

ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2021
Т. 13, № 3**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

**«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н. **Бржезинская М.М.** (Берлинский центр материалов и энергии им. Гельмгольца, г. Берлин, Германия)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИННА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2021

Vol. 13, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

- S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

- A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
M.M. Brzhezinskaya, Doctor of Physics and Mathematics, Helmholtz-Zentrum Berlin for Materials and Energy, Berlin, Germany
G.L. Brovko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
I.V. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Ph. D., Professor, University of Nevada, Reno, United States of America
S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

ALA V., DEMIRBILEK U., MAMEDOV K.R. On the Exact Solutions to Conformable Equal width Wave Equation by Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method.....	5
GAVRILOVA O.V. Morphology of the Phase Space of one Mathematical Model of Nerve Impulse Propagation in the Membrane Shell	14
КОРДЮМОВ Г.Д. Производные в среднем случайных процессов и диффузионные модели в экономике	26
МАМЫТОВ А.О. Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных	31
РОЙТЕНБЕРГ В.Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией	39
SHAIKHOVA G.N., KALYKBAY Y.S. Exact Solutions of the Hirota Equation using the Sine-Cosine Method.....	47

Механика

ЧЕРНЯВСКИЙ О.Ф., ЧЕРНЯВСКИЙ А.О. Описание деформационных свойств материалов при расчетах малоциклового усталости	53
--	----

Физика

БОГДАНОВ Е.С., СУХОВА О.Р., ВОРОНЦОВ А.Г. О процессе разряда электростатических ионисторов.....	62
ГУРЕВИЧ С.Ю., ШУЛЬГИНОВ А.А. К теории лазерной генерации упругих волн в ферромагнитных металлах при температуре магнитного фазового перехода	69

Информация

БЕСКАЧКО В.П., ВЯТКИН Г.П., ДРОЗИН А.Д., ЗАЛЯПИН В.И., МИРЗОЕВ А.А., РОЦИН В.Е. Измайлов Юрий Геннадьевич – к 70-летию со дня рождения	79
--	----

CONTENTS

Mathematics

ALA V., DEMIRBILEK U., MAMEDOV K.R. On the Exact Solutions to Conformable Equal width Wave Equation by Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method.....	5
GAVRILOVA O.V. Morphology of the Phase Space of one Mathematical Model of a Nerve Impulse Propagation in the Membrane Shell	14
KORDYUMOV G.D. Derivatives in the Mean of Random Processes and Diffusion Models in Economics.....	26
MAMYTOV A.O. On a Problem of Determining the Right-Hand Side of the Partial Integro-Differential Equation	31
ROITENBERG V.Sh. Bifurcations of a Polycycle Formed by Two Separatrix Loops of a Non-Rough Saddle of a Dynamical System with Central Symmetry	39
SHAIKHOVA G.N., KALYKBAY Y.S. Exact Solutions of the Hirota Equation using the Sine-Cosine Method.....	47

Mechanics

CHERNIAVSKY O.F., CHERNIAVSKY A.O. Description of the Deformation Properties of Materials in Low-Cycle Fatigue Calculations.....	53
--	----

Physics

BOGDANOV E.S., SUKHOVA O.R., VORONTSOV A.G. On the Process of Electrostatic Supercapacitors Discharge	62
GUREVICH S.Yu., SHULGINOV A.A. To the Theory of Laser Generation of Elastic Waves in Ferromagnetic Metals at the Temperature of Magnetic Phase Transition	69

Information

BESKACHKO V.P., VYATKIN G.P., DROZIN A.D., ZALYAPIN V.I., MIRZOEV A.A., ROSHCIN V.E. Yuriy Izmaylov – to the 70th Birthday Anniversary.....	79
---	----

ON THE EXACT SOLUTIONS TO CONFORMABLE EQUAL WIDTH WAVE EQUATION BY IMPROVED BERNOULLI SUB-EQUATION FUNCTION METHOD

V. Ala, U. Demirbilek, K.R. Mamedov

Mersin University, Mersin, Turkey

E-mail: volkanala@mersin.edu.tr

In this paper, we consider conformable equal width wave (EW) equation in order to construct its exact solutions. This equation plays an important role in physics and gives an interesting model to define change waves with weak nonlinearity. The aim of this paper is to present new exact solutions to conformable EW equation. For this purpose, we use an effective method called Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method (IBSEFM). Based on the values of the solutions, the 2D and 3D graphs and contour surfaces are plotted with the aid of mathematics software. The obtained results confirm that IBSEFM is a powerful mathematical tool to solve nonlinear conformable partial equations arising in mathematical physics.

Keywords: improved Bernoulli sub-equation function method; conformable equal width wave equation; wave transformation.

Introduction

Fractional differential equations are the generalization of classical differential equations with integer order. So, in recent years, fractional differential equations become the field of physicists and mathematicians who investigate the expediency of such non-integer order derivatives in different areas of physics and mathematics. These equations became a useful tool for describing numerous nonlinear phenomena of physics such as heat conduction systems, nonlinear chaotic systems, viscoelasticity, plasma waves, acoustic gravity waves, diffusion processes [1–3]. Many numerical and analytical methods were developed and successfully employed to solve these equations such as modified Kudryashov method [4], homotopy perturbation method [5], new extended direct algebraic method [6], fractional Riccati expansion method [7], modified extended tanh method [8].

During the last few years, a straightforward definition of conformable derivative is given [9]. The conformable derivative operator is compatible to many real-world problems and provides some properties of classical calculus such as derivative of quotient or product of two functions, the chain rule [10]. During the last few years, many of techniques applied to find exact solutions to conformable nonlinear partial differential equations [11–16].

In this paper, we consider the following conformable EW equation:

$$D_t^\alpha u + p D_x^\alpha u^2 - l D_{xxx}^{3\alpha} u = 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad (1)$$

where p, l are real parameters, u is a function of independent variables. The operator D_t^α represents conformal derivative operator defined only for positive region of t [10]. Before consideration of the solution procedure, let us give some properties of conformable derivative.

The conformable derivative of order α with respect to the independent variable t is defined as [9]

$$D_t^\alpha (y(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{y(t + \tau t^{1-\alpha}) - y(t)}{\tau}, \quad t > 0, \alpha \in (0,1]$$

for a function $y = y(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Theorem 1.1. Assume that the order of the derivative is $\alpha \in (0,1]$ and suppose that $u = u(t)$ and $v = v(t)$ are α -differentiable functions for all positive t . Then

$$\mathbf{i.} \quad D_t^\alpha (c_1 u + c_2 v) = c_1 D_t^\alpha (u) + c_2 D_t^\alpha (v) \quad \text{for } \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

- ii. $D_t^a(t^k) = kt^{k-a} \forall k \in \mathbb{R}$,
- iii. $D_t^a(\lambda) = 0$ for each constant function $u(t) = \lambda$,
- iv. $D_t^a(uv) = uD_t^a(v) + vD_t^a(u)$,
- v. $D_t^a\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD_t^a(u) - uD_t^a(v)}{v^2}$,
- vi. $D_t^a(u)(t) = t^{1-\alpha} \frac{du}{dt}$.

Conformable differential operator satisfies some critical fundamental properties like the chain rule, Taylor series expansion and Laplace transform.

Theorem 1.2. Let $u = u(t)$ be an α -conformable differentiable function and assume that v is a differentiable function. Then

$$D_t^a(u \circ v)(t) = t^{1-\alpha} v'(t) u'(v(t)).$$

The proofs of Theorems 1 and 2 are given in [17] and [9], respectively.

The rest part of the paper is organized as follows. In Section 1, description of the IBSEFM is given. In Section 2, the application of IBSEFM is mentioned. Finally, this study is completed by providing conclusions in the last section.

1. Description of the IBSEFM

In this section, we give the fundamental properties of the IBSEFM. This method is direct, significant, advanced algebraic method to establish reliable exact solutions for both nonlinear and nonlinear fractional partial differential equations [11,18–20].

Let us describe five main steps of the IBSEFM.

Step 1. Let us take into account the following conformable partial differential equation of the form

$$P(v, D_t^{(\alpha)}v, D_x^{(\alpha)}v, D_{xt}^{(2\alpha)}v, \dots) = 0, \quad (2)$$

where $D_t^{(\alpha)}$ is the conformable fractional derivative operator, $v(x,t)$ is an unknown function, P is a polynomial and its partial derivatives contain fractional derivatives. The aim is to convert conformable nonlinear partial differential equation with a suitable fractional transformation into the ordinary differential equation. The wave transformation is

$$v(x,t) = V(\xi), \quad \xi = \xi(x, t^\alpha). \quad (3)$$

Using the properties of conformable fractional derivative, we convert (2) into an ODE of the form

$$N(V, V', V'', \dots) = 0. \quad (4)$$

If we integrate (4) term to term, we acquire integration constant(s), which can be determined later.

Step 2. We hypothesize that the solution to (4) can be represented as follows:

$$V(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i F^i(\xi)}{\sum_{j=0}^m b_j F^j(\xi)} = \frac{a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) + \dots + a_n F^n(\xi)}{b_0 + b_1 F(\xi) + b_2 F^2(\xi) + \dots + b_m F^m(\xi)}, \quad (5)$$

where a_0, a_1, \dots, a_n and b_0, b_1, \dots, b_m are coefficients which will be determined later. The numbers $m \neq 0, n \neq 0$ are chosen arbitrary constants to balance principle. Consider the Bernoulli differential equation of the form

$$F'(\xi) = \sigma F(\xi) + dF^M(\xi), \quad d \neq 0, \sigma \neq 0, M \in \mathbb{R}/\{0,1,2\}, \quad (6)$$

where $F(\xi)$ is the solution to (6).

