

ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2021
Т. 13, № 2**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

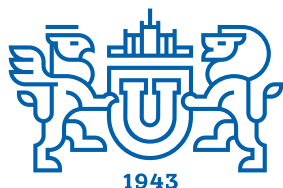
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИННА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2021

Vol. 13, no. 2

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

M.M. Brzhezinskaya, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany

G.L. Brovko, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

V.D. Buchelnikov, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

D. Guidetti, University of Bologna, Bologna, Italy

V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

I.V. Zalyapin, University of Nevada, Reno, United States of America

S.V. Zelik, University of Surrey, Guildford, United Kingdom

A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

Kisik Kim, INHA-University, Incheon, South Korea

N.D. Kundikova, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

V.V. Menshikh, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

S.I. Pinchuk, Indiana University, Bloomington, United States of America

Y.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

N.K. Ravshanov, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

L.V. Utkin, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

I. Verpoest, Catholic University, Leuven, Belgium

V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

КИТАЕВА O.G. Invariant Spaces of Oskolkov Stochastic Linear Equations on the Manifold	5
КОТЛОВАНОВ K.Yu. On One Equation of Internal Waves	11
ЛАЙПАНОВА А.М. Об аналоге задачи Трикоми для уравнения третьего порядка смешанного типа.....	17
МАМЫТОВ А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой.....	24
САГАДЕЕВА М.А., ФАТКУЛЛИНА Л.М., УФИМЦЕВА О.В. Численное решение начально-конечной задачи для нестационарных систем леонтьевского типа.....	30
ТУРМЕТОВ Б.Х., КАРАЧИК В.В. О задаче Дирихле для нелокального полигармонического уравнения.....	37
ТУРСУНОВ Д.А., ОМАРАЛИЕВА Г.А. Асимптотика решения двухзонной двухточечной краевой задачи.....	46

Физика

ЕВЕЛ А.А., МАЙЕР А.Е. Evolution of Plastic Deformation and Temperature at the Reflection of a Shock Pulse from Superficies with a Nanorelief or with Supplied Nanoparticles.....	53
--	----

Краткие сообщения

КАУА U. A Short Proof of Completion Theorem for Metric Spaces.....	61
--	----

Информация

АДУКОВА Н.В., ДИЛЬМАН В.Л. Исправление к статье: «Устойчивость факторизационных множителей канонической факторизации Винера–Хопфа матриц-функций»	65
---	----

CONTENTS

Mathematics

KITAEVA O.G. Invariant Spaces of Oskolkov Stochastic Linear Equations on the Manifold	5
KOTLOVANOVA K.Yu. On One Equation of Internal Waves	11
LAIPANOVA A.M. On Analogue of the Triкоми Problem for a Third-Order Equation of Mixed Type	17
MAMYTOV A.O. Solvability of the Inverse Initial-Boundary Value Problem with a Known Value on the Line	24
SAGADEEVA M.A., FATKULLINA L.M., UFIMTSEVA O.V. Numerical Solution to the Initial-Final Problem for Non-Stationary Leontief-Type Systems	30
TURMIRTOV B.Kh., KARACHIK V.V. On a Dirichlet Problem for a Nonlocal Polyharmonic Equation	37
TURSUNOV D.A., OMARALIEVA G.A. Asymptotics of the Solution to a Two-Band Two-Point Boundary Value Problem.....	46

Physics

EBEL A.A., MAYER A.E. Evolution of Plastic Deformation and Temperature at the Reflection of a Shock Pulse from Superficies with a Nanorelief or with Supplied Nanoparticles.....	53
--	----

Short communications

KAYA U. A Short Proof of Completion Theorem for Metric Spaces.....	61
--	----

Information

ADUKOVA N.V., DILMAN V.L. Erratum to: "Stability of Factorization Factors of the Canonical Factorization of Wiener–Hopf Matrix Functions".....	65
--	----

INVARIANT SPACES OF OSKOLKOV STOCHASTIC LINEAR EQUATIONS ON THE MANIFOLD

O.G. Kitaeva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: kitaevaog@susu.ru

The Oskolkov equation is obtained from the Oskolkov system of equations describing the dynamics of a viscoelastic fluid, after stopping one of the spatial variables and introducing a stream function. The article considers a stochastic analogue of the linear Oskolkov equation for plane-parallel flows in spaces of differential forms defined on a smooth compact oriented manifold without boundary. In these Hilbert spaces, spaces of random K -variables and K -“noises” are constructed, and the question of the stability of solutions of the Oskolkov linear equation in the constructed spaces is solved in terms of stable and unstable invariant spaces and exponential dichotomies of solutions. Oskolkov stochastic linear equation is considered as a special case of a stochastic linear Sobolev-type equation, where the Nelson–Glicklich derivative is taken as the derivative, and a random process acts as the unknown. The existence of stable and unstable invariant spaces is shown for different values of the parameters entering into the Oskolkov equation.

Keywords: Sobolev-type equations; differential forms; Nelson–Glicklich derivative; invariant spaces.

Introduction

Consider the Oskolkov equation

$$(\lambda - \Delta)\Delta\psi = \nu\Delta^2\psi - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{(x_1, x_2)}. \quad (1)$$

Equation (1) is a model of the flow of a viscous and elastic incompressible fluid [1], in which the parameter ν is responsible for the viscous properties of the fluid. The parameter λ that determines the elastic properties of a fluid can take positive and negative values [2]. In [3–5], the solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for the Oskolkov equation (1) was considered, and in [6] for the linear Oskolkov equation

$$(\lambda - \Delta)\Delta\psi = \nu\Delta^2\psi. \quad (2)$$

In [7], the problem of stability of solutions to equation (2) was solved in terms of exponential dichotomies, and in paper [8], the problem of stability of solutions in a neighborhood of the zero point of equation (1) was solved in terms of invariant manifolds.

This article discusses the stability of the stochastic linear Oskolkov equation on manifold that has no boundary. To solve this issue, we use equation (2) as an equation of the following form:

$$L\overset{o}{\eta} = M\eta, \quad (3)$$

where $\overset{o}{\eta}$ derivative in the sense [9] of the sought-for random process $\eta = \eta(t)$. The number of works devoted to the study of equations of the form (3) is quite large at the present time (see, for example, [10–13]), in which this equation was considered in various aspects. The present work is closest to [14] and [15], in which we study the solvability and stability of the Barenblatt–Zheltov–Kochina stochastic equation on a manifold.

The article contains four parts. The first section is the introduction, the fourth section is the bibliography. The second point is dedicated to deals with spaces of q -forms defined on a manifold that has no boundary, recalls the notions of a random variable, stochastic process, Nelson–Glicklich derivative, constructs spaces of random K -variables and K -“noises”. The third point contains a description of the invariant spaces of the Oskolkov stochastic equation.

1. Spaces of “noises” on a manifold

Consider n -dimensional manifold Ω that has no boundary. Let it have the properties of connectedness, compactness and smoothness. Consider spaces of smooth shapes $E^q = E^q(M), 0 \leq q \leq n$ on Ω , where the scalar products are defined by the following formulas:

$$(a, b)_0 = \int_{\Omega} a \Lambda * b, \quad (a, b)_2 = (\Delta a, \Delta b)_0 + (\Delta a, b)_0 + (a, b)_0,$$

$\Delta = d\delta + \delta d$ is the Laplace–Beltrami operator, $\delta = (-1)^{n(q+1)+1} * d *$, where $*$ is the Hodge operator associating a differential form E^q with a differential form E^{n-q} , d is the outer differentiation operator. The spectrum $\sigma(\Delta) = \{\alpha_k\}$ of the operator Δ is positive discrete, and $+\infty$ is the point of its condensation. Denote by H_0^q and H_2^q the completions of the lineal E^q with respect to the norms $\|\cdot\|_0$ and $\|\cdot\|_2$. The basis in Hilbert spaces H_l^q is the sequence of eigenfunctions $\{\varphi_k\}$ of the operator Δ orthonormalized by the norms $\|\cdot\|_l, l = 0, 2$.

Next, we turn to the construction of spaces of random K -variables and K -“noises” in H_l^q . Let $\Omega = (\Omega, A, P)$ be a full probability space. We define a random variable as a mapping $\xi: \Omega \rightarrow R$ and stochastic process as mapping $\eta: \mathfrak{S} \times \Omega \rightarrow R$ (where \mathfrak{S} is a certain interval from R , a function $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ is a trajectory of the stochastic process). If almost all trajectories of a random process are continuous then such a process is called continuous.

L_2 is the set of random variables ξ for which the variance D is finite and the mathematical expectation E is zero, and CL_2 is the set of continuous stochastic processes η . We fix $t \in \mathfrak{S}$, let $E_t^\eta = E(N_{t^\eta})$, N_{t^η} the σ -algebra generated by the random variable η . By the derivative in the sense [9] $\overset{\circ}{\eta}$ of the stochastic process $\eta \in CL_2$ в $t \in \mathfrak{S}$ we mean a limit (if it exists)

$$\overset{\circ}{\eta} = \frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t + \Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\eta} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} E_t^\eta \left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t - \Delta t, \cdot)}{\eta} \right) \right).$$

Denote by C^1L_2 the space of stochastic processes whose trajectories are almost sure differentiable in the sense [9] on \mathfrak{S} . The spaces C^1L_2 are called spaces of differentiable “noises”.

Let us introduce into consideration the space $H_l^q, l = 0, 2$ whose elements are random K -variables

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k.$$

The norm in this space is defined by the following formula:

$$\|\eta\|_{H_l^q} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 D \xi_k,$$

where $\{\xi_k\}$ is a sequence of random variables with bounded variance, $\{\varphi_k\}$ are the eigenfunctions of the operator Δ , orthonormalized by $(\cdot, \cdot)_l, l = 0, 2$, and $K = \{\lambda_k\}$ is a monotone sequence such that

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$. Let $C(\mathfrak{S}; H_l^q)$ be the set of continuous stochastic K -processes

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k(t) \varphi_k, \quad \eta_k \in CL_2, \tag{4}$$

and $C^1(\mathfrak{S}; H_l^q)$ be the set of continuously Nelson–Gliklikh differentiable K -processes

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{\circ}{\eta}_k(t) \varphi_k, \quad \overset{\circ}{\eta}_k \in C^1L_2, \tag{5}$$

if series (4) and (5) converge uniformly on $\mathfrak{S} \subset R$ (\mathfrak{S} is compact set in R).

2. Stable and unstable invariant spaces

Let us define the operators

$$L = -(\lambda + \Delta)\Delta, M = \nu\Delta^2$$

and the equation (2) in the space H_0^q can be considered in the form

$$L\eta^o = M\eta. \tag{6}$$

The operators $L, M : H_0^q \rightarrow H_2^q$ have the properties of linearity and continuity, and the operator M is $(L, 0)$ -bounded operator.

By a solution to equation (6) we mean a stochastic K -process $\eta \in C^1(\mathfrak{S}; H_0^q)$ if, after substituting it into equation (6), we obtain the identity.

Definition 1. A set $P \in H_0^q$ such that the following conditions are satisfied:

- (i) almost sure each trajectory of the solution $\eta = \eta(t)$ to equation (6) belongs to P ;
- (ii) for almost all $\eta_0 \in P$, there exists a solution to equation (6) satisfying the condition

$$\eta(0) = \eta_0 \tag{7}$$

is called a phase space of equation (6).

It was shown (see, for example, [14]) that the phase space of equation (3) is the image of the resolving group $U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu$. Therefore, the following theorem is true.

Theorem 1. The set of the following form:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} H_0^q, \lambda \in \{\alpha_k\}, \\ \eta \in H_0^q : (\eta, \varphi_n)_0 = 0, \lambda = \alpha_n \end{array} \right\}, \tag{8}$$

is the phase space of equation (6)

If the solution to problem (6), (7) is $\eta \in C^1(\mathfrak{S}; I)$ for any $\eta_0 \in L, I \subset P$, then the set I called a invariant space of equation (6).

Definition 2. A set I_+ such that the following conditions are satisfied

- (i) I_+ is an invariant space;
- (ii) $\|\eta^1(t)\|_{H_0^q} \leq N_1 e^{-m_1(s-t)} \|\eta^1(s)\|_{H_0^q}, s \geq t$, where positive constants $N_1, m_1, \eta^1 \in I_+$ for all $t \in R$

is called a stable invariant space of equation (6). A set I_- such that the following conditions are satisfied

- (i) I_+ is an invariant space;
- (ii) $\|\eta^2(t)\|_{H_0^q} \leq N_2 e^{-m_2(t-s)} \|\eta^2(s)\|_{H_0^q}, t \geq s$, where positive constants $N_2, m_2, \eta^2 \in I_-$ for all

$t \in R$

is called an unstable invariant space of equation (6).

Due to the fact that the relative spectrum of the operator $M \sigma^L(M) = \sigma_+^L(M) + \sigma_-^L(M)$, where

$$\sigma_+^L(M) = \left\{ \frac{-\nu\alpha_k}{\lambda + \alpha_k}, \lambda > -\alpha_k \right\}, \sigma_-^L(M) = \left\{ \frac{-\nu\alpha_k}{\lambda + \alpha_k}, \lambda < -\alpha_k \right\},$$

and the results presented in [15] we obtain

Theorem 2. (i) The stable invariant space is set of the form (8) for $\nu > 0$ and $\lambda < 0$.

(ii) The stable invariant space is set of the form

$$I_+ = \left\{ \eta \in H_0^q : (\eta, \varphi_k)_0 = 0, \lambda > -\alpha_k \right\}$$

and the unstable invariant space is the set of the form

$$I_- = \{ \eta \in H_0^q : (\eta, \varphi_k)_0 = 0, \lambda < -\alpha_k \}$$

for $\nu > 0$ and $\lambda < 0$.

Remark 1. For $\nu > 0$ and $\lambda < 0$ there is an exponentially dichotomous behavior of solutions to the equation (6).

Conclusion

In the future, we intend to study the question on the solvability and stability of the stochastic analogue of semilinear equation (1). In addition, we intend to transfer all results for equation (1) to spaces of q -forms defined on a manifold with border.

References

1. Oskolkov A.P. Nonlocal Problems for one Class of Nonlinear Operator Equations that Arise in the Theory of Sobolev Type Equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1993, Vol. 64, Iss. 1, pp. 724–736. DOI: 10.1007/BF02988478
2. Amfilokhiev V.B., Voytkunskiy Ya.I., Mazaeva N.P. Techeniya polimernykh rastvorov pri nalicii konvektivnykh uskoreniiy (The Flow of Polymer Solutions in the Presence of Convective Accelerations). *Trudy Leningradskogo korablestroitel'nogo instituta*, 1975, Vol. 96, pp. 3–9. (in Russ.).
3. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. Russian Academy of Sciences. *Izvestiya Mathematics*, 1994, Vol. 42, no. 3, pp. 601–614. DOI: 10.1070/IM1994v042n03ABEH001547
4. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The Phase Space of The Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System. *Differential Equations*, 1996, Vol. 32, no. 11, pp. 1535–1540.
5. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy Problem for a Class of Semilinear Equations of Sobolev Type. *Siberian Mathematical Journal*, 1990, Vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493
6. Sviridyuk G.A., Shafranov D.E. Zadacha Koshi dlya lineynogo uravneniya Oskolkova na gladkom mnogoobrazzii (The Cauchy Problem for the Linear Oskolkov Equation on a Smooth Manifold). *Vestnik Chelyabinsk Gos. Univ.*, 2003, Iss. 7, pp. 146–153 (in Russ.).
7. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariant Spaces and Dichotomies of Solutions of a Class of Linear Equations of the Sobolev Type. *Russian Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1997, Vol. 41, no. 5, pp. 57–65.
8. Kitaeva O. G., Sviridyuk G.A. Ustoychivoe i neustoychivoe invariantnye mnogoobraziya uravneniya Oskolkova (Stable and Unstable Invariant Manifolds of the Oskolkov Equation). *Trudy mezhdunarodnogo seminara "Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki", posvyashchennogo 60-letiyu so dnya rozhdeniya professora V.N.Vragova, Novosibirsk, 3–5 oktyabrya 2005 g.* (Proc. of the International Seminar on Nonclassical Equations of Mathematical Physics Dedicated to the 60th Birth Anniversary of Professor Vladimir N. Vragov, Novosibirsk, Russia, October 3–5, 2005). Novosibirsk, Publishing house of the Institute of Mathematics, 2005, pp. 160–166. (in Russ.).
9. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9
10. Favini A., Sviridiuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "noises". *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410
11. Favini A., Sviridiuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of "Noises". *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, Vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x
12. Favini A., Sviridiuk G.A., Zamyshlyeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise". *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185
13. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridiuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, p. 128.

14. Shafranov D.E., Kitaeva O.G. The Barenblatt–Zheltev–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive “White Noise” in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, Vol. 5, no. 2, pp. 145–159.

15. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridiuk G.A. Exponential Dichotomies in the Barenblatt–Zheltev–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with “Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software* (Bulletin SUSU MMCS), 2019, Vol. 2, no. 12, pp. 47–57. DOI: 10.14529/mmp190204

Received January 16, 2021

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2021, vol. 13, no. 2, pp. 5–10

УДК 517.9

DOI: 10.14529/mmph210201

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ОСКОЛКОВА НА МНОГООБРАЗИИ

О.Г. Китаева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: kitaevaog@susu.ru

Уравнение Осколкова получается из системы уравнений Осколкова, описывающей динамику вязкоупругой жидкости, после купирования одной из пространственных переменных и введения функции тока. В статье рассматривается стохастический аналог линейного уравнения Осколкова плоскопараллельных течений в пространствах дифференциальных форм, определенных на гладком компактном ориентированном многообразии без края. В данных гильбертовых пространствах строятся пространства случайных K -величин и K -«шумов» и решается вопрос об устойчивости решений линейного уравнения Осколкова в построенных пространствах в терминах устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений. Стохастическое линейное уравнение Осколкова рассматривается как частный случай стохастического линейного уравнения соболевского типа, где в качестве производной берется производная Нельсона–Гликлиха, а в качестве неизвестного выступает случайный процесс. При различных значениях параметров, входящих в уравнение Осколкова, показано существование устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; дифференциальные формы; производная Нельсона–Гликлиха; инвариантные пространства.

Литература

1. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
2. Амфилохийев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохийев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева, Я.И. Ходорковский // Труды Ленинградского кораблестроительного института. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9.
3. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН, сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–202.
4. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.
5. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного уравнения Осколкова на гладком многообразии / Г.А. Свиридюк, Д.Е. Шафранов // Вестник Челябинского государственного университета. Серия 3. Математика, Механика, Информатика. – 2003. – № 1(7). – С. 146–153.

7. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вуз. Матем. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

8. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Труды международного семинара «Неклассические уравнения математической физики», посвященного 60-летию со дня рождения профессора В.Н.Врагова, Новосибирск, 3–5 октября 2005 г. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 2005. – С. 160–166.

9. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y. – 2011. – 436 p.

10. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of “noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

11. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Radial Operators in Space of “Noises” / G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 13, no. 6. – P. 4607–4621.

12. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – Springer, 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196.

13. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the space of noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018. – P. 128.

14. Shafranov, D.E. The Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive “White Noise” in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary / D.E. Shafranov, O.G., Kitaeva // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, no. 2. – P. 145–159.

15. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies in the Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with “Noise” / O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 2, № 12. – С. 47–57.

Поступила в редакцию 16 января 2021 г.

ON ONE EQUATION OF INTERNAL WAVES

K. Yu. Kotlovanov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: kotlovanovki@susu.ru

The Cauchy–Dirichlet problem is considered for the equation of internal waves. This equation has various applications in hydrodynamics, for example, in the study of waves in the ocean. The article provides an analytical study of one equation of internal waves. This equation characterizes propagation of waves in a homogeneous incompressible stratified fluid. The equation of internal waves is reduced to an abstract semilinear Sobolev type equation of the second order. The study of the equation is carried out within the framework of the theory of polynomially bounded operator pencils. In this work, we construct propagators for the equation of internal waves. Also, we present two model examples, where the domain D is represented in the form of a cylinder and a parallelepiped. The result of the work is an analytical solution to the considered cases for the equation of internal waves.

Keywords: internal wave equation; polynomially bounded pencils of operators; Sobolev-type equation; propagators.

1. Introduction

Equation of internal waves in a homogeneous incompressible non-rotating fluid is described by the Poincare equation

$$\Delta u_{tt} + N^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (1)$$

where N^2 is buoyancy frequency. Earlier, the equation was considered in the works of S.A. Gabov and P.A. Krutitsky [1] when working with the excitation of nonstationary internal waves in a two-layer model of a stratified fluid, the behavior of the solution at a large time was studied. Yu.D. Pletner [2] studied some initial-boundary value problems and the fundamental solution to the equation of internal waves in the case of an incompressible exponentially stratified fluid. L.V. Perova and A.G. Sveshnikov [3] generalized the works of the authors devoted to the propagation of small perturbations in stratified and rotating fluids. The equation of internal waves can be written in another form, for example, given in [4]. Interest in the study of problems with the equation of internal waves is still topical. This problem is quite interesting from a mathematical point of view, since the solution to the Cauchy-Dirichlet problem is obtained within the framework of the theory of polynomially bounded operator pencils.

Let D be a bounded domain from R^3 with a smooth boundary ∂D . Consider the Dirichlet condition

$$u(x, y, z, t) = 0, (x, y, z, t) \in \partial D \times R \quad (2)$$

and the Cauchy condition

$$u(x, y, z, 0) = u_0, u_t(x, y, z, 0) = u_1. \quad (3)$$

The solution to problem (1)–(3) is found in the framework of the theory of Sobolev-type equations. In this paper, we use methods based on the theory of semigroups (groups) of operators [5, 6]. The monographs [6, 7] present the results of studying Sobolev-type equations and equations that are not solved with respect to the high-order derivative. In the paper [7] different classes of Sobolev-type equations are introduced and, by structure, equation (1) is considered to be a simple Sobolev-type equation.

2. (A, p)-bounded Operators

Let U, F be Banach spaces and the operators $A, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in L(F; U)$. Denote by \bar{B} a pencil formed by the operators B_0, B_1, \dots, B_{n-1} . The sets $\rho^A(\bar{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in L(F; U)\}$ and $\sigma^A(\bar{B}) = \mathbb{C} \setminus \rho^A(\bar{B})$ are called an A -resolvent set and an A -spectrum of the pencil \bar{B} , respectively. The operator-function of a complex

variable $R_\mu^A(\bar{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ with the domain $\rho^A(\bar{B})$ is called an A -resolvent of the pencil \bar{B} .

Definition 1. [9] The operator pencil \bar{B} is called polynomially bounded with respect to an operator A (or polynomially A -bounded) if $\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\bar{B}) \in L(F; U))$.

Remark 1. [9] If there exists an operator $A^{-1} \in L(F; U)$ then the pencil B is polynomially A -bounded.

To decompose the spaces U, F into a direct sum of subspaces, it is necessary to construct projectors. Condition (4) is necessary for the existence of projectors [8].

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\bar{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, k = 0, 1, \dots, n-2, \tag{4}$$

where the circuit $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Lemma 1. [9] Let the operator pencil \bar{B} be polynomially A -bounded and condition (4) be fulfilled. Then the operators

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^A(\bar{B}) \mu^{n-1} A d\mu, Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu^{n-1} A R_\mu^A(\bar{B}) d\mu$$

are projectors in the spaces U and F respectively.

Denote $U^0 = \ker P, F^0 = \ker Q, U^1 = \text{im } P, F^1 = \text{im } Q$. According to Lemma 1, $U = U^0 \oplus U^1, F = F^0 \oplus F^1$. Denote by $A^k(B_l^k)$ a restriction of the operator $A(B_l)$ on $U^k(F^k), k = 0, 1; l = 0, 1, \dots, n-1$.

Theorem 1. [9] Let the operator pencil \bar{B} be polynomially A -bounded and condition (4) be fulfilled. Then

- (i) $A^k \in L(U^k, F^k), k = 0, 1;$
- (ii) $B_l^k \in L(U^k, F^k), k = 0, 1, l = 0, 1, \dots, n-1;$
- (iii) the operator $(A^1)^{-1} \in L(U^1, F^1)$ exists;
- (iv) the operator $(B_0^0)^{-1} \in L(U^0, F^0)$ exists.

Using Theorem 1, construct the operators: $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0 \in L(U^0),$
 $H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0 \in L(U^0), \dots, H_{n-1} = (B_0^0)^{-1} B_{n-1}^0 \in L(U^0)$ and
 $S_0 = (A^1)^{-1} B_0^1 \in L(U^1), S_1 = (A^1)^{-1} B_1^1 \in L(U^1), \dots, S_{n-1} = (A^1)^{-1} B_{n-1}^1 \in L(U^1).$

Definition 2. [9] Define the family of operators $\{K_q^1, K_q^2, \dots, K_q^n\}$ as follows:
 $K_0^s = \mathbb{O}, s \neq n, K_0^n = \mathbb{I},$

$$K_1^1 = H_0, K_1^2 = -H_1, \dots, K_1^s = -H_{s-1}, \dots, K_1^n = H_{n-1},$$

$$K_q^1 = K_{q-1}^n H_0, K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^n H_1, \dots, K_q^s = K_{q-1}^{s-1} - K_{q-1}^n H_{s-1}, \dots, K_q^s = K_{q-1}^{n-1} - K_{q-1}^n H_{n-1}, q = 1, 2, \dots$$

The A -resolvent of the pencil \bar{B} can be represented by the Laurent series

$$(\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \dots - \mu B_1 - B_0)^{-1} = - \sum_{q=0}^{\infty} \mu^q K_q^n (B_0^0)^{-1} (\mathbb{I} - Q) +$$

$$+\sum_{q=1}^{\infty} \mu^{-q} (\mu^{n-1} S_{n-1} + \dots + \mu S_1 + S_0)^q L_1^{-1} Q.$$

Definition 3. [9] The point ∞ is called

(i) a removable singularity of an A -resolvent of the pencil \bar{B} , if $K_1^s \equiv \mathbb{O}, s = 1, 2, \dots, n$;

(ii) a pole of the order $p \in N$ of an A -resolvent of the pencil \bar{B} , if $\exists p: K_p^s \not\equiv \mathbb{O}, s = 1, 2, \dots, n$, but $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}, s = 1, 2, \dots, n$;

(iii) an essential singularity of an A -resolvent of the pencil \bar{B} , if $K_q^n \not\equiv \mathbb{O} \forall q \in N$.

Further, for brevity, a removable singularity of an A -resolvent of the pencil \bar{B} is called a pole of the order 0. If the operator pencil \bar{B} is polynomially A -bounded and the point ∞ is a pole of the order $p \in \{0\} \cup N$ of an A -resolvent of the pencil \bar{B} , then the operator pencil \bar{B} is called polynomially (A, p) -bounded.

3. Abstract Problem

Consider the Cauchy problem

$$u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 \tag{5}$$

for the second-order Sobolev-type equation

$$Au_{tt} = B_1 u_t + B_0 u. \tag{6}$$

Operator-functions $U_k^t, k = 0, 1$, of the form

$$U_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(B) (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, \tag{7}$$

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(B) A e^{\mu t} d\mu \tag{8}$$

are propagators. Here the circuit $\gamma \in \mathbb{C}$ bounds a domain containing the A -spectrum of the operator pencil \bar{B} . The solution to problem (5), (6) in terms of the theory of degenerate groups was obtained in [8], under the condition that the operator pencil \bar{B} is polynomially bounded with respect to the operator A .

Theorem 2. [10] Let the operator pencil \bar{B} be polynomially A -bounded, condition (4) be fulfilled, and ∞ be a pole of the order $p \in \{0\} \cup N$ of the A -resolvent of \bar{B} . There exists a unique solution $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}, U)$ to problem (5), (6) of the form

$$u(t) = U_1 u_1 + U_0 u_0, \tag{9}$$

where $u_k \in \text{im} U_1^0 = \text{im} U_0^0, k = 0, 1, \text{im} U_1^0$ and $\text{im} U_0^0$ is a subspace in U .

4. Internal Wave Equation

Consider the cases when the domain D is a parallelepiped or a cylinder. Let the domain $D = [0, a] \times [0, b] \times [0, c] \subset R^3$ be the parallelepiped. Problem (1)–(3) can be reduced to Cauchy problem (5) for equation (6).

Introduce the spaces $U = W_2^{l+2}(D), F = W_2^l(D)$ and define the operators in the given spaces

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, B_1 = \mathbb{O}, B_0 = -N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

For any $l \in \{0\} \cup N$, the operators $A, B_1, B_0 \in L(U, F)$. Define $-\lambda_{k,m,n}^2 = -(\pi k/a)^2 - (\pi m/b)^2 - (\pi n/c)^2$ to be the eigenvalues of the Dirichlet problem for the Laplace operator. Denote by $\varphi_{k,m,n} = \sin(\pi kx/a) \sin(\pi my/b) \sin(\pi nz/c)$ the orthogonal eigenfunctions that correspond to $\{-\lambda_{k,m,n}^2\}$ in the sense of the scalar product in $L^2(D)$.

Since $\{\varphi_{k,m,n}\} \subset C^\infty(D)$, then

$$\mu^2 A - \mu B_1 - B_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \left[-\mu^2 \lambda_{k,m,n}^2 + N^2 \lambda_{k,m}^2 \right] \langle \varphi_{k,m,n}, \cdot \rangle \varphi_{k,m,n},$$

where $B_0 \varphi_{k,m,n} = -\lambda_{k,m}^2 \varphi_{k,m,n}$, and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in $L^2(D)$. Construct the equation to determine the A -spectrum:

$$-\lambda_{k,m,n}^2 \mu^2 + N^2 \lambda_{k,m}^2 = 0, \quad \mu_{k,m,n}^{1,2} = \pm \frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} i.$$

The A -spectrum $\sigma^A(\bar{B}) = \{\mu_{k,m,n}^{1,2}\}$ is bounded, because $|\mu_{k,m,n}^{1,2}| \leq N$. Since the operator A is continuously invertible in the given spaces, then condition (4) is satisfied. As a result, the conditions of Lemma 1 hold.

Construct propagators by formulas (7), (8) as follows:

$$U_0^t u_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_0 \rangle \varphi_{k,m,n},$$

$$U_1^t u_1 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} \sin \left(\frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_1 \rangle \varphi_{k,m,n}.$$

By Theorem 2, the solution to problem (1)–(3) has the form

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_0 \rangle \varphi_{k,m,n} +$$

$$+ \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} \sin \left(\frac{N \lambda_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_1 \rangle \varphi_{k,m,n}.$$

Now consider the case when the domain D is a cylinder. Similarly, as in the case of the parallelepiped, problem (1)–(3) can be reduced to Cauchy problem (5) for equation (6). Use the operators A, B_1, B_0 of the form

$$A = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad B_1 = O, \quad B_0 = -N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Write down the equation to determine points of the A -spectrum:

$$\mu^2 \left((v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2 \right) + N^2 \left(v_k^{(n)} \right)^2 = 0,$$

where $B_0 \varphi_{k,m,n} = v_k^{(n)} \varphi_{k,m,n}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product in $L^2(D)$. We get the A -spectrum of the form

$$\mu_{k,m,n}^{1,2} = \pm \left(N v_k^{(n)} / \sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2} \right) i.$$

Let us construct propagators according to formulas (7), (8) as follows:

$$U_0^t u_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{N v_k^{(n)}}{\sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_0 \rangle \varphi_{k,m,n},$$

$$U_1^t u_1 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2}}{N v_k^{(n)}} \sin \left(\frac{N v_k^{(n)}}{\sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_1 \rangle \varphi_{k,m,n}.$$

By Theorem 2, the solution to problem (1)–(3) has the form

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{Nv_k^{(n)}}{\sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_0 \rangle \varphi_{k,m,n} + \\ + \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2}}{Nv_k^{(n)}} \sin \left(\frac{Nv_k^{(n)}}{\sqrt{(v_k^{(n)})^2 + (\pi m/l)^2}} t \right) \langle \varphi_{k,m,n}, u_1 \rangle \varphi_{k,m,n}.$$

As a result of the work, we obtain solutions to initial-boundary value problem (2)–(3) in a closed form on the considered domains for equation of internal waves (1).

References

1. Gabov S.A. On Small Vibrations of a Segment Placed on the Interface Between Two Stratified Fluids. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, Vol. 29, no. 4, pp. 154–162. OI: 10.1016/0041-5553(89)90020-7
2. Pletner Y.D. The Fundamental Solution of the Equation of Internal Waves and Some Initial-Boundary Value Problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1991, Vol. 31, no. 4, pp. 79–88.
3. Perova L.V., Sveshnikov A.G. Propagation of Disturbances Excited in Liquids by Moving Sources. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, Vol. 50, no. 12, pp. 2223–2232. (in Russ.). DOI: 10.1134/S0965542510120122
4. Sobolev S.L., On a New Problem of Mathematical Physics. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, Vol. 18, no. 1, pp. 3–50. (in Russ.).
5. Vasil'ev V.V., Krein S.G., Piskarev S.I. Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations. *J. Math. Sci.*, 1991, Vol. 54, Iss. 4, pp. 1042–1129. DOI: 10.1007/BF01138948
6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501
7. Demidenko G.V., Upsenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York, Basel: Marcel Dekker, 2003, 632 p. DOI: 10.1201/9780203911433
8. Zamyshlyayeva A.A. The Phase Space of a High-Order Sobolev-Type Equation. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2011, Vol. 4, no. 4, pp. 45–57. (in Russ.).
9. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 1, pp. 5–14. DOI: 10.14529/mmp180101
10. Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. Phase Spaces of One Class of High-Order Linear Sobolev-Type Equations. *Differential Equations*, 2006, Vol. 42, Iss. 2, pp. 269–278. DOI: 10.1134/S0012266106020145

Received April 15, 2021

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 11–16*

УДК 517.958

DOI: 10.14529/mmp210202

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

К.Ю. Котлованов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: kotlovanovki@susu.ru

В статье приводится аналитическое исследование одного уравнения внутренних волн, в некоторых источниках именуемое уравнением Пуанкаре, выведенное из основной системы гидродинамики. Данное уравнение характеризует распространение волн в толще однородной несжимаемой стратифицированной и, в отличие от уравнения Соболева, невращающейся жидкости. Рассмотрен случай, когда частота плавучести есть величина постоянная. Для уравнения внутренних волн рассматривается задача Коши–Дирихле. Данное уравнение имеет различные приложе-

ния в гидродинамике, например, при исследовании волн в океане. Исследование уравнения проводится в рамках теории полиномиально ограниченных пучков операторов. Уравнение внутренних волн редуцируется к задаче Коши абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа второго порядка. Затем показывается, что решение поставленной задачи удовлетворяет абстрактной теории. Далее рассмотрены два примера. В первом примере область ограничена параллелепипедом, а во втором – цилиндром. Для каждого случая области показано, что относительный спектр пучка операторов ограничен, частотой плавучести. После строятся пропагаторы, разрешающие оператор-функции, для уравнения внутренних волн для каждой из областей. Подставив начальные данные в пропагаторы, получим аналитическое решение задачи Коши для уравнения внутренних волн.

Ключевые слова: уравнение внутренних волн; полиномиально ограниченный пучок операторов; уравнение соболевского типа; пропагаторы.

Литература

1. Габов, С.А. О малых колебаниях отрезка, помещенного на границу раздела двух стратифицированных жидкостей / Габов С.А., Крутицкий П.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 4. – С. 554–564.
2. Плетнер, Ю.Д. Фундаментальное решение уравнения внутренних волн и некоторые начально-краевые задачи / Ю.Д. Плетнер // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31, № 4. – С. 592–604.
3. Перова, Л.В. О распространении возмущений, возбуждаемых в жидкостях движущимися источниками / Л.В. Перова, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, № 12. – С. 2223–2232.
4. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер матем. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 3–50.
5. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., ВИНТИ – 1990. – Вып. 28. – С. 87–202.
6. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск, 2003. – 179 с.
7. Демиденко Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 436 с.
8. Замышляева, А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Известия Иркутского государственного университета. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 45–57.
9. Zamyshlyayeva, A.A. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order / A.A. Zamyshlyayeva, E.V. Buehkov // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2018. – Т. 11, №. 1. – С. 5–14.
10. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференц. уравн. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 252–260.

Поступила в редакцию 15 апреля 2021 г.

ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО ТИПА

А.М. Лайпанова

Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: aida7@list.ru

Как известно, уравнениями смешанного типа называются уравнения в частных производных, которые принадлежат разным типам в разных частях рассматриваемой области. Например, в одной части области уравнение может принадлежать эллиптическому, а в другой – гиперболическому типу; эти части разделены линией перехода, на которой уравнение вырождается в параболическое или не определено.

В 1923 г. итальянский математик Ф. Трикоми рассмотрел краевую задачу для одного уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа (впоследствии названного его именем) в области, ограниченной в верхней полуплоскости ляпуновской кривой, а в нижней – выходящими из концов этой кривой характеристиками уравнения; краевые условия при этом ставились на кривой и на одной из характеристик. Решение должно было быть непрерывным в замыкании области, непрерывно дифференцируемым внутри нее и дважды непрерывно дифференцируемым в верхней (эллиптической) и нижней (гиперболической) подобластях; для первых производных решения допускались особенности интегрируемого порядка вблизи концов кривой. Ф. Трикоми доказал существование и единственность решения поставленной задачи в указанном классе; при доказательстве существования он свел задачу к сингулярному интегральному уравнению.

В данной статье исследован аналог задачи Трикоми для одного смешанного гиперболю-параболического уравнения третьего порядка со спектральным параметром. Доказаны единственность и существование решения поставленной задачи. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование решения – методом редукции к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи.

Ключевые слова: гиперболю-параболическое уравнение; задача Трикоми; уравнение смешанного типа; краевая задача; интегральные уравнения.

В современной концепции уравнений в частных производных (УрЧП) большое значение имеет изучение уравнений смешанного типа.

Поставим задачу. Исследуем следующее уравнение:

$$\begin{cases} u_{xxx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 – числовые параметры в некоторой конечной области D плоскости (x, y) , образованной следующими линиями: 1) в полуплоскости $y > 0$ отрезками AA_1, BB_1, A_1B_1 , лежащими на прямых $x = 0, x = 1, y = h$, $A(0, 0), A_1(0, h), B(1, 0), B_1(1, h)$; 2) в полуплоскости $y < 0$ двумя характеристиками уравнения (1): $AL: x = -y, BL: x - y = 1$, исходящими из определенной точки

$$L\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) [1].$$

Область D разделена на две части: $D_1 = D \cap (y > 0)$ – это параболическая часть смешанной области D ; $aD_2 = D \cap (y < 0)$ – гиперболическая подобласть области D .

Задача 1. Требуется отыскать функцию $u(x, y)$, обладающую указанными свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup AA_1) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(D_1) \cap C^2(D_2)$;

2) $u(x, y)$ является регулярным для уравнения (1) решением в области D ;

3) $u(x, y)$ отвечает требованиям краевых условий:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u(1, y) = \varphi_2(y), u_x(1, y) = \varphi_3(y), 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = \psi(x), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

где $\psi(x)$ – функция, непрерывная совместно со второй производной, при этом $\psi(0) = \varphi_1(0)$; $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y)$ – данные непрерывные функции [1].

Определение. В области D для уравнения (1) *регулярным* решением вышеуказанной задачи называется всякая функция

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup AA_1) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(D_1) \cap C^2(D_2),$$

удовлетворяющая краевым требованиям (2) и (3).

Предположим, что:

$$\lambda_1 \geq (-\lambda_2)^{\frac{3}{2}}, \lambda_1 \geq -\lambda_2^3 + 3\lambda_2\pi^2, \lambda_1 > 0.$$

Можно ввести новую некоторую неизвестную функцию

$$v(x, y) = \exp(-\rho x)u(x, y), \quad (4)$$

где $\rho = \text{const} > 0$.

Уравнение (1) в итоге станет таким:

$$0 = L_0(v) = \begin{cases} v_{xxx} - v_y + 3\rho v_{xx} + 3\rho^2 v_x + (\rho^3 - \lambda_1)v, & y > 0, \\ v_{xx} - v_{yy} + 2\rho v_x + (\rho^2 + \lambda_2)v, & y < 0, \end{cases} \quad (5)$$

Теорема. Если $u(x, y)$ есть регулярное решение однородной задачи 1, то при соблюдении требований 1) или 2) решение $u(x, y)$ в области D тождественно равно нулю [1].

Доказательство. Потребуем на концах интервала $x=0$ и $x=1$ выполнения следующего дополнительного условия:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} u(x, 0)[u_{xx}(x, 0) + \rho u_x(x, 0)] = \lim_{x \rightarrow 1-0} u(x, 0)[u_{xx}(x, 0) + \rho u_x(x, 0)] = 0 \quad (6)$$

Перейдем в области D_2 к характеристическим координатам $\xi = x + y, \eta = x - y$. Тогда уравнение (5) при $y < 0$ станет

$$L_0(v) = v_{\xi\eta} + \frac{\rho}{2}(v_\xi + v_\eta) + \frac{\rho^2 + \lambda_2}{4}v = 0, \quad (7)$$

а область D_2 будет отображена с областью $\Delta = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < \eta < 1\}$.

Рассмотрим тождество

$$0 = 4vL_0(v) = (2vv_\eta + \rho v^2)_\xi + (2vv_\xi + \rho v^2)_\eta + (\rho^2 + \lambda_2)v^2 - 4v_\xi v_\eta. \quad (8)$$

Выразим из уравнения (7) v_ξ и в правой части (8) изменим последний член:

$$-4v_\xi v_\eta = \left(\frac{4}{\rho}v_\eta^2\right)_\xi + \left(2v_\eta + \frac{\rho^2 + \lambda_2}{2\rho}v\right)^2 - \frac{(\rho^2 + \lambda_2)^2}{4\rho^2}v^2.$$

Тождество (8) перепишем в виде, учитывая последнее равенство:

$$0 = 4vL_0(v) = (2vv_\eta + \rho v^2 + \frac{4}{\rho}v_\eta^2)_\xi + (2vv_\xi + \rho v^2)_\eta + \left(2v_\eta + \frac{\rho^2 + \lambda_2}{2\rho}v\right)^2 + \frac{(\rho^2 + \lambda_2)^2(3\rho^2 - \lambda_2)}{4\rho^2}v^2. \quad (9)$$

Взяв точку (x, x) ($0 \leq x \leq 1$) на прямой $\eta = \xi$, проведем через эту точку характеристику $\eta = x$ уравнения (7).

Через Δ_x «отметим» область, которая ограничена отрезками прямых $\eta = x, \eta = \xi, \xi = 0$. По этой области Δ_x проинтегрируем тождество (9):

$$2 \int_0^x v(t, 0)v_y(t, 0)dt = 2 \int_0^x v(\xi, \xi) \left[v_\xi(\xi, \xi) - v_\eta(\xi, \xi) \right] d\xi = \frac{4}{\rho} \int_0^x v_\eta^2(\xi, \xi) d\xi + \quad (10)$$

$$+ \int_{\Delta_x} (2v_\eta + \frac{\rho^2 + \lambda_2}{2\rho} v)^2 d\xi d\eta + \rho \int_0^x v^2(\xi, x) d\xi + v^2(x, x) + \frac{(\rho^2 + \lambda_2)^2 (3\rho^2 - \lambda_2)}{4\rho^2} \int_{\Delta_x} v^2 d\xi d\eta \geq 0.$$

Рассмотрим в области D_1 тождество:

$$v(v_{xxx} - v_y + 3\rho v_{xx} + 3\rho^2 v_x + (\rho^2 - \lambda_1)v) = (vv_{xx} - \frac{1}{2}v_x^2 + 3\rho vv_x + \frac{3}{2}\rho^2 v^2)_x - (11) \\ - vv_y - (3\rho v_x^2 + (\lambda_1 - \rho^3)v^2) \equiv 0.$$

Вдоль $A(\varepsilon, h)B(1 - \varepsilon, h)$ (h, ε – как угодно маленькие числа, большие нуля) проинтегрируем (11) по x , а потом перейдем в полученном равенстве к пределу $h \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Принимая во внимание условия (6), в итоге имеем равенство

$$\int_0^1 v(x, 0)v_y(x, 0)dx = - \left\{ \frac{1}{2}v_x^2(1, 0) + \int_0^1 [3\rho v_x^2(x, 0) + (\lambda_1 - \rho^3)v^2(x, 0)] dx \right\}. \quad (12)$$

Из неравенств (10) и

$$\int_a^b z^2(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi} \right)^2 \int_a^b z'^2(x)dx,$$

из (12) имеем

$$v_x^2(1, 0) + 2 \int_0^1 \left[3\rho + \frac{(\lambda_1 - \rho^3)}{\pi^2} \right] v_x^2(x, 0) dx \leq 0.$$

В (10) и (12) положим теперь $\rho = \sqrt[3]{\lambda_1}$ или $\rho = -\lambda_2$. Тогда $v(1, 0) = 0, v(x, 0) = \text{const}$. Отсюда следует, что $v(x, y) \equiv 0$. Из выражения (4) тогда получим, что $u(x, y) \equiv 0$.

Изучим тождество в области D_1 :

$$u(u_{xxx} - u_y - \lambda_1 u) = (uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2)_x - (\frac{1}{2}u^2)_y - \lambda_1 u^2 \equiv 0.$$

Это тождество интегрируем по области D_1 и с учетом того, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$, получим:

$$-2 \int_{\Omega_1} \left[(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2)_x - (\frac{1}{2}u^2)_y - \lambda_1 u^2 \right] dx dy \equiv \int_0^1 \left[u^2(x, h) - u^2(x, 0) \right] dx + \\ + \int_0^b u_x^2(1, y) dy + 2\lambda_1 \int_{\Omega_1} u^2(x, y) dx dy = 0. \quad (13)$$

Из-за того, что $u(x, 0) = 0$, из формулы (13) имеем, что $u(x, h) = 0$ и $u_x(1, y) = 0$, однородная $u(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in \overline{D_1}$. Задача Дарбу $u(x, 0) = 0, u(x, -x) = 0$ в области D_2 для уравнения (1) при $y < 0$ имеет только тривиальное решение $u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \overline{D_2}$. Значит, $u(x, y) \equiv 0$ в D .

После этого докажем существование решения задачи 1. Для этого нужно перейти к пределу (пределу) при $y \rightarrow 0+$ в уравнении (1) и принять к сведению краевые условия (2), [1]:

$$\tau'''(x) - \lambda_1 \tau(x) = v(x), \quad (14)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau(1) = \varphi_2(0), \tau'(0) = \varphi_3(0), \quad (15)$$

где $\tau(x) = u(x, 0), v(x) = u_y(x, 0)$.

Применяя трёхкратное интегрирование к равенству (14) и принимая во внимание (15), составим функциональное соотношение между $\tau(x)u v(x)$, принесенное из части D_1 на $y = 0$:

$$\tau(x) - \frac{\lambda_1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \tau(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 v(t) dt + \frac{1}{2} \tau''(0)x^2 + \varphi_3(0)x + \varphi_1(0), \quad (16)$$

где

$$\tau''(0) = -\lambda_1 \int_0^1 (1-t)^2 \tau(t) dt - \int_0^1 (1-t)^2 v(t) dt - 2\varphi_3(0) - 2\varphi_1(0) + 2\varphi_2(0).$$

Заранее предполагая, что правая сторона равенства (16) известна и равна выражению $q(x)$, имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода для $\tau(x)$ [1]:

$$\tau(x) = q(x) + \frac{\lambda_1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \tau(t) dt. \quad (17)$$

После обращения уравнения (17) имеем:

$$\tau(x) = q(x) + \lambda \int_0^x R(x,t) q(t) dt, \quad (18)$$

где $R(x,t)$ есть резольвента ядра $(x-t)^2$, $\lambda = \frac{\lambda_1}{2}$.

Принимая в расчет значение $q(x)$ в (18), получаем

$$\tau(x) = \int_0^x M(x,t) v(t) dt + \tau''(0) \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x R(x,t) t^2 dt \right] + \varphi_3(0) \left[x + \lambda \int_0^x R(x,t) t dt \right] + \varphi_1(0) \left[1 + \lambda \int_0^x R(x,t) dt \right], \quad (19)$$

где

$$M(x,t) = \frac{1}{2} (x-t)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_t^x R(x,t_1) (t_1-t)^2 dt_1. \quad (20)$$

Теперь принесём из гиперболической части D_2 на линию $y=0$ функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$. Чтобы его получить, проанализируем для уравнения (1) при $y < 0$ решение задачи Коши $\tau(x) = u(x,0), v(x) = u_y(x,0)$. Следуем [2]:

$$u(x,y) = \frac{\tau(x-y) + \tau(x+y)}{2} + \frac{\sqrt{\lambda_2} y}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1(\sqrt{\lambda_2 [y^2 - (x-\xi)^2]})}{\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}} \tau(\xi) d(\xi) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} I_0(\sqrt{\lambda_2 [y^2 - (x-\xi)^2]}) v(\xi) d\xi, \quad (21)$$

где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ – функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядков.

Если (21) удовлетворит краевому условию (3), то получится интегральное уравнение типа Вольтера

$$\tau(x) = \bar{\rho}(x) - \int_0^x \tau(\xi) \frac{x}{\xi} \frac{\partial}{\partial x} I_0(\sqrt{\lambda_2 \xi(x-\xi)}) d\xi, \quad (22)$$

где

$$\bar{\rho}(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi(0) + \int_0^x I_0(\sqrt{\lambda_2 \xi(x-\xi)}) v(\xi) d\xi.$$

Предполагая $\bar{\rho}(x)$ известной и применяя формулу обращения для уравнение типа (22), будем иметь [1]:

$$\tau(x) = \int_0^x J_0(\sqrt{\lambda_2} (x-t)) v(t) dt + g(x), \quad (23)$$

где

$$g(x) = - \int_0^x \psi' \left(\frac{t}{2} \right) J_0[\lambda_2 \sqrt{x(x-t)}] dt. \quad (24)$$

Принимая во внимание значение $\tau''(0)$, равенство (19) перепишем так:

$$\tau(x) = \int_0^x M(x,t)v(t)dt + \int_0^1 Q(x,t)\tau(t)dt + \int_0^1 \mathfrak{S}(x,t)v(t)dt + \tilde{g}(x), \quad (25)$$

где

$$Q(x,t) = \lambda_1 \mathfrak{S}(x,t); \mathfrak{S}(x,t) = -\frac{1}{2}(x^2 + \lambda \int_0^x R(x,t)t^2 dt)(1-t)^2;$$

$$\tilde{g}(x) = (\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \varphi_3(0))(x^2 + \lambda \int_0^x R(x,t)t^2 dt) + \varphi_3(0)(x + \lambda \int_0^x R(x,t)t dt) + \varphi_1(0)(1 + \lambda \int_0^x R(x,t) dt).$$

Из (23) и (25) «устраним» $\tau(x)$. Тогда получим для нахождения $v(x)$ интегральное уравнение первого рода:

$$\int_0^x J_0(\sqrt{\lambda_2}(x-t))v(t)dt = \int_0^x M(x,t)v(t)dt + \int_0^1 \tilde{Q}(x,t)v(t)dt + h(x), \quad (26)$$

$$\tilde{Q}(x,t) = \mathfrak{S}(x,t) + \int_t^1 Q(x,t_1)J_0(\sqrt{\lambda_2}(t_1-t))dt_1; \quad h(x) = \int_0^1 Q(x,t)g(t)dt + \tilde{g}(x) - g(x).$$

Так как в смысле гладкости резольвента $R(x,t)$ поступает также, как ядро $(x-t)^2$, то учитывая свойства заданных функций $\varphi_i(y), i = \overline{1,3}, \psi(x)$, функции $M(x,t), Q(x,t)$ непрерывны совместно с частными производными первого порядка по аргументам x и t ; $h(x)$ непрерывна вместе с производной в областях своего определения, притом что $M(x,x) = 0, J_0(0) = 1$.

Найдя производную по аргументу x от уравнения (26), приходим к смешанному интегральному уравнению. Обратим его, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$v(x) = \int_0^1 \Gamma(x,t)v(t)dt + h_1(x), \quad (27)$$

где ядро $\Gamma(x,t)$ и его правая часть $h_1(x)$ выражаются в терминах резольвенты $R(x,t)$ ядра $(x-t)^2$ и данных функций $\varphi_i(y), i = \overline{1,3}, \psi(x)$, при том $\Gamma(x,t) \in C([0,1] \times [0,1]), h_1(x) \in C[0,1]$.

Как видно, выражение (27) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Из единственности решения исходной задачи вытекает разрешимость этого уравнения. Таким образом, функцию $v(x)$ можно определить из уравнения (27). Далее, найдя функцию $v(x)$, в области D_2 по формуле (21) определим решение $u(x,y)$ задачи, а в D_1 как решение уравнения (1) при $y > 0$ с краевыми условиями (2) и $u(x,0) = \tau(x)$.

Решение задачи (1) и (2), $u(x,0) = \tau(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, согласно [1]:

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_0^1 \int_0^y d\xi \int_0^\eta G(x,y;\xi,\eta)z(\xi,\eta)d\eta, \quad (28)$$

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^1 G_\xi(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi \right\},$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ есть функция Грина краевой задачи (1), (2), $u(x,0) = \tau(x)$ уравнения

$$u_{xxx} - u_y = 0. \quad (29)$$

Эта вышеупомянутая функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ описывается посредством фундаментальных решений (29):

$$u(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(y-\eta)^3} f\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^3}\right), & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta, \end{cases} \quad v(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{(y-\eta)^3} \bar{\varphi}\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^3}\right), & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta, \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{\pi \sqrt{z}}{3 \sqrt{3}} \left[I_1\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{\frac{3}{2}}\right) + I_1\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{\frac{3}{2}}\right) \right], \quad \bar{\varphi}(z) = \frac{\pi \sqrt{z}}{3 \sqrt{3}} \left[I_1\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{\frac{3}{2}}\right) - I_1\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{\frac{3}{2}}\right) \right],$$

где $I_\nu(z)$ – функция Бесселя. Функции $f(z)$ и $\bar{\varphi}(z)$ именуется функциями Эйри и удовлетворяют уравнению $t''(z) + zt(z)/3 = 0$.

В [2] рассмотрена однозначная разрешимость уравнения (28), а по формуле (21) можно решить задачу Коши.

При вышесказанных предположениях относительно λ_1 и λ_2 , а именно при $\lambda_1 \geq (-\lambda_2)^{\frac{3}{2}}$, $\lambda_1 \geq -\lambda_2^3 + 3\lambda_2\pi^2$, $\lambda_1 > 0$ исследована однозначная разрешимость поставленной задачи для смешанного гиперβολо-параболического уравнения третьего порядка со спектральным параметром.

Литература

1. Лайпанова, А.М. Локальные и нелокальные краевые задачи для смешанных уравнений гиперβολо-параболического типа второго и третьего порядков: дисс. ... канд. физ.-мат. Наук / А.М. Лайпанова. – Нальчик, 2003. – 70 с.
2. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.

Поступила в редакцию 25 января 2021 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 17–23*

DOI: 10.14529/mmph210203

ON ANALOGUE OF THE TRIKOMI PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

A.M. Laipanova

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

E-mail: aida7@list.ru

It is commonly known that equations of mixed type are partial differential equations that belong to different types in different parts of the domain under consideration. For example, the equation may belong to the elliptic type in one part of the domain and to the hyperbolic type in another one; these parts are separated by a transition line, at which the equation degenerates into parabolic or undefined.

In 1923, the Italian mathematician F. Tricomi considered a boundary value problem for one equation of mixed elliptic-hyperbolic type (later named after him) in a domain bounded in the upper half-plane by the Lyapunov curve, and in the lower half-plane by the characteristics of the equation that emerge from the ends of this curve; the boundary conditions were then set on the curve and on one of the characteristics. The solution had to be continuous in the closure of the domain, continuously differentiable within it, and twice continuously differentiable in the upper (elliptic) and lower (hyperbolic)

subdomains; for the first derivatives of the solution, singularities of integrable order were allowed near the ends of the curve. Tricomi proved the existence and uniqueness of the solution to the problem in the specified class; when proving the existence, he reduced the problem to a singular integral equation.

The article studies an analogue of the Tricomi problem for a third-order hyperbolic-parabolic equation of mixed type with a spectral parameter. The uniqueness and existence of a solution to the problem are proved. The uniqueness of the solution to the problem is proved by the method of energy integrals, and the existence of the solution is proved by the method of reduction to the Fredholm integral equation of the second kind, the solvability of which follows from the uniqueness of the solution to the problem.

Keywords: hyperbolic-parabolic equation; Tricomi problem; equation of mixed type; boundary value problem; integral equations.

Reference

1. Laypanova A.M. *Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya smeshannykh uravneniy giperbolo-parabolicheskogo tipa vtorogo i tret'ego poryadkov. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* (Local and non-local boundary value problems for mixed hyperbolic-parabolic equations of the second and third orders. Cand. phys. and math. sci. diss.). Nal'chik, 2003, 70 p.

2. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* (Boundary Value Problems for Mixed and Mixed-Composite Equations). Tashkent, Fan Publ., 1979, 238 p. (in Russ.).

Received January 25, 2021

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ПРЯМОЙ

А.О. Мамытов

Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика

E-mail: mamytov1968@list.ru

Определения либо ядра, либо правых частей интегро-дифференциальных уравнений, или значения либо начальных, либо краевых условий для интегро-дифференциальных уравнений, либо определения правой части для интегро-дифференциального уравнения с переопределением во внутренней точке по дополнительной информации о решении исходной задачи называют обратными задачами. Математические модели современных проблем геофизики, океанологии, атмосферы, физики, техники и других наук описываются с помощью интегро-дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Предлагаемая статья посвящена разрешимости обратной задачи, т. е. восстановлению ядра в начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с известным значением искомого решения на прямой $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, то есть с переопределением во внутренней прямой. Нами впервые доказана существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи. Для достижения поставленной цели нами использованы известные методы: метод сведения обратной задачи к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, метод функций Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с однородными краевыми условиями. При решении поставленной обратной задачи найдены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи по восстановлению ядра в интегро-дифференциальном уравнении в частных производных четвертого порядка. Сначала с помощью преобразований и функции Грина исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее с помощью методов теории обратных задач составляются три интегральных уравнения Вольтерра второго рода и доказывается существование и единственность решения систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: обратная задача; интегро-дифференциальные уравнения с частными производными; ядра; функция Грина.

Введение. Обычно определения либо ядра, либо правых частей интегро-дифференциальных уравнений, или значения либо начальных, либо краевых условий для интегро-дифференциальных уравнений, либо определения правой части для интегро-дифференциального уравнения с переопределением во внутренней точке по дополнительной информации о решении исходной задачи называют обратными задачами.

Почти во всех сферах науки и техники, при решении практических задач, обратные задачи занимают особое место. Математические модели современных проблем геофизики, океанологии, атмосферы, физики техники и других наук описываются с помощью дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Различные обратные задачи рассмотрены в работах [1–5].

Наша статья посвящена разрешимости обратной задачи, т. е. восстановления ядра в начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с известным значением искомого решения на прямой $x = x_0$, $x_0 \in (0, 1)$.

Нами доказано существование и единственность решения поставленной обратной задачи.

Для достижения поставленной цели нами использованы: метод сведения обратной задачи к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, метод функций Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с однородными краевыми условиями.

При решении поставленной обратной задачи найдены достаточные условия существования и единственность решения обратной задачи по восстановлению ядра в интегро-дифференциальном уравнении в частных производных четвертого порядка.

Постановка задачи. Исследуем линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных:

$$u_{tt}(t, x) = \alpha u_{xxtt}(t, x) + \beta u_{xx}(t, x) + \int_0^t K(t-s)u_{ss}(s, x)ds + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t'(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

однородными краевыми условиями:

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

а также с известным значением искомого решения $u(t, x)$ на прямой $x = x_0$, $x_0 \in (0, 1)$:

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где постоянные $\beta < 0, 0 < \alpha, 0 < T$ известны, $f(t, x)$ – известная функция, $K(t)$ и $u(t, x)$ – неизвестные функции, $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$.

Ставится вопрос: при каких условиях в области Ω существует единственное решение $\{K(t), u(t, x)\}$ обратной задачи (1)–(4)?

Пусть выполняются следующие условия:

U₁. Известная функция $f(t, x)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$.

U₂. $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

U₃. $g \in C^3[0, T]$, $\varphi(x_0) = g(0)$.

Лемма 1. Пусть $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, $\alpha, \beta \in R$, тогда резольвента $R(t, s)$ ядра $K(t, s) = \gamma(t-s)$, $(t, s) \in G = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ определяется однозначно и в явном виде:

$$R(t, s) = \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(t-s)), \quad (t, s) \in G. \quad (5)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно доказать следующее равенство

$$R(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)R(\tau, s)d\tau + K(t, s), \quad (t, s) \in G.$$

Для проверки этого равенства мы вставляем выражения для ядра $K(t, s) = \gamma(t-s)$ и резольвенты $R(t, s) = \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(t-s))$:

$$\begin{aligned} \int_s^t K(t, \tau)R(\tau, s)d\tau + K(t, s) &= \int_s^t \gamma(t-\tau)\sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(\tau-s))d\tau + \gamma(t-s) = \\ &= -\gamma(t-s)\operatorname{ch}(0) + \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(\tau-s)) \Big|_{\tau=s}^{\tau=t} + \gamma(t-s) = \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(t-s)) = R(t, s). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $f(x) \in C[0, 1]$ и $\alpha > 0$, тогда решение двухточечной краевой задачи

$$z''(x) - \frac{1}{\alpha} z(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad z(0) = z(1) = 0$$

можно записать с помощью функции Грина [6]:

$$z(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left[\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - 1}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - 1} - \frac{1}{2} e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - 1} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left[\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - 1}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - 1} + \frac{1}{2} e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - 1} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$v(t, x) = u_{tt}(t, x). \quad (6)$$

Интегрируя (10) по переменной t , имеем:

$$u_t(t, x) = \int_0^t v(s, x) ds + C(x),$$

где $C(x)$ – произвольная функция.

Учитывая начальное условие $u_t'(0, x) = \psi(x)$, выберем $C(x)$ так, чтобы выполнялось это начальное условие:

$$u_t(0, x) = \int_0^0 v(s, x) ds + C(x) \Rightarrow C(x) = \psi(x).$$

Отсюда получаем:

$$u_t(t, x) = \int_0^t v(s, x) ds + \psi(x). \quad (7)$$

Далее, интегрируя (7) по переменной t , имеем:

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^\tau v(s, x) ds d\tau + \int_0^t \psi(x) dt + C_1(x),$$

где $C_1(x)$ – произвольная функция.

Учитывая начальное условие $u(0, x) = \varphi(x)$, выберем $C_1(x)$:

$$u(0, x) = \int_0^0 \int_0^\tau v(s, x) ds d\tau + \int_0^0 \psi(x) dt + C_1(x) \Rightarrow C_1(x) = \varphi(x).$$

Для двойного интеграла $\int_0^t \int_0^\tau v(s, x) ds d\tau$, используя формулу Дирихле, получаем:

$$\int_0^t \int_0^\tau v(s, x) ds d\tau = \int_0^t \int_s^t v(s, x) d\tau ds = \int_0^t v(s, x) ds \int_s^t d\tau = \int_0^t (t-s)v(s, x) ds.$$

Отсюда получаем:

$$u(t, x) = \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \psi(x)t + \varphi(x) \quad (8)$$

Учитывая обозначение (6) интегро-дифференциальное уравнение (1) запишем в виде:

$$v(t, x) = \alpha v_{xx}(t, x) + \beta u_{xx}(t, x) + \int_0^t K(t-s)v(s, x) ds + f(t, x), \quad (9)$$

а интеграл $\int_0^t K(t-s)v(s, x) ds$ можно записать в виде

$$\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds = \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds. \tag{10}$$

Дифференцируя соотношение (8) дважды по переменной x , получаем

$$u_{xx}(t,x) = \int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds + \psi''(x)t + \varphi''(x). \tag{11}$$

Подставляя выражения (10) и (11) в уравнение (9), получим:

$$v(t,x) = \alpha v_{xx}(t,x) + \beta \int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds + \beta \psi''(x)t + \beta \varphi''(x) + \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds + f(t,x),$$

или

$$v_{xx}(t,x) - \frac{1}{\alpha}v(t,x) = -\frac{\beta}{\alpha} \int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds - \frac{\beta}{\alpha} \psi''(x)t - \frac{\beta}{\alpha} \varphi''(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds - \frac{1}{\alpha} f(t,x). \tag{12}$$

Учитывая лемму 1, получим

$$v_{xx}(t,x) - \frac{1}{\alpha}v(t,x) = \gamma \psi''(x)t + \gamma \varphi''(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds - \frac{1}{\alpha} f(t,x) + \int_0^t \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(t-s)) \left(\frac{1}{\alpha} v(s,x) + \gamma \psi''(x)s + \gamma \varphi''(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^s K(\tau)v(s-\tau,x)d\tau - \frac{1}{\alpha} f(s,x) \right) ds. \tag{13}$$

На основании обозначения (6) из однородных краевых условий (3) имеем:

$$v(t,0) = v(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{14}$$

Применяя лемму 2 к задаче (13), (14), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$v(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi) \left(\gamma \psi''(\xi)t + \gamma \varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t K(s)v(t-s,\xi)ds - \frac{1}{\alpha} f(t,\xi) + \int_0^t \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(t-s)) \left[\frac{1}{\alpha} v(s,\xi) + \gamma \psi''(\xi)s + \gamma \varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha} \int_0^s K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau - \frac{1}{\alpha} f(s,\xi) \right] ds \right) d\xi. \tag{15}$$

Пусть

$$F(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi) \left(\gamma \psi''(\xi)t + \gamma \varphi''(\xi) - \frac{f(t,\xi)}{\alpha} + \int_0^t \left(\gamma \psi''(\xi)s + \gamma \varphi''(\xi) - \frac{f(t,\xi)}{\alpha} \right) \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}(t-s)) ds \right) d\xi \tag{16}$$

Тогда интегральное уравнение (15) примет вид:

$$v(t,x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi) R(t,s)v(s,\xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi) K(s)v(t-s,\xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 \int_0^s R(t,s)G(x,\xi)K(\tau)v(s-\tau,\xi) d\tau d\xi ds + F(t,x). \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что в равенстве (17) при $t = 0$:

$$v(0,x) = F(0,x), \quad x \in [0,1]. \tag{18}$$

Дифференцируя равенство (17) по переменной t и учитывая соотношение (18), имеем

$$v_t(t,x) + \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x,\xi) F(0,\xi) d\xi \right] K(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi) R_t(t,s)v(s,\xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi) K(s)v_t(t-s,\xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 \int_0^s G(x,\xi) R_t(t,s)K(\tau)v(s-\tau,\xi) d\xi d\tau ds + F_t(t,x). \tag{19}$$

Теперь в полученном соотношении (19) полагаем, что $x = x_0$. Учитывая условие (4) и соотношение (8), мы получаем следующее равенство:

$$\left[\frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x_0, \xi) F(0, \xi) d\xi \right] K(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x_0, \xi) R_t(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x_0, \xi) K(s) v_t(t-s) d\xi ds - \\ - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^s \int_0^1 G(x_0, \xi) R_t(t, s) K(\tau) v(s-\tau, \xi) d\xi d\tau ds + F_t(t, x_0) - g'''(t). \quad (20)$$

Таким образом, для определения неизвестных $K(t), v(t, x), v_t(t, x)$ мы получили систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода (17), (19) и (20).

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия U_1, U_2, U_3 и неравенство $\frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x_0, \xi) F(0, \xi) d\xi \neq 0$. Тогда

при достаточно малом значении $T > 0$ обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $\{u(t, x), K(t)\}$ в классе $C^{2,2}([0, T] \times [0, 1]) \times C[0, T]$.

Причем $u(t, x) \in C^{2,2}([0, T] \times [0, 1]) \Leftrightarrow u_{xxt}(t, x) \in C([0, T] \times [0, 1])$.

Литература

1. Asanov, A. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations / A. Asanov, E.R. Atamanov. – Netherlands: VSP, Utrecht, 1997. – 152 p.
2. Асанов, А. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения / А. Асанов, Э.Р. Атаманов // Сиб. матем. журнал. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 752–762.
3. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
5. Лаврентьев, М.М. О некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.
6. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / А.О. Мамытов // Молодой учёный. – 2016. – № 11(115). – С. 49–52.

Поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 24–29*

DOI: 10.14529/mmph210204

SOLVABILITY OF THE INVERSE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A KNOWN VALUE ON THE LINE

A.O. Mamytov

Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

E-mail: mamytov1968@list.ru

The definitions of either the kernel or the right-hand sides of integro-differential equations, or the values of either the initial or boundary conditions for integro-differential equations or the definition of the right-hand side for an integro-differential equation with over determination at an interior point based on additional information about the solution of the original problem is called inverse problems. Mathe-

mathematical models of modern problems of geophysics, oceanology, atmosphere, physics, technology and other sciences are described using integro-differential equations with partial derivatives of the fourth order. The present article is devoted to the solvability of the inverse problem, that is, the recovery of the kernel in the initial-boundary value problem for a fourth-order integro-differential equation with partial derivatives with a known value of the desired solution on the straight line $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, that is, with a new definition in the inner line. The authors have proved for the first time the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem under consideration. Well-known methods are used to achieve this goal: the method of reducing the inverse problem to a linear integral Volterra equation of the second kind, the method of Green's functions for ordinary differential equations of the second order with homogeneous boundary conditions. When solving the formulated inverse problem, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem of recovering the kernel in a fourth order partial integro-differential equation are found. First, using transformations and the Green's function, the original problem is reduced to an equivalent problem, for which a theorem on the existence and uniqueness of a solution is proved. Further, using the methods of the theory of inverse problems, three Volterra integral equations of the second kind are compiled and the existence and uniqueness of the solution of systems of Volterra integral equations of the second kind are proved.

Keywords: inverse problem; integro-differential equation with partial derivatives; kernels; Green's function.

References

1. Asanov A., Atamanov E.R. *Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations*. Netherlands: VSP, Utrecht, 1997, 152 p.
2. Asanov A., R. Atamanov È. An Inverse Problem for a Pseudoparabolic Integro-Differential Operator Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 1995, Vol. 36, no. 4, pp. 645–655. DOI: 10.1007/BF02107322
3. Bukhgeym A.L. *Uravneniya Vol'terra i obratnye zadachi* (Volterra Equations and Inverse Problems). Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 207 p. (in Russ.).
4. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).
5. Lavrent'ev M.M. *O nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* (On Ill-Posed Problems in Mathematical Physics). Novosibirsk, SO AN SSSR Publ., 1962, 92 p. (in Russ.).
6. Mamytov A.O. *Young Scientist*, 2016, no. 11(115), pp. 49–52. (in Russ.). <https://moluch.ru/archive/115/30705/>

Received February 4, 2021

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

М.А. Сагадеева, Л.М. Фаткуллина, О.В. Уфимцева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Основной целью данной статьи является доказательство сходимости численного решения нестационарной системы леонтьевского типа с начальными-конечными условиями. Нестационарные системы леонтьевского типа возникают при исследовании динамических балансовых моделей экономики. Отметим, что нестационарность системы описывается с помощью скалярной функции, на которую умножена одна из матриц системы. Также подчеркнем, что отличительной чертой систем леонтьевского типа является вырожденность матрицы при производной по времени, что обусловлено тем, что некоторые виды ресурсов экономических систем невозможно запасти. В данной статье вместо стандартного начального условия используется начальное-конечное условие, которое для экономических систем может интерпретироваться как учет показателей не только в начальный момент времени, но и показателей, которые будут достигнуты в конечный момент времени. Ранее решение такой задачи было изучено и описано с помощью контурных интегралов. Однако, для больших систем такой вид решения не очень удобен, поэтому в данной статье предлагается описание численного решения без использования контурных интегралов, а также исследуется сходимость данного численного решения.

Ключевые слова: относительно регулярные матрицы; задача Коши; задача Шоултера–Сидорова; аппроксимации разрешающих потоков матриц; сходимость численного решения.

Введение

При построении математических моделей экономических систем и процессов широко используются балансовые модели [1,2]. Использование динамических моделей позволяет описать процесс изменения экономических показателей, установить непосредственную взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития и тем самым приблизить анализ на основе экономико-математической модели к реальным условиям развития экономической системы. Кроме того отметим, что реальные модели обычно имеют большую размерность.

Рассмотрим в \mathbf{R}^n динамическую балансовую модель в виде нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t), \quad (1)$$

где L, M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Здесь $a : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимовлияния значений исследуемой системы, а матрица M – (L, p) -регулярна (т. е. существует $\mu \in \mathbf{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, и бесконечно удаленная точка является полюсом матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$ порядка $p \in \mathbf{N}_0$, здесь и далее $\mathbf{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbf{N}$). Вектор-функция $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ описывает внешние воздействия на систему. Отметим, что условие вырожденности системы $\det L = 0$ является одной из отличительных черт систем леонтьевского типа, описывающих балансовые модели экономики, так как ресурсы определенного типа запасти нельзя [2]. Кроме того заметим, что балансовые модели зачастую имеют нестационарный вид, т. е. матрицы, входящие в систему (1), зависят от времени [3].

Системы леонтьевского типа являются конечномерным аналогом уравнений соболевского типа [4–6]. Данное исследование проведено в рамках теории вырожденных разрешающих семейств операторов [5]. Нестационарные уравнения соболевского типа впервые были рассмотрены в работе [7], далее для исследования таких уравнений было предложено использовать вырожден-

денные потоки операторов, которые являются аналогами разрешающих (полу)групп операторов [5] в стационарном случае. Разрешающие потоки матриц для нестационарных систем леонтьевского типа рассмотрены в работе [8].

При решении прикладных задач возникают ситуации, когда часть условий на искомую вектор-функцию нам известна в начальный момент времени, а остальные условия, в силу учета особенностей моделируемого процесса, нам известны в конечный момент времени. В таком случае адекватно рассматривать начально-конечные условия [9] для систем леонтьевского типа. Начально-конечную задачу будем рассматривать в следующем виде:

$$P_0(x(0) - x_0) = 0, \quad P_T(x(T) - x_T) = 0, \quad (2)$$

где P_0, P_T – матрицы, с помощью которых задаются условия в начальный и конечный моменты времени, а векторы $x_0, x_T \in \mathbf{R}^n$ описывают желаемые значения системы в начальный и конечный моменты времени соответственно. Начально-конечные условия могут быть применены при изучении различных математических моделей (см., например, [10–13]). Отметим, что начально-конечные условия являются обобщением [14] условий Шоуолтера–Сидорова [15], которые при исследовании вырожденных операторно-дифференциальных уравнений являются более естественными, так как снимают необходимость проверять согласование начальных данных [16].

Основной целью данной статьи является построение численного решения задачи (1), (2) без использования контурных интегралов, а также исследование сходимости этого решения. Численные решения начальных задач для систем леонтьевского типа исследуются, например, в работах [16–18].

Статья кроме введения, заключения и списка литературы содержит две части. В первой приводится необходимая информация для описания решений начальных задач для систем леонтьевского типа, для которых разрешающие семейства матриц описаны с помощью предельных переходов. Во второй части приводится основной результат статьи, а именно построено численное решение начально-конечной задачи (1), (2) и показана его сходимость к точному решению.

Решение начальных задач для нестационарной системы леонтьевского типа

Пусть L, M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Рассмотрим в \mathbf{R}^n нестационарную систему леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t), \quad (3)$$

где $a : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимодействия значений исследуемой системы, вектор-функция $x : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ искомая.

Будем называть матрицу M (L, p) -регулярной, если существует $\mu \in \mathbf{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, и бесконечно удаленная точка является полюсом матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$ порядка $p \in \mathbf{N}_0$. Этот термин является аналогом термина «регулярный пучок матриц $\mu L - M$ » К. Вейерштрасса [19].

Лемма 1 [8]. Пусть матрица M (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$). Тогда существуют проекторы, задаваемые с помощью матриц

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((L - \frac{1}{k} M)^{-1} L \right)^{p+1}, \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(L (L - \frac{1}{k} M)^{-1} \right)^{p+1}.$$

Определение 1. Вектор-функция $x \in C^1([0; T]; \mathbf{R}^n)$ называется *решением* (3), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (3) делает его верным тождеством. Решение $x = x(t)$ уравнения (3) будем называть *решением задачи Коши*

$$x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

для уравнения (3) (коротко, задачи (3), (4)), если оно удовлетворяет условию Коши (4) при некотором $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Определение 2. Вектор-функция $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ называется *решением* (1), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (1) делает его верным тождеством при некоторой вектор-

функции $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Решение $x = x(t)$ уравнения (1) будем называть решением задачи Шоултера–Сидорова

$$P(x(t_0) - x_0) = 0 \tag{5}$$

для уравнения (1) (коротко, задачи (1), (5)), если оно удовлетворяет условию (5) при некотором $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Используя аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста [20] для матриц разрешающего потока [8], получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1 [8]. Пусть матрица M обратима и (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$), а функция $a \in C^{p+1}([0, T]; \mathbf{R}_+)$. Тогда для любой вектор-функции $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, такой что $Qf \in C([0; T]; \mathbf{R}^n)$ и $(E_n - Q)f \in C^{p+1}([0; T]; \mathbf{R}^n)$, а также для любого начального значения $x_0 \in \mathbf{R}^n$ существует единственное решение $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ задачи Шоултера–Сидорова (1), (5), которое имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_0^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\ & \left. + \int_0^t \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^p f(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{f(t)}{a(t)} \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Если дополнительно выполнено условие согласования

$$\begin{aligned} & \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) x_0 = \\ & = - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{f(t)}{a(t)} \Bigg|_{t=0}, \end{aligned}$$

то функция (6) является единственным решением задачи Коши (4) для уравнения (1).

Здесь и далее через E_n обозначена единичная матрица размера n . Отметим, что условие обратимости матрицы M в теореме 1 не является ограничительным, так как при проведении замены в системе (1) всегда можно добиться его выполнения (подробнее см. в [8]).

2. Численное решение начально-конечной задачи для нестационарной системы леонтьевского типа

Пусть L, M – квадратные матрицы порядка n , такие что $\det L = 0$, а матрица M (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$). Для постановки начально-конечной задачи обычно применяются спектральные проекторы [9–14], которые задаются с помощью контурных интегралов. Однако в конечномерном случае такое задание матриц-условий можно упростить. Именно, представим матрицу P из леммы 1 в виде суммы двух матриц $P = P_0 + P_T$, причем эти матрицы P_0, P_T описывают проекторы в \mathbf{R}^n , т. е. обладают теми же свойствами, что и матрица P . С помощью этих матриц задаются начально-конечные условия

$$P_0(x(0) - x_0) = 0, \quad P_T(x(T) - x_T) = 0 \tag{7}$$

с $x_0, x_T \in \mathbf{R}^n$ описывающие желаемые значения в начальный и конечный моменты времени для нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t), \quad (8)$$

где $a : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимодействия значений исследуемой системы, вектор-функция $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ описывают внешние воздействия на систему. Отметим, что аналогично матрицам P_0, P_T существуют соответствующие им матрицы Q_0, Q_T , для которых также выполнено равенство $Q = Q_0 + Q_T$ для матрицы Q из леммы 1.

Определение 3. Решение $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ уравнения (8) назовем решением начально-конечной задачи (7), (8), если оно дополнительно удовлетворяет этому условию (7).

Сформулируем теорему о виде решения начально-конечной задачи для нестационарной системы леонтьевского типа.

Теорема 2. Пусть матрица M обратима и (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$), а функция $a \in C^{p+1}([0, T]; \mathbf{R}_+)$. Тогда для любой вектор-функции $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, такой что $Qf \in C([0; T]; \mathbf{R}^n)$ и $(E_n - Q)f \in C^{p+1}([0; T]; \mathbf{R}^n)$, а также для любых значений $x_0, x_T \in \mathbf{R}^n$ существует единственное решение $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ начально-конечной задачи (7), (8), которое имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_0^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k P_0 x_0 + \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_t^T a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k P_T x_T + \right. \\ & + \int_0^t \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} Q_0 f(s) ds - \\ & \left. - \int_t^T \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} Q_T f(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{f(t)}{a(t)} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Справедливость данного утверждения следует из применения теоремы 1 к задаче (7), (8).

В теореме 2 через $x(t)$ обозначено точное решение задачи (7), (8), а через $x_k(t)$ – приближенное численное решение этой задачи.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда приближенное решение $x_k(t)$ начально-конечной задачи (7), (8) сходится к точному решению $x(t)$ этой задачи, причем выполнено неравенство $\|x_k(t) - x(t)\| \leq \text{const}/k$.

Доказательство. Для того, чтобы показать справедливость данного утверждения, представим решение (9) в виде $x(t) = x^1(t) + x^2(t) + x^3(t) + x^4(t) + x^0(t)$, где $x^i(t)$ – предел соответствующего слагаемого из (9). Покажем сходимость каждого из слагаемых $x_k^i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$).

При достаточно больших k для первых двух слагаемых решения имеют место неравенства

$$\|x_k^1(t) - x^1(t)\| \leq C_1/k, \quad \|x_k^2(t) - x^2(t)\| \leq C_2/k \quad (C_1, C_2 \text{ не зависят от } k),$$

которые справедливы в силу результатов из [21] для аппроксимации матриц разрешающих полугрупп. Аналогично для третьего и четвертого слагаемого, используя оценки интегралов и результатов о сходимости из [21], получим неравенства вида

$$\|x_k^3(t) - x^3(t)\| \leq C_3/k, \quad \|x_k^4(t) - x^4(t)\| \leq C_4/k,$$

где C_3, C_4 также не зависят от k . Последнее слагаемое в решении также подчинено подобной оценке.

В силу всех этих оценок мы получаем утверждение следствия.

Заключение. В дальнейшем планируется применить полученные результаты при исследовании конкретных моделей леонтьевского типа, а также для проведения вычислительных экспериментов. Кроме того, в дальнейшем можно будет перейти к исследованию многоточечных начально-конечных условий для систем леонтьевского типа.

Литература

1. McConnell, C.R. Economics: Principles, Problems, and Policies / C.R. McConnell, S.L. Brue, S.M. Flynn. – New York: McGraw-Hill, 2009. – 786 p.
2. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997. – 477 с.
3. Pospelov, I.G. Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables / I.G. Pospelov // *Mathematical Notes*. – 2013. – Vol. 94, № 1. – P. 146–156.
4. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.
5. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск, 2003. – 179 с.
6. Al'shin, A.V. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.V. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011. – 648 p.
7. Сагадеева, М.А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / М.А. Сагадеева. – Челябинск, 2006. – 120 с.
8. Keller, A.V. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy / A.V. Keller, M.A. Sagadeeva // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2020. – Vol. 325. – P. 263–277.
9. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.
10. Zagrebina, S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid / S.A. Zagrebina // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2014. – Т. 7, № 3. – P. 5–22.
11. Свиридюк, Г.А. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, А.С. Конкина // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 148–154.
12. Sviridyuk, G.A. Multipoint Initial-Final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive «White Noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyeva, S.A. Zagrebina // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103–117.
13. Загребина, С.А. Уравнения Хоффа на графе с многоточечным начально-конечным условием / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2019. – Т. 6, № 2. – С. 54–63.
14. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоултера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.
15. Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

16. Келлер, А.В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоултера–Сидорова и численные решения / А.В. Келлер // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, Вып. 2. – С. 30–43.

17. Бурлачко, И.В. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И.В. Бурлачко, Г.А. Свиридюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677–1683.

18. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.

19. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.

20. Сагадеева, М.А. Аппроксимации вырожденных C_0 -полугрупп / М.А. Сагадеева, А.Н. Шулёпов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 133–137.

21. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.

Поступила в редакцию 13 апреля 2021 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 30–36

DOI: 10.14529/mmph210205

NUMERICAL SOLUTION TO THE INITIAL-FINAL PROBLEM FOR NON-STATIONARY LEONTIEF-TYPE SYSTEMS

M.A. Sagadeeva, L.M. Fatkullina, O.V. Ufimtseva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: sagadeevama@susu.ru

The main purpose of the paper is to prove the convergence of a numerical solution to a non-stationary Leontief-type system with an initial-final condition. Non-stationary Leontief-type systems are used in the study of dynamic balance models of the economy. Nonstationarity of systems is described using a scalar function, which is multiplied by one of the matrices of the system. The distinctive feature of Leontief-type systems is the matrix singularity at the derivative with time, which is due to the fact that some types of resources of economic systems cannot be stored. In the article, the initial-final condition is used instead of the standard initial condition, which for economic systems can be interpreted as taking into account indicators not only at the initial moment of time, but also indicators that will be achieved at the final moment of time. Previously, the solution of such a problem was studied and described using contour integrals. However, this type of solution is not very convenient for large-dimensional systems, so this article proposes a description of the numerical solution without the use of contour integrals, and also examines the convergence of this numerical solution.

Keywords: relatively regular matrices; Cauchy problem; Showalter–Sidorov problem; approximations of resolving matrix flows; convergence of the numerical solution.

References

1. McConnell C.R., Brue S.L., Flynn S.M. *Economics: Principles, Problems, and Policies*. New York, McGraw-Hill, 2009, 786 p.

2. Leontief W.W. *Input-Output Economics*. Oxford, Oxford University Press, 1986, 477 p.

3. Pospelov I.G. *Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables*. Mathematical Notes, 2013, Vol. 94, no. 1, pp. 146–156. DOI: 10.1134/S0001434613070134

4. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003, 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433

5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501

6. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations*. Series in Nonlinear Analysis and Applications. Walter de Gruyter & Co., Berlin De Gruyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Gruyter Berlin, 2011, 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294

7. Sagadeeva M.A. *Issledovanie ustoychivosti resheniy lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* (Investigation of Solutions Stability for Linear Sobolev Type Equations. Cand. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2006, 120 p. (in Russ.).

8. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M., Tomilov Y. (eds). *Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2020, Vol. 325, pp. 263–277. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_15

9. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 5–24. (in Russ.).

10. Zagrebina S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 5–22. DOI: 10.14529/mmp140301

11. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Konkina A.S. The Oskolkov Equations on the Geometric Graphs as a Mathematical Model of the Traffic Flow. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 148–154. (in Russ.) DOI: 10.14529/mmp1503010

12. Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint Initial-Final Problem for one class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive “White Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp180308

13. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The Hoff Equations on a Graph with the Multipoint Initial-Final Value Condition. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, Vol. 6, no. 2, pp. 54–63. DOI: 10.14529/jcem190205

14. Zagrebina S.A., Keller A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematica Modelling, Programming & Computer Software”*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201

15. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Zadacha Showalter–Sidorova kak fenomen uravneniy sobolevskogo tipa. (The Showalter–Sidorov problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations). *Bulletin of Irkutsk State University. Series: “Mathematics”*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

16. Keller A.V. The Leontief Type Systems: Classes of Problems with the Showalter–Sidorov Initial Condition and Numerical Solving. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 2, pp. 30–43. (in Russ.).

17. Burlachko I.V., Sviridyuk G.A. An Algorithm for Solving the Cauchy Problem for Degenerate Linear Systems of Ordinary Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, Vol. 43, no. 11, pp. 1613–1619.

18. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Equations of Leontief Type. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2003, Vol. 47, no. 8, pp. 44–50. (in Russ.).

19. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices*. AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 2000, 660 p.

20. Sagadeeva M.A., Shulepov A.N. The Approximations for Degenerate C_0 -Semigroup. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 133–137. (in Russ.).

21. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk* (Numerical Investigation of the Optimal Control Problem for Leontief Type Models. Dr. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2011, 237 p.

Received April 13, 2021

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Б.Х. Турметов¹, В.В. Карачик²

¹ *Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан*

E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

² *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*

E-mail: karachik@susu.ru

Исследуются условия разрешимости одного класса краевых задач для нелокального полигармонического уравнения в единичном шаре с условиями Дирихле на границе, порожденного некоторой ортогональной матрицей. Исследованы существование и единственность решения поставленной задачи Дирихле и построена функция Грина.

Сначала устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения: исследуется обратимость матрицы Вандермонда из корней m -й степени из единицы, затем находятся собственные векторы и собственные числа вспомогательной матрицы, порожденной коэффициентами нелокального оператора задачи и, далее, находится обратная матрица к ней. Для доказательства единственности решения поставленной задачи устанавливается коммутативность граничных операторов и нелокального оператора задачи и показывается, что если решение задачи существует, то это решение – полигармоническая функция. Затем находятся условия единственности решения рассматриваемой задачи. Далее, на основании полученных выше вспомогательных утверждений находятся условия существования решения нелокальной задачи. Решение этой задачи выписывается через решения вспомогательных задач Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре. Наконец, по известной функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре строится функция Грина исходной нелокальной задачи.

Ключевые слова: нелокальный оператор; задача Дирихле; полигармоническое уравнение; условия разрешимости; функция Грина.

Введение. Понятие нелокального оператора и связанные с ним понятия нелокального дифференциального уравнения и нелокальной краевой задачи появились в математике относительно недавно. Например, в [1] рассматриваются уравнения, содержащие дробные производные искомого функции, уравнения с отклоняющимися аргументами, другими словами, уравнения, в которые входят неизвестная функция и ее производные, вообще говоря, для разных значений аргументов называются нелокальными дифференциальными уравнениями.

Краевые и начально-краевые задачи для нелокальных аналогов классических уравнений исследовались в работах [2–6]. Многочисленные приложения нелокальных уравнений и нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений к задачам физики, техники и других отраслей науки подробно описаны в [7, 8]. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго и четвертого порядка с инволюцией, как частные случаи нелокальных задач, рассматриваются в [9–13].

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, а $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера и S – действительная ортогональная матрица $SS^T = E$, для которой существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $S^m = E$. Отметим, что если $x \in \Omega$, или $s \in \partial\Omega$, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие включения: $S^k x \in \Omega$, или $S^k s \in \partial\Omega$. Это так, поскольку преобразование \mathbb{R}^n матрицей S сохраняет норму $|x|^2 = (S^T Sx, x) = (Sx, Sx) = |Sx|^2$.

Рассмотрим нелокальный дифференциальный оператор

$$Lu(x) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} a_k (-\Delta)^l u(S^k x),$$

где a_0, a_1, \dots, a_{m-1} – некоторые действительные числа и $l \in \mathbb{N}$. Исследуем в Ω следующую задачу.

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial \Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

где ν – внешняя единичная нормаль к $\partial \Omega$.

Вспомогательные утверждения. Для исследования поставленной выше задачи нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, тогда справедливо равенство

$$M^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \mu_0^0 & \mu_0^1 & \dots & \mu_0^{m-1} \\ \mu_1^0 & \mu_1^1 & \dots & \mu_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m-1}^0 & \mu_{m-1}^1 & \dots & \mu_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{m} \bar{M}^T.$$

Доказательство. Найдем $e_{i,j}$ – элемент i -й строки и j -го столбца в произведении матрицы из левой части равенства и матрицы из правой части. Он равен

$$e_{i,j} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mu_i^k \bar{\mu}_j^k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (\mu_i \bar{\mu}_j)^k = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{i,j},$$

поскольку $\mu_i \bar{\mu}_j$ – тоже корень степени m из единицы, не равный 1 при $i \neq j$ и $|\mu_i \bar{\mu}_i|^2 = 1$. Поэтому произведение этих матриц равно E . Это доказывает лемму.

Рассмотрим следующую матрицу, сформированную коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_{m-1}

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & \dots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть μ – корень степени m из единицы и

$$\sigma_\mu(A) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \bar{\mu}^k, \quad (4)$$

тогда для матрицы A справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & \dots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^{m-1} \end{pmatrix} = \sigma_{\bar{\mu}}(A) \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^{m-1} \end{pmatrix},$$

т. е. вектор $m_\mu = (\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^{m-1})^T$ – собственный вектор матрицы A , а $\sigma_{\bar{\mu}}(A)$ – собственное значение, ему отвечающее. Если $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, то собственные вектора $m_{\mu_0}, \dots, m_{\mu_{m-1}}$ линейно независимы и

$$\det A = \prod_{k=0}^{m-1} (a \cdot m_{\mu_k}) = \sigma_{\mu_0}(A) \cdots \sigma_{\mu_{m-1}}(A),$$

где $a = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})^T$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что элемент i -й строки в произведении матрицы A и вектора m_μ равен

$$\begin{aligned} A_i^{row} \cdot m_\mu &= \sum_{k=0}^{i-1} a_{m+k-i} \mu^k + \sum_{k=i}^{m-1} a_{k-i} \mu^k = \mu^i \sum_{k=0}^{i-1} a_{m+k-i} \mu^{k-i} + \mu^i \sum_{k=i}^{m-1} a_{k-i} \mu^{k-i} = \\ &= \mu^i \left(\sum_{k'=m-i}^{m-1} a_{k'} \mu^{k'} + \sum_{k'=0}^{m-1-i} a_{k'} \mu^{k'} \right) = \mu^i \sum_{k'=0}^{m-1} a_{k'} \mu^{k'} = \sigma_{\bar{\mu}}(A) \mu^i. \end{aligned}$$

Здесь в первой сумме из второй строчки была сделана замена индекса $m+k-i=k'$ и учтено, что $\mu^{k'-m} = \mu^{k'}$, а во второй сумме замена индекса $k-i=k'$. Следовательно, $A m_\mu = \sigma_{\bar{\mu}}(A) m_\mu$. Первое утверждение леммы доказано.

В силу леммы 1 матрица $M = (m_{\mu_0}, \dots, m_{\mu_{m-1}})^T$ обратима и, значит, неособенная, а поэтому ее ранг по строкам равен m , т. е. они линейно независимы. Далее, поскольку определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел, то имеем $\det A = \sigma_{\bar{\mu}_0}(A) \cdots \sigma_{\bar{\mu}_{m-1}}(A)$ и поскольку

$$\sigma_{\bar{\mu}}(A) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mu^k = a \cdot m_\mu,$$

то

$$\det A = \sigma_{\bar{\mu}_0}(A) \cdots \sigma_{\bar{\mu}_{m-1}}(A) = \prod_{k=0}^{m-1} (a \cdot m_{\mu_k}).$$

Поскольку $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{m-1}$ тоже различные корни степени m из единицы, то $\det A = \sigma_{\bar{\mu}_0}(A) \cdots \sigma_{\bar{\mu}_{m-1}}(A)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть матрица A построена на числах a_0, a_1, \dots, a_{m-1} , а матрица B на числах b_0, b_1, \dots, b_{m-1} , тогда матрицы A и B коммутируют $AB = BA$ и матрица AB имеет структуру матриц A и B . Если $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\mu_k}(A) \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\mu_k^{j-i} \sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} \right)_{i,j=0,m-1} \equiv \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-1} \\ c_{m-1} & c_0 & \cdots & c_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix},$$

где

$$c_j = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^j}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (5)$$

и, значит, матрица C имеет структуру матрицы A .

Доказательство леммы опустим.

Замечание 1. Поскольку

$$\sigma_{\bar{\mu}_k}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)},$$

то при $\mu = 1$ верны равенства $\sigma_1(A) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j$ и $\sigma_1(A^{-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i$, а значит $\sum_{j=0}^{m-1} a_j \sum_{i=0}^{m-1} c_i = 1$.

Единственность решения задачи

Лемма 4. [5, лемма 3.1] Оператор $I_S u(x) = u(Sx)$ и оператор Лапласа Δ коммутируют $\Delta I_S u(x) = I_S \Delta u(x)$ на функциях $u \in C^2(\Omega)$. Оператор $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}(x)$ и оператор I_S также коммутируют $\Lambda I_S u(x) = I_S \Lambda u(x)$ на функциях $u \in C^1(\bar{\Omega})$ и верно равенство $\nabla I_S = I_S S^T \nabla$.

Следствие 1. Если функция $u(x)$ – l -гармоническая в Ω , то функция $u(Sx) = I_S u(x)$ тоже l -гармоническая в Ω .

Действительно, в силу леммы 4 $\Delta^l u(x) = 0 \Rightarrow \Delta^l I_S u(x) = I_S \Delta^l u(x) = 0$.

Отсюда следует, что если функция $u(x)$ – полигармоническая в Ω , то она удовлетворяет однородному уравнению (1) в Ω .

Верно и обратное утверждение.

Лемма 5. Пусть функция $u \in C^{2l}(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и $\sigma_{\mu_k}(A) \neq 0$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, где $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, тогда функция $u(x)$ является l -гармонической в области Ω .

Доказательство. Пусть функция $u \in C^{2l}(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Обозначим

$$v(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k u(S^k x). \tag{6}$$

Очевидно, что $v(x) \in C^{2l}(\Omega)$ и $(-\Delta)^l v(x) = 0, x \in \Omega$, т. е. функция $v(x)$ является l -гармонической в области Ω . В силу следствия 1 функции $v(S^k x)$ тоже l -гармонические в области Ω . С другой стороны из (6), в силу условия $S^m = E$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} v(Sx) &= a_{m-1}u(x) + a_0u(Sx) + \dots + a_{m-2}u(S^{m-1}x) \\ v(S^2x) &= a_{m-2}u(x) + a_{m-1}u(Sx) + \dots + a_{m-3}u(S^{m-1}x) \\ &\dots\dots\dots \\ v(S^{m-1}x) &= a_1u(x) + a_2u(Sx) + \dots + a_0u(S^{m-1}x) \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, для функций $u(x), u(Sx), \dots, u(S^{m-1}x)$ получаем систему алгебраических уравнений (6), (7) с матрицей A из (3)

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ v(Sx) \\ \vdots \\ v(S^{m-1}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & \dots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ u(Sx) \\ \vdots \\ u(S^{m-1}x) \end{pmatrix}.$$

По условию леммы, в силу леммы 2, определитель этой системы не обращается в нуль. Воспользуемся леммой 3. Первая строка матрицы A^{-1} имеет вид $c = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1})^T$, где c_j при $j = 0, 1, \dots, m-1$ находятся из (5) и значит

$$u(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j v(S^j x) = c_0 v(x) + c_1 v(Sx) + \dots + c_{m-1} v(S^{m-1}x). \tag{8}$$

Как отмечалось выше, функции $v(S^j x)$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$ – l -гармонические функции в Ω , а значит, функция $u(x)$ из (8) также является l -гармонической в области Ω . Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, выполнены условия $\sigma_{\mu_k}(A) \neq 0, k = 0, \dots, m-1$ и решение задачи Дирихле (1), (2) существует, тогда оно единственно.

Доказательство. Докажем, что однородная задача (1), (2) имеет только нулевое решение, а значит, решение неоднородной задачи (1), (2) единственно. Пусть $u(x)$ – решение однородной задачи (1), (2). Если $\sigma_{\mu_k}(A) \neq 0$ (4), при $k = 0, \dots, m-1$, то по лемме 5 функция $u(x)$ является l -гармонической в области Ω и удовлетворяет однородным условиям (2). Следовательно, функция $u(x)$ – решение следующей задачи Дирихле

$$\Delta^m u(x) = 0, x \in \Omega; \left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial \Omega} = 0, k = 0, 1, \dots, m-1.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле имеем $u(x) \equiv 0$ в Ω . Теорема доказана.

Существование решения задачи Дирихле. В этом разделе исследуем существование решения задачи Дирихле (1), (2).

Теорема 2. Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \mu_k^i \neq 0$, $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $g_j(x) \in C^{m+\lambda-j}(\partial\Omega)$, $j=0, 1, \dots, m-1$. Тогда решение задачи Дирихле (1), (2) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q v(S^q x), \quad (9)$$

где коэффициенты c_q определяются из (5), а $v(x)$ – решение следующей задачи Дирихле

$$(-\Delta)^l v(x) = f(x), x \in \Omega; \quad \left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial\Omega} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x) \equiv h_j(x), j=0, 1, \dots, m-1, x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи Дирихле (1), (2). Обозначим

$$v(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k u(S^k x).$$

Тогда для функции $v(x)$, в силу леммы 4, получаем задачу (10): $(-\Delta)^l v(x) = f(x)$ и

$$\left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial\Omega} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right|_{\partial\Omega}(S^k x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x) = h_j(x).$$

Если $g_j(x) \in C^{l+\lambda-j}(\partial\Omega)$, $j=0, 1, \dots, m-1$, то $h_j(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x) \in C^{l+\lambda-j}(\partial\Omega)$. Известно (см.,

например, [14]), что для заданных функций $f(x)$ и $h_j(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x)$ решение задачи (10) существует и единственно. Как и в случае теоремы 1 между функциями $v(x)$ и $u(x)$ получаем алгебраическое соотношение вида $AU = V$, где

$$U = \left(u(x), u(Sx), \dots, u(S^{m-1}x) \right)^T, \quad V = \left(v(x), v(Sx), \dots, v(S^{m-1}x) \right)^T.$$

Если $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \mu_k^i \neq 0$, то в силу утверждения теоремы 1 неизвестная функция $u(x)$ однозначно определяется через функцию $v(x)$ по формуле (9).

Пусть наоборот – функция $v(x)$ является решением задачи (10). Покажем, что функция $u(x)$, определяемая по формуле (9), удовлетворяет всем условиям задачи (1), (2).

Действительно, если $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $g_j(x) \in C^{l+\lambda-j}(\partial\Omega)$, $j=0, 1, \dots, m-1$, то будем иметь $v(x) \in C^{2l}(\Omega) \cap C^{l+\lambda}(\bar{\Omega})$. Отсюда получим $u(x) \in C^{2l}(\Omega) \cap C^{l+\lambda}(\bar{\Omega})$. Поэтому, согласно лемме 2, имеем в Ω равенство

$$(-\Delta)^l u(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q (-\Delta)^l v(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q I_{S^q} (-\Delta)^l v(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q I_{S^q} f(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q f(S^q x).$$

Будем считать индексы коэффициентов c_q по модулю m . Тогда, если считать $c_{-1} = c_{m-1}$, то, поскольку $S^m = E$, получаем

$$\begin{aligned} I_S (-\Delta)^m u(x) &= (-\Delta)^m u(Sx) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q f(S^{q+1}x) = \sum_{q=0}^{m-2} c_q f(S^{q+1}x) + c_{m-1} f(x) = \\ &= c_{-1} f(x) + \sum_{q=1}^{m-1} c_{q-1} f(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-1} f(S^q x). \end{aligned}$$

Аналогично если считать $c_{-2} = c_{m-2}$, то найдем

$$\begin{aligned} (-\Delta)^m u(S^2 x) &= \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-1} f(S^{q+1} x) = \sum_{q=0}^{m-2} c_{q-1} f(S^{q+1} x) + c_{m-2} f(x) = \\ &= c_{-2} f(x) + \sum_{q=1}^{m-1} c_{q-2} f(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-2} f(S^q x). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, считая $c_{-p} = c_{m-p}$, получим

$$(-\Delta)^m u(S^p x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-p} f(S^q x),$$

где $p = 0, \dots, m-1$. Учитывая полученные равенства, запишем

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p (-\Delta)^l u(S^p x) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-p} f(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} f(S^q x) \sum_{p=0}^{m-1} a_p c_{q-p}.$$

Вспомогая значения c_p из (5) и $\sigma_{\mu_k}(A)$ из (4) вычислим

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p c_{q-p} = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} a_p \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^{q-p}}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^q}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} \sum_{p=0}^{m-1} a_p \mu_k^p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^q \sigma_{\bar{\mu}_k}(A)}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\mu}_k^q.$$

Учитывая, что $\forall k \exists s \in \{0, \dots, m-1\} \bar{\mu}_k^q = e^{-\frac{2\pi i q}{m} s}$, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p c_{q-p} = \begin{cases} 1, & q = 0 \pmod{m} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (11)$$

и значит уравнение (1) удовлетворяется

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p (-\Delta)^m u(S^p x) = f(x).$$

Проверим граничные условия задачи (2). При $x \in \partial\Omega$ имеем

$$h_k(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j g_k(S^j x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

откуда, считая индексы коэффициентов a_j по модулю m ($a_{-1} = a_{m-1}$), запишем

$$\begin{aligned} h_k(Sx) &= \sum_{j=0}^{m-1} a_j g_k(S^{j+1} x) = \sum_{j=0}^{m-2} a_j g_k(S^{j+1} x) + a_{m-1} g_k(x) = \\ &= a_{-1} g_k(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a_{j-1} g_k(S^j x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-1} g_k(S^j x) \end{aligned}$$

и аналогично по индукции будем иметь

$$\begin{aligned} h_k(S^p x) &= I_S h_k(S^{p-1} x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-p+1} g_k(S^{j+1} x) = \sum_{j=0}^{m-2} a_{j-p+1} g_k(S^{j+1} x) + a_{m-p} g_k(x) = a_{-p} g_k(x) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} a_{j-p} g_k(S^j x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-p} g_k(S^j x). \end{aligned}$$

Поэтому в силу леммы 4

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} &= \sum_{p=0}^{m-1} c_p \left. \frac{\partial^k v(S^p x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = \sum_{p=0}^{m-1} c_p h_k(S^p x) = \sum_{p=0}^{m-1} c_p \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-p} g_k(S^j x) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} g_k(S^j x) \sum_{p=0}^{m-1} a_{j-p} c_p. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (11) и соглашение $a_{q+m} = a_q, c_{q-m} = c_q$, найдем

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{j-p} c_p = \sum_{p=0}^j a_{j-p} c_p + \sum_{p=j+1}^{m-1} a_{j-p+m} c_{p-m} = \sum_{q=0}^j a_q c_{j-q} + \sum_{q=j+1}^{m-1} a_q c_{j-q} = \sum_{q=0}^{m-1} a_q c_{j-q} = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j \neq q \end{cases}.$$

Тогда

$$\left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial \Omega} = \sum_{j=0}^{m-1} g_j(S^j x) \sum_{p=0}^{m-1} a_{j-p} c_p = g_k(x), \quad k=0,1,\dots,m-1,$$

и значит, граничные условия (2) для функции $u(x)$ выполнены. Теорема доказана.

Далее, обозначим через $G(x, y)$ функцию Грина задачи Дирихле (10). Отметим, что явный вид функции Грина $G(x, y)$ для шара построен различными способами в работах [14–16]. Например, в работе [14] показано, что функция $G(x, y)$ имеет вид

$$G(x, y) = K_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_1^{g(x,y)} (t^2 - 1)^{m-1} t^{1-n} dt,$$

где

$$g(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \left| y|x| - \frac{x}{|x|} \right|, \quad K_{m,n} = \frac{1}{\omega_n ((2m - 2)!)^2}.$$

Теорема 3. Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\mu_k}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \mu_k^i \neq 0$, $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ и $g_j(x) = 0, j=0,1,\dots,m-1$. Тогда решение задачи (1), (2)

представляется в виде $u(x) = \int_{\Omega} G_S(x, y) f(y) dy$, где $G_S(x, y) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q G(S^q x, y)$, а коэффициенты c_q при $q=1,\dots,l$ находятся из (5).

Доказательство. Как известно, решение задачи Дирихле (10) в случае $g_j(x) = 0, j=0,1,\dots,m-1$ представляется в виде $v(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$. Поэтому

$$v(S^q x) = \int_{\Omega} G(S^q x, y) f(y) dy, \quad q=0,1,\dots,m-1.$$

Далее, на основании теоремы 2, подставляя это значение $v(S^q x)$ в равенство (9) для решения $u(x)$ задачи (1), (2) получим искомое представление. Теорема доказана.

Исследование выполнено при поддержке грантового финансирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках научного проекта № AP08855810 и финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
2. Андреев, А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А.А. Андреев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1126–1128.
3. Ashyralyev, A. Well-posedness of a parabolic equation with involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – Vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304.
4. Ashyralyev, A. Well-posedness of an elliptic equation with involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – № 284. – С. 1–8.
5. Karachik, V.V. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation / V.V. Karachik, A.M. Sarsenbi, B.Kh. Turmetov // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, no. 3. – P. 1604–1625.

6. Kirane, M. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation / M. Kirane, N. Al-Salti // *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. – 2016. – Vol. 9, Iss. 3. – P. 1243–1251.
7. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary value problems. I / A.L. Skubachevskii // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2008. – Vol. 155, Iss. 2. – P. 199–334.
8. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary-value problems. II / A.L. Skubachevskii // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2010. – Vol. 166, Iss. 4. – P. 377–561.
9. Przeworska-Rolewicz, D. Some boundary value problems with transformed argument / D. Przeworska-Rolewicz // *Commentationes Mathematicae*. – 1974. – Vol. 17, no. 2. – P. 451–457.
10. Karachik, V.V. On solvability of some Neumann-type boundary value problems for biharmonic equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2017. – № 218. – P. 1–17.
11. Sadybekov, M.A. On boundary value problems of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball / M.A. Sadybekov, A.A. Dukenbayeva // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2020. – P. 1–15.
12. Karachik, V.V. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // *Mathematica Slovaca*. – 2020. – Vol. 70, Iss. 2. – P. 329–342.
13. Karachik, V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // *Novi Sad Journal of Mathematics*. – 2020. – Vol. 50, no. 1. – P. 67–88.
14. Gazzola, F. Polyharmonic Boundary Value Problems / F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, S. Guido. – Berlin: Springer Verlag, 2010. – 423 p.
15. Kalmenov, T.Sh. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere / T.Sh. Kalmenov, B.D. Koshanov, M.Y. Nemchenko // *Complex variables and Elliptic equations*. – 2008. – Vol. 53, Iss. 2. – P. 177–183.
16. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика*. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.

Поступила в редакцию 23 февраля 2021 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 37–45*

DOI: 10.14529/mmph210206

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR A NONLOCAL POLYHARMONIC EQUATION

B.Kh. Turmetov¹, V.V. Karachik²

¹ *Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan;*

E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz

² *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

E-mail: karachik@susu.ru

The paper studies the solvability conditions for one class of boundary value problems for a nonlocal polyharmonic equation in the unit ball with Dirichlet conditions on the boundary generated by a certain orthogonal matrix. The existence and uniqueness of the solution to the posed Dirichlet problem are investigated and the Green's function is constructed.

First, some auxiliary statements are established: the invertibility of the Vandermonde matrix of the m^{th} roots of unity is investigated, then the eigenvectors and eigenvalues of the auxiliary matrix generated by the coefficients of the nonlocal operator of the problem are found, and then the inverse matrix to it is obtained. To prove the uniqueness of the solution to the problem, the commutativity of the boundary operators and the nonlocal operator of the problem is established, and it is shown that if a solution to the problem exists, then this solution is a polyharmonic function. Then the conditions for the uniqueness of the solution to the problem under consideration are obtained. Further, on the basis of the auxiliary statements obtained above, conditions for the existence of a solution to the nonlocal problem are found. The

solution to this problem is written out through the solution of auxiliary Dirichlet problems for the polyharmonic equation in the unit ball. Finally, using the well-known Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in the unit ball, the Green's function of the original nonlocal problem is constructed.

Keywords: nonlocal operator; Dirichlet problem; polyharmonic equation; solvability conditions; Green's function.

References

1. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* (Equations of Mathematical Biology). Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 1995, 301 p. (in Russ.).
2. Andreev A.A. Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument. *Differential Equations*, 2004, Vol. 40, no. 8, pp. 1192–1194. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f
3. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, Vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997
4. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of an elliptic Equation with Involution. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, no. 284, pp. 1–8.
5. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation. *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, Vol. 43, no. 3, pp. 1604–1625. DOI: 10.3906/mat-1901-71
6. Kirane M, Al-Salti N. Inverse Problems for a Nonlocal Wave Equation with an Involution Perturbation. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2016; Vol. 9, Iss. 3, pp. 1243–1251. DOI: 10.22436/jnsa.009.03.49
7. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary Value Problems. I. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, Vol. 155, Iss. 2, pp. 199–334. DOI: 10.1007/s10958-008-9218-9
8. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems. II. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, Vol. 166, Iss. 4, pp. 377–561. DOI: 10.1007/s10958-010-9873-5
9. Przeworska-Rolewicz D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument. *Commentationes Mathematicae*, 1974, Vol. 17, no. 2, pp. 451–457. DOI: 10.14708/cm.v17i2.5790
10. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Solvability of some Neumann-Type Boundary Value Problems for Biharmonic Equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2017, no. 218, pp. 1–17.
11. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On Boundary Value Problems of the Samarskii-Ionkin Type for the Laplace Operator in a Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020, pp. 1–15. DOI: 10.1080/17476933.2020.1828377
12. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Solvability of Some Nonlocal Boundary Value Problems for Biharmonic Equation. *Mathematica Slovaca*, 2020, Vol. 70, Iss. 2, pp. 329–342. DOI: 10.1515/ms-2017-0355
13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 50, no. 1, pp. 67–88. DOI: 10.30755/NSJOM.08942
14. Gazzola F., Grunau H.-Ch., Guido S. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Berlin, Springer Verlag, 2010, 423 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12245-3
15. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation for the Dirichlet Problem of the Polyharmonic Equation in a Sphere. *Complex variables and Elliptic equations*, 2008, Vol. 53, Iss. 2, pp. 177–183. DOI: 10.1080/17476930701671726
16. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirichlet Boundary Value Problem for the 3-Harmonic Equation in a Ball. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2012, Vol. 5, no. 4, pp. 527–546. (in Russ.).

