  and when such a fragment does not exist.

*Step 2.2.2.* If holes associated with the curve  $C_2$  are connected with different fragments of the curve  $C_3$ , then, without loss of generality, we fix one of two possible fragments corresponded to the curve  $C_3$  and consider all possible ways to connect by a dotted line  $\beta$  this fragment with one of two fragments corresponded to the curve  $C_1$ . Since the curve  $C_3$  should intersect the curves  $C_1$  and  $C_2$  alternately, then we have only two possible situations that are different in the sense of the choice of the fragment corresponded to the curve  $C_1$ . Then we perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projections **4<sub>3</sub>** and **4<sub>7</sub>**.

*Step 3.* Assume that exactly two of four intersection points are transversal.

First of all, we note the following obvious fact, which is very important for Steps 3–5 considered below. Namely, if both points that belong to the curve  $C_1$  (or, due to symmetry, the curve  $C_2$ ) are transversal, then the curve is not cut. Indeed, if the curve is either not trivial cut or trivial cut, then either the projection is not essential, i. e. nonprime, or the condition that the curve  $C_3$  intersects the curves  $C_1$  and  $C_2$  alternately is not fulfilled, respectively.

*Step 3.1.* Suppose that both transversal points belong to the curve  $C_1$ . Then, as mentioned above, the curve  $C_1$  is not cut.

*Step 3.1.1.* If the curve  $C_3$  is cut, then the projection contains more than two faces, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 3.1.2.* If the curve  $C_3$  is not cut, then first of all note that the curve  $C_2$  can not be not trivial cut, since otherwise either we have a not essential, i. e. nonprime projection, or the condition that the curve  $C_3$  intersects the curves  $C_1$  and  $C_2$  alternately is not fulfilled. We remove both not transversal points by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all three curves. If the curve  $C_2$  is not cut, then we obtain two copies of an annulus  $A$ . If the curve  $C_2$  is trivial cut, then we obtain a sphere  $S^{ooo}$  with three holes and a disk  $D^2$ . In both cases, in accordance with Lemma 4, there is the unique way to construct two dotted lines  $\beta$ . Perform the inverse move  $M^{-1}$  along each dotted line  $\beta$  and obtain the projections  $4_9$  and  $4_{10}$ , respectively.

*Step 3.2.* Suppose that each of the curves  $C_1$  and  $C_2$  contains the unique transversal point, then, following [15], we obtain the knot projections only.

*Step 4.* Assume that exactly three of four intersection points are transversal. Without loss of generality, we suppose that the curve  $C_1$  contains two transversal points, while the curve  $C_2$  contains one transversal point and one not transversal point. Hence, the curves  $C_2$  and  $C_3$  are not cut, since each of these curves contains the unique transversal point. As it was mentioned at Step 3, the curve  $C_1$  is not cut. We remove the not transversal point by the move  $M$  and cut the surface  $T_2$  along all three curves to obtain a disk  $D^2$ . Due to symmetry, there is the unique way to construct a dotted line  $\beta$  such that to connect the fragment corresponded to the curve  $C_2$  with the fragment corresponded to the curve  $C_3$ . Perform the inverse move  $M^{-1}$  along the dotted line  $\beta$  and obtain the projection  $4_6$ .

*Step 5.* Assume that all four intersection points are transversal. As it was mentioned at Step 3, both curves  $C_1$  and  $C_2$  are not cut.

*Step 5.1.* If the curve  $C_3$  is trivial cut, then we arrive at contradiction with the condition that the curve  $C_3$  intersects the curves  $C_1$  and  $C_2$  alternately.

*Step 5.2.* If the curve  $C_3$  is not trivial cut, then we have the projection  $4_{12}$ .

*Step 5.3.* If the curve  $C_3$  is not cut, then we consider the following two possible situations.

*Step 5.3.1.* If the not cut curves  $C_1$  and  $C_2$  are parallel to each other, then the projection contains more than two faces, and we arrive at contradiction with Lemma 1.

*Step 5.3.2.* If the not cut curves  $C_1$  and  $C_2$  are not parallel to each other, then we obtain two projections:  $4_{13}$  and again  $4_{12}$ .

This completes the proof of Lemma 5.

### 2.3. Proof of the fact that all obtained projections are pairwise nonequivalent

**Lemma 6.** All 15 projections shown in Fig. 5 are pairwise nonequivalent.

**Proof.** Let us associate each face of a projection with a natural number equal to the number of edges forming boundary of the face. Each face of a prime projection is homeomorphic to a disk. In accordance with Lemma 1, the number of faces of each projection shown in Fig. 5 is equal to 2 except for the projection  $3_1$ .

Associate each projection (with the exclusion of the projection  $3_1$ ) shown in Fig. 5 with an ordered set  $\{(m) i_1 i_2 x\}$ , where  $m$  is the number of components,  $i_1$  and  $i_2$  are natural numbers, which are associated with the faces of the projection (taking in nondecreasing order), and  $x$  is the graph such that the projection is an embedding of  $x$  in the surface  $T_2$ ,  $x \in \{b, c\}$ . Similarly, the projection  $3_1$  is associated with the ordered set  $\{(2) 12 a\}$ .

Such ordered sets are sufficient to prove that all projections shown in Fig. 5 are pairwise nonequivalent except for the following 4 pairs:  $(4_1, 4_2)$ ,  $(4_5, 4_6)$ ,  $(4_8, 4_9)$ , and  $(4_{12}, 4_{13})$ .

1. Projections  $(4_1, 4_2)$  are nonequivalent, because only the first projection contains no self intersections of a component. The same is true for  $(4_5, 4_6)$ ,  $(4_8, 4_9)$ .

2. Projections  $(4_{12}, 4_{13})$  are nonequivalent, because  $4_{12}$  contains exactly 4 edges that are common for different 8-gonal faces, while  $4_{13}$  contains exactly 6 such edges.

Note that all tabulated projections are prime by construction.

This completes the proof of both Lemma 6 and Theorem 1.

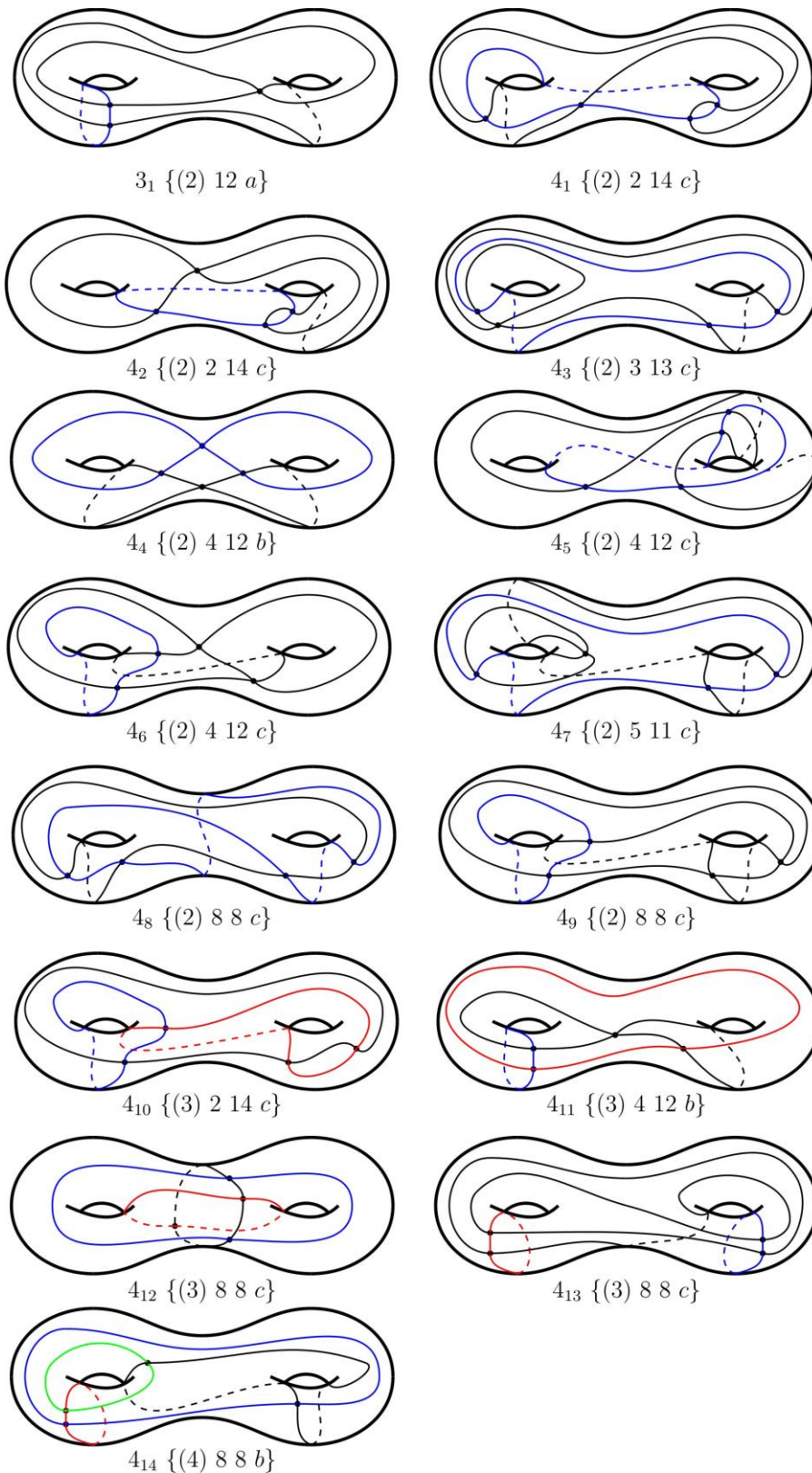


Fig. 5. Prime link projections in the surface  $T_2$  with no more than 4 crossings

## References

1. Hoste J., Thistlethwaite M., Weeks J. The first 1,701,936 knots. *The Mathematical Intelligencer*, 1998, Vol. 20, Iss. 4, pp. 33–48. DOI: 10.1007/BF03025227
2. Rolfsen D. *Knots and Links*. Berkeley, CA: Publish or Perish, 1976.
3. Bar-Natan D. The Knot Atlas, [http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page).
4. Gabrovšek B., Mroczkowski M. Knots in the Solid Torus up to 6 Crossings. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2012, Vol. 21, no. 11, pp. 1250106-1–1250106-43. DOI: 10.1142/S0218216512501064
5. Matveev S.V., Nabeeva L.R. Tabulating knots in the thickened Klein bottle. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, Vol. 57, Iss. 3, pp. 542–548. DOI: 10.1134/S0037446616030174
6. Gabrovšek B. Tabulation of Prime Knots in Lens Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 14, no. 88. DOI: 10.1007/s00009-016-0814-5
7. Green J. *A table of virtual knots*, <https://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>
8. Stenlund E. *Classification of virtual knots*, <http://evertstenlund.se/knots/Virtual%20Knots>
9. Akimova A.A., Matveev S.V. Virtual Knots Having at most Five Classical Crossings. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2014, Vol. 23, no. 6, pp. 1450031-1–1450031-19. DOI: 10.1142/S021821651450031X
10. Akimova A.A. Classification of prime knots in the thickened surface of genus 2 having diagrams with at most 4 crossings. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, Vol. 7, no. 1, pp. 32–46. DOI: 10.14529/jcem200103
11. Drobotukhina Yu.V. Classification of links in  $RP^3$  with at most 6 crossings, Geometry and topology. Part 1. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, Vol. 193, Leningrad, Nauka publ., 1991, pp. 39–63. [Drobotukhina Yu.V. Classification of links in  $RP^3$  with at most six crossings, *Advances in Soviet Mathematics*, 1994, Vol. 18, no. 1, pp. 87–121].
12. Akimova A.A., Matveev S.V., Tarkaev V.V. Classification of Links of Small Complexity in the Thickened Torus. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, Vol. 303, Suppl. 1, pp. 12–24. DOI: 10.1134/s008154381809002x
13. Zinn-Justin P., Zuber J. B. Matrix Integrals and the Generation and Counting of Virtual Tangles and Links. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2004, Vol. 13, no. 3, pp. 325–355. DOI: 10.1142/S0218216504003172
14. Zinn-Justin P. Alternating Virtual Link Database. <https://www.lpthe.jussieu.fr/pzinn/virtlinks/>
15. Akimova A.A. Classification of prime projections of knots in the thickened torus of genus 2 with at most 4 crossings. *Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2020, Vol. 12, no.1, pp. 5–13. DOI: 10.14529/mmph200101

Received July 7, 2020

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 3, pp. 5–14*

---

УДК 515.162.8

DOI: 10.14529/mmph200301

**ТАБУЛЯЦИЯ ПРИМАРНЫХ ПРОЕКЦИЙ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В УТОЛЩЕННОМ  
КРЕНДЕЛЕ РОДА 2 С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ 4 ПЕРЕКРЕСТКАМИ****А.А. Акимова***Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: akimovaaa@susu.ru*

Мы представляем первый этап табуляции примарных зацеплений в утолщенном кренделе рода 2, имеющих диаграммы с не более чем 4 перекрестками, а именно, приводятся все три этапа классификации примарных проекций зацеплений на кренделе рода 2, имеющих не более чем 4 перекрестка. Сначала мы вводим понятие примарности проекции зацепления на кренделе рода 2. Затем мы строим таблицу примарных проекций зацеплений на кренделе рода 2, имеющих не бо-

лее чем 4 перекрестка. Для этого мы перечисляем графы специального вида и рассматриваем все возможные вложения этих графов в крендель рода 2, которые приводят к примарным проекциям. С целью сокращения перечисления таких вложений мы доказываем несколько вспомогательных утверждений. В конце работы мы показываем различность всех полученных проекций в смысле гомеоморфизма кренделя рода 2 на себя. Наш основной результат состоит в том, что существует ровно 15 попарно неэквивалентных примарных проекций зацеплений на кренделе рода 2 с не более чем 4 перекрестками. Ряд новых и известных приемов позволили строго теоретически доказать полноту построенной таблицы и удержать процесс перебора в разумных пределах. Полученная классификация проекций будет использована для проведения классификации примарных диаграмм, т. е. построения таблицы примарных зацеплений.

*Ключевые слова:* примарная проекция; зацепление; утолщенный крендель рода 2; таблица.

### Литература

1. Hoste, J. The first 1,701,936 knots / J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks // The Mathematical Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, Iss. 4. – pp. 33–48
2. Rolfsen, D. Knots and Links / D. Rolfsen. – Berkeley, CA: Publish or Perish, 1976.
3. Bar-Natan, D. The Knot Atlas, [http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page).
4. Gabrovšek, B. Knots in the Solid Torus up to 6 Crossings / B. Gabrovšek, M. Mroczkowski // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2012. – Vol. 21, no. 11. – P. 1250106-1–1250106-43.
5. Матвеев, С.В. Табулирование узлов в утолщенной бутылке Клейна / С.В. Матвеев, Л.П. Набеева // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 688–696.
6. Gabrovšek, B. Tabulation of Prime Knots in Lens Spaces / B. Gabrovšek // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 14, no. 88.
7. Green, J. A table of virtual knots. – <https://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>
8. Stenlund, E. Classification of virtual knots. – <http://evertstenlund.se/knots/Virtual%20Knots.pdf>
9. Akimova, A.A. Classification of Genus 1 Virtual Knots Having at most Five Classical Crossings / A.A. Akimova, S.V. Matveev // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2014. – Vol. 23, no. 6. – P. 1450031-1–1450031-19.
10. Akimova, A.A. Classification of prime knots in the thickened surface of genus 2 having diagrams with at most 4 crossings / A.A. Akimova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – Vol. 7, no. 1. – P. 32–46.
11. Дроботухина, Ю.В. Классификация зацеплений в  $RP^3$  с небольшим числом точек скрещивания / Ю.В. Дроботухина // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 193. – С. 39–63.
12. Акимова, А.А. Классификация зацеплений малой сложности в утолщенном торе / А.А. Акимова, С.В. Матвеев, В.В.Таркаев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, Вып. 4. – С. 18–31.
13. Zinn-Justin, P. Matrix Integrals and the Generation and Counting of Virtual Tangles and Links / P. Zinn-Justin, J.B. Zuber // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2004. – Vol. 13, no. 3. – P. 325–355.
14. Zinn-Justin, P. Alternating Virtual Link Database / P. Zinn-Justin // <https://www.lpthe.jussieu.fr/pzinn/virtlinks/>
15. Akimova, A.A. Classification of Prime Projections of Knots in the Thickened Torus of Genus 2 with at most 4 Crossings / A.A. Akimova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 5–13.

*Поступила в редакцию 7 июля 2020 г.*

## ON BASIS PROPERTY OF ROOT FUNCTIONS FOR A CLASS OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS

V. Ala, Kh.R. Mamedov

Mersin University, Mersin, Turkey

E-mail: volkanala@mersin.edu.tr, hanlar@mersin.edu.tr

It is well known that the Sturmian theory is an important tool in solving numerous problems of mathematical physics. Usually, eigenvalue parameter appears linearly only in the differential equation of the classic Sturm–Liouville problems. However, in mathematical physics there are also problems, which contain eigenvalue parameter not only in differential equation, but also in the boundary conditions.

In this paper, we consider a Sturm–Liouville equation with the eigenparameter dependent boundary condition and with transmission conditions at two points of discontinuity. The aim of this paper is to investigate the completeness, minimality and basis properties of rootfunctions for the considered boundary value problem.

*Keywords:* eigenfunctions; orthonormal basis; Riesz basis; completeness.

### Introduction

In this work, we consider

$$\ell(u) := -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad (1)$$

for  $x \in [-1, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, 1]$  with the boundary conditions

$$L_1(u) := \alpha_1 u(-1) + \alpha_2 u'(-1) = 0, \quad (2)$$

$$L_2(u) := (\beta_1 u(1) - \beta_2 u'(1)) + \lambda (\tilde{\beta}_1 u(1) - \tilde{\beta}_2 u'(1)) = 0 \quad (3)$$

and the transmission conditions

$$L_3(u) := u(\xi_1 - 0) - \delta u(\xi_1 + 0) = 0, \quad (4)$$

$$L_4(u) := u'(\xi_1 - 0) - \delta u'(\xi_1 + 0) = 0, \quad (5)$$

$$L_5(u) := u(\xi_2 - 0) - \gamma u(\xi_2 + 0) = 0, \quad (6)$$

$$L_6(u) := u'(\xi_2 - 0) - \gamma u'(\xi_2 + 0) = 0, \quad (7)$$

where  $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ ,  $q(x)$  is a real-valued function, which is continuous on  $[-1, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, 1]$  and has finite limits  $q(\xi_i \pm 0) := \lim_{x \rightarrow \xi_i \pm 0} q(x)$  ( $i=1,2$ );  $\lambda$  is a complex parameter;

$\delta$  and  $\gamma$  are positive coefficients,  $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j, \beta_j, \tilde{\beta}_j$  ( $j=1,2$ ) are real numbers such that  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, |\tilde{\beta}_1| + |\tilde{\beta}_2| \neq 0$  and  $\rho := \beta_1 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1 \beta_2 \neq 0$ . In [16], the asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of problem (1)–(7) are obtained.

Spectral problems for Sturm–Liouville equations with the eigenparameter dependent boundary conditions are of particular interest due to physical applications and are examined in [2, 6, 9, 10, 17]. To this end, the method of separation of variables is applied to solve the corresponding partial differential equation when the boundary conditions contain a directional derivative. Problems on eigenvalue for the second order equation with spectral parameter in the boundary conditions are considered in [5, 7, 8, 11–15, 18]. The corresponding problems led to the eigenvalue problem for a linear operator acting on the space  $L_2 \oplus \mathbb{C}^N$ , where  $\mathbb{C}^N$  is  $N$ -dimensional Euclidean space of complex numbers. In [9], for distinct cases, it is shown that the eigenfunctions of the spectral problem formed a defect basis in  $L_2(0,1)$ . In [4], Rayleigh–Ritz formula is developed for eigenvalues.