Step 3. The positive nonzero integers m, n, M are found by balance principle that is both nonlinear term and the highest order derivative term of (4).

Substituting (5), (6) in (2) gives the following equation of the polynomial $\Theta(F)$ of F :

$$\Theta(F(\xi)) = \rho_s F(\xi)^s + \dots + \rho_1 F(\xi) + \rho_0 = 0,$$

where $\rho_i, i = 0, \dots, s$ are coefficients and will be determined later.

Step 4. Equating all the coefficients of $\Theta(F(\xi))$ yields us an algebraic equation system

$$\rho_i = 0, i = 0, \dots, s.$$

Step 5. When we solve (4), we get the following two cases with respect to σ and d :

$$F(\xi) = \left[\frac{-de^{\sigma(\varepsilon-1)} + \varepsilon\sigma}{\sigma e^{\sigma(\varepsilon-1)\xi}} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, d \neq \sigma, \tag{7}$$

$$F(\xi) = \left[\frac{(\varepsilon-1) + (\varepsilon+1) \tanh\left(\sigma(1-\varepsilon)\frac{\xi}{2}\right)}{1 - \tanh\left(\sigma(1-\varepsilon)\frac{\xi}{2}\right)} \right], d = \sigma, \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Using a complete discrimination system of $F(\xi)$, we obtain the analytical solutions to (4) via mathematics software and categorize the exact solutions to (4). To achieve better results, we can plot two and three dimensional figures of analytical solutions by considering proper values of parameters.

2. Application of the IBSEFM

Take the travelling wave transformation

$$u(x, t) = U(\eta), \eta = q \frac{x^\alpha}{\alpha} + m \frac{t^\alpha}{\alpha}, \tag{9}$$

where q and m are nonzero constants to be determined. Then Equation (1) turns into the following ordinary differential equation:

$$mU + pqU^2 - qml^2U'' = 0. \tag{10}$$

When we apply the balance principle for the terms u^2 and u'' , the result for m, n and M is

$$M + m = n + 1.$$

By balancing the order between the nonlinear term and highest order derivative in Equation (10), we obtain $M = 3, n = 3$ and $m = 1$, then we get

$$U(\eta) = \frac{a_0 + a_1F(\eta) + a_2F^2(\eta) + a_3F^3(\eta)}{b_0 + b_1F(\eta)} = \frac{Y(\eta)}{\Psi(\eta)},$$

$$U'(\eta) = \frac{Y'(\eta)\Psi(\eta) - Y(\eta)\Psi'(\eta)}{\Psi^2(\eta)}, \tag{11}$$

$$U''(\eta) = \frac{Y'(\eta)\Psi(\eta) - Y(\eta)\Psi'(\eta)}{\Psi^2(\eta)} - \frac{[Y(\eta)\Psi'(\eta)]' \Psi^2(\eta) - 2Y(\eta)[\Psi'(\eta)]^2\Psi(\eta)}{\Psi^4(\eta)}. \tag{12}$$

Substituting (3)–(11) in (10), we get the algebraic equation system according to F :

$$F^0 : 2pqa_0^2b_0 + ma_0b_0^2 = 0,$$

$$F : 4pqa_0a_1b_0 + ma_1b_0^2 - lmq^2\sigma^2a_1b_0^2 + 2pqa_0^2b_1 + 2ma_0b_0b_1 + lmq^2\sigma^2a_0b_0b_1 = 0,$$

$$F^2 : 2pqa_1^2b_0 + 4pqa_0a_2b_0 + ma_2b_0^2 - 4lmq^2\sigma^2a_2b_0^2 + 4pqa_0a_1b_1 + 2ma_1b_0b_1 + lmq^2\sigma^2a_1b_0b_1 +$$

$$+ ma_0b_1^2 - lmq^2\sigma^2a_0b_1^2 = 0,$$

$$F^3 : 4pqa_1a_2b_0 + 4pqa_0a_3b_0 - 4dlmq^2\sigma a_1b_0^2 + ma_3b_0^2 - 9lmq^2\sigma^2a_3b_0^2 + 2pqa_1^2b_1 + 4pqa_0a_2b_1 +$$

$$+ 4dlmq^2\sigma a_0b_0b_1 + 2ma_2b_0b_1 - 3lmq^2\sigma^2a_2b_0b_1 + ma_1b_1^2 = 0,$$

$$\vdots$$

$$F^9 : 2pqa_4^2b_0 + 4pqa_3a_5b_0 - 24d^2lmq^2a_4b_0^2 + 4pqa_3a_4b_1 + 4pqa_2a_5b_1 - 21d^2lmq^2a_3b_0b_1 -$$

$$- 96dlmq^2\sigma a_5b_0b_1 - 3d^2lmq^2a_2b_1^2 - 24dlmq^2\sigma a_4b_1^2 = 0,$$

$$F^{10} : 4pqa_4a_5b_0 - 35d^2lmq^2a_5b_0^2 + 2pqa_4^2b_1 + 4pqa_3a_5b_1 - 37d^2lmq^2a_4b_0b_1 - 8d^2lmq^2a_3b_1^2 -$$

$$-40dlmq^2\sigma a_5 b_1^2 = 0,$$

$$F^{11} : 2pqa_5^2 b_0 + 4pqa_4 a_5 b_1 - 57d^2 lmq^2 a_5 b_0 b_1 - 15d^2 lmq^2 a_4 b_1^2 = 0,$$

$$F^{12} : 2pqa_5^2 b_1 - 24d^2 lmq^2 a_5 b_1^2 = 0.$$

Then we solve the system of equations of F and, in each case, substitute the obtained coefficients to get the new solution(s) $u(x,t)$. Solving the system by Wolfram Mathematica software, we obtain the coefficients as follows.

Case 1. For $\sigma \neq d$,

$$a_0 = \frac{\sigma^2 a_4}{6d^2}; a_1 = \frac{\sigma^2 a_5}{6d^2}; a_2 = \frac{\sigma a_4}{d}; a_3 = \frac{\sigma a_5}{d}; b_1 = \frac{a_5 b_0}{a_4}; m = -\frac{pq\sigma^2 a_4}{3d^2 b_0}; l = -\frac{1}{4q^2 \sigma^2}. \quad (13)$$

where $d, l, q, \sigma, a_4, b_0 \neq 0$.

Putting (13) along with (3)–(11) in (7), we acquire the exponential function solution to the EW equation as follows:

$$u_1(x,t) = \frac{\sigma^2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{6}{\left(\frac{2p\sigma \left(3t^\alpha + \frac{px^\alpha \sigma^2 a_4}{d^2 b_0} \right)}{d-e} \right)^2 \varepsilon \sigma} - \frac{6}{d \left(\frac{2p\sigma \left(3t^\alpha + \frac{px^\alpha \sigma^2 a_4}{d^2 b_0} \right)}{d-e} \right) \varepsilon \sigma} \right) a_4}{6b_0}.$$

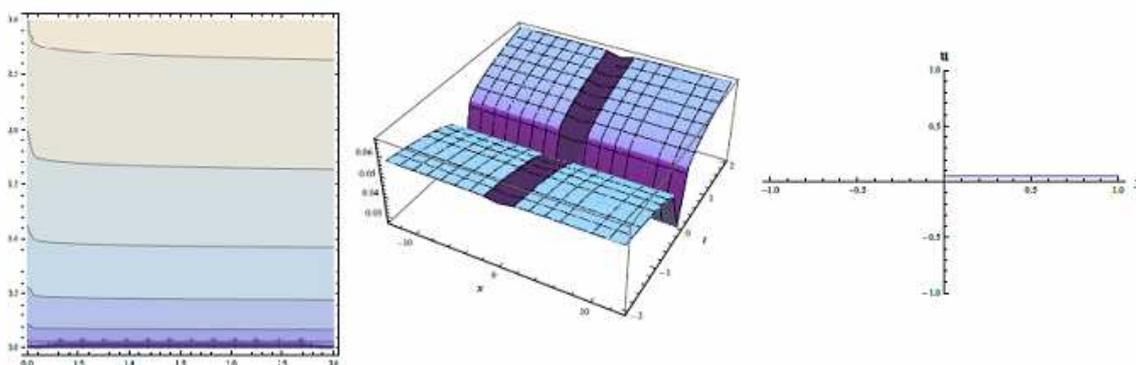


Fig. 1. The contourplot, 3D and 2D graphs of $u_1(x,t)$ by considering the values $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,2$; $\sigma = 0,1$; $d = 0,3$; $p = 0,5$; $q = 0,6$; $b_0 = 1$; $a_4 = 1$; $-13 < x < 13$, $-2 < t < 2$ for 3D surface, $0 < x < 3$, $0 < t < 3$ for contourplot and $-1 < x < 1$; $t = 0,2$ for 2D

Case 2. For $\sigma \neq d$,

$$a_0 = -\frac{a_4}{24d^2 lq^2}; a_1 = -\frac{a_5}{24d^2 lq^2}; a_2 = -\frac{ia_4}{2d\sqrt{lq}}; a_3 = -\frac{-ia_5}{2d\sqrt{lq}}; b_1 = \frac{a_5 b_0}{a_4}; p = -\frac{12d^2 lmq b_0}{a_4}; \sigma = -\frac{i}{2\sqrt{lq}}, \quad (14)$$

where $d, l, q, a_4, b_0 \neq 0$. Substituting (14) along with (3)–(11) in (7), we obtain solution to (1)

$$u_2(x,t) = \frac{\left(-l - \frac{12ide \frac{i(qt^\alpha + mx^\alpha)}{\sqrt{lq}\alpha}}{\sqrt{lq}\varepsilon} \right) a_4}{24d^2 lq^2 b_0} \left(\frac{it^\alpha}{-2ide\sqrt{lq}} \sqrt{lq} + e \frac{imx^\alpha}{\sqrt{lq}\alpha} \varepsilon \right)^2.$$