Received February 23, 2021

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДВУХЗОННОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д.А. Турсунов, Г.А. Омаралиева

Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика

E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Исследуется асимптотическое поведение решения двухточечной краевой задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Существенные особенности задачи – присутствие малого параметра перед производной второго порядка от искомой функции, существование двухслойного пограничного слоя на левом конце отрезка при $x = 0$ и негладкость решения соответствующей невозмущенной краевой задачи. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения двухзонной двухточечной краевой задачи на единичном отрезке с любой степенью точности при стремлении малого параметра к нулю. Из-за второй и третьей особенности задачи так легко невозможно построить асимптотическое разложение решения по малому параметру известными асимптотическими методами. При решении поставленной задачи нами используются: методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, метод малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций и принцип максимума. Задача решается в два этапа: на первом этапе строится формальное разложение решения двухточечной краевой задачи, а на втором этапе приводится обоснование этого разложения, т. е. оценивается остаточный член разложения. На первом этапе формальное асимптотическое решение ищется в виде суммы трех решений: гладкое внешнее решение на всем отрезке; классическое погранслоное решение в окрестности $x = 0$, которое экспоненциально убывает вне погранслоя и промежуточное погранслоное решение при $x = 0$, которое степенным характером убывает вне погранслоя. Построенное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи является асимптотическим в смысле Эрдей.

Ключевые слова: асимптотическое решение; малый параметр; двухзонная задача; бисингулярная задача; двухточечная краевая задача; обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром.

Введение. Как нам известно, математическими моделями многих задач науки и техники являются обыкновенные дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старшей производной [1–3]. Например, тесно связанные между собой два процесса можно описать с помощью обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon y''_{\varepsilon}(x) + p(x)y'_{\varepsilon}(x) + q(x)y_{\varepsilon}(x) = f(x), \quad x \in (0,1).$$

Первый процесс – распределение тепла в движущейся среде, зависящее только от x и не зависящее от времени. Здесь ε описывает малую теплопроводность, а функция $p(x)$ – скорость среды. Второй процесс – случайное блуждание частицы на рассматриваемом промежутке, здесь $p(x)$ – средняя скорость движения, малая дисперсия обозначена через ε [3].

Проведенные исследования и увеличение числа публикаций по теории возмущений доказывают, что дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной или сингулярно (бисингулярно) возмущенные дифференциальные уравнения составляют самостоятельную область математики, так как они представляют большой прикладной интерес, [1–12].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon^4 y''_{\varepsilon}(x) + x^2 p(x)y'_{\varepsilon}(x) - \varepsilon q(x)y_{\varepsilon}(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$y_{\varepsilon}(0) = a, \quad y_{\varepsilon}(1) = b, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, a, b – известные постоянные, $0 < p(x), 0 < q(x), f(x)$ – бесконечно дифференцируемые известные функции при $x \in [0, 1]$, $0 < p(0) = p_0, 0 < q(0) = q_0$, а $y'_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε .

Нам известно, что при $\varepsilon > 0$ существует единственное решение двухточечной краевой задачи [3, с. 116]. От нас требуется построить полное асимптотическое приближение решения двухточечной краевой задачи с любой степенью точности при малом ε , т. е. когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Особенности задачи. Уравнение (1) называется возмущенным, так как в нём присутствует малый параметр ε . Для начала определим особенности возмущенной задачи (1), (2).

Соответствующее невозмущенное уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$x^2 p(x) \tilde{y}'(x) = f(x), \quad x \in (0, 1)$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, поэтому в общем случае решение этого уравнения не может удовлетворить двум краевым условиям (2), т.е. возмущение является сингулярным – первая особенность.

Попробуем построить внешнее асимптотическое решение двухточечной краевой задачи (1), (2), которое будем искать в виде степенного ряда по малому параметру, т. е. в следующем виде:

$$Z_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \dots + \varepsilon^n z_n(x) + \dots \quad (3)$$

Подставляя (3) в двухточечную краевую задачу (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z''_k(x) + x^2 p(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z'_k(x) - \varepsilon q(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ z_0(1) + \varepsilon z_1(1) + \varepsilon^2 z_2(1) + \dots + \varepsilon^n z_n(1) + \dots &= b \end{aligned}$$

или, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\begin{aligned} z''_{k-4}(x) + x^2 p(x) z'_k(x) - q(x) z_{k-1}(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \quad k \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ z_0(1) = 0, \quad z_k(1) = 0, \quad k \in N, \end{aligned}$$

где $z_s(x) \equiv 0, s < 0$.

При $k = 0$ имеем: $x^2 p(x) z'_0(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad z_0(1) = b$,

интегрируя, получаем: $z_0(x) = \int_1^x \frac{f(s)}{s^2 p(s)} ds + b \Rightarrow z_0(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow 0$;

при $k = 1$ имеем: $x^2 p(x) z'_1(x) = q(x) z_0(x), \quad x \in (0, 1), \quad z_1(1) = 0$,

интегрируя, получаем: $z_1(x) = \int_1^x \frac{q(s) z_0(s)}{s^2 p(s)} ds \Rightarrow z_1(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow 0$.

Методом математической индукции можно доказать, что

$$z_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow 0.$$

Поэтому ряд (3) представим в виде:

$$Z_\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \tilde{z}_0(x) + \frac{1}{x} \varepsilon \tilde{z}_1(x) + \frac{1}{x} \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2 \tilde{z}_2(x) + \dots + \frac{1}{x} \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^n \tilde{z}_n(x) + \dots, \quad (4)$$

где $\tilde{z}_0(1) = b, \tilde{z}_k(1) = 0, k \in N, \tilde{z}_m \in C^\infty(0, 1), m \in N_0$.

Заметим, что с ростом номера n растет и особенность в точке $x = 0$. Ряд (4) теряет свойство асимптотического ряда, когда $x \in (0, \varepsilon]$. Эта особенность является второй.

Таким образом, рассматриваемая задача является бисингулярной [3].

Еще одна дополнительная особенность заключается в том, что в окрестности особой точки $x = 0$ существуют две погранслоиные функции: одна из них экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а вторая степенным образом убывает вне пограничного слоя.

Основной результат. Асимптотическое приближенное решение двухточечной краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(x) + W_\varepsilon(t) + \Pi_\mu(\tau), \quad (5)$$

где $V_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x)$, $W_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(t)$, $\Pi_\mu(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(\tau)$, $x = \varepsilon t$, $x = \mu^3 \tau$, $\sqrt{\varepsilon} = \mu$.

Формально подставляя (5) в (1), имеем:

$$\varepsilon^4 V''_\varepsilon(x) + x^2 p(x) V'_\varepsilon(x) - \varepsilon q(x) V_\varepsilon(x) = f(x) - H_\varepsilon(x), \quad x \in (0,1), \quad (6)$$

$$\varepsilon W''_\varepsilon(t) + t^2 p(\varepsilon t) W'_\varepsilon(t) - q(\varepsilon t) W_\varepsilon(t) = H_\varepsilon(x), \quad t \in (0, \varepsilon^{-1}), \quad (7)$$

$$\Pi''_\mu(\tau) + \mu \tau^2 p(\mu^3 \tau) \Pi'_\mu(\tau) - q(\mu^3 \tau) \Pi_\mu(\tau) = 0, \quad \tau \in (0, \mu^{-3}), \quad (8)$$

где $H_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (h_{k,0} + h_{k,1}x)$, $h_{k,0}, h_{k,1}$ – пока неизвестные постоянные.

Подставляя (5) в граничные условия (2), получаем:

$$a = V_\varepsilon(0) + W_\varepsilon(0) + \Pi_\mu(0), \quad b = V_\varepsilon(1) + W_\varepsilon(\varepsilon^{-1}) + \Pi_\mu(\mu^{-3}),$$

отсюда запишем

$$V_\varepsilon(1) = b, \quad (9)$$

$$W_\varepsilon(\varepsilon^{-1}) = 0, \quad (10)$$

$$\Pi_\mu(0) = a - V_{\mu^2}(0) - W_{\mu^2}(0), \quad \Pi_\mu(\mu^{-3}) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0. \quad (11)$$

Из (6) и (9) при $k = 0$ имеем:

$$x^2 p(x) v'_0(x) = f(x) - (h_{0,0} + h_{0,1}x), \quad x \in (0,1), \quad v_0(1) = b,$$

интегрируя, получаем: $v_0(x) = \int_1^x \frac{f(s) - (h_{0,0} + h_{0,1}s)}{s^2 p(s)} ds + b$.

По условию задачи $f \in C^\infty[0,1] \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Если $h_{0,0} = f(0)$, $h_{0,1} = f'(0)$, то $v_0 \in C^\infty[0,1]$.

Из (6) и (9) при $k = 1$ имеем:

$$x^2 p(x) v'_1(x) = q(x) v_0(x) - (h_{1,0} + h_{1,1}x), \quad x \in (0,1), \quad v_1(1) = 0,$$

интегрируя, получаем: $v_1(x) = \int_1^x \frac{q(s) v_0(s) - (h_{1,0} + h_{1,1}s)}{s^2 p(s)} ds$.

Пусть $h_{1,0} = q(0)v_0(0)$, $h_{1,1} = (q'(x)v_0(x) + q(x)v'_0(x))|_{x=0}$, тогда $v_1 \in C^\infty[0,1]$.

Аналогично определяя $v_k(x)$, $k = 2, 3, \dots$ из соотношения

$$v''_{k-4}(x) + x^2 p(x) v'_k(x) - q(x) v_{k-1}(x) = -(h_{k,0} + h_{k,1}x), \quad x \in (0,1),$$

получаем

$$v_k(x) = \int_1^x \frac{q(s) v_{k-1}(s) - v''_{k-4}(s) - (h_{k,0} + h_{k,1}s)}{s^2 p(s)} ds,$$

и здесь выбираем $h_{k,0}, h_{k,1}$, $k = 2, 3, \dots$ так чтобы $v_k \in C^\infty[0,1]$, $k = 2, 3, \dots$, т.е.

$$h_{k,0} = q(0)v_{k-1}(0) - v''_{k-4}(0), \quad h_{k,1} = q'(0)v_{k-1}(0) + q(0)v'_{k-1}(0) - v'''_{k-4}(0).$$

Уравнение (7) запишем в виде

$$t^2 p(\varepsilon t) w'_k(t) - q(\varepsilon t) w_k(t) = h_{k,0} + h_{k,1} \varepsilon t - w''_{k-1}(t), \quad t \in (0, \varepsilon^{-1}).$$

Учитывая условие (10), при $k = 0$ имеем

$$w'_0(t) - \frac{q(\varepsilon t)}{t^2 p(\varepsilon t)} w_0(t) = \frac{h_{0,0} + h_{0,1} \varepsilon t}{t^2 p(\varepsilon t)}, \quad t \in (0, \varepsilon^{-1}), \quad w_0(\varepsilon^{-1}) = 0,$$

интегрируя это уравнение, получаем:

$$w_0(t) = e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{h_{0,0} + h_{0,1} \varepsilon \varphi}{\varphi^2 p(\varepsilon \varphi)} e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi} \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} d\varphi.$$

Докажем, что $w_0(t)$ ограничена при $t \rightarrow 0$.

$$w_0(t) = e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{h_{0,0} + h_{0,1} \varepsilon \varphi}{\varphi^2 p(\varepsilon \varphi)} e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi} \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} d\varphi = -e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{h_{0,0} + h_{0,1} \varepsilon \varphi}{q(\varepsilon \varphi)} d \left(e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi} \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \right) =$$

$$= -\frac{h_{0,0} + h_{0,1} \varepsilon t}{q(\varepsilon t)} + e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \frac{h_{0,0} + h_{0,1}}{q(1)} + e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \int_{\varepsilon^{-1}}^t \left(\frac{h_{0,0} + h_{0,1} \varepsilon \varphi}{q(\varepsilon \varphi)} \right)' e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi} \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} d\varphi,$$

$$w_0(0) = -\frac{h_{0,0}}{q(0)} \text{ и } w_0(\varepsilon^{-1}) = 0, \text{ а также } w_0 \in C^\infty[0, \varepsilon^{-1}].$$

При $k \in N$ имеем:

$$w'_k(t) - \frac{q(\varepsilon t)}{t^2 p(\varepsilon t)} w_k(t) = \frac{h_{k,0} + h_{k,1} \varepsilon t - w''_{k-1}(t)}{t^2 p(\varepsilon t)}, \quad t \in (0, \varepsilon^{-1}), \quad w_k(\varepsilon^{-1}) = 0,$$

интегрируя дифференциальное уравнение первого порядка с краевым условием, получаем:

$$w_k(t) = e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} \int_{\varepsilon^{-1}}^t \frac{h_{k,0} + h_{k,1} \varepsilon \varphi - w''_{k-1}(\varphi)}{\varphi^2 p(\varepsilon \varphi)} e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi} \frac{q(\varepsilon s)}{s^2 p(\varepsilon s)} ds} d\varphi, \quad k \in N.$$

Отсюда следует, что $w_k(0) = -\frac{h_{k,0} - w''_{k-1}(0)}{q(0)}$, $w_k(\varepsilon^{-1}) = 0$ и $w_k \in C^\infty[0, \varepsilon^{-1}]$.

Рассмотрим теперь задачу (8), (11). Задачу (8), (11) запишем в виде

$$\pi''_0(\tau) - q_0 \pi_0(\tau) = 0, \quad \tau \in (0, \mu^{-3}), \quad (12)$$

$$\pi''_k(\tau) - q_0 \pi_k(\tau) = \Phi_k(\tau, \mu^3 \tau, \pi_{k-1}, \pi'_{k-1}, \dots, \pi_0, \pi'_0), \quad \tau \in (0, \mu^{-3}), \quad k \in N, \quad (13)$$

$$\pi_0(0) = a - v_0(0) - w_0(0), \quad \pi_0(\mu^{-3}) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$\pi_{2k}(0) = -v_k(0) - w_k(0), \quad \pi_{2k}(\mu^{-3}) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad k \in N, \quad (15)$$

$$\pi_{2k-1}(0) = 0, \quad \pi_{2k-1}(\mu^{-3}) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad k \in N,$$

где функция $\Phi_k(\tau, \mu^3 \tau, \pi_{k-1}, \pi'_{k-1}, \dots, \pi_0, \pi'_0)$ линейно зависит от переменных $\pi_{k-1}, \pi'_{k-1}, \dots, \pi_0, \pi'_0$ и полиномиально зависит от τ и $\mu^3 \tau$.

Решение задачи (12), (14) представимо в виде

$$\pi_0(\tau) = (a - v_0(0) - w_0(0)) e^{-\sqrt{q_0} \tau},$$

Решения задач (13), (15) тоже существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \infty$, ($\mu \rightarrow 0$):

$$\pi_{2k}(\tau) = -(v_k(0) + w_k(0)) e^{-\sqrt{q_0} \tau} + P_k(\tau, \mu \tau) e^{-\sqrt{q_0} \tau},$$

$$\pi_{2k-1}(\tau) = P_{2k-1}(\tau, \mu \tau) e^{-\sqrt{q_0} \tau},$$

где $P_s(\tau, \mu \tau)$ – полиномы, при $\tau = 0$: $P_s(0, 0) \equiv 0$.

Таким образом, полностью определены функции $V_\varepsilon(x)$, $W_\varepsilon(t)$, $\Pi_\mu(\tau)$. Оценим остаточный член асимптотического приближения (5). Пусть

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^n \varepsilon^k w_k(t) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(\tau) + R_{n,\varepsilon}(x), \quad (16)$$

тогда подставляя (16) в задачу (1)–(2), получаем

$$\varepsilon^4 R''_{n,\varepsilon}(x) + x^2 p(x) R'_{n,\varepsilon}(x) - \varepsilon q(x) R_{n,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{n+1/2} \Psi, \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$R_{n,\varepsilon}(0) = 0, \quad R_{n,\varepsilon}(1) = O(e^{-\sqrt{q(0)}/\mu^3}), \quad \mu \rightarrow 0 \quad (2)$$

где $R_{n,\varepsilon}(x)$ – остаточный член ряда,

$$\Psi = \mu q(x) v_n(x) + \mu v''_{n-3}(x) + \mu^3 v''_{n-2}(x) + \mu^5 v''_{n-1}(x) + \mu^7 v''_n(x) + \mu w''_n(t) + \\ + \Phi_{2n+1}(\tau, \mu^3 \tau, \pi_{2n}, \pi'_{2n}, \dots, \pi_0, \pi'_0).$$

Для задачи (1)–(2), применяя теорему 26.2 [3, с. 116], получаем оценку для остаточного члена:

$$|R_{n,\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon^{n-1/2} c, \quad 0 < c - \text{const.}$$

Вывод. Нами построено полное асимптотическое приближение решения по малому параметру двухточечной краевой задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Исследованная задача отличается от ранее исследованных задач тем, что в окрестности левой граничной точки $x = 0$ существует двухслойный пограничный слой, также решение соответствующей невозмущенной задачи не является гладкой функцией. Поэтому одним классическим методом пограничных функций невозможно решить задачу. Сначала формальное асимптотическое приближение исследуемой задачи построили обобщенным и классическим методами пограничных функций, затем с помощью принципа максимума получили оценку для остаточной функции построенного ряда. Полученный ряд является асимптотическим в смысле Эрдей.

Литература

1. Chen, H. Discussion on the applicability of static asymptotic solutions in dynamic fracture / H. Chen, G. Zou // Journal of Harbin Engineering University. – 2020. – Vol. 41, no. 6. – P. 824–831.
2. Yang R., Yang X.-G. Asymptotic stability of 3D Navier–Stokes equations with damping / R. Yang, X.-G. Yang // Applied Mathematics Letters. – 2021. – Vol. 116. – P. 107012.
3. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – Москва: Физматлит, 2009. – 248 с.
4. Никишкин, В.А. Об асимптотике решения задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка в слое / В.А. Никишкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1249–1255.
5. Lian, W. A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation / W. Lian, Z. Bai // Applied Mathematics Letters. – 2021. – Vol. 115. – P. 106965
6. Benameur, J. Asymptotic behavior of critical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier space / J. Benameur, S.B. Abdallah // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – Vol. 497, no 1. – P. 124873
7. Rehak P. Asymptotics of perturbed discrete Euler equations in the critical case / P. Rehak // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – Vol. 496, no. 2. – P. 124825
8. Liu, L.-B. An efficient adaptive grid method for a system of singularly perturbed convection-diffusion problems with Robin boundary conditions / L.-B. Liu, Y. Liang, X. Bao, H. Fang // Advances in Difference Equations. – 2021. – Vol. 2021, no. 1. – Article number: 6 (2021).
9. Lian, W. A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation / W. Lian, Z. Bai // Applied Mathematics Letters. – 2021. – Vol. 115. – P. 106965.
10. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем / Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 3. – С. 70–78.
11. Tursunov, D.A. The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem / D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 3. – P. 542–546.
12. Nayfeh, А.Н. Introduction to Perturbation Techniques / А.Н. Nayfeh. – A Wiley-Interscience Publication. New York etc.: John Wiley & Sons. – 519 p.

Поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO A TWO-BAND TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM

D.A. Tursunov, G.A. Omaraliev

Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

E-mail: dtursunov@oshsu.kg

The article investigates the asymptotic behavior of the solution of a two-point boundary value problem on an interval for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative. The essential features of the problem are the presence of a small parameter in front of the second-order derivative of the desired function, the existence of a two-dimensional boundary layer at the left end of the segment at $x = 0$, and the non-smoothness of the solution to the corresponding unperturbed boundary value problem. It is required to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to a two-zone two-point boundary value problem on a unit interval, with any degree of accuracy, as the small parameter tends to zero. Due to the second and third features of the problem, it is not easy to construct an asymptotic solution expansion with respect to the small parameter using the known asymptotic methods. When solving the problem, the following methods are used: methods of integration of ordinary differential equations; the method of a small parameter; the classical method of boundary functions; and the generalized method of boundary functions and the maximum principle. The problem is solved in two stages: in the first stage, a formal expansion of the solution to the two-point boundary value problem is constructed, and in the second stage, the justification of this expansion is given, i.e. the remainder term of the expansion is estimated. In the first stage, a formal asymptotic solution is sought in the form of the sum of three solutions: a smooth outer solution on the entire segment; classical boundary layer solution in the vicinity of $x = 0$, which exponentially decreases outside the boundary layer; and an intermediate boundary layer solution at $x = 0$, which decreases in power mode outside the boundary layer. The constructed asymptotic expansion of the solution to the two-point boundary value problem is asymptotic in the sense of Erdei.

Keywords: asymptotic solution; small parameter, two-band problem; bisingular problem; two-point boundary value problem; ordinary differential equation with a small parameter.

References

1. Chen H., Zou G. Discussion on the Applicability of Static Asymptotic Solutions in Dynamic Fracture. *Journal of Harbin Engineering University*, 2020, Vol. 41, no. 6, pp. 824–831. DOI: 10.11990/jheu.201903081
2. Yang R., Yang X.-G. Asymptotic Stability of 3D Navier–Stokes Equations with Damping. *Applied Mathematics Letters*, 2021, Vol. 116, p. 107012. DOI: 10.1016/j.aml.2020.107012
3. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic Methods in Analysis). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. (in Russ.).
4. Nikishkin V.A. On the Asymptotics of the Solution of the Dirichlet Problem for a Fourth-Order Equation in a Layer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, Vol. 54, no. 8, pp. 1214–1220. DOI: 10.1134/S0965542514080107
5. Lian W., Bai Z. A Class of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problem with Singular Perturbation. *Applied Mathematics Letters*, 2021, Vol. 115, p. 106965. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106965
6. Benameur J., Abdallah S.B. Asymptotic Behavior of Critical Dissipative Quasi-geostrophic Equation in Fourier Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, Vol. 497, no. 1, p. 124873. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124873
7. Rehak P. Asymptotics of Perturbed Discrete Euler Equations in the Critical Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, Vol. 496, no. 2, p. 124825. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124825

8. Liu L.-B., Liang Y., Bao X., Fang, H. An Efficient Adaptive Grid Method for a System of Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems with Robin Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, 2021, Vol. 2021, no. 1, Article number: 6 (2021). DOI: 10.1186/s13662-020-03166-y
9. Lian, W., Bai, Z. A Class of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problem with Singular Perturbation. *Applied Mathematics Letters*, 2021, Vol. 115, p. 106965. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106965
10. Tursunov D.A. Asymptotic Solution of Linear Bisingular Problems With Additional Boundary Layer. *Russian Mathematics*, 2018, Vol. 62, no. 3, pp. 60–67. DOI: 10.3103/S1066369X18030088
11. Tursunov D.A. The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 38, no. 3, pp. 542–546. DOI: 10.1134/S1995080217030258
12. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. A Wiley-Interscience Publication. New York etc.: John Wiley & Sons, 519 p.

Received February 4, 2021

EVOLUTION OF PLASTIC DEFORMATION AND TEMPERATURE AT THE REFLECTION OF A SHOCK PULSE FROM SUPERFICIES WITH A NANORELIEF OR WITH SUPPLIED NANOPARTICLES

A.A. Ebel, A.E. Mayer

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: ebelaa@susu.ru, mayerae@susu.ru

Intense irradiation and high-speed collision of metals results in the formation and dissemination of shock compression pulses in them. The recent development of experimental technology using high-power subpicosecond laser pulses makes it possible to obtain shock pulses of the picosecond range. A molecular dynamics simulation of high-speed collisions for aluminium samples is conducted. The presence of a nanorelief or precipitated nanoparticles on the back superfices of the sample may essentially enhance the rear splitting threshold. The cooperation of a shock wave with a nanorelief or precipitated nanoparticles results in strong plastic deformation. Consequently, part of the compression pulse energy is spent on plastic deformation, which prevents spall destruction. The effect of increasing the threshold can reach hundreds of meters per second in terms of collision speed and tens of gigapascals in amplitude of the incident shock wave. The distribution of shear strain and temperature in the sample is considered. It is shown that the maximum degree of deformation and maximum heating are observed in those parts of the nanorelief, for which the greatest change in shape is observed. The maximum temperature reaches the melting point, but no obvious traces of melting are found, which may be related to the speed of the processes.

Keywords: high speed impact; plastic deformation; molecular dynamics; nanorelief.

Introduction

High-speed collision [1, 2] and intense irradiation [3, 4] of metals results in the formation and dissemination of shock compression pulses in them. The recent development of experimental technology using high-power sub-picosecond laser pulses makes it possible to obtain shock pulses of the picosecond range [2, 4, 5]. The method of molecular dynamics (MD) is often used in the theoretical study of the phenomenon of broken fragments. At the same time the study of the behavior of the nanometric zones of metals in the conditions of the model train [6–10] and the direct modeling of the formation and the elimination of shock waves triggered by a piston or a hammer [6, 11–16]. Despite the fact that only relatively small system volumes and process times can be considered due to technical restrictions, MD modeling offers several advantages. It offers the possibility of automatically taking into account the evolution of the structure of the material during high speed forming, at least qualitatively. The accuracy of the quantitative description is determined by the quality of the interatomic potentials used.

Practically important is the question of the stability of the material to rear fragmentation and the intensity of the threshold of the incident shock wave or the speed of impact of the threshold at which fragmentation will occur. The fragmentation threshold is determined by two factors: (i) the resistance of the material to tensile stresses; (ii) the relationship between the amplitude of the incident compression pulse and the amplitude of the expansion pulse reflected from the free superficy. The tensile strength of metals was carefully studied by modeling [6–9, 11–16], including the effect of [6–8], cavities [9, 12, 16], grain boundaries [12–14], twins [15] inclusions. Also noteworthy is the problem of reducing the amplitude of the tensile wave that forms on the free superficy.

If the free superficy is not flat and has protrusions or grooves, the uniaxial deformed state performed in a plane shock wave will be replaced by a more complex deformed state when interacting with these relief elements. For example, when a shock wave enters cylindrical protrusions on the rear superficy of the target, a discharge on the lateral superfices of the cylinders leads to a transition to a state of uniaxial tension. As a result, compressive and tensile stresses are limited by the dynamic yield strength. The process of interaction of the incident shock wave with the protrusions leads to intense plastic de-

plastic deformation in the superfcy layer, as a result of which part of the energy of the compression pulse is scattered. This should lead to a decrease in the amplitude of the expansion wave and, consequently, to an increase in the fragmentation threshold. A significant effect should be expected when the size of the reliefs or other elements in the relief are comparable to the width of the compression pulse. If the width of the compression pulse is much larger than the height of the protrusions or if the shock wave is strong enough, the allowed plastic deformation of the protrusions becomes insufficient to effectively suppress the reflected wave. The presence of protrusions in this case can lead to the development of Richtmyer–Mashkov instability and to release [17–19] jets, as in the case of liquids. Work is underway on modeling MD ejection stream from nanostructured metal superficite, initiated by sufficiently strong shock waves [18, 19]. At the same time, there are no MD studies regarding the effect of dorsal superfica relief on the scaling threshold. Also of interest is the investigation with MD with a similar effect in the presence of a layer of precipitated nanoparticles on a flat superficy. This article deals with the analysis of this effect. The development of the plastic deformation and temperature is considered after the reflection of an impact compression pulse from the superficy with nanorelief and with deposited nanoparticles.

1. Problem Statement

The molecular dynamic systems of samples from single-crystalline aluminum are considered. The direction of the x , y and z axes is chosen by the crystallographic directions [100], [010], and [001]. After initial thermalization for 2 ps in a thermostat at 300 K and in a barostat at zero pressure, the flat, superficial layer of thickness H (15 or 30 grating periods) received an additional velocity v , which along the x -axis was normal to the boundary with the x was directed to rest of the system (Fig. 1) [20]. The lateral dimensions of the system were 30 lattice periods. The additional velocity was added to the thermal velocity of each atom of this flat layer that played the role of a drummer. Either a cylindrical projection with a height of l and a diameter d or precipitated particles with a common layer thickness of l and different diameters d were set on the rear superficy of the target. The height l of the cylinder or the thickness of the layer of particles varied from 0, which corresponds to a flat back ultrafast, up to 60 lattice parameters. The diameter d of the cylindrical protrusion or deposited nanoparticles also varied from 14 to 30 lattice periods. Note that we compared the strength of the samples with the same total thickness L , which includes the height of the protrusion or of the deposited particles.

Molecular dynamics modeling was carried out using LAMMPS [21]. The calculations were made for aluminum using the interatomic potential [22]. Both potentials are based on the method of immersed atoms. The atomic configurations were visualized using the OVITO [23] program. The fault structure was visualized on the basis of a central symmetry parameter [24], which is zero for an ideal fcc network, and the difference of zero shows the degree of defect; the common neighbor analysis algorithm was also used [25, 26].

To reach a state of thermodynamic equilibrium before the collision started, a barostat and a Nose-Hoover thermostat were used. After establishing the impact velocity, the calculations were made within the NVE set (the time energy E , the volume of the system V and the number of particles N are constant). Periodic boundary conditions have been specified along all axes. The calculation domain was chosen to be significantly larger than the size of the molecular dynamics system along the direction of the collision coinciding with the x axis. This ensured compliance with the conditions of the free superficy at the attacker's border and the rear superficy of the target. A finished thickness beater generated a compression pulse composed of a shock wave followed by an unloading wave. Maximum compressive stresses were determined by the impact velocity v . In the case of the presence of protrusions or deposited nanoparticles on the back superficy ($l > 0$), this is equivalent to a sample with periodically located protrusions [20, 27–29].

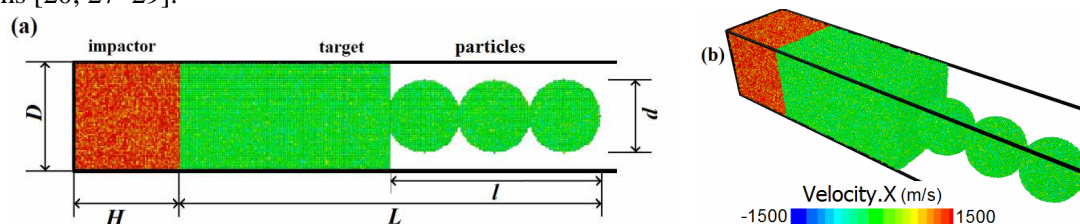


Fig. 1. Configuration of the MD system at the beginning of the collision: a) the schematic model and b) the general view, the color shows the x component of the atom velocity [20]

2. Discussion of Results

Plastic deformation, as in the macroscopic case, is defined as irreversible deformation of the material after removal of the external load. The magnitude of the deformation is calculated through the derivatives with respect to the coordinates of the displacement of atoms from the initial state. In the considered problems, the removal of the load means the departure of the wave from the region near the back superficy. Thus, irreversibility is the main feature that allows us to distinguish plastic deformation, including in molecular dynamics calculations. An indirect sign that the deformation is plastic is the magnitude of shear deformation: shear deformations greater than 0,1–0,2 correspond to the plastic mode.

The magnitude of plastic deformation upon reflection of a shock pulse from a nanorelief superficy is analyzed. In Fig. 2 shows, in the case of a flat boundary, the distribution of shear strain calculated from the displacement of atoms [30]. Similarly calculated and shown in Fig. 3 distribution of shear strain in the case of a cylindrical protrusion and deposited nanoparticles. The magnitude of the deformation reaches one or more, which is substantially more than the possible elastic deformations. From this it follows that the presented distributions correspond precisely to plastic deformation. In this case, the zones of plastic deformation correspond to those parts of the nanorelief that have undergone the greatest change in shape when exposed to a shock wave. Also, the deformation corresponds to the region of the sample in which a spallation is formed in the case of a flat superficy (Fig. 2) and an incomplete spallation in the case of a nanorelief at a high impact velocity (Fig. 3).

Plastic deformation is accompanied by heating of the material. The temperature distributions calculated from the average kinetic energy of a disordered motion are shown in Fig. 4, 5 for the same time points as the deformation in Fig. 2, 3. The greatest temperature increase is observed in the most deformed parts of the nanorelief and in the spall formation zone. The maximum temperature reaches the melting point, but no obvious traces of melting are found, which may be due to the speed of the processes. At later stages, thermal conductivity has a significant effect on the temperature distribution in the sample.

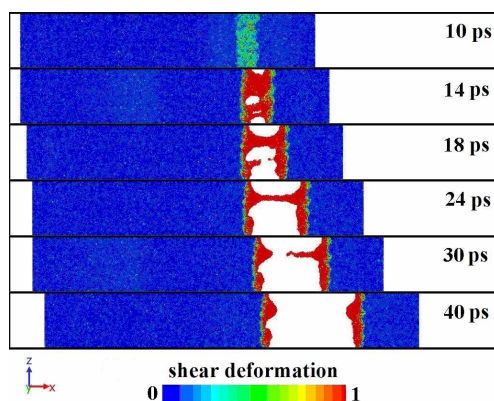


Fig. 2. Shear deformation in the central section of an aluminum target with a flat rear superficy; when the impactor speed is 1500 m/s and the total target thickness is 120 lattice parameters (48,6 nm)

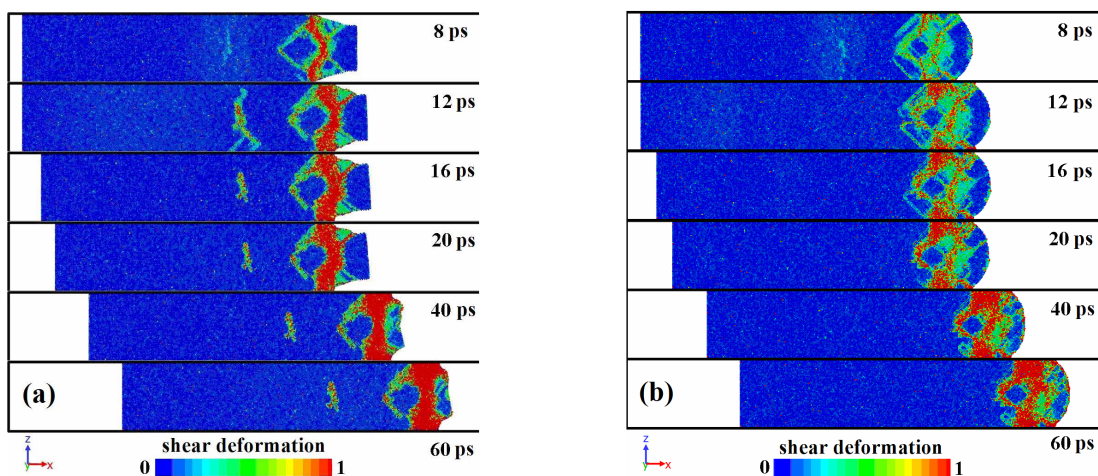


Fig. 3. Shear deformation in the central section of an aluminum target with a hammer speed of 1500 m/s and a total target thickness of 120 lattice parameters (48,6 nm): a) with cylindrical projections with $H = 1$; b) with deposited particles with $H = 1$ (diameter of 30 lattice parameters (12,15 nm), one layer)

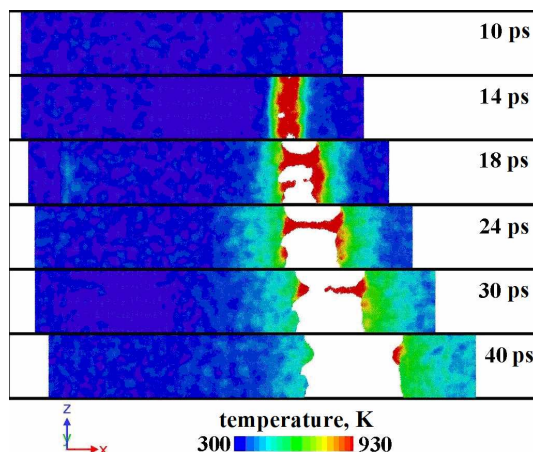


Fig. 4. The temperature in the central section of the aluminum target with a flat rear superficy; when the impactor speed is 1500 m/s and the total target thickness is 120 lattice parameters (48,6 nm)

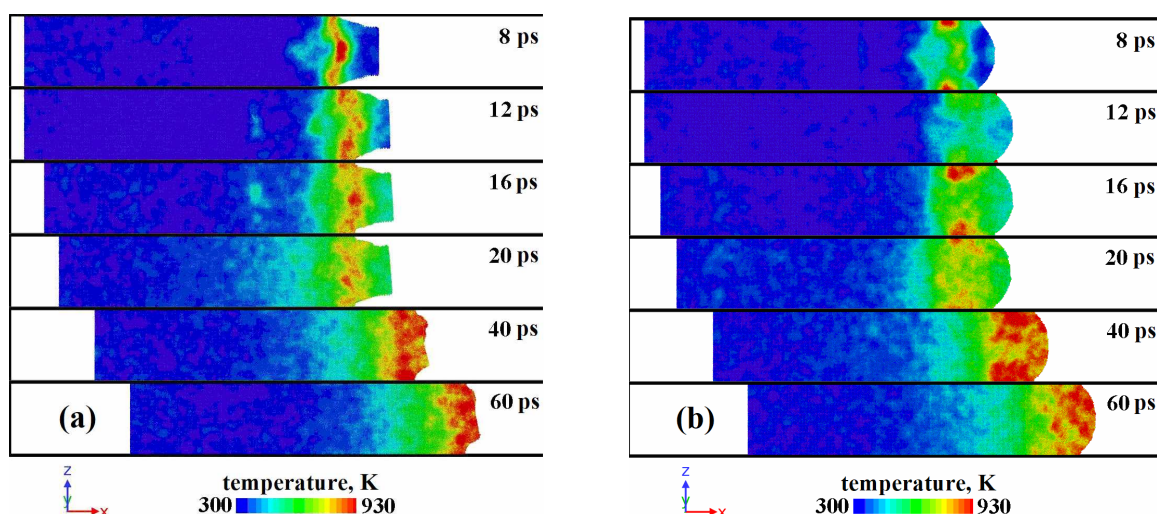


Fig. 5. The temperature in the central section of the aluminum target with a hammer speed of 1500 m/s and a total target thickness of 120 lattice parameters (48,6 nm): a) with cylindrical projections with $l/H = 1$; b) with deposited particles with $l/H = 1$ (diameter of 30 lattice parameters (12,15 nm), one layer)

Conclusion

A study of the molecular dynamics of high speed collisions for aluminum samples shows that the presence of cylindrical protuberances or nanoparticles deposited on the rear superficy can considerably increase the rear fractionation threshold. Note that the deposited nanoparticles make the free superficy more resistant to burst fracture initiated by the reflected compression pulse. The reason is that when a shock wave arrives at the rear of the superficy with protrusions, the discharge of the protrusions on the lateral superficy occurs, leading to severe plastic deformation. Consequently, part of the energy of the compression pulse is devoted to plastic deformation, which limits the amplitude of the stretching pulse and suppresses the destruction of the substance during tensile stresses. The effect of increasing the threshold can reach hundreds of meters per second in terms of collision speed and tens of gigapascals in amplitude of the incident shock wave. An analysis of the distribution of shear deformations and temperature in the sample shows that the maximum degree of deformation and maximum heating are observed in those parts of the nanorelief for which the greatest change in shape is observed. The maximum temperature reaches the melting point, but no obvious traces of melting were found, which may be related to the speed of the processes.

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (state assignment for researches by CSU № 075-00992-21-00) and by Act No. 211 from 16 March of 2013 of the Government of the Russian Federation (Contract No. 02.A03.21.0011).

References

1. Kanel G.I., Fortov V.E., Razorenov S.V. Shock Waves in Condensed-State Physics. *Physics Uspekhi*, 2007, Vol. 50, pp. 771–791. DOI: 10.1070/PU2007v050n08ABEH006327

2. Zaretsky E.B., Kanel G.I. Yield Stress, Polymorphic Transformation, and Spall Fracture of Shock-Loaded Iron in Various Structural States and at Various Temperatures. *Journal of Applied Physics*, 2015, Vol. 117, Iss. 19, p. 195901. DOI: 10.1063/1.4921356
3. Ashitkov S.I., Komarov P.S., Struleva E.V., Agranat M.B., Kanel G.I. Mechanical and Optical Properties of Vanadium under Shock Picosecond Loads. *JETP Letters*, 2015, Vol. 101, pp. 276–281. DOI: 10.1134/S0021364015040049
4. Gnyusov S.F., Rotshtein V.P., Mayer A.E., Rostov V.V., Gunin A.V., Khishchenko K.V., Levashov P.R. Simulation and Experimental Investigation of the Spall Fracture of 304L Stainless Steel Irradiated by a Nanosecond Relativistic High-Current Electron Beam. *International Journal of Fracture*, 2016, Vol. 199, Iss. 1, pp. 59–70. DOI: 10.1007/s10704-016-0088-8
5. Yuan F., Chen L., Jiang P., Wu X. Twin Boundary Spacing Effects on Shock Response and Spall Behaviors of Hierarchically Nanotwinned FCC Metals. *Journal of Applied Physics*, 2014, Vol. 115, Iss. 6, p. 063509. DOI: 10.1063/1.4865738
6. Kuksin A., Norman G., Stegailov V., Yanilkin A., Zhilyaev P. Dynamic Fracture Kinetics, Influence of Temperature and Microstructure in the Atomistic Model of Aluminum. *International Journal of Fracture*, 2010, Vol. 162, Iss. 1, pp. 127–136. DOI: 10.1007/s10704-009-9424-6
7. Pogorelko V.V., Mayer A.E. Influence of Copper Inclusions on the Strength of Aluminum Matrix at High-Rate Tension. *Materials Science and Engineering: A*, 2015, Vol. 642, pp. 351–359. DOI: 10.1016/j.msea.2015.07.009
8. Pogorelko V.V., Mayer A.E. Influence of Titanium and Magnesium Nanoinclusions on the Strength of Aluminum at High-rate Tension: Molecular Dynamics Simulations. *Materials Science and Engineering: A*, 2016, Vol. 662, pp. 227–240. DOI: 10.1016/j.msea.2016.03.053
9. Krasnikov V.S., Mayer A.E. Plasticity Driven Growth of Nanovoids and Strength of Aluminum at High Rate Tension: Molecular Dynamics Simulations and Continuum Modeling. *International Journal of Plasticity*, 2015, Vol. 74, pp. 75–91. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.06.007
10. Kuksin A.Yu., Stegailov V.V., Yanilkin A.V. Atomistic Simulation of Plasticity and Fracture of Nanocrystalline Copper under High-Rate Tension. *Physics Solid State*, 2008, Vol. 50, pp. 2069–2075. DOI: 10.1134/S1063783408110115
11. Stegailov V.V., Yanilkin A.V. Structural Transformations in Single-Crystal Iron During Shock-Wave Compression and Tension: Molecular Dynamics Simulation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2007, Vol. 104, Iss. 6, pp. 928–935. DOI: 10.1134/s1063776107060106
12. Huang L., Han W.Z., An Q., Goddard III W.A., Luo S.N. Shock-Induced Consolidation and Spallation of Cu Nanopowders. *Journal of Applied Physics*, 2012, Vol. 111, Iss. 1, p. 113508. DOI: 10.1063/1.3675174
13. Mackenchery K., Valisetty R.R., Namburu R.R., Stukowski A., Rajendran A.M., Dongare A.M. Dislocation Evolution and Peak Spall Strengths in Single Crystal and Nanocrystalline Cu. *Journal of Applied Physics*, 2016, Vol. 119, Iss. 4, p. 044301. DOI: 10.1063/1.4939867
14. Luo S.N., Germann T.C., Desai T.G., Tonks D.L., An Q. Anisotropic Shock Response of Columnar Nanocrystalline Cu. *Journal of Applied Physics*, 2010, Vol. 107, Iss. 12, p. 123507. DOI: 10.1063/1.3437654
15. Yuan F., Chen L., Jiang P., Wu X. Twin Boundary Spacing Effects on Shock Response and Spall Behaviors of Hierarchically Nanotwinned FCC Metals. *Journal of Applied Physics*, 2014, Vol. 115, Iss. 6, p. 063509. DOI: 10.1063/1.4865738
16. Shao J.L., Wang P., He A., Duan S.Q., Qin C.S. Influence of Voids or He Bubbles on the Spall Damage in Single Crystal Al. *Modelling and Simulation in Materials Science Engineering*, 2014, Vol. 22, no. 2, p. 025012. DOI: 10.1088/0965-0393/22/2/025012
17. Chen Y., Hu H., Tang T., Ren G., Li Q., Wang R., Buttler W.T. Experimental Study of Ejecta from Shock Melted Lead. *Journal of Applied Physics*, 2012, Vol. 111, Iss. 5, p. 053509. DOI: 10.1063/1.3692570
18. Shao J.L., Wang P., He A., Duan S.Q., Qin C.S. Atomistic Simulations of Shock-Induced Microjet from a Grooved Aluminium Surface. *Journal of Applied Physics*, 2013, Vol. 113, Iss. 15, p. 153501. DOI: 10.1063/1.4801800
19. Ren G., Chen Y., Tang T., Li Q. Ejecta Production from Shocked Pb Surface via Molecular Dynamics. *Journal of Applied Physics*, 2014, Vol. 116, Iss. 13, pp. 133507. DOI: 10.1063/1.4896902

20. Ebel A.A., Mayer A.E. Influence of Deposited Nanoparticles on the Spall Strength of Metals under the Action of Picosecond Pulses of Shock Compression. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, Vol. 946, P. 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/946/1/012045
21. Plimpton S. Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics. *Journal of Computational Physics*, 1995, Vol. 117, Iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1006/jcph.1995.1039
22. Mishin Y., Farkas D., Mehl M.J., Papaconstantopoulos D.A. Interatomic Potentials for Monoatomic Metals from Experimental Data and *ab initio* calculations. *Physical Review B*, 1999, Vol. 59, Iss. 5, p. 3393–3407.
23. Stukowski A. Visualization and Analysis of Atomistic Simulation Data with OVITO—the Open Visualization Tool. *Modelling and Simulation in Materials Science Engineering*, 2010, Vol. 18, Iss. 1, p. 015012. DOI: 10.1088/0965-0393/18/1/015012
24. Kelchner C.L., Plimpton S.J., Hamilton J.C. Dislocation Nucleation and Defect Structure during Surface Indentation. *Physical Review B*, 1998, Vol. 58, Iss. 17, p. 11085. DOI: 10.1103/physrevb.58.11085
25. Honeycutt J.D., Andersen H.C. Molecular Dynamics Study of Melting and Freezing of Small Lennard-Jones Clusters. *Journal of Physical Chemistry*, 1987, Vol. 91, Iss. 19, pp. 4950–4963. DOI: 10.1021/j100303a014
26. Stukowski A. Structure Identification Methods for Atomistic Simulations of Crystalline Materials. *Modelling and Simulation in Materials Science Engineering*, 2012, Vol. 20, no. 4, p. 045021. DOI: 10.1088/0965-0393/20/4/045021
27. Mayer A.E., Ebel A.A. Influence of Free Surface Nanorelief on the Rear Spallation Threshold: Molecular Dynamics Investigation. *Journal of Applied Physics*, 2016, Vol. 120, Iss. 16, p. 165903. DOI: 10.1063/1.4966555
28. Ebel A.A., Mayer A.E. Molecular Dynamic Investigations of the Shock Pulses Interaction with Nanostructured free Surface of a Target. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, Vol. 774, pp. 012060. DOI: 10.1088/1742-6596/774/1/012060
29. Mayer A.E., Ebel A.A. Shock-Induced Compaction of Nanoparticle Layers into Nanostructured coating. *Journal of Applied Physics*, 2017, Vol. 122, Iss. 16, p. 165901. DOI: 10.1063/1.4996846
30. Subramaniyan A.K., Sun C.T. Continuum Interpretation of Virial Stress in Molecular Simulations. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, Vol. 45, Iss. 14–15, pp. 4340–4346. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.03.016

Received March 3, 2021

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 53–60*

УДК 538.9

DOI: 10.14529/mmph210208

ЭВОЛЮЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ОТ ПОВЕРХНОСТИ С НАНОРЕЛЬЕФОМ ИЛИ С НАНЕСЕННЫМИ НАНОЧАСТИЦАМИ

А.А. Эбель, А.Е. Майер

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ebelaa@susu.ru, mayer@csu.ru

Интенсивное облучение и высокоскоростное столкновение металлов приводит к формированию и распространению в них импульсов ударного сжатия. Недавнее развитие экспериментальной техники с использованием мощных субпикосекундных лазерных импульсов позволяет получать ударные импульсы пикосекундного диапазона. В работе проведено молекулярно-динамическое моделирование высокоскоростных столкновений для образцов алюминия. Наличие нанорельефа или осажденных наночастиц на задней поверхности образца может значительно увеличить задний порог расщепления. Взаимодействие ударной волны с нанорельефом или оса-

жденными наночастицами приводит к сильной пластической деформации. В результате часть энергии импульса сжатия расходуется на пластическую деформацию, которая предотвращает разрушение откола. Эффект от повышения порога может достигать сотен метров в секунду по скорости столкновения и десятков гигапаскалей по амплитуде падающей ударной волны. Рассмотрено распределение деформации сдвига и температуры в образце. Показано, что максимальная степень деформации и максимальный нагрев наблюдаются в тех частях нанорельефа, для которых наблюдается наибольшее изменение формы. Максимальная температура достигает точки плавления, но явных следов плавления не обнаружено, что может быть связано со скоростью протекания процессов.

Ключевые слова: высокоскоростное воздействие; пластическая деформация; молекулярная динамика; нанорельеф.

Литература

1. Канель, Г.И. Ударные волны в физике конденсированного состояния / Г.И. Канель, В.Е. Фортов, С.В. Разоренов // УФН. – 2007. – Т. 177, № 8. – С. 809–830.
2. Zaretsky, E.B. Yield Stress, Polymorphic Transformation, and Spall Fracture of Shock-Loaded Iron in Various Structural States and at Various Temperatures / E.B. Zaretsky, G.I. Kanel // Journal of Applied Physics. – 2015. – Vol. 117, Iss. 19. – P. 195901.
3. Механические и оптические свойства ванадия под действием ударных нагрузок пикосекундного диапазона / С.И. Ашитков, П.С. Комаров, Е.В. Струлева и др. // Письма в ЖЭТФ. – 2015. – Т. 101. – Вып. 4. – С. 294–299.
4. Simulation and Experimental Investigation of the Spall Fracture of 304L Stainless Steel Irradiated by a Nanosecond Relativistic High-Current Electron Beam / S.F. Gnyusov, V.P. Rotshtein, A.E. Mayer et al. // International Journal of Fracture. – 2016. – Vol. 199, Iss. 1. – P. 59–70.
5. Yuan, F. Twin Boundary Spacing Effects on Shock Response and Spall Behaviors of Hierarchically Nanotwinned FCC Metals / F. Yuan, L. Chen, P. Jiang, X. Wu // Journal of Applied Physics. – 2014. – Vol. 115, Iss. 6. – P. 063509.
6. Dynamic Fracture Kinetics, Influence of Temperature and Microstructure in the Atomistic Model of Aluminum / A. Kuksin, G. Norman, V. Stegailov *et al.* // International Journal of Fracture. – 2010. – Vol. 162, Iss. 1. – P. 127–136.
7. Pogorelko, V.V. Influence of Copper Inclusions on the Strength of Aluminum Matrix at High-Rate Tension / V.V. Pogorelko, A.E. Mayer // Materials Science and Engineering: A. – 2015. – Vol. 642. – P. 351–359.
8. Pogorelko, V.V. Influence of Titanium and Magnesium Nano-inclusions on the Strength of Aluminum at High-Rate Tension: Molecular Dynamics Simulations / V.V. Pogorelko, A.E. Mayer // Materials Science and Engineering: A. – 2016. – Vol. 662. – P. 227–240.
9. Krasnikov, V.S. Plasticity Driven Growth of Nanovoids and Strength of Aluminum at High Rate Tension: Molecular Dynamics Simulations and Continuum Modeling / V.S. Krasnikov, A.E. Mayer // International Journal of Plasticity. – 2015. – Vol. 74. – P. 75–91.
10. Kuksin, A.Yu. Atomistic Simulation of Plasticity and Fracture of Nanocrystalline Copper under High-Rate Tension / A.Yu. Kuksin, V.V. Stegailov, A.V. Yanilkin // Physics Solid State. – 2008. – Vol. 50. – P. 2069–2075.
11. Stegailov, V.V. Structural Transformations in Single-Crystal Iron During Shock-Wave Compression and Tension: Molecular Dynamics Simulation / V.V. Stegailov, A.V. Yanilkin // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2007. – Vol. 104, Iss. 6. – P. 928–935.
12. Shock-induced Consolidation and Spallation of Cu Nanopowders / L. Huang, W.Z. Han, Q. An *et al.* // Journal of Applied Physics. – 2012. – Vol. 111, Iss. 1. – P. 113508.
13. Dislocation Evolution and Peak Spall Strengths in Single Crystal and Nanocrystalline Cu / K. Mackenchery, R.R. Valisetty, R.R. Namburu *et al.* // Journal of Applied Physics. – 2016. – Vol. 119, Iss. 4. – P. 044301.
14. Anisotropic Shock Response of Columnar Nanocrystalline Cu / S.N. Luo, T.C. Germann, T.G. Desai *et al.* // Journal of Applied Physics. – 2010. – Vol. 107, Iss. 12. – P. 123507.
15. Yuan, F. Twin Boundary Spacing Effects on Shock Response and Spall Behaviors of Hierarchically Nanotwinned FCC Metals / F. Yuan, L. Chen, P. Jiang, X. Wu // Journal of Applied Physics. – 2014. – Vol. 115, Iss. 6. – P. 063509.

16. Influence of Voids or He Bubbles on the Spall Damage in Single Crystal Al / J.L. Shao, P. Wang, A. He *et al.* // *Modelling and Simulation in Materials Science Engineering*. – 2014. – Vol. 22, no. 2. – P. 025012.
17. Chen, Y. Experimental Study of Ejecta from Shock Melted Lead / Y. Chen, H. Hu, T. Tang *et al.* // *Journal of Applied Physics*. – 2012. – Vol. 111, Iss. 5. – P. 053509.
18. Atomistic simulations of shock-induced microjet from a grooved aluminium surface / J.L. Shao, P. Wang, A. He *et al.* // *Journal of Applied Physics*. – 2013. – Vol. 113, Iss. 15. – P. 153501.
19. Ejecta Production from Shocked Pb Surface via Molecular Dynamics / G. Ren, Y. Chen, T. Tang, Q. Li // *Journal of Applied Physics*. – 2014. – Vol. 116, Iss. 13. – P. 133507.
20. Ebel, A.A. Influence of Deposited Nanoparticles on the Spall Strength of Metals under the Action of Picosecond Pulses of Shock Compression / A.A. Ebel, A.E. Mayer // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 946. – P. 012045.
21. Plimpton, S. Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics. *Journal of Computational Physics*, 1995, Vol. 117, Iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1006/jcph.1995.1039
22. Mishin, Y. Interatomic Potentials for Monoatomic Metals from Experimental Data and Ab Initio Calculations / Y. Mishin, D. Farkas, M.J. Mehl, D.A. Papaconstantopoulos // *Physical Review B*. – 1999. – Vol. 59, Iss. 5. – P. 3393–3407.
23. Stukowski, A. Visualization and Analysis of Atomistic Simulation Data with OVITO—the Open Visualization Tool / A. Stukowski // *Modelling and Simulation in Materials Science Engineering*. – 2010. – Vol. 18. – P. 015012.
24. Kelchner, C.L. Dislocation Nucleation and Defect Structure During Surface Indentation / C.L. Kelchner, S.J. Plimpton, J.C. Hamilton // *Physical Review B*. – 1998. – Vol. 58, Iss. 17. – P. 11085.
25. Honeycutt, J.D. Molecular Dynamics Study of Melting and Freezing of Small Lennard-Jones Clusters / J.D. Honeycutt, H.C. Andersen // *Journal of Physical Chemistry*. – 1987. – Vol. 91, Iss. 19. – P. 4950–4963.
26. Stukowski, A. Structure Identification Methods for Atomistic Simulations of Crystalline Materials / A. Stukowski // *Modelling and Simulation in Materials Science Engineering*. – 2012. – Vol. 20, no. 4. – P. 045021.
27. Mayer, A.E. Influence of Free Surface Nanorelief on the Rear Spallation Threshold: Molecular Dynamics Investigation / A.E. Mayer, A.A. Ebel // *Journal of Applied Physics*. – 2016. – Vol. 120, Iss. 16. – P. 165903.
28. Ebel, A.A. Molecular Dynamic Investigations of the Shock Pulses Interaction with Nanostructured Free Surface of a Target / A.A. Ebel, A.E. Mayer // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2016. – Vol. 774. – P. 012060.
29. Mayer, A.E. Shock-Induced Compaction of Nanoparticle Layers into Nanostructured Coating / A.E. Mayer, A.A. Ebel // *Journal of Applied Physics*. – 2017. – Vol. 122, Iss. 16. – P. 165901.
30. Subramaniyan, A.K. Continuum Interpretation of Virial Stress in Molecular Simulations / A.K. Subramaniyan, C.T. Sun // *International Journal of Solids and Structures*. – 2008. – Vol. 45, Iss. 14–15. – P. 4340–4346.

Поступила в редакцию 3 марта 2021 г.

A SHORT PROOF OF COMPLETION THEOREM FOR METRIC SPACES

U. Kaya

Bitlis Eren University, Bitlis, Turkey
E-mail: mat-ufuk@hotmail.com

The completion theorem for metric spaces is always proven using the space of Cauchy sequences. In this paper, we give a short and alternative proof of this theorem via Zorn's lemma. First, we give a way of adding one point to an incomplete space to get a chosen non-convergent Cauchy sequence convergent. Later, we show that every metric space has a completion by constructing a partial ordered set of metric spaces.

Keywords: Completion theorem; metric space; complete space; Zorn's lemma.

Introduction

The completion theorem for metric spaces states that every metric space can be embedded in a complete metric space and the original space's image is dense in that complete space. In several sources, the proof is given by a classical method based on the space of the equivalence classes of all the Cauchy sequences, denoted by \hat{X} , of the given metric space X , see [1]. In this proof, it is shown that \hat{X} is a complete metric space, X can be embedded in \hat{X} , the image of X is dense in \hat{X} and this completion is unique up to isometry.

In this paper, we propose another way to prove the completion theorem by not using the embedding. We prove that if a metric space X is not complete, there exists a complete metric space \hat{X} including X such that X is dense in \hat{X} , i.e. $\bar{X} = \hat{X}$.

The proof

Lemma 1. Let (X, d) be a metric space and (x_n) be a Cauchy sequence that is not convergent in X . We define a new space $\tilde{X} = X \cup \{c\}$ with the metric \tilde{d} as follows:

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & \text{if } x, y \in X, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y), & \text{if } x = c, y \in X, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n), & \text{if } x \in X, y = c, \\ 0, & \text{if } x = y = c, \end{cases}$$

where c is an element that does not belong to X . Then, (\tilde{X}, \tilde{d}) is a metric space satisfying the properties $\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$ for each $x, y \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ and $\bar{\tilde{X}} = \tilde{X}$.

Proof. By the reverse triangle inequality $|d(x_n, y) - d(x_m, y)| \leq d(x_n, x_m)$, the sequence $\{d(x_n, y)\}$ is a Cauchy sequence in \mathbb{R} because (x_n) is a Cauchy sequence in X . Since \mathbb{R} is complete, then $\{d(x_n, y)\}$ is a convergent sequence for each $y \in X$. Therefore, the function \tilde{d} is well-defined from $\tilde{X} \times \tilde{X}$ to \mathbb{R} . Also, it is easy to see that \tilde{d} is a metric on the set \tilde{X} . Now, we show that the sequence (x_n) converges to c in the metric space (\tilde{X}, \tilde{d}) . Given $\varepsilon > 0$, there exists a natural number n_ε such that $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ for all $n, m > n_\varepsilon$. Then, we have

$$\tilde{d}(x_n, c) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

for each $n > n_\varepsilon$. This proves the above assertion and also proves that $\overline{X} = \tilde{X}$.

Lemma 2. Let (X, d) be a metric space included two complete metric spaces (Y_1, ρ_1) and (Y_2, ρ_2) with the conditions $\rho_1(x, x^*) = d(x, x^*)$ and $\rho_2(x, x^*) = d(x, x^*)$ for every $x, x^* \in X$. If X is both dense in (Y_1, ρ_1) and (Y_2, ρ_2) , then these complete metric spaces are isomorphic to each other.

Proof. Let $t \in Y_1$. Since $\overline{X} = Y_1$, there exists a sequence $(x_n) \subset X$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, t) = 0$. Then, (x_n) is a Cauchy sequence in Y_1 , and also is a Cauchy sequence in Y_2 . Since (Y_2, ρ_2) is a complete space, then there exists y in Y_2 such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, y) = 0$. Let $f: Y_1 \rightarrow Y_2$, $y = f(t)$. We now show that the function f is an isometry. First, we prove that it is well-defined. Let $(z_n) \subset X$ be also convergent to the point t in the space (Y_1, ρ_1) . Then, similarly, there exists $z \in Y_2$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(z_n, z) = 0$.

$$\begin{aligned} \rho_2(y, z) &= \rho_2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, z_n) \\ &= \rho_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \rho_1(t, t) = 0 \Rightarrow y = z. \end{aligned}$$

Second, we prove that f is surjective. Let $y \in Y_2$. Since $\overline{X} = Y_2$, there exists a sequence $(x_n) \subset X$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, y) = 0$. Then, (x_n) is a Cauchy sequence in X and also in Y_1 . Since Y_1 is complete, then there exists $t \in Y_1$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, t) = 0$. By the construction of f , $y = f(t)$. Finally, we prove that f is an isometry. Let $t_1, t_2 \in Y_1$. Then, there exist two sequences $(x_n), (z_n) \subset X$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, t_1) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(z_n, t_2) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, f(t_1)) = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(z_n, f(t_2)) = 0$.

$$\begin{aligned} \rho_2(f(t_1), f(t_2)) &= \rho_2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, z_n) \\ &= \rho_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \rho_1(t_1, t_2). \end{aligned}$$

This completes the proof.

Theorem 1. Every metric space has a unique completion up to isometry.

Proof. Consider the family Ω of metric spaces (Y, ρ) satisfying the following conditions:

- 1) ρ is a metric on Y ,
- 2) $X \subset Y$,
- 3) $\rho(x, y) = d(x, y)$ for each $x, y \in X$,
- 4) $\overline{X} = Y$.

We define a relation on Ω which is as follows:

$$(Y_1, \rho_1) \leq (Y_2, \rho_2) \Leftrightarrow Y_1 \subset Y_2 \text{ and } \rho_2(x, y) = \rho_1(x, y) \text{ for each } x, y \in Y_1.$$

It is easy to see that the pair (Ω, \leq) is a poset. We take a chain Ω^* in the poset (Ω, \leq) and define

$$Y^* = \bigcup_{(Y, \rho) \in \Omega^*} Y.$$

We now define a function ρ^* from $Y^* \times Y^*$ to \mathbb{R} as follows. If $x, y \in Y^*$, then there exists $(Y_0, \rho_0) \in \Omega^*$ such that $x, y \in Y_0$ because Ω^* is a chain. Let

$$\rho^*(x, y) = \rho_0(x, y).$$

Then, the function ρ is well-defined by the definition of the relation \leq . One can easily show that ρ^* is a metric on the set Y^* . Let $y \in Y^*$, there exists $(\tilde{Y}, \tilde{\rho}) \in \Omega^*$ such that $y \in \tilde{Y}$. Since $(\tilde{Y}, \tilde{\rho}) \in \Omega$, then there exists a sequence (x_n) in X such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(x_n, y) = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(x_n, y) = 0$. Consequently, $\bar{X} = Y^*$. These results show that the metric space (Y^*, ρ^*) belongs to Ω and forms an upper bound of the chain Ω^* . By Zorn's lemma, Ω has a maximal element and we denote it by (\hat{X}, \hat{d}) . We now prove that the metric space (\hat{X}, \hat{d}) is a completion of (X, d) . Since (\hat{X}, \hat{d}) is an element of Ω , then we just prove that (\hat{X}, \hat{d}) is complete. Assume the contrary. If (\hat{X}, \hat{d}) has a non-convergent Cauchy sequence, then Lemma 1 requires that there exists a metric space (X^*, d^*) such that $X^* = \hat{X} \cup \{c^*\}$ and $(\hat{X}, \hat{d}) < (X^*, d^*)$, where c^* is a point not in \hat{X} . We now show that $(X^*, d^*) \in \Omega$. Indeed, it is enough to show that c^* is an accumulation point of the original set X . Given $\varepsilon > 0$. By Lemma 1, there exists $c \in \hat{X}$ such that $d^*(c, c^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Besides, by the relation $(\hat{X}, \hat{d}) \in \Omega$, there exists $x \in X$ such that $\hat{d}(x, c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Then, $d^*(x, c^*) \leq d^*(x, c) + d^*(c, c^*) = \hat{d}(x, c) + d^*(c, c^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Thus, we have $(X^*, d^*) \in \Omega$. The last and the relation $(\hat{X}, \hat{d}) < (X^*, d^*)$ contradict the maximality of (\hat{X}, \hat{d}) . This completes the proof.

The uniqueness up to isometry of the completion is directly obtained by Lemma 2.

References

1. Lusternik L.A., Sobolev V.I. Elements of functional analysis, Hindustan Publishing Corp., Delhi and Halsted Press, New York, 1974, 360 p.

Received January 30, 2021

УДК 515.124

DOI: 10.14529/mmph210209

**КОРОТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ
О ПОПОЛНЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ**

У. Кайя

Университет Битлис Эрен, Битлис, Турция

E-mail: mat-ufuk@hotmail.com

Приводится альтернативное доказательство теоремы о пополнении метрических пространств, основанное на лемме Цорна.

Ключевые слова: теорема о пополнении; метрическое пространство; полное пространство; лемма Цорна.

Литература

1. Lusternik, L.A. Elements of functional analysis / L.A. Lusternik, V.I. Sobolev. – Hindustan Publishing Corp., Delhi and Halsted Press, New York, 1974. – 360 p.

Поступила в редакцию 30 января 2021 г.

Информация

При подготовке материалов к изданию в научном журнале «Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика», 2021, т.13, вып. 1 по техническим причинам была допущена неточность.

В статье Адукова Н.В., Дильман В.Л. «Устойчивость факторизационных множителей канонической факторизации Винера–Хопфа матриц-функций» (с. 5–13) на с. 11 следует читать:

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740024.

Редакционная коллегия журнала «Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» приносит свои извинения авторам статьи.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 13, № 2
2021

16+

Редакторы: *С.И. Уварова, В.В. Батуева*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 30.04.2021. Дата выхода в свет 11.05.2021.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,90.

Тираж 500 экз. Заказ 113/191. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.