The goal of this work is to investigate the problem of completeness, minimality and basis property of the eigenfunctions of boundary value problem (1)–(7). In this study, we introduce a special inner

product in a special Hilbert space and construct a linear operator  $A$  in the space such that problem (1)–(7) can be interpreted as the eigenvalue problem for  $A$ .

## 1. Operator Theoretic Formulation of the Problem

In this section, we introduce a special inner product in the Hilbert Space  $H = L_2[-1,1] \oplus \mathbb{C}$  and define a linear operator  $A$  in the space such that problem (1)–(7) can be interpreted as the eigenvalue problem for  $A$ .

For  $\rho > 0$ , let us define the inner product in  $H$  by

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{-1}^{\xi_1} u(x)\overline{v(x)}dx + \delta^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(x)\overline{v(x)}dx + \delta^2 \gamma^2 \int_{\xi_2}^1 u(x)\overline{v(x)}dx + \frac{\delta^2 \gamma^2}{\rho} u_1 \overline{v_1} \quad (8)$$

for

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u_1 \end{pmatrix}, \tilde{v} = \begin{pmatrix} v(x) \\ v_1 \end{pmatrix} \in H.$$

For convenience, we use the notations

$$R_1(u) = \beta_1 u(1) - \beta_2 u'(1),$$

$$\tilde{R}_1(u) = \tilde{\beta}_1 u(1) - \tilde{\beta}_2 u'(1).$$

In this Hilbert space, we construct the operator  $A: H \rightarrow H$  as

$$A\tilde{u} = \begin{pmatrix} -u'' + q(x)u \\ -R_1(u) \end{pmatrix}$$

on the domain

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} | \tilde{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u_1 \end{pmatrix} \in H, u(x), u'(x) \in AC([-1, \xi_1] \cup (\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, 1]), \\ u(\xi_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \xi_i \pm 0} u(x), u'(\xi_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \xi_i \pm 0} u'(x), (i = 1, 2), \\ \ell(u) \in L_2[-1, 1], L_1 u = L_3 u = L_4 u = L_5 u = L_6 u = 0, \\ u_1 = \tilde{R}_1(u), \end{array} \right\}, \quad (9)$$

where  $AC([a, b])$  is the space of all absolutely continuous functions on the interval  $[a, b]$ . Hence we can interpret boundary value transmission problem (1)–(7) in  $H$  as

$$A\tilde{u} = \lambda\tilde{u}, \quad (10)$$

where  $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ \tilde{R}_1(u) \end{pmatrix} \in H$ .

It is clearly verified that the eigenvalues of  $A$  coincide with the eigenvalues of problem (1)–(7) (see Lemma 1.4 in [15]). Also, there exists a correspondence between the eigenfunctions:

$$\tilde{u}_k(x) \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_k(x) \\ \tilde{R}_1(u_k) \end{pmatrix}.$$

The operator  $A$  is symmetric for  $\rho > 0$  (see Theorem 1 in [16]).

## 2. Main Results

**Lemma 1.** *The domain  $D(A)$  of the operator  $A$  is dense in the space  $H$ .*

**Proof.** Let us use the same method as in [1]. Suppose that  $\tilde{f} \in H$  is orthogonal to all  $\tilde{g} \in D(A)$  with respect to the inner product (8), where  $\tilde{f} = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{g} = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \end{pmatrix}$ . Denote by  $\tilde{C}_0^\infty$  the set of functions



$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), x \in [-1, \xi_1), \\ \phi_2(x), x \in (\xi_1, \xi_2), \\ \phi_3(x), x \in (\xi_2, 1], \end{cases}$$

where  $\phi_1(x) \in C_0^\infty[-1, \xi_1)$ ,  $\phi_2(x) \in C_0^\infty(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\phi_3(x) \in C_0^\infty(\xi_2, 1]$ . Since  $\tilde{C}_0^\infty \oplus 0 \subset D(A)$  ( $0 \in \mathbb{C}$ ), any

$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix} \in \tilde{C}_0^\infty \oplus 0$  is orthogonal to  $\tilde{f}$ , namely,

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{-1}^{\xi_1} u(x) \overline{v(x)} dx + \delta^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(x) \overline{v(x)} dx + \delta^2 \gamma^2 \int_{\xi_2}^1 u(x) \overline{v(x)} dx + \frac{\delta^2 \gamma^2}{\rho} u_1 \overline{v_1} = (f, u)_1,$$

where  $(\cdot)_1$  denotes the inner product in  $L_2[-1, 1]$ . This implies that  $f(x)$  is orthogonal to  $\tilde{C}_0^\infty$  and  $(f, u)_1 = 0$ . Hence,

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \frac{\delta^2 \gamma^2}{\rho} f_1 \overline{g_1} = 0.$$

Therefore,  $f_1 = 0$  since  $g_1 = \tilde{R}_1(g)$  can be chosen arbitrary. So  $\tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Therefore,  $D(A)$  is dense in  $H$ . This completes the proof of Lemma 1.

**Lemma 2.** *The operator  $A$  is selfadjoint.*

**Proof.** We know from Lemma 1 that the operator  $A$  is dense in the space  $H$ . Further, since  $A$  is the symmetric operator then, it is sufficient to show that the deficiency spaces are the null spaces and hence  $A = A^*$  (where  $A^*$  is the adjoint space of  $A$ ). Now we prove that the inverse of  $(A - \lambda I)$  exists. If  $Au(x) = \lambda u(x)$ ,

$$(\bar{\lambda} - \lambda) \langle u, u \rangle_H = \langle u, \lambda u \rangle_H - \langle \lambda u, u \rangle_H = \langle u, Au \rangle_H - \langle Au, u \rangle_H = 0.$$

Since  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , we have  $\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$ . Therefore,  $\langle u, u \rangle_H = 0$ , that is  $u = 0$ .

Then  $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$ , the resolvent operator of  $A$  exists.

Take  $\lambda = \pm i$ . The domains of  $(A - iI)^{-1}$  and  $(A + iI)^{-1}$  are exactly  $H$ . Consequently, the ranges of  $(A - iI)$  and  $(A + iI)$  are also  $H$ . Hence the deficiency spaces of  $A$  are

$$N_{-i} := N(A^* + iI) = R(A - iI)^\perp = H^\perp = \{0\},$$

$$N_i := N(A^* - iI) = R(A + iI)^\perp = H^\perp = \{0\},$$

therefore  $A$  is self-adjoint. This completes the proof of Lemma 2.

**Theorem 3.** *The eigenfunctions of the operator  $A$  form an orthonormal basis in the space  $H = L_2[-1, 1] \oplus \mathbb{C}$ .*

**Proof.** The operator  $A$  has countably many eigenvalues  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ , which have the asymptotic form [16]:

$$\lambda_n = \frac{\pi(n-1)}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty.$$

Then, for any number  $\lambda$ , which is not an eigenvalue, and for an arbitrary  $\tilde{f} \in H$ , we can find an element  $\tilde{u} \in D(A)$  satisfying the condition  $(A - \lambda I)\tilde{u} = \tilde{f}$ . Therefore, the operator  $(A - \lambda I)$  is invertible except for the isolated eigenvalues. Without loss of generality we assume that the point  $\lambda = 0$  is not an eigenvalue. Then we obtain that the bounded inverse operator  $A^{-1}$  is defined in  $H$ . Therefore, the selfadjoint operator  $A^{-1}$  has at most countably many eigenvalues, each of which converges to zero at the infinity. Hence, the selfadjoint operator  $A^{-1}$  is compact. Applying the Hilbert-Schmidt theorem to

this operator we obtain that the eigenfunctions of the operator  $A$  form an orthonormal basis in  $H$ . This completes the proof of Theorem 1.

Now we consider the case  $\rho < 0$ . We assume that the operator  $A$  is defined by formula (9) on the domain  $D(A)$ . In the space  $H = L_2 \oplus \mathbb{C}$ , for  $\tilde{u}, \tilde{v} \in H$ , the scalar product is defined by the formula

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{-1}^{\xi_1} u(x)\overline{v(x)}dx + \delta^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(x)\overline{v(x)}dx + \delta^2 \gamma^2 \int_{\xi_2}^1 u(x)\overline{v(x)}dx - \frac{\delta^2 \gamma^2}{\rho} u_1 \overline{v_1}. \quad (11)$$

In this case, the operator  $A$  is not selfadjoint in the space  $H$ . Therefore, we introduce the operator  $J$  as

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

where  $I$  is the identity operator in  $H$ . The operator  $J$  is selfadjoint and invertible.

In this case, boundary value problem (1)–(7) is equivalent to the eigenvalue problem for the operator pencil

$$(B - \lambda J)\tilde{u} = 0 \quad (12)$$

in the space  $H$  such that  $B = JA$ . We obtain that (10) is equivalent to (12).

**Lemma 4.** *The operator  $A$  is  $J$  – selfadjoint in the Hilbert space  $H$ .*

**Proof.** Similarly to Lemma 1, we can show that the domain  $D(A)$  is dense in the space  $H$ . From (11) and (12) applying two times integration by parts, we obtain that  $(B\tilde{u}, \tilde{u})$  is real. Hence, the operator  $B$  is symmetric. Therefore, the operator  $A$  is  $J$  – symmetric in the space  $H$ . Since  $A$  is  $J$  – symmetric densely operator, then, similarly to the proof of Lemma 2, it can be shown that the operator  $JA$  is selfadjoint. This completes the proof of Lemma 4.

**Corollary 5.** One element of the system  $\{u_n\}_0^\infty$  can be eliminated such that the remaining elements form a complete and minimal system in the space  $L_2[-1,1]$ .

**Proof.** By Theorem 1, the system of eigenfunctions

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) \\ u_1 \end{cases},$$

$(u_1 \in \mathbb{C})$  of the operator  $A$  forms an orthonormal basis in  $H$ . Hence, the system of the eigenfunctions  $\{\tilde{u}_n(x)\}_1^\infty$  is complete and minimal in the space  $H$ . Therefore, of course,  $\text{codim } P = 1$ , then by Lemma 2.1 in [15], the system  $\{P\tilde{u}_n(x)\} = \{u_n(x)\}$  whose one element is omitted forms a complete and minimal system in  $P(H) = L_2[-1,1]$ . Hence, the eigenfunctions  $\{u_n(x)\}_0^\infty$  ( $n \neq n_0$ ,  $n_0$  is an arbitrary nonnegative integer) of boundary value problem (1)–(7) form complete and minimal system in  $L_2[-1,1]$ . This completes the proof of Corollary 1.

**Theorem 6.** *The eigenfunctions of the operator  $A$  form a Riesz basis in the Hilbert space  $H$ .*

**Proof.** Since the operator  $J$  is a bounded operator, then using Theorem 1, it can be shown that the operator  $B = JA$  is invertible because of the fact that the selfadjoint operator  $B^{-1}$  is compact. The selfadjoint operator  $B^{-1}$  has at most countably many eigenvalues which converge to zero at infinity. Hence the operator  $B^{-1}$  is compact. Then applying Theorem 2.12 in Section IV of [3] to the operator  $B$ , we obtain that the eigenfunctions of the  $J$  – selfadjoint operator  $A$  form a Riesz basis in the space  $H = L_2 \oplus \mathbb{C}$ . This completes the proof of Theorem 2.

### 3. Results and Discussion

The paper is devoted to one class of the Sturm–Liouville operators with the eigenparameter-dependent boundary conditions and the transmission conditions. A new operator  $A$  associated with the problem is established, some spectral properties of this operator is examined in an appropriate space  $H$  and basisness of its eigenfunctions is discussed.

The Sturmian theory is an important tool in solving many problems of mathematical physics. Usually, the eigenvalue parameter appears only linearly in the differential equation of the classic Sturm–Liouville problems. However, in this study the eigenvalue parameter appears both in the differential equation and boundary condition. Moreover, two transmission conditions at two points are added. Therefore, the problem is different from the classic Sturm–Liouville problems and it has novelty.

### References

1. Aiping W., Jiong S., Xiaoling H., Siqin Y. Completeness of Eigenfunctions of Sturm–Liouville Problems with Transmission Conditions. *Methods and Applications of Analysis*, 2009, Vol. 16, no. 3, pp. 299–312. DOI: 10.4310/MAA.2009.v16.n3.a2
2. Anderssen R.S. The Effect of Discontinuities in Density and Shear Velocity on the Asymptotic Overtone Structure of Torsional Eigenfrequencies of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1977, Vol. 50, Iss. 2, pp. 303–309. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1977.tb04175.x
3. Azizov T.Ya., Iokhvidov I.S. *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoj* (Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric). Moscow, Nauka Publ., 1986, 352 p. (in Russ.).
4. Belinskiy B.P., Dauer J.P. On a regular Sturm–Liouville problem on a finite interval with the eigenvalue parameter appearing linearly in the boundary conditions. In: Hinton D., Schaefer P.W. (eds.) *Spectral Theory and Computational Methods of Sturm–Liouville Problem*. Marcel Dekker, New York, 1997, pp. 183–196.
5. Binding P.A., Browne P.J., Siddighi K. Sturm–Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Conditions. *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society*, 1994, Vol. 37, Iss. 1, pp. 57–72. DOI: 10.1017/S0013091500018691
6. Fulton C.T. Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions. *Proc. of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 1977, Vol. 77, Iss. 3-4, pp. 293–308. DOI: 10.1017/S030821050002521X
7. Gulmamedov V.Y., Mamedov Kh.R. On Basis Property for a Boundary-Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition. *Journal of Arts and Sciences*, 2006, no. 5, pp. 9–18.
8. Hinton D.B. An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1979, Vol. 30, Iss. 1, pp. 33–42. DOI: 10.1093/qmath/30.1.33
9. Kapustin N.Y., Moisseev E.I. A Remark on the Convergence Problem for Spectral Expansions Corresponding to a Classisical Problem with Spectral Parameter in the Boundary Condition. *Differential Equations*, 2001, Vol. 37, no. 12, pp. 1677–1683. DOI: 10.1023/A:1014406921176
10. Kobayashi M. Eigenvalues of Discontinuous Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potentials. *Computers & Mathematics with Applications*, 1989, Vol. 18, Iss. 4, pp. 357–364. DOI: 10.1016/0898-1221(89)90220-4
11. Mamedov Kh.R. On One Boundary Value Problem with Parameter in the Boundary Conditions. *Spectral Theory of Operators and Its Applications*, 1997, Vol. 11, pp. 117–121. (in Russ.).
12. Mamedov Kh.R. On a Basic Problem for a Second Order Differential Equation With a Discontinuous Coefficient and a Spectral Parameter in the Boundary Conditions. *Proc. 7th international conference on geometry, integrability and quantization*, Sts. Constantine and Elena, Bulgaria, June 2–10, 2005. Sofia: Bulgarian Academy of Sciences (ISBN 954-8495-30-9/pbk), 2006, pp. 218–225. DOI:10.7546/giq-7-2006-218-225
13. Russakovskij E.M. Operator Treatment of Boundary Problems with Spectral Parameters Entering via Polynomials in the Boundary Conditions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1975, Vol. 9, Iss. 4, pp. 358–359. DOI: 10.1007/BF01075895
14. Schneider A. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. *Mathematische Zeitschrift*, 1974, Vol. 136, Iss. 2, pp. 163–167. DOI: 10.1007/BF01214350
15. Shkalikov A.A. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, Vol. 33, Iss. 6, pp. 1311–1342. DOI: 10.1007/BF01084754
16. Caliskan S., Bayramov A., Oer Z., Uslu S. Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Two-Point Boundary Value Problems with an Eigenparameter in the Boundary Condition. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2013, Vol. 43, no. 6, pp. 1871–1892. DOI: 10.1216/rmj-2013-43-6-1871

17. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Pergamon, Oxford, New York, 1963, 765 p.

18. Walter J. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, *Mathematische Zeitschrift*, 1973, Vol. 133, Iss. 4, pp. 301–312. DOI: 10.1007/BF01177870

*Received March 9, 2020*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 3, pp. 15–21*

---

УДК 517.43

DOI: 10.14529/mmph200302

## О БАЗИСНОМ СВОЙСТВЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**В. Ала, Х.Р. Мамедов**

*Мерсинский университет, Мерсин, Турция*

*E-mail: volkanala@mersin.edu.tr, hanlar@mersin.edu.tr*

Хорошо известно, что теория Штурма является важным инструментом решения широкого класса задач математической физики. Как правило, в классических задачах Штурма–Лиувилля собственные значения линейно входят только в дифференциальное уравнение. Однако в математической физике встречаются задачи, в которых собственные числа появляются не только в дифференциальном уравнении, но и в граничных условиях.

В этой статье мы рассматриваем задачу Штурма–Лиувилля, собственные значения которой входят в уравнение, присутствуют в граничных условиях и дополнительно должны быть согласованы с условиями прохождения решения через две фиксированные точки разрыва.

Целью данной работы является исследование полноты, минимальности и базисных свойств корневых функций рассматриваемой краевой задачи.

*Ключевые слова: собственные функции; ортонормированный базис; базис Рунса; полнота.*

### Литература

1. Completeness of Eigenfunctions of Sturm–Liouville Problems with Transmission Conditions / W. Aiping, S. Jiong, H. Xiaoling, Y. Siqin // *Methods and Applications of Analysis*. – 2009. – Vol. 16, no. 3. – P. 299–312.

2. Anderssen, R.S. The Effect of Discontinuities in Density and Shear Velocity on the Asymptotic Overtone Structure of Torsional Eigenfrequencies of the Earth / R.S. Anderssen // *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. – 1977. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 303–309.

3. Азизов, Т.Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов. – Москва: Наука, 1986. – 352 с.

4. Belinskiy, B.P. On a regular Sturm–Liouville problem on a finite interval with the eigenvalue parameter appearing linearly in the boundary conditions / B.P. Belinskiy, J.P. Dauer // Hinton D., Schaefer P.W. (eds.) *Spectral Theory and Computational Methods of Sturm–Liouville Problem*: сб. науч. тр. – Marcel Dekker, New York, 1997. – P. 183–196.

5. Binding, P.A. Sturm–Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Conditions / P.A. Binding, P.J. Browne, K. Siddighi // *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society*. – 1994. – Vol. 37, Iss. 1. – P. 57–72.

6. Fulton, C.T. Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions / C.T. Fulton // *Proc. of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*. – 1977. – Vol. 77, Iss. 3–4. – P. 293–308.

7. Gulmamedov, V.Y. On Basis Property for a Boundary-Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition / V.Y. Gulmamedov, Kh.R. Mamedov // *Journal of Arts and Sciences*. – 2006. – No. 5. – P. 9–18.

8. Hinton, D.B. An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition / D.B. Hinton // *The Quarterly Journal of Mathematics*. – 1979. – Vol. 30, Iss. 1. – P. 33–42.

9. Капустин, Н.Ю. К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии / Н.Ю. Капустин, Е.И. Моисеев // *Дифференц. уравнения*. – 2001. – Т. 37, № 12. – С. 1599–1604.

10. Kobayashi, M. Eigenvalues of Discontinuous Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potentials / M. Kobayashi // *Computers & Mathematics with Applications*. – 1989. – Vol. 18, Iss. 4. – P. 357–364.

11. Mamedov, Kh.R. On One Boundary Value Problem with Parameter in the Boundary Conditions / Kh.R. Mamedov // *Spectral Theory of Operators and Its Applications*. – 1997. – Vol. 11. – P. 117–121. (in Russ.).

12. Mamedov, Kh.R. On a Basic Problem for a Second Order Differential Equation With a Discontinuous Coefficient and a Spectral Parameter in the Boundary Conditions / Kh.R. Mamedov // *Proc. 7th international conference on geometry, integrability and quantization, Sts. Constantine and Elena, Bulgaria, June 2–10, 2005. Sofia: Bulgarian Academy of Sciences (ISBN 954-8495-30-9/pbk)*. – 2006. – P. 218–225.

13. Russakovskij, E.M. Operator Treatment of Boundary Problems with Spectral Parameters Entering via Polynomials in the Boundary Conditions / E.M. Russakovskij // *Functional Analysis and Its Applications*. – 1975. – Vol. 9, Iss. 4. – P. 358–359.

14. Schneider, A. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions / A. Schneider // *Mathematische Zeitschrift*. – 1974. – Vol. 136, Iss. 2. – P. 163–167.

15. Shkalikov, A.A. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions / A.A. Shkalikov // *Journal of Soviet Mathematics*. – 1986. – Vol. 33, Iss. 6. – P. 1311–1342.

16. Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Two-Point Boundary Value Problems with an Eigenparameter in the Boundary Condition / S. Caliskan, A. Bayramov, Z. Oer, S. Uslu // *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. – 2013. – Vol. 43, no. 6. – P. 1871–1892.

17. Tikhonov, A.N. *Equations of Mathematical Physics* / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. – Pergamon, Oxford, New York, 1963. – 765 p.

18. Walter, J. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions / J. Walter // *Mathematische Zeitschrift*. – 1973. – Vol. 133, Iss. 4. – P. 301–312.

*Поступила в редакцию 9 марта 2020 г.*

## ЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

**Б.И. Исломов<sup>1</sup>, Б.З. Усмонов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Республика Узбекистан*

*E-mail: islomovbozor@yandex.com*

<sup>2</sup> *Чирчикский государственный педагогический институт, г. Чирчик, Республика Узбекистан*

*E-mail: bakhtiyer.usmanov@mail.ru*

Последние годы все больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнения математической физики, это связано как с теоретическим интересом, так и практическим. Уравнения третьего порядка встречаются в различных задачах физики, механики и биологии. Например, в теории трансзвуковых течений, распространении плоской волны в вязкоупругом твердом теле, прогнозирования и регулирования грунтовых вод.

Исследуется краевая задача для уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части. Рассматриваемое уравнение составляется из произведения непрерывных дифференциальных операторов, поэтому известные представления общего решения введенные А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдиновым не применяются. Для изучения уравнения смешанного типа третьего порядка нами применен метод, не требующий специального представления общего решения рассматриваемого уравнения. Этот метод обуславливает изучение уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестными правыми частями, что представляет интерес для решения важных обратных задач механики и физики.

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения поставленной задачи. Доказательство основано на принципе экстремума для уравнения третьего порядка и на теории сингулярных, Фредгольмских интегральных уравнений.

*Ключевые слова: локальная задача; уравнения третьего порядка; обратная задача; уравнения с неизвестными правыми частями; принцип экстремума, метод регуляризации; уравнения Фредгольма.*

**Введение.** В последние годы все больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнения математической физики, это связано как с теоретическим интересом, так и практическим.

Одним из важных классов неклассических уравнений математической физики является уравнение составного и смешанно-составного типа, главные части содержат операторы эллиптического, эллиптико-гиперболического и парабола-гиперболического типов. Корректные краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического и парабола-гиперболического типов третьего порядка, когда главная часть оператора содержит производную по  $x$  или  $y$ , впервые изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова [1], М.С. Салахитдинова [2], Т.Д. Джураева [3], кроме того эти уравнения встречаются в различных задачах механики. Например, распространение плоской волны в вязкоупругом твердом теле [3]. В этих работах при исследовании краевых задач использовано представление общего решения уравнения смешанно-составного типа в виде суммы функций. Такое представление имеет важное место для уравнений, составляемых из произведения перестановочных дифференциальных операторов. Далее это направление для различных уравнений с частными производными третьего порядка развивалось в работах [4–10].

Настоящая работа посвящена изучению уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части. Применен метод, не требующий специального представления общего решения рассматриваемого уравнения. Этот метод обуславливает изучение уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестными правыми частями, что представляет интерес для решения важных обратных задач механики и физики.

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения поставленной задачи. Доказательство основано на принципе экстремума для уравнения третьего порядка и на теории сингулярных, фредгольмских интегральных уравнений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxy} + u_{yyy}, & \text{при } y > 0, \\ a(u_{xxy} - u_{yyy}) + b(u_{xx} - u_{yy}), & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – действительные числа, причем  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Пусть  $D_1$  – конечная однозначная область в плоскости  $(x, y)$ , ограниченная при  $y > 0$  кривой  $\sigma: x^2 + y^2 = 1$  с концами в точках  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  и отрезком  $AB = \{(x, y): -1 < x < 1, y = 0\}$ . Кривая  $\sigma$  униформа относительно оси  $y$ , точка  $N(0, h)$  этой кривой является единственной максимально удаленной от оси  $x$  точкой. Части  $AN$  и  $BN$  дуги  $\sigma$  униформы отрезка  $ON$  оси  $y$ , здесь  $O$  – начало координат.  $D_2$  – область, ограниченная при  $y < 0$  отрезком  $AB$  и двумя характеристиками  $AC: x + y = -1$ ,  $BC: x - y = 1$  уравнения (1), выходящими из точки  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  и пересекающимися в точке  $C(0, -1)$ ,  $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$ .

**Задача.** Найти функцию  $u(x, y)$  со следующими свойствами:

1)  $u(x, y) \in C(\bar{D}_j) \cap C^1(D_j \cup AB \cup AD \cup BC)$  ( $j=1, 2$ ); 2)  $u(x, y) \in C_{x,y}^{2,3}(D_j)$ ,  $u_{xxy} \in C(D_j)$  и она в области  $D_j$  удовлетворяет уравнению (1); 3) на линии изменения типа выполняются условия склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = \alpha(x) \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) + \beta(x), \quad (x, 0) \in AB, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \gamma(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) + \delta(x), \quad (x, 0) \in AB; \quad (3)$$

4) функция  $u(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u(x, y)|_{\sigma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}, \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi_j(x)$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) – известные функции, причем

$$\alpha(x), \beta(x) \in C^1(\overline{AB}) \cap C^3(AB), \quad \gamma(x), \delta(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB), \quad (8)$$

$$\varphi(x, y) = y\varphi_1(x, y), \quad \varphi_1(x, y) \in C(\bar{\sigma}), \quad (9)$$

$$\psi_2'(-1) = \psi_3'(1) = 0, \quad \psi_2'(0) = -\psi_3'(0), \quad \psi_2''(0) + \psi_3''(0) = \frac{2b}{a}\psi_2'(0), \quad (10)$$

$$\psi_1(x) \in C^1[-1, 0] \cap C^2(-1, 0), \quad \psi_2(x) \in C[-1, 0] \cap C^2(-1, 0), \quad \psi_3(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1). \quad (11)$$

**2. Исследование задачи.** Предположим:

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде двух систем

$$\begin{cases} u_1(x, y) = v_1(x, y) + \omega_1(x), \\ v_{1xx} + v_{1yy} = 0, \quad (x, y) \in D_1, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} = v_2(x, y), \\ av_{2y} + cv_2 = 0, \quad (x, y) \in D_2, \end{cases} \quad (14)$$

где  $v_2(x, y)$  – произвольная достаточно гладкая функция, а  $\omega_1(x)$  – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \omega_{21}(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ \omega_{22}(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (15_1)$$

причем

$$\omega_1'(-1) = \omega_1(1) = 0. \quad (15_2)$$

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения  $av_{2y} + cv_2 = 0$ , имеет вид

$$v_2(x, y) = \omega_2(x) \exp\left(-\frac{b}{a}y\right), \quad (16)$$

где  $\omega_2(y) = \omega_{21}(y) + \omega_{22}(y)$  – произвольная непрерывная функция.

**Теорема.** Если заданные функции удовлетворяют условиям (8)–(11), то регулярное решение поставленной задачи в области  $D$  существует и единственно.

**Доказательство теоремы.** В силу (16) решение задачи Коши с начальными данными

$$u_2(x, -0) = \tau_2(x), \quad (x, 0) \in \overline{AB}, \quad u_{2y}(x, -0) = v_2(x), \quad (x, 0) \in AB, \quad (17)$$

для уравнения (14) в области  $D_2$  представим в виде

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2}[\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v_2(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_{x-y}^{x+y} d\xi \int_{\xi}^{x-y} \omega_2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{c(\xi-\eta)}{2a}\right] d\eta. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \Big|_{AC} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right]_{y=-1-x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tau_2'(-1) + v_2(-1) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{2x+1} \omega_2\left(\frac{-1+\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{b(-1-\eta)}{2a}\right] d\eta \right\} = \psi_2(x), \\ \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \Big|_{BC} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right]_{y=x-1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tau_2'(1) + v_2(1) + \frac{1}{2} \int_{2x-1}^1 \omega_2\left(\frac{\xi+2x-1}{2}\right) \exp\left[-\frac{b(\xi+1-2x)}{2a}\right] d\xi \right\} = \psi_3(x), \end{aligned}$$

или из последних двух равенств получим

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{2x+1} \omega_{21}\left(\frac{-1+\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{b(-1-\eta)}{2a}\right] d\eta = \sqrt{2}\psi_2(x) - \tau_2'(-1) - v_2(-1), \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{2x-1}^1 \omega_{22}\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \exp\left[-\frac{b(\xi-1)}{2a}\right] d\eta = -\sqrt{2}\psi_3(x) - \tau_2'(1) + v_2(1). \quad (20)$$

Дифференцируя (19) и (20) по  $x$ , находим

$$\omega_{21}(x) = \sqrt{2}\psi_2'(x) \exp\left[-\frac{b(x+1)}{a}\right], \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (21)$$

$$\omega_{22}(x) = -\sqrt{2}\psi_3'(x) \exp\left[\frac{b(1-x)}{a}\right], \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (22)$$

Таким образом, неизвестные функции  $\omega_j(x)$  ( $j=1, 2$ ) с учетом (15<sub>1</sub>), (16), (21) и (22) полностью определяются с помощью условий (6) и (7).



Теперь необходимо найти  $u_j(x, y)$  ( $j=1, 2$ ) в области  $D_j$ , пользуясь оставшимися условиями (4), (5) и условиями склеивания (2) и (3). Для этого найдем функциональные соотношения между  $\tau'_j(x)$  и  $v_j(x)$ .

Подставляя (18) в (5), а затем, дифференцируя по  $x$ , имеем

$$\tau'_2(x) - v_2(x) = \frac{1}{2} \psi'_1 \left( \frac{x-1}{2} \right) - H(x), \quad (23)$$

где

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_x^{-1} \omega_2 \left( \frac{\xi-x}{2} \right) \exp \left[ -\frac{b(\xi+x)}{2a} \right] d\xi.$$

Решение уравнения (13) удовлетворяющее граничным условиям

$$v_1(x, y)|_{\sigma} = \varphi(x, y) - \omega_1(y), \quad v_{1,y}(x, +0) = v_1(x), \quad x \in (-1, 1), \quad y \in [0, 1] \quad (24)$$

в области  $D_1$  дается формулой:

$$v_1(x, y) = \int_{-1}^1 G(t, 0; x, y) v_1(t) dt + \int_{\sigma_0} \frac{\partial G(\xi(s), \eta(s); x, y)}{\partial n} [\varphi^*(s) - \omega_1(\xi(s))] ds, \quad (25)$$

где  $\varphi^*(s) = \varphi(\xi(s), \eta(s))$  – известная функция, а  $G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r r_1} - \ln \frac{1}{\rho^2 r_2 r_3} \right]$  – функции

Грина для уравнения Лапласа, удовлетворяющая однородному условию (4) и  $v_{1,y}(x, +0) = 0$ :

$$\sigma_0: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, \quad r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \\ r_2^2 = (\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}-\eta)^2, \quad r_3^2 = (\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}+\eta)^2, \quad \bar{x} = \frac{x}{\rho^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\rho^2}.$$

Положив в (25)  $y=0$ , дифференцируя по  $x$ , получим

$$\tau'_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right] v_1(t) dt + g'_1(x), \quad -1 < x < 1, \quad (26)$$

где

$$g_1(x) = \int_{\sigma} \frac{\partial G(\xi(s), \eta(s); x, 0)}{\partial n} [\varphi^*(s) - \omega_1(\xi(s))] ds, \\ \tau_1(x) = v_1(x, +0). \quad (27)$$

В силу (17), (24) и (27) из (2), (3) находим

$$\tau_2(x) = \alpha(x) \tau_1(x) + \beta(x), \quad (x, 0) \in \overline{AB}, \quad (28)$$

$$v_2(x) = \gamma(x) v_1(x) + \delta(x), \quad (x, 0) \in AB. \quad (29)$$

Подставляя (28) и (29) в (23), получим

$$\alpha'(x) \int_{-1}^x \tau'_1(t) dt + \alpha(x) \tau'_1(x) + \beta'(x) - \gamma(x) v_1(x) - \delta(x) = \frac{1}{2} \psi'_1 \left( \frac{x-1}{2} \right) - H(x). \quad (30)$$

Исключив  $\tau'_1(x)$  из (26) и (30), получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $v_1(x)$ :

$$v_1(x) - \frac{P(x)}{\pi i} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right] v_1(t) dt = \int_{-1}^1 M(x, t) v_1(t) dt + H_1(x), \quad (31)$$

где

$$P(x) = \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}, \quad M(x, t) = -\frac{\alpha'(x)}{\pi \gamma(x)} \int_{-1}^x \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{z}{1-tz} \right] dz,$$

$$H_1(x) = -\frac{1}{\gamma(x)} \left\{ \frac{1}{2} \psi_1' \left( \frac{x-1}{2} \right) - H(x) - \beta'(x) + \delta(x) \right\}.$$

Сингулярное интегральное уравнение (31) методом регуляризации Карлемана–Векуа [2] эквивалентным образом сведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно  $v_1(x)$ , безусловная разрешимость которого следует из леммы:

**Лемма.** Если выполнено условие

$$\alpha(x)\gamma(x) > 0, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad (32)$$

то в области  $D$  решение поставленной задачи единственно.

**Доказательство леммы.** Пусть  $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \psi_3(x) \equiv \varphi(x, y) \equiv 0$ ,  $\beta(x) \equiv \delta(x) \equiv 0$ , тогда из (15<sub>1</sub>), (21) и (22) находим  $\omega_1(x) = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Отсюда в силу (12)–(14) поставленная задача редуцируется в области  $D$  к задаче:  $u_1(x, y)|_{\sigma} = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,

$$u_2(x, y)|_{AC} = 0, \quad -1 < x < 0, \quad \left. \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \right|_{AC} = 0, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad \left. \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Из принципа экстремума [11] следует, что решение поставленной задачи при  $\psi_1(x) \equiv 0$ ,  $\beta(x) \equiv \delta(x) \equiv 0$  своего положительного максимума (ПМ) и отрицательного минимума (ОМ) в замкнутой области  $\bar{D}_1$  достигает лишь на  $\bar{\sigma}$ . Действительно, в силу принципа экстремума для эллиптических уравнений [11, стр. 25] решение  $u(x, y)$  уравнения (13) внутри области  $D_1$  не может достигать своего ПМ и ОМ. Покажем, что решение  $u(x, y)$  уравнения (13) не достигает своего ПМ (ОМ) на интервалах  $AB$ . Предположим обратное. Пусть  $u(x, y)$  в некоторой точке  $E(x_0, 0)$  интервала  $AB$  достигает своего ПМ (ОМ). Тогда в силу принципа Заремба–Жиро [11] в точке  $E(x_0, 0)$  имеем

$$v_1(x_0) < 0 (v_1(x_0) > 0). \quad (33)$$

Далее в силу  $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$ ,  $\beta(x) \equiv \delta(x) \equiv 0$  с учетом (12), (21), (22), (28), (29) и (32) из (23) в точке  $E(x_0, 0) \in AB$  ПМ (ОМ) имеем  $\gamma(x_0)v_1(x_0) > 0$  ( $\gamma(x_0)v_1(x_0) < 0$ ). Это противоречит неравенству (33).

Таким образом, в силу (12) решение  $u(x, y)$  поставленной задачи не достигает своего ПМ (ОМ) в точке  $(x_0, 0) \in AB$ .

Следовательно, искомое решение своего ПМ (ОМ) в области  $\bar{D}_1$  достигает в точках кривой  $\bar{\sigma}$ .

Отсюда с учетом  $u_1(x, y)|_{\sigma} = 0$  имеем  $u_1(x, y) \equiv 0$  в области  $\bar{D}_1$ . В силу единственности решения задачи Коши в области  $D_2$  для уравнения (14) получим  $u_2(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in \bar{D}_2$ . Следовательно, из (12) следует  $u(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$ . Тем самым решение поставленной задачи единственно. **Лемма доказана.**

На основании найденных функций  $\omega_j(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB)$ ,  $\tau_j(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB)$  и  $v_j(x) \in C^2(AB)$ , ( $j=1, 2$ ) решение поставленной задачи строится в области  $D_1$  как решение задачи  $N$  для уравнения (13) (см. (25)), а в области  $D_2$  находится с помощью решения задачи Коши для уравнения (14) (см. (18)). Из последнего следует, что поставленная задача в области  $D$  однозначно разрешима. **Теорема доказана.**

### Литература

1. Бицадзе, А.В. К теории уравнений смешанно-составного типа / А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинов // Сибирский математический журнал. – 1961. – Т. 2, № 1. – С. 7–19.

2. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа / М.С. Салахитдинов. – Ташкент: Фан, 1974. – 156 с.
3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа / Т.Д. Джураев – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.
4. Chen, S.X. Mixed type equations in gas dynamics / S.X. Chen // Quarterly of applied mathematics. – 2010. – Vol. LXVIII, no. 3. – P. 487–511.
5. Кожанов, А.И. Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка / А.И. Кожанов // Матем. сборник. – 1982. – Т. 118(160), № 4(8). – С. 504–522.
6. Джураев, Т.Д. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа / Т.Д. Джураев, М. Мамажанов // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 37–50.
7. Сабитов, К.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности. / К.Б. Сабитов, Г.Ю. Удалова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 3(32). – С. 29–45.
8. Джохадзе, О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка / О.М. Джохадзе // Матем. заметки. – 2003. – Т. 4, Вып. 4. – С. 517–528.
9. Зикиров, О.С. О разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка / О.С. Зикиров // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 16–25.
10. Islomov B.I. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type / B.I. Islomov, B.Z. Usmonov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, no. 1. – P. 32–38.
11. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Поступила в редакцию 22 февраля 2020 г.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 3, pp. 22–28*

---

DOI: 10.14529/mmph200303

## LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF THIRD-ORDER ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

**B.I. Islomov<sup>1</sup>, B.Z. Usmonov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Republic of Uzbekistan  
E-mail: islomovbozor@yandex.com

<sup>2</sup> Chirchiq State Pedagogical Institute, Chirchiq, Republic of Uzbekistan  
E-mail: bakhtiyer.usmanov@mail.ru

In recent years, non-classical equations of mathematical physics have been attracting more and more attention of specialists; this is due to both theoretical and practical interest. Third-order equations are found in various problems of physics, mechanics, and biology. For example, in the theory of transonic flows, the propagation of plane waves in a viscoelastic solid, and the prediction and regulation of groundwater.

One of the important classes of non-classical equations of mathematical physics is the equations of composite and mixed-composite type, which the main parts contain operators of elliptic, elliptic-hyperbolic and parabolic-hyperbolic types. Correct boundary value problems for equations of elliptic-hyperbolic and parabolic-hyperbolic types of the third order, in case that the main part of the operator contains the derivative with respect to  $x$  or  $y$ , is first studied by A.B. Bitsadze, M.S. Salakhitdinova and T.D. Djuraev, in addition to the fact that these equations are found in various problems of mechanics. For example, the propagation of a plane wave in a viscoelastic solid. In these works on the investigation

of boundary value problems, a representation of general solution of a mixed-composite type equation in the form of a sum of functions was used. Such representation takes place only for equations, which are composed of the product of permutable differential operators.

In this paper, we study boundary value problem for a third-order equation with an elliptic-hyperbolic operator in the main part. The equation under consideration is composed of the product of non-permutable differential operators, therefore the well-known representations of the general solution introduced by A.V. Bitsadze and M.S. Salakhitdinova are not applied. To study the considered third-order equation of the mixed type, we applied a method, which does not require a special representation of the general solution of the equation. This method determines the study of an equation of elliptic-hyperbolic type of the second order with unknown right-hand sides, which is of interest for solving important inverse problems of mechanics and physics.

The existence and uniqueness theorems of the classical solution of the problem are proved. The proof is based on the extremum principle for a third-order equation and on the theory of singular and Fredholm integral equations.

*Keywords: local problem; third-order equations; inverse problem; extremum principle; regularization method; Fredholm equations.*

### References

1. Bitsadze A.V., Salakhitdinov M.S. K teorii uravneniy smeshanno-sostavnogo tipa (To the theory of equations of mixed-composite type). *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1961, Vol. 2, no. 1, pp. 7–19. (in Russ.).
2. Salakhitdinov M.S. *Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa* (Equations of mixed-composite type), Tashkent, Fan Publ., 1974, 156 p. (in Russ.).
3. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipa* (Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite type). Tashkent, Fan Publ., 1979, 238 p. (in Russ.).
4. Chen S.X. Mixed type equations in gas dynamics. *Quarterly of applied mathematics*, 2010, Vol. LXVIII, no. 3, pp. 487–511. DOI:10.1090/S0033-569X-2010-01164-9
5. Kozhanov A.I. A mixed problem for some classes of nonlinear third-order equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, Vol. 46, no. 4, pp. 507–525. DOI: 10.1070/SM1983v046n04ABEH002949
6. Dzhuraev T.D., Mamazhanov M. Well-posed formulation of boundary value problems for a class of third-order equations of parabolic-hyperbolic type. *Differ. Uravn.*, 1983, Vol. 19, no. 1, pp. 37–50. (in Russ.).
7. Sabitov K.B., Udalova G.Yu. Boundary value problem for mixed type equation of the third order with periodic conditions. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2013, Iss. 3(32), pp. 29–45. (in Russ.).
8. Dzhokhadze O.M. Influence of Lower Terms on the Well-Posedness of Characteristics Problems for Third-Order Hyperbolic Equations. *Mat. Zametki*, 2003, Vol. 74, Iss. 4, pp. 517–528.
9. Zikirov O.S. On Solvability Non-Local Boundary Value Problem for the Hyperbolic Equation of the Third Order. *Sibirskiy zhurnal chistoy i prikladnoy matematiki*, 2016, Vol. 16, no. 2, pp. 16–25. (in Russ.).
10. Islomov B.I., Usmonov B.Z. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, no. 1, pp. 32–38. DOI: 10.1134/S1995080220010060
11. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* (Some classes of partial differential equations). Moscow, Nauka Publ., 1981, 448 p. (in Russ.).

*Received February 22, 2020*

## ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

**Д.А. Комиссарова**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: komissarovada@susu.ru

Непрерывные и дискретные разностные уравнения типа Вольтерра возникают во многих приложениях. В частности при исследовании моделей динамики популяций, моделировании различных экономических или физических процессов, в теории управления, медицине. В работе рассматривается проблема асимптотической устойчивости нулевого решения линейного разностного уравнения типа Вольтерра в свертках. Приводятся определения устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения указанного уравнения. В статье представлены достаточные условия асимптотической устойчивости линейных разностных уравнений Вольтерра. С помощью метода z-преобразования доказаны соответствующие теоремы. Найденные признаки асимптотической устойчивости нулевого решения есть ограничения на коэффициенты исходного уравнения, то есть представляют некую область устойчивости в пространстве параметров уравнения. Производится сравнение полученных признаков с некоторыми известными достаточными условиями асимптотической устойчивости конечномерных линейных разностных уравнений. Главным преимуществом полученных достаточных условий асимптотической устойчивости линейного разностного уравнения типа Вольтерра является наглядность этих признаков и простота их применения. Кроме того, признаки такого типа полезны, если коэффициенты уравнения не известны точно.

*Ключевые слова:* устойчивость; разностные уравнения; уравнения Вольтерра.

Рассмотрим линейное разностное уравнение типа Вольтерра

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^n a_s x_{n-s}, \quad n=1,2,\dots \quad (1)$$

где  $a_s \in R$ ,  $a_s \geq 0$  ( $s=1,2,\dots$ ).

Начальное условие  $x_0$  однозначно определяет решение уравнения (1).

Нулевое решение уравнения (1) называется устойчивым, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left( \forall x_0 |x_0| < \delta \Rightarrow \forall n > 0 |x_n| < \varepsilon \right)$$

Нулевое решение уравнения (1) называется асимптотически устойчивым, если он устойчиво и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  для любого решения  $(x_n)$  уравнения (1).

Уравнение Вольтерра (1) является бесконечномерным аналогом разностного уравнения

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{s=1}^k a_s x_{n-s}, \quad (2)$$

где  $a_s \in R$ ,  $a_s \geq 0$  ( $1 \leq s \leq k$ ).

Для уравнения (2) известны следующие признаки асимптотической устойчивости [1].

**Теорема 1.** Если  $a_s \geq 0$  ( $1 \leq s \leq k$ ) и

$$0 < \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1, \quad (3)$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 является многомерным обобщением известного результата Левина и Мэя [2].

**Теорема 2.** Если  $a_s \geq 0$  ( $1 \leq s \leq k$ ) и

$$0 < \sum_{s=1}^k sa_s \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

Признак устойчивости теоремы 1 сильнее признака теоремы 2. Теорема 1 в некотором смысле не может быть улучшена [1].

Цель работы – получить аналоги теорем 1 и 2 для разностного уравнения Вольтерра (1).

Производящей функцией числовой последовательности  $x_n$  ( $n \geq 0$ ) называется ряд вида

$$\tilde{x}(z) = Z(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n, \quad (5)$$

где  $z \in C$ .

Сверткой двух последовательностей  $x_n$  и  $y_n$  называется последовательность вида

$$x_n \circ y_n = \sum_{s=0}^n x_{n-s} y_s = \sum_{s=0}^n x_s y_{n-s}. \quad (6)$$

Производящая функция свертки двух последовательностей имеет вид

$$Z(x_n \circ y_n) = \tilde{x}(z) \tilde{y}(z).$$

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа  $M > 0$  и  $q \in (0; 1)$  такие, что для всех  $n \in N$  выполняется  $a_n \leq Mq^n$ ;

2) все нули функции  $g(z) = 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  расположены вне единичной окружности  $|z| = 1$ .

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Пусть последовательность  $x_n$  ( $n \geq 0$ ) является решением уравнения (1).

Значит,

$$x_1 = x_0 - a_1 x_0, \quad x_2 = x_1 - (a_1 x_1 + a_2 x_0), \quad x_3 = x_2 - (a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0), \quad \dots$$

Умножим обе части первого уравнения на  $z$ , второго – на  $z^2$ , третьего – на  $z^3$  и так далее. Сложим полученные равенства и добавим к обеим частям  $x_0$ . Согласно определению производящей функции (5) получим

$$\tilde{x}(z) = x_0 + z\tilde{x}(z) - \tilde{x}(z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда

$$\tilde{x}(z) = \frac{x_0}{1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n}. \quad (7)$$

Обозначим функцию

$$g(z) = 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \quad (8)$$

Из условий теоремы следует, что функция  $g(z)$  является аналитической в круге  $|z| = R$ , радиус которого  $R$  больше единицы. Тогда из (7) следует, что  $\tilde{x}(z)$  раскладывается в степенной ряд по степеням  $z$  с радиусом сходимости больше единицы. Следовательно, уравнение (1) экспоненциально, а, значит, и асимптотически устойчиво при любом начальном условии  $x_0$ . Теорема доказана.

В работе [1] доказаны следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Для любого числа  $\omega \in (0; \pi]$  существует число  $m \in R$ , такое, что для всякого  $s \in N$

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} + \frac{\sin(m-s)\omega}{\sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega} \geq 0. \quad (9)$$

**Лемма 2.** Для любого числа  $s \in N$ , такое что всякого  $s \in N$

$$2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)} > \frac{\pi}{2s}.$$

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа  $M > 0$  и  $q \in (0;1)$  такие, что для всех  $n \in N$  выполняется  $a_n \leq Mq^n$ ;

$$2) 0 < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} < 1.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Предположим, что условия теоремы выполняются и существует нуль  $z_0$  функции  $g(z)$ , такой, что  $|z_0| \leq 1$ .

1. Рассмотрим случай  $|z_0| = 1$ . Пусть существует нуль (8) вида  $z_0 = e^{i\omega}$  ( $\omega \in [0; \pi]$ ). Тогда

$$1 - e^{i\omega} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s e^{i\omega s} = 0.$$

Таким образом, существует  $\omega \in [0; \pi]$ , такое, что

$$1 - \cos \omega + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos s\omega = 0, \quad (10)$$

$$-\sin \omega + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin s\omega = 0. \quad (11)$$

Из (10) очевидно, что  $\omega \neq 0$ .

Пусть  $m \in R$  определено согласно Лемме 1.

Умножим (10) на  $\frac{\sin m\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}$ , а (11) – на  $\frac{-\cos m\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega}$ .

Сложив полученные равенства, получим

$$\frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega} (\sin m\omega - \cos \omega \sin m\omega + \sin \omega \cos m\omega) + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \frac{\sin m\omega \cos s\omega - \cos m\omega \sin s\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega} = 0,$$

$$\frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega} (\sin m\omega - \sin(1-m)\omega) + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \frac{\sin(m-s)\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega} = 0.$$

И окончательно

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \frac{\sin(m-s)\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega} = 0. \quad (12)$$

Из (12) и (9) при неотрицательных значениях  $a_s$  ( $s=1,2,\dots$ ) получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} - 1 = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \left( \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2(2s-1)}} + \frac{\sin(m-s)\omega}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\omega} \right) \geq 0.$$

Это противоречит второму условию теоремы.

2. Рассмотрим случай  $|z_0| < 1$ . Рассмотрим окрестность точки  $z_0$ , расположенную целиком внутри единичного круга  $|z|=1$ , и такую, что на ее границе  $\gamma$  нет нулей функции  $g(z)$ .

По 1 условию теоремы ряд  $\sum_{s=1}^{\infty} a_s$  сходится. Отсюда следует, что последовательность многочленов

$$P_k(z) = 1 - z + \sum_{s=1}^k a_s z^s$$

сходится равномерно к функции  $g(z)$  внутри единичного круга.

Согласно теореме Гурвица [3] существует натуральное число  $k_0 = k_0(\gamma)$ , такое, что для любого натурального числа  $k > k_0$  число нулей многочлена  $P_k(z)$  внутри кривой  $\gamma$  равно числу нулей функции  $g(z)$  внутри этой кривой. Значит, существует нуль многочлена  $P_k(z)$ , расположенный внутри единичного круга.

С другой стороны, из второго условия теоремы получаем, что при любом  $k \in N$  выполняется условие (3). Тогда, согласно теореме 1, уравнение (2) асимптотически устойчиво при любом значении  $k \in N$ . Отсюда следует, что все корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} + \sum_{s=1}^k a_s \lambda^{k-s} = 0$$

расположены внутри единичного круга. Следовательно, все нули многочлена  $P_k(z)$  расположены вне единичного круга при любом значении  $k \in N$ . Получили противоречие.

Таким образом, все нули  $z_0$  функции  $g(z)$  расположены вне единичного круга. Согласно теореме 3 уравнение (1) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Из леммы 2 и теоремы 4 получаем следующий результат.

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия:

1) существуют действительные числа  $M > 0$  и  $q \in (0;1)$  такие, что для всех  $n \in N$  выполняется  $a_n \leq Mq^n$ ;

$$2) 0 < \sum_{s=1}^{\infty} sa_s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Теоремы 4 и 5 являются бесконечномерными аналогами теорем 1 и 2 соответственно.

### Литература

1. Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // Journal of Difference Equations and Applications. – 2007. – Vol. 13, Iss. 5. – P. 457–461.
2. Levin, S. A note on difference-delay equations / S. Levin, R. May // Theoretical Population Biology. – 1976. – Vol. 9, Iss. 2. – P. 178–187.
3. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1978. – 415 с.

*Поступила в редакцию 22 июня 2020 г.*



**CRITERIA FOR STABILITY OF VOLTERRA DIFFERENCE EQUATIONS****D.A. Komissarova***South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation**E-mail: komissarovada@susu.ru*

Continuous and discrete Volterra-type difference equations arise in many applications. In particular, when studying models of population dynamics, modeling various economic or physical processes, in management theory, and medicine. The paper deals with the problem of asymptotic stability of the zero solution of a linear difference equation of Volterra type in convolutions. The definitions of stability and asymptotic stability of the zero solution of this equation are given. The article presents sufficient conditions for the asymptotic stability of linear Volterra difference equations. The corresponding theorems are proved using the  $z$ -transform method. The obtained criteria of asymptotic stability of the zero solution are restrictions on the coefficients of the original equation, that is, they represent a certain region of stability in the space of the equation parameters. The obtained criteria are compared with some known sufficient conditions for the asymptotic stability of finite-dimensional linear difference equations. The main advantage of the obtained sufficient conditions for asymptotic stability of a linear difference equation of Volterra type is the visibility of these criteria and ease of their application. In addition, this type of criteria is useful if the coefficients of the equation are not known exactly.

*Keywords: stability; difference equations; Volterra equations.*

**References**

1. Kipnis M.M., Komissarova D.A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 2007, Vol. 13, Iss. 5, pp. 457–461. DOI: 10.1080/10236190601132933
2. Levin S., May R. A note on difference-delay equations. *Theoret. Popul. Biol.*, 1976, Vol. 9, Iss. 2, pp. 178–187. DOI: 10.1016/0040-5809(76)90043-5
3. Markushevich, A.I. *Kratkiy kurs teorii analiticheskikh funktsiy* (A short course in the theory of analytic functions). Moscow, Nauka Publ., 1978, 415 p. (in Russ.).

*Received June 22, 2020*

# ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли**

Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

E-mail: r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com

Коэффициентные обратные задачи для уравнений в частных производных могут быть поставлены как задачи оптимального управления, т. е. в вариационной форме. В таких постановках искомые коэффициенты уравнений состояния играют роль управляющих функций и целевые функционалы составляются на основе дополнительных условий. В статье рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении младшего коэффициента многомерного параболического уравнения с интегральным граничным условием и дополнительным интегральным условием. При этом роль управляющей функции играет младший коэффициент параболического уравнения и является элементом пространства интегрируемых по Лебегу функций с конечным индексом суммируемости. Решение краевой задачи для параболического уравнения, при каждом заданном управляющей функции, определяется как обобщенное решение из пространства Соболева. Целевой функционал составлен на основе дополнительного интегрального условия. Доказано существование решение задачи и получено необходимое условие оптимальности.

*Ключевые слова:* параболическое уравнение; обратная задача; интегральные условия; вариационная постановка.

## Введение

Вариационные постановки коэффициентных обратных задач для параболических уравнений при классических граничных и дополнительных условиях изучены в работах [1–5] и др. Однако эти задачи при интегральных условиях исследованы существенно слабее [6, 7].

В настоящей работе изучается вариационная постановка обратной задачи об определении младшего коэффициента многомерного параболического уравнения с интегральными условиями. Доказано существование решение задачи, и получено необходимое условие оптимальности.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $R_n$  – евклидово пространство размерности  $n \geq 2$ ,  $\Omega \subset R_n$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $S$ ,  $S = S' \cup S''$ ,  $T > 0$  – заданное число,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $S_T = S \times (0, T)$ ,  $S'_T = S' \times (0, T)$ ,  $S''_T = S'' \times (0, T)$ .

Рассмотрим в цилиндре  $Q_T$  линейное параболическое уравнение

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij}(x,t) u_{x_j} \right)_{x_i} + \nu(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{(x,t) \in S'_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N}|_{(x,t) \in S''_T} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_j} \cos(\nu, x_i)|_{(x,t) \in S''_T} = \int_{\Omega} K(x,y,t) u(y,t) dy|_{(x,t) \in S''_T}. \quad (3)$$

Здесь  $\nu$  – единичный вектор нормали к  $S''$ , направленной вне  $\Omega$ ;  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ),  $\nu$ ,  $f$ ,  $\varphi$ ,  $K$  – некоторые функции;  $u = u(x,t)$  – решение задачи (1)–(3).

Задачу нахождения решения  $u = u(x,t)$  задачи (1)–(3) по заданным функциям  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ),  $\nu$ ,  $f$ ,  $\varphi$ ,  $K$  называют прямой задачей. На практике возникают также обратные задачи,

в которых некоторые из коэффициентов  $a_{ij}(x,t)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ),  $v(x)$  уравнения неизвестны и подлежат определению по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами.

Пусть в задаче (1)–(3)  $a_{ij}(i, j = \overline{1, n}), f, \varphi, K$  – известные функции. Требуется найти пару функций  $(u, v)$ , удовлетворяющих условиям (1)–(3) и дополнительному условию

$$\int_0^T \omega(t)u(x,t)dt = \alpha(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\omega$  и  $\alpha$  – известные функции.

Задачу (1)–(4) поставим в вариационной форме: требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \int_{\Omega} \left| \int_0^T \omega(t)u(x,t;v)dt - \alpha(x) \right|^2 dx \quad (5)$$

на множестве

$$V = \{v = v(x) \in L_s(\Omega) : |v(x)| \leq d \text{ п.в.на } \Omega\} \quad (6)$$

при условиях (1)–(3), где  $s \geq n+1$  при  $n \geq 2$ ,  $d > 0$  – заданные числа,  $u(x,t;v) = u(x,t)$  – решение краевой задачи (1)–(3) соответствующее коэффициенту  $v \in V$ . Ниже эту задачу будем называть задачей (1)–(3), (5), (6). В этой задаче коэффициент  $v = v(x)$  играет роль управления, а целевой функционал (5) составлен на основе условия (4).

Будем предполагать, что заданные функции  $a_{ij}(i, j = \overline{1, n}), f, \varphi, K, \omega, \alpha$  удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

$$v\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

$$|a_{ijt}(x,t)| \leq \mu_1 \text{ п.в.на } Q_T; |K(x,y,t)| \leq \mu_2, |K_t(x,y,t)| \leq \mu_3 \text{ п.в.на } S'' \times \Omega \times (0, T),$$

$$\varphi \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad f \in L_2(Q_T); \quad (7)$$

$$\omega \in L_2(0, T), \quad \alpha \in L_2(\Omega), \quad (8)$$

где  $\nu, \mu, \mu_i > 0$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – некоторые постоянные.

Пусть  $v \in V$  – некоторое фиксированное управление. Тогда обобщенным решением из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  краевой задачи (1)–(3) назовем функцию  $u = u(x,t) = u(x,t;v)$  из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T) = \{u = u(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(Q_T) : u(x,t) = 0, (x,t) \in S_T'\}$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left[ -u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_j} + v u \eta \right] dxdt - \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s,y,t)u(y,t)dy \right] \eta(s,t) dsdt = \\ = \int_{\Omega} \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{Q_T} f\eta dxdt, \quad \eta = \eta(x,t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \quad \eta(x,T) = 0. \quad (9)$$

Можно показать, что краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима в  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  при каждом  $v \in V$ , решение задачи (1)–(3) является элементом пространства  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) = \{u = u(x,t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T) : u(x,t) = 0, (x,t) \in S_T'\}$  и верна оценка

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \leq M_1 \left[ \|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T} \right]. \quad (10)$$

Здесь и ниже всюду  $M_1, M_2, \dots$  – положительные постоянные.

## 2. Существование решения задачи

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (7), (8). Тогда задача (1)–(3), (5), (6) имеет хотя бы одно решение.

**Доказательство.** Пусть  $v \in V$  – некоторый элемент и последовательность  $\{v_k\} \subset V$  такова, что

$$v_k \rightarrow v \text{ слабо в } L_s(\Omega). \quad (11)$$

Положим  $u_k = u_k(x, t) = u(x, t; v_k)$ . Тогда из (1)–(3), записанных при  $v = v_k$ , учитывая оценку (10) получим

$$\|u_k\|_{2, Q_T}^{(1,1)} M_2 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

Тогда в силу теоремы вложения [8, с. 78], не ограничивая общности, можно считать, что

$$u_k \rightarrow u \text{ слабо в } W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T), \quad (13)$$

где  $u = u(x, t)$  – некоторая функция из  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ .

Пологая в (9)  $v = v_k, u = u_k$ , получим тождества

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[ -u_k \eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{k,x_j} \eta_{x_j} + v_k(x) u_k \eta \right] dx dt - \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s, y, t) u_k(y, t) dy \right] \eta(s, t) ds dt = \\ & = \int_{\Omega} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{Q_T} f \eta dx dt \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \forall \eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \quad \eta(x, T) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Проводя обычное преобразование и пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_T} v_k u_k \eta dx dt - \int_{Q_T} v u \eta dx dt \right| = \left| \int_{Q_T} v_k (u_k - u) \eta dx dt + \int_{Q_T} (v_k - v) u \eta dx dt \right| \\ & d \|u_k - u\|_{2, Q_T} \| \eta \|_{2, Q_T} + \left| \int_{Q_T} (v_k - v) u \eta dx dt \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя теорему вложения [8, с. 78], получаем, что  $u \eta \in L_{s/(s-1)}(Q_T)$  при  $s \geq n+1$ . Тогда из соотношений (11), (13) и (15) следует, что

$$\int_{Q_T} v_k u_k \eta dx dt \rightarrow \int_{Q_T} v u \eta dx dt. \quad (16)$$

Известно, что вложение  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_2(S_T'')$  ограничено [8, с. 78]. Используя этот факт и пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s, y, t) u_k(y, t) dy \right] \eta(s, t) ds dt - \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s, y, t) u(y, t) dy \right] \eta(s, t) ds dt \right| \\ & \mu_2 \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} (u_k(y, t) - u(y, t)) dy \right] |\eta(s, t)| ds dt \leq \mu_2 |\Omega|^{1/2} \|u_k - u\|_{2, Q_T} \int_{S_T''} \| \eta(s, t) \|_{2, (0, T)} ds \\ & \mu_2 |\Omega|^{1/2} M_3 \|u_k - u\|_{2, Q_T} \| \eta \|_{2, Q_T}^{(1,1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $|\Omega| = \text{mes} \Omega$ . Если в (17) перейдем к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и учтем (13), то получим

$$\int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s, y, t) u_k(y, t) dy \right] \eta(s, t) ds dt \rightarrow \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s, y, t) u(y, t) dy \right] \eta(s, t) ds dt. \quad (18)$$

Теперь перейдем к пределу в (14) и учтем соотношения (13), (16), (18). Тогда получим, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет тождеству (9), т. е.  $u(x, t) = u(x, t; v)$ . Таким образом, соотношение (13) справедливо с функцией  $u = u(x, t)$ , и в частности

$$u(x, t; v_k) \rightarrow u(x, t; v) \text{ сильно в } L_2(Q_T). \quad (19)$$

Тогда из равенства (5) и соотношения (19) следует, что  $J(v_k) \rightarrow J(v)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, функционал  $J(v)$  слабонепрерывен на слабокомпактном множестве  $V$ . Следовательно, функционал  $J(v)$  достигает своей нижней грани на  $V$  [9, с. 49], т. е. справедливо утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

### 3. Градиент целевого функционала и необходимое условие оптимальности

Пусть функция  $\psi(x) = \psi(x, t) = \psi(x, t; v) \in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  является обобщенным решением следующей сопряженной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi_t + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) \psi_{x_i})_{x_j} - \nu \psi + \int_{S''} K(\xi, x, t) \psi(\xi, t) d\xi = \\ = 2 \left[ \int_0^T \omega(\tau) u(x, \tau; v) d\tau - \alpha(x) \right] \omega(t), \quad (x, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

$$\psi|_{(x,t) \in S_T'} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial N}|_{(x,t) \in S_T''} = 0. \quad (22)$$

Решение краевой задачи (20)–(22) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[ \psi \eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \psi_{x_i} \eta_{x_j} + \nu \psi \eta \right] dx dt - \int_{Q_T} \left[ \int_{S''} K(\xi, x, t) \psi(\xi, t) d\xi \right] \eta dx dt = \\ = -2 \int_{Q_T} \left\{ \int_0^T \omega(\tau) u(x, \tau; v) d\tau - \alpha(x) \right\} \omega(t) \eta dx dt, \quad \forall \eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \eta(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Можно показать, что краевая задача (20)–(22) однозначно разрешима в  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$  и верна оценка

$$\|\psi\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \leq M_4 \left\| \int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right\|_{2, Q_T}. \quad (24)$$

Для оценки нормы в правой части оценки (20) используем неравенство Коши–Буняковского и учитывая (10), получаем

$$\|\psi\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \leq \sqrt{2} M_4 \|\omega\|_{2, (0, T)} \left[ M_1 \|\omega\|_{2, (0, T)} \left( \|\varphi\|_{2, \Omega}^{(1)} + \|f\|_{2, Q_T} \right) + \|\alpha\|_{2, \Omega} \right]. \quad (25)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функционал (5) дифференцируем по Фреше в каждой точке  $v \in V$  и его градиент имеет вид

$$J'(v) = \int_0^T u(x, t; v) \psi(x, t; v) dt, \quad x \in \Omega. \quad (26)$$

**Доказательство.** Пусть  $v \in V$  – некоторый элемент,  $\Delta v \in L_s(\Omega)$  – приращение этого элемента и  $v + \Delta v \in V$ . Через  $\Delta u = \Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$  обозначим приращение решения краевой задачи (1)–(3). Тогда ясно, что  $\Delta u$  является решением из  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$  краевой задачи

$$\Delta u_t - \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij}(x,t) \Delta u_{x_i} \right)_{x_j} + [v(x) + \Delta v(x)] \Delta u = -\Delta v(x)u, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (27)$$

$$\Delta u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

$$\Delta u|_{(x,t) \in S_T'} = 0, \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial N}|_{(x,t) \in S_T''} = \int_{\Omega} K(x,y,t) \Delta u(y,t) dy|_{(x,t) \in S_T''} \quad (29)$$

и для него справедлива оценка:

$$\|\Delta u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} M_5 \|\Delta v u\|_{2,Q_T}.$$

Тогда, используя неравенство (1.7) из [8, с. 75] и ограниченность вложения  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_{2s/(s-2)}(Q_T)$  при  $s \geq n+1$ , имеем

$$\|\Delta u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} M_5 T^{1s} \|\Delta v\|_{s,\Omega} \|u\|_{2s/(s-2),Q_T} M_6 \|\Delta v\|_{s,\Omega} \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)}. \quad (30)$$

Приращение  $\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v)$  функционала (5) представим в виде

$$\Delta J(v) = 2 \int_{\Omega} \left\{ \int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right\} dx + \int_{\Omega} \left| \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right|^2 dx. \quad (31)$$

Из (27)–(29) следует, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[ \Delta u_t \psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta u_{x_j} \psi_{x_i} + (v + \Delta v) \Delta u \psi \right] dx dt - \int_{S_T''} \left[ \int_{\Omega} K(s, y, t) \Delta u(y, t) dy \right] \psi(s, t) ds dt = \\ = - \int_{Q_T} \Delta v u \psi dx dt. \end{aligned} \quad (32)$$

В (23) положим  $\eta = \Delta u$ , полученное равенство вычтем из (32) и придем к равенству

$$2 \int_{\Omega} \left\{ \int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right\} dx = \int_{Q_T} (u \psi + \Delta u \psi) \Delta v dx dt.$$

Подставляя это выражение в (31), получим

$$\Delta J(v) = \int_{Q_T} u \psi \Delta v dx dt + R, \quad (33)$$

где

$$R = \int_{\Omega} \left| \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right|^2 dx + \int_{Q_T} \Delta u \psi \Delta v dx dt. \quad (34)$$

Используя неравенство (1.8) из [8, с. 75], ограниченность вложения  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_{2s/(s-1)}(Q_T)$  и оценки (30), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} u \psi \Delta v dx dt \right| \leq \|u\|_{2s/(s-1),Q_T} \|\psi\|_{2s/(s-1),Q_T} \|\Delta v\|_{s,Q_T} M_7 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta v\|_{s,\Omega} \\ M_8 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \left( \|\Delta v\|_{s,\Omega} \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Кроме того, используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (30), имеем

$$\int_{\Omega} \left| \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right|^2 dx \leq \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \|\Delta u\|_{2,Q_T}^2 M_6^2 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \left( \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \right)^2 \|\Delta v\|_{s,\Omega}^2. \quad (36)$$

Подставляя оценки (35), (36) в (34), получаем оценку

$$|R| \leq \left( M_6^2 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + M_8 \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \right) \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta v\|_{s,\Omega}^2. \quad (37)$$

Тогда из (33), (37) следует, что функционал  $J(v)$  (5) дифференцируем и его градиент имеет вид (26). Теорема 2 доказана.

С помощью формулы градиента (26) и теоремы 5 из [9, с. 28] можно установить необходимое условие оптимальности управления в задаче (1)–(3), (5), (6).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и  $v = v(x) \in V$  – решение задачи (1)–(3), (5), (6), т. е. оптимальное управление. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} \int_0^T u(x,t;v) \psi(x,t;v) dt \left[ v(x) - v(x) \right] dx \geq 0, \quad \forall v = v(x) \in V.$$

### Литература

1. Искендеров, А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики / А.Д. Искендеров // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 274, № 3. – С. 531–533.
2. Алифанов, О.А. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.А. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 285 с.
3. Кабанихин, С.И. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности / С.И. Кабанихин., Г. Даирбаева // Международная конференция «Обратные некорректные задачи математической физики, посвященная 75-летию академика М.М. Лаврентьева», Новосибирск, 20–25 августа 2007. – Новосибирск, 2007. – С. 1–5.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009. – 457 с.
5. Iskenderov, A.D. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem / A.D. Iskenderov, R.K. Tagiyev // The 7th International Conference «Inverse Problems: modelling and simulation» (IMPS-2014), May 26–31, 2014. – 2014. – P. 31.
6. Тагиев, Р.К. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / Р. К. Тагиев, Р.А. Касумов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – № 45. – С. 49–59.
7. Габибов, В.М. Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / В.М. Габибов // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-матем. наук. – 2017. – № 2. – С. 80–91.
8. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2020 г.

## VARIATIONAL FORMULATION OF AN INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS

R.K. Tagiev, Sh.I. Maharramli

Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan

E-mail: r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com

Coefficient inverse problems for partial differential equations can be posed as optimal control problems, i. e. in variation form. In such formulations, the sought-for coefficients of the state equations play the role of control functions, and the objective functionals are compiled on the basis of additional conditions. The paper discusses a variational formulation of the inverse problem of determining the lower coefficient of a multidimensional parabolic equation with an integral boundary condition and an additional integral condition. In this case, the role of the control function is played by the lower coefficient of the parabolic equation and is an element of the space of Lebesgue integrable functions with a finite summability index. The solution to the boundary value problem for a parabolic equation, for each given control function, is defined as a generalized solution from the Sobolev space. The objective functional is based on an additional integral condition. The existence of a solution to the problem is proved and the necessary optimality condition is obtained.

*Keywords: parabolic equation; inverse problem; integral conditions; variational formulation.*

### References

1. Iskenderov A.D. On variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical physics. *Sov. Math., Dokl.*, 1984, Vol. 29, pp. 52–55. (in Russ.).
2. Alifanov O.A., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Extreme methods for solving ill-posed problems), Moscow, Nauka Publ., 1988, 285 p. (in Russ.).
3. Kabanikhin S.I., Dairbaeva G. Obratnaya zadacha nakhozheniya koeffitsienta uravneniya teploprovodnosti (The inverse problem of finding the coefficient of the heat equation). *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Obratnye nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki, posvyashchennaya 75-letiyu akademika M.M.Lavrent'eva"*, Rossiya, Novosibirsk, 20–25 avgusta 2007 (Proc. International Conference "Inverse Ill-posed Problems of Mathematical Physics, Dedicated to the 75th Anniversary of Academician M. M. Lavrentiev", Russia, Novosibirsk, August 20–25, 2007), pp. 1–5. (in Russ.).
4. Kabanikhin, S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and ill-posed problems). Novosibirsk: Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).
5. Iskenderov A.D., Tagiyev R.K. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem. *Proc. 7th International Conference "Inverse Problems: modelling and Simulation" (IPMS–2014)*. May 26–31, 2014, P. 31.
6. Tagiev R.K., Kasumov R.A. Ob optimizatsionnoi postanovke koeffitsientnoi obratnoi zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya s dopolnitel'nym integral'nym usloviem (On the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition). *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2017, no. 45, pp. 49–59. DOI: 10.17223/19988621/45/4
7. Gabibov V.M. Koeffitsientnaya obratnaya zadacha tipa upravleniya dlya parabolicheskogo uravneniya s dopolnitel'nym integral'nym usloviem (Coefficient inverse problem of control type for a parabolic equation with an additional integral condition). *Vestnik Bakinskogo Universiteta. Ser. fiz.-matem. Nauk*, 2017, no. 2, pp. 80–91.
8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Parabolic linear and quasilinear equations). Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).
9. Vasil'ev, F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* (Methods for solving extreme problems). Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p.

Received February 24, 2020



## ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PERTURBED FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A NON-SMOOTH COEFFICIENT

**D.A. Tursunov, M.O. Orozov**

*Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic*

*E-mail: d osh@rambler.ru*

In this paper, we consider the first boundary value problem, that is the Dirichlet problem in a ring for a linear inhomogeneous second-order elliptic equation with two independent variables containing a small parameter in front of the Laplacian. The equation potential is not a smooth function in the field under study. There exists a unique solution of the first boundary value problem under consideration. It is impossible to construct an obvious solution of the first boundary value problem. We are interested in the influence of the small parameter on the solution of the Dirichlet problem in the field under study when the small parameter tends to zero. That is why we need to construct an asymptotic solution of the first boundary value problem in a ring. The problem under consideration has two singularities (a bisingular problem): presence of a small parameter in front of the Laplacian, and solution of a relevant unperturbed equation is not a smooth function in the field under study. To construct an asymptotic solution, we use a modified method of boundary functions since it is impossible to use a classical method of boundary functions. To begin with, we construct a formal asymptotic solution as per the small parameter, and then we evaluate the remainder term of the asymptotic expansion. As a result, we have constructed complete uniform asymptotic expansion of the first boundary value problem in a ring as per the small parameter. The constructed series of the solution of the first boundary value problem is asymptotic in the sense of Erdey.

*Keywords: Dirichlet problem for a ring; bisingular problem; asymptotics; Laplace operator; small parameter.*

Consider the partial differential equation of elliptic type

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt{\rho-1} u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (1)$$

with the inhomogeneous boundary conditions of the first kind

$$u(1, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi), \quad u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

where  $0 < \varepsilon$  is a small parameter,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $f \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $D = \{(\rho, \varphi) | 1 < \rho < a \text{ is a constant}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ,  $\psi_k \in C^\infty[0, 2\pi]$ ,  $k = 1, 2$ .

Mathematical models of many natural phenomena are described using boundary value problems for partial differential equations [1–2].

According to the theory of partial differential equations, the solution to considered first boundary value problem (2) for differential equation of elliptic type (1) exists and is unique [3]. We are interested in the behavior of the solution, i. e. dependence of this solution on the small parameter  $\varepsilon$ , where  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We consider the question about the part of the domain  $\bar{D}$  in which passage to the limit is performed.

The considered first boundary value problem has two features (bisingularity) [2]. The first singularity is the fact that the solution to the limit equation ( $\varepsilon = 0$ ) cannot satisfy the boundary conditions, since the limit equation is not a differential equation. The second feature states that the solution to the limit equation is not a smooth function in the domain  $\bar{D}$ :

$$u(\rho, \varphi, 0) = -f_0(\rho, \varphi) / \sqrt{\rho-1}.$$

In order to show how this nonsmooth solution affects the asymptotic behavior of the solution to the Dirichlet problem, we consider the classical outer asymptotic expansion of the solution to the first boundary value problem:

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Substitute series (3) into differential equation of elliptic type (1) and equate the coefficients at the same powers of  $\varepsilon$ , then we obtain:

$$-\sqrt{\rho-1}u_0(\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi), \quad \sqrt{\rho-1}u_k(\rho, \varphi) = \Delta u_{k-1}(\rho, \varphi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Here we determine all  $u_k(\rho, \varphi)$  as follows:  $u_0(\rho, \varphi) = -\frac{f(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}}, \quad u_k(\rho, \varphi) = \frac{\Delta u_{k-1}(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$

In the general case, all these functions  $u_k(\rho, \varphi)$  have increasing singularities of the form

$$u_k(\rho, \varphi) = O\left((\rho-1)^{-(5k+1)/2}\right), \quad \rho \rightarrow 1, \quad k \in N_0 = 0, 1, 2, \dots$$

Therefore, asymptotic solution (3) can be represented as follows:

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\rho-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\rho-1)^5}} \right)^k F_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

where  $F_k \in C^\infty(\bar{D}), k = 0, 1, 2, \dots$

Hence, series (3) is an asymptotic solution to the first boundary value problem only in the domain  $\{(\rho, \varphi) | 1 + \varepsilon^{2/5} < \rho < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , and does not satisfy the boundary condition  $u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi)$  on the circle  $\rho = a$ , and solution (3) loses its asymptotic character in the domain  $\{(\rho, \varphi) | 1 \leq \rho \leq 1 + \varepsilon^{2/5}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ .

Let us prove the following theorem.

**Theorem.** The asymptotic solution to first boundary value problem (1) and (2) can be represented in the following form:

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z_k(t, \varphi) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

where  $t = (a - \rho) / \lambda, \lambda = \sqrt{\varepsilon}, \tau = (\rho - 1) / \mu^2, \mu = \sqrt[5]{\varepsilon}.$

The functions  $v_k(\rho, \varphi), z_k(t, \varphi), w_k(\tau, \varphi)$  are specified below, in the proof of Theorem.

**Proof.** First, construct a formal asymptotic solution to the first boundary value problem. As usual, we look for such a solution in the form [4–6]

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + Z(t, \varphi, \lambda) + W(\tau, \varphi, \mu), \quad (4)$$

where  $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi), \quad Z(t, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z_k(t, \varphi), \quad t = (a - \rho) / \lambda, \lambda = \sqrt{\varepsilon},$

$W(\tau, \varphi, \mu) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi), \quad \tau = (\rho - 1) / \mu^2, \mu = \sqrt[5]{\varepsilon}.$

Taking into account conditions (2), we obtain:

$$W(0, \varphi, \mu) = \psi_1(\varphi) - V(1, \varphi, \mu^5), \quad \forall k: \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_k(\tau, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad (5)$$

$$Z(0, \varphi, \lambda) = \psi_2(\varphi) - V(a, \varphi, \lambda^2), \quad \forall k: \lim_{t \rightarrow \infty} z_k(t, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (6)$$

We write differential equation of elliptic type (1) in the form [4–6]

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt{\rho-1}u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon) + h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (7)$$

where  $h(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \varepsilon^{2k} h_{2k}(\rho, \varphi) + \varepsilon^{2k+1} \left( \frac{h_{2k+1,1}(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}} + \frac{h_{2k+1,3}(\varphi)}{\sqrt{(\rho-1)^3}} \right) \right),$   $h_{2k+1,1}(\rho, \varphi), h_{2k+1,3}(\varphi)$  are un-

known functions for the present.

Substituting formal series (4) into differential equation of elliptic type (7), we have

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt{\rho-1}V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - h(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (8)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \mu^2 c \frac{\partial W}{\partial \tau} + (\mu^2 c)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \sqrt{\tau} W \right) = h(1 + \tau \mu^2, \varphi, \mu^5), \quad (\tau, \varphi) \in D_0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \lambda \tilde{c} \frac{\partial Z}{\partial t} + (\lambda \tilde{c})^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} - \sqrt{a-1} \sqrt{1 - \frac{\lambda t}{a-1}} Z = 0, \quad (t, \varphi) \in D_1, \quad (10)$$

where  $c = \frac{1}{1 + \tau \mu^2}, \frac{1}{a} \leq c \leq 1, D_0 = \{(\tau, \varphi) | 0 < \tau < (a-1)/\mu^2, 0 < \varphi \leq 2\pi\}, D_1 = \{(t, \varphi) | 0 < t < (a-1)/\lambda, 0 < \varphi \leq 2\pi\}, \tilde{c} = \frac{1}{a - \lambda t}, \frac{1}{a} \leq \tilde{c} \leq 1, W = W(\tau, \varphi, \mu), Z = Z(t, \varphi, \lambda).$

From (8), taking into account that  $V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$  and equating the coefficients at the same degrees of  $\varepsilon$ , we obtain:

$$v_0(\rho, \varphi) = -\frac{f(\rho, \varphi) - h_0(\varphi)}{\sqrt{\rho-1}},$$

if  $h_0(\varphi) = f(1, \varphi)$ , then  $v_0 \in C(\bar{D})$ .

In this case,  $v_0(\rho, \varphi) = -\sqrt{\rho-1} \tilde{v}_0(\rho, \varphi), \tilde{v}_0 \in C^\infty(\bar{D})$  and

$$\Delta v_0 = \frac{1}{4(\rho-1)^{3/2}} \tilde{v}_0 - \frac{1}{\sqrt{\rho-1}} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \rho} - \sqrt{\rho-1} \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\tilde{v}_0}{2\sqrt{\rho-1}} + \sqrt{\rho-1} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \rho} \right) - \sqrt{\rho-1} \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \varphi^2}.$$

Let us determine  $v_1(\rho, \varphi)$ :

$$v_1(\rho, \varphi) = \frac{\Delta v_0(\rho, \varphi) + h_1(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}},$$

let  $h_1(\rho, \varphi) = -\frac{\tilde{v}_{0,0}(\varphi)}{4(\rho-1)^{3/2}} + \frac{3\tilde{v}_{0,1}(\varphi)\rho - 2\tilde{v}_{0,0}(\varphi)}{4\rho\sqrt{\rho-1}}$ , where  $\tilde{v}_{0,0}(\varphi) = \tilde{v}_0(1, \varphi), \tilde{v}_{0,1}(\varphi) = \frac{\partial \tilde{v}_0(1, \varphi)}{\partial \rho}$ .

Then

$$\Delta v_0(\rho, \varphi) + h_1(\rho, \varphi) = \sqrt{\rho-1} \tilde{\tilde{v}}_0(\rho, \varphi), \quad \tilde{\tilde{v}}_0 \in C^\infty(\bar{D}).$$

Hence,

$$v_1(\rho, \varphi) = \frac{\Delta v_0(\rho, \varphi) + h_1(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}} = \tilde{\tilde{v}}_0(\rho, \varphi).$$

Continuing this process in a similar way, for  $v_{2k+1}(\rho, \varphi)$  we have:

$$v_{2k+1}(\rho, \varphi) = \frac{\Delta v_{2k}(\rho, \varphi) + h_{2k+1}(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}},$$

let

$$h_{2k+1}(\rho, \varphi) = -\frac{\tilde{v}_{2k,0}(\varphi)}{4(\rho-1)^{3/2}} + \frac{3\tilde{v}_{2k,0,1}(\varphi)\rho - 2\tilde{v}_{2k,0}(\varphi)}{4\rho\sqrt{\rho-1}},$$

where

$$\tilde{v}_{2k,0}(\varphi) = \tilde{v}_{2k}(1, \varphi), \tilde{v}_{2k,1}(\varphi) = \frac{\partial \tilde{v}_{2k}(1, \varphi)}{\partial \rho},$$

then

$$\Delta v_{2k}(\rho, \varphi) + h_{2k+1}(\rho, \varphi) = \sqrt{\rho-1} \tilde{\tilde{v}}_{2k}(\rho, \varphi), \quad \tilde{\tilde{v}}_{2k} \in C^\infty(\bar{D}).$$

Hence, we have:

$$v_{2k+1}(\rho, \varphi) = \frac{\Delta v_{2k}(\rho, \varphi) + h_{2k+1}(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}} = \tilde{\tilde{v}}_{2k}(\rho, \varphi).$$

And, for  $v_{2k}(\rho, \varphi)$ , we have:

$$v_{2k}(\rho, \varphi) = \frac{\Delta v_{2k-1}(\rho, \varphi) + h_{2k}(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}},$$

if  $h_{2k}(\varphi) = -\Delta v_{2k-1}(1, \varphi)$ ,  $k \in N$ , then  $v_{2k} \in C(\bar{D})$ .

Note that  $v_{2k+1} \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $v_{2k} \in C(\bar{D})$ .

Let us determine the functions  $w_k(\tau, \varphi)$ . Rewrite relation (9) as follows:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left( \frac{\partial^2 w_k}{\partial \tau^2} + c \mu^2 \frac{\partial w_k}{\partial \tau} + c^2 \mu^4 \frac{\partial^2 w_k}{\partial \varphi^2} - \sqrt{\tau} w_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{10k} \left( h_{2k}(\varphi) + \mu^2 \frac{h_{2k+1,3}(\varphi)}{\sqrt{\tau^3}} + \mu^4 \frac{h_{2k+1,1}(\mu\tau, \varphi)}{\sqrt{\tau}} \right).$$

Hence, taking into account (5), we have:

$$lw_0 \equiv \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \sqrt{\tau} w_0 = h_0, \quad w_0(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_0(\tau, \varphi) = 0, \quad (11)$$

$$lw_1 = 0, \quad w_1(0, \varphi) = \psi_1(\varphi) - v_0(1, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_1(\tau, \varphi) = 0, \quad (12)$$

$$lw_2 = -c \frac{\partial w_0}{\partial \tau} + \frac{h_{1,3}(\varphi)}{\sqrt{\tau^3}}, \quad w_2(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_2(\tau, \varphi) = 0, \quad (13)$$

$$lw_3 = -c \frac{\partial w_1}{\partial \tau}, \quad w_3(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_3(\tau, \varphi) = 0, \quad (14)$$

$$lw_4 = -c \frac{\partial w_2}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} + \frac{h_{1,1}(\tau\mu, \varphi)}{\sqrt{\tau}}, \quad w_4(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_4(\tau, \varphi) = 0, \quad (15)$$

$$lw_5 = -c \frac{\partial w_3}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2}, \quad w_5(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_5(\tau, \varphi) = 0, \quad (16)$$

$$lw_6 = -c \frac{\partial w_4}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \varphi^2}, \quad w_6(0, \varphi) = -v_1(1, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_6(\tau, \varphi) = 0, \quad (17)$$

$$lw_j = -c \frac{\partial w_{j-2}}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_{j-4}}{\partial \varphi^2}, \quad w_j(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_j(\tau, \varphi) = 0, \quad j = 7, 8, 9, \quad (18)$$

$$lw_{5k+1} = -c \frac{\partial w_{5k-1}}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_{5k-3}}{\partial \varphi^2}, \quad w_{5k+1}(0, \varphi) = -v_k(1, \varphi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{5k+1}(\tau, \varphi) = 0, \quad (19)$$

$$lw_{10k} = -c \frac{\partial w_{10k-2}}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_{10k-4}}{\partial \varphi^2} + h_{2k}(\varphi), \quad w_{10k}(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{10k}(\tau, \varphi) = 0, \quad (20)$$

$$lw_{10k+2} = -c \frac{\partial w_{10k}}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_{10k-2}}{\partial \varphi^2} + \frac{h_{2k+1,3}(\varphi)}{\sqrt{\tau^3}}, \quad w_{10k+2}(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{10k+2}(\tau, \varphi) = 0, \quad (21)$$

$$lw_{10k+4} = -c \frac{\partial w_{10k+2}}{\partial \tau} - c^2 \frac{\partial^2 w_{10k}}{\partial \varphi^2} + \frac{h_{2k+1,1}(\tau\mu, \varphi)}{\sqrt{\tau}}, \quad w_{10k+4}(0, \varphi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{10k+4}(\tau, \varphi) = 0. \quad (22)$$

Let us prove the following statement.

**Lemma.** The problem

$$z''(t) - \sqrt{t}z(t) = \frac{c}{\sqrt{t^k}}, \quad t \in (0, \infty), \quad k = 0, 1, 3, \quad z(0) = z^0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0,$$

has a unique solution (here  $c, z^0$  are constants).

**Proof.** We know that the corresponding linear homogeneous differential equation of the second order  $\tilde{z}''(t) - \sqrt{t}\tilde{z}(t) = 0$  has two independent solutions:

$$z_1(t) = \sqrt{t}I_{2/5}(4t^{5/4}/5), \quad z_2(t) = \sqrt{t}K_{2/5}(4t^{5/4}/5),$$

where  $I_{2/5}(s), K_{2/5}(s)$  are the modified Bessel functions.

Solutions to the homogeneous equation have the following property:

$$z_1(t) = O\left(t^{-\frac{1}{8}} e^{\frac{4}{5}t^{5/4}}\right), \quad z_2(t) = O\left(t^{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{4}{5}t^{5/4}}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad z_1(0) = 0, \quad z_2(0) \neq 0, \quad W(z_1, z_2) = \frac{1}{c_1}, \quad 0 \neq c_1 = \text{const}.$$

The solution to the inhomogeneous equation with the corresponding boundary conditions can be represented as

$$z(t) = \frac{z_2^0 z_2(t)}{z_2(0)} + cc_1 \left( z_2(t) \int_0^t s^{-k/2} z_1(s) ds + z_1(t) \int_t^\infty s^{-k/2} z_2(s) ds \right).$$

The asymptotic behavior of the solutions  $z_1(t)$  and  $z_2(t)$  to the homogeneous equation implies that  $z(t) = O\left(t^{-(k+1)/2}\right)$  when  $t \rightarrow \infty$ , and  $z(t) = O\left(t^{2-k/2}\right)$ ,  $k = 0, 1, 3$ , when  $t \rightarrow 0$ . This completes the proof of Lemma.

By virtue of Lemma, there exist unique solutions to boundary value problems (11)–(22). It follows from the properties of  $z_1(t)$  and  $z_2(t)$  that  $w_{10k}(t) = O(1/t^{1/2})$ ,  $w_{10k+2}(t) = O(1/t^2)$ ,  $w_{10k+4}(t) = O(1/t)$ ,  $t \rightarrow \infty$ , and the remaining solutions  $w_n(t)$  are exponentially small when  $t \rightarrow \infty$ .

Let us consider boundary value problem (10), (6). Since  $\alpha = \lambda t / (a - 1)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , then the following decomposition takes place:

$$\sqrt{1 - \alpha} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - j + 1\right) (-\alpha)^j.$$

Therefore, homogeneous differential equation (10) can be written in the following form:

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} - \sqrt{a-1} z_0 = 0, \quad (t, \varphi) \in D_1, \quad z_0(0, \varphi) = \psi_2(\varphi) - v_0(a, \varphi), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t, \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial t^2} - \sqrt{a-1} z_k = G_k \left( z_0, \frac{\partial z_0}{\partial t}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial \varphi^2}, \dots, z_{k-1}, \frac{\partial z_{k-1}}{\partial t}, \frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial \varphi^2}, t \right), \quad (t, \varphi) \in D_1,$$

and the boundary conditions can be represented as  $z_{2n}(0, \varphi) = -v_n(a, \varphi)$ ,  $z_{2n-1}(0, \varphi) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_k(t, \varphi) = 0$ ,

where the functions  $G_k \left( z_0, \frac{\partial z_0}{\partial t}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial \varphi^2}, \dots, z_{k-1}, \frac{\partial z_{k-1}}{\partial t}, \frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial \varphi^2}, t \right)$  depend linearly on the previous solu-

tions and on the derivatives of these solutions, i.e. on  $z_{k-1}, \frac{\partial z_{k-1}}{\partial t}, \frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial \varphi^2}$  and on the variable  $t$ .

These problems have unique solutions, which decrease exponentially when  $t \rightarrow \infty$ :

$$z_0(t, \varphi) = (\psi_2(\varphi) - v_0(a, \varphi)) e^{-\sqrt{a-1}t}, \quad z_k(t, \varphi) = e^{-\sqrt{a-1}t} P_k(t, \varphi), \quad P_k \in C^\infty(D_1).$$

We have determined all terms of formal asymptotic solution (4). Let us estimate the remainder of this expansion.

Let  $u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) + Z_{4n+2}(t, \varphi, \lambda) + W_{10n+6}(\tau, \varphi, \mu) + R_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon)$ , where

$$V_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{2n+1} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi), \quad Z_{4n+2}(t, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{4n+2} \lambda^k z_k(t, \varphi), \quad W_{10n+6}(\tau, \varphi, \mu) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{10n+6} \mu^k w_k(\tau, \varphi),$$

$R_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon)$  is the remainder of the series.

Then we obtain the following problem for the residual function  $R_n(\rho, \varphi, \varepsilon)$ :

$$\varepsilon \Delta R_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt{\rho-1} R_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2n+2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (23)$$

$$R_{2n+1}(1, \varphi, \varepsilon) = O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad R_{2n+1}(a, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2m+2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (24)$$

It is impossible to apply the maximum principle directly, since  $\sqrt{\rho-1} \geq 0$  for  $1 \leq \rho \leq a$ . Therefore, first of all, we replace  $R_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) = (a - \rho^2/2) r_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon)$ .

Then problem (23)–(24) takes the form:

$$\varepsilon \Delta r_{2n+1} - \frac{4\varepsilon\rho}{2a - \rho^2} \frac{\partial r_{2n+1}}{\partial \rho} - \left( \sqrt{\rho-1} + \frac{4\varepsilon}{2a - \rho^2} \right) r_{2n+1} = O(\varepsilon^{2n+2}), (\rho, \varphi) \in D,$$
$$r_{2n+1}(1, \varphi, \varepsilon) = O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}), r_{2n+1}(a, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2m+2}), \varepsilon \rightarrow 0, \varphi \in [0, 2\pi].$$

For this problem, the maximum principle [3] can be applied. As a result, we obtain an asymptotic estimation:  $r_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2m+1}), \varepsilon \rightarrow 0, (\rho, \varphi) \in \bar{D}$ .

Therefore,  $R_{2n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2m+1}), \varepsilon \rightarrow 0, (\rho, \varphi) \in \bar{D}$ .

This completes the proof of Theorem.

### References

1. Gie Gung-Min, Jung Chang-Yeol, Temam R. Recent progresses in boundary layer theory. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 2014, Vol. 36, no. 5, pp. 2521–2583. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2521
2. Il'in, A.M. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic methods in analysis). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. (in Russ.).
3. Gilbarg D., Trudinger, N.S. *Elliptic partial differential equations of second order. Second edition*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983, 513 p.
4. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2016, no. 1(39), pp. 42–52. (in Russ.). DOI: 10.17223/19988621/39/5
5. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities. *Ufa Mathematical Journal*, 2015, Vol. 8, no. 1, pp. 97–107. DOI:10.13108/2016-8-1-97
6. Tursunov D.A. The generalized boundary function method for bisingular problems in a disk, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, Vol. 23, no. 2, pp. 239–249. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249

Received November 8, 2019

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 3, pp. 41–47*

---

УДК 517.955.8

DOI: 10.14529/mmph200306

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

**Д.А. Турсунов, М.О. Орозов**

*Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика  
E-mail: d\_osh@rambler.ru*

Рассматривается неоднородная первая краевая задача, т. е. задача Дирихле в кольце для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, содержащего малый параметр перед лапласианом. Потенциал уравнения не является гладкой функцией в исследуемой области. Решение исследуемой первой краевой задачи существует и единственно. Явное решение первой краевой задачи построить невозможно. Нас интересует влияние малого параметра на решение задачи Дирихле в рассматриваемой области, когда малый параметр стремится к нулю. Поэтому требуется построить асимптотическое решение первой краевой задачи в кольце. Исследуемая задача имеет две сингулярности (бисингулярная задача): присутствие малого параметра перед лапласианом и решение соответствующего невозмущенного уравнения не является гладкой функцией в рассматриваемой области. Для построения асимпто-

тического решения применяем модифицированный метод пограничных функций, так как классический метод пограничных функций применить невозможно. Для начала строим формальное асимптотическое решение по малому параметру, а потом оцениваем остаточный член асимптотического разложения. В результате нами построено полное равномерное асимптотическое разложение решения первой краевой задачи в кольце по малому параметру. Построенный ряд решения первой краевой задачи является асимптотическим в смысле Эрдей.

*Ключевые слова: задача Дирихле для кольца; бисингулярная задача; асимптотика; оператор Лапласа; малый параметр.*

### Литература

1. Gie, Gung-Min Recent progresses in boundary layer theory / Gung-Min Gie, Chang-Yeol Jung, R. Temam // *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*. – 2014. – Vol. 36, no. 5. – P. 2521–2583.
2. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: Физматлит, 2009. – 248 с.
3. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
4. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // *Вестник Томского государственного университета*. – 2016. – Т. 1(39). – С. 42–52.
5. Tursunov, D.A. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities / D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev // *Ufa Mathematical Journal*. – 2015. – Vol. 8, no. 1. – P. 97–107.
6. Турсунов, Д.А. Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге / Д.А. Турсунов // *Тр. ИММ УрО РАН*. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 239–249.

*Поступила в редакцию 8 ноября 2019 г.*

## УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО S2 СТЕКЛОВОЛОКНОМ

**Ю.М. Ковалев**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: yum\_kov@mail.ru

Представлены результаты построения полуэмпирического уравнения состояния полимерного композита, армированного S2 стекловолокном. Уравнение состояния включает в себя тепловую и холодную составляющие. Для описания холодной составляющей уравнения состояния было проведено обоснование выбора формы ( $m$  и  $n$ ) потенциала межмолекулярного взаимодействия, адекватно описывающего структуру взаимодействий в компонентах композиционного материала. Для описания тепловой составляющей данного уравнения состояния свободная энергия Гельмгольца определялась в приближении Дебая. При построении уравнения состояния было показано, что уравнение состояния полимерного композита, армированного S2 стекловолокном, может быть представлено в форме Ми–Грюнайзена. Предложен вид зависимости коэффициента Грюнайзена от объема и подход к определению коэффициента Грюнайзена при начальных условиях проведения эксперимента по ударно-волновому воздействию на композиционный материал. Построены экспериментальные и расчетные ударные адиабаты полимерного композита, армированного S2 стекловолокном. Равенство первой и второй производных экспериментальной и теоретической ударных адиабат в точке, определяющей начальное состояние композитного материала, позволило определить коэффициенты, входящие в структуру ( $m$  и  $n$ ) потенциала межмолекулярного взаимодействия компонентов композиционного материала. Сравнение давлений, рассчитанных по определенному в работе уравнению состояния полимерного композита, армированного S2 стекловолокном, с экспериментальной ударной адиабатой показало, что они совпадают с расхождением менее 1 %.

*Ключевые слова:* уравнение состояния; энергия Гельмгольца; приближение Дебая; коэффициент Грюнайзена; уравнение Ми–Грюнайзена.

### Введение

Изучение поведения разнородных материалов в условиях динамической загрузки имеет жизненно-важное значение для многих областей применения композитов. Сложность построения уравнений состояния таких материалов заключается в том, что компоненты, входящие в состав композита, имеют разные механические и термодинамические свойства. Понимание реакции композитных материалов на ударно-волновые нагрузки имеет важное практическое значение в ситуациях, связанных со смягчением удара и взрыва, а также оптимизацией конструкций сооружений, имеющих дело с потенциальной опасностью динамического нагружения. В настоящее время множество различных материалов, начиная от металла, керамики и полимеров, как в монолитных, так и в композитных формах, используются для достижения поставленных целей. Наибольшее распространение получили стекловолоконные [1] и углерод–углеродные композиционные материалы [2].

В литературе имеется большой объем экспериментальных данных о распространении ударных волн в гетерогенных и композитных материалах [3–8]. Применение полимерных композитов, армированных S2 стекловолокном [9], в качестве важного компонента в системах, связанных со смягчением ударно-волновых нагрузок, требует углубленного и детального изучения поведения композиционного материала в широком диапазоне напряженных состояний. Для таких систем рассеяние, дисперсия и ослабление ударных волн играют решающую роль при определении тер-



момеханической реакции среды. В частности, нелинейное поведение полимерного композиционного материала, армированного S2 стекловолокном (GRP), можно отнести к сложной структуре материала, развитию многочисленных повреждений в виде обширного расслоения, сдвига волокон, разрушения волокна при растяжении, большого отклонения волокна, микроразрушения волокон и локального напряжения волокна.

Несмотря на большой объем экспериментального материала, многие особенности ударно-волнового нагружения композиционных материалов могут быть исследованы только с помощью математического моделирования. Для быстропротекающих процессов математическое моделирование очень часто оказывается единственным надежным источником получения достоверной информации. Для замыкания математических моделей актуальной остается проблема получения точных уравнений состояния [9].

Целью настоящей работы является разработка подхода к построению уравнения состояния S2 стеклопластиковых армированных полимерных композитов для описания экспериментов по ударно-волновому воздействию, представленных в работе [9], до уровней давления во фронте ударной волны 4,5 ГПа.

### Уравнения состояния полимерного композита, армированного S2 стекловолокном

В зависимости от набора экспериментальных данных построение полуэмпирического уравнения состояния связующего [10–13] и минералов [13–18] начинается с выбора термодинамического потенциала. В данной работе таким термодинамическим потенциалом является свободная энергия Гельмгольца  $F(V, T)$ , которая наиболее простым и естественным образом связана с моделью строения вещества [10–13] и автоматически разбивается на тепловую и «холодную» составляющие:

$$F = U + E_{0V} + kT \sum_{\alpha} \ln(1 - \exp(-\frac{h\omega_{\alpha}}{kT})), \quad E_{0V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} h\omega_{\alpha}. \quad (1)$$

Здесь  $U$ ,  $T$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $\omega_{\alpha}$ ,  $E_{0V}$  – энергия межчастичного взаимодействия между атомами композитного материала, температура тела, постоянная Планка, постоянная Больцмана, частоты нормальных колебаний, энергия нулевых колебаний соответственно. В формуле (1) суммирование производится по всем частотам нормальных колебаний молекул, входящих в структуру композитного материала. Определив выражение для функции свободной энергии Гельмгольца  $F(V, T)$ , путем дифференцирования по объему и температуре данного термодинамического потенциала находят все выражения для определения как измеряемых (давление), так и вычисляемых термодинамических характеристик (внутренняя энергия, энтропия) [19].

Не ограничивая общности, применим подход Дебая и перепишем колебательную часть свободной энергии Гельмгольца  $F(V, T)$  свободной энергии в выражение (1) следующим образом:

$$F = U + E_{0V} + 3NRT \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \xi \ln(1 - \exp(-\xi)) d\xi, \quad (2)$$

здесь  $R$ ,  $N$ ,  $\theta_D$  – универсальная газовая постоянная, поделенная на эффективную молекулярную массу композитного вещества  $\mu$ , число атомов, характеристическая температура Дебая.

Интегрируя по частям третье слагаемое в выражении для свободной энергии  $F(V, T)$ , определенное равенством (2), а также вводя функцию Дебая  $D(x)$  [20]

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \xi^3 \frac{d\xi}{\exp(\xi) - 1},$$

получим следующее выражение для свободной энергии Гельмгольца:

$$F = U + E_{0V} + 3NRT \left( \ln(1 - \exp(-x_D)) - \frac{D(x_D)}{3} \right), \quad (3)$$

где  $x_D = \theta_D / T$ .

Выражение для свободной энергии  $F(V, T)$  (3), позволяет определить давление  $P$  и энтропию  $S$  путем дифференцирования свободной энергии Гельмгольца по объему и температуре соответственно

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial U}{\partial V} - \frac{dE_{0V}}{dV} - 3NRTD(x_D) \frac{d(\ln \theta_D)}{d(\ln V)} \frac{1}{V} \quad (4)$$

$$S = -\left\{ 3NR \left[ \ln(1 - \exp(-x_D)) - \frac{D(x_D)}{3} \right] - 3NMRD(x_D) \right\}. \quad (5)$$

При выводе формулы (5) было использовано свойство функции Дебая

$$D(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1} - \frac{x}{3} D'(x),$$

где штрих обозначает дифференцирование по характеристической температуре  $x$ .

Уравнения (3) и (5) позволяют определить выражения для энергии  $E$  и теплоемкости при постоянном объеме  $C_V$ :

$$E = F + TS = U + E_{0V} + 3NRTD(x_D), \quad (6)$$

$$C_V = 3NR \left( 4D(x_D) - \frac{3x_D}{\exp(x_D) - 1} \right). \quad (7)$$

Вводя в рассмотрение коэффициент Грюнайзена по формуле

$$\gamma_D(V) = -\frac{d(\ln \theta_D)}{d(\ln V)},$$

выражение (4) можно записать в виде

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V} - \frac{dE_{0V}}{dV} + \frac{3NRT\gamma_D(V)D(x_D)}{V}. \quad (8)$$

Исходя из определения энергии нулевых колебаний и учитывая разделение частот, получаем выражения для функций  $E_{0V}$  и  $\frac{dE_{0V}}{dV}$ :

$$E_{0V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} h\omega_{\alpha} = \frac{9}{8} NR\theta_D(V); \quad \frac{dE_{0V}}{dV} = -\frac{9}{8} \frac{NR\gamma_D(V)\theta_D(V)}{V}. \quad (9)$$

Дифференцируя выражение (3) по объему  $V$  с учетом равенства (9), получим выражение для давления  $P$ :

$$P = \frac{3NRT\gamma_D(V)}{V} (D(x_D)) + P_X, \quad P_X = -\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{9}{8} NRT\gamma_D(V)x_D/V, \quad (10)$$

где второе выражение (10) определяет холодную составляющую давления композитного материала.

Объединяя давление нулевых колебаний с тепловой частью давления, преобразуем первое равенство (10) к следующему виду

$$P = 3NRT\gamma_D(V)\rho(D(x_D) + \frac{3}{8}x_D) + P_C, \quad P_C = -\frac{\partial U}{\partial V}. \quad (11)$$

Подставляя выражение для энергии нулевых колебаний в равенство (6), получим следующее выражение для определения внутренней энергии

$$E = U + \frac{9}{8} NR\theta_D(V) + 3NRTD(x_D).$$

Объединяя второй и третий члены правой части последнего уравнения, получим выражение для определения внутренней энергии

$$E = U + 3NRT(D(x_D) + \frac{3}{8}x_D). \quad (12)$$

Выражая второй член правой части уравнения (12) через внутреннюю энергию  $E$  и энергию меж частичного взаимодействия  $U$  и подставляя полученное равенство в уравнение (11), получим уравнение состояния в форме Ми–Грюнайзена

$$P - P_C = \gamma_D(V)\rho(E - U) \quad (13)$$

Для полимерного композиционного материала, армированного S2 стекловолокном, в работе [8] на основании экспериментальных данных была получена зависимость скорости ударной волны  $D$  от массовой скорости полимерного композиционного материала, армированного S2 стекловолокном, за ударной волной  $u$ :

$$D = a + bu = 3,228 + 0,996u, \quad (14)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные значения, определенные из экспериментов по ударно-волновому нагружению полимерного композиционного материала, армированного S2 стекловолокном. Выражение для скорости ударной волны (14) позволяет построить ударную адиабату полимерного композиционного материала, армированного S2 стекловолокном в виде:

$$P = \rho_0 a^2 (1-x)/(1-b(1-x))^2, \quad (15)$$

где  $x = \rho_0/\rho$ . Для уравнения Ми–Грюнайзена (13) построим ударную адиабату (адиабату Ренкина–Гюгонио). Соотношение, связывающее внутреннюю энергию и давление за фронтом сильной ударной волны, имеет следующий вид

$$E - E_0 = \frac{P}{2}(V_0 - V),$$

где  $E, P, V$  – значения внутренней энергии, давления и удельного объема за фронтом ударной волны соответственно,  $E_0, V_0$  значения внутренней энергии и удельного объема до фронта ударной волны.

Выражая внутреннюю энергию  $E$  из уравнения (13) и подставляя в последнее уравнение, получим уравнение для адиабаты Ренкина–Гюгонио

$$P = (P_C + \gamma_D(V)\rho(E_0 - U))/(1 - 0,5\gamma_D(V)\rho(V_0 - V)). \quad (16)$$

Выражение для коэффициента Грюнайзена в дальнейшем было принято в виде, полученном в работе [21, 22]

$$\gamma_D(V) = \gamma_0(\rho/\rho_0), \quad (17)$$

где  $\gamma_0$  – значение коэффициента Грюнайзена при начальной плотности  $\rho_0$  равной  $1,959 \text{ г/см}^3$  [8]. Для определения начального значения коэффициента Грюнайзена  $\gamma_0$  рассмотрим предельный случай, когда давление  $P$  стремится к бесконечности, и определим предельные значения плотности  $\rho_*$  или удельного объема  $V_*$ . Из уравнения (15) следует, что давление стремится к бесконечности, когда знаменатель равен нулю. Таким образом, из равенства

$$1 - b(1-x) = 0,$$

следует, что

$$x_* = (b-1)/b. \quad (18)$$

Из уравнения Ренкина–Гюгонио (16) можно определить начальное значения коэффициента Грюнайзена при условии стремления давления к бесконечности в точке  $x_*$ . Из равенства нулю знаменателя в уравнении (16)

$$1 - 0,5\gamma_0(1-x_*) = 0,$$

получаем, что начальное значение коэффициента Грюнайзена связано с параметром  $b$  экспериментальной ударной адиабаты следующим образом:

$$\gamma_0 = 2b. \quad (19)$$

Таким образом, уравнение Ренкина–Гюгонио можно представить в следующем виде:

$$P = (P_C + 2b\rho_0(E_0 - U))/(1 - b(1-x)). \quad (20)$$

Сравнение выражений для описания холодной составляющей давления и внутренней энергии, полученных в работе [23], с уравнением Винета [24], показало [23], что эти составляющие могут быть представлены следующим образом:

$$P_C = 3\rho_0 C_0^2 (x^{-(m+1)} - x^{-(n+1)}), \quad (21)$$

$$U = 3C_0^2 \left( \frac{1}{m} x^{-m} - \frac{1}{n} x^{-n} \right), \quad (22)$$

где  $C_0$  – объемная скорость звука, равная 2,6 км/с [8]. Из равенства нулю при  $x = 1$  экспериментальных (15) и расчетных (20) значений давления на ударной адиабате следует, что

$$E_0 = U_0 = 3C_0^2 \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right). \quad (23)$$

Для определения значений  $m$  и  $n$ , потребуем равенства первой и второй производных по  $x$  на экспериментальной (15) и расчетной (20) ударных адиабатах в точке  $x = 1$ . Получим систему из двух уравнений

$$\frac{\partial P_{ex}}{\partial x} = \frac{\partial P_{calc}}{\partial x} = \frac{\partial P_C}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 P_{ex}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_{calc}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_C}{\partial x^2}, \quad (25)$$

где  $P_{ex}$  и  $P_{calc}$  определяются из уравнений (15) и (20) соответственно.

Подставляя в уравнения (24) и (25) выражения для соответствующих производных давления на ударных адиабатах, определенных равенствами (15) и (20) по  $x$ , получим следующую систему уравнений для нахождения параметров  $m$  и  $n$ :

$$a^2 / (3C_0^2) = m - n, \quad (26)$$

$$(4a^2 b) / (3C_0^2) = (m+1)(m+2) - (n+1)(n+2). \quad (27)$$

В результате решения системы уравнений (26) и (27) были получены следующие значения:  $m = 0,7567$ ,  $n = 0,2429$ . В таблице приведены значения давлений на экспериментальной [8] и расчетной ударной адиабате (20).

Сравнение экспериментальных и рассчитанных значений давления

$\varepsilon$	$x$	$P_{ex}$ , ГПа	$P_{calc}$ , ГПа
0,01	0,99	0,2083	0,2083
0,02	0,98	0,4250	0,4252
0,03	0,97	0,6507	0,6512
0,04	0,96	0,8857	0,8869
0,05	0,95	1,1304	1,1377
0,06	0,94	1,3854	1,3895
0,07	0,93	1,6511	1,6576
0,08	0,92	1,9280	1,9380
0,09	0,91	2,2168	2,2312
0,10	0,90	2,5179	2,5387
0,11	0,89	2,8319	2,8580
0,15	0,85	4,2320	4,2588

Приведенные в таблице данные показывают, что расхождение экспериментальных и расчетных значений давления на ударных адиабатах менее 1 %.

## Выводы

1. Предложенный в данной работе подход позволил получить уравнение состояния, позволяющее с высокой точностью воспроизводить экспериментальные данные по ударно-волновому нагружению полимерного композиционного материала, армированного S2 стекловолокном.

2. Преставление уравнения состояния в форме Ми–Грюнайзена позволяет применять данную методику и к другим композитным материалам, для которых известны экспериментальные ударные адиабаты и объемная скорость звука при нормальных условиях.

## Литература

1. Neubrand, A. Gradient materials: an overview of a novel concept / A. Neubrand, J. Rodel // *Zeitschrift für Metallkunde*. – 1997. – Vol. 88, № 5. – P. 358–371.
2. Влияние структурных неоднородностей углерод-углеродных композиционных материалов тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов на разбросы обгарных форм / М.Г. Булыгин, Г.Ф. Костин, Н.Н. Тихонов и др. // *Конструкции из композиционных материалов*. – 2004. – № 3. – С. 3–15.
3. Barker, L.M. A Model for Stress Wave Propagation in Composite Materials / L.M. Barker // *J. Composite Materials*. – 1971. – Vol. 5, Iss. 2. – P. 140–162.
4. Holmes, B.S. Steady shock waves in composite materials / B.S. Holmes, F.K. Tsou // *J. Appl. Phys.* – 1972. – Vol. 43, Iss. 3. – P. 957–961.
5. Lundergan, C.D. Propagation of Stress Waves in a Laminated Plate Composite / C.D. Lundergan, D.S. Drumheller // *Journal of Applied Physics*. – 1971. – Vol. 42, Iss. 2. – P. 669 – 675.
6. Munson, D.E. Stress-wave propagation in Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-epoxy mixtures / D.E. Munson, R.R. Boade, K.W. Schuler // *J. Appl. Phys.* – 1978. – Vol. 49, Iss. 9. – P. 4797–4807.
7. Munson, D.E. Steady wave analysis of wave propagation in laminates and mechanical mixtures / D.E. Munson, K.W. Schuler // *Journal of Composite Materials*. – 1971. – Vol. 5, Iss. 3. – P. 286–304.
8. Oved, Y. Shock wave propagation in layered composites / Y. Oved, G.E. Luttwak, Z. Rosenberg // *Journal of Composite Materials*. – 1978. – Vol. 12, Iss. 1. – P. 84–96.
9. Shock compression behavior of a S2-glass fiber reinforced polymer Composite / L. Tsai, F. Yuan, V. Prakash, D.P. Dandekar // *J. Appl. Phys.* – 2009. – Vol. 105, Iss. 9. – P. 093526-1–093526-11.
10. Китайгородский, А.И. Молекулярные кристаллы / А.И. Китайгородский. – М: Наука, 1971. – 424 с.
11. Бушман, А.В. Модели уравнения состояния вещества / А.В. Бушман, В.Е. Фортов // *Успехи физических наук*. – 1983. – Т. 140, № 6. – С. 177–232.
12. Жарков, В.Н. Уравнения состояния при высоких температурах и давлениях / В.Н. Жарков, В.А. Калинин. – М.: Наука, 1968. – 311 с.
13. Olinger, B. The isothermal linear and volume compression of pentaerythritol tetranitrate (PETN) to 10 GPa (100 kbar) and the calculated shock compression / B. Olinger, P.M. Halleck, H.H. Cady // *J. Chem. Phys.* – 1975. – Vol. 62, Iss. 11. – P. 4480–4483.
14. Дорогокупец, П.И. Почти абсолютные уравнения состояния алмаза, AG, AL, AU, CU, MO, NB, PT, TA, W для квазигидростатических условий / П.И. Дорогокупец, Т.С. Соколова, Б.С. Данилов, К.Д. Литасов // *Геодинамика и тектонофизика*. – 2012. – Т. 3, № 2. – С. 129–166.
15. Уравнения состояния форстерита, вадслеита, рингвудита, акимотоита, MgSiO<sub>3</sub>-перовскита и постперовскита и фазовая диаграмма системы Mg<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> при давлениях до 130 ГПа / П.И. Дорогокупец, А.М. Дымшиц, Т.С. Соколова и др. // *Геология и геофизика*. – 2015. – Т. 56, № 1-2. – С. 224–246.
16. Дорогокупец, П.И. Внутренняя ангармоничность уравнениях состояния твердых веществ / П.И. Дорогокупец, А.Р. Оганов // *Доклады Академии наук*. – 2004. – Т. 394, № 6. – С. 804–807.
17. Dorogokupets, P.I. Thermodynamic functions at zero pressure and their relation to equations of state of minerals / P.I. Dorogokupets // *American Mineralogist*. – 2000. – Vol. 85, № 2. – С. 329–337.
18. Дорогокупец, П.И. Термическое уравнение состояния минералов / П.И. Дорогокупец, И.К. Карпов, В.В. Лашкевич // *Записки Всесоюзного минералогического общества*. – 1988. – Т. 117, № 3. – С. 334–344.
19. Базаров, И.П. Термодинамика / И.П. Базаров. – М.: Высшая школа, 1991. – 375 с.
20. Ландау, Л.Д. Статистическая физика. Ч. I / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1976. – 583 с.
21. Ковалев, Ю.М. Определение вида коэффициента Грюнайзена для молекулярных кристаллов / Ю.М. Ковалев // *Доклады Академии наук*. – 2005. – Т. 403, № 4. – С. 475–477.
22. Ковалев Ю.М. Функция Грюнайзена для твердых взрывчатых веществ / Ю.М. Ковалев // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. – 2005. – № 2. – С. 55–59.

23. Ковалев, Ю.М. Определение температурной зависимости изобарического коэффициента объемного расширения для некоторых молекулярных кристаллов нитросоединений / Ю.М. Ковалев // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, № 6. – С. 1653–1663.

24. A Universal Equation of State for Solids / P. Vinet, J.R. Smith, J. Ferrante, J.H. Rose // Journal of Physics C: Solid State Physics. – Vol. 19, no. 20. – L467–L473.

*Поступила в редакцию 1 июня 2020 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2020, vol. 12, no. 3, pp. 48–55*

---

DOI: 10.14529/mmph200307

## EQUATION OF STATE FOR S2 GLASS-FIBER REINFORCED POLYMER COMPOSITE

**Yu.M. Kovalev**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: yum\_kov@mail.ru*

This article presents the results of building a semi-empirical equation of state for S2 glass-fiber reinforced polymer composite. The equation of state includes the heat and cold elements. To describe the cold element of the equation of state, the substantiation has been performed for the choice of the form ( $m$  and  $n$ ) of the intermolecular potential adequately describing the structure of interactions in the composite material's components. To describe the heat element of this equation of state, the Helmholtz free energy has been determined with the Debye approximation. When building the equation of state, it has been shown that the equation of state for S2 glass-fiber reinforced polymer composite can be presented in the form of a Mie–Grüneisen equation. A type of dependency has been suggested between the Grüneisen coefficient and the volume, as well as an approach to determining the Grüneisen coefficient at the initial conditions of holding an experiment on the shock-wave exposure of the composite material. Experimental and calculated shock adiabats have been built for the for S2 glass-fiber reinforced polymer composite. The equality of the first and second derivatives of the experimental and theoretical shock adiabats in the point determining the initial state of the composite material has allowed to determine the coefficients being part of the structure ( $m$  and  $n$ ) of the intermolecular potential of the composite material's components. The comparing of the pressures calculated as per the work-determined equation of state for S2 glass-fiber reinforced polymer composite, with an experimental shock adiabat, has shown that those correspond with a difference of less than 1 %.

*Keywords: equation of state; Helmholtz energy; Debye approximation; Grüneisen coefficient; Mie–Grüneisen equation.*

### References

1. Neubrand, A., Rodel J. Gradient materials: an overview of a novel concept. *Zeitschrift für Metallkunde*, 1997, Vol. 88, no. 5, pp. 358–371.
2. Bulygin M.G., Kostin G.F., Tikhonov N.N., Dementyev O.N., Kovalev Yu. M., Yagafarov Sh. Sh. Structural Inhomogeneities Influence of Carbon-Carbon Composite Materials for Hypersonic Heat Shield of Aircraft on the Spreads in Ablating Forms. *Konstrukcii iz kompozicionnyh materialov* (Composite materials constructions), 2004, no. 3, pp. 3–15. (in Russ.).
3. Barker L.M. A Model for Stress Wave Propagation in Composite Materials. *J. Composite Materials*, 1971, Vol. 5, Iss. 2, pp. 140–162. DOI: 10.1177/002199837100500202
4. Holmes B.S., Tsou F.K. steady shock waves in composite materials. *J. Appl Phys.*, 1972, Vol. 43, Iss. 3, P. 957–961. DOI: 10.1063/1.1661314
5. Lundergan C.D., Drumheller D.S. Propagation of Stress Waves in a Laminated Plate Composite. *Journal of Applied Physics*, 1971, Vol. 42, Iss. 2, pp. 669–675. DOI: 10.1063/1.1660078

6. Munson D.E., Boade R.R., Schuler K.W. Stress-wave propagation in  $Al_2O_3$ -epoxy mixtures. *J. Appl. Phys.*, 1978, Vol. 49, Iss. 9, P. 4797–4807. DOI: 10.1063/1.325562
7. Munson D.E., Schuler K.W. Steady wave analysis of wave propagation in laminates and mechanical mixtures. *Journal of Composite Materials*, 1971, Vol. 5, Iss. 3, P. 286–304. DOI: 10.1177/002199837100500301
8. Oved Y., Luttwak G.E., Rosenberg Z. Shock wave propagation in layered composites. *J. Compos. Mater.*, 1978, Vol. 12, Iss. 1, P. 84–96. DOI: 10.1177/002199837801200107
9. Tsai L., Yuan F., Prakash V., Dandekar D.P. Shock compression behavior of a S2-glass fiber reinforced polymer Composite. *J. Appl. Phys.*, 2009, Vol. 105, Iss. 9, pp. 093526-1–093526-11. DOI: 10.1063/1.3124622
10. Kitaygorodskiy A.I. *Molekulyarnye kristally* (Molecular crystals). Moscow, Nauka Publ., 1971, 424 p. (in Russ.).
11. Bushman A.V., Fortov V.E. Model equations of state. *Sov. Phys. Usp.*, 1983, Vol. 26, no. 6, pp. 465–496. DOI: 10.1070/PU1983v026n06ABEH004419
12. Zharkov V.N., Kalinin V.A. *Uravneniya sostoyaniya pri vysokikh temperaturakh i davleniyakh* (Equations of state at high temperatures and pressures). Moscow, Nauka Publ., 1968, 311 p.
13. Olinger B., Halleck P.M., Cady H.H. The isothermal linear and volume compression of pentaerythritol tetranitrate (PETN) to 10 GPa (100 kbar) and the calculated shock compression. *J. Chem. Phys.*, 1975, Vol. 62, Iss. 11, pp. 4480–4483. DOI: 10.1063/1.430355
14. Dorogokupets P.I., Sokolova T.S., Danilov B.S., Litasov K.D. Near-Absolute Equations of State of Diamond, Ag, Al, Au, Cu, Mo, Nb, Pt, Ta, AND W FOR Quasi-Hydrostatic Conditions. *Geodynamics & Tectonophysics*, 2012, Vol. 3, no. 2, pp. 129–166. DOI: 10.5800/GT-2012-3-2-0067
15. Dorogokupets P.I., Dymshits A.M., Sokolova T.S., Danilov B.S., Litasov K.D. The Equations of State of Forsterite, Wadsleyite, Ringwoodite, Akimotoite,  $MgSiO_3$ -Perovskite, and Postperovskite and Phase Diagram For The  $Mg_2SiO_4$  System at Pressures of up to 130 GPa. *Russian Geology and Geophysics*, 2015, Vol. 56, Iss. 1–2, pp. 172–189. DOI: 10.1016/j.rgg.2015.01.011
16. Dorogokupets P.I., Oganov A.R. Intrinsic Anharmonicity in Equations of State of Solids and Minerals. *Doklady Earth Sciences*, 2004, Vol. 395, no. 2, pp. 238–241.
17. Dorogokupets, P.I. Thermodynamic functions at zero pressure and their relation to equations of state of minerals. *American Mineralogist*, 2000, Vol. 85, no. 2, pp. 329–337. DOI: 10.2138/am-2000-2-311
18. Dorogokupets P.I., Karpov I.K., Lashkevich V.V. Termicheskoe uravnenie sostoyaniya mineralov (Thermal equation of state for minerals). *Zapiski Vsesoyuznogo mineralogicheskogo obshchestva*, 1988, no. 3, pp. 334–344. (in Russ.).
19. Bazarov I.P. *Termodinamika* (Thermodynamics). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991, 375 p. (in Russ.).
20. Landau L.D., Lifshits E.M. *Statisticheskaya fizika. Ch. I* (Statistical Physics. Part I). Moscow, Nauka Publ., 1976, 584 p.
21. Kovalev Yu. M. Determination of Form of the Gruneisen Coefficient for Molecular Crystals. *Doklady Akademii nauk*, 2005, Vol. 403, no. 4, pp. 475–477. (in Russ.).
22. Kovalev Yu.M. Gruneisen Function for Solid Explosives. *VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc.*, 2005, no. 2, pp. 55–59. (in Russ.).
23. Kovalev Y.M. Determination of the Temperature Dependence of the Isobaric Volumetric Expansion Coefficient for Certain Molecular Crystals of Nitro Compounds. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, Vol. 91, no. 6, pp. 1573–1582. DOI: 10.1007/s10891-018-1895-8
24. Vinet P., Smith J.R., Ferrante J., Rose J.H. A Universal Equation of State for Solids. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, Vol. 19, no. 20, L467–L473. DOI: 10.1088/0022-3719/19/20/001

Received June 1, 2020

# Персоналии

## АХМАДЖОН КУШАКОВИЧ УРИНОВ. К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

19 января 2020 года исполнилось 70 лет со дня рождения известного учёному-математику, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному профессору Ферганского государственного университета Ахмаджону Кушаковичу Уринову.

Научная школа в Узбекистане по вырождающимся дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям смешанного и смешанно-составного типов связана с именами двух академиков АН Узбекистана М.С. Салахитдинова и Т.Дж. Джураева. Они были учениками выдающегося математика двадцатого века, члена-корреспондента АН СССР А.В. Бицадзе. Академики М.С. Салахитдинов и Т.Дж. Джураев в Узбекистане подготовили целую плеяду первоклассных ученых математиков. Одним из первых и ярких представителей этой математической школы является Ахмаджон Кушакович Уринов.

А.К. Уринов родился 19 января 1950 года в сельской местности «Туда», в Риштанском районе Ферганской области в обычной семье сельских тружеников. Его детство прошло, как и у многих других обычных деревенских детей того времени. Учился в обычной сельской школе, где особенно в старших классах он проявлял особый интерес к математическим дисциплинам. Ему также легко поддавались уроки физики и химии. В 1966 году он успешно заканчивает среднюю общеобразовательную школу и поступает без колебания на математический факультет Ферганского государственного педагогического института (ныне Ферганский государственный университет). Математика для него была волшебным миром, куда ему захотелось войти и остаться там навсегда. В те времена студенты два раза в год мобилизовались к сельскохозяйственным работам. Несмотря на это, Ахмаджон Кушакович находит в себе силы и дополнительное время для того, чтобы хорошо освоить учебную программу по всем разделам математики. В 1970 году успешно заканчивает институт. Заметив у него способность к математике и склонность к научной работе, профессор Дж.Х. Каримов, профессор К.Б. Бойкузиев и доцент Т. Абдурахмонов предложили молодому выпускнику остаться на факультете и работать преподавателем на одной из существующих тогда математических кафедр.

В 1978 году А.К. Уринов с благородной целью заниматься научной работой отправляется в Ташкент на научную стажировку в отдел дифференциальных уравнений института математики имени В.И. Романовского АН Уз.ССР. В течение двух лет он освоил азы теории дифференциальных уравнений смешанного типа. В 1980 году его научный руководитель академик М.С. Салахитдинов предложит ему остаться в аспирантуре при данном научно-исследовательском институте. В 1984 году Ахмаджон Кушакович возвращается на работу в Фергану в родной институт уже с дипломом кандидата физико-математических наук. Работу начал с должности старшего преподавателя кафедры математического анализа. С этого времени и поныне он не менял место работы.

В 1990 году Ферганский государственный педагогический институт преобразовался в Ферганский государственный университет (ФерГУ). ФерГУ тогда являлся четвертым университетом в Советском Узбекистане. В 1993 году Ахмаджон Кушакович Уринов успешно защищает докторскую диссертацию и получает соответствующую ученую степень. В Фергане до 2019 года он был и оставался единственным доктором наук по научной специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, пока его ученик Ш.Т. Каримов не защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

В 1993 году А.К. Уринов выступает инициатором создания кафедры дифференциальных уравнений в ФерГУ (ныне кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений). До 1997 года он возглавлял эту кафедру. Но, Ахмаджон Кушакович не покинул эту кафедру. Он и по настоящее время работает профессором этой кафедры математического анализа и дифферен-





циальных уравнений. Несмотря на большую научную карьеру, он стремительно продвигается и по административной лестнице. В 1997–1999 годах А.К. Уринов проработал проректором по учебной деятельности ФерГУ, а в 1999–2004 годах проявил свои организаторские качества на должности ректора ФерГУ. Во время пребывания на посту ректора ФерГУ А.К. Уринов внес значительный вклад в развитие науки, укрепление его кадрового потенциала, материально-технической базы университета и стремился придать кампусу университета современный облик, соответствующий международным стандартам.

А.К. Уринов заслуженно пользуется огромным признанием среди математиков как автор глубоких фундаментальных исследований в области теории краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящее время подготовка научных кадров в Фергане и все научные достижения по теории дифференциальных уравнений города связаны с его именем.

На формирование молодого А.К. Уринова как ученого повлиял его научный руководитель академик АН Узб. ССР М.С. Салахитдинов. В аспирантские годы он исследовал ряд новых краевых задач для уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения. Результаты этих исследований стали основой его кандидатской диссертации. Ахмаджон Кушакович в 1983 году успешно защитил кандидатскую диссертацию в институте математики имени В.И. Романовского в Ташкенте.

Стержневым направлением исследований А.К. Уринова стало введение новых операторов специального типа, содержащих функцию Бесселя в ядре. Он изучил качественные свойства этих операторов и их композиций с операторами интегро-дифференцирования дробного порядка. Эти результаты были применены при исследовании нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа. Следует отметить, что такие операторы специального типа позволили изучить новый вид нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных со спектральным параметром.

Наряду с изучением дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа в односвязных областях А.К. Уринов исследовал краевые задачи для этих уравнений и в двусвязных областях. В этих областях им были поставлены и исследованы новые нелокальные краевые задачи. Его работы по нелокальным краевым задачам для линейных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа со спектральным параметром содержат глубокий математический смысл. Были найдены новые методы доказательства единственности решения внутренней краевой задачи со смещением, однозначной разрешимости нелокальных граничных задач в двусвязной области и определения отсутствия дискретных спектров в конкретных секторах плоскости спектрального параметра. Результаты этих исследований составили содержание его докторской диссертации, которая блестяще была защищена им в 1993 году в том же институте математики имени В.И. Романовского, где ранее он защитил кандидатскую диссертацию.

В последующем А.К. Уриновым были развиты постановка и исследование новых спектральных задач для дифференциальных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с особенностями в коэффициентах, найдены собственные значения и собственные функции этих задач, изучена полнота систем собственных функций, получены весомые результаты по исследованию дифференциальных уравнений с вырождением типа и порядка, а также вырождающихся дифференциальных уравнений второго рода. В частности, полученная им формула общего решения для одного класса вырождающегося дифференциального уравнения второго рода с успехом применяется в работе других математиков при постановке и исследовании новых начальных и краевых задач.

В последние годы Ахмаджоном Кушаковичем разрабатывается еще одно направление, заключающееся в исследовании уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу и их обобщений. Полученные им результаты по этому направлению применяются при постановке и исследовании локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и парабола-гиперболического типов с сингулярными коэффициентами. Среди математиков вызвали большой интерес его исследования по изучению задач типа Франкля для таких уравнений с негладкой линией вырождения.

В исследовательской деятельности А.К. Уринова особое место занимает исследование нелокальных задач с интегральным условием для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных смешанного парабола-гиперболического и эллиптико-

## Персоналии

---

параболического типов. Им поставлены и разработаны методы исследования ряд новых задач с интегральным условием в прямоугольных областях. Для дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами второго порядка и со спектральным параметром найдены фундаментальные решения в виде гипергеометрических рядов.

Большой интерес представляют исследования Ахмаджона Кушаковича и его учеников по постановке и исследованию локальных и нелокальных задач для линейных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами эллиптического и смешанного типов в призматических, цилиндрических областях и частях шара, а также по применению теории операторов преобразования и операторов интегро-дифференцирования дробного порядка, в частности обобщённого оператора Эрдейи–Кобера, к решению начальных и граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с оператором Бесселя.

Наш рассказ о научной работе А.К. Уринова мы попытаемся тем, что он является автором более 300 научных и научно-методических работ, опубликованных в национальных и международных научных журналах. Свои научные результаты он оформил в виде 6 монографий и их издавал в авторитетных издательствах Ташкента. Резюмируя свой полувековой научно-педагогический опыт, А.К. Уринов написал свыше 20 учебно-методических пособий и 10 учебных пособий для студентов механико-математических факультетов университетов. Ахмаджан Кушакович является организатором науки и наставником молодого поколения математиков. В 1993 году в Ферганском государственном университете он организовал научный семинар «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и смежных областей математики». Сегодня под его руководством работает «Объединённый научный семинар математиков Ферганской долины», который несомненно вносит огромный вклад в развитие математической науки.

А.К. Уринов ведёт большую научно-педагогическую работу. Много времени и сил он вкладывает в воспитание молодого поколения математиков. Среди его учеников Ш.Т. Каримов стал доктором физико-математических наук и 9 стали кандидатами физико-математических наук. Сегодня один ученик К.Т. Каримов подготовил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а другой ученик А.Б. Окбоев подготовил диссертацию на соискание ученой степени доктора философии по дифференциальным уравнениям. В настоящее время ученики А.К. Уринова стали депутатами Законодательной палаты Олий Мажлис Республики Узбекистан, проректорами вузов, деканами факультетов, заведующими кафедрами и многие стали именными стипендиатами.

Ахмаджон Кушакович Уринов принимает активное участие и в общественной жизни Узбекистана. В 1994–1996, 2003–2004 годах А.К. Уринов являлся членом специального совета по присуждению ученых степеней кандидата и доктора физико-математических наук при институте математики имени В.И. Романовского АН Узбекистана, в 2002–2005 годах он являлся членом Консультативного совета узбекского журнала «Наука и жизнь», был председателем, заместителем председателя и членом организационного комитета ряда международных и республиканских научных конференций, побывал на посту председателя научно-координационного совета Ферганского научного центра Академии Наук Республики Узбекистан (2002 г.), в 1999–2004 годах он избрался депутатом Совета народных депутатов города Ферганы. А.К. Уринов был руководителем делегации руководителей организаций среднего специального образования Узбекистана во время поездки в Германию (25.06.2000–04.07.2000).

Его коллеги по университету и по научной деятельности знают Ахмаджона Кушаковича Уринова как замечательного учёного, настойчивого педагога–наставника молодого поколения, терпеливым и целеустремлённым исследователем и добрым простым человеком.

В знак признания его достижений в области науки имя А.К. Уринова включено в список 2000 мировых ученых-интеллектуалов XXI века (лист опубликован в Англии).

Многогранная жизнь настоящего ученого является важным критерием служения науке и народу. В какой должности бы он не побывал, скромность, открытость к диалогу и доброжелательное отношение к людям снискали к А.К. Уринову глубокое уважение среди сотрудников ФерГУ. Ахмаджон Кушакович свой 70-летний юбилей встречает в расцвете творческих сил. От всей души желаем ему крепкого здоровья, счастья и новых успехов в его научной деятельности!

**О.С. Зикиров, Б.И. Исломов, Ш.Т. Каримов, Н. Равшанов, Т.К. Юлдашев**

*Поступила в редакцию 17 января 2020 г.*

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 12, № 3  
2020

16+

Редактор *Н.Н. Егорьева*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 17.07.2020. Дата выхода в свет 24.07.2020.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 6,97.

Тираж 500 экз. Заказ 229/231. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.