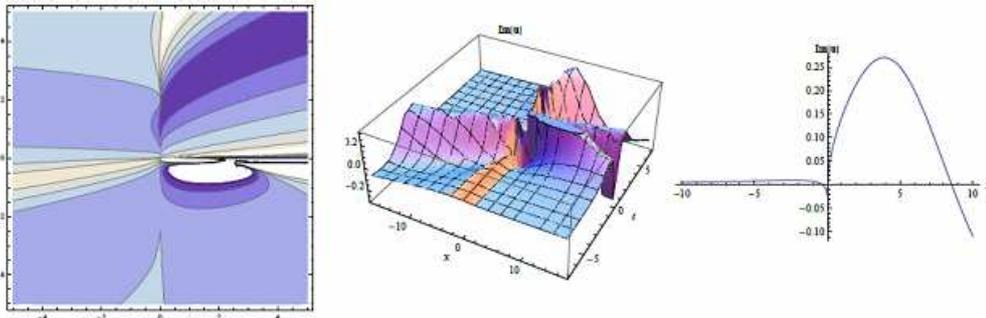


Fig. 2. The contourplot, 3D and 2D graphs of imaginary part of $u_2(x,t)$ by considering the values $\alpha = 0,4$; $\varepsilon = 0,1$; $\sigma = 0,2$; $d = 0,51$; $l = 0,5$; $m = 0,3$; $q = 0,73$; $b_0 = 0,6$; $a_4 = 0,2$; $-17 < x < 17$, $-7 < t < 7$ for 3D surface, $-5 < x < 5$, $-5 < t < 5$ for contourplot and $-10 < x < 10$; $t = 0,2$ for 2D

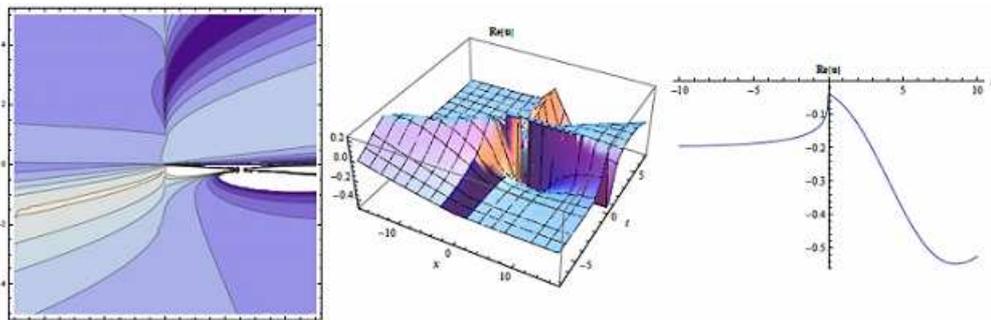


Fig. 3. The contourplot, 3D and 2D graphs of real part of $u_2(x,t)$ by considering the values $\alpha = 0,4$; $\varepsilon = 0,1$; $\sigma = 0,2$; $d = 0,51$; $l = 0,5$; $m = 0,3$; $q = 0,73$; $b_0 = 0,6$; $a_4 = 0,2$; $-17 < x < 17$, $-7 < t < 7$ for 3D surface, $-5 < x < 5$, $-5 < t < 5$ for contourplot and $-10 < x < 10$; $t = 0,2$ for 2D

Case 3. For $\sigma \neq d$,

$$a_0 = -\frac{mb_0}{2pq}; a_1 = -\frac{ma_5b_0}{2pqa_4}; a_2 = -\frac{i\sqrt{3}\sqrt{m}\sqrt{a_4}\sqrt{b_0}}{\sqrt{p}\sqrt{q}}; a_3 = -\frac{i\sqrt{3}\sqrt{ma_5}\sqrt{b_0}}{\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{a_4}}; b_1 = \frac{a_5b_0}{a_4};$$

$$d = -\frac{\sqrt{p}\sqrt{a_4}}{2\sqrt{3}\sqrt{l}\sqrt{m}\sqrt{q}\sqrt{b_0}}; \sigma = -\frac{i}{2\sqrt{l}q},$$
(15)

where $l, m, p, q, \sigma, a_4, b_0 \neq 0$. When we put (15) along with (3)–(11) in (7), and obtain the complex solution to (1) as follows:

$$u_3(x,t) = \frac{3m \left(e^{\frac{2it^\alpha}{\sqrt{l}\alpha}} pqa_4 + 4i\sqrt{3}e^{\frac{i(qt^\alpha + mx^\alpha)}{\sqrt{l}\alpha}} \sqrt{m}\sqrt{p}\sqrt{q}\varepsilon\sqrt{a_4}\sqrt{b_0} - 3e^{\frac{2imx^\alpha}{\sqrt{l}q\alpha}} \right) m\varepsilon^2b_0}{2pq \left(i\sqrt{3}e^{\frac{it^\alpha}{\sqrt{l}\alpha}} \sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{a_4} + 3e^{\frac{2imx^\alpha}{\sqrt{l}q\alpha}} \sqrt{m}\varepsilon\sqrt{b_0} \right)^2}.$$

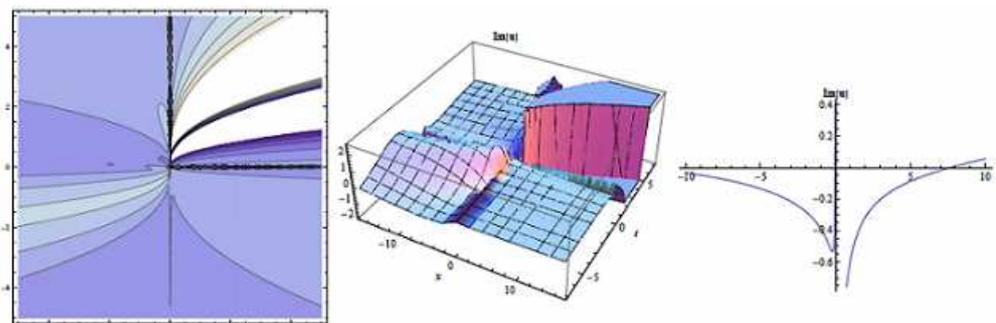


Fig. 4. The contourplot, 3D and 2D graphs of imaginary part of $u_3(x,t)$ by considering the values $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,2$; $\sigma = 0,3$; $d = 0,62$; $l = 0,6$; $m = 0,2$; $q = 0,47$; $b_0 = 0,8$; $a_4 = 0,5$; $p = 0,3$; $-17 < x < 17$, $-7 < t < 7$ for 3D surface, $-5 < x < 5$, $-5 < t < 5$ for contourplot and $-10 < x < 10$; $t = 0,3$ for 2D

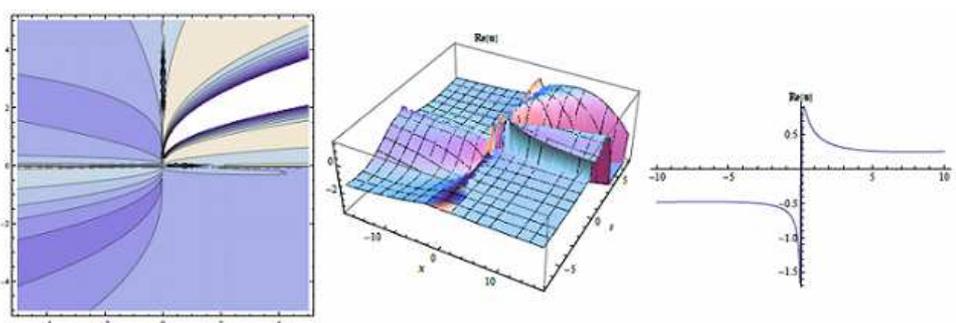


Fig. 5. The contourplot, 3D and 2D graphs of real part of $u_3(x,t)$ by considering the values $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,2$; $\sigma = 0,3$; $d = 0,62$; $l = 0,6$; $m = 0,2$; $q = 0,47$; $b_0 = 0,8$; $a_4 = 0,5$; $p = 0,3$; $-17 < x < 17$, $-7 < t < 7$ for 3D surface, $-5 < x < 5$, $-5 < t < 5$ for contourplot and $-10 < x < 10$; $t = 0,3$ for 2D

Conclusion

In this paper, the IBSEFM method is applied for the conformable EW equation. Using a wave transformation, we convert the conformable differential equation into the ordinary differential equation, which can be solved according to the IBSEFM. By means of this method, exact solutions are obtained. The contourplot, 3D and 2D surfaces of all solutions obtained by IBSEFM under the suitable values of parameters are plotted to show the main characteristic physical properties of the solutions with the help of mathematics software. According to the results, one can see that the formats of travelling wave solutions in two and three dimensional surfaces are similar to the physical meaning of results.

The solutions are also solitary wave solutions. Also, it is clear that more steps are developed and better approximations are obtained. The conclusions show that the IBSEFM is simple, effective and powerful. Thus, in mathematical physics, it is applicable to solve other conformable partial differential equations. We claim that the IBSEFM method is practically well suited, since it can be adopted to a wide range of nonlinear differential equations. Eventually, this method is influential and suitable for solving other types of nonlinear differential equations in which the balance principle is satisfied.

References

1. Baleanu D., Machado J.A.T., Luo A.C.J. (Eds.) *Fractional Dynamics and Control*. Springer-Verlag New York, 2012, 310 p.
2. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications*. *Mathematics in Science and Engineering*, 198, San Diego, CA: Academic Press, 1999, 340 p.
3. Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: Wiley, 1993, 366 p.
4. Rezazadeh H., Osman M.S., Eslami M., Ekici M., Sonmezoglu A., Asma M., Biswas A., Belic M. Mitigating Internet Bottleneck with Fractional Temporal Evolution of Optical Solitons Having Quadratic-Cubic Nonlinearity. *Optik*, 2018, Vol. 164, pp. 84–92.

5. Yildirim A., Koçak H. *Homotopy Perturbation Method for Solving the Space-Time Fractional Advection Dispersion Equation*. *Advances in Water Resources*, 2009, Vol. 32, Iss. 12, pp. 1711–1716. DOI:10.1016/J.ADVWATRES.2009.09.003
6. Rezaadeh H., Tariq H., Eslami M., Mirzazadeh M., Zhou Q. New Exact Solutions of Nonlinear Conformable Time-Fractional Phi-4 Equation. *Chinese Journal of Physics*, 2018, Vol. 56, Iss. 6, pp. 2805–2816. DOI: 10.1016/j.cjph.2018.08.001
7. Abdel-Salam A., Emad B.A., Eltyabev A.Y. Solution of Nonlinear Space-Time Fractional Differential Equations using the Fractional Riccati Expansion Method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, vol. 2013, pp. 1–6. Article ID 846283. DOI: 10.1155/2013/846283
8. Shallal M.A., Jabbar H.N., Ali K.K. Analytic Solution for the Space-Time Fractional Klein–Gordon and Coupled Conformable Boussinesq Equations. *Results in Physics*, 2018, Vol. 8, pp. 372–378. DOI: 10.1016/j.rinp.2017.12.051
9. Abdeljawad T. On Conformable Fractional Calculus. *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, Vol. 279, pp. 57–66. DOI: 10.1016/j.cam.2014.10.016
10. Khalil R., Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new Definition of Fractional Derivative. *J. Comput. Appl. Math.*, 2014, Vol. 264, pp. 65–70. DOI: 10.1016/j.cam.2014.01.002
11. Baskonus H.M., Bulut H. Exponential Prototype Structures for (2+1)-Dimensional Boiti–Leon–Penpinelli Systems in Mathematical Physics. *Waves in Random and Complex Media*, 2016, Vol. 26, Iss. 2, pp. 189–196. DOI: 10.1080/17455030.2015.1132860
12. Ala V., Demirbilek U., Mamedov Kh.R. An Application of Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method to the Nonlinear Conformable Time-Fractional SRLW Equation. *AIMS Mathematics*, 2020, Vol. 5, Iss. 4, pp. 3751–3761. DOI: 10.3934/math.2020243
13. Yel G., Sulaiman T.A., Bakonu H.M. On the Complex Solutions to the (3+1)-dimensional Conformable Fractional Modified KdV–Zakharov–Kuznetsov Equation. *Modern Physics Letters B*, 2020, Vol. 34, Iss. 5, Article number 2050069. DOI: 10.1142/S0217984920500694
14. Durur H., Tasbozan O., Kurt A. New Analytical Solutions of Conformable Time Fractional Bad and Good Modified Boussinesq Equations. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2020, Vol. 5, Iss. 1, pp. 447–454. DOI: 10.2478/amns.2020.1.00042
15. Kurt A. New Analytical and Numerical Results For Fractional Bogoyavlensky–Konopelchenko Equation Arising in Fluid Dynamics. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2020, Vol. 35, Iss. 1, pp. 101–112. DOI: 10.1007/s11766-020-3808-9
16. Senol M. New Analytical Solutions of Fractional Symmetric Regularized-Long-Wave Equation. *Revista Mexicana de Fisica*, 2020, Vol. 66, Iss. 3, pp. 297–307. DOI: 10.31349/RevMexFis.66.297
17. Atangana A., Baleanu D., Alsaedi A. New Properties of Conformable Derivative. *Open Mathematics*, 2015, Vol. 13, Iss. 1, pp. 889–898. DOI: 10.1515/math-2015-0081
18. Baskonus H.M., Altan Koç D., Bulut H. New Travelling Wave Prototypes to the Nonlinear Zakharov–Kuznetsov Equation with Power Law Nonlinearity. *Nonlinear Science Letters A: Mathematics, Physics and Mechanics*, 2016, Vol. 7, pp. 67–76.
19. Dusunceli F. New Exponential and Complex Traveling Wave Solutions to the Konopelchenko–Dubrovsky Model. *Adv. Math. Phys.*, 2019, Article ID 7801247. DOI: 10.1155/2019/7801247
20. Baskonus H.M., Bulut H. On the Complex Structures of Kundu–Eckhaus Equation via Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method. *Waves Random Complex Media*, 2015, Vol. 25, Iss. 4, pp. 720–728. DOI: 10.1080/17455030.2015.1080392

Received February 2, 2021

Information about the authors

Ala Volkan, Mathematics Department, Science and Letters Faculty, Mersin University, Mersin, Turkey, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8499-9979>, e-mail: volkanala@mersin.edu.tr

Demirbilek Ulviye, Mathematics Department, Science and Letters Faculty, Mersin University, Mersin, Turkey, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5767-1089>, e-mail: udemirbilek@mersin.edu.tr

Mamedov Khanlar Rashid, Mathematics Department, Science and Letters Faculty, Mersin University, Mersin, Turkey, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3283-9535>, e-mail: hanlar@mersin.edu.tr

**О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ СОГЛАСОВАННОГО РАВНОМОЩНОГО
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ
УСОВЕРШЕНСТВОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА
ПОД-УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ****В. Ала, Ю. Демирбилек, К.Р. Мамедов***Мерсинский университет, Мерсин, Турция**E-mail: volkanala@mersin.edu.tr*

В настоящей работе рассматривается согласованное равномошное волновое уравнение с целью нахождения его точного решения. Данное уравнение играет важную роль в физике и задает интересную модель определения изменяющихся волн со слабой нелинейностью. Целью работы является представление нового точного решения согласованного равномошного волнового уравнения. Для этого авторы используем эффективный метод, называемый усовершенствованным функциональным методом под-уравнения Бернулли (IBSEFM). На основе значений решений, двумерные и трехмерные графики и контурные поверхности строятся с привлечением математического программного обеспечения. Полученные результаты подтверждают, что IBSEFM является мощным математическим аппаратом для решения нелинейных согласованных уравнений в частных производных, возникающих в математической физике.

Ключевые слова: усовершенствованный функциональный метод под-уравнения Бернулли; согласованное равномошное волновое уравнение; волновое преобразование.

Литература

1. Baleanu, D. Fractional Dynamics and Control / D. Baleanu, J.A.T. Machado, A.C.J. Luo (Eds.). – Springer-Verlag New York, 2012. – 310 p.
2. Podlubny, I. Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications / I. Podlubny // Mathematics in Science and Engineering. – Vol. 198. – San Diego, CA: Academic Press, 1999. – 340 p.
3. Miller, K.S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K.S. Miller, B. Ross. – New York: Wiley, 1993. – 366 p.
4. Mitigating Internet bottleneck with fractional temporal evolution of optical solitons having quadratic-cubic nonlinearity / H. Rezazadeh, M.S. Osman, M. Eslami *et al.* // Optik. – 2018. – Vol. 164. – P. 84–92.
5. Yildirim, A. Homotopy Perturbation Method for Solving the Space-Time Fractional Advection Dispersion Equation / A. Yildirim, H. Koçak // Advances in Water Resources. – 2009. – Vol. 32, Iss. 12. – P. 1711–1716.
6. New Exact Solutions of Nonlinear Conformable Time-Fractional Phi-4 Equation / H. Rezazadeh, H. Tariq, M. Eslami *et al.* // Chinese Journal of Physics. – 2018. – Vol. 56, Iss. 6. – pp. 2805–2816.
7. Abdel-Salam, A. Solution of Nonlinear Space-Time Fractional Differential Equations using the Fractional Riccati Expansion Method / A. Abdel-Salam, B.A. Emad, A.Y. Eltyabev // Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–6. – Article ID 846283.
8. Shallal, M.A. Analytic Solution for the Space-Time Fractional Klein–Gordon and Coupled Conformable Boussinesq Equations / M.A. Shallal, H.N. Jabbar, K.K. Ali // Results in Physics. – 2018. – Vol. 8. – P. 372–378.
9. Abdeljawad, T. On Conformable Fractional Calculus / T. Abdeljawad // J. Comput. Appl. Math. – 2015. – Vol. 279. – P. 57–66.

10. Khalil, R. A new Definition of Fractional Derivative / R. Khalil, M. Horani, A. Yousef, M. Sababheh // J. Comput. Appl. Math. – 2014. – Vol. 264. – P. 65–70.
11. Baskonus, H.M. Exponential Prototype Structures for (2+1)-Dimensional Boiti–Leon–Penpinelli Systems in Mathematical Physics / H.M. Baskonus, H. Bulut // Waves in Random and Complex Media. – 2016. – Vol. 26, Iss. 2. – P. 189–196.
12. Ala, V. An Application of Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method to the Nonlinear conformable Time-Fractional SRLW Equation / V. Ala, U. Demirbilek, Kh.R. Mamedov // AIMS Mathematics. – 2020. – Vol. 5, Iss. 4. – P. 3751–3761.
13. Yel, G. On the Complex Solutions to the (3+1)-Dimensional Conformable Fractional Modified KdV–Zakharov–Kuznetsov Equation / G. Yel, T.A. Sulaiman, H.M. Bakonu // Modern Physics Letters B. – 2020. – Vol. 34, Iss. 5. – Article number 2050069.
14. Durur, H. New Analytical Solutions of Conformable Time Fractional Bad and Good Modified Boussinesq Equations / H. Durur, O. Tasbozan, A. Kurt // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. – 2020. – Vol. 5, Iss. 1. – P. 447–454.
15. Kurt, A. New Analytical and Numerical Results For Fractional Bogoyavlensky–Konopelchenko Equation Arising in Fluid Dynamics / A. Kurt // Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities. – 2020. – Vol. 35, Iss. 1. – P. 101–112.
16. Senol, M. New Analytical Solutions of Fractional Symmetric Regularized-Long-Wave Equation / M. Senol // Revista Mexicana de Fisica. – 2020. – Vol. 66, Iss. 3. – P. 297–307.
17. Atangana, A. New Properties of Conformable Derivative / A. Atangana, D. Baleanu, A. Alsaedi // Open Mathematics. – 2015. – Vol. 13, Iss. 1. – P. 889–898.
18. Baskonus, H.M. New Travelling Wave Prototypes to the Nonlinear Zakharov–Kuznetsov Equation with Power Law Nonlinearity / H.M. Baskonus, D. Altan Koç, H. Bulut // Nonlinear Science Letters A: Mathematics, Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 7. – P. 67–76.
19. Dusunceli, F. New Exponential and Complex Traveling Wave Solutions to the Konopelchenko–Dubrovsky model / F. Dusunceli // Adv. Math. Phys. – 2019. – Article ID 7801247.
20. Baskonus, H.M. On the Complex Structures of Kundu–Eckhaus Equation via Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method / H.M. Baskonus, H. Bulut // Waves Random Complex Media. – 2015. – Vol. 25, Iss. 4. – P. 720–728.

Поступила в редакцию 2 февраля 2021 г.

Сведения об авторах

Ала Волкан, кафедра математики, факультет естественных наук и литературы, Мерсинский университет, Мерсин, Турция, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8499-9979>, e-mail: volkanala@mersin.edu.tr

Демирбилек Улвиё, кафедра математики, факультет естественных наук и литературы, Мерсинский университет, Мерсин, Турция, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5767-1089>, e-mail: udemirbilek@mersin.edu.tr

Мамедов Ханлар Рашид, кафедра математики, факультет естественных наук и литературы, Мерсинский университет, Мерсин, Турция, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3283-9535>, e-mail: hanlar@mersin.edu.tr

MORPHOLOGY OF THE PHASE SPACE OF ONE MATHEMATICAL MODEL OF A NERVE IMPULSE PROPAGATION IN THE MEMBRANE SHELL

O.V. Gavrilova

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: gavrilovaov@susu.ru

The article is devoted to the study of the morphology of the phase space of a degenerate two-component mathematical model of a nerve impulse propagation in the membrane shell. A mathematical model is studied in the case when the parameter at the time derivative of the component responsible for the dynamics of the membrane potential is equal to zero, and the theorem about the fact that the phase space is simple in this case is proved. A mathematical model is also considered in the case when the parameter at the time derivative of the component responsible for the ion currents is equal to zero, and the theorem on the presence of singularities of Whitney assemblies is proved. Based on the results obtained, the phase space of the mathematical model is constructed in the case when the parameters at the time derivative of both components of the system are equal to zero. The author gives examples of the construction of the phase space, illustrating the presence of features in the phase space of the studied problems based on the Galerkin method.

Keywords: Sobolev type equations; phase space method; Showalter–Sidorov problem; Fitz Hugh–Nagumo system of equations.

Introduction

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded domain with boundary $\partial\Omega$ of class C^∞ . In the cylinder $Q = \Omega \times (0, T)$ consider the degenerate FitzHugh–Nagumo system of equations:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ \varepsilon_2 \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (1)$$

with the Dirichlet boundary condition

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (2)$$

The sought functions $w = w(s, t)$ and $v = v(s, t)$ describe the dynamics of the membrane potential and the behavior of sodium and potassium currents; $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ characterize the threshold of excitation, the speed of the threshold of excitation, electrical conductivity and repolarization of the environment. Initially, in [1, 2], a nondegenerate Fitz Hugh–Nagumo system of equations was investigated, where sought functions v and w , simulate the behavior of chemical elements in the membrane. It is characteristic of the system of equations (1) that, with the speed of one of the sought functions in the system, it always significantly exceeds the speed of the other sought function. This phenomenon is called Turing instability [3]. The conditional “regulators” of this behavior of the two initial functions are small parameters $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ at the time derivatives. The system of equations (1) in the case when $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ or $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ using the theory of singular perturbations was investigated in [4, 5]. In this case, the system of equations (1) was considered as a representative of the class of systems of the reaction-diffusion type, which have the form

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha_1 \Delta v + f_1(v, w), \\ \varepsilon_2 \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha_2 \Delta w + f_2(v, w). \end{cases}$$

This class, in particular, includes problems on the transmission of nerve impulses (except for the already mentioned system (1), the Hodgkin–Huxley system), combustion problems, some models of superconductivity, the Belousov–Zhabotinsky reaction, and others. The study of phase portraits for systems of the reaction-diffusion type was carried out both in the case of systems of a general form [6, 7] and for specific interpretations [8–11]. For some specific systems of reaction-diffusion equations, the existence of an inertial manifold was established [12, 13], and for a system of patterning equations, it was possible to construct a global attractor for $\Omega = \mathbf{R}^n$ [14]. The phase portrait of the system of equations (1) in the finite-dimensional case, as an example of a system performing relaxation oscillations, was considered in [15], when $\varepsilon_1 > 0$. To research the Turing instability in systems of the reaction-diffusion type using the consideration of degenerate equations was proposed by G.A. Sviridyuk and T.A. Bokareva in [16]. The possibility of the existence of several solutions of the Showalter–Sidorov problem

$$v(s, 0) = v_0$$

for the degenerate system of equations (1) with condition (2) in the case $\varepsilon_2 = 0$ was investigated in [17]. The presence of the degeneracy of equations in system (1) makes it possible to reduce the system of equations (1) with boundary condition (2) to semilinear equations unresolved with respect to the highest derivative (Sobolev type)

$$L\dot{x} = Mx + N(x), \ker L \neq \{0\}. \quad (3)$$

The statement of the problem of the theory of bifurcation of phase portraits of differential equations in the finite-dimensional case goes back to A.A. Andronov [18]. The word “bifurcation” means “furcation” and is used as the name of any abrupt change that occurs with a smooth change in parameters in any system: dynamic, ecological, etc. cycles, invariant sets and attractors were provided by the works of V.I. Arnold [19]. The first attempts to pass from finite-dimensional systems to the singularity of phase portraits of nonlinear partial differential equations in Banach spaces were undertaken in the works of R.M. Berger, R.M. Church, and I.G. Timouria [20, 21]. They showed that the phase spaces of some elliptic nonlinear partial differential equations have features called V.I. Arnold as Whitney folds or assembly. In the future, in the study of partial differential equations, the definition given by V.I. Arnold modified and acquired the following form. If there exist functions g_0, g_1, \dots, g_k , belonging to the class $C^\infty(\mathbf{B}'; \mathbf{R})$, such that the equation $G(s, v) = 0$ is equivalent to the equation $0 = g_0(v) + g_1(v)s + \dots + g_k(v)s^k + s^{k+1}$, for any $v \in \mathbf{B}'$, where \mathbf{B} is a Banach space and a function G of class $C^\infty(\mathbf{B}'; \mathbf{R})$, then we say that the equation $G(s, v) = 0$ defines Whitney k -assembly over an open set $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$.

G.A. Sviridyuk [22] was the first to begin the study of phase spaces for semilinear Sobolev-type equations (3). Later, together with V.O. Kazak [23] proved the simplicity of the phase space for the Hoff equation, when the coefficients of the equations have the same sign, and in work with I.K. Trineeva [24] proved the existence of a singularity such as Whitney folds and folds in the phase space of this equation, but for different signs of the coefficients of the equation. This showed that for semilinear Sobolev-type equations the existence of singularities in the phase space is possible for different parameters of the equation. The essence of the phase space method developed by G.A. Sviridyuk consists in reducing linear and semilinear Sobolev-type equations to an equation $\dot{x} = Sx + F(x)$, defined on a certain subspace, which is understood as a phase space (phase manifold for semilinear equations). This work continues the research begun in [16] for the Fitz Hugh–Nagumo system of equations, generalizing and considering all possible initial conditions and coefficients of the system of equations, including in the case of the parameters at the time derivative of both components of the system are equal to zero.

The article is organized as follows. In the first section, a mathematical model of the propagation of a nerve impulse in the membrane sheath is investigated in the case $\varepsilon_1 = 0$ and conditions for the simplicity of the phase space of the Fitz Hugh–Nagumo system of equations are found. In the second section, a mathematical model of the propagation of a nerve impulse in the membrane is investigated in the case $\varepsilon_2 = 0$ and conditions are found under which the phase space of a degenerate system has features such as Whitney folds. And also the phase space is constructed in the case $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. In the third section, examples of constructing phase spaces for each of the studied systems, including those with singularities, are given.

1. Mathematical Model of the Propagation of a Nerve Impulse in the Membrane Sheath in the Case of $\varepsilon_1 = 0$

In the cylinder $\Omega \times \mathbf{R}_+$ consider the system of equations

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (4)$$

with the boundary condition

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+. \quad (5)$$

For simplicity of presentation, we divide the reduction of problem (4), (5) to (3) in three stages.

Stage 1. Take a Banach space $H = H_1 \times H_2 = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, a Hilbert space $X = X_1 \times X_2 = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, whose scalar product is defined as $[x, \zeta] = \langle v, \xi \rangle + \langle w, \eta \rangle$, where $x = (v, w), \zeta = (\xi, \eta)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product defined on the space $L_2(\Omega)$. Denote by the space Y dual to H with respect to duality $[\cdot, \cdot]$. For spaces H, X, Y it is true

$$H \subset X \subset Y, \quad (6)$$

where all embeddings are dense and continuous.

Stage 2. Define linear operators $L, M : X \rightarrow Y$ formulas

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \eta \rangle, x, \zeta \in X, \quad (7)$$

$$[Mx, \zeta] = -\alpha_1 \sum_{i=1}^n \langle v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle - \alpha_2 \sum_{i=1}^n \langle w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle, x, \zeta \in X, \text{ dom } M = H. \quad (8)$$

By definition, the operators L, M have the properties $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, $M \in Cl(X, Y)$. Note that for all fixed values of the parameters $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ the operator M is L -sectorial [17].

Stage 3. Define nonlinear operator by formula

$$[N(x), \zeta] = \langle \beta_{12} w - \beta_{11} v, \xi \rangle + \langle \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3, \eta \rangle \quad (9)$$

and put $\text{dom } N = B = B_1 \times B_2 = L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$, $B^* = B_1^* \times B_2^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega) \times L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$ the space dual to B with

respect to duality $[\cdot, \cdot]$. For spaces H, X, Y, B, B^* at $n \leq 4$ it is true

$$H \subset B \subset X \subset B^* \subset Y, \quad (10)$$

where all embeddings are dense and continuous.

Lemma 1. [17] For all fixed values of the parameters $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{21} \in \mathbf{R}$, $n \leq 4$, operator $N : B \rightarrow Y$ belongs to the class C^∞ .

To construct the space X_α put $X_\alpha = X_1^0 \oplus X_\alpha^1$, where $X_1^0 = W_2^1(\Omega) \times \{0\}$, $X_\alpha^1 = \{0\} \times X^\alpha$, $X^\alpha = L_4(\Omega)$. For spaces H, X_α, B, X at $n \leq 4$ it is true

$$H \subset X_\alpha \subset B \subset X, \quad (11)$$

where all embeddings are dense and continuous.

In our case, all solutions of the system of equations (4) lie pointwise in a set P_{ε_1} of the form

$$P_{\varepsilon_1} = \{x \in X_\alpha : \sum_{i=1}^n \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle = \langle \beta_{12} w, \xi \rangle\}. \quad (12)$$

Theorem 1. For all fixed values of the parameters $\alpha_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbf{R}$, $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbf{R}_+$, $n \leq 4$, the phase space P_{ε_1} of problem (4), (5) is a simple Banach C^∞ -manifold.

Proof. Let's construct an auxiliary operator

$$\langle Av, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle, \quad (13)$$

$v, \xi \in H_1$. Since

$$|\langle Av, \xi \rangle| \leq a \|v\|_{H_1} \|\xi\|_{H_1},$$

where the constant $a \in \mathbf{R}_+$ depends on β_{11}, α_1 , the embedding constants (6), and does not depend on v, ξ , this proves the action of the operator $A: H_1 \rightarrow H_1^*$.

The resulting operator $A: H_1 \rightarrow H_1^*$ is coercive, i.e.

$$\lim_{\|v\|_{H_1} \rightarrow +\infty} \langle Av, v \rangle \|v\|_{H_1}^{-1} = \lim_{\|v\|_{H_1} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n \alpha_1 v_{s_i}^2 + \beta_{11} v^2) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n v_{s_i}^2 + v^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Moreover, the operator A is strictly monotone, i. e.

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle = \int_{\Omega} (\alpha_1 (\sum_{i=1}^n v_{1s_i} - v_{2s_i})^2 + \beta_{11} (v_1 - v_2)^2) ds > 0$$

as soon as $v_1 \neq v_2$. Finally, let us show the smoothness of the operator A . Really,

$$|\langle A'_v \xi_2, \xi_1 \rangle| = \left| \int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n \alpha_1 \xi_{1s_i} \xi_{2s_i} + \beta_{11} \xi_1 \xi_2) ds \right| \leq b \|\xi_1\|_{H_1} \|\xi_2\|_{H_1},$$

where the constant b depends only on α_1, β_{11} and the embedding constants (6). Therefore, the operator A is continuously differentiable, and from this, in an obvious way, its radial continuity follows.

Applying the Vishik–Minty–Browder theorem [25], We obtain the bijectivity of the operator $A: H_1 \rightarrow H_1^*$. Construct the operator $D(w) = (A^{-1}(w), w)$, $dom D = X_{\alpha}^1$. Since the operator D satisfies the conditions of the Vishik–Minty–Browder theorem, the statement of the theorem is true.

2. Mathematical Model of the Propagation of a Nerve Impulse in the Membrane Sheath in the Case of $\varepsilon_2 = 0$

In the cylinder $\Omega \times \mathbf{R}_+$ consider the system of equations

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3, \end{cases} \tag{14}$$

with boundary conditions (5). For simplicity of presentation, we divide the reduction of problem (5), (14) to (3) in three stages.

Due to the fact that the right-hand side of equations in system (14), boundary conditions (5) remained unchanged in comparison with (4), (5), stage 1 of the reduction of problem (5), (14) to (3) coincides with step 1 of item 1. The same is true for constructing the operator from step 2. At the same time, the operator will be different from the operator constructed in item 1, since the left side of the equations in system (14) has changed. Therefore, we construct a linear operator $L: X \rightarrow Y$ as follows

$$[Lx, \zeta] = \langle v, \zeta \rangle, \quad x, \zeta \in X. \tag{15}$$

Note, that for all fixed values of the parameters $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ the operator M is L -sectorial [17].

Stage 3 of the reduction of problem (5), (14) to (3) almost coincides with stage 3 of item 1. The only difference is in the construction of the space. X_{α} . Take $X_{\alpha} = X_1^0 \oplus X_{\alpha}^1$, where

$X_1^0 = \{0\} \times W_2^1(\Omega)$, $X_{\alpha}^1 = X^{\alpha} \times \{0\}$. For spaces H, X_{α}, B, X at $n \leq 4$ it is true

$$H \subset X_{\alpha} \subset B \subset X, \tag{16}$$

where all embeddings are dense and continuous. This means that for all fixed values of the parameters $\beta_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 2}$, $n \leq 4$, the operator N is a smooth class $C^{\infty}(X_{\alpha}, Y)$.

All solutions of the system of equations (14) lie pointwise in a set P_{ε_2} of the form

$$P_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in X_{\alpha} : -\langle v, \eta \rangle = \left\langle -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w + \frac{1}{\beta_{21}} w^3, \eta \right\rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}, \eta_{s_i} \right\rangle \right\}. \tag{17}$$

Lemma 2. [17] Let $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbf{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbf{R}_+$, $\beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2 v_1)$, $n \leq 4$, where v_1 is the first eigenvalue of the spectral problem

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= v\varphi, s \in \Omega, \\ \varphi(s) &= 0, s \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{18}$$

then for any vector $v \in X^\alpha$ there is a unique vector $w \in H_2$ such that $x = \text{col}(v, w) \in P_{\varepsilon_2}$.

Lemma 3. [17] For any $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbf{R}, \alpha_2, \beta_{21} \in \mathbf{R}_+, \beta_{22} \in (-\infty, \alpha_2 v_1), n \leq 4$, phase space of the system of equations (14) is a set P_{ε_2} and it is a simple Banach C^∞ -manifold.

Consider the case $\beta_{22} = \alpha_2 v_1$, put

$$X^{\alpha\perp} = \{v^\perp \in X^\alpha : \langle v^\perp, \varphi_1 \rangle = 0\}, H_2^\perp = \{w^\perp \in H_2 : \langle w^\perp, \varphi_1 \rangle = 0\}.$$

If $v \in X^{\alpha\perp}$ and $w \in H_2$ presented in the form $v = v^\perp + r\varphi_1$ and $w = w^\perp + q\varphi_1$, where $r, q \in \mathbf{R}, \varphi_1$ is the eigenfunction of the spectral problem (18) corresponding to the eigenvalue v_1 , then the set P_{ε_2} takes the following form:

$$P_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in X_\alpha : \begin{cases} \int_{\Omega} -v^\perp \eta^\perp ds = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \eta^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp \right) ds, \\ -\beta_{21} r = \int_{\Omega} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \varphi_1 ds \end{cases} \right\}. \tag{19}$$

If in the system of equations defining the set (17) is substituted instead of $\beta_{22} = \alpha_2 v_1$, then in order to obtain the first equation of the system (19) instead of η in (17) it is necessary to substitute $\eta = \eta^\perp$, and then to obtain the second equation (19) instead of η in (17) must be substituted $\eta = \varphi_1$.

Lemma 5. Let $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbf{R}_+, \beta_{22} = \alpha_2 v_1$, then for any vector $v^\perp \in X^{\alpha\perp}$ there exists a unique vector $w^\perp \in H_2^\perp$ such that

$$\int_{\Omega} -v^\perp \eta^\perp ds = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \eta^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp \right) ds.$$

Proof. The proof of this lemma is similar to the proof of Lemma 2. Fix $q \in \mathbf{R}$ and introduce the auxiliary operator $A: H_2^\perp \rightarrow H_2^{*\perp}$

$$\langle A(w^\perp + q\varphi_1), \eta \rangle = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \eta^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \sum_{i=1}^n w_{s_i}^\perp \eta_{s_i}^\perp + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp \right) ds, \tag{20}$$

where $H_2^{*\perp} = \{h \in H_2^* : \langle h, \varphi_1 \rangle = 0\}$. Then

$$|\langle A(w^\perp + q\varphi_1), \eta^\perp \rangle| \leq C_1 (\|w^\perp\|_{H_2^\perp} + \|w^\perp\|_{H_2^\perp}^2 + \|w^\perp\|_{H_2^\perp}^3) \|\eta^\perp\|_{H_2},$$

where the constant $C_1 \in \mathbf{R}_+$ depends on $\alpha_2, \beta_{21}, \beta_{22}$ and the embedding constants (6), but does not depend on w^\perp, η^\perp .

Note that

$$\begin{aligned} & \lim_{\|w^\perp\|_{H_2^\perp} \rightarrow +\infty} \frac{\langle A(w^\perp + q\varphi_1), w^\perp \rangle}{\|w^\perp\|_{H_2^\perp}^{-1}} = \\ & = \lim_{\|w^\perp\|_{H_2^\perp} \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} (w^\perp)^2 + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \sum_{i=1}^n (w_{s_i}^\perp)^2 + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \right) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n (w_{s_i}^\perp)^2 + (w^\perp)^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \langle A(w_1^\perp + q\varphi_1) - A(w_2^\perp + q\varphi_1), w_1^\perp - w_2^\perp \rangle &= \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \left(\sum_{i=1}^n w_{1s_i}^\perp - \sum_{i=1}^n w_{2s_i}^\perp \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 + \frac{1}{\beta_{21}} ((w_1^\perp + q\varphi_1)^3 - (w_2^\perp + q\varphi_1)^3)(w_1^\perp - w_2^\perp) \right) ds = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \left(\sum_{i=1}^n w_{1s_i}^\perp - \sum_{i=1}^n w_{2s_i}^\perp \right)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_{21}} (w_1^\perp - w_2^\perp)^2 ((w_1^\perp + q\varphi_1)^2 + (w_1^\perp + q\varphi_1)(w_2^\perp + q\varphi_1) + (w_2^\perp + q\varphi_1)^2) \right) ds > 0, \end{aligned}$$

as soon as $w_1^\perp \neq w_2^\perp$. This means that the operator $A: H_2^\perp \rightarrow H_2^{*\perp}$ is coercive and strictly monotone. Moreover,

$$\langle A'_{w^\perp} w_1^\perp, w_2^\perp \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} \sum_{i=1}^n w_{1s_i}^\perp w_{2s_i}^\perp - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w_1^\perp + 3 \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^2 w_1^\perp w_2^\perp \right) ds,$$

where $w_1^\perp, w_2^\perp \in H_2^\perp$, i.e. the operator A is smooth, which means that it is also radially continuous. By virtue of the Vishik–Minty–Browder theorem [25], the assertion of the lemma is true.

Let us turn to the second equation of the system that defines the set (19). Transforming the resulting equation, we get:

$$q^3 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3q^2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds + 3q \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds + \int_{\Omega} \varphi_1 (w^\perp)^3 ds + \beta_{21} r = 0. \quad (21)$$

Equation (21) is a cubic equation of general form $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$ with respect to q . According to Cardano's formulas, any cubic equation of general form can be reduced to the canonical form $y^3 + py + e = 0$ with the coefficients

$$\begin{aligned} a &= \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4, b = 3 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds, c = 3 \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds, \\ d &= \int_{\Omega} \varphi_1 (w^\perp)^3 ds - \beta_{21} r, p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, e = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \\ Res(q, w^\perp) &= p^3 + e^2, \\ R(q, w^\perp) &= q^2 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 2q \int_{\Omega} \varphi_1^3 w^\perp ds + \int_{\Omega} \varphi_1^2 (w^\perp)^2 ds \end{aligned} \quad (22)$$

by replacing $q = y - \frac{b}{3a}$.

For convenience of further consideration, we introduce the following sets:

$$H_2^0 = \{w \in H_2 : R(q, w^\perp) = 0\},$$

$$H_2^+ = \{w \in H_2 : Res(q, w^\perp) > 0\},$$

$$H_2^- = \{w \in H_2 : Res(q, w^\perp) < 0\}.$$

Theorem 2. For any $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbf{R}, \alpha_2, \beta_{21} \in \mathbf{R}_+, r \in \mathbf{R}, \beta_{22} = \alpha_2 v_1, n \leq 4$, the phase space of the system of equations (14) is a set P_{ε_2} and it has singularities of the Whitney 2-assembly type.

Proof. The validity of the theorem follows from Cardano's formulas for equation (21) and the definition of Whitney folds.

In the case $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, when the phase space

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (23)$$

and (4) will be a set of the form

$$P_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \left\{ x \in X_\alpha : \begin{cases} \sum_{i=1}^n \langle \alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i} \rangle + \langle \beta_{11} v, \xi \rangle = \langle \beta_{12} w, \xi \rangle, \\ -\langle v, \eta \rangle = \left\langle -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w + \frac{1}{\beta_{21}} w^3, \eta \right\rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}, \eta_{s_i} \right\rangle \end{cases} \right\}. \quad (24)$$

3. Examples of Constructing Phase Spaces

Based on the modified Galerkin–Petrov method and the phase space method, an algorithm was constructed that allows one to find the form of the phase space and its image depending on the values of the coefficients of the system and its degeneracy. The algorithm is implemented in the form of a computer program complex for carrying out computational experiments on the construction of phase spaces, including those with peculiarities.

Example 1. It is required to find the form of the phase space of the system of equations

$$\begin{cases} 0 = v_{ss} - v + w, \\ w_t = w_{ss} - w - v - w^3 \end{cases} \quad (25)$$

with boundary condition

$$v(s, t) = w(s, t) = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (26)$$

at $\Omega = (0, \pi)$.

We represent approximate solutions (25), (26) in the form $\tilde{v}(s, t) = r\varphi_1(s) + v^\perp, \tilde{w}(s, t) = q\varphi_1(s) + w^\perp$, where $r = v_1(t), v^\perp = \sum_{i=2}^m v_i(t)\varphi_i(s), q = w_1(t),$

$$w^\perp = \sum_{i=2}^m w_i(t)\varphi_i(s).$$

The phase space (25), (26) is a simple C^∞ -manifold. For a given system, the phase space can be described based on:

$$\begin{cases} -2r + q = 0, \\ -5v^\perp + w^\perp = 0. \end{cases} \quad (27)$$

It is shown in Fig. 1.

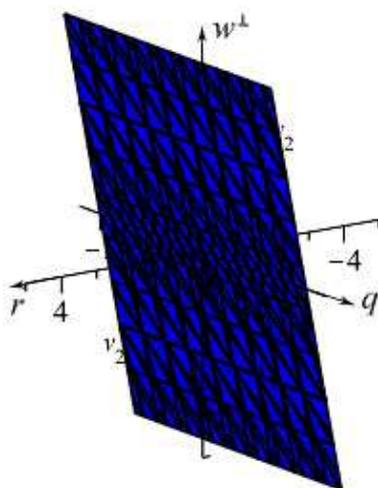


Fig. 1. Phase space of (25), (26)

Example 2. It is required to find the form of the phase space of the system of equations

$$\begin{cases} v_t = v_{ss} - v + w, \\ 0 = w_{ss} - w - v - w^3 \end{cases} \quad (28)$$

with boundary condition

$$v(s, t) = w(s, t) = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (29)$$

at $\Omega = (0, \pi)$.

We represent approximate solutions (28), (29) in the form $\tilde{v}(s, t) = r\varphi_1(s) + v^\perp, \tilde{w}(s, t) = q\varphi_1(s) + w^\perp$, where $r = v_1(t), v^\perp = \sum_{i=2}^m v_i(t)\varphi_i(s), q = w_1(t), w^\perp = \sum_{i=2}^m w_i(t)\varphi_i(s)$.

According to Theorem 2, in the case when $\varepsilon_2 = 0$, the phase space (28), (29), under certain conditions, can contain a Whitney 2-assembly. For a given system, the phase space can be described on the basis of:

$$\begin{cases} -\frac{3q^3 - 6q(w^\perp)^2 + 2\pi r + 4\pi q}{2\pi} = 0, \\ -\frac{6q^2 w^\perp - 3(w^\perp)^3 + 2\pi v^\perp + 10\pi w^\perp}{2\pi} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Phase space in the case when $\varepsilon_2 = 0$ shown in Fig. 2.

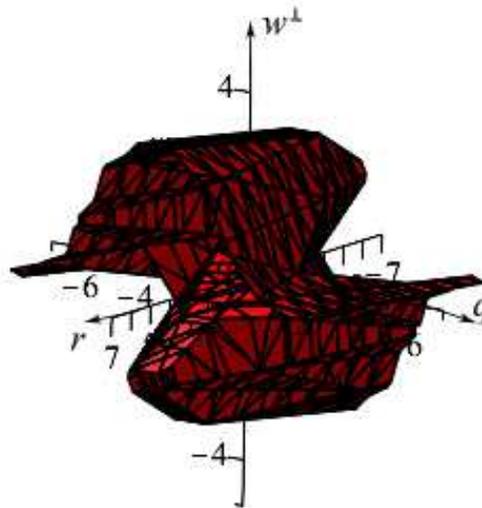


Fig. 2. Phase space of (28), (29)

Example 3. It is required to find the form of the phase space of the system of equations

$$\begin{cases} 0 = v_{ss} - v + w, \\ 0 = w_{ss} - w - v - w^3 \end{cases} \quad (31)$$

with boundary condition

$$v(s, t) = w(s, t) = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (32)$$

at $\Omega = (0, \pi)$.

We represent approximate solutions (31), (32) in the form $\tilde{v}(s, t) = r\varphi_1(s) + v^\perp$, $\tilde{w}(s, t) = q\varphi_1(s) + w^\perp$, where $r = v_1(t)$, $v^\perp = \sum_{i=2}^m v_i(t)\varphi_i(s)$, $q = w_1(t)$, $w^\perp = \sum_{i=2}^m w_i(t)\varphi_i(s)$.

According to Theorem 3, the phase space (31), (32) in the case when ε_1 and ε_2 both are zero, is the intersection of the phase spaces (27) and (30), it is shown in Fig. 3.

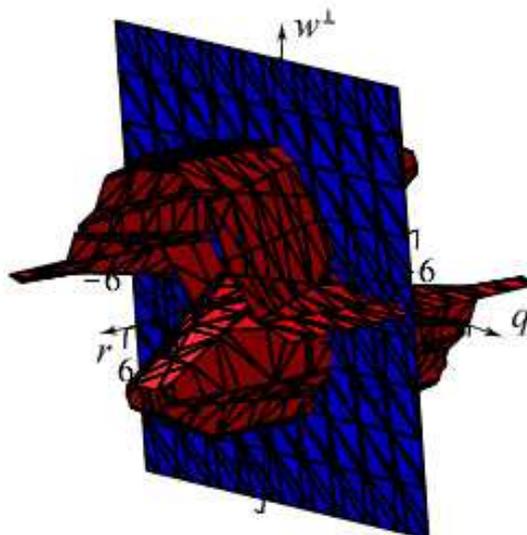


Fig. 3. Phase space of (31), (32)

The research was funded by RFBR and Chelyabinsk Region, project number 20-41-740023.

References

1. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, Vol. 1, no. 6, pp. 445–466. DOI: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, Vol. 50, Iss. 10, pp. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235
3. Samarskiy A.A., Kurdyumov S.P., Akhromeeva T.S., Malinetskiy G.G. Nestatsionarnyye struktury i diffuzionnyy khaos (Nonstationary Structures and Diffusion Chaos). Moscow, Nauka Publ., 1991, 560 p. (in Russ.).
4. Kolesov A.Yu. Stability of relaxation auto-oscillations in systems with diffusion. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1987, Vol. 294, no. 3, pp. 575–578. (in Russ.).
5. Borisov V.G. On Parabolic Boundary Value Problems with a Small Parameter on the Derivatives with Respect to t . *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1988, Vol. 59, no. 2, pp. 287–302. DOI: 10.1070/SM1988v059n02ABEH003136
6. Babin A.V., Vishik M.I. *Attraktory evolyutsionnykh uravneniy* (Attractors of Evolutionary Equations). Moscow, Nauka Publ., 1989, 293 p. (in Russ.).
7. Babin A.V., Vishik V.I. Regular Attractors of Semigroups and Evolution Equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1983, Vol. 62, no. 4, pp. 441–491.
8. Marion M. Attractors for Reaction Diffusion Equations: Existence and Estimate of Their Dimension. *Applied Analysis*, 1987, Vol. 25, Iss. 1-2, pp. 101–147.

9. Doering Ch., Gibbon J. D., Holm D., Nicolaenko B. Low Dimensional Behavior in the Complex Ginzburg–Landau Equation. *Nonlinearity*, 1988, no. 1, pp. 279–309. DOI: 10.1080/00036818708839678

10. Bartuccelli M., Constantin P., Doering C., Gibbon J.D., Gisselalt M. On the Possibility of Soft and Hard Turbulence in the Complex Ginzburg–Landau Equation. *Physica D*, 1990, Vol. 44, Iss. 3, pp. 421–444. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90156-J

11. Mallet-Paret J., Sell G.R. Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equations in Higher Space Dimensions. *Journal of the American Mathematical Society*, 1988, no. 1, pp. 805–866. DOI: 10.1090/S0894-0347-1988-0943276-7

12. Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Temam R. *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations*, Springer, N.Y., 1989, 123 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-3506-4

13. Jolly M.S. Explicit Construction of an Inertial Manifold for Reaction Diffusion Equation. *Journal of Differential Equations*, 1989, Vol. 78, no. 2, pp. 220–261.

14. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R., Some Global Dynamical Properties of a Class of Pattern Formation Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 1989, Vol. 14, Iss. 2, pp. 245–297. DOI: 10.1080/03605308908820597

15. Tikhonov A.N. Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1952, Vol. 31(73), no. 3, pp. 575–586. (in Russ.).

16. Bokareva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney Assemblies of Phase Spaces of Certain Semilinear Equations of Sobolev Type. *Mathematical Notes*, 1994, Vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776

17. Manakova, N.A., Gavrilova O.V. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2018, Vol. 11, no. 4, pp. 161–168. DOI: 10.14529/mmp180413

18. Andronov A.L. Matematicheskie problemy teorii avtokolebaniy (Mathematical Problems of the Theory of Self-Oscillations). *Pervaya Vcemirnaya konferentsiya po avtokolebaniyam* (Proc. First World Conference on Self-Oscillations), Moscow, Leningrad, GTTI Publ, 1933, pp. 32–71. (in Russ.).

19. Arnol'd V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu.S., Shilnikov L.P. Bifurcation theory. *Dynamical systems – 5, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 5*, Moscow, VINITI Publ., 1986, pp. 5–218. (in Russ.).

20. Berger M.S., Church P.T., Timourian Y.G. Folds and Cusps in Banach Spaces with Applications to Nonlinear Partial Differential Equations I. *Indiana University Mathematics Journal*, 1985, Vol. 34, no. 4, pp. 1–19.

21. Berger M.S., Church P.T., Timourian Y.G. Folds and Cusps in Banach spaces with Applications to Nonlinear Partial Differential Equations, II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1988, Vol. 307, no. 1, pp. 225–244. DOI: 10.1090/S0002-9947-1988-0936814-8

22. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase Spaces of a Class of Operator Semilinear Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, Vol. 26, no. 2, pp. 188–195.

23. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, Vol. 71, no. 2, pp. 262–266.

24. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney fold in the phase space of the Hoff equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, Vol. 49, no. 10, pp. 49–55.

25. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nien lineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974, 281 s. (In Deutsch).

Received July 12, 2021

Information about the author

Gavrilova Ol'ga Vital'evna, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: gavrilovaov@susu.ru

МОРФОЛОГИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА В МЕМБРАННОЙ ОБОЛОЧКЕ**О.В. Гаврилова***Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: gavriloovaov@susu.ru*

Статья посвящена изучению морфологии фазового пространства вырожденной двухкомпонентной математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке. Математическая модель изучена в случае, когда параметр при производной по времени компоненты, отвечающей за динамику мембранного потенциала, равен нулю, доказана теорема о том, что фазовое пространство в этом случае является простым. Также, рассмотрена математическая модель в случае, когда параметр при производной по времени компоненты, отвечающей за ионные токи, равен нулю и доказана теорема о наличии особенностей типа сборок Уитни. На основе полученных результатов, строится фазовое пространство математической модели в случае, когда параметры при производной по времени обоих компонент системы равны нулю. Приведены примеры построения фазовых пространств, иллюстрирующие наличие особенностей в фазовых пространствах исследуемых задач на основе метода Галеркина.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; метод фазового пространства; задача Шоултера–Сидорова; система уравнений Фитц Хью–Нагумо.

Литература

1. Fitzhugh, R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. Fitzhugh // *Biophysical Journal*. – 1961. – Vol. 1, no. 6. – P. 445–466.
2. Nagumo, J. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. – 1962. – Vol. 50, Iss. 10. – P. 2061–2070.
3. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / А.А. Самарский, С.П. Курдюмов, Т.С. Ахромеева, Г.Г. Малинецкий. – М.: Наука, 1991. – 560 с.
4. Колесов, А.Ю. Устойчивость релаксационных автоколебаний в системах с диффузией / А.Ю. Колесов // *ДАН СССР*. – 1987. – Т. 294, № 3. – С. 575–578.
5. Борисов, В.Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t / В.Г. Борисов // *Математический сборник*. – 1986. – Т. 131(173), № 3(11). – С. 293–308.
6. Бабин, А.В. Аттракторы эволюционных уравнений / А.В. Бабин, М.И. Вишик. – М.: Наука, 1989. – 293 с.
7. Babin, A.V. Regular Attractors of Semigroups and Evolution equations / A.V. Babin, V.I. Vishik // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. – 1983. – Vol. 62, no. 4. – P. 441–491.
8. Marion, M. Attractors for Reaction Diffusion Equations: Existence and Estimate of Their Dimension / M. Marion // *Applied Analysis*. – 1987. – Vol. 25, Iss. 1-2. – P. 101–147.
9. Doering, Ch. Low Dimensional Behavior in the Complex Ginzburg – Landau Equation / Ch. Doering, J.D. Gibbon, D. Holm, B. Nicolaenko // *Nonlinearity*. – 1988. – no. 1. – P. 279–309.
10. On the Possibility of Soft and Hard Turbulence in the Complex Ginzburg–Landau Equation / M. Bartuccelli, P. Constantin, C. Doering, J.D. Gibbon, M. Gisselalt // *Physica D*. – 1990. – Vol. 44, Iss. 3. – P. 421–444.
11. Mallet-Paret, J. Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equations in Higher Space Dimensions / J. Mallet-Paret, G.R. Sell // *Journal of the American Mathematical Society*. – 1988. – no. 1. – P. 805–866.

12. Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations / P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam. – New York: Springer, 1989. – 123 p.
13. Jolly, M.S. Explicit Construction of an Inertial Manifold for Reaction Diffusion Equation / M.S. Jolly // *Journal of Differential Equations*. