

ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2020
Т. 12, № 4**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

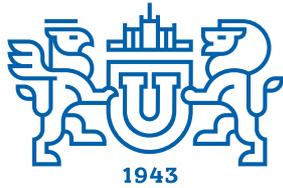
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

SERIES

2020

Vol. 12, no. 4

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany
G.L. Brovko, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
I.V. Zalyapin, University of Nevada, Reno, United States of America
S.V. Zelik, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
L.V. Utkin, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

ЗАЙЦЕВ М.Л., АККЕРМАН В.Б. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде.....	5
ЗАЛЯПИН В.И., ШАЛГИН В.С. Метод интегральных уравнений для векторной обратной задачи	19
КАУА U. Cauchy Fractional Derivative	28
РОЙТЕНБЕРГ В.Ш. О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, не имеющих особых точек.....	33
САГАДЕЕВА М.А. Построение наблюдения в модели Шестакова–Свиридюка при его искажении многомерным «белым шумом».....	41
ШАБЛОВСКИЙ О.Н. Динамика неустойчивых решений волнового уравнения с источниками.....	51

Физика

ИСТОМИНА А.Ю., ОСИННИКОВ Е.В. Разработка методики послойного радиометрического анализа методом электролитического снятия слоев для определения параметров зернограничной диффузии кобальта в поликристаллическом никеле.....	62
--	----

Персоналии

Аркадий Васильевич Геренштейн. К 80-летию со дня рождения.....	70
--	----

Информация

Николай Васильевич Широбоков. Памяти товарища	73
---	----

CONTENTS

Mathematics

ZAYTSEV M.L., AKKERMAN V.B. Algorithm for Finding Explicit Solutions of Overdetermined Systems of Differential Equations	5
ZALIAPIN V.I., SHALGIN V.S. Integral Equations Method for a Vector Inverse Problem	19
KAYA U. Cauchy Fractional Derivative	28
ROITENBERG V.Sh. On Polynomial Differential Equations of the Second Order on a Circle without Singular Points	33
SAGADEEVA M.A. Construction an Observation in the Shestakov–Sviridyuk Model in Terms of Multidimensional “White Noise” Distortion	41
SHABLOVSKII O.N. Dynamics of Unstable Solutions for the Wave Equation with Sources	51

Physics

ISTOMINA A.Yu., OSINNIKOV E.V. Analysis using Electrolytic Layer Stripping to Determine the Parameters of Grain-Boundary Diffusion of Cobalt in Polycrystalline Nickel	62
--	----

Personalia

To the 80th Birthday Anniversary of Arkady Gerenshtein	70
--	----

Information

Nikolay Shirobokov. In Memory of a Friend	73
---	----

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЯВНОМ ВИДЕ

М.Л. Зайцев¹, В.Б. Аккерман²

¹ г. Москва, Российская Федерация

² Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, США

E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Авторами был предложен ранее общий способ нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП, где число уравнений больше числа неизвестных функций. В данной работе мы предлагаем алгоритм нахождения решений у переопределенных систем УрЧП, где применяем простой в описании способ нахождения явного решения у переопределенных алгебраических (полиномиальных) уравнений. С помощью данного алгоритма решение некоторых переопределенных систем УрЧП может быть получено в явном виде. Основная сложность этого алгоритма – это огромное количество возникающих полиномиальных уравнений, которых нужно исследовать и решить численно или в явном виде. Например, переопределенные уравнения гидродинамики, полученные ранее авторами, дают минимум 10 миллионов таких уравнений. Однако, если их решить в явном виде, то можно выписать решение уравнений гидродинамики в общем виде, что представляет большой научный интерес.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений; УрЧП; размерность дифференциальных уравнений; алгебраические (полиномиальные) уравнения; символьные вычисления.

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях [1, 2]. Авторами был предложен общий способ снижения размерности для произвольных систем дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП), который позволяет свести системы УрЧП в области к системам на поверхности [3–6]. С точки зрения численных методов редукция выгодна в том смысле, что не надо решать дифференциальные уравнения во всем пространстве. Требуется исходную систему УрЧП дополнить уравнениями связи и произвести преобразования. На основе этой идеи в работах авторов [5, 6] также был предложен метод нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП, где число уравнений больше числа неизвестных функций, которые очень важны для численных расчетов. В этом методе нахождение решений сводится к решению систем обыкновенных неявных уравнений. В статьях авторов [3–7] приводятся переопределенные уравнения гидродинамики, а также способы переопределения любых систем УрЧП. В данной работе мы предлагаем алгоритм нахождения решений у переопределенных систем УрЧП, где применяем способ нахождения явного решения у переопределенных алгебраических уравнений. С помощью данного алгоритма решение некоторых переопределенных систем УрЧП может быть получено в явном виде.

1. Описание метода

Требуется найти решения у переопределенной системы из $p + n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v(x)$, $v = 1 \dots p$, $x = (x_1, \dots, x_m)$

$$H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) = 0, \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots (p + n), \quad (1)$$

где $H_k(\partial S_1/\partial x \dots \partial S_p/\partial x, S_1 \dots S_p, x)$, $k=1 \dots (p+n)$ достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_v/\partial x$, S_v , $x=(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v=1 \dots p$. Применим метод, изложенный в статьях [5, 6]. Мы рассматриваем следующую систему уравнений вида

$$P_\alpha(\dots Q_\beta, \dots x) = \frac{\partial^{(i_1+\dots+i_m)}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \left[H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_p, x \right) \right] = 0, \quad v=1 \dots p, \quad k=1 \dots (p+n) \quad (2)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}}, \quad v=1 \dots p. \quad (3)$$

Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_m) \in \{1, 2, \dots, N_H\}$, $\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_m) \in \{1, 2, \dots, N_S\}$ функции от индексов (мульти-индексов) такие, что

$$Q_{\beta(v, 0, \dots, 0)} = S_v, \quad v=1 \dots p, \quad (4)$$

$$P_{\alpha(k, 0, \dots, 0)}(\dots Q_\beta, \dots x) = H_k(Q_{\beta(v, 1, \dots, 0)}, \dots, Q_{\beta(v, 0, \dots, 1)}, \dots, Q_{\beta(v, 0, \dots, 0)}, \dots x), \quad k=1 \dots (p+n), \quad (5)$$

$$i_1 = 0 \dots (N_1 - 1), \quad i_2 = 0 \dots (N_2 - 1), \quad \dots \quad i_m = 0 \dots (N_m - 1), \quad (6)$$

$$j_1 = 0 \dots N_1, \quad j_2 = 0 \dots N_2, \quad \dots \quad j_m = 0 \dots N_m. \quad (7)$$

Имеем здесь также

$$N_H = (p+n)N_1N_2 \dots N_m, \quad (8)$$

$$N_S = p \cdot (N_1+1)(N_2+1) \dots (N_m+1). \quad (9)$$

Определим конкретный вид функций $\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_m)$ и $\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_m)$ по формулам

$$\alpha = \alpha(k, i_1, \dots, i_m) = k + i_1(p+n) + i_2(p+n)N_1 + \dots + i_m(p+n)N_1 \dots N_{m-1}$$

$$\beta = \beta(v, j_1, \dots, j_m) = v + j_1p + j_2p(N_1+1) + \dots + j_mp(N_1+1) \dots (N_{m-1}+1).$$

В частности, $\alpha = \alpha(k, 0, \dots, 0) = k$, $\beta = \beta(v, 0, \dots, 0) = v$,

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha(k, (N_1-1), \dots, (N_m-1)) &= k + (N_1-1)(p+n) + (N_2-1)(p+n)N_1 + \dots + (N_m-1)(p+n)N_1 \dots N_{m-1} = \\ &= k + (p+n)((N_1-1) + (N_2-1)N_1 + \dots + (N_m-1)N_1 \dots N_{m-1}) = k + (p+n)(N_1 \dots N_m - 1) = \\ &= N_H + k - (p+n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta = \beta(v, N_1, \dots, N_m) &= v + N_1p + N_2p(N_1+1) + \dots + N_mp(N_1+1) \dots (N_{m-1}+1) = \\ &= v + p((N_1+1) - 1 + (N_2+1-1)(N_1+1) + \dots + (N_m+1-1)(N_1+1) \dots (N_{m-1}+1)) = \\ &= v + p((N_1+1) \dots (N_m+1) - 1) = N_S + v - p. \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу

$$A_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta} \right), \quad \alpha=1 \dots N_H, \quad \beta=1 \dots N_S. \quad (10)$$

Пусть ее ранг равен N_S^{real} количеству неизвестных Q_β , реально присутствующих в уравнениях (2). Можно показать, что

$$N_S^{real} \leq N_H \frac{p}{(p+n)} \left(1 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{N_l} \right). \quad (11)$$

Действительно, в уравнениях (2), в целом, присутствуют только неизвестные вида:

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}}, \quad v=1 \dots p, \quad j_1 = 0 \dots (N_1-1), \quad j_2 = 0 \dots (N_2-1), \quad \dots \quad j_m = 0 \dots (N_m-1)$$

и

$$Q_{\beta} = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_s^{N_s} \dots \partial x_m^{j_m}}, \quad v=1\dots p, \quad s=1\dots m, \quad j_1=0\dots(N_1-1), \dots, j_{s-1}=0\dots(N_{s-1}-1),$$

$$j_{s+1}=0\dots(N_{s+1}-1) \dots j_m=0\dots(N_m-1).$$

Число этих переменных равно $pN_1N_2 \dots N_m \left(1 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{N_l}\right) = N_H \frac{p}{(p+n)} \left(1 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{N_l}\right)$. В целом, неизвестных (3) будет не более этого числа.

Рассмотрим **расширенную** переопределенную систему неявных уравнений вида

$$P_{\alpha^*} \left(\dots Q_{\beta^*}, \dots x \right) = \frac{\partial^{(i_1+\dots+i_m)}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \left[H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_p}{\partial x}, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x \right) \right] = 0, \quad (12)$$

$$v=1\dots p, \quad k=1\dots(p+n)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_{\beta^*} = \frac{\partial^{(j_1+\dots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}}, \quad v=1\dots p. \quad (13)$$

Но функции от мульти-индексов $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \dots, i_m) \in \{1, 2, \dots, N_H^w\}$, $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \dots, j_m) \in \{1, 2, \dots, N_S^w\}$ в отличие от (6), (7) пусть определяются из условий:

$$i_1=0\dots N_1, \quad i_2=0\dots N_2, \quad \dots, \quad i_m=0\dots N_m, \quad k=1\dots(p+n), \quad (14)$$

$$j_1=0\dots(N_1+1), \quad j_2=0\dots(N_2+1), \quad \dots, \quad j_m=0\dots(N_m+1), \quad v=1\dots p. \quad (15)$$

Определим конкретный вид функций $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \dots, i_m)$ и $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \dots, j_m)$ по формулам

$$\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \dots, i_m) = k + i_1(p+n) + i_2(p+n)(N_1+1) + \dots + i_m(p+n)(N_1+1) \dots (N_{m-1}+1),$$

$$\beta^* = \beta^*(v, j_1, \dots, j_m) = v + j_1p + j_2p(N_1+2) + \dots + j_m p(N_1+2) \dots (N_{m-1}+2).$$

Имеем здесь также

$$N_H^w = (p+n)(N_1+1)(N_2+1) \dots (N_m+1), \quad (16)$$

$$N_S^w = p \cdot (N_1+2)(N_2+2) \dots (N_m+2). \quad (17)$$

В частности, $\alpha^* = \alpha^*(k, 0, \dots, 0) = k$, $\beta^* = \beta^*(v, 0, \dots, 0) = v$, $\alpha^* = \alpha^*(k, N_1, \dots, N_m) = k + N_H^w - (p+n)$, $\beta^* = \beta^*(v, (N_1+1), \dots, (N_m+1)) = v + N_S^w - p$. Дифференцируя выражение (12) по переменной x_s , $s=1\dots m$, находим, что

$$P_{\tilde{\alpha}} \left(\dots Q_{\tilde{\beta}}, \dots x \right) = \sum_{v=1}^p \sum_{j_1=0}^{N_1+1} \sum_{j_2=0}^{N_2+1} \dots \sum_{j_m=0}^{N_m+1} \frac{\partial P_{\alpha^*}}{\partial Q_{\beta^*}} Q_{\tilde{\beta}} + \frac{\partial P_{\alpha^*} \left(\dots Q_{\tilde{\beta}}, \dots x \right)}{\partial x_s} = 0, \quad (18)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \alpha^*(k, i_1, \dots, (i_s+1) \dots i_m), \quad \tilde{\beta} = \beta^*(v, j_1, \dots, (j_s+1) \dots j_m), \quad s=1\dots m.$$

Здесь берутся индексы, что $i_s \leq N_s - 1$, $j_s \leq N_s$.

Любое из уравнений (12) (а также (18)) с индексом $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \dots, i_m)$ содержит неизвестные вида (13) с индексами $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \dots, j_m)$, где $0 \leq j_1 \leq i_1 + 1$, \dots $0 \leq j_m \leq i_m + 1$ и $0 \leq j_1 + \dots + j_m \leq i_1 + \dots + i_m + 1$. Очевидно,

$$\frac{\partial P_{\alpha^*} \left(k, i_1, \dots, i_s=(N_s-1), \dots, i_m \right)}{\partial Q_{\beta^*} \left(v, j_1, \dots, j_s=N_s+1, \dots, j_m \right)} = 0, \quad (19)$$

т. е. слагаемые с индексом $\tilde{\beta} = \beta^*(v, j_1, \dots, (j_s+1) = N_s + 2, \dots, j_m)$ отсутствуют, следовательно, рекуррентное соотношение (18) корректно.

Способ решения.

1. Выбираем N_1, \dots, N_m так, чтобы $N_H \geq N_S$ (см. (8), (9)). Мы имеем следующие оценки [5, 6]:

$$N_H \geq (p+n)(mp/n)^m, \quad (20)$$

где минимум реализуется при $N_1 \approx N_2 \approx \dots \approx N_m \approx mp/n$.

2. Определяем рекуррентно из (18) неявные уравнения (2) и (12), пользуясь (4), (5).

3. Составляем матрицу (10) из уравнений (2).

4. Решаем уравнения (12).

5. Подставляем их решения в матрицу (10).

6. Если ее ранг равен количеству неизвестных в уравнениях (2), то по формуле (4) находим решение исходной переопределенной системы (1).

Аналитические примеры использования метода приведены в работах [5, 6].

Систему уравнений (12), если она достаточно «хорошая», можно несколько упростить. Рассмотрим переопределенную систему из $p+n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v(x)$, $v=1\dots p$, $x=(x_1, \dots, x_m)$ (1). Предположим, что $n \geq (m-1)p$. В случае $m=1$ (ОДУ) это выполняется всегда. Рассмотрим какие-нибудь $p+n$ уравнений с мульти-индексом $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \dots, i_m)$ из системы уравнений (12) с фиксированными индексами (i_1, \dots, i_m) , но $k=1\dots(p+n)$. По формуле (18) они могут быть записаны в виде

$$P_{\alpha^*}(\dots Q_{\beta^*}, \dots x) = \sum_{v=1}^p \sum_{s=1}^m \frac{\partial P_{\tilde{\alpha}_0}}{\partial Q_{\beta_s^0}} Q_{\tilde{\beta}_s} + \dots = 0, \quad (21)$$

где $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \dots, i_m)$, $\tilde{\alpha}_0 = \alpha^*(k, 0, \dots, 0)$, $\beta_s^0 = \beta^*\left(v, \underbrace{0, \dots, 1}_{s}, \dots, 0\right)$, $\tilde{\beta}_s = \beta^*(v, i_1, \dots, (i_s+1), \dots, i_m)$,

$s=1\dots m$, $v=1\dots p$, $k=1\dots(p+n)$.

Выражения $P_{\alpha^*}(\dots Q_{\beta^*}, \dots x)$ содержат неизвестные Q_{β^*} , у которых $0 \leq j_1 + \dots + j_m \leq i_1 + \dots + i_m + 1$ и $0 \leq j_1 \leq i_1 + 1, \dots, 0 \leq j_m \leq i_m + 1$. Неизвестные Q_{β^*} , у которых $j_1 + \dots + j_m = i_1 + \dots + i_m + 1$, входят в уравнения (21) линейно. Очевидно, их количество равно mp штук. Следовательно, если соответствующий определитель не равен нулю, все они могут быть выражены в явном виде из системы $(p+n) \geq mp$ уравнений (21), которая относительно них линейна.

Таким образом можно утверждать, что в нашем случае любое неизвестное Q_{β^*} , где $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \dots, j_m)$, $v=1\dots p$, выражается явно через неизвестные Q_{β^0} , где $\beta^0 = \beta^0(v, j_1^0, \dots, j_m^0)$, $v=1\dots p$ и $0 \leq j_1^0 + \dots + j_m^0 < j_1 + \dots + j_m$, $0 \leq j_1^0 \leq j_1 + 1, \dots, 0 \leq j_m^0 \leq j_m + 1$, а, следовательно, и через $Q_{\beta_s^0}$, где $\beta_s^0 = \beta^*\left(v, \underbrace{0, \dots, 1}_{s}, \dots, 0\right)$ и $v=1\dots p$, $s=1\dots m$, или $Q_{\beta^*(v, 0, \dots, 0)} = S_v$, $v=1\dots p$. В результате получаем вместо (12) переопределенную систему неявных уравнений относительно $Q_{\beta^*(v, 0, \dots, 0)} = S_v$, $v=1\dots p$.

2. Способ решения систем переопределенных алгебраических уравнений путем их редукции

Уравнения (2) и (12) относительно неизвестных Q_{β} , $j_1 + \dots + j_m \geq 2$, $v=1\dots p$ являются алгебраическим. Существуют различные методы решения полиномиальных уравнений. В частности, распространен далеко нетривиальный алгоритм Бухбергера [8]. К решению систем переопределенных алгебраических уравнений в нашем случае можно применить следующий простой в описании метод.

Рассмотрим переопределенную систему из двух многочленов порядка n

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{i=0}^n b_i x^i = 0, \quad (23)$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \dots n$, $a_n \neq 0$. Из (22) следует, что

$$a_n x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad x^n = \frac{1}{a_n} \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right). \quad (24)$$

Подставим (24) в (23). Имеем

$$b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0, \quad b_n \frac{1}{a_n} \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0. \quad (25)$$

В результате получим многочлен вида:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = 0, \quad (26)$$

где $c_j = b_j - \frac{b_n}{a_n} a_j$, $j = 0 \dots (n-1)$. Пусть

$$c_{n-1} \neq 0. \quad (27)$$

Умножим обе части (26) на x и подставим вместо x^n его выражение из (24):

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{i+1} = 0, \quad (28)$$

$$c_{n-1} x^n + \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^{i+1} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{c_{n-1}}{a_n} \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^{i+1} = 0. \quad (30)$$

В результате получим многочлен вида:

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i x^i = 0, \quad (31)$$

где $d_j = c_{j-1} - \frac{c_{n-1}}{a_n} a_j$, $j = 0 \dots (n-1)$, $c_{-1} = 0$.

Таким образом, мы получили два многочлена (26) и (31) порядка не более $n-1$. Покажем, что множества решений системы уравнений (22), (23) и системы (26), (31) совпадают при условии (27). Мы показали, что из (22), (23) следует (26), (31). Докажем обратное. Пусть x некоторое решение (26), (31). Умножим обе части (26) на x . Тогда выполняется уравнение (29). С другой стороны, выполняется уравнение (30), так как это иная форма записи (31). Вычтем почленно из (29) уравнение (30). Тогда находим, что

$$c_{n-1} \left[x^n + \frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) \right] = 0. \quad (32)$$

Следовательно, в силу условия (27) выполняется уравнение (22). Уравнение (23) тогда есть следствие (22) и (26). Что и требовалось доказать.

Пример 1. Рассмотрим переопределенную систему из двух квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (33)$$

$$px^2 + qx + r = 0. \quad (34)$$

Пусть $a \neq 0$. Из (33) следует, что

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}. \quad (35)$$

Подставим (35) в (34). Тогда

$$\left(q - \frac{pb}{a}\right)x + \left(r - \frac{pc}{a}\right) = 0. \quad (36)$$

Умножим (36) на x и подставим вместо x^2 выражение из (35). Следовательно,

$$\left(r - \frac{pc}{a} - \frac{qb}{a} + \frac{pb^2}{a^2}\right)x + \left(\frac{pbc}{a^2} - \frac{qc}{a}\right) = 0. \quad (37)$$

Система уравнений (36), (37) равносильна системе (33), (34) при условии

$$\left(q - \frac{pb}{a}\right) \neq 0. \quad (38)$$

Система (36), (37) имеет решение

$$x = -\frac{\left(r - \frac{pc}{a}\right)}{\left(q - \frac{pb}{a}\right)} \quad (39)$$

при условии

$$\begin{vmatrix} \left(q - \frac{pb}{a}\right) & \left(r - \frac{pc}{a}\right) \\ \left(r - \frac{pc}{a} - \frac{qb}{a} + \frac{pb^2}{a^2}\right) & \left(\frac{pbc}{a^2} - \frac{qc}{a}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Если условие (40) не выполняется, но верно (38), то система (33), (34) не имеет решений.

В случае переопределенной системы из более чем двух многочленов можно доказать аналогичное утверждение и найти условие, когда исходная система равносильна системе из такого же числа многочленов, но порядка меньшего, чем у первоначальной системы.

Рассмотрим общий случай переопределенной системы из $(m+1)$ алгебраических уравнений от m переменных

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^j (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_m)^{i_m} = 0, \quad (41)$$

где $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^j \in \mathbb{R}$, $j = 1 \dots (m+1)$. Систему (41) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i_m=0}^{n_m} A_{i_m}^j (x_m)^{i_m} = 0, \quad j = 1 \dots (m+1), \quad (42)$$

где

$$A_{i_m}^j = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_{m-1}=0}^{n_{m-1}} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^j (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_{m-1})^{i_{m-1}}. \quad (43)$$

Систему уравнений (42) можно рассмотреть, как переопределенную систему из $(m+1)$ алгебраических уравнений относительно переменной x_m , но с переменными коэффициентами (43). При определенных условиях ее можно равносильно редуцировать последовательно до системы из $(m+1)$ линейных уравнений по переменной x_m и найти ее решение в виде дробно-рационального выражения типа (39) от коэффициентов (43). Условиями существования этого решения в данном виде будут некоторые **дробно-рациональные** выражения типа (40), составленные из коэффициентов (43), в количестве m штук. Таким образом, фактически мы получим переопределенную систему из m алгебраических уравнений вида (41), где количество переменных $m-1$ уменьшено на единицу и так далее.

Пример 2. Рассмотрим переопределённую систему из трех алгебраических уравнений и двух неизвестных:

$$x^2 + y^2 = 10, \quad (44)$$

$$x^2 y = 3, \quad (45)$$

$$x + y = 2. \quad (46)$$

Из уравнения (44) следует, что

$$x^2 = 10 - y^2. \quad (47)$$

Поставим (47) в уравнение (45). Тогда

$$(10 - y^2)y = 3$$

или

$$y^3 - 10y + 3 = 0. \quad (48)$$

Умножим обе части уравнения (46) на x и подставим вместо x^2 выражение из (47). Тогда

$$10 - y^2 + yx = 2x$$

или

$$y^2 + (2 - y)x - 10 = 0. \quad (49)$$

Система уравнений (44)–(46) равносильна системе уравнений (46), (48) и (49), которая линейна относительно неизвестной x . Выразим x из (49)

$$x = 2 - y \quad (50)$$

и подставим его выражение в (48). Имеем

$$y^2 + (2 - y)^2 - 10 = 0$$

или

$$y^2 - 2y - 3 = 0. \quad (51)$$

Система уравнений (46), (48) и (49) равносильна системе (48), (50) и (51). Найдем решение переопределенной системы из двух уравнений (48), (51) от одной неизвестной y . Умножим обе части уравнения (51) на y и подставим вместо y^3 выражение из (48). Тогда

$$10y - 3 - 2y^2 - 3y = 0$$

или

$$2y^2 - 7y + 3 = 0. \quad (52)$$

Система из двух уравнений (48), (51) равносильна системе (51), (52). Поставим в (52) выражение y^2 из (51). Тогда

$$2(2y + 3) - 7y + 3 = 0$$

или

$$y - 3 = 0. \quad (53)$$

Остаётся еще умножить обе части (53) на y и подставить вместо y^2 его выражение из (51)

$$(2y + 3) - 3y = 0$$

или

$$-y + 3 = 0. \quad (54)$$

Следовательно, система (48), (51) имеет только одно общее решение $y = 3$. Из уравнения (50) находим, что $x = -1$. Система алгебраических уравнений (44)–(46) имеет только одно общее решение $x = -1$ и $y = 3$.

Таким образом, из уравнений (12) можно при определенных условиях исключить неизвестные Q_{β^*} , $j_1 + \dots + j_m \geq 2$, $v = 1 \dots p$. В результате останется только переопределенная система не-

явных уравнений от неизвестных $Q_{\beta_s^0}$, где $\beta_s^0 = \beta^* \left(\underbrace{v, 0, \dots, 1 \dots 0}_s \right)$ и $v = 1 \dots p$, $s = 1 \dots m$ и

$Q_{\beta^*(v,0,\dots,0)} = S_v$, $v = 1 \dots p$, решить которую гораздо проще, чем исходную (12).

Заключение

В данной статье мы предлагаем алгоритм нахождения решений у переопределенных систем УрЧП, основанный на работах авторов [5, 6]. Основная сложность этого алгоритма – это огромное количество возникающих полиномиальных уравнений, которые нужно исследовать и решить численно или в явном виде. В работах авторов [3, 4] приводятся переопределенные уравнения гидродинамики, которые дают минимум 10 миллионов таких уравнений. Однако если их решить в явном виде, то можно выписать решение уравнений гидродинамики, что представляет большой интерес. В данной работе мы предлагаем также простой в описании алгоритм нахождения явного решения у систем переопределенных алгебраических уравнений, если для этих систем выполнены некоторые требования, связанные с выполнением шагов этого алгоритма. В случае его успешной реализации это будет новым и полезным инструментом в исследовании систем УрЧП.

Приложение А. Прием нахождения решения у переопределенных систем неявных уравнений в явном виде

Рассмотрим произвольную систему из n уравнений от n неизвестных функций $u = (u_1(t), u_2(t) \dots u_n(t))$ вида

$$H(u, t) = 0, \quad (A.1)$$

где $u = (u_1(t), u_2(t) \dots u_n(t))$, $H(u, t) = (H_1(u, t), \dots H_n(u, t))$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Пусть помимо (A.1) выполняется дополнительное соотношение

$$G(u, t) = 0, \quad (A.2)$$

где $G(u, t)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов. Продифференцируем уравнения (A.1) и (A.2) по переменной t :

$$\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (A.4)$$

Положим, что определитель матрицы в (A.3) отличен от нуля. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (A.5)$$

Подставим (A.5) в (A.4). Следовательно,

$$- \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = G^{(1)}(u, t) = 0. \quad (A.6)$$

Таким образом, дополнительно к (A.1) и (A.2) мы получаем дополнительное соотношение (A.6), являющееся их следствием. Производя такую же процедуру с (A.6), можно получать еще следствия. Эти следствия могут позволить найти решение системы (A.1), (A.2) в явном виде.

Пример 3. Рассмотрим следующую переопределенную систему уравнений относительно неизвестной функции $x = x(t)$

$$\cos x = x^2 + \cos t - t^2, \quad (A.7)$$

$$\sin x = x - \sin t + t. \quad (A.8)$$

Продифференцируем уравнение (A.7) по переменной t . Тогда

$$-\sin x \frac{dx}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} - \sin t - 2t$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin t + 2t}{2x + \sin x}. \quad (A.9)$$

Продифференцируем (A.8) по переменной t и подставим выражение для производной (A.9). Тогда

$$(1 - \cos x) \frac{dx}{dt} - \cos t + 1 = 0$$

или

$$(1 - \cos x) \frac{\sin t + 2t}{2x + \sin x} - \cos t + 1 = 0$$

или

$$(1 - \cos t) \sin x - (\sin t + 2t) \cos x + 2(1 - \cos t)x + (\sin t + 2t) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Обозначим

$$w = \cos x, \quad v = \sin x. \quad (\text{A.11})$$

В новых неизвестных величинах (A.11) уравнения (A.7), (A.8), (A.10) имеют вид:

$$w = x^2 + \cos t - t^2, \quad (\text{A.12})$$

$$v = x - \sin t + t, \quad (\text{A.13})$$

$$(1 - \cos t)v - (\sin t + 2t)w + 2(1 - \cos t)x + (\sin t + 2t) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Кроме того, используем известное соотношение из тригонометрии:

$$v^2 + w^2 = 1. \quad (\text{A.15})$$

Система уравнений (A.12)–(A.15) относительно неизвестных w , v , x является переопределенной системой алгебраических уравнений. Подставим выражения для w , v из (A.12), (A.13) в уравнения (A.14), (A.15). Имеем

$$x^2 - 3 \frac{(1 - \cos t)}{(\sin t + 2t)} x + \frac{(1 - \cos t)(\sin t - t)}{(\sin t + 2t)} + \cos t - t^2 - 1 = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$x^4 + (2 \cos t - 2t^2 + 1)x^2 + 2(t - \sin t)x + t^4 + (1 - 2 \cos t)t^2 - 2t \sin t = 0. \quad (\text{A.17})$$

Решая систему (A.16), (A.17) относительно x аналогично примеру 2, находим $x = -t$. Из (A.12), (A.13) получаем, что $w = \cos t$, $v = -\sin t$. Условия согласования (A.11) выполняются. Следовательно, решение системы (A.7), (A.8) имеет вид $x = -t$.

Приложение В. Упрощение алгоритма нахождения решений систем переопределенных алгебраических уравнений в частном случае

Пример 4. Рассмотрим следующую переопределенную систему алгебраических уравнений относительно x

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Умножим обе части (B.1), (B.2) на x и x^2 . Тогда

$$a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$a_2 x^4 + b_2 x^3 + c_2 x^2 = 0. \quad (\text{B.6})$$

Обозначим

$$R = x, \quad Q = x^2, \quad S = x^3, \quad M = x^4. \quad (\text{B.7})$$

Тогда уравнения (B.1)–(B.6) запишутся в виде переопределенной системы линейных уравнений вида

$$a_1 Q + b_1 R + c_1 = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$a_2 Q + b_2 R + c_2 = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$a_1 S + b_1 Q + c_1 R = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$a_2 S + b_2 Q + c_2 R = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$a_1 M + b_1 S + c_1 Q = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$a_2 M + b_2 S + c_2 Q = 0. \quad (\text{B.13})$$

Умножим обе части (B.8) и (B.9) на R и вычтем их почленно из (B.10) и (B.11) соответственно. И аналогично умножим обе части (B.10) и (B.11) на R и вычтем их почленно из (B.12) и (B.13). Тогда получим следующие уравнения:

$$a_1(S - RQ) + b_1(Q - R^2) = 0, \quad (B.14)$$

$$a_2(S - RQ) + b_2(Q - R^2) = 0, \quad (B.15)$$

$$a_1(M - RS) + b_1(S - RQ) + c_1(Q - R^2) = 0, \quad (B.16)$$

$$a_2(M - RS) + b_2(S - RQ) + c_2(Q - R^2) = 0. \quad (B.17)$$

Условие того, что система из четырех линейных уравнений (B.14)–(B.17) относительно трех неизвестных $(Q - R^2)$, $(S - RQ)$ и $(M - RS)$ имеет только нулевое решение, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (B.18)$$

Любое решение переопределенной системы алгебраических уравнений (B.1), (B.2), если сделать замену (B.7), удовлетворяет переопределенной системе **линейных** уравнений (B.8)–(B.13). Если выполняется условие (B.18), то $(Q - R^2) = 0$, $(S - RQ) = 0$ и $(M - RS) = 0$, т. е. верны соотношения (B.7). Тогда в этом случае всякое решение (B.8)–(B.13) определяет решение исходной системы уравнений (B.1), (B.2). Выкладки показывают, что условие совместности переопределенной системы (B.8)–(B.13) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (B.19)$$

Условия (B.18) и (B.19) идентичны условиям (38) и (40) соответственно.

Данный прием легко обобщить на случай произвольной переопределенной системы алгебраических уравнений. Тогда при некотором условии на коэффициенты, аналогичном (B.18), решение этой системы сводится к решению переопределенной системы линейных уравнений. Рассмотрим общий случай системы из $p \geq 2$ алгебраических уравнений от m переменных

$$P_l(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_m)^{i_m} = 0, \quad (B.20)$$

где $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l \in \mathbb{R}$, $i_1 = 0 \dots n_1, \dots, i_m = 0 \dots n_m$, $l = 1 \dots p$. Умножим обе части уравнений (B.20) на выражения $(x_1)^{j_1} \cdot (x_2)^{j_2} \dots (x_m)^{j_m}$, $j_1 = 0 \dots N_1, \dots, j_m = 0 \dots N_m$. Получим уравнения вида

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1+j_1} \cdot (x_2)^{i_2+j_2} \dots (x_m)^{i_m+j_m} = 0, \quad (B.21)$$

где $\alpha = \alpha(l, j_1, \dots, j_m)$, $l = 1 \dots p$. Количество мульти-индексов $\alpha = \alpha(l, j_1, \dots, j_m)$ (количество уравнений (B.21)) равно $N_H = p(N_1 + 1) \dots (N_m + 1)$. Эти уравнения можно записать в виде

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m) = H_\alpha(Q_\beta) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l Q_{\beta((i_1+j_1), \dots, (i_m+j_m))} = 0, \quad (B.22)$$

где $Q_\beta = (x_1)^{q_1} \cdot (x_2)^{q_2} \cdots (x_m)^{q_m}$, $\beta = \beta(q_1, \dots, q_m)$, $q_1 = 0 \dots (N_1 + n_1), \dots, q_m = 0 \dots (N_m + n_m)$, $Q_{\beta(0 \dots 0)} = 1$, $l = 1 \dots p$. Количество мульти-индексов $\beta = \beta(q_1, \dots, q_m)$ (количество неизвестных в уравнениях (B.22)) равно $N_S = (N_1 + n_1 + 1) \cdots (N_m + n_m + 1)$.

Потребуем, чтобы $N_H \geq N_S$. Тогда

$$p(N_1 + 1) \cdots (N_m + 1) \geq (N_1 + n_1 + 1) \cdots (N_m + n_m + 1)$$

или

$$p \geq \left(1 + \frac{n_1}{(N_1 + 1)}\right) \cdots \left(1 + \frac{n_m}{(N_m + 1)}\right). \quad (B.23)$$

Выберем $\frac{(N_1 + 1)}{n_1} \approx \dots \approx \frac{(N_m + 1)}{n_m} \approx N$. Тогда из (B.23) следует, что $p \geq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^m \geq 1 + \frac{m}{N}$, т. е.

$$N \geq \frac{m}{(p-1)}. \text{ В этом случае } N_H \geq p(Nn_1) \cdots (Nn_m) = pn_1 \cdots n_m \left[\frac{m}{(p-1)}\right]^m.$$

Из (B.23) следует, что

$$p \geq \left(1 + \frac{n_1}{(N_1 + 1)}\right) \cdots \left(1 + \frac{n_m}{(N_m + 1)}\right) > 1 + \frac{n_1}{(N_1 + 1)} + \dots + \frac{n_m}{(N_m + 1)} \quad (B.24)$$

В частности, из (B.24) следует

$$p - 1 > \frac{n_i}{(N_i + 1)}, \quad i = 1 \dots m. \quad (B.25)$$

Тогда, используя известное соотношение между средним геометрическим, гармоническим и (B.24), мы имеем оценку для минимального количества редуцированных уравнений:

$$\begin{aligned} N_H &= p(N_1 + 1) \cdots (N_m + 1) \geq pn_1 \cdots n_m \frac{(N_1 + 1)}{n_1} \cdots \frac{(N_m + 1)}{n_m} \geq \\ &\geq pn_1 \cdots n_m \left(\frac{m}{\frac{n_1}{(N_1 + 1)} + \dots + \frac{n_m}{(N_m + 1)}} \right)^m > pn_1 \cdots n_m \left(\frac{m}{p-1} \right)^m. \end{aligned} \quad (B.26)$$

Минимум в (B.26) реализуется примерно при $\frac{(N_1 + 1)}{n_1} \approx \dots \approx \frac{(N_m + 1)}{n_m} \approx N \approx \frac{m}{(p-1)}$.

Формально мы получили, что любая система из $p \geq 2$ алгебраических уравнений (B.20) может быть преобразована к переопределенной системе линейных уравнений (B.22). В частности, рассмотрим следующую систему.

Пример 5.

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0, \quad (B.27)$$

$$x_3 = x_2. \quad (B.28)$$

В этом случае $p = 2$, $m = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Из оценки (B.26) находим, что $N_H \geq 216$. Очевидно, система (B.27), (B.28) имеет единственное решение. По-видимому, соответствующая система (B.22) также имеет единственное решение.

Приложение С. Некоторые способы переопределения систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим общие уравнения в виде [1, 2]

$$H_k(U_1^1, \dots, U_v^i, \dots, U_p^m, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x) = 0, \quad i = 1 \dots m, \quad v = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p. \quad (C.1)$$

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_m} = \frac{\partial U_v^m}{\partial x_i}, \quad i=1\dots(m-1), \quad v=1\dots p, \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = U_v^m, \quad v=1\dots p, \quad (C.3)$$

где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Пусть

$$H_k = \sum_{\substack{k_1^1 \dots k_s^l \dots k_p^{m-1} \\ i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}} A_{\binom{k_1^1 \dots k_s^l \dots k_p^{m-1}}{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}}^{k, (i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p)}(x) (U_1^1)^{k_1^1} \dots (U_s^l)^{k_s^l} \dots (U_p^{m-1})^{k_p^{m-1}} (U_1^m)^{i_1} \dots (U_p^m)^{i_p} (S_1)^{j_1} \dots (S_p)^{j_p} = 0 \quad (C.4)$$

где $k=1\dots p$, $l=1\dots(m-1)$, $s=1\dots p$, $k_s^l = 0\dots r_s^l$, $i_1 = 0\dots n_1$, \dots , $i_p = 0\dots n_p$, $j_1 = 0\dots w_1$, \dots , $j_p = 0\dots w_p$. К виду (C.1)–(C.3) могут быть преобразованы, например, уравнения Навье–Стокса или уравнения из статьи [7]. Умножим обе части (C.2)–(C.4) на

$$(U_1^1)^{\tilde{k}_1^l} \dots (U_s^l)^{\tilde{k}_s^l} \dots (U_p^{m-1})^{\tilde{k}_p^{m-1}} \cdot (U_1^m)^{\tilde{i}_1} \dots (U_p^m)^{\tilde{i}_p} \cdot (S_1)^{\tilde{j}_1} \dots (S_p)^{\tilde{j}_p}, \quad (C.5)$$

где $l=1\dots(m-1)$, $s=1\dots p$, $\tilde{k}_s^l = 0\dots R_s^l$, $\tilde{i}_1 = 0\dots N_1$, \dots , $\tilde{i}_p = 0\dots N_p$, $\tilde{j}_1 = 0\dots W_1$, \dots , $\tilde{j}_p = 0\dots W_p$. После преобразований получим, что

$$\frac{\partial Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p)}{\partial x_m} - U_v^i \frac{\partial Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p)}{\partial x_m} = \frac{\partial Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p)}{\partial x_i} - U_v^m \frac{\partial Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p)}{\partial x_i}, \quad (C.6)$$

$$\frac{\partial Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p)}{\partial x_m} - U_v^m \frac{\partial Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p)}{\partial x_m} = Q_{\binom{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p}{\tilde{k}_1^l \dots \tilde{k}_s^l \dots \tilde{k}_p^{m-1}}}(\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p, \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_p), \quad (C.7)$$

$$\sum_{\substack{k_1^1 \dots k_s^l \dots k_p^{m-1} \\ i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}} A_{\binom{k_1^1 \dots k_s^l \dots k_p^{m-1}}{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}}^{k, (i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p)}(x) Q_{\binom{i_1 + \tilde{i}_1 \dots i_p + \tilde{i}_p, j_1 + \tilde{j}_1 \dots j_p + \tilde{j}_p}{k_1^1 + \tilde{k}_1^l \dots k_s^l + \tilde{k}_s^l \dots k_p^{m-1} + \tilde{k}_p^{m-1}}} = 0, \quad (C.8)$$

где введены обозначения

$$Q_{\binom{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}{k_1^1 \dots k_s^l \dots k_p^{m-1}}} = (U_1^1)^{k_1^1} \dots (U_s^l)^{k_s^l} \dots (U_p^{m-1})^{k_p^{m-1}} \cdot (U_1^m)^{i_1} \dots (U_p^m)^{i_p} \cdot (S_1)^{j_1} \dots (S_p)^{j_p}, \quad (C.9)$$

$$Q_{\binom{0 \dots 0}{0 \dots k_v^i \dots 0}}^{(0 \dots 0)(0 \dots 0)} = U_v^i, \quad k_v^i = 1, \quad Q_{\binom{0 \dots i_v \dots 0}{0 \dots 0}}^{(0 \dots i_v \dots 0)(0 \dots 0)} = U_v^m, \quad i_v = 1.$$

Систему уравнений (C.6)–(C.8) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений от неизвестных вида (C.9), следующую из системы (C.1)–(C.3). Уравнения (C.8) относительно неизвестных (C.9) линейные. Количество уравнений (C.6)–(C.8) равно

$$N_H = p(m+1)(R_1^l + 1) \dots (R_s^l + 1) \dots (R_p^{m-1} + 1) \cdot (N_1 + 1) \dots (N_p + 1) (W_1 + 1) \dots (W_p + 1). \quad (C.10)$$

Количество неизвестных, которые содержат уравнения (C.6)–(C.8), равно

$$N_S = (R_1^l + r_1^l + 1) \dots (R_s^l + r_s^l + 1) \dots (R_p^{m-1} + r_p^{m-1} + 1) (N_1 + n_1 + 1) \dots (N_p + n_p + 1) \cdot (W_1 + w_1 + 1) \dots (W_p + w_p + 1). \quad (C.11)$$

Величины $l=1\dots(m-1)$, $s=1\dots p$, R_s^l , N_1 , \dots , N_p , W_1 , \dots , W_p можно взять достаточно большими так, чтобы $N_H \geq N_S$ (см. Приложение В). Таким образом, тогда система дифференциальных уравнений (C.6)–(C.8) от неизвестных вида (C.9) будет переопределенной.

Пусть нас интересуют решения уравнений (С.1)–(С.3), на которых, например, неизвестное S_1 автомодельное. Тогда $S_1 = S_1(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x))$, где $\varphi_1(x) \dots \varphi_{m-1}(x)$ достаточно гладкие функции от $x = (x_1, \dots, x_m)$. Следовательно,

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_{m-1}} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}. \quad (\text{C.12})$$

Исключая из (С.12) $\partial S_1 / \partial \varphi_1, \dots, \partial S_1 / \partial \varphi_{m-1}$, получаем дополнительное уравнение к системе (С.1) – (С.3)

$$\begin{vmatrix} \partial S_1 / \partial x_1 & \partial \varphi_1 / \partial x_1 & \dots & \partial \varphi_{m-1} / \partial x_1 \\ \partial S_1 / \partial x_2 & \partial \varphi_1 / \partial x_2 & \dots & \partial \varphi_{m-1} / \partial x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial S_1 / \partial x_m & \partial \varphi_1 / \partial x_m & \dots & \partial \varphi_{m-1} / \partial x_m \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{C.13})$$

Сделаем теперь в системе уравнений (С.1)–(С.3) параметрическую замену переменных вида $x = x(x_0, \xi)$ и $x_0 = x_0(x, \xi)$, где $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}) \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}$ – параметр. Рассмотрим теперь эту систему как систему уравнений в переменных (x_0, ξ) . Тогда решения исходной системы уравнений (С.1)–(С.3) в переменных (x_0, ξ) будут автомодельные вида $S_v = S_v(x(x_0, \xi))$, $v = 1 \dots p$. Следовательно, для них в переменных (x_0, ξ) могут быть выписаны дополнительные соотношения вида (С.13).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
3. Аккерман, В.Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.
4. Зайцев, М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.
5. Зайцев, М.Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.
6. Зайцев, М.Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 43–67.
7. Зайцев, М.Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 18–33.
8. Бухбергер, Б. Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов / Б. Бухбергер // Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления: сб. науч. тр. – М.: Мир, 1986. – С. 331–372.

Поступила в редакцию 24 декабря 2019 г.

**ALGORITHM FOR FINDING EXPLICIT SOLUTIONS
OF OVERDETERMINED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS****M.L. Zaytsev¹, V.B. Akkerman²**¹ Moscow, Russian Federation² West Virginia University, Morgantown, USA

E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Previously, the authors proposed a general method for finding particular solutions for overdetermined systems of partial differential equations (PDE), where the number of equations is greater than the number of unknown functions. In this paper, an algorithm for finding solutions for overdetermined PDE systems is proposed, where the authors use a method for finding an explicit solution for overdetermined algebraic (polynomial) equations. Using this algorithm, some overdetermined PDE systems can be solved in explicit form. The main difficulty of this algorithm is the huge number of polynomial equations that arise, which need to be investigated and solved numerically or explicitly. For example, the overdetermined hydrodynamic equations obtained earlier by the authors give at least 10 million such equations. However, if the equations are solved explicitly, then it is possible to write out the solution of the hydrodynamic equations in a general form, which is of great scientific interest.

Keywords: overdetermined systems of differential equations; partial differential equations (PDE); dimension of differential equations; algebraic (polynomial) equations; symbolic computation.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).
2. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2, Partial Differential Equations*, New York, London, 1962, 830 p.
3. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 8, pp. 1418–1430. DOI: 10.1134/S0965542511080021
4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Hypothesis on reduction of overdetermined systems of differential equations and its application to equations of hydrodynamics. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27. (in Russ.).
5. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics*, 2016, no. 6 (37), pp. 119–127. (in Russ.). DOI: 10.15688/jvolsu.2016.6.11
6. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathematical Physics. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, Vol. 20, Iss. 4, pp. 43–67. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5 (in Russ.).
7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Transformation of Systems of Partial Differential Equations to Systems of Quasilinear and Linear Differential Equations. Their Reduction and Unification. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, Vol. 21, Iss. 1, pp. 18–33. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3
8. Bukhberger B. Bazisy Gryebnera. Algoritmicheskiy metod v teorii polinomial'nykh idealov (Groebner Bases. Algorithmic Method in the Theory of Polynomial Ideals). *Komp'yuternaya algebra. Simvol'nye i algebraicheskie vychisleniya: sb. nauch. tr.* (Computer Algebra. The Symbolic and Algebraic Computation: Collection of Scientific Papers), Moscow, Mir Publ., 1986, pp. 331–372. (in Russ.).

Received December 24, 2019

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В.И. Заляпин, В.С. Шалгин

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zaliapinvi@susu.ru

Обсуждается динамическая система, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений. Во многих случаях вместо истинного сигнала, который воспринимается измерительным устройством, на выходе наблюдается искажённый сигнал, существенно отличающийся по структуре, величине и по временным параметрам от истинного. Подобные искажения порождаются принципами работы измерительного устройства, шумами или помехами, содержащимися во входном сигнале, и искажениями, возникающими при работе самого устройства. В этих условиях одной из задач, представляющих значительный интерес для приложений, является т. н. обратная задача – восстановления входного сигнала по имеющейся информации (в том числе и косвенной) о сигнале на выходе системы и оценивание точности получаемых решений. Предлагается метод интегральных уравнений и его численная реализация, позволяющие эффективно восстанавливать входное воздействие на динамическую систему по косвенной экспериментальной информации.

Ключевые слова: линейная динамическая система; косвенные измерения; псевдорешение; система интегральных уравнений; регуляризация.

I. Постановка задачи

Пусть $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ – квадратная матрица n -го порядка, $f(t) = \|f_i(t)\|_{i=1}^n$, $x(t) = \|x_i(t)\|_{i=1}^n$ и $y(t) = \|y_j(t)\|_{j=1}^m$ – векторные функции.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка:

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t) \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты системы и её правые части определены и непрерывны на некотором промежутке $[a; b]$.

Пусть далее $T = \|t_{ij}\|$ – постоянная матрица формата $m \times n$, $m \geq 1$ и

$$y(t) = T \cdot x(t). \quad (2)$$

Матрицу T будем называть матрицей косвенных измерений.

Требуется, располагая косвенными измерениями (2), определить входное воздействие $f(t)$.

II. Согласованность измерений. Однозначная разрешимость задачи

Обозначим через $t^j = \|t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jn}\|$, $j = 1, 2, \dots, m$ строки матрицы T . Если ранг матрицы T равен r , то можно выбрать ровно r линейно независимых строк этой матрицы и выразить $m - r$ оставшихся через них. Другими словами, существует постоянная матрица Λ формата $(m - r) \times r$ такая, что

$$\begin{pmatrix} t^{r+1} \\ t^{r+2} \\ \vdots \\ t^m \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^r \end{pmatrix}.$$

Здесь для определенности мы положили линейно независимыми первые r строк. При этом, в случае совместности системы косвенных измерений (2) измеренные в эксперименте функции $y(t) = \| y_j(t) \|_{j=1}^m$ должны быть связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которые мы называем *условиями согласованности измерений*.

Отсюда заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. Система косвенных измерений (2) совместна тогда и только тогда, когда наблюдаемые в эксперименте функции $y_j(t)$, $j=1, 2, \dots, m$ удовлетворяют условию (3).

Если при этом $r = n \leq m$ – система (2) имеет единственное решение, если же $r < n$ – бесконечное множество решений.

Простые рассуждения позволяют установить справедливость теоремы.

Теорема. У задачи нахождения правой части $f(t)$ системы (1), отвечающей косвенным измерениям (2) существует единственное решение тогда и только тогда, когда наблюдения дифференцируемы, ранг матрицы косвенных измерений равен размерности задачи ($r = n$) и выполнено условие согласованности измерений (3).

Если условие (3) не выполнено – решений нет, если выполнено и ранг матрицы косвенных измерений меньше размерности задачи – решений бесконечно много.

III. Регуляризация косвенных измерений

Как правило, в прикладных исследованиях условия сформулированной выше теоремы не выполняются и в этом случае с теоретической точки зрения поставленная задача восстановления входного сигнала решений не имеет либо таковых бесконечно много. Связано это обстоятельство с погрешностями, присущими всякому измерительному процессу. В этой ситуации на практике прибегают к некоторой модификации системы косвенных измерений (2) с целью добиться выполнения условий (3) и однозначности обращения системы (2). Достигается это за счет привлечения некоторой дополнительной информации о решениях системы (1) и/или за счет расширенного понимания процедуры обращения линейной системы (2).

Использование дополнительной априорной информации о системе – вопрос отдельного исследования, и его изучению посвящено множество работ (например, [1–3] и цитированная там литература).

Мы же остановимся здесь на расширении трактовки термина *решение системы линейных уравнений*, понимая под последним **нормальное псевдорешение** [4].

Напомним, что *нормальным псевдорешением* системы линейных уравнений $y = Tx$ называется вектор $x_{\text{норм}}$, такой, что

$$x_{\text{норм}} = \arg \min_{x=\arg \min \|y-Tx\|} \|x\|.$$

Известно [4], что нормальное псевдорешение всегда существует и единственно. Оно представимо в виде $x_{\text{норм}} = T^+ y$, где T^+ – матрица, псевдообратная [4] к матрице T .

Очевидно, что если y системы существует, по крайней мере, одно обычное решение, то нагрузка для него равна нулю и нормальным решением будет обычное решение с наименьшей нормой. Если же система однозначно разрешима, то нормальное псевдорешение совпадает с обычным.

Везде в дальнейшем под решением системы косвенных измерений (2) мы будем понимать её нормальное псевдорешение.

Пример. В приложениях (в частности, в теории динамических измерений [5]) часто встречается ситуация, когда матрица $T = \| t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n} \|$ – матрица-строка. В этом случае псевдообратная

матрица имеет вид: $T^+ = \frac{T^T}{\sum_1^n t_{1i}^2}$, а нормальное псевдорешение дается соотношением

$x_{\text{норм}} = \frac{y(t)}{\sum_1^n t_{1i}^2} T^T$, где $y(t)$ – единственная скалярная компонента измеряемого сигнала, T^T – столбец элементов матрицы T .

IV. Точность косвенных измерений

Как уже было отмечено выше, как правило, в прикладных ситуациях измерения сопровождаются различными погрешностями, так что фактически исследователь имеет дело не с системой (2), а с возмущенной системой

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \Delta_y(t) = Tx(t). \quad (4)$$

Пусть $x_{\text{норм}}(t)$ – нормальное псевдорешение невозмущенной системы $y(t) = Tx(t)$, $x_{\text{норм}}^{\text{возм}}(t)$ – нормальное псевдорешение возмущенной системы (4). Интерес представляет ответ на вопрос, насколько возмущения $\Delta_y(t)$ измеряемого сигнала $y(t)$ влияют на погрешность $\Delta_x(t)$ нормального псевдорешения. Оценивая упомянутую погрешность по норме пространства $L_{[a;b]}^{n,2}$, получаем:

$$\|\Delta_x\| = \|x_{\text{норм}} - x_{\text{норм}}^{\text{возм}}\| = \|T^+ y - T^+ \hat{y}\| = \|T^+ (y - \hat{y})\| \leq \|T^+\| \cdot \|\Delta_y\|.$$

Здесь $\|T^+\|$ – норма оператора псевдообращения. Если $\|\Delta_y\| < \delta$, то $\|\Delta_x\| < \|T^+\| \cdot \delta$. Так, например, для важного в приложениях случая матрицы-строки получаем:

$$T = \|t_{1i}\|, \quad \|T^+\| = \frac{1}{\|T\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n t_{1i}^2}} \Rightarrow \|\Delta_x\| < \frac{\delta}{\sqrt{\sum_1^n t_{1i}^2}}.$$

Более точные оценки можно найти, например, в [4].

Здесь важно отметить еще одну особенность задачи с возмущенными косвенными измерениями – погрешности измерений Δ_y могут быть сколь угодно «плохими» с аналитической точки зрения, например недифференцируемыми и даже разрывными. А потому получить правую часть уравнения (1) простой подстановкой нормального псевдорешения не удастся.

V. Основные расчетные соотношения

Хорошо известно (например, [6]), что задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

с непрерывными коэффициентами $A(t)$, $f(t)$ однозначно разрешима для любых начальных условий x_0 и её решение дается интегральным соотношением

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (6)$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы (5), удовлетворяющая уравнению

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi(t) + A(t)\Phi(t) = 0, \\ \Phi(t_0) = I \end{cases}, \quad (7)$$

которое эквивалентно интегральному соотношению

$$\Phi(t) + \int_{t_0}^t A(s)\Phi(s)ds = I. \quad (8)$$

Математика

Заметим, что соотношение (8) представляет собой систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода относительно компонент фундаментальной матрицы $\Phi(t)$.

Умножая обе части соотношения (6) на матрицу $\Phi^{-1}(t)$ и обозначая $u(t) = \Phi^{-1}(t)x(t) - x_0$, перепишем (6) в виде:

$$\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t), \quad (9)$$

отмечая, что в этом случае полученное соотношение – интегральное уравнение Вольтерры первого рода относительно функции $f(t)$.

Пусть $\tilde{y}(t) = y(t) + \Delta_y(t)$ – косвенные экспериментальные измерения, $x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t)$ – соответствующее нормальное псевдорешение системы $\tilde{y}(t) = Tx(t)$.

План решения основной задачи выглядит так:

- построение нормального псевдорешения $x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t)$ системы косвенных измерений;
- решение уравнения (8) с целью нахождения фундаментальной матрицы $\Phi(t)$;
- решение уравнения (9)

$$\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = \tilde{u}(t) = \Phi^{-1}(t)x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t) - x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t_0)$$

с целью нахождения функции $\tilde{f}(t)$, которая и считается приближенным вариантом отыскиваемой правой части системы (1).

Отметим, что результат решения уравнений (7)–(8) от точности измерений и процедуры обращения системы (2) не зависит. Кроме того, вычислительные процедуры решения уравнения второго рода устойчивы относительно погрешностей вычисления (например, [7–8]). Поэтому нахождение фундаментальной матрицы системы (1) особых затруднений не вызывает¹.

Иначе обстоит дело с решением интегрального уравнения (9) с неточно заданной правой частью. Как уже было отмечено выше, погрешности косвенных измерений вызывают погрешности при нахождении нормального псевдорешения, которые могут оказаться значительными. Кроме того, численные процедуры решения уравнений второго рода неустойчивы и это тоже может привести к заметному искажению результата.

Процедура решения уравнения (9) с неточно заданной правой частью требует регуляризации [7–9] и последующего анализа точности получаемого таким способом решения.

VI. Регуляризация

Напомним (например, [7–9]), что регуляризирующим оператором для уравнения $Af = u, f \in F, u \in U$ называется отображение $R: \{(\tilde{u}, \delta) | \tilde{u} \in U, \delta > 0\} \rightarrow F$, удовлетворяющее условию $\forall f \in F, \forall \tilde{u} \in U$ таких, что $Af = u, \rho_U(u, \tilde{u}) < \delta$, должно выполняться $\tilde{f} = R(\tilde{u}, \delta) \rightarrow f$, если только $\delta \rightarrow 0$. Если задача регуляризуема, то её решением называется результат применения регуляризирующего оператора к исходным данным.

Пусть оператор $A: F \rightarrow U$ линеен и ограничен, и нам известны $\tilde{A}: \|A - \tilde{A}\| \leq \varepsilon$ и $\tilde{u}: \|u - \tilde{u}\|_U \leq \delta$. Для построения приближённого решения \tilde{f} , сходящегося к точному решению f при стремлении δ и ε к нулю, широко применяется следующий регуляризирующий алгоритм [7, 9].

Рассмотрим $M^\alpha[f]$ – функционал, задаваемый соотношением

$$M^\alpha[f] = \|\tilde{A}f - \tilde{u}\|_U^2 + \alpha \cdot \Omega[f], \quad (10)$$

¹ Если матрица A не зависит от времени, то фундаментальная матрица может быть найдена непосредственно из уравнения (7).

где $\Omega[f] = \|f\|_F^2$. Пусть f_α – элемент, доставляющий минимум функционалу $M_\alpha[f]$ на F . Если параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\varepsilon, \delta)$ удовлетворяет определенным условиям (подробнее, например в [7–9]), то элемент f_α будет приближенным решением рассматриваемого уравнения.

В нашем случае оператор \tilde{A} дается соотношением (9), а стабилизатор Ω был выбран в виде

$$\Omega[f] = \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n p_i(s) f_i^2(s) \right) ds, \quad p_i(s) \geq 0, \quad s \in [a; b].$$

Полагая $f = \|f_i\|$, $\Phi^{-1}(s) = \|g_{ij}(s)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, перепишем (10) в скалярной форме

$$M^\alpha[f] = \int_{t_0}^t \left[\sum_i \left(\tilde{u}_i(\tau) - \int_{t_0}^{\tau} \sum_j g_{ij}(s) f_j(s) ds \right)^2 + \alpha \sum_k p_k(\tau) f_k^2(\tau) \right] d\tau, \quad (11)$$

сводя таким образом задачу решения интегрального уравнения (9) к задаче минимизации функционала (11).

VII. Оценивание точности

Существует несколько способов оценивания точности решения уравнений, подобных рассматриваемому нами. Пример априорной оценки точности можно найти в [10], алгоритм получения апостериорной оценки подробно рассмотрен в [11].

Мы ограничимся эмпирической оценкой, дающей оценку снизу для наихудших значений вычислительной точности алгоритма Δ_C и точности метода регуляризации Δ_R . Для их нахождения решим две модельные задачи.

Зададим гладкую вектор-функцию x и по уравнению (1) вычислим $\bar{f}_{mod} = \dot{x} + Ax$, получив точное решение невозмущенного уравнения (9). Соответствующую ему правую часть u_{mod} вычислим, используя нормальное псевдорешение системы (2) $x_{norm} = T^+ y = T^+ Tx$. Таким образом, мы построили задачу решения уравнения (9) с невозмущенными исходными данными и известным точным решением. Если \tilde{f}_{mod} – решение построенной модельной задачи, полученное методом регуляризации, то наихудшая вычислительная точность алгоритма оценивается как

$$\Delta_C \geq \frac{\|\bar{f}_{mod} - \tilde{f}_{mod}\|}{\|\bar{f}_{mod}\|}.$$

Далее рассмотрим модельную задачу с возмущенными исходными данными для оценки точности Δ_R метода регуляризации. Как и выше, вычислим точное решение \bar{f}_{mod} по заданной гладкой вектор-функции x . Вычислим вектор наблюдений $y = Tx$, возмутим его, положив $y^{603M}(t) = y(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ – функция погрешности. Далее найдём возмущенное нормальное псевдорешение системы (2) $x_{norm}^{603M} = T^+ y^{603M}$ и вычислим возмущенную правую часть u_{mod}^{603M} уравнения (9). Если \tilde{f}_{mod}^{603M} – регуляризованное решение уравнения (9) с возмущенной правой частью,

то наихудшая точность регуляризирующего алгоритма оценивается как $\Delta_R \geq \frac{\|\bar{f}_{mod} - \tilde{f}_{mod}^{603M}\|}{\|\bar{f}_{mod}\|}$.

VIII. Численная реализация. Пример

В качестве примера была рассмотрена динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \\ y(t) = Tx(t), t_0 \leq t \leq h \end{cases}$$

второго порядка со следующими модельными параметрами:

$$t_0 = 0, \quad h = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = (2 \quad 3), \quad x(t) = \begin{pmatrix} 5 \cos 2t \\ 3 \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Дискретизацию задачи решения уравнения $\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t)$ проведём на равномерных сетках $\{t_k = k \cdot \frac{h}{N}, k = \overline{0, N}\}$ для t и s с $N = 100$. Параметр регуляризации выберем эмпирически (можно при выборе также пользоваться обобщённым принципом невязки, описанным в [9]), руководствуясь минимальностью относительной ошибки регуляризованного решения. На рис. 1 показано точное решение \bar{f}_{mod} и вычисленное приближённое решение \tilde{f}_{mod} . Относительная точность регуляризованного решения составила $\delta_1 f = 0,375$.

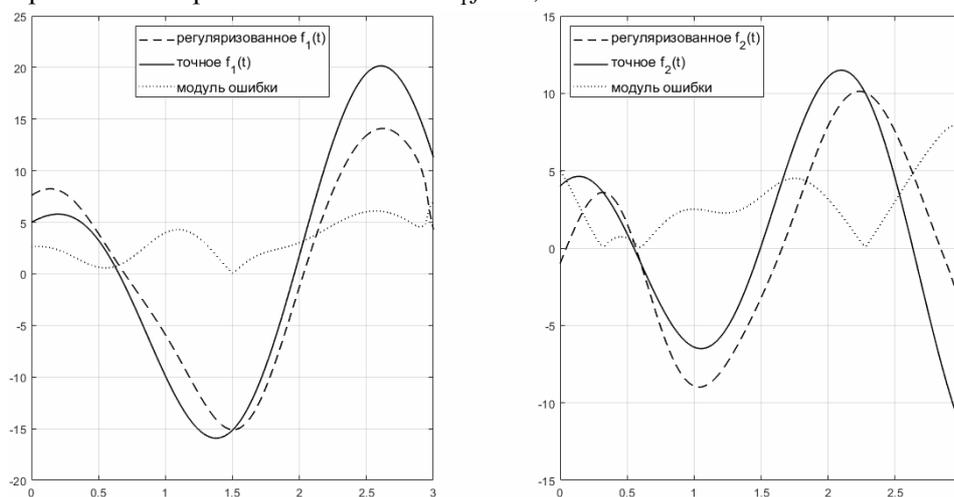


Рис. 1. Решение точной модельной задачи

Для построения возмущенной модельной задачи наложим на наблюдения y аддитивную нормально распределённую помеху с нулевым средним так, чтобы возмущённое $y^{возм}$ имело относительную ошибку 0,01. Решение $\tilde{f}_{mod}^{возм}$ возмущённой модельной задачи изображено на рис. 2. Относительная точность составила $\delta_2 f = 0,377$.

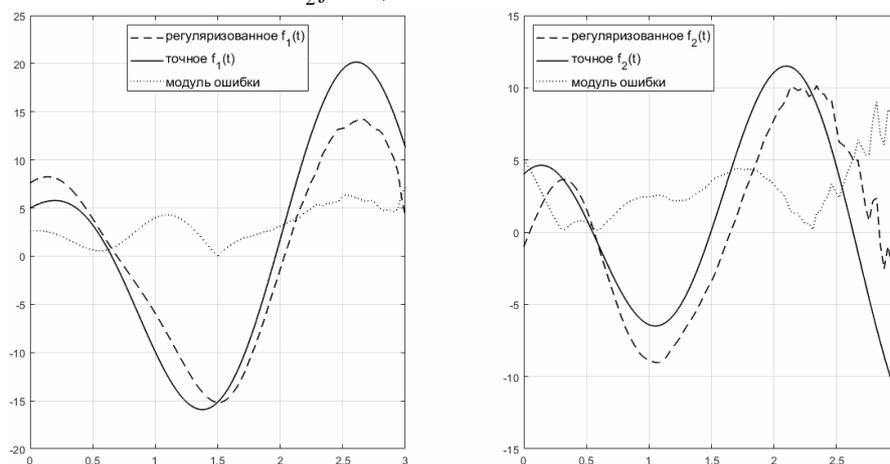


Рис. 2. Решение возмущённой модельной задачи

Видно, что относительная точность решения искаженной модельной задачи почти не изменилась по сравнению с точной модельной задачей. Заметим, что при этом величины $\delta_1 f$ и $\delta_2 f$ относительно велики. Это связано с тем, что решением интегрального уравнения (9) является вектор-функция \bar{f}_{norm} , которая вычисляется не по вектору x , задаваемому нами в модельной задаче, а по нормальному решению x_{norm} , то есть $\bar{f}_{norm} = \dot{x}_{norm} + Ax_{norm}$.

Эти соображения подтверждаются численным экспериментом. На рис. 3 изображено решение $\tilde{f}_{\text{норм}}$ точной модельной задачи в сравнении с $\bar{f}_{\text{норм}}$. Относительная точность $\delta_1 f_{\text{норм}} = 0,002$.

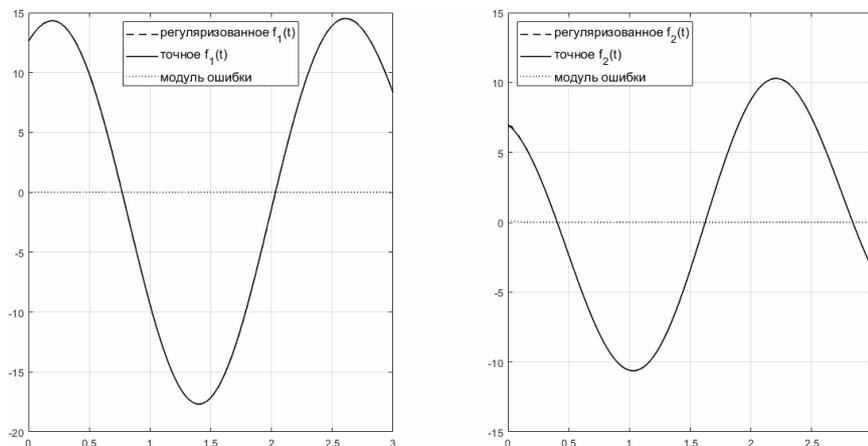


Рис. 3. Решение точной модельной задачи в сравнении с $\bar{f}_{\text{норм}}$

Для сравнения решим ту же искажённую модельную задачу и сравним её решение с $\bar{f}_{\text{норм}}$. На рис. 4 изображено приближённое решение $\tilde{f}_{\text{норм}}^{\text{возм}}$ и $\bar{f}_{\text{норм}}$. Относительная точность решения $\delta_2 f_{\text{норм}} = 0,101$.

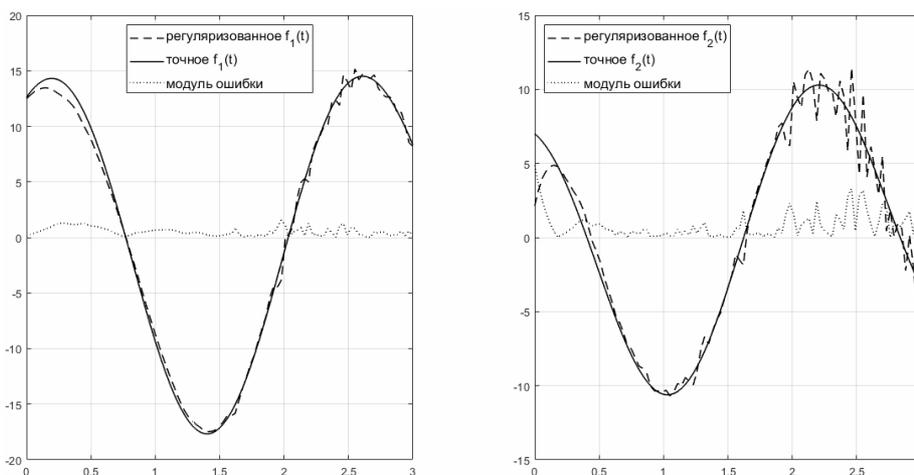


Рис. 4. Решение искажённой модельной задачи в сравнении с $\bar{f}_{\text{норм}}$

Таким образом, наблюдается неустранимая ошибка решения, связанная с разницей между x и нормальным псевдорешением $x_{\text{норм}}$ системы измерений (2). Очевидно, что в случае, если система измерений имеет единственное обычное решение, регуляризованное решение задачи (1)–(2) ведёт себя аналогично изображённому на рис. 4 приближённое решение.

Литература

1. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1983. – 198 с.
2. Ягола, А.Г. Некорректные задачи с априорной информацией / А.Г. Ягола. – Сиб. электрон. матем. изв. – 2010. – Т. 7. – С. 343–361.
3. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. – 261 с.
4. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 303 с.

5. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. – 256 с.
6. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
7. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
8. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
9. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
10. Заляпин, В.И. Оценка погрешности численного метода решения одной обратной задачи / В.И. Заляпин, Ю.С. Попенко, Е.В. Харитонова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 51–58.
11. Леонов, А.С. Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризирующих алгоритмах / А.С. Леонов // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 14–24.

Поступила в редакцию 5 октября 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 4, pp. 19–27*

DOI: 10.14529/mmph200402

INTEGRAL EQUATIONS METHOD FOR A VECTOR INVERSE PROBLEM

V.I. Zaliapin, V.S. Shalgin

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: zaliapinvi@susu.ru

The paper discusses a dynamic system described by a system of linear differential equations. In many cases, instead of the true signal, which is perceived by the measuring device, a distorted signal is observed at the output, which significantly differs in structure, magnitude, and time parameters from the true one. Such distortions are generated by the operation principles of the measuring device, noise or interference contained in the input signal, and distortions arising from the operation of the device itself. Under these conditions, one of the problems of significant interest for applications is the inverse problem, restoring the input signal from the available information (including indirect information) about the signal at the output of the system and estimating the accuracy of the solutions obtained. The paper proposes a method of integral equations and its numerical implementation, which make it possible to effectively restore the input action on a dynamic system from indirect experimental information.

Keywords: linear dynamical system; indirect measurements; pseudosolution; system of integral equations; regularization.

References

1. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya* (Regularizing Algorithms and a Priori Information), Moscow, Nauka Publ., 1983, 198 p. (in Russ.).
2. Yagola A.G. Ill-posed Problems with Apriori Information. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2010, Vol. 7, pp. 343–361. (in Russ.).
3. Vasin V.V., Ageev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoj informatsiyey*. Ekaterinburg, UIF Nauka Publ., 1993, 261 p. (in Russ.).
4. Voevodin V.V. *Vychislitel'nye osnovy lineynoy algebrы* (Computational Foundations of Linear Algebra). Moscow, Nauka Publ., 1977, 303 p. (in Russ.).

5. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyah* (Methods of the Automatical Control Theory to Dynamical Measurements). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013, 256 p. (in Russ.).

6. Khartman F. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Moscow, Mir Publ., 1970, 720 p. (in Russ.).

7. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for Solving Ill-Posed Problems), Moscow, Nauka Publ., 1986, 286 p. (in Russ.).

8. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i yeye prilozheniya* (The Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications), Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).

9. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems). Moscow, Nauka Publ., 1990, 229 p. (in Russ.).

10. Zalyapin V.I., Popenko Yu.S., Kharitonova Ye.V. Error Estimate of Numerical Method for Solving an Inverse Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2013, Vol. 6, no. 3, pp. 51–58. (in Russ.).

11. Leonov A.S. On a Posteriori Accuracy Estimates for Solutions of Linear Ill-Posed Problems and Extra-Optimal Regularizing Algorithms. *Num. Meth. Prog.*, 2010, Vol. 11, no. 1, pp. 14–24. (in Russ.).

Received October 5, 2020

CAUCHY FRACTIONAL DERIVATIVE

U. Kaya

Bitlis Eren University, Bitlis, Turkey
E-mail: mat-ufuk@hotmail.com

In this paper, we introduce a new sort of fractional derivative. For this, we consider the Cauchy's integral formula for derivatives and modify it by using Laplace transform. So, we obtain the fractional derivative formula $F^{(\alpha)}(s) = L\{(-1)^{(\alpha)}L^{-1}\{F(s)\}\}$. Also, we find a relation between Weyl's fractional derivative and the formula above. Finally, we give some examples for fractional derivative of some elementary functions.

Keywords: Weyl's fractional derivative fractional calculus Laplace transform Cauchy's integral formula for derivatives.

Introduction

Cauchy's integral formula for derivatives is given by the following relation

$$F^{(n)}(s) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}}, \quad s \in \text{int}(C), \quad n \in \mathbb{N}.$$

It calculates the derivative of order n of an analytic function when n is a nonnegative integer. Also, it seems to calculate the derivative of fractional order when we write $\alpha > 0$ instead of n :

$$F^{(\alpha)}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_C \frac{F(w)dw}{(w-s)^{\alpha+1}}, \quad s \in \text{int}(C). \quad (1)$$

However, it is not as simple as it looks. Because the contour integral in the formula (1) is so complicated. Moreover, the function $(w-s)^{\alpha+1}$ is multi-valued. Hence, the value of the contour integral in (1) is not independent of the choice of closed curve C . Formula (1) is an unpractical one to calculate the fractional derivative of a function. Therefore, it needs a modification. Here, we modify the formula (1). By making some calculations, we return it to the formula

$$F^{(\alpha)}(s) = L\{(-x)^\alpha L^{-1}\{F\}\}, \quad (2)$$

where L is the Laplace transform.

Weyl's fractional derivative is given by the following formula

$${}_s W_\infty^\alpha F(s) = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{ds^n} \int_s^\infty \frac{F(t)dt}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \quad (3)$$

where $s > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ [1]. Raina and Koul [1] proved in 1979 that the Laplace transform of the function $(-x)^\alpha f(x)$ is equal to α^{th} derivative, in the sense of Weyl, of the Laplace transform of f . This means that the fractional derivative of a function F with the inverse Laplace transform can be calculated by the following formula

$${}_s W_\infty^\alpha F(s) = L\{(-x)^\alpha L^{-1}\{F\}\}. \quad (4)$$

In this work, we move the contour integral in the formula (1) to an infinite vertical line, and then we prove the relation (2). Finally, we give some examples.

Laplace Transform and Cauchy's Integral Formula for Derivatives

Let f be a continuous function from $[0, +\infty)$ to \mathbb{C} and satisfy the inequality $|f(x)| \leq Me^{ax}$ for some $a, M \in \mathbb{R}$. Then, its Laplace transform is defined by the following

$$L\{f\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx,$$

where $Re(s) > a$ and $a \in \mathbb{R}$. We denote the Laplace transform of a function f by $F(s)$, i.e.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx. \tag{5}$$

For example, the Laplace transform of the function $f(x) = (-x)^\alpha e^{wx}$ is

$$F(s) = -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(w-s)^{\alpha+1}}, \tag{6}$$

where $\alpha > 0$, $Re(s) > Re(w)$ and Γ is the gamma function given by

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Laplace transform forms an invertible linear operator. Mellin's inverse formula for Laplace operator is given by the line integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)e^{wx} dw, \tag{7}$$

where c is a suitable real constant [2].

Now, we recall Cauchy's integral formula for derivative. Assume that D is a region in the Complex plane \mathbb{C} , F is an analytic function in D , $s \in D$, C is a curve satisfying the condition $s \in \text{int}(C)$ and $n \in \mathbb{N}$; then the n^{th} derivative of F is given by the following formula [3]

$$F^{(n)}(s) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}}. \tag{8}$$

Cauchy's Integral Formula for Derivatives on an Infinite Vertical Line

Lemma 1. Assume that F and f are two functions satisfying the condition (5). Then, F is an analytic function in the region $Re(s) > a$ and it is bounded in the region $Re(s) \geq c$ for each $c > a$. Besides, the improper integral in (5) is uniformly convergent on the region $Re(s) \geq c$ [2].

Definition 1. If a function F is the Laplace transform of a function, then we state that it is a Laplace type function.

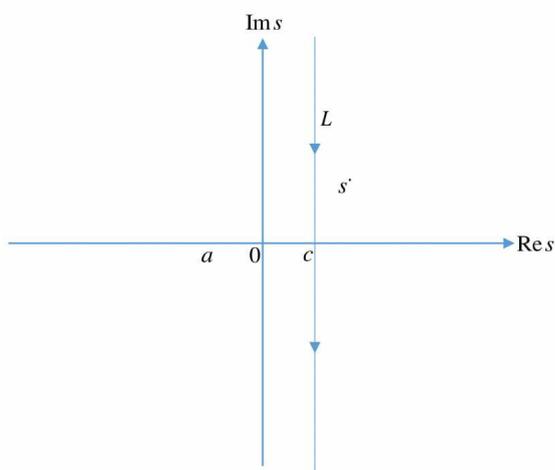


Fig. 1. Infinite vertical line

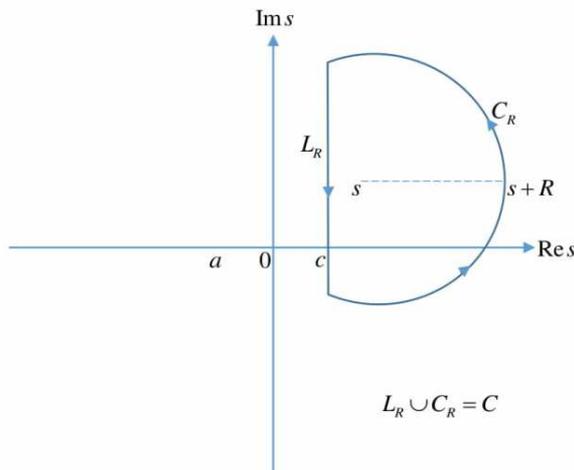


Fig. 2. Half circle

Lemma 2. Let F be a Laplace type function and $n \in \mathbb{N}$. Then, Cauchy's integral formula for derivatives (see (8)) can be written as follows:

$$F^{(n)}(s) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}},$$

where $a < c < \operatorname{Re}(s)$. Note that the integral above is taken on the infinite vertical line L shown in Figure 1.

Proof. By Cauchy's integral formula for derivatives (8) and by the structure of the curve C shown in the Figure 2, we obtain

$$F^{(n)}(s) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}} + \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}}.$$

By Lemma 1, there exists a positive number M such that $|F(w)| \leq M$. Then, we have

$$\left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{F(w)dw}{(w-s)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|F(w)||dw|}{|w-s|^{n+1}} \leq \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}} \int_{C_R} |dw| = \frac{Mn!}{2R^n}.$$

The last relation shows that the value of the integral on the half circle C_R vanishes when $R \rightarrow +\infty$. This ends the proof.

Cauchy Fractional Derivative

Definition 2. Let F be a Laplace type function and α be a positive real number. We denote Cauchy fractional derivative of order α by ${}_s C_\infty^\alpha F(s)$ and define as the following relation

$${}_s C_\infty^\alpha F(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{F(w)dw}{(w-s)^{\alpha+1}}, \quad (9)$$

where $a < c < \operatorname{Re}(s)$ (see Fig. 1).

Remark. Since the function F in the formula (9) is a Laplace type function, then there exists at least one real number a such that F is analytic in the region $\operatorname{Re}(w) > a$. Furthermore, the function $(w-s)^{\alpha+1}$ has

$$\inf \{k \in \mathbb{N} \mid k\alpha \in \mathbb{N}\}$$

analytic branches in the region

$$\mathbb{C} \setminus \{w = \xi + i\operatorname{Im}(s) \mid \xi \geq \operatorname{Re}(s)\}.$$

So, there are $\inf \{k \in \mathbb{N} \mid k\alpha \in \mathbb{N}\}$ values of Cauchy fractional derivative for any function F . And also, one can simply see that these values are independent of the choice of the real number c in the interval $(a, \operatorname{Re}(s))$.

Theorem 1. Let F be a Laplace type function and α be a positive real number. Then the Cauchy fractional derivative ${}_s C_\infty^\alpha F(s)$ holds the following relation

$${}_s C_\infty^\alpha F(s) = L\{(-x)^\alpha L^{-1}\{F\}\} = {}_s W_\infty^\alpha F(s).$$

Proof. We begin by writing the definition of the Cauchy fractional derivative:

$${}_s C_\infty^\alpha F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} F(w) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(w-s)^{\alpha+1}} dw.$$

By the formula (6), we obtain

$${}_s C_\infty^\alpha F(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} F(w) L\{(-x)^\alpha e^{wx}\} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w) \left(\int_0^\infty (-x)^\alpha e^{(w-s)x} dx \right) dw.$$

By using the uniform convergence of the Laplace's improper integral and the boundedness of the function F (see Lemma 1), we can change the order of integration, i.e.

$${}_s C_\infty^\alpha F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)(-x)^\alpha e^{(w-s)x} dw dx = \int_0^\infty (-x)^\alpha e^{-sx} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w) e^{wx} dw \right) dx.$$

By the inverse Laplace formula (7), the fractional derivative ${}_s C_\infty^\alpha F(s)$ can be written as

$${}_s C_\infty^\alpha F(s) = \int_0^\infty (-x)^\alpha e^{-sx} L^{-1}\{F\} dx = L\{(-x)^\alpha L^{-1}\{F\}\}. \tag{10}$$

The formulas (4) and (10) completes the proof.

Example 1. By using well-known formula

$$L\{x^{r-1}\} = \frac{\Gamma(r)}{s^r}, \quad r > 0,$$

we have

$${}_s C_\infty^\alpha \frac{1}{s^r} = L\left\{(-x)^\alpha L^{-1}\left\{\frac{1}{s^r}\right\}\right\} = \frac{1}{\Gamma(r)} L\{(-x)^\alpha x^{r-1}\} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(r)} L\{x^{\alpha+r-1}\} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(r) s^{\alpha+r}}.$$

In a similar way, we can obtain the following

$${}_s C_\infty^\alpha \frac{1}{(s-a)^r} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(r)(s-a)^{\alpha+r}},$$

where $a \in \mathbb{C}$.

A table of some functions' $\frac{1}{2}$ th derivatives is given in the following:

$\frac{1}{2}$ th derivative of some functions

Function, $F(s)$	$\frac{1}{2}$ th derivative, ${}_s C_\infty^{\frac{1}{2}} F(s)$
$\arctan \frac{1}{s}$	$\pm \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{s+i} - \sqrt{s-i})}{2\sqrt{s^2+1}}$
$\frac{1}{s^2+1}$	$\pm \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{(s+i)^3} - \sqrt{(s-i)^3})}{4\sqrt{(s^2+1)^3}}$
$\frac{s}{s^2+1}$	$\pm \frac{i\sqrt{\pi} (\sqrt{(s+i)^3} + \sqrt{(s-i)^3})}{4\sqrt{(s^2+1)^3}}$
$\frac{\ln s}{s}$	$\pm \frac{i\sqrt{\pi} (\ln s + 2 \ln 2 - 2)}{2s^{3/2}}$
$\frac{e^{-s}}{s}$	$\pm i \left(\frac{e^{-s}}{s} + \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{s})}{2s^{3/2}} \right)$

Example 2. We can use the Dirac Delta function, which is a generalized function denoted by $\delta(x)$ and defined by the equality $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b)f(x)dx = f(b)$, to calculate the Cauchy fractional derivative. Let $F(s) = e^{-bs}$, $b > 0$. Then, the inverse Laplace transform of it is $\delta(x-b)$ and we have

$${}_sW_{\infty}^{\alpha} e^{-bs} = L\left\{(-x)^{\alpha} L^{-1}\left\{e^{-bs}\right\}\right\} = L\left\{(-x)^{\alpha} \delta(x-b)\right\} = (-b)^{\alpha} e^{-bs}.$$

To illustrate,

$${}_sW_{\infty}^{\frac{1}{2}} e^{-s} = \pm ie^{-s}.$$

References

1. Raina R.K., Koul C.L. On Weyl Fractional Calculus. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, Vol. 73, no. 2, pp. 188–192. DOI: 10.1090/S0002-9939-1979-0516462-4
2. Debnath L., Bhatta D. *Integral Transforms and Their Applications*. CRC press, Boca Raton, 2014, 818 p.
3. Ahlfors V.L. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Inc., New York, 1979, 336 p.

Received September 4, 2020

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 4, pp. 28–32*

DOI: 10.14529/mmph200403

ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ КОШИ

У. Кайя

*Университет Битлис Эрен, Битлис, Турция
E-mail: mat-ufuk@hotmail.com*

Вводится новый вид дробной производной. Рассматривая интегральную формулу Коши для производных, и модифицируя её с помощью преобразования Лапласа, автор получает формулу дробной производной в виде $F^{(\alpha)}(s) = L\{(-1)^{(\alpha)} L^{-1}\{F(s)\}\}$. Установлена связь между дробной производной Вейля и приведенной выше формулой. В завершение работы приведены примеры дробных производных некоторых элементарных функций.

Ключевые слова: дробная производная Вейля; дробное исчисление; преобразование Лапласа; интегральная формула Коши для производных.

Литература

1. Raina, R.K. On Weyl Fractional Calculus / R.K. Raina, C.L. Koul // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1979. – Vol. 73, no. 2. – P. 188–192.
2. Debnath, L. *Integral Transforms and Their Applications* / L. Debnath, D. Bhatta. – CRC press, Boca Raton, 2014. – 818 p.
3. Ahlfors, V.L. *Complex Analysis* / V.L. Ahlfors. – McGraw-Hill Inc., New York, 1979. – 336 p.

Поступила в редакцию 4 сентября 2020 г.

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ, НЕ ИМЕЮЩИХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Рассматриваются автономные дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых являются полиномами степени n относительно первой производной с периодическими непрерывными коэффициентами, и соответствующие векторные поля на цилиндрическом фазовом пространстве. Свободный член и старший коэффициент полинома предполагаются не обращающимися в нуль, что равносильно отсутствию особых точек векторного поля. Рассматриваются грубые уравнения, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при малых возмущениях в классе рассматриваемых уравнений. Доказано, что уравнение является грубым тогда и только тогда, когда все его замкнутые траектории являются гиперболическими. Грубые уравнения образуют открытое и всюду плотное множество в пространстве рассматриваемых уравнений. Показано, что при $n > 4$ уравнение степени n может иметь сколь угодно много предельных циклов. При $n = 4$ определяется возможное число предельных циклов в случае, когда свободный член и старший коэффициент уравнения имеют противоположные знаки.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка; полиномиальная правая часть; цилиндрическое фазовое пространство; число предельных циклов; грубость.

Введение

Дифференциальное уравнение

$$a: \ddot{x} = a_n(x)\dot{x}^n + \dots + a_1(x)\dot{x} + a_0(x), \quad (1)$$

с ω -периодическими непрерывными коэффициентами $a_k(x)$, $x \in \mathbf{R}$, естественно считать заданным на окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$. Такие уравнения, например, описывают динамику кругового маятника. Множество уравнений вида (1) обозначим A_ω^n . Пусть $C(\mathbf{S}^1)$ – банахово пространство непрерывных ω -периодических функций с нормой $\|g\|_C := \max_{x \in \mathbf{R}} |g(x)|$. Биекция

$\underbrace{C(\mathbf{S}^1) \oplus \dots \oplus C(\mathbf{S}^1)}_{n+1} \ni (a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto a \in A_\omega^n$ вводит в A_ω^n структуру банахова пространства с нормой $\|a\| = \max_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \|a_i\|_C$.

Уравнение $a \in A_\omega^n$ определяет на фазовом пространстве $\Phi := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ векторное поле

$$\bar{a}(x, y) = y \partial / \partial x + a(x, y) \partial / \partial y, \quad \text{где } a(x, y) = a_n(x)y^n + \dots + a_1(x)y + a_0(x). \quad (2)$$

Его траектории называются *траекториями уравнения* a в фазовом пространстве Φ .

Обозначим через \bar{A}_ω^n открытое подмножество в A_ω^n , состоящее из уравнений, для которых при всех x $a_0(x) \neq 0$, $a_n(x) \neq 0$. Условие $\forall x \ a_n(x) \neq 0$ можно трактовать как отсутствие бесконечно удаленных особых точек [1]. Условие $\forall x \ a_0(x) \neq 0$ означает отсутствие особых точек у векторного поля \bar{a} . Отсутствие особых точек влечет и отсутствие замкнутых траекторий, гомотопных нулю на цилиндре Φ . Представляет интерес оценка числа замкнутых траекторий, не гомотопных нулю.

Имеется ряд статей, например [1–6], в которых даются оценки числа замкнутых траекторий для разного рода полиномиальных уравнений. В частности, в статье [1] были найдены возмож-

ные число и тип замкнутых траекторий уравнения $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$ для случаев $n = 1, 2, 3$. В разделе 1 настоящей работы мы рассмотрим случай $n \geq 4$.

В теории динамических систем фундаментальную роль играет понятие грубой (структурно устойчивой) системы, для которой топологическая структура фазового портрета не меняется при «малых» возмущениях системы [7]. Для динамических систем, заданных C^1 -векторными полями на замкнутом многообразии, получены необходимые и достаточные условия грубости относительно пространства таких векторных полей с C^1 -топологией [8]. Представляет интерес получение естественных необходимых и достаточных условий грубости относительно более «узких» пространств векторных полей. В настоящей работе эта задача решена для пространства $\bar{\bar{A}}_\omega^n$. В разделе 2 дано определение грубости уравнения $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$, установлено, что уравнение является грубым тогда и только тогда, когда все его замкнутые траектории являются гиперболическими, и доказано, что множество грубых уравнений открыто и всюду плотно в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$.

1. Оценки числа замкнутых траекторий для уравнения из $\bar{\bar{A}}_\omega^n$

Траектории уравнения (1) на множестве $\{(x, y) \in \Phi : y \neq 0\}$ совпадают с траекториями дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3)$$

где $f(x, y) := a_n(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y + a_1(x) + a_0(x)/y$.

Пусть $\varphi(u, x)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(u, 0) = u$. Траектория $y = \varphi(y_0, x)$ является замкнутой тогда и только тогда, когда y_0 – нуль функции расхождения $d(u) := \varphi(u, \omega) - u$. Для уравнения (3) функция расхождения является аналитической [9]. Кратность ее нуля y_0 называется *кратностью замкнутой траектории*. Если $d'(y_0) \neq 0$, то замкнутая траектория называется *гиперболическим предельным циклом*. Она устойчива (неустойчива) при $y_0 d'(y_0) < 0$ ($y_0 d'(y_0) > 0$). В случае $d'(y_0) = 0, d''(y_0) \neq 0$ замкнутая траектория называется *двойным циклом*, а в случае $d'(y_0) = d''(y_0) = 0, d'''(y_0) \neq 0$ – *тройным циклом*.

Теорема 1. Для любого натурального числа N и любого $n \geq 5$ существует уравнение $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$, имеющее не менее N гиперболических предельных циклов.

Замкнутые траектории уравнения $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^4$ принадлежат либо области $S^1 \times (0, \infty)$, либо области $S^1 \times (-\infty, 0)$. Мы ограничимся оценкой числа замкнутых траекторий, принадлежащих области $\Phi^+ := S^1 \times (0, \infty)$, поскольку отображение $y \mapsto -y$ преобразует уравнение (3) в уравнение, для которого замкнутые траектории, принадлежащие $S^1 \times (0, \infty)$, являются образами при этом отображении замкнутых траекторий уравнения a , принадлежащих $S^1 \times (-\infty, 0)$.

Теорема 2. Пусть уравнение $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^4$ и для любого $x \in \mathbf{R}$ $a_0(x)a_4(x) < 0$. Тогда это уравнение имеет в Φ^+ либо 1) три гиперболических предельных цикла, либо 2) один гиперболический и один двойной цикл, либо 3) один гиперболический предельный цикл, либо 4) один тройной цикл.

Замечание. В случае $a_0(x)a_4(x) > 0$ вопрос о возможном числе замкнутых траекторий уравнения $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^4$ остается открытым.

Доказательство теоремы 1. Согласно [3, 4] существует уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a_4(x)y^3 + a_3(x)y^2 + a_2(x)y$$

с ω -периодическими непрерывными коэффициентами $a_i(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $i = 2, 3, 4$, имеющее $K \geq N$ замкнутых траекторий, задаваемых уравнениями $y = p_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, K$, где p_k – ω -периодическая C^1 -функция, не обращающаяся в нуль. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, \mu), \text{ где } F(x, y, \mu) = a_4(x)y^3 + a_3(x)y^2 + (a_2(x) + \mu)y. \quad (4)$$

Пусть $Y(x, u, \mu)$ – его решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(0, u, \mu) = u$. При u и μ достаточно близких соответственно к $p_k(0)$ и 0, оно определено для $x \in [0, \omega]$ и аналитически зависит от u, μ [9]. Функция расхождения $d(u, \mu) = Y(\omega, u, \mu) - u$ аналитическая и имеет нули $p_k(0)$. Производная $Y'_\mu(x, p_k(0), 0)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Y'_\mu(x, p_k(0), 0) = F'_y(x, p_k(x), 0) Y'_\mu(x, p_k(0), 0) + p_k(x)$$

и начальному условию $Y'_\mu(0, p_k(0), 0) = 0$. Поэтому

$$d'_\mu(p_k(0), 0) = Y'_\mu(\omega, p_k(0), 0) = \int_0^\omega p_k(x) \exp \int_x^\omega F'_y(s, p_k(s), 0) ds dx \neq 0.$$

Пусть замкнутые траектории пронумерованы так, что траектория номером $k \in \{L+1, \dots, K\}$ имеет нечетную кратность, а с номером $k \in \{1, \dots, L\}$ – четную кратность $2m_k$, причем для M из них величина $\sigma_k := d'_\mu(p_k(0), 0) \partial^{2m_k}(p_k(0), 0) / \partial u^{2m_k}$ отрицательна, а для остальных $L-M$ она положительна. Согласно [7, с. 404, лемма 3] при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ функция $d(\cdot, \mu)$ будет иметь простые нули $u_k(\mu)$, $u_k(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, $k = L+1, \dots, K$. Согласно [7, с. 404, лемма 2] при достаточно малых $|\mu| \neq 0$, $\text{sgn } \mu = -\text{sgn } \sigma_k$, $d(\cdot, \mu)$ будет иметь простые нули $u_{k,s}(\mu)$, $u_{k,s}(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, L$, $s = 1, 2$. Выбрав μ достаточно близким к нулю и так, что $\mu > 0$, если $M \geq L-M$ и $\mu < 0$, если $M < L-M$, получим, что $d(\cdot, \mu)$ имеет не менее $L \geq N$ простых нулей, а уравнение (4) не менее N гиперболических предельных циклов.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon y^{n-1} + a_4(x)y^3 + a_3(x)y^2 + (a_2(x) + \mu)y + \frac{\varepsilon}{y}$$

Пусть $Y(x, u, \varepsilon)$ – его решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(0, u, \varepsilon) = u$, $d(u, \varepsilon) = Y(\omega, u, \varepsilon) - u$ – функция расхождения, $Y(x, u_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$ периодические решения уравнения при $\varepsilon = 0$, задающие гиперболические предельные циклы. Так как $d(u_k, 0) = 0$, $d'_\mu(u_k, 0) \neq 0$, $k = 1, \dots, N$, то по теореме о неявной функции получаем, что при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет N простых нулей $\hat{u}_k(\varepsilon)$, $\hat{u}_k(\varepsilon) \rightarrow u_k$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($k = 1, \dots, N$). Но тогда уравнение $\ddot{x} = \varepsilon \dot{x}^n + a_4(x)\dot{x}^4 + a_3(x)\dot{x}^3 + (a_2(x) + \mu)\dot{x}^2 + \varepsilon$ принадлежит \bar{A}_ω^n и имеет не менее N гиперболических предельных циклов. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $a_0(x) < 0$, $a_4(x) > 0$. Случай $a_0(x) > 0$, $a_4(x) < 0$ сводится к рассматриваемому случаю заменой в уравнении (3) x на $-x$.

Так как $a_4(x) > 0$, то существует такое число $R > 0$, что

$$a(x, y) > 0, \text{ если } x \in \mathbf{S}^1, |y| \geq R. \quad (5)$$

Поэтому траектории векторного поля \bar{a} трансверсальны линиям $y = \rho$ при $|\rho| \geq R$. Отсюда следует, что все замкнутые траектории уравнения a в Φ^+ принадлежат области $\Phi_R^+ := \mathbf{S}^1 \times (0, R)$. Из неравенства $a_0(x) < 0$ и (5) получаем, что траектории уравнения a в точках $\partial\Phi_R^+ = \mathbf{S}^1 \times \{0\} \cup \mathbf{S}^1 \times \{R\}$ выходят из Φ_R^+ . Поэтому сумма кратностей замкнутых траекторий, лежащих в Φ^+ , нечетна.

В рассматриваемом случае функции $\varphi(u, \omega)$, $d(u)$ и $h(u) := \int_0^\omega f'_y(x, \varphi(u, x)) dx = \ln \varphi'_u(u, \omega)$ определены и являются аналитическими на некотором интервале J .

Лемма. Для любого $u \in J$ $h''(u) > 0$.

Лемма является модификацией утверждения из статьи [10], имеющего в наших обозначениях следующий вид. Для уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью $f(x, y)$, ω -периодической по x , имеющей непрерывную производную $f'_y(x, y)$, строго выпуклую по аргументу y , функция $h(u)$ строго выпукла.

Доказательство леммы. Обозначим

$$g(u, x) := \int_0^x f'_y(x, \varphi(u, x)) dx = \ln \varphi'_u(u, x) \text{ для } u \in J, x \in [0, \omega].$$

Тогда

$$g'_u(u, x) = \int_0^x f''_{yy}(x, \varphi(u, x)) \varphi'_u(u, x) dx = \frac{\varphi''_{uu}(u, x)}{\varphi'_u(u, x)}, \quad g''_{xu}(u, x) = f''_{yy}(x, \varphi(u, x)) \varphi'_u(u, x). \quad (6)$$

Производная $h''(u) = I_1(u) + I_2(u)$, где

$$I_1(u) = \int_0^\omega f'''_{yyy}(x, \varphi(u, x)) (\varphi'_u(u, x))^2 dx, \quad I_2(u) = \int_0^\omega f''_{yy}(x, \varphi(u, x)) \varphi''_{uu}(u, x) dx.$$

Используя (6), получаем

$$I_2(u) = \int_0^\omega f''_{yy}(x, \varphi(u, x)) \varphi'_u(u, x) \frac{\varphi''_{uu}(u, x)}{\varphi'_u(u, x)} dx = \\ = \int_0^\omega g''_{xu}(u, x) g'_u(u, x) dx = [(g'_u(u, \omega))^2 - (g'_u(u, 0))^2] / 2 = (g'_u(u, \omega))^2 / 2 \geq 0.$$

Так как $f'''_{yyy}(x, y) = 6(a_4(x) - a_0(x)/y^4) > 0$ для всех $(x, y) \in \Phi^+$, то $I_1(u) > 0$. В итоге получаем $h''(u) > 0$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Все варианты, перечисленные в теореме, очевидно можно реализовать для уравнений с постоянными коэффициентами a_k , $k = 0, \dots, 4$.

- 1) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x}^2 - 1)(\dot{x} - 2)(\dot{x} - 3)$ имеют Φ^+ три гиперболических предельных цикла.
- 2) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x}^2 - 1)(\dot{x} - 2)^2$ и $\ddot{x} = \pm(\dot{x} - 1)^2(\dot{x}^2 - 4)$ имеют в Φ^+ двойной цикл и гиперболический предельный цикл.
- 3) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x}^3 - 1)(\dot{x} + 1)$ имеют в Φ^+ один гиперболический предельный цикл.
- 4) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x} - 1)^3(\dot{x} + 1)$ имеют в Φ^+ тройной цикл.

Покажем, что других вариантов не может быть.

Так как $\forall u \in J$ $h''(u) > 0$, то h строго выпукла на J , и из [10] следует, что уравнение имеет в Φ^+ не более трех замкнутых траекторий.

Пусть уравнение имеет в Φ^+ три замкнутые траектории $L_k: y = \varphi(u_k, x)$, $k = 1, 2, 3$, $0 < u_1 < u_2 < u_3 < R$. Тогда $[u_1, u_3] \subset J$. Покажем, что все три замкнутые траектории L_k гиперболические. Предположим временно, что это не так, то есть $d(u_s) = d'(u_s) = 0$ при некотором $s \in \{1, 2, 3\}$. Так как $d(u_k) = 0$, $k = 1, 2, 3$, то существуют такие числа $\xi_i \in (u_i, u_{i+1})$, $i = 1, 2$, что $d'(\xi_i) = 0$. Но тогда $\varphi'_u(u_s, \omega) = \varphi'_u(\xi_1, \omega) = \varphi'_u(\xi_2, \omega) = 1$ и $h(u_s) = h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$. Поскольку эти равенства противоречат утверждению леммы, то сделанное предположение неверно и траектории L_k , $k = 1, 2, 3$, – гиперболические предельные циклы. Ясно, что L_2 – устойчивый предельный цикл, а L_1 и L_3 – неустойчивые предельные циклы.

Пусть уравнение имеет в Φ^+ две замкнутые траектории $y = \varphi(u_1, x)$ и $y = \varphi(u_2, x)$, кратностей соответственно n_1 и n_2 . Если обе кратности больше 1, то $d(u_k) = d'(u_k) = 0$, $k = 1, 2$. По теореме Ролля $d'(\xi) = 0$, где число ξ находится между числами u_1 и u_2 , но отлично от них. Тогда $h(u_1) = h(u_2) = h(\xi) = 0$ в противоречие с утверждением леммы. Таким образом, одно из чисел n_1 или n_2 равно единице. Пусть $n_2 = 1$. Тогда $n_1 \geq 2$ и четно. Предположим временно, что

$n_1 = 2m \geq 4$. Разложим $d(u) = \varphi(u, \omega) - u$ в ряд по степеням $u - u_1$ и дважды продифференцируем:

$$\varphi(u, \omega) - u = a(u - u_1)^{2m} + \dots, \text{ где } a \neq 0,$$

$$\varphi'_u(u, \omega) = 1 + 2ma(u - u_1)^{2m-1} + \dots, \quad \varphi''_{uu}(u, \omega) = 2m(2m-1)a(u - u_1)^{2m-2} + \dots.$$

Функцию $h'(u) = \varphi''_{uu}(u, \omega) / \varphi'_u(u, \omega)$ также разложим в ряд и продифференцируем:

$$h'(u) = 2m(2m-1)a(u - u_1)^{2m-2} + \dots, \quad h''(u) = 2m(2m-1)(2m-2)a(u - u_1)^{2m-3} + \dots.$$

Получаем, что $h''(u)$ меняет знак в окрестности точки u_1 . Но это противоречит утверждению леммы. Поэтому сделанное предположение неверно и $n_1 = 2$. Таким образом, если уравнение имеет в Φ^+ две замкнутые траектории, то одна из них – двойной цикл, а вторая – неустойчивый гиперболический предельный цикл.

Пусть уравнение имеет в Φ^+ единственную замкнутую траекторию $y = \varphi(u_1, x)$. Ее кратность s нечетна. Как и выше получаем, что при $s > 3$ $h''(u) = s(s-1)(s-2)a(u - u_1)^{s-3} + \dots$ и $h''(u_1) = 0$, что противоречит утверждению леммы. Поэтому $s = 1$ или $s = 3$.

Теорема 2 доказана.

2. Грубость уравнений из $\bar{\bar{A}}_\omega^n$

Уравнения $a, \tilde{a} \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$, переводящий ориентированные траектории уравнения a в ориентированные траектории уравнения \tilde{a} .

Уравнение $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$ назовем *грубым* (относительно $\bar{\bar{A}}_\omega^n$), если существует такая его окрестность $U(a)$ в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$, что a и любое уравнение $\tilde{a} \in U(a)$ топологически эквивалентны.

Обозначим $\Sigma = \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ множество уравнений из $\bar{\bar{A}}_\omega^n$, у которых все замкнутые траектории гиперболические.

Теорема 3. *Множество $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ открыто и всюду плотно в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$. Уравнение $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$ является грубым тогда и только тогда, когда оно принадлежит $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$.*

Доказательство теоремы 3. Докажем плотность $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$. Пусть уравнение $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n \setminus \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ и записано в виде (1). Из условия $\forall x a_n(x) \neq 0$ следует существование такого числа $R > 0$, что векторное поле \bar{a} трансверсально кривым $y = \rho$ при $|\rho| \geq R$, и потому все замкнутые траектории принадлежат области $S^1 \times (-R, R)$ и их конечное число. Пусть уравнения замкнутых траекторий $y = p_k(x)$, $k = 1, \dots, K$. Зададим окрестность $U(a)$ уравнения a в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$. Рассмотрим уравнение $a^\mu \in \bar{\bar{A}}_\omega^n \setminus \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$: $\ddot{x} = a^\mu(x, \dot{x})$, где $a^\mu(x, y) = a_n(x)y^n + \dots + (a_1(x) + \mu)y + a_0(x)$. Выберем такое $\bar{\mu} > 0$, что $\forall \mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$ $a^\mu \in U(a)$, а векторное поле \bar{a}^μ трансверсально кривым $y = \rho$ при $|\rho| \geq R$. Как и при доказательстве теоремы 1 получаем, что для функции расхождения $d(u, \mu)$ производная $d'_\mu(p_k(0), 0) \neq 0$. Поэтому из [7, с. 404, леммы 2 и 3] следует, что при достаточно малом $\mu \in (0, \bar{\mu})$ в малой окрестности каждой замкнутой траектории уравнения a имеется не более двух замкнутых траекторий уравнения a^μ , причем эти траектории являются гиперболическими предельными циклами. Аналогично [7, с. 182] доказывается, что при достаточно малом $\mu \in (0, \bar{\mu})$ других замкнутых траекторий уравнение a^μ не имеет. Тем самым $a^\mu \in U(a) \cap \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ и плотность $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$ доказана.

Докажем открытость $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ и грубость уравнений из $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$. Заметим, что мы не можем прямо сослаться на известные результаты о грубых векторных полях на плоскости [7] потому, что векторное поле \bar{a} не C^1 -гладкое.

Правая часть уравнения (3), соответствующего уравнению $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$, является непрерывной функцией от x, y, a и гладкой функцией от y, a . Поэтому решение $Y(x, u, a)$ уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $Y(0, u, a) = u$, и его производная $Y'_u(x, u, a)$ являются C^1 -функциями от x, y, a . Обозначим $d(u, a) = Y(\omega, u, a) - u$ – функцию расхождения. Пусть уравнение $a^0 \in \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$, число R выбрано так, что векторное поле \bar{a}^0 трансверсально всем кривым $y = \rho$ при $|\rho| \geq R$, $Y(x, u_k, a^0)$, $k = 1, \dots, N$ – периодические решения уравнения a^0 , задающие гиперболические предельные циклы. Мы можем выбрать окрестность $V(a^0)$ уравнения a^0 в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$ так, что $\forall a \in V(a^0)$ векторное поле \bar{a} трансверсально всем кривым $y = \rho$ при $|\rho| \geq R$. Так как $d(u_k, a^0) = 0$, $d'_u(u_k, a^0) \neq 0$, то, используя теорему о неявной функции, получаем, что существует такая окрестность $U(a^0)$ уравнения a^0 в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$, что $\forall a \in U(a^0)$ $d(\cdot, a)$ имеет простые нули $\tilde{y}_k(a)$, $k = 1, \dots, N$, где $\tilde{y}_k(\cdot)$ – непрерывные функции, $\tilde{y}_k(a^0) = u_k$. Тогда уравнения $y = Y(x, \tilde{y}_k(a), a)$, $k = 1, \dots, N$ задают гиперболические предельные циклы. Считая окрестность $U(a^0)$ достаточно малой, аналогично [7, с. 182] получаем, что других замкнутых траекторий уравнение $a \in U(a^0)$ не имеет. Следовательно, уравнение $a \in \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$, и потому $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ – открытое множество. Топологическая эквивалентность уравнений $a \in U(a^0)$ и уравнения a^0 очевидна. Следовательно, уравнение $a^0 \in \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ является грубым.

Пусть уравнение $a \in \bar{\bar{A}}_\omega^n$ грубое и записано в виде (1). Покажем, что $a \in \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$. По определению существует такая окрестность $U(a)$ уравнения a , что a и любое уравнение из $U(a)$ топологически эквивалентны. Предположим временно, что уравнение $a \notin \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$. Пусть ее замкнутые траектории задаются уравнениями $y = p_k(x)$, $k = 1, \dots, N$, где p_k – ω -периодические C^1 -функции, не обращающиеся в нуль. Поскольку $\Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$ всюду плотна в $\bar{\bar{A}}_\omega^n$, то в окрестности $U(a)$ есть уравнение $a^* \in \Sigma \bar{\bar{A}}_\omega^n$. Уравнения a и a^* топологически эквивалентны и потому кратность всех замкнутых траекторий уравнения a нечетна. По предположению уравнение a имеет негиперболическую замкнутую траекторию Γ . Будем считать, что ее уравнение $y = p_1(x)$. Для упрощения записи индекс 1 будем опускать: $p(x) = p_1(x)$.

Выберем $\bar{\mu} > 0$ так, чтобы при $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$ уравнение

$$a^\mu : \ddot{x} = a_n(x)\dot{x}^n + \dots + a_2(x)\dot{x}^2 + (a_1(x) + \mu)\dot{x} + a_0(x) - \mu p(x)$$

принадлежало окрестности $U(a)$. Уравнение (3), соответствующее уравнению a^μ , имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = a_n(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y + (a_1(x) + \mu) + \frac{a_0(x) - \mu p(x)}{y}. \quad (7)$$

Для него $p(x)$ является решением. Поэтому Γ – траектория уравнения a^μ при всех $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$.

Сделаем в уравнении (7) замену $z = y - p(x)$. Получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = F(x, z, \mu), \quad F(x, z, \mu) = a_n(x)z^{n-1} + b_{n-2}(x)z^{n-2} \dots + b_1(x)z - \frac{[a_0(x) - \mu p(x)]z}{p(x)(p(x) + z)}, \quad (8)$$

где $b_1(x), \dots, b_{n-2}(x)$ – непрерывные ω -периодические функции. Это уравнение имеет решение $z = 0$, задающее траекторию Γ в координатах x, z . Пусть $Z(x, v, \mu)$ – решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $Z(0, v, \mu) = v$. Обозначим $\tilde{d}(v, \mu) = Z(\omega, v, \mu) - v$ функцию расхождения. Производная $Z'_v(x, 0, \mu)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Z'_v(x, 0, \mu) = \left(b_1(x) - \frac{a_0(x) - \mu p(x)}{p^2(x)} \right) Z'_v(x, 0, \mu)$$

и начальному условию $Z'_v(0,0,\mu) = 1$. Поэтому

$$\tilde{d}'_v(0,\mu) = \exp \int_0^\omega \left(b_1(x) - \frac{a_0(x) - \mu p(x)}{p^2(x)} \right) dx - 1.$$

Поскольку $\tilde{d}'_v(0,0) = \exp \int_0^\omega (b_1(x) - a_0(x)/p^2(x)) dx - 1 = 0$, то

$$\tilde{d}'_v(0,\mu) = \exp \int_0^\omega \mu / p^2(x) dx - 1. \quad (9)$$

Пусть кратность цикла Γ равна $2m+1$. Тогда $\tilde{d}(v,0) = cv^{2m+1} + o(v^{2m+1})$, где $c \neq 0$. Выберем непересекающиеся окрестности $V(v_k)$ нулей $v_k = p_k(0) - p(0)$, $k = 1, 2, \dots, N$, функции $\tilde{d}(\cdot, 0)$. Из (9) получаем, что для μ , достаточно близких к нулю и таких, что $c\mu < 0$, функция $\tilde{d}(\cdot, \mu)$ имеет в окрестности $V(v_1)$ точки $v_1 = 0$ по меньшей мере три нуля, в окрестностях $V(v_k)$, $k = 2, \dots, N$, по меньшей мере один нуль. Тем самым при выбранном μ $\tilde{d}(\cdot, \mu)$ имеет больше нулей, чем $\tilde{d}(\cdot, 0)$, а уравнение a^μ имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение $a = a^0$. Но это противоречит их топологической эквивалентности. Таким образом, сделанное предположение неверно и потому грубое уравнение $a \in \Sigma \bar{A}_\omega^n$.

Теорема 3 доказана.

Литература

1. Ройтенберг, В.Ш. О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности без особых точек / В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. – Ярославль: Изд. дом ЯГТУ, 2017. – Вып. 12. – С. 77–91.
2. Плисс, В.А. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью / В.А. Плисс // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, № 5. – С. 965–968.
3. Neto, A.L. On the Number of Solutions of the Equation for which $x(0)=x(1)$ / A.L. Neto // *Inventiones mathematicae*. – 1980. – Vol. 59, no. 2. – P. 67–76.
4. Панов, А.А. О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами / А.А. Панов // *Функциональный анализ и приложения*. – 1999. – Т. 33, № 4. – С. 84–88.
5. Casull, A. Limit Cycles for Generalized Abel Equations / A. Casull, A. Guillamon // *J. Bifurcation and Chaos*. – 2006. – Vol. 16, no. 12. – P. 3737–3745.
6. Ройтенберг, В.Ш. О числе периодических решений некоторых полиномиальных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / В.Ш. Ройтенберг // *Вестник Бурятского государственного университета*. – 2020. – № 1. – С. 28–34.
7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.
8. Robinson, C. Structural stability of vector fields / C. Robinson // *Annals of Mathematics. Second Series*. – 1974. – Vol. 99, no. 1. – P. 154–175.
9. Бибииков, Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибииков. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1981. – 232 с.
10. Периодические решения дифференциальных уравнений / Г.Г. Иванов, Г.В. Алфёров, В.С. Королёв, Е.А. Селицкая // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. – 2019. – Вып. 3 (46). – С. 5–15.

Поступила в редакцию 10 сентября 2020 г.

ON POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER
ON A CIRCLE WITHOUT SINGULAR POINTS

V.Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation

E-mail: vroitenberg@mail.ru

In this paper, autonomous differential equations of the second order are considered, the right-hand sides of which are polynomials of degree n with respect to the first derivative with periodic continuously differentiable coefficients, and the corresponding vector fields on the cylindrical phase space. The free term and the leading coefficient of the polynomial is assumed not to vanish, which is equivalent to the absence of singular points of the vector field. Rough equations are considered for which the topological structure of the phase portrait does not change under small perturbations in the class of equations under consideration. It is proved that the equation is rough if and only if all its closed trajectories are hyperbolic. Rough equations form an open and everywhere dense set in the space of the equations under consideration. It is shown that for $n > 4$ an equation of degree n can have arbitrarily many limit cycles. For $n = 4$, the possible number of limit cycles is determined in the case when the free term and the leading coefficient of the equation have opposite signs.

Keywords: differential equation of the second order; polynomial right-hand side; cylindrical phase space; number of limit cycles; roughness.

References

1. Roytenberg V.Sh. O polinomial'nykh differentsial'nykh uravneniyakh vtorogo poryadka na okruzhnosti bez osobykh tochek (On Polynomial Differential Equations of Second Order without Singular Points). *Matematika i estestvennye nauki. Teoriya i praktika: mezhvuz. sb. nauch. tr.* (Mathematics and natural sciences. Theory and practice: interuniversity collection of scientific papers), Yaroslavl', Izd. dom YaGTU Publ., 2017, Iss. 12, pp. 77–91. (in Russ.).
2. Pliss V.A. O chisle periodicheskikh resheniy uravneniya s polinomial'noy pravoy chast'yu (On the Number of Periodic Solutions of Differential Equations with Polynomial Right-Hand Side). *DAN SSSR*, 1959, Vol. 127, no. 5, pp. 965–968. (in Russ.).
3. Neto A.L. On the Number of Solutions of the Equation for which $x(0)=x(1)$. *Inventiones mathematicae*, 1980, Vol. 59, no. 2, pp. 67–76.
4. Panov A.A. On the Diversity of Poincaré Mappings for Cubic Equations with Variable Coefficients. *Funct. Anal. Its Appl*, 1999, Vol. 33, no. 4, pp. 310–312. DOI: 10.1007/BF02467118
5. Casull A., Guillamon A. Limit Cycles for Generalized Abel Equations. *J. Bifurcation and Chaos*, 2006, Vol. 16, pp. 3737–3745. DOI: 10.1142/S0218127406017130
6. Roytenberg V.Sh. On the Number of Periodic Solutions of some Polynomial Differential Equations with Periodic Coefficients. *BSU bulletin. Mathematics, Informatics*, 2020, no. 1, pp. 28–34. (in Russ.). DOI: 10.18101/2304-5728-2020-1-28-34
7. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Teoriya bifurkatsiy dinamicheskikh sistem na ploskosti* (The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane). Moscow, Nauka Publ., 1967, 487 p. (in Russ.).
8. Robinson C. Structural stability of vector fields. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1974, Vol. 99, no. 1, pp. 154–175. DOI: 10.2307/1971016
9. Bibikov Yu.N. *Obshchiy kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (General Course of Ordinary Differential Equations). Leningrad, Izd-vo Leningradskogo universiteta Publ., 1981, 232 p. (in Russ.).
10. Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S., Selitskaya E.A. Periodic Solutions of Differential Equations. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika*, 2019, no. 2(46), pp. 5–15. (in Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-5-15

Received September 10, 2020

ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЯ В МОДЕЛИ ШЕСТАКОВА–СВИРИДЮКА ПРИ ЕГО ИСКАЖЕНИИ МНОГОМЕРНЫМ «БЕЛЫМ ШУМОМ»¹

М.А. Сагадеева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Модель Шестакова–Свиридюка – это математическая модель измерительного устройства, используемая для восстановления динамически искаженного сигнала по экспериментальным данным, также эту модель называют задачей оптимального динамического измерения. В основе теории оптимальных динамических измерений находится задача минимизации разности значений виртуального наблюдения, полученного с помощью расчетной модели, и экспериментальных данных, обычно искаженных некоторыми помехами. Статья содержит описание модели Шестакова–Свиридюка оптимального динамического измерения при наличии помех разного вида. Основное внимание в статье обращено на предварительный этап исследования задачи оптимального динамического измерения, а именно на метод Пытьева–Чуличкова построения данных наблюдения, т. е. преобразования данных эксперимента для очистки их от помех в виде «белого шума», понимаемого как производная Нельсона–Гликлиха от многомерного винеровского процесса. Для использования этого метода используется априорная информация о свойствах функций, описывающих наблюдение.

Ключевые слова: оптимальное динамическое измерение; система леонтьевского типа; разрешающий поток матриц; многомерный винеровский процесс; производная Нельсона–Гликлиха.

Введение

Одной из основных задач теории динамических измерений является нахождение воздействия на измерительную систему по сигналу, который регистрируется на выходе системы. Классическими методами решения этой задачи являются методы основанные на теории обратных (некорректных) задач (см. обзор [1]). С использованием методов теории автоматического управления А.Л. Шестаков и его ученики разработали и обосновали применение технических методов решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала [2]. При дальнейших исследованиях стало ясно, что для повышения точности получаемых результатов при решении этой задачи необходимо исследование математической модели задачи восстановления динамически искаженного сигнала. Для этого А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком было предложено использовать методы теории оптимального управления [3] решениями системы, полученной в результате использования теории автоматического управления. Задачей оптимального динамического измерения [4] называется полученная задача оптимального управления для системы леонтьевского типа. Используя методы численных решений для систем леонтьевского типа [5, 6] построенная математическую модель была доведена «до числа» [7]. Описанию этой математической модели посвящены обзоры [8, 9]. Полученную теорию будем называть теорией оптимальных динамических измерений.

В теории оптимальных динамических измерений могут быть учтены помехи различного вида и природы. Так, к настоящему времени исследованы задачи оптимального измерения при наличии инерционности измерительного устройства [7], резонансов в его цепях [10], а также его деградации [11], понимаемой как снижение чувствительности ИУ при эксплуатации.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)).

Основой теории оптимального измерения является модель Шестакова–Свиридюка описания измерительного устройства (ИУ). Данная модель состоит из двух частей. Первая часть модели Шестакова–Свиридюка описывается с помощью нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \quad \ker L \neq \{0\}, \quad (1)$$

$$y(t) = b(t)Mx(t) + Fu(t), \quad (2)$$

где L, M, N, D, F – квадратные матрицы порядка n ; $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $y(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_n(t))$ и $u(t) = \text{col}(u_1(t), \dots, u_n(t))$ – вектор-функции; $a(t)$ и $b(t)$ – функции. Здесь матрицы L, M, N, D, F характеризуют конструкцию ИУ, вектор-функция $x = x(t)$ характеризует состояние ИУ, функции $a(t)$ и $b(t)$ описывают деградацию ИУ при длительной эксплуатации (например, при эксплуатации в околоземном пространстве), вектор-функция $u = u(t)$ соответствует входному сигналу (*измерению*), а вектор-функция $y = y(t)$ соответствует выходному сигналу (*наблюдению*). Систему (1), (2) для получения математической модели ИУ дополняют начальным условием Шоултера–Сидорова [12]

$$P(x(0) - x_0) = 0, \quad (3)$$

где P – ортогональный проектор на образ разрешающего семейства матриц [13] однородного уравнения (1). Второй частью модели Шестакова–Свиридюка является задача оптимизации

$$J(v) = \min_{u \in U_\delta} J(u), \quad (4)$$

которая с помощью функционала вида

$$J(u) = \delta \int_0^\tau \|y(t) - \tilde{y}(t)\|^2 dt + (1 - \delta) \int_0^\tau \langle Cx(t), x(t) \rangle dt \quad (5)$$

минимизирует разницу между модельным (виртуальным) наблюдением y и наблюдением \tilde{y} , полученным в результате обработки данных натурального эксперимента. Здесь $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидова норма и скалярное произведение в \mathbf{R}^n . Используя априорную информацию, строится выпуклое и замкнутое подмножество $U_\delta \subset U$ в пространстве управлений U , которое называется *множеством допустимых измерений*. Минимизируя первое слагаемое функционала (5) на множестве U_δ , добиваемся минимизации воздействия инерционности ИУ на измерение. При минимизации второго слагаемого снижается воздействие резонансов в цепях ИУ, а именно что квадратная симметрическая матрица C порядка n характеризует взаимовлияние резонансов в цепях ИУ. Константа $\delta \in (0, 1]$ выбирается таким образом, чтобы учесть предпочтения исследователя. Наконец, $\tilde{y}(t)$ – наблюдение, полученное в результате обработки данных вычислительного или натурального эксперимента. Итак, задача поиска *оптимального измерения* $v(t)$ заключается в поиске минимума (4) для функционала (5) для вектор-функций x и y , удовлетворяющих задаче (1)–(3) при некоторых начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Модель Шестакова–Свиридюка представима с помощью задачи (1)–(5), которую мы будем также называть задачей оптимального динамического измерения, и ее решение позволяет восстановить сигнал $v \in U_\delta$, соответствующий результатам наблюдений \tilde{y} .

При исследовании модели Шестакова–Свиридюка (1)–(5) необходимо отдельное внимание уделить методам обработки экспериментальных данных, с помощью которых строится детерминированная функция \tilde{y} . При этом при построении значений \tilde{y} могут быть использованы математические методы, предназначенные для очистки данных натурального эксперимента от воздействия случайных помех. Стандартные методы фильтрации нахождения полезной части сигнала, с одной стороны, не всегда могут быть применимы, а с другой – могут давать результаты, не применимые для дальнейшего исследования поставленной задачи. Необходимость нахождения полезной части сигнала возникает в исследованиях различного рода (см., например, [2, 14]). Что касается теории оптимального динамического измерения, то эта задача, по сути, является предварительным этапом решения. Метод Пытьева–Чуличкова позволяет на основе априорной информации о свойствах функций, описывающих полезную часть наблюдения,

построить ее значения \tilde{y} , возмущенные «белым шумом», под которым понимается производная Нельсона–Гликлиха [15–17] n -мерного броуновского движения.

Изначально метод фильтрации данных, предложенный Ю.П. Пытьевым, применялся для очистки радиоволн, получаемых в ходе наблюдения за дальним космосом. Этот метод подразумевал, что искомым сигналом описывается убывающей выпуклой вниз функцией. Кроме того, предполагалось, что помеха имеет известный закон распределения, чаще всего нормальный. Этот метод был развит А.И. Чуличковым и применен при решении других практических задач [14].

В работе [18] метод Пытьева–Чуличкова описан для случая, когда вносящая искажения помеха представлена «белым шумом», т. е. производной Нельсона–Гликлиха от одномерного винеровского процесса. Основной целью данной статьи является описание этого метода в многомерном случае.

1. Оптимальное измерение при учете инерционности, резонансов и деградации измерительного устройства

Рассмотрим в \mathbf{R}^n линейное нестационарное неоднородное уравнение вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t), \quad \det L = 0,$$

где L и M – квадратные матрицы порядка n , а $f(t) = \text{col}(f_1(t), \dots, f_n(t))$ – некоторая вектор-функция. Уравнения вида (1) будем называть *уравнениями леонтьевского типа*, отдавая дань В. Леонтьеву [19], который первым начал изучать такие уравнения. В работах В. Леонтьева рассматривались балансовые модели экономики. В этих моделях и в силу того, что труд запастись нельзя, матрица L в левой части уравнения (1) имела нулевой определитель, так как именно эта матрица описывала процесс пополнения «запасов». Для уравнений леонтьевского типа также используются позже появившиеся термины «дифференциально-алгебраические уравнения» [20], «алгебро-дифференциальные системы» [21], «дескрипторные системы» [22] и т. д.

Как показано выше, с помощью нестационарной системы уравнений леонтьевского типа вида

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t) \quad (6)$$

описывается часть математической модели ИУ, где N, D, F – квадратные матрицы порядка n ; $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $y(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_n(t))$ и $u(t) = \text{col}(u_1(t), \dots, u_n(t))$ – вектор-функции; $a(t)$ и $b(t)$ – функции.

Будем говорить, что матрица M L -регулярна, если $\det(\alpha L - M) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{C}$. Очевидно, что для L таких, что $\det L \neq 0$, всегда можно найти $\alpha \in \mathbf{C}$, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. В частности, это показывает, что условие L -регулярности выполняется автоматически, если модель ИУ не вырождена, т. е. уравнение (1) может быть разрешено относительно производной. Однако внимательный анализ реальных ИУ [23, 24] показывает, что случай $\det L = 0$ встречается довольно часто. Матрица M называется (L, p) -регулярной, если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости для L -резольвенты матрицы M вида $(\mu L - M)^{-1}$ является полюсом порядка p . Будем считать, что $p = 0$ при условии, что бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является устранимой особой точкой матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$. При условии (L, p) -регулярности матрицы M ($p \in \{0, \dots, n-1\}$) рассмотрим начальное условие Шоултера–Сидорова [12]

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[R_{\mu}^L(M) \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (7)$$

где $x_0 \in \mathbf{R}^n$ – некоторый вектор, а $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ – правая L -резольвента матрицы M при $\mu \in \mathbf{C}$ таком, что $\det(\mu L - M) \neq 0$.

Фиксируем число $\tau \in \mathbf{R}_+$ и введем в рассмотрение пространство измерений $U = \{u \in L_2((0, \tau); \mathbf{R}^n) : u^{(p)} \in u \in L_2((0, \tau); \mathbf{R}^n)\}$, пространство наблюдений $Y = L_2((0, \tau); \mathbf{R}^n)$ и пространство состояний $X = Y$.

Теорема 1. [9] Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0, \dots, n-1\}$ и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $u \in U$, $a \in C((0, \tau); \mathbf{R}_+) \cap C^{p+1}((0, \tau); \mathbf{R})$ и $b \in C((0, \tau); \mathbf{R})$ существует единственное $y \in Y$ из (2), соответствующее решению задачи (6), (7), имеющему вид

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}QDu(s)ds + \sum_{k=0}^p H^k M^{-1}(Q - E_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{Du(t)}{a(t)}.$$

Здесь $X(t, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} L \right)^k$ – вырожденный поток разрешающих матриц [13],

т. е. $X(t, r)X(r, s) = X(t, s)$ для всех $t, r, s \in \mathbf{R}$ таких, что $t \geq r \geq s$, причем $X(t, t) \neq E_n$, для всех $t \in \mathbf{R}$;

$$L_1^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} Q, \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(kL(kL - M)^{-1} \right)^k,$$

$$L_0 = L(E_n - P), \quad P = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k(kL - M)^{-1} L \right)^k, \quad H = M^{-1}(E_n - Q)L_0.$$

Замечание 1. Условие $\det M \neq 0$ в теореме 1 не является обременительным и с помощью замены можно добиться, чтобы оно было выполнено. Используя условие (L, p) -регулярности матрицы M , можно подобрать $\lambda \in \mathbf{C}$ так, чтобы $\det(\lambda L - M) \neq 0$. Для этого λ произведем замену $x = e^{\lambda t} z$, в результате которой получим уравнение $L\dot{z}(t) = a(t)(M - \lambda L)z(t) + Du(t)$, имеющее тот же вид, что и (6), но матрица в правой части при неизвестной функции уже имеет ненулевой определитель.

Приведем теорему о существовании решения задачи (1)–(5).

Теорема 2. [9] Пусть матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0, \dots, n-1\}$ и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in Y$, $a \in C((0, \tau); \mathbf{R}_+) \cap C^{p+1}((0, \tau); \mathbf{R})$ и $b \in C((0, \tau); \mathbf{R})$ существует единственное оптимальное измерение $v \in U_\partial$ задачи (1)–(5).

2. Многомерный «белый шум»

Случайная величина – это отображение $\xi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, измеримое относительно соответствующих мер в пространствах Ω и \mathbf{R} , где $\Omega \equiv (\Omega, A, P)$ – полное вероятностное пространство, а \mathbf{R} – множество вещественных чисел, наделенное борелевой σ -алгеброй и стандартной лебеговой мерой. Если нормально распределенная случайная величина ξ такова, что ее математическое ожидание $\mathbf{E}\xi = 0$, а дисперсия $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$, то коротко это будем записывать следующим образом: $\xi \sim N(0, \sigma^2)$.

Зафиксируем промежуток действительной оси $\mathfrak{S} \subset \mathbf{R}$. Под (одномерным) стохастическим процессом будем понимать отображение $\eta: \mathfrak{S} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. При фиксированном $t \in \mathfrak{S}$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(t, \cdot)$ будет случайной величиной, которую будем называть сечением стохастического процесса. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ будет детерминированной функцией и ее будем называть (выборочной) траекторией. Стохастический процесс η назовем непрерывным, если п. н. все его траектории непрерывны (т. е. при п. в. (почти всех) $\omega \in \Omega$ траектории $\eta(\cdot, \omega)$ непрерывны). В дальнейшем зависимость от $\omega \in \Omega$ стохастического процесса будем опускать. Непрерывный стохастический процесс, чьи (независимые) сечения гауссовы, называется гауссовым.

Важнейшим примером непрерывного гауссова стохастического процесса служит (одномерный) винеровский процесс $\beta = \beta(t)$, моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна–Смолуховского [25], представленный формулой

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)t\right), \quad (8)$$

где $\xi_k \sim N\left(0, \left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^{-2}\right)$ – независимые нормально распределенные величины. Сечения стохастического процесса β являются нормально распределенными случайными величинами с $E\beta = 0$ и $D\beta = \sigma^2 t$ при некотором $\sigma > 0$. Стохастический процесс β , представленный с помощью (8), назовем *одномерным броуновским движением*.

Пусть $\eta = \eta(t)$ – произвольный стохастический процесс, обозначим $\overset{o}{\eta}(t)$ производную Нельсона–Гликлиха [9, 10, 18] этого процесса в точке $t \in (\varepsilon, \tau)$. Будем говорить, что процесс η дифференцируем в смысле Нельсона–Гликлиха на интервале, если в каждой точке этого интервала существует производная Нельсона–Гликлиха.

Теорема 3. [16] Пусть β – винеровский процесс (8), тогда $\overset{o}{\beta} = \frac{\beta}{2t} \quad \forall t \in \mathbf{R}_+$.

Производную Нельсона–Гликлиха $\overset{o}{\beta}$ броуновского движения β из (8) будем называть *одномерным «белым шумом»*. Отметим, что сечения стохастического процесса $\overset{o}{\beta}$ распределены по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2/4t)$, то есть $\overset{o}{\beta} \sim N(0, \sigma^2/4t)$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$, возьмем n независимых случайных процессов $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ и формулой $\Theta(t) = \sum_{k=1}^n \eta_k e_k$, где e_k – орты в пространстве \mathbf{R}^n ($k = \overline{1, n}$), зададим n -мерный случайный процесс (коротко, n -случайный процесс). По построению легко заметить, что п.н. все его траектории непрерывны и дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху, при условии что таковыми являются η_k ($k = \overline{1, n}$). По аналогии с одномерным случаем назовем n -мерным «белым шумом» стохастический процесс вида $\overset{o}{W}_n(t) = \sum_{k=1}^n \overset{o}{\beta}_k e_k$, где $\overset{o}{\beta}_k$ – одномерный «белый шум» ($k = \overline{1, n}$).

3. Построение полезной части наблюдения при наличии многомерного «белого шума»

Пусть в результате эксперимента одновременно наблюдаются через равные промежутки в моменты времени $\{t_j : j \in I\}$, $I = \{0, 1, \dots, N\}$ несколько величин, характеризующих наблюдаемый процесс, т. е. наблюдение – это n -мерный вектор $(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)$. В результате таких наблюдений получены $\eta^i(t_j)$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, N}$). Дополнительно известна априорная информация о полезной части каждой из наблюдаемых величин $\eta^i(t)$, а именно об экстремуме и характере выпуклости полезной части. Однако в силу воздействия случайных помех наблюдаемые величины $\{\eta^i(t_j)\}_{j=0}^N$ ($i = \overline{1, n}$) не обладают этими свойствами. Будем считать, что наблюдаемые величины представимы в виде

$$\eta(t) = \tilde{y}(t) + \overset{o}{W}_n(t),$$

где $\tilde{y} : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – вектор-функция полезной части наблюдения, а $\overset{o}{W}_n(t)$ – часть, вносящая помехи в измерения – многомерный «белый шум».

Так как система (1), (2) в модели ИУ линейна, то ясно, что построение значений наблюдения по данным, искаженным многомерным «белым шумом», можно проводить для каждой

Математика

координаты по отдельности. То есть для каждой составляющей наблюдения имеет место представление

$$\eta^i(t) = \tilde{y}_i(t) + \overset{\circ}{\beta}_i(t) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Здесь $\tilde{y}_i(t)$ – полезная часть соответствующей составляющей наблюдения, а $\overset{\circ}{\beta}_i(t)$ – часть, вносящая помехи – «белый шум», сечения которого имеют распределение $\overset{\circ}{\beta}_i \sim N(0, \sigma^2/4t)$.

Приведем краткое описание процедуры проверки статистического критерия, с помощью которого находится точка экстремума в предположении о ее единственности и выпуклости вверх полезной части наблюдения. Введем в рассмотрение класс функций V_k таких, что они выпуклы и имеют единственную точку максимума t_k на равномерной сетке $\{t_j : j \in I\}$, $I = \{0, 1, \dots, N\}$. Точное описание класса функций V_k приведено в работе [18].

Зафиксируем координату наблюдения $i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n$. Пусть в точке $k_0 \in I$ равномерной сетки полезная составляющая часть сигнала $\tilde{y}_i(t)$ имеет максимум, т. е. $\tilde{y}_i \in V_{k_0}$. Нашей целью является оценка параметра k_0 по зарегистрированным значениям $\{\eta^i(t_j)\}_{j=0}^N$. То есть с заданной вероятностью γ оценить параметр k_0 по данным наблюдения

$$\eta^i(t) = \tilde{y}_i(t) + \overset{\circ}{\beta}_i(t), \quad \tilde{y}_i \in V_{k_0}, \quad \overset{\circ}{\beta}_i \sim N(0, \sigma^2/4t). \quad (9)$$

На основе результатов [26] для оценки параметра $k_0 \in I$ для i -й координаты наблюдения будем применять статистику вида

$$\tau_k(i) = \frac{\sum_{j=0}^N \left(\eta^i(t_j) \sqrt{t_j} - P_k \left(\eta^i(t_j) \sqrt{t_j} \right) \right)^2}{\sum_{j=0}^N \left(\overline{\eta^i} - P_k \left(\eta^i(t_j) \sqrt{t_j} \right) \right)^2},$$

где $\overline{\eta^i} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \eta^i(t_j) \sqrt{t_j}$, а $P_k \left(\eta^i(t) \sqrt{t} \right)$ – проекция $\eta^i(t) \sqrt{t}$ на множество V_k , существование которой показано в [26], а ее построение описано в [18]. Значение построенной статистики используется для нахождения значения параметра k , при котором полезная часть сигнала $\eta^i(t) \sqrt{t}$ наиболее близка по форме с $P_k \left(\eta^i(t) \sqrt{t} \right)$. Подробное описание приведено в [18].

Задачу построения значений одной координаты наблюдений на равномерной сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$ будем рассматривать как задачу наилучшего приближения $\eta^i(t) \sqrt{t}$ элементами множества V_k , то есть поиска функции $P_k \left(\eta^i(t) \sqrt{t} \right) \in V_k$, такой что $\left\| P_k \left(\eta^i(t) \sqrt{t} \right) - \eta^i(t) \sqrt{t} \right\|^2 = \inf_{f_i \in V_k} \left\| f_i - \eta^i(t) \sqrt{t} \right\|^2$. Алгоритм построения значений полезной части одной координаты наблюдения $P_k \left(\eta^i(t) \sqrt{t} \right)$ приведен в работе [18].

Применение алгоритма из [18] к преобразованию координаты наблюдения $\eta^i(t) \sqrt{t}$ будет давать значения $\tilde{y}_i(t_j) \sqrt{t_j}$ и точка максимума $\tilde{y}_i(t_j) \sqrt{t_j}$ с вероятностью γ находится в точке k_0 . Значение полезной части наблюдения будет иметь вид $\tilde{y}_i(t_j)$. Если равномерная сетка $\{t_j\}_{j=0}^N$ содержит точку $t=0$, то это значение вместе с точками некоторой окрестности этой точки убираем из массива значений. Количество таких точек зависит от количества интервалов сетки N и длины временного промежутка τ , на котором решается задача (1)–(5).

Применяя описанную процедуру к каждой из координат, получим значения вектор-функции наблюдения $\tilde{y}(t)$, на основе которой производится поиск решения задачи оптимального измерения (1)–(5).

Заключение. В дальнейшем планируется проведение вычислительных экспериментов построения значений наблюдений по экспериментальным данным, искаженным многомерным «белым шумом». Кроме того, описанная процедура может быть применена как к помехам другого вида, так и при другой априорной информации о свойствах полезной части сигнала.

Литература

1. Грановский, В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.
2. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. – 256 с.
3. Свиридюк Г.А. Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов / Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 346, № 3. – С. 323–325.
4. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16(192). – С. 116–120.
5. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоултера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.
6. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.
7. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
8. Shestakov, A.L. The Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, A.V. Keller, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–16.
9. Shestakov, A.L. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology / A.L. Shestakov, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyayeva, N.A. Manakova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – Vol. 7, no. 1. – P. 3–23.
10. Keller, A.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Y.V. Khudyakov // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – Vol. 113. – P. 183–195.
11. Sagadeeva, M.A. On Nonstationary Optimal Measurement Problem for the Measuring Transducer Model / M.A. Sagadeeva // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM–2016), 19–20 May 2016. – 2016. – A/N 7911710.
12. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоултера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.
13. Keller, A.V. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy / A.V. Keller, M.A. Sagadeeva // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – Vol. 325. – P. 263–277.
14. Пытьев, Ю.П. Методы морфологического анализа изображений / Ю.П. Пытьев, А.И. Чуличков. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
15. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.
16. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.
17. Gliklikh, Yu.E. On Existence of Optimal Solutions for Stochastic Differential Inclusions with Mean Derivatives / Yu.E. Gliklikh, O.O. Zheltikova // Applicable Analysis. – 2014. – Vol. 93, no. 1. – P. 35–45.

18. Сагадеева, М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 82–96.
19. Леонтьев, В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты, политика / В. Леонтьев. – М.: Политиздат, 1990. – 414 с.
20. Бояринцев, Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 2000. – 222 с.
21. Mäarz, R. On Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations and their Numerical Treatment / R. Mäarz // Computing. – 1985. – Vol. 35, no. 1. – P. 13–37.
22. Белов, А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / А.А. Белов, А.П. Курдюков. – М.: Физматлит, 2015. – 270 р.
23. Khudyakov, Yu.V. On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers / Yu.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – Vol. 3, no. 3. – P. 68–73.
24. Khudyakov, Yu.V. On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement / Yu.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Vol. 4, no. 2. – P. 14–25.
25. Эйнштейн, А. Брауновское движение / А. Эйнштейн, М. Смолуховский. – М.: ОНТИ, 1936. – 607 с.
26. Демин, Д.С. Фильтрация монотонных выпуклых сигналов, искаженных шумом, и оценка положения особых точек / Д.С. Демин, А.И. Чуличков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 6. – С. 15–31.

Поступила в редакцию 9 октября 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 4, pp. 41–50*

MSC 49J15, 62M86, 60H40

DOI: 10.14529/mmph200405

CONSTRUCTION AN OBSERVATION IN THE SHESTAKOV–SVIRIDYUK MODEL IN TERMS OF MULTIDIMENSIONAL “WHITE NOISE” DISTORTION

M.A. Sagadeeva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: sagadeevama@susu.ru

The Shestakov–Sviridyuk model is a mathematical model of a measuring unit used to reconstruct a dynamically distorted signal with the help of experimental data. This model is also called the optimal dynamic measurement problem. The theory of optimal dynamic measurement is based on the problem of minimizing the difference between the values of a virtual observation obtained using a computational model and experimental data, usually distorted by some disturbances. The article describes the Shestakov–Sviridyuk model of optimal dynamic measurement in terms of various types of disturbances. It focuses on the preliminary stage of the study of the optimal dynamic measurement problem, namely, the Pyt'ev–Chulichkov method for constructing observation data, i. e. converting experimental data to clean them from disturbances in the form of “white noise”, which is understood as the Nelson–Glicklich derivative of the multidimensional Wiener process. To use this method, a priori information on the properties of the functions describing the observation, is used.

Keywords: optimal dynamic measurement; the Leontief-type system; resolving flow of matrices; multidimensional Wiener process; Nelson–Glicklich derivative.

References

1. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya* (Dynamic Measurements. Basics of Metrological Support). Leningrad, 1984, 257 p. (in Russ.).
2. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyah* (Methods of the Theory of Automatic Control in Dynamic Measurements). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013, 256 p. (in Russ.).
3. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of a Class of Linear Degenerate Equations. *Doklady Mathematics*, 1999, Vol. 59, no. 1, pp. 157–159.
4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16, pp. 116–120. (in Russ.).
5. Keller A.V. Numerical Solutions of the Optimal Control Theory for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27, pp. 50–56. (in Russ.).
6. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk* (Numerical Investigation of the Optimal Control Problem for Leontief Type Models. Dr. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2011, 237 p.
7. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*, 2012, Vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079
8. Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 3–16. (in Russ.).
9. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, Vol. 7, no. 1, pp. 3–23. DOI: 10.14529/jcem200101
10. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M. (eds). *Semigroups of Operators – Theory and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2015, Vol. 113, pp. 183–195. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_11
11. Sagadeeva M.A. On Nonstationary Optimal Measurement Problem for the Measuring Transducer Model. *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM–2016)*, 2016, A/N 7911710. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911710
12. Zagrebina S.A., Keller A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201
13. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M., Tomilov Y. (eds). *Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2020, Vol. 325, pp. 263–277. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_15
14. Pyt'ev Yu.P., Chulichkov A.I. *Metody morfologicheskogo analiza izobrazheniy* (Methods of Morphological Analysis of Images). Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 336 p. (in Russ.).
15. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967, 142 p.
16. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.
17. Gliklikh Yu.E., Zheltikova O.O. On Existence of Optimal Solutions for Stochastic Differential Inclusions with Mean Derivatives. *Applicable Analysis*, 2014, Vol. 93, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1080/00036811.2012.753588
18. Sagadeeva M.A. Reconstruction of Observation from Distorted Data for the Optimal Dynamic Measurement Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling*,

Programming and Computer Software, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 82–96. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp190207

19. Leontief W. *Essays in Economics: Theories, Theorizing, Facts, and Policies*. New York, London, Toronto, Oxford University Press, Inc., 1966, 252 p.

20. Boyarintsev Yu.E. *Lineynye i nelineynye algebro-differentsial'nye sistemy* (Linear and nonlinear algebro-differential systems). Novosibirsk, Nauka Publ., 2000, 222 p. (in Russ.).

21. Määrz R. On Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations and their Numerical Treatment. *Computing*, 1985, Vol. 35, no. 1, pp. 13–37. DOI: 10.1007/BF02240144

22. Belov A.A., Kurdyukov A.P. *Deskriptornye sistemy i zadachi upravleniya* (Descriptor Systems and Control Tasks). Moscow, Fizmatlit Publ., 2015, 270 p. (in Russ.).

23. Khudyakov Yu.V. On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, Vol. 3, no. 3, pp. 68–73. DOI: 10.14529/jcem160308

24. Khudyakov Yu.V. On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, Vol. 4, no. 2, pp. 14–25. DOI: 10.14529/jcem170202

25. Eynshteyn A., Smolukhovskiy M. *Braunovskoe dvizhenie* (Brownian Motion). Moscow, ONTI Publ., 1936, 607 p. (in Russ.).

26. Demin D.S., Chulichkov A.I. Filtering of monotonic convex noise-distorted signals and estimates of positions of special points. *Journal of Mathematical Sciences* (New York), 2011, Vol. 172, no. 6, pp. 770–781. DOI: 10.1007/s10958-011-0220-2

Received October 9, 2020

ДИНАМИКА НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИСТОЧНИКАМИ

О.Н. Шабловский

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель,
Республика Беларусь
E-mail: shablovsky-on@yandex.by

Получены два новых точных решения волнового уравнения с источниками. Изучена динамика неустойчивых состояний, описываемых этими решениями. Даны аналитические выражения частных производных искомой функции по пространственной координате и времени на плоскости независимых переменных «искомая функция – время». Такая структура решения позволяет рассмотреть нестационарные аналоги автомодельных кинков, описывающих переход между двумя состояниями равновесия системы «среда – источник». Для классического волнового уравнения применяется нелинейный реономный источник, поведение которого влияет на свойства релаксирующего кинка. Определены условия, при которых скорость перемещения сформировавшейся автомодельной волны переброта дозвуковая либо сверхзвуковая. Обнаружена важная роль величины скорости точки перегиба неавтомодельного кинка; вычислено пороговое значение этой скорости, разделяющее дозвуковой и сверхзвуковой режимы. Неустойчивый вариант представленного решения дает сильный разрыв искомой функции при неограниченном росте времени. Предвестником сильного разрыва является остановка точки перегиба кинка. Указана оценка величины момента времени, предшествующего началу возвратного движения точки перегиба.

Дано решение пространственно нелокального волнового уравнения четвертого порядка с двумя аддитивно входящими источниками. Один источник линейным однородным образом зависит от искомой функции, второй – линейно зависит от модуля градиента искомой функции. Решение представляет собой аналог волны переброта в интервале с нестационарными границами. В каждый конечный момент времени это решение непрерывно, а за бесконечное время происходит потеря гладкости решения – имеем так называемый «медленный взрыв». В неустойчивом варианте решения изолинии искомой функции на вогнутом участке (нижняя часть кинка) движутся навстречу выпуклому участку, который примыкает к верхней границе кинка. В устойчивом варианте кинк вырождается в однородное состояние. Обнаружено, что для неавтомодельного процесса инверсия знака градиентного источника дает инверсию условий устойчивости кинка и антикинка. Неустойчивому кинку/антикинку соответствует градиентный сток/источник.

Ключевые слова: волновое уравнение; нелинейный источник; нелокальность; неавтомодельный кинк; дозвуковая и сверхзвуковая волна; «медленный взрыв».

Введение. Волновые уравнения с линейными и нелинейными источниками (уравнения Клейна–Гордона) относятся к числу фундаментальных уравнений математической физики и позволяют моделировать сложные явления в различных областях естествознания. Задача исследования нелинейных волн – важный элемент динамической теории неравновесных состояний теплофизических, физико-химических и биологических систем [1–3].

Классическое волновое уравнение с источником возьмем в виде

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} = k_v, \quad (1)$$

где τ – функция, характеризующая некоторое физическое свойство среды; t – время; x – декартова координата; w – скорость распространения малых возмущений; $x' = x/w$; $k_v = k_v(\tau, t)$ – функция

источника. Например, в терминах теории теплопереноса τ – температура, функция $k_v(\tau, t)$ характеризует источники и стоки энергии. Учет пространственно нелокальных эффектов переноса приводит к повышению порядка модельного уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} - \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial (x')^4} = k_v. \quad (2)$$

Здесь $\chi^2 = \chi_1^2 / w^4$, а величина $\varepsilon \chi_1^2$ есть параметр слабой нелокальности задачи, см. [4] и указанную там библиографию. Для уравнения (2) мы рассматриваем источник

$$k_v = k_v^1 \tau + Q_g |\partial \tau / \partial x'|; \quad k_v^1, Q_g - \text{const}, \quad (3)$$

который зависит от модуля градиента искомой функции и в этом смысле является нелокальным. Для размерных и безразмерных уравнений берём одинаковую форму записи, применяя масштабы τ_b и t_b :

$$\begin{aligned} (\tau/\tau_b) \rightarrow \tau, (t/t_b) \rightarrow t, [x/(wt_b)] \rightarrow x', [(k_v t_b^2)/\tau_b] \rightarrow k_v, \\ [\varepsilon \chi_1^2 / (w^4 t_b^2)] \rightarrow (\varepsilon \chi^2), (k_v^1 t_b) \rightarrow k_v^1, (Q_g t_b) \rightarrow Q_g. \end{aligned}$$

Изолиния $\tau(x', t) = \tau_i = \text{const}$ перемещается со скоростью $N = dx/dt$, которая является дозвуковой/сверхзвуковой, если $M = dx'/dt = N/w$, соответственно, меньше/больше единицы. Предпосылки данной работы состоят в следующем:

1. Для волновых уравнений принципиальное значение имеют кинк-решения, описывающие переход между двумя состояниями равновесия системы «среда–источник». Известные в литературе решения типа «кинк» наиболее подробно изучены для уравнения синус-Гордона [1, 2]. В настоящее время в различных областях физики возникает интерес к волновым уравнениям, содержащим нелинейные реономные источники, которые зависят явным образом не только от искомой функции, но и от времени [5–7]. Такие функции источников позволяют моделировать разнообразные режимы воздействия на скорость и направление движения волны.

2. В динамике нелинейных нестационарных физических процессов важная роль принадлежит задаче построения и описания решений, разрушающихся за конечное время. Обзор работ, относящихся к параболическим уравнениям, представлен в [8, 9]. Условия разрушения и устойчивость решений нелинейных гиперболических уравнений рассмотрены в [10–13]. Еще один аспект этой проблемы – анализ потери гладкости решения за бесконечное время («медленный взрыв») [14].

Цель данной статьи – представить примеры точного аналитического описания неавтономных кинков и указать их нетривиальные свойства, проявляющиеся при долговременном взаимодействии среды с источником.

Преобразование независимых переменных. Уравнение (2) запишем в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x')^2} = k_v, \quad \theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x'}, \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial \tau}{\partial x'}, \quad v = \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad d\tau = u dx' + v dt.$$

Выполним в (4) преобразование независимых переменных $(x', t) \rightarrow (\tau, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \tau} - u \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) = k_v, \quad (5)$$

$$\theta = \tau + \varepsilon \chi^2 u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = u \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (7)$$

Здесь $D(\tau, t)/D(x', t) = \partial\tau/\partial x' \neq 0$. Изолиния $\tau = \tau_i$ имеет скорость

$$M = dx'/dt = -v(\tau_i, t)/u(\tau_i, t). \quad (8)$$

Обсудим точные частные решения системы (5)–(7). Для краткости изложения в основной части текста применяется единый термин «кинк», т. е. мы не делаем терминологического различия «кинк»/«антикинк» между профилями, обладающими положительным/отрицательным наклоном $\partial\tau/\partial x'$ и перемещающимися вправо вдоль оси x' . Отдельное упоминание антикинка делается там, где он обладает свойствами, отличающимися от свойств кинка.

Классическое волновое уравнение: релаксация кинка. Для уравнений (5)–(7) при $\varepsilon = 0$ рассмотрим источник

$$k_v = Q_0 + \beta Q_1, \beta = \exp(rt), r \equiv \text{const},$$

который явно зависит от времени и при $r < 0$ релаксирует ($t \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$) вдоль каждой изолинии $\tau = \tau_i$: в установившемся по времени состоянии имеем $k_v(\tau, t \rightarrow \infty) \rightarrow Q_0(\tau)$. Вид функций $Q_0(\tau), Q_1(\tau)$ будет определен далее в ходе построения решения. Применяя зависимости

$$u = u_0(\tau) + \beta u_1(\tau), v = v_0(\tau) + \beta v_1(\tau), \quad (9)$$

находим

$$v_0 = -u_0 M_0, M_0 \equiv \text{const}; v_1 = \pm u_1; \quad (10)$$

$$u_0 \dot{u}_0 (M_0^2 - 1) = Q_0(\tau); \quad (11)$$

$$\mp 2 \dot{u}_0 u_1 (M_0 \pm 1) = Q_1^\pm(\tau); \quad (12)$$

$$(\dot{u}_1/u_1) = (\dot{u}_0/u_0) + [r/u_0 (M_0 \pm 1)]. \quad (13)$$

Точка над символом функции означает дифференцирование $d/d\tau$; M_0 – произвольная постоянная, далее для определённости полагаем $M_0 > 0$; расположение знаков « \pm » в (12), (13) соответствует формуле (10). Выбор знака « \pm » влияет на вид реономного источника; суть основного результата вычислений для обоих знаков одинаковая; далее берем в (10) и (12), (13) верхний знак: $v_1 = u_1, Q_1^+ = Q_1$. Структура соотношений (10)–(13) позволяет задавать априорно функцию $u_0(\tau)$ и получать физически содержательные зависимости $Q_0(\tau), Q_1(\tau)$. Рассмотрим частный пример:

$$u_0(\tau) = b_0(\tau^2 - \tau_1^2), \tau_1 > 0, \tau \in (-\tau_1, \tau_1); b_0, \tau_1 - \text{const}. \quad (14)$$

Отсюда находим

$$u_1(\tau) = (C_1/\tau_1^2)(\tau_1 + \tau)^{1+\Delta_1}(\tau_1 - \tau)^{1-\Delta_1}, C_1 \equiv \text{const}, \quad (15)$$

$$\Delta_1 = (-r)/[2b_0\tau_1(M_0 + 1)], \quad (16)$$

$$Q_0(\tau) = Q_0^1 \tau(\tau^2 - \tau_1^2), \quad (17)$$

$$Q_1(\tau) = Q_1^1 \tau(\tau_1 + \tau)^{1+\Delta_1}(\tau_1 - \tau)^{1-\Delta_1}. \quad (18)$$

Параметры источника Q_0^1, Q_1^1 связаны с константами b_0, C_1, M_0 формулами:

$$Q_0^1 = 2b_0^2(M_0^2 - 1), Q_1^1 = -4b_0C_1(M_0 + 1)/\tau_1^2, b_0C_1 < 0.$$

Для Δ_1 в (16), (18) возможны два варианта: $\Delta_1 \in (-1, -\Delta_0) \subset (-1, 0)$ и $\Delta_1 \in (\Delta_0, 1) \subset (0, 1)$, и при этом функции $Q_0(\tau), Q_1(\tau)$ обращаются в ноль в точках $\tau = 0, \tau = \pm\tau_1$. Величина $\Delta_0 \in (0, 1)$ будет указана в ходе дальнейших вычислений. Выражения (9) и (14), (15) определяют неавтономный аналог волны переброса (кинк) между состояниями системы при $\tau = \pm\tau_1$:

$$u = u_0 \left[1 - \frac{C_1}{b_0\tau_1^2} \left(\frac{\tau_1 + \tau}{\tau_1 - \tau} \right)^{\Delta_1} \beta \right]. \quad (19)$$

При $\tau = 0$ начальный профиль кинка $u(x', t=0) = u_0 + u_1$, $x' \in (-\infty, \infty)$ имеет наклон

$$u(\tau=0, t=0) = C_1 - b_0 \tau_1^2. \quad (20)$$

Кинк релаксирует в автомодельное состояние (бегущую волну) вида $u = u_0(\tau)$, $v = -u_0 M_0$, $\tau = \tau(x' - M_0 t)$, где $M_0 > 0$ – безразмерная скорость этой волны. В отрелаксировавшем состоянии знак наклона кинка

$$u_0(\tau=0) = -b_0 \tau_1^2 \quad (21)$$

остаётся неизменным именно при $b_0 C_1 < 0$. Выполнено неравенство $[u(\tau=0, t=0)/u_0(\tau=0)] > 1$, характеризующее отношение наклонов кинка в начальном и конечном состояниях.

Обсудим свойства источника. В начальный ($t=0$) момент времени нелинейный реономный источник $k_v = Q_0 + \beta Q_1$ определяется суперпозицией функций (17) и (18); в установившемся по времени автомодельном режиме действует нелинейный источник $Q_0(\tau)$. Эта функция имеет экстремумы (максимум и минимум) при $\tau = \tau_m$, где $\tau_m^2 = \tau_1^2/3$; кроме того, справедливо выражение

$$\tau = 0, \quad dQ_0/d\tau = 2b_0^2 \tau_1^2 (1 - M_0^2).$$

Функция $Q_1(\tau)$ имеет экстремумы (максимум и минимум) в точках

$$\tau_m^{(1),(2)} = \frac{1}{3} \left(\Delta_1 \tau_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 \tau_1^2 + 3\tau_1^2} \right),$$

и при этом верна формула

$$\tau = 0, \quad dQ_1/d\tau = -4b_0 C_1 (1 + M_0) > 0.$$

Отметим расположение экстремумов, выбор знаков констант b_0 , C_1 и поведение производной $dQ_1/d\tau$. Если $\Delta_1 \in (-1, -\Delta_0)$, то $b_0 < 0$, $C_1 > 0$,

$$\begin{aligned} -\tau_1 < \tau_m^{(2)} < (-\tau_m) < 0, \quad 0 < \tau_m^{(1)} < \tau_m < \tau_1; \\ \tau = -\tau_1, \quad (dQ_1/d\tau) \rightarrow \infty; \quad \tau = \tau_1, \quad dQ_1/d\tau = 0. \end{aligned}$$

Если $\Delta_1 \in (\Delta_0, 1)$, то $b_0 > 0$, $C_1 < 0$,

$$\begin{aligned} -\tau_1 < (-\tau_m) < \tau_m^{(2)} < 0, \quad 0 < \tau_m < \tau_m^{(1)} < \tau_1; \\ \tau = -\tau_1, \quad dQ_1/d\tau = 0; \quad \tau = \tau_1, \quad (dQ_1/d\tau) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В качестве входных параметров задачи возьмем: 1) размер интервала $(-\tau_1, \tau_1)$, в котором существует волна переброса; 2) наклоны кинка в начальном (20) и отрелаксировавшем (21) состояниях – знаки этих наклонов должны быть одинаковые; 3) отношение наклонов функции источника

$$\left(\frac{dQ_0/d\tau}{dQ_1/d\tau} \right)_{\tau=0} = a_0 = b_0 (M_0 - 1) \tau_1^2 / (2C_1).$$

Тогда параметры решения подсчитываются по формулам:

$$b_0 = -u_0(\tau=0)/\tau_1^2, \quad C_1 = u_1(\tau=0), \quad M_0 - 1 = 2a_0 C_1 / (b_0 \tau_1^2).$$

Следовательно, скорость бегущей волны сверхзвуковая при $a_0 < 0$; в этом случае между функциями $Q_0(\tau)$ и $Q_1(\tau)$ имеется конкурентное взаимодействие, которое завершается формированием сверхзвуковой волны переброса, $M_0 > 1$. Если $0 < a_0 < [u_0(\tau=0)/2u_1(\tau=0)]$, то конкуренция отсутствует ($Q_0 Q_1 \geq 0$), и процесс завершается формированием дозвуковой бегущей волны, $M_0 \in (0, 1)$. В ходе дальнейшего анализа будут указаны оценки начальной скорости точки перегиба кинка, при которых автомодельная волна является дозвуковой либо сверхзвуковой. Перечисленные качественные свойства источника при $\Delta_1 \in (\Delta_0, 1)$ показаны на рис. 1. Иллюстрация варианта $\Delta_1 \in (-1, \Delta_0)$ по своему физическому содержанию аналогичная и здесь не приводится.

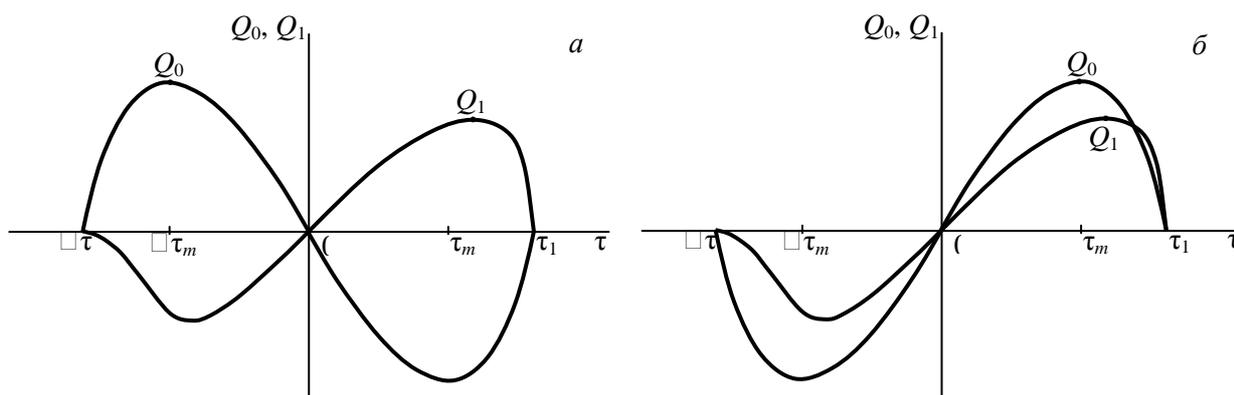


Рис. 1. Функции источника $k_0 = Q_0 + \beta Q_1$:
а – сверхзвуковой вариант $M_0 > 1$; б – дозвуковой вариант $0 < M_0 < 1$

В точке перегиба релаксирующего кинка $x' = x'_f(t)$ условие $\partial^2 \tau / \partial (x')^2 = 0$ дает уравнение $\partial u / \partial \tau = 0$, определяющее функцию $\tau = \tau_f(t)$:

$$\tau_f = \frac{\Delta_1 \tau_1 A_f}{1 + A_f}, \quad A_f = \frac{-C_1 \beta \left(\frac{\tau_1 + \tau_f}{\tau_1 - \tau_f} \right)^{\Delta_1}}{b_0 \tau_1^2}, \quad (22)$$

$$\frac{d\tau_f}{dt} = \frac{r \tau_f (\Delta_1 \tau_1 - \tau_f) (\tau_1^2 - \tau_f^2)}{\Delta_1 \tau_1 (\tau_f^2 - 2\tau_f \Delta_1 \tau_1 + \tau_1^2)}.$$

Рассмотрим скорость $dx'_f/dt = M_f$ точки перегиба:

$$M_f + 1 = \left[\frac{d\tau_f}{dt} + (M_0 + 1) u_0(\tau_f) \right] u_f^{-1}, \quad (23)$$

$$u_f = u_0(\tau_f) + \beta u_1(\tau_f).$$

Если $\Delta_1 \in (-1, -\Delta_0)$, то $\tau_f < 0$, $d\tau_f/dt > 0$, $u_0(\tau_f) > 0$, $u_f > 0$, $\Delta_1 \tau_1 < \tau_f < 0$; напомним, что здесь $b_0 < 0$, $C_1 > 0$. Если $\Delta_1 \in (\Delta_0, 1)$, то $\tau_f > 0$, $d\tau_f/dt < 0$, $u_0(\tau_f) < 0$, $u_f < 0$; $0 < \tau_f < \Delta_1 \tau_1$, $b_0 > 0$, $C_1 < 0$. Таким образом, для всех допустимых значений Δ_1 имеем

$$0 < (u_0/u)_f < 1, \quad u_f^{-1} (d\tau_f/dt) > 0, \quad \Delta_1 \tau_f > 0, \quad \left[\tau_f / (\Delta_1 \tau_1 - \tau_f) \right] > 0.$$

В установившемся по времени состоянии получаем:

$$t \rightarrow \infty, \quad A_f \rightarrow 0, \quad \tau_f \rightarrow 0, \quad (d\tau_f/dt) \rightarrow 0, \quad M_f \rightarrow M_0.$$

Формулу (23) запишем в виде

$$\frac{M_f + 1}{M_0 + 1} = R^2(\eta); \quad \eta = \tau_f / (\Delta_1 \tau_1), \quad 0 < \eta < 1, \quad (24)$$

$$R^2(\eta) = (1 - \eta) \left[\left(1/\Delta_1^2 \right) - \eta^2 \right] / \left[\eta^2 - 2\eta + \left(1/\Delta_1^2 \right) \right].$$

Пусть в начальном состоянии точка перегиба имеет некоторую скорость $M_f = M_f^1 > 0$, и при этом $\eta = \eta_1 = \tau_f(t=0) / (\Delta_1 \tau_1)$, где $\tau_f^2(t=0) < \tau_1^2$. Обозначим $R_1^2 = R^2(\eta = \eta_1)$ и укажем условия, при которых решение имеет физический смысл. Расчеты показывают, что $\Delta_0 = 1/\sqrt{2}$, а значения параметров η_1 , Δ_1 должны удовлетворять неравенствам

$$0 < \eta_1 < \left(1 - \sqrt{(1/\Delta_1^2) - 1}\right), (1/2) < \Delta_1^2 < 1,$$

которые приводят к оценке $R_1^2 > 1$. Дозвуковая волна $M_0 \in (0,1)$ существует, если

$$R_1^2 < (1 + M_f^1) < 2R_1^2. \quad (25)$$

Сверхзвуковая волна $M_0 > 1$ существует, если $1 + M_f^1 > 2R_1^2$. Следовательно, исходное допущение $M_0 > 0$ будет выполнено, если начальная скорость M_f^1 точки перегиба превосходит пороговое значение $(R_1^2 - 1) > 0$. Еще одно пороговое значение, а именно: $M_f^1 = 2R_1^2 - 1$ разделяет дозвуковой и сверхзвуковой режимы движения автомоделного кинка. Отметим, что в формуле (24), дающей зависимость $M_f = M_f(\eta)$, аргумент $\eta \in (0, \eta_1]$ изменяется от начального значения η_1 в сторону меньших значений, $\eta \rightarrow (+0)$.

Возвратное движение точки перегиба. До сих пор мы рассматривали устойчивый ($r < 0$) режим релаксации кинка. Обсудим теперь неустойчивый процесс, происходящий при $r > 0$. Все формулы решения остаются без изменения, но, согласно (16), требуется поменять знаки констант b_0 и C_1 ; знак произведения этих констант по-прежнему отрицательный. При $\Delta_1 \in (\Delta_0, 1)$ нужно взять $b_0 < 0$, $C_1 > 0$; при $\Delta_1 \in (-1, -\Delta_0)$ нужно взять $b_0 > 0$, $C_1 < 0$. Из этого следует, что при $r > 0$ и $r < 0$ различаются знаки наклона кинка: см. (20), (21). Вид функций источников (17), (18) и процедура задания начального состояния системы «среда – источник» полностью сохраняются. При $r > 0$ имеем неустойчивое решение (9), (19); вдоль каждой ненулевой изолинии $\tau = \tau_i$ источник с течением времени ($t \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty$) становится неограниченно большим. Проанализируем поведение точки перегиба кинка. Пусть в начальном состоянии ($\beta = 1$) имеем $\eta = \eta_1$, $M_f = M_f^1 > 0$. Отличие от устойчивого режима $r < 0$ в том, что теперь аргумент $\eta \in [\eta_1, 1)$ увеличивается от своего начального значения и стремится к 1 слева, см. (22), (24). Формально это означает, что результатом пространственно-временной эволюции кинка является сильный разрыв функции $\tau(x', t)$ в точке $x' = 0$. На разрыве функция изменяется скачком от $(-\tau_1)$ до τ_1 . В физическом отношении целесообразно рассматривать неустойчивый процесс на конечном интервале времени, предшествующем остановке точки перегиба. Запишем (24) в виде

$$M_f = (M_0 + 1)R^2 - 1.$$

Здесь $M_f^1 = M_f(\eta = \eta_1) > 0$, $M_f(\eta \rightarrow 1) \rightarrow (-1) < 0$. Таким образом, для непрерывной функции $M_f(\eta)$ существует конечный момент времени $t = t_* < \infty$, $\eta_* = [\tau_f(t_*) / (\Delta_1 \tau_1)] < 1$, когда скорость точки перегиба равна нулю: $M_f(\eta = \eta_*) = (M_0 + 1)R^2(\eta = \eta_*) - 1 = 0$. При $t > t_*$ происходит возвратное движение точки перегиба, являющееся предвестником сильного разрыва.

Нелокальное решение. Для нелокального уравнения (2), преобразованного к системе (5)–(7), кинковое решение строим в виде

$$\xi = \tau/\beta, u = \tau U(\xi), v = \tau V(\xi), \beta = \exp(rt). \quad (25)$$

В этом случае функция источника (3) представляется формулой $k_0 = \tau Q(\xi)$, где $Q(\xi)$ подсчитывается посредством $U(\xi)$. На основе (25) получаем

$$\begin{aligned} \theta &= \tau(1 + \epsilon \chi^2 S), S = U(U + \xi \dot{U}), \\ \partial \theta / \partial \tau &= 1 + \epsilon \chi^2 (S + \xi \dot{S}), \\ V(V + \xi \dot{V}) - r \xi \dot{V} - U(U + \xi \dot{U}) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \epsilon \chi^2 U^2 \xi \frac{d}{d\xi} (S + \xi \dot{S}) &= Q(\xi), \end{aligned} \quad (26)$$

$$V = r - M_0 U, \quad M_0 \equiv \text{const}. \quad (27)$$

Здесь точка над символом функции означает дифференцирование $d/d\xi$. M_0 – произвольная постоянная, являющаяся параметром начального состояния кинка. Нетрудно видеть, что M_0 есть безразмерная скорость линии $\xi = \text{const}$. Далее берем для определенности $M_0 > 0$. При $r = 0$ получаем бегущую волну $\tau = \tau(x' - M_0 t)$. Уравнениям (26), (27) удовлетворяют следующие функции:

$$U^2 = (A_1^2/\xi^2) - A_0^2, \quad S = -A_0^2 \equiv \text{const},$$

$$Q(\xi) = k_v^1 - 2rM_0 U, \quad k_v^1 = r^2 - A_0^2(M_0^2 - 1 + \epsilon\chi^2 A_0^2). \quad (28)$$

Отсюда находим

$$U = \pm (A_1^2 \beta^2 - A_0^2 \tau^2)^{1/2} / |\tau|, \quad (29)$$

где A_0, A_1 – положительные постоянные. В данном решении мы рассматриваем вариант $\tau \in (-\tau_w, \tau_w)$,

$$\tau_w = (A_1/A_0) \exp(rt), \quad A_1 > A_0 \tau_w(t=0) > 0. \quad (30)$$

Для случая $(\partial\tau/\partial x') > 0$ берем в верхней части ($\tau > 0$) кинка знак «+» в (29), т. е. $U > 0$; в нижней части ($\tau < 0$) берем знак «-», т. е. $U < 0$. Тогда для кинка имеем

$$u = \partial\tau/\partial x' = (A_1^2 \beta^2 - A_0^2 \tau^2)^{1/2}, \quad Q_g = -2rM_0. \quad (31)$$

Аналогичным образом нужно действовать при $(\partial\tau/\partial x') < 0$. Параметры источника k_v^1, Q_g связаны с параметрами решения A_0, A_1, r, M_0 формулами (28), (31). Точка перегиба кинка $\tau = 0$ движется со скоростью M_0 . Таким образом, имеем аналог волны переброса в интервале с нестационарными границами: $(\partial\tau/\partial x') \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm\tau_w(t)$.

Рассмотрим верхнюю часть кинка, $\tau \in [0, \tau_w)$. Скорость перемещения изолинии $\tau = \tau_i > 0$ равна

$$M_i(t) = M_0 - (r\tau_i/A_1^2)(A_1^2 \beta^2 - A_0^2 \tau_i^2)^{-1/2}. \quad (32)$$

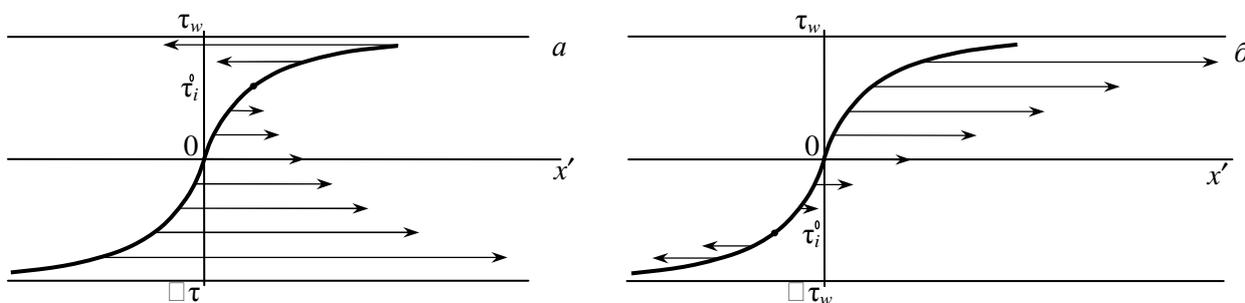


Рис. 2. Распределение скоростей изолиний в фиксированный момент времени $t = t_1 \geq 0$:
 а – неустойчивый вариант; б – устойчивый вариант.
 Черным кружком отмечена неподвижная изолиния, стрелка указывает направление движения

Возьмем любой конечный момент времени $t = t_1, 0 \leq t_1 < \infty$, обозначим $\tau_i = \delta_i \tau_w(t_1)$ и получим

$$M_i(t_1) = M_0 - (r\delta_i/A_0)(1 - \delta_i^2)^{-1/2},$$

где $\delta_i \in (0,1)$ – номер изолинии. Пороговое значение

$$\delta_i^0 = M_0 A_0 (r^2 + M_0^2 A_0^2)^{-1/2} \quad (33)$$

относится к неподвижной изолинии. Отрицательные скорости имеют изолинии, находящиеся в конечной окрестности верхней границы $\tau = \tau_w(t) > 0$, т. е. здесь $\delta_i \in (\delta_i^0, 1)$. Изолинии $\tau_i > 0$, обладающие положительными скоростями, располагаются непрерывным образом на двух участках:

1) в конечной окрестности точки перегиба $\tau = 0$, движущейся с положительной скоростью $M_0 > 0$, а именно: $\delta_i \in (0, \delta_i^0)$; 2) во всей нижней части кинка, $\tau \in (-\tau_w, 0]$,

$$\tau_i = -\delta_i \tau_w(t_1) < 0, \delta_i \in (0, 1), M_i(t_1) = M_0 + (r \delta_i / A_0) (1 - \delta_i^2)^{-1/2}.$$

Вогнутый участок движется с положительной скоростью навстречу той части выпуклого участка, что примыкает к границе $\tau = \tau_w$, рис. 2, а. Такое состояние – неустойчивое, и оно влечет за собой монотонное неограниченное расширение при $t > t_1$ границ интервала $(-\tau_w, \tau_w)$. Из (32) и (33) следует, что в момент времени $t = t_* > t_1$ обращается в ноль скорость изолинии $\delta_i \tau_w(t_1)$: $\beta_* = \beta_1 \delta_i / \delta_i^0$, $\delta_i \in (\delta_i^0, 1)$, $\beta_1 = \exp(rt_1)$, $\beta_* = \exp(rt_*)$. Чем ближе τ_i (со стороны больших значений) к $\tau_i^0 = \delta_i^0 \tau_w(t_1)$, тем быстрее скорость $M_i(t)$ принимает нулевое значение; при $t > t_*$ скорость этой изолинии становится положительной. Таким образом, при $t > t_1$ наблюдается непрерывный процесс перемены знака («минус» → «плюс») скорости изолиний. Вместе с тем существенно, что при $t > t_1$ в области определения решения появляются новые изолинии, примыкающие изнутри к левой/правой границам интервала $(-\tau_w, \tau_w)$ и имеющие, соответственно, положительные/отрицательные скорости. В данном случае нет разрушения кинка из-за того, что интервал $(-\tau_w, \tau_w)$ монотонно расширяется с течением времени: в каждый конечный фиксированный момент $t \in [0, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ решение непрерывно, и наклон кинка, согласно (31), имеет максимум при $\tau = 0$. При $t \rightarrow \infty$ область определения решения стремится занять 1-й и 3-й квадранты на плоскости (x', τ) , и тогда $x' = 0$ – сильный разрыв. Следует обратить внимание на важное свойство нестационарного решения (25), (31): $v = \partial \tau / \partial t = 0$ при $\tau = \tau_j(t)$, где $0 < \tau_j < \tau_w$,

$$(\tau_j / \tau_w) = \delta_i^0. \quad (34)$$

Функция $\tau = \tau(x', t)$, в отличие от автомодельного кинка, немонотонная по отношению к аргументу t : при каждом фиксированном конечном x' она имеет максимум. Условие $v(\tau_j, t) = 0$ выполнено в верхней части кинка, причем $(\partial^2 \tau / \partial t^2)_j < 0$. Индекс j относится к функциям на линии (34):

$$\xi_j = \tau_j / \beta = M_0 A_1 / (r^2 + M_0^2 A_0^2)^{1/2}.$$

При $r < 0$ получаем устойчивый режим вырождения кинка в однородное состояние $\tau = 0$. Неподвижная изолиния $\tau_i = \tau_i^0 = -\delta_i^0 \tau_w(t)$ находится в нижней части кинка: $-\tau_w < \tau_j < \tau_i^0 < 0$. При $\tau = \tau_j(t)$ имеем $v(\tau_j, t) = 0$, $(\partial^2 \tau / \partial t^2)_j > 0$, т. е. для каждого фиксированного конечного x' функция $\tau = \tau(x', t)$ имеет минимум по отношению к аргументу t . Границы интервала $(-\tau_w, \tau_w)$ сближаются, потому что теперь выпуклый участок движется с положительной скоростью навстречу той части вогнутого участка, которая примыкает к нижней границе $\tau = -\tau_w$, рис. 2, б. Кинк в ходе своей эволюции стремится распрямиться в линию $\tau = 0$: в ось x' .

Остается указать роль источника в возникновении неустойчивости и дать последовательность расчета констант, содержащихся в построенном решении. Исходными являются параметры k_v^1 , Q_g , а также величины $\tau_w(t=0)$, $A_1 = u(\tau=0, t=0)$, определяющие начальное состояние кинка. Неавтомодельность решения (25), (27), (31) обусловлена именно воздействием градиентного источника $Q_g |u|$, аддитивно входящего в (3): если $Q_g = 0$, то $r = 0$, т. е. $\beta \equiv 1$. Согласно (31), для кинка $(\partial \tau / \partial x') > 0$ знак r противоположен знаку Q_g : имеем устойчивость/неустойчивость при положительном/отрицательном Q_g . Для антикинка $(\partial \tau / \partial x') < 0$ наблюдается инверсия знаков: в этом случае $Q_g = 2rM_0$, поэтому имеем устойчивость/неустойчивость при отрицательном/положительном Q_g . Итак, неустойчивому кинку/антикинку соответствует градиентный сток ($Q_g < 0$)/источник ($Q_g > 0$). Устойчивость автомодельных кинк-решений нелокального волнового уравнения (2) с полиномиальной по τ нелинейностью источника рассмотрена в [15].

Порядок расчетов: из (30) получаем $A_0 = A_1/\tau_w(0)$. Далее применяем формулу $Q_g^2 = 4r^2 M_0^2$ и исключаем M_0^2 в выражении для k_0^1 , см. (28). Это дает биквадратное уравнение для r^2 , которое всегда имеет один положительный корень: вычисляем r и присваиваем ему знак, соответствующий знаку Q_g , а затем определяем скорость точки перегиба $M_0 = [Q_g/(-2r)] > 0$. Роль параметра нелокальности среды $\epsilon\chi^2$ видна из следующих неравенств: $\partial(r^2)/\partial(\epsilon\chi^2) > 0$, $\partial(M_0^2)/\partial(\epsilon\chi^2) < 0$.

Заключение. Получены точные частные решения типа «кинк» для волновых уравнений (1) и (2). Выполнен анализ неустойчивых состояний системы «среда – источник». Неустойчивый вариант решения (9) даёт сильный разрыв при $t \rightarrow \infty$, а предвестником начала разрушения кинка служит возвратное движение его точки перегиба. Функция (31) представляет решение нелокального уравнения (2) с источником (3). Основной результат: инверсия знака параметра Q_g приводит к инверсии условий устойчивости кинка и антикинка.

Литература

1. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
2. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.
3. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
4. Алфимов, Г.Л. Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности / Г.Л. Алфимов // Нелинейная динамика. – 2009. – Т. 5, № 4. – С. 585–602.
5. Аэро, Э.Л. Динамические задачи для уравнения синус-Гордона с переменными коэффициентами. Точные решения / Э.Л. Аэро // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, Вып. 1. – С. 102–108.
6. Закирьянов, Ф.К. Управление динамикой кинка модифицированного уравнения синус-Гордона внешним воздействием с меняющимися параметрами / Ф.К. Закирьянов, Л.В. Якушевич // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 5. – С. 821–834.
7. Аэро, Э.Л. Решения уравнений синус-Гордон с переменной амплитудой / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Ю.В. Павлов // Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 184, № 1. – С. 79–91.
8. Самарский, А.А. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 476 с.
9. Фила, М. Системы «реакция – диффузия»: разрушение решений, возникающее и исчезающее под действием диффузии / М. Фила, Х. Ниномия // Успехи математических наук. – 2005. – Т. 60, вып. 6 (366). – С. 207–226.
10. Богоявленский, О.И. Опрокидывающиеся солитоны / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1991. – 319 с.
11. Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 734 с.
12. Корпусов, М.О. Разрушение решений обобщенного уравнения Клейна–Гордона с сильной диссипацией / М.О. Корпусов // Известия РАН. Серия математическая. – 2013. – Т. 77, № 2. – С. 109–138.
13. Копылова, Е.А. Асимптотическая устойчивость солитонов для нелинейных гиперболических уравнений / Е.А. Копылова // Успехи математических наук. – 2013. – Т. 68, Вып. 2 (410). – С. 91–144.
14. Юдович, В.И. О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости / В.И. Юдович // Математические заметки. – 2000. – Т. 68, Вып. 4. – С. 627–636.

15. Шабловский, О.Н. Нелокальность и возникновение резонансов в динамике волн / О.Н. Шабловский // *Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем.* – М.: Янус-К, 2017. – Вып. 18. – С. 125–138.

Поступила в редакцию 24 сентября 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 4, pp. 51–61*

DOI: 10.14529/mmph200406

DYNAMICS OF UNSTABLE SOLUTIONS FOR THE WAVE EQUATION WITH SOURCES

O.N. Shablovskii

Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus

E-mail: shablovsky-on@yandex.by

Two new accurate solutions of the wave equation with sources are obtained. The dynamics of unstable states described by these solutions is studied. Analytical forms are given for the partial derivatives of the required function with respect to the spatial coordinate and time on the plane of independent variables “the required function – time”. This structure of the solution allows us to consider nonstationary analogs of self-similar kinks describing the transition between two equilibrium states of the “medium – source” system. For the classical wave equation, a nonlinear rheonomic source is used, the behavior of which affects the properties of the relaxing kink. The conditions under which the speed of movement of the formed self-similar transfer wave is subsonic or supersonic are determined. An important role of the velocity of the inflection point of a nonselfsimilar kink has been analyzed; the threshold value of the velocity is calculated, which separates the subsonic and supersonic regimes. An unstable version of the presented solution gives a strong discontinuity of the required function with an unlimited increase in time. The stopping of the kink inflection point is an indicator of a strong rupture. An estimate of the value of the moment in time preceding the beginning of the return motion of the inflection point is indicated.

A solution to a spatially nonlocal fourth-order wave equation with two additively entering sources is given. One source depends on the desired function in a linear homogeneous way; the second one depends on the modulus of the gradient of the desired function the same way. The solution is an analog of an overthrow wave in an interval with non-stationary boundaries. At each finite moment of time this solution is continuous, and for an infinite time there is a loss of smoothness of the solution, we have the so-called “slow explosion”. In the unstable solution, the isolines of the sought-for function on the concave section (the lower part of the kink) move towards the convex section, which is adjacent to the upper boundary of the kink. In the stable version, the kink degenerates into a homogeneous state. It has been analyzed that for a nonselfsimilar process, the inversion of the sign of the gradient source gives an inversion of the stability conditions for the kink and antikink. An unstable kink/ antikink corresponds to a gradient sink/source.

Keywords: wave equation; nonlinear source; nonlocality; nonselfsimilar kink; subsonic and supersonic wave; “slow explosion”.

References

1. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations.* London, Academic Press Inc., 1984, 630 p.
2. Tabor M. *Chaos and Integrability In Nonlinear Dynamics.* New York etc., Wiley, Cop., 1989, 364 p.
3. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics.* Springer, 2001, 462 p.
4. Alfimov G.L. Nonlocal Sine-Gordon Equation: Kink Solutions in the Weak Nonlocality Limit. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2009, Vol. 5, no. 4, pp. 585–602. DOI: 10.20537/nd0904010

5. Aero E.L. Dynamical Problems for the Sine-Gordon Equation with Variable Coefficients. Exact Solutions. *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, Vol. 66, Iss. 1, pp. 99–105. DOI: 10.1016/s0021-8928(02)00013-8
6. Zakir'yanov F.K., Yakushevich L.V. Control of the Dynamics of the Kink of the Modified Sine-Gordon Equation by the External Exposure with Varying Parameters. *Computer Research and Modeling*, 2013, Vol. 5, no. 5, pp. 821–834. (in Russ.). DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-5-821-834
7. Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V. Solutions of the Sine-Gordon Equation with Variable Amplitude. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2015, Vol. 184, no. 1, pp. 961–972. DOI: 10.4213/tmf8821.
8. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* (Modes with Sharpening in Problems for Quasilinear Parabolic Equations). Moscow, Nauka Publ, 1987, 476 p. (in Russ.).
9. Fila M., Ninomiya H. Reaction Versus Diffusion: Blow-up Induced and Inhibited by Diffusivity. *Russian Mathematical Surveys*, 2005, Vol. 60, no. 6, pp. 1217–1235. DOI: 10.1070/RM2005v060n06ABEH004289
10. Bogoyavlenskiy O.I. *Oprokidyvayushchiesya solitony* (Overturning Solitons). Moscow, Nauka Publ., 1991, 319 p. (in Russ.).
11. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Sobolev Type Equations). Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 734 p. (in Russ.).
12. Korpusov M.O. Blow-up of Solutions of Strongly Dissipative Generalized Klein-Gordon Equations. *Izvestiya: Mathematics*, 2013, Vol. 77, no. 2, pp. 325–353. DOI: 10.1070/IM2013v077n02ABEH002638
13. Kopylova E.A. Asymptotic Stability of Solitons for Nonlinear Hyperbolic Equations. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, Vol. 68, no. 2, pp. 283–334. DOI: 10.1070/RM2013v068n02ABEH004830
14. Yudovich V.I. On the Unbounded Increase in Vorticity and Velocity Circulation in Stratified and Homogenous Fluid Flows. *Mathematical Notes*, 2000, Vol. 68, no. 4, pp. 533–540. DOI: 10.1007/BF02676735
15. Shablovskiy O.N. Nelokal'nost' i vzniknovenie rezonansov v dinamike voln (Nonlocality and the Occurrence of Resonances in Wave Dynamics). *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem*, Moscow, Yanus-K Publ., 2017, Iss. 18, pp. 125–138. (in Russ.).

Received September 24, 2020

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПОСЛОЙНОГО РАДИОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОГО СНЯТИЯ СЛОЕВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗЕРНОГРАНИЧНОЙ ДИФФУЗИИ КОБАЛЬТА В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ НИКЕЛЕ

А.Ю. Истомина, Е.В. Осинников

*Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, г. Екатеринбург,
Российская Федерация
E-mail: osinnikov@imp.uran.ru*

Разработана методика послойного радиометрического анализа с использованием электролитического снятия слоев для определения параметров зернограничной диффузии кобальта в поликристаллическом никеле.

Цель работы заключается в отработке полного технологического цикла послойного радиометрического анализа, выборе оптимального состава электролита для никеля и условий проведения эксперимента для снятия слоев металла толщиной 20–200 нм.

Исследования проводились на никеле номинальной чистоты 99,98 %. Стабилизирующая термообработка образцов проводилась при давлении 10^{-5} Па в течение 2 ч при температуре 1273 К. Диффузионные отжиги выполнялись при давлении 10^{-9} Па в интервале температур 623–1173 К в течение 5–30 ч.

Концентрационные профили измерялись путем параллельного снятия слоев, которые были получены с помощью электролитической полировки в растворе на основе сульфата никеля с последующим взвешиванием образца на высокоточных аналитических весах. Разница в весе до и после снятия слоев использовалась для дальнейшего расчета толщин снятых слоев и, как следствие, глубины проникновения диффузанта. Остаточная активность образца измерялась при помощи цифрового гамма-спектрометра с NaI(Tl) детектором. Перед проведением экспериментов был изготовлен эталонный источник с заранее известной активностью для учета поправочного коэффициента вследствие радиоактивного распада ^{57}Co .

Удельная слоевая активность была рассчитана по интегральному остатку линии 122,14 кэВ по методу Грузина. На основе предложенной методики возможно определить параметры зернограничной диффузии, такие как коэффициент зернограничной диффузии, тройное произведение и коэффициент сегрегации.

Ключевые слова: зернограничная диффузия; поликристаллический никель; глубина проникновения; послойный радиометрический анализ.

Введение

Всестороннее понимание диффузионных процессов в твердых телах является одним из ключевых вопросов в разработке материалов. В настоящее время много внимания уделяется исследованию процессов зернограничной диффузии, т. к. скорость зернограничной диффузии лимитирует эксплуатационные свойства материала в конкретных условиях.

Существует ряд методик для определения коэффициента зернограничной диффузии для различных образцов [1]. Основным общим признаком таких методик является послойное определение концентрации диффундирующего элемента. За основу была взята методика определения коэффициента зернограничной диффузии – метод послойного радиометрического анализа. Однако заданный способ снятия слоев материала заданной толщины с помощью микротона, примененный в [2, 3], может не давать возможности снизить толщину снятого слоя до размеров, позволяющих определять зависимость концентрации по глубине с требуемым разрешением, так как толщина снятого слоя достигает порядка 1 мкм, что сопоставимо с глубиной проникновения диффузанта внутрь образца.

Поскольку, особенно при низких температурах диффузионного отжига, диффузионные пути могут быть менее толщины снятия единичного слоя, то это может затруднять или приводить к невозможности исследования зернограничной диффузии при температурах ниже, чем $0,4T_{пл}$.

Другим методом послойного радиометрического анализа является анодное окисление. Достоинством данной методики является то, что при ее использовании снимаются достаточно тонкие слои (20–200 нм) [1], однако данный метод применим не ко всем материалам и при его использовании необходимо дополнительно растворять образовавшуюся оксидную пленку, тогда как при электролитической полировке удаляется непосредственно слой образца без образования пленки.

Этого недостатка лишена методика снятия слоев никеля электролитическим способом. Ее преимущество состоит в том, что с помощью данного метода возможно снимать слои примерной толщиной 10 нм, тогда, как при использовании других методик [2] снимаются слои порядка 100 нм – 1 мкм, что может быть сопоставимо с глубиной проникновения диффузанта в исходный образец. Также достоинством этой методики является то, что для ее реализации не требуется какого-либо специального дорогостоящего оборудования.

В настоящей работе ставилась задача отработать все стадии послойного радиометрического анализа, подобрать оптимальный состав электролита для чистого Ni и условия проведения эксперимента для снятия слоев металла толщиной порядка 20–200 нм.

Экспериментальная часть

А. Материал

Исследования проводились на Ni номинальной чистоты 99,98 %. Содержание примесей в образце приведено в табл. 1.

Таблица 1

Содержание примесей в Ni образце

Элемент примеси	Al	Co	Cr	Cu	Fe	Mn	Mg	P	Si	Ti	V
Содержание, 10^{-4} % вес	61	35	< 3	17	4	< 1	13	< 30	10	7	7

Подготовка образцов для послойного радиометрического анализа включает следующие этапы:

- 1) нарезка образцов заданной геометрии на электроэрозионном станке в виде дисков;
- 2) шлифовку образца до зеркального блеска для создания чистой и ровной поверхности (удаление рисок, рельефа, ямок и деформации);
- 3) очистка поверхности образца электрохимическим способом после шлифовки для удаления напряженного слоя, который образуется в процессе шлифовки образца.

Образцы в форме диска с толщиной 5 мм и диаметром 12 мм были приготовлены с помощью электроэрозионного станка. Далее образцы подвергались травлению в концентрированной азотной кислоте HNO_3 . После чего проводилась механическая шлифовка и полировка с использованием алмазной пасты 1,0 мк для создания зеркально чистой поверхности. Контроль чистоты поверхности проводился на микроскопе Carlzeiss Jena при увеличении $\times 80$.

Заключительный этап состоял в электрополировке образцов в растворе хромового ангидрида и ортофосфорной кислоты, состав которого приведен в табл. 2, при постоянном напряжении 12 В в течение 2 мин, с целью формирования более гладкого рельефа, чем при механической обработке.

Таблица 2

Состав электролита для электрополировки никеля

Компонент	Концентрация компонента, г/л
Хромовый ангидрид CrO_3	100
Ортофосфорная кислота H_3PO_4	860

Поскольку особое внимание при изучении диффузии уделяется структуре зерен металла, т. к. миграция границ может существенно ускорить диффузию в материале, особенно важно это учитывать в чистых металлах, т. к. рост зерен в Ni может происходить при небольшом нагревании образца. Предложенная методика предполагает, что образцы с нанесенным радионуклидом подвергаются отжигам, поэтому необходимо, чтобы исследуемая структура была стабильной. Образцы перед нанесением радиоизотопа подвергались стабилизирующему отжигу при температурах, существенно более высоких, чем температуры диффузионных отжигов. Это позволяет исключить миграцию границ зерен в процессе приготовления образцов с изотопом ^{57}Co при последующих отжигках.

Образцы, полученные после электролитической полировки, отжигались при температуре 1237 К, в течение двух часов в кварцевой трубе в условиях динамического вакуума 10^{-5} Па, создаваемом турбомолекулярным насосом. Нагрев образцов осуществлялся стандартной трубчатой печью сопротивления, которая надвигалась на трубу с образцами после достижения номинального вакуума. Заданная температура поддерживалась автоматическим регулятором ТРМ251 и определялась по Pt-Pt5%Rh-термопаре с погрешностью $\pm 0,1$ К.

Для удаления возможной оксидной пленки, которая могла образоваться при такой высокой температуре, образец снова подвергался электрохимической обработке в том же электролите, что и до проведения стабилизирующего отжига.

Для определения среднего размера зерна были проведены металлографические исследования, включающие в себя фотографию травленного шлифа поверхности образца с увеличением $\times 50$. На рис. 1 приведена гистограмма распределения зерен, из которой видно, что размер кристаллитов после отжига составил 160 ± 50 мкм.

Согласно рис. 1, размер зерна находится в интервале от 50 до 350 мкм, что свидетельствует о том, что после проведения рекристаллизационного отжига уменьшилось количество различных структурных дефектов и прошла рекристаллизация, о чем свидетельствует увеличение максимального размера зерна от 100 мкм до 350 мкм для образца с содержанием никеля 99,98 %.

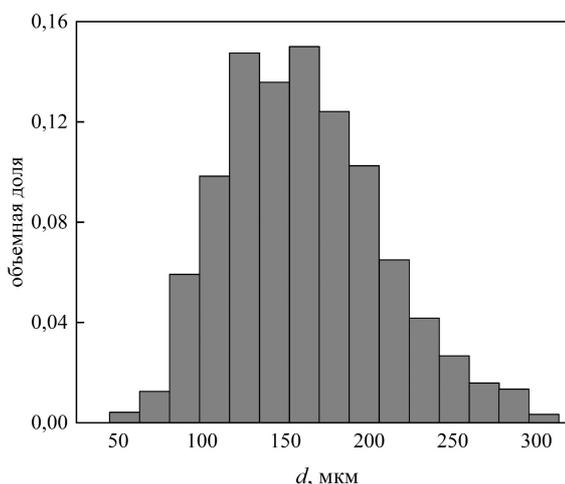


Рис. 1. Размер зерна Ni после стабилизирующего отжига 1273 К в течение 2 ч

Б. Методика послойного радиометрического анализа

Радиоизотоп на исследуемый металл можно нанести двумя способами. Первый описан подробно в работах [2, 4, 5], когда ^{57}Co наносился в виде капли на поверхность образца с последующей сушкой поверхности образца. Другой способ нанесения диффузанта – методом электролиза. В настоящей работе использовался второй способ – электролитический. Достоинством данного метода является то, что радионуклид наносится равномерно на всю поверхность образца, тогда как при нанесении методом капли радионуклид растекается по поверхности образца неравномерно.

Процесс осаждения радионуклида в количестве 1,5 МБк, осуществлялся электролизом на подготовленный образец из раствора ^{57}Co , на одну из поверхностей Ni, примерной площадью 1 см^2 . Количество нанесённого радиоактивного материала контролировалось при помощи дозиметра УИМ-2Д.

Далее образец с радиоизотопом подвергался диффузионному отжигу. Выбор температуры для диффузионного отжига определялся в зависимости от того какую температурную зависимость необходимо исследовать, обычно начинают с самых низких. Продолжительность отжига зависит от глубины проникновения атома ^{57}Co в структуру поликристалла.

Для расчета времени отжига необходимо было определить режим диффузии. Согласно [6] для определения режима необходимо вычислить значение параметра α , в зависимости от величины которого и определялся режим зернограничной диффузии.

Величину параметра α можно вычислить по соотношению:

$$\alpha = \frac{s\delta}{2\sqrt{D_V t}}, \quad (1)$$

где s – коэффициент сегрегации; δ – ширина границы зерна, м; D_V – коэффициент объемной диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; t – время диффузионного отжига, с.

Диффузионные отжики проводились в высоковакуумной печи Varian при температурах ниже 1100 К в динамическом вакууме 10^{-9} Па, создаваемом турбомолекулярным насосом. В качестве

системы охлаждения турбомолекулярных насосов выступали сосуды с жидким азотом ($T_{\text{кип}} = 77 \text{ K}$). Заданная температура поддерживалась автоматическим регулятором ТРМ251 и определялась по Pt-Pt5%Rh-термопаре с погрешностью $\pm 0,1 \text{ K}$.

После проведенной термообработки образец Ni (^{57}Co) химически травился в разбавленной соляной кислоте HCl (1:4) при комнатной температуре с целью удаления с поверхности образца остатков ^{57}Co , который не продиффундировал вглубь образца.

В научном мире существует ряд методов для определения коэффициента зернограничной диффузии для различных материалов [3]. Основным общим признаком таких методов является послойное определение концентрации диффундирующего элемента. Однако способ снятия слоев материала заданной толщины, применяемых в настоящее время в исследованиях с помощью микротона [4, 5], может не давать возможности снизить толщину снятого слоя до размеров, позволяющих определять зависимость концентрации по глубине с требуемым разрешением, т. к. толщина слоя, снятого с помощью данного метода, сопоставима с глубиной проникновения диффузанта вглубь образца.

В предложенной методике послойный радиометрический анализ проводился с помощью электрохимической полировки.

Электролит для электрохимической полировки выбирался исходя из следующих условий:

- 1) подходящие рабочие условия и состав раствора электролита в рамках простой радиохимической лаборатории;
- 2) количество удаляемого металла за определенное время в определенных рабочих условиях при нахождении в электролите образца должно было быть минимальным;
- 3) в рабочих условиях не портит поверхность образца.

Повышение плотности тока ведет к увеличению объема снимаемого металла. Для рабочих условий обработки имеет место оптимальная плотность тока, обеспечивающая получение наилучшей поверхности. Чрезмерное увеличение плотности тока может вызывать бурное газообразование, перегрев поверхности, интенсивное и неравномерное травление.

Повышение температуры электролита прямо пропорционально увеличивает количество растворенного металла, так как оно ведет к уменьшению его вязкости и облегчению диффузионных процессов. Однако чрезмерно сильный перегрев вызывает повышенное газообразование. Поэтому так же, как и для плотности тока, имеет значение оптимальная температура электролита, обеспечивающая получение наилучшей поверхности.

Увеличение времени нахождения образца в электролите в рабочих условиях ведет почти к прямо пропорциональному увеличению количества снимаемого металла.

Режим электрохимической полировки для никеля определялся плотностью тока и уровнем напряжения, приходящегося на единицу обрабатываемой поверхности, температурой электролита и временем нахождения исследуемого образца в рабочих условиях.

В качестве электролита для проведения эксперимента был выбран электролит, состав которого указан в табл. 3 [6]:

Таблица 3

Состав электролита для послойного радиометрического анализа никеля

Компонент	Концентрация компонента, г/л
Сульфат никеля $\text{Ni}(\text{SO}_3\text{NH}_2)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	400
Борная кислота H_3BO_3	30
Додецилсульфат натрия $\text{C}_{12}\text{H}_{25}\text{SO}_4\text{Na}$	0,1

Для определения оптимальной (около 20–200 нм) толщины снятого слоя были проведены градуировочные измерения при различных условиях (напряжение в цепи, плотность тока, температура электролита).

Самым оптимальным вариантом оказался режим, при котором электролит помещается в ледяную баню, так как при пониженной температуре скорость реакции ниже, чем при комнатной, следовательно, толщина снятого слоя будет меньше. Из табл. 4 следует, что необходимо подобрать источник питания со стабилизацией по току, так как все снятия слоев проходят при постоянном напряжении в зависимости от силы тока, а напряжение не контролируется.

Для определения толщины снятого слоя предварительно требовалось измерить геометрию образца с помощью микрометра (диаметр и высоту), причем диаметр образца измерялся в двух

перпендикулярных направлениях, так как образец имел несколько овальную форму и для расчета необходимо было усредненное значение диаметра. Далее вычислялась площадь полной поверхности цилиндра:

$$S = \pi d \left(h + \frac{d}{2} \right), \quad (2)$$

где d – усредненное значение диаметра, м; h – высота образца, м.

Таблица 4

Режимы подбора электролита		
$U, В (I, мА)$	Разница в весе образца до и после снятия слоя, мг	Толщина снятого слоя, мкм
2 (4)	0,045	0,02
3 (40)	0,200	0,10
4 (110)	0,400	0,20
5 (410)	0,650	0,30
6 (480)	0,850	0,40
7 (650)	1,050	0,50
8 (970)	1,450	0,60
9 (1200)	1,700	0,70

Усредненное значение диаметра в (2) вычислялось как среднее арифметическое двух взаимно перпендикулярных измерений диаметра образца, т. к. образец имел несколько овальную форму в сечении.

Концентрационные профили измерялись путем параллельного снятия слоев с помощью электролитической полировки и взвешиванием на высокоточных аналитических весах ВЛ-120М с точностью 10^{-5} г. Разница в весе до и после снятия слоев использовалась для дальнейшего расчета толщины снятого слоя и, как следствие, глубины проникновения. Остаточную активность на образце измеряли при помощи цифрового гамма-спектрометра с NaI(Tl) детектором. Перед проведением экспериментов был изготовлен эталонный источник с заранее известной активностью для учета поправочного коэффициент ввиду распада ^{57}Co .

Затем делался пересчет из разницы масс образца до и после снятия слоев, в результате чего толщина снятого слоя x_i , м вычислялась по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta m}{\rho S}, \quad (3)$$

где Δm – разница в весе образца до и после снятия слоя, кг; ρ – плотность образца, кг/м³.

Удельную слоевую активность вычисляли по интегральному остатку линии 122,14 кэВ по методу Грузина [7]. Для этого измерялась суммарная активность до и после снятия слоев, затем по разнице активностей с учетом поправочного множителя вычислялась активность снятого слоя.

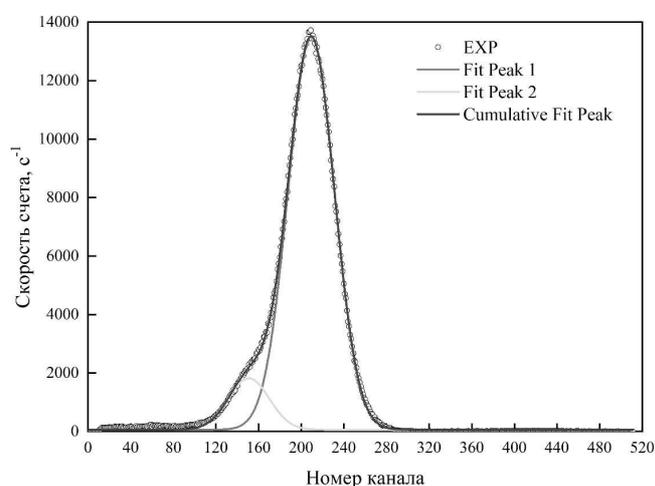


Рис. 2. Пример разложения спектра для выделения линии 122 кэВ

Затем с учетом формы спектра выделялась искомая линия. Для этого спектр раскладывался на 2 компоненты: γ -линия 122,14 кэВ и «пик вылета» кристалла сцинтиллятора. Полученное разложение представлено на рис. 2, где EXP – экспериментальный спектр; Fit Peak 1, 2 – компоненты спектра, Cumulative Fit Peak – суммарный модельный спектр.

В результате получалась зависимость вида $\ln C_{y0} = f(y^k)$, где параметр k выбирается в зависимости от режима проведения эксперимента [4]. В случае режима С $k = 2$, в режиме В $k = 6/5$.

После проведения эксперимента строились концентрационные профили в зависимости от режима проведения эксперимента, которые приведены на рис. 3.

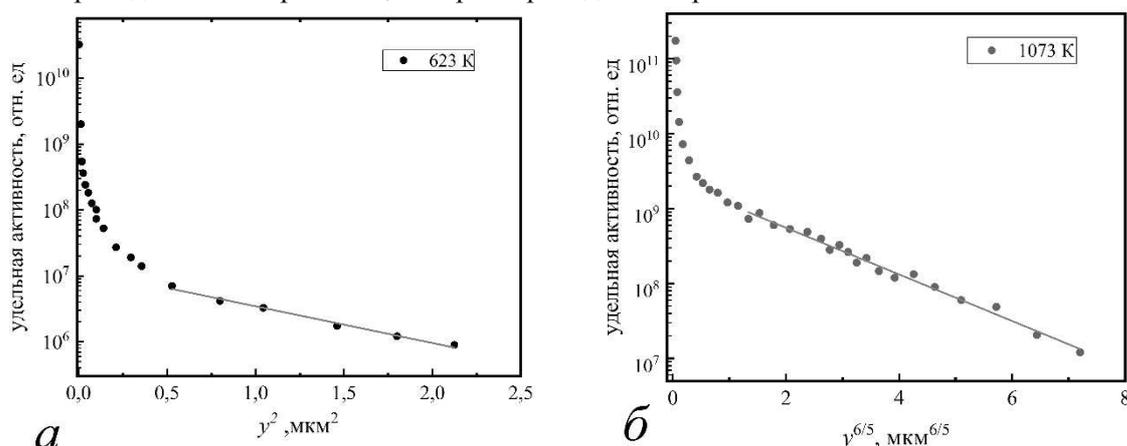


Рис. 3. Концентрационные профили для диффузии Co-57 в Ni в режиме С (а) и режиме В (б) (y – глубина проникновения)

Заключение

Разработанная методика позволила подобрать оптимальный электролит, который позволяет снимать слои, обеспечивающие исследование узких диффузионных зон при исследовании зернограницной диффузии ^{57}Co в поликристаллическом никеле при температурах ниже, чем $0,4T_{\text{пл}}$.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема «Функция» номер госрегистрации АААА-А19-119012990095-0), при частичной поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 18-10-2-37).

Авторы выражают благодарность за помощь в обсуждении результатов к-ф.м-н, с.н.с лаборатории диффузии И.В. Блинову.

Литература

1. Arora, M.R. Radiochemical Technique for Determining Depth Distributions in Mo / M.R. Arora, R.A. Kelly // Journal of The Electrochemical Society. – 1972. – Vol. 119, no. 2. – P. 270–274.
2. Бокштейн, Б.С. Диффузия атомов и ионов в твердых телах: учебник / Б.С. Бокштейн, А.Б. Ярославцев. – М.: МИСИС, 2005. – 362 с.
3. Divinsky, S.V. Recent Advances and Unsolved Problems of Grain Boundary Diffusion / S.V. Divinsky, B.S. Bokstein // Defect and Diffusion Forum. – 2011. – Vol. 309–310. – P. 1–8.
4. Ultra-fast Diffusion Channels in Pure Ni Severely Deformed by Equal-Channel Angular Pressing / S.V. Divinski, G. Reglitz, H. Rösner, Y. Estrin, G. Wilde // Acta Materialia. – 2011. – Vol. 59, Iss. 5. – P. 1974–1985.
5. Harrison, L.G. Influence of Dislocations on Diffusion Kinetics in Solids with Particular Reference Alkali Halides / L.G. Harrison // Transactions of the Faraday Society. – 1961. – Vol. 57. – P. 1191–1199.
6. Исаев, А.В. Анодное окисление никеля в сульфатных электролитах никелирования в области потенциалов, предшествующей «основной» пассивации / А.В. Исаев, М.Г. Михаленко // Изв. вузов. Хим. Хим. Технология. – 2009. – Т. 52, № 11. – С. 66–70.
7. Грузин, П.Л. Применение искусственно радиоактивных индикаторов для изучения процессов диффузии и самодиффузии / П.Л. Грузин // ДАН СССР. – 1952. – Т. 86, № 2. – С. 289–292.

Поступила в редакцию 6 октября 2020 г.

ANALYSIS USING ELECTROLYTIC LAYER STRIPPING TO DETERMINE THE PARAMETERS OF GRAIN-BOUNDARY DIFFUSION OF COBALT IN POLYCRYSTALLINE NICKEL

A.Yu. Istomina, E.V. Osinnikov

M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

E-mail: osinnikov@imp.uran.ru

A technique for layer-by-layer radiometric analysis using electrolytic layer stripping to determine the parameters of grain-boundary diffusion of cobalt in polycrystalline nickel has been developed.

The aim of the work is to develop a complete technological cycle of layer-by-layer radiometric analysis, to select the optimal electrolyte composition for nickel and the conditions for conducting an experiment to remove metal layers with their thickness of 20–200 nm.

The studies have been carried out on nickel of nominal purity of 99,98 %. The stabilizing heat treatment of the samples is carried out at a pressure of 10^{-5} Pa for 2 hours at a temperature of 1273 K. Diffusion annealing is carried out at a pressure of 10^{-9} Pa in the temperature range of 623–1173 K for 5–30 hours.

Concentration profiles have been measured by parallel stripping of layers, which are obtained by electrolytic polishing in a solution based on nickel sulfamate, followed by weighing the sample on a high-precision analytical balance. The difference in weight before and after removal of the layers is used to further calculate the thickness of the removed layers and, as a consequence, the penetration depth of the diffusing. The residual activity of the sample is measured using a digital gamma spectrometer with a NaI (Tl) detector. Before carrying out the experiments, a reference source with a previously known activity has been made to take into account the correction factor due to the radioactive decay of ^{57}Co .

The specific layer activity is calculated from the integral remainder of the 122,14 keV line using the Gruzin method. Based on the proposed technique, it is possible to determine the parameters of grain boundary diffusion, such as the diffusion coefficient of grain boundary, triple product and segregation coefficient.

Keywords: grain boundary diffusion; polycrystalline nickel; penetration depth; layer-by-layer radiometric analysis.

References

1. Arora M.R., Kelly R.A. Radiochemical technique for determining depth distributions in Mo. *J. Electrochem. Soc.*, 1972, Vol. 119, no. 2, pp. 270–274. DOI: 10.1149/1.2404173
2. Bokshteyn B.S., Yaroslavtsev A.B. *Diffuziya atomov i ionov v tverdykh telakh: uchebnik* (Diffusion of Atoms and Ions in Solids: a textbook). Moscow, MISIS, 2005, 362 p. (in Russ.).
3. Divinsky S.V., Bokstein B.S. Recent Advances and Unsolved Problems of Grain Boundary Diffusion. *Defect and Diffusion Forum*, 2011, Vol. 309–310, pp. 1–8. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.309-310.1
4. Divinski S.V., Reglitz G., Rösner H., Estrin Y., Wilde G. Ultra-fast Diffusion Channels in Pure Ni Severely Deformed by Equal-Channel Angular Pressing. *Acta Materialia*, 2011, Vol. 59, Iss. 5, pp. 1974–1985. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.11.063
5. Harrison L.G. Influence of Dislocations on Diffusion Kinetics in Solids with Particular Reference Alkali Halides. *Transactions of the Faraday Society*, 1961, Vol. 57, pp. 1191–1199. DOI: 10.1039/TF9615701191
6. Isaev A.V., Mikhaleenko M.G. Nickel Anode Oxidation in Sulfamate Electrolyte of Nickel-Plating in Range of Potentials Preceding "basic" Passivation. *Russian Journal Of Chemistry And Chemi-*

cal Technology (Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Khimiya i Khimicheskaya Tekhnologiya), 2009, Vol. 52, no. 11, pp. 66–70. (in Russ.).

7. Gruzin P.L. Application of Artificially Radioactive Indicators for the Study of Diffusion and Self-Diffusion Processes. *Proc. of the Academy of Sciences USSR*, 1952, Vol. 86, no. 2, pp. 289–292. (in Russ.).

Received October 6, 2020

Персоналии

УДК 518:51(09)

АРКАДИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ГЕРЕНШТЕЙН. К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

9 февраля 2020 года исполнилось 80 лет со дня рождения и 52 года с момента начала трудовой деятельности в ЧПИ–ЧГТУ–ЮУрГУ кандидата физико-математических наук, доцента кафедры прикладной математики и программирования факультета математики, механики и компьютерных технологий Института естественных и точных наук ЮУрГУ Аркадия Васильевича Геренштейна.

А.В. Геренштейн родился 9 февраля 1940 года в с. Очаковское Кунцевского района Московской области (ныне – Москва), в рядовой советской семье. Семья оказалась в этих местах в результате ежовских репрессий, подробности не сохранились. Отец – Воробьев Василий Михайлович, мать – Геренштейн Мария Ароновна. Материальные условия жизни семьи были обычными для того времени, их можно назвать удовлетворительными, но не более того. Из многочисленных родственников (дяди, тёти, двоюродные братья и сестры и т. п.) сохранился лишь двоюродный брат, остальные погибли в блокаду в Ленинграде.

После войны семья переехала на Украину, в г. Черкассы, где Аркадий Васильевич пошел в школу. Учился хорошо и мог бы получить медаль, однако не случилось. На выпускном экзамене вместо «стипендиат» (Тургенев) написал «стипендант» – и остался без медали.

Школу окончил в 1957 году и пошел работать – там же, в Черкассах, в течение года работал грузчиком, слесарем.

В 1958 году поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, на отделение механики. Среди однокурсников были известные ныне ученые, спортсмены, писатели. Самым известным из соучеников Аркадия Васильевича является сегодняшний ректор МГУ академик В.А. Садовничий, который несколько раз здорово поддержал своего сокурсника, когда тому приходилось туго.

Будучи студентом кафедры волновой и газовой динамики, Аркадий Васильевич занимался аэродинамикой тонкого крыла, многокомпонентными смесями. Дипломная работа была посвящена ударным волнам в трубе переменного сечения.

Учился с интересом и окончил университет, получив диплом с отличием.

Как и все советские студенты того времени, несколько лет участвовал в студенческих стройотрядах. Был не чужд различным внеучебным активностям, благо Московский университет предоставлял своим питомцам широкий спектр подобных возможностей.

По окончании университета А.В. Геренштейн был рекомендован для продолжения обучения в аспирантуре НИИ механики МГУ¹. Здесь он попал в окружение высококвалифицированных специалистов, ставших его учителями и наставниками: Халила Ахмедовича Рахматулина, Игоря Николаевича Зверева, Артура Яковлевича Сагомояна, Абрама Исаковича Бунимовича, Анатолия Леонтьевича Павленко, Юрия Индриковича Грымзы. Общение с этими выдающимися учеными оказалось решающим для всей дальнейшей деятельности Аркадия Васильевича. Они не



¹ Научно-исследовательский институт механики – структурное подразделение Московского государственного университета, образованное в 1959 году в целях развертывания научно-исследовательских работ в области механики, направленных на решение важнейших задач современной техники, и совершенствования подготовки необходимых для этого специалистов.

только научили его науке-механике, но и привили вкус в применении математических методов к инженерным задачам.

Темой диссертации А.В. Геренштейна стала теория и расчет поведения тросов и воды при торможении самолета, садящегося на палубу авианосца.

Диссертацию Аркадий Васильевич защитил в октябре 1968 г. в Совете Отделения механики механико-математического факультета МГУ.

После защиты диссертации Аркадий Васильевич был распределен в Челябинский политехнический институт на кафедру высшей математики № 2, которой тогда заведовал Л.М. Беляков.

Следует здесь заметить, что ЧПИ тех времен – один из базовых вузов союзного Министерства высшего и среднего специального образования – отличался высоким научным уровнем подготовки инженеров, который обеспечивали квалифицированные ученые-прикладники. Они предъявляли к математической подготовке своих студентов высокие требования. Обладая хорошей профессиональной подготовкой, умением ставить и решать прикладные задачи и недюжинными педагогическими способностями, А.В. Геренштейн органично вписался в работу кафедры, легко справляясь с порученными ему обязанностями. Ученое звание доцента было присвоено ему в 1970 г.

Одновременно Аркадий Васильевич много и плодотворно работал с представителями инженерных кафедр над прикладными проблемами, демонстрируя завидную широту научных интересов и наклонностей.

Эта деятельность была высоко оценена научным сообществом, и Аркадий Васильевич стал членом-корреспондентом Академии проблем качества (по отделению спец. техники и конверсии).

В 1973 году в связи с организацией в ЧПИ кафедры прикладной математики А.В. Геренштейн был приглашен на эту кафедру и поныне работает там.

Обладая широким кругозором, А.В. Геренштейн много сил и энергии отдает учебному процессу. Являясь универсально образованным математиком, обладающим ярко выраженной склонностью к приложениям математических методов к инженерным проблемам, Аркадий Васильевич преподает практически все основные математические курсы: математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, интегральные уравнения, математическую логику, теорию функций комплексного переменного, функциональный анализ и т. п. Подготовленные им курсы выдержали проверку временем и дали слушателям прочные навыки использования математического аппарата в специальных и общетехнических дисциплинах. Многие разделы этих курсов снабжены учебными пособиями и методическими разработками, подготовленными А.В. Геренштейном.

Несмотря на солидный возраст, А.В. Геренштейн продолжает активно работать в науке. Он по-прежнему сотрудничает с представителями инженерных кафедр ЮУрГУ и ЮУрГАУ¹. В последнее время в связи с задачами шлифования и термической обработки металлов и композитов стал заниматься устойчивыми явными схемами для уравнения теплопроводности, совместно с аспиранткой Н.С. Мидоночевой – проблемами внутренней баллистики.

Наряду с занятиями наукой и преподавательской деятельностью А.В. Геренштейн не чужд и спорту. Он увлекался входившим в 1970–1980 годы в моду спортивным бриджером и на протяжении более чем 10 лет активно участвовал в работе Челябинского бридж-клуба.

Он – автор монографии и более 170 публикаций по математике, механике и ее приложениям. Ему принадлежат 10 авторских свидетельств на изобретения, 15 учебных пособий и 10 свидетельств на разработанные им алгоритмы и программы. Список избранных публикаций А.В. Геренштейна, дающий представление о широте его научных интересов, приведен ниже.

В настоящее время под его руководством завершает работу над кандидатской диссертацией ассистент и одновременно аспирант кафедры прикладной математики и программирования Н.С. Мидоночева.

А.В. Геренштейн – ветеран труда и ветеран ЮУрГУ.

Аркадий Васильевич заботливый отец и дедушка. Его дочь – Евгения Аркадьевна – доцент кафедры прикладной математики и программирования ЮУрГУ, внук – студент кафедры системного программирования.

¹ Южно-Уральский государственный аграрный университет

Персоналии

Аркадий Васильевич глубоко эрудированный, всесторонне образованный человек. Он пользуется заслуженным уважением своих коллег и студентов.

Коллеги и друзья сердечно поздравляют Аркадия Васильевича Геренштейна с восьмидесятилетием и желают ему дальнейших успехов на поприще науки и преподавания.

Литература

1. Геренштейн, А.В. О скоростях распространения слабых возмущений в тросе / А.В. Геренштейн // Вестник МГУ. Математика, механика. – 1969. – № 3. – С. 74–75.
2. Некоторые вопросы теории инерционно-импульсного привода для металлорежущих станков // Бесступенчато-регулируемые передачи. Межвуз. сб. научн. тр. Ярославль. – 1976.
3. Некоторые задачи синтеза соосных инерционных механизмов // Вторая Всесоюзная научно-техническая конференция по инерционно-импульсным механизмам, приводам и устройствам. Тезисы докладов. – Челябинск, 1977.
4. Синтез механизмов с одной степенью свободы // Инерционно-импульсные механизмы, приводы и устройства (труды 2-й Всесоюзной научной конференции). – Челябинск, 1978.
5. Изометрические погружения и синтез инерционных механизмов // Исследования по геометрии погруженных многообразий и проективной геометрии: сб. науч. тр. – Л.: ЛГПИ, 1979.
6. Об изометрических погружениях в задаче о синтезе механизмов // Механика твёрдого тела. – 1979. – № 6.
7. Геренштейн, А.В. Стабилизатор ковариантных компонент векторного поля / А.В. Геренштейн // Прикладная математика. Тематический сборник научных трудов № 252 Челябинского политехнического института. – Челябинск: ЧПИ, 1980. – С. 28–33.
8. Исследование динамического поведения системы «объект–оснастка» при вибрационных испытаниях ракет // Научно-технический сборник «Ракетно-космическая техника». – 1991. – Вып. 59.
9. Периодические решения систем дифференциальных уравнений // Деп. ВИНТИ 10.06.97 № 1943-В97.
10. Применение метода наименьших квадратов и уточнение граничных условий для расчета течений вязкого газа // Проблемы проектирования неоднородных конструкций. Труды 18 Российской школы, посвященной 75-летию со дня рождения академика В.П. Макеева. – Миасс, 1999.
11. Кошин, А.А. Математическая модель напряженного состояния и деформаций системы вал–полимерно-композитное покрытие–ремонтное кольцо при финишной обработке / А.А. Кошин, В.А. Пашнев, А.В. Геренштейн // Прогрессивные технологии в машиностроении: темат. сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – С. 88–93.
12. Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 15 (115). – С. 9–11.
13. Геренштейн, А.В. Способы получения резонансных решений систем дифференциальных уравнений «нерезонансными» методами / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2009. – № 10. – С. 4–7.
14. Herreinstein, A.V. Modeling a rotating circle thermal field with a thermal source in the edge / A.V. Herreinstein, E.A. Herreinstein, N. Mashrabov // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 129. – pp. 317–320. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.12.068
15. Herreinstein, A.V. Piston motion mathematical model in the tube influenced by burning gas / A.V. Herreinstein, N.S. Midonocheva, N. Mashrabov // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), St. Petersburg, 2017, pp. 1–5, DOI: 10.1109/ICIEAM.2017.8076485.
16. Геренштейн, А.В. Математическая модель движения поршня под воздействием горящего газа с учетом зазора между поршнем и трубой / А.В. Геренштейн, Н.С. Мидоночева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2018. – Т. 10, № 4. – С. 4–12.

**В.И. Заляпин, С.А. Загребина, А.А. Замышляева, А.В. Келлер,
Л.В. Матвеева, А.Б. Самаров, А.Ю. Эвнин**

Информация

НИКОЛАЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ШИРОБОКОВ. ПАМЯТИ ТОВАРИЩА

9 мая 2020 года на 67-м году жизни скончался Николай Васильевич Широбоков.

Н.В. Широбоков родился 11 декабря 1953 г. в п. Игра (Удмуртия).

В 1971 г., после окончания Игринской средней школы № 19, поступил на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. В 1976 г. закончил его по специальности «Математика». В 1976–79 г.г. учился в аспирантуре на кафедре «Общие проблемы управления» МГУ под руководством проф. В.М. Алексеева и доц. В.Б. Демидовича.

В 1979 г. по распределению – назначен ассистентом кафедры высшей математики № 2 ЧПИ.

В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения и математическая физика» в институте математики и механики Академии наук Казахской ССР. Тема диссертации «О показателях Ляпунова линейной системы и устойчивости решения дифференциальной задачи и их разностных дискретизаций».

В 1990 г. Н.В. Широбокову, присвоено ученое звание доцента по кафедре высшей математики.

Николай Васильевич был высококвалифицированным преподавателем, добросовестным и неутомимым работником. Добрый, жизнерадостный, принципиальный и бескомпромиссный человек – таким останется он в памяти знавших его друзей, коллег и учеников.



Литература

1. Широбоков, Н.В. О характеристических показателях дифференциальных уравнений и аппроксимирующих их разностных уравнений / Н.В. Широбоков // Математические вопросы управления производством. Вып. 7: Оптимальное управление. – МГУ, 1977. – С. 73–79.

2. Широбоков, Н.В. Экспоненциальная устойчивость разностных уравнений / Н.В. Широбоков // Известия вузов. Математика. – 1980. – № 11. – С. 87–88.

3. Широбоков, Н.В. Достижимость центральных показателей дискретных разностных уравнений / Н.В. Широбоков // Прикладная математика (Темат. сб. науч. тр. / ЧПИ; № 252). – Челябинск: ЧПИ, 1980. – С. 103–110.

4. Широбоков, Н.В. О характеристических показателях расщепимых разностных уравнений / Н.В. Широбоков // Некоторые вопросы математики и механики: тез. докл. конф. факультета 1981 г. – М.: МГУ, 1981, С. 56.

5. Широбоков, Н.В. Устойчивость центральных показателей дискретных разностных уравнений / Н.В. Широбоков // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 4. – С. 722–723.

6. Широбоков, Н.В. Экспоненциальная устойчивость разностных схем / Н.В. Широбоков // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений в решении прикладных задач. – Тула: Изд-во Тульского политехнического института, 1983. – С. 23–25.

7. Широбоков, Н.В. К определению жестких дифференциальных задач / Н.В. Широбоков // Журнал вычислительной и математической физики. – 1984. – Т. 24, № 4. – С. 599–601.

8. Прокопьев, В.Н. Применение вариационных методов к задачам о распределении давления в смазочном слое гидродинамических опор скольжения / В.Н. Прокопьев, Н.В. Широбоков // Техническая эксплуатация, надежность и совершенствование автомобилей: темат. сб. научн. трудов. – Челябинск, ЧПИ, 1986. – С. 3–11.

9. Прокопьев, В.Н. Методы решения уравнений движения в задачах динамики опор коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания / В.Н. Прокопьев, Ю.В. Рождественский, Н.В. Широбоков // Вестн. Уральского межрегион. отделения Российской академии транспорта. – Курган: Изд-во КГУ, 1999. – № 2. – С. 79–82.

Информация

10. Прокопьев, В.Н. Повышение эффективности алгоритмов расчета выходных параметров сложнагруженных опор скольжения двигателей транспортных машин / В.Н. Прокопьев, Ю.В. Рождественский, Н.В. Ширококов // Вестн. Уральского межрегион. отделения Российской академии транспорта. – Курган: Изд-во КГУ, 1999. – № 2. – С. 28–32.

11. Ширококов, Н.В. Диагонально неявные схемы Рунге-Кутты / Н.В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 7. – С. 1013–1018.

12. Ширококов, Н.В. Диагональные неоднократно неявные методы Рунге-Кутты / Н.В. Ширококов // Известия Челябинского научного центра. – 2001. – Вып. 4(13). – С. 1–5,

13. Ширококов, Н.В. Расщепление эволюционных уравнений на основе диагонально-неявных методов / Н.В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 9. – С. 1402–1408

14. Ширококов, Н.В. Расщепление эволюционных уравнений в трехмерном пространстве на основе диагонально-неявных методов / Н.В. Ширококов // Известия Челябинского научного центра. – 2004. – Вып. 1(22). – С. 1–6.

15. Ширококов, Н.В. Расщепление четвертого порядка эволюционных уравнений в двумерном пространстве / Н.В. Ширококов // Известия Челябинского научного центра. – 2004. – Вып. 2(23). – С. 13–18.

16. Ширококов, Н.В. Расщепление четвертого порядка эволюционных уравнений в двумерном пространстве на основе диагонально-неявных методов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1824–1828.

17. Ширококов, Н.В. Расщепление эволюционных уравнений на основе диагонально-неявных методов третьего порядка / Н.В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 2. – С. 262–266.

18. Ширококов, Н.В. Новые методы расщепления для двумерных эволюционных уравнений / Н.В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 7. – С. 1187–1191.

19. Ширококов, Н.В. Новые методы расщепления четвертого порядка для двумерных эволюционных уравнений / Н.В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, № 4. – С. 696–699.

20. Ширококов, Н.В. Диагонально-неявные схемы четвертого порядка для решения эволюционных уравнений / Н.В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, № 6. – С. 1080–1084.

Учебно-методические публикации

1. Заляпин, В.И. Вычислительный практикум по курсу высшей математики. Учебное пособие / В.И. Заляпин, Ю.Г. Малиновский, Н.В. Ширококов. – Челябинск, 1987. – 79 с.

2. Могильницкий, В.А. Высшая математика. Типовые расчеты: Часть 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, теория функций комплексного переменного, операционное исчисление. Учебное пособие / В.А. Могильницкий, Р.П. Петрова, Н.В. Ширококов. – Челябинск, изд-во ЮУрГУ, 1998. – 98 с.

Тезисы докладов

1. Ширококов, Н.В. Достаточный признак устойчивости спектра дискретных разностных уравнений / Н.В. Ширококов // Тезисы докладов всесоюзной конференции по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений: сб. науч. трудов. – Алма-Ата, 1979. – Ч. 2. – С. 56.

2. Ширококов, Н.В. Многокомпонентное расщепление эволюционных уравнений на основе диагонально неявных методов / Н.В. Ширококов // Международная конференция по вычислительной математике, Новосибирск, 24–28 июня 2002 г.

3. Ширококов, Н.В. Расщепление эволюционных уравнений третьего и четвертого порядка / Н.В. Ширококов // Труды Международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004. Ч. II. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2004. – С. 765–770.

4. Ширококов, Н.В. Расщепление эволюционных уравнений на основе диагонально-неявных методов / Н.В. Ширококов // Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ-2007. – Новосибирск, 2007.

В.И. Заляпин

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 12, № 4
2020

16+

Редактор: *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 27.10.2020. Дата выхода в свет 03.11.2020.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,83.

Тираж 500 экз. Заказ 331/406. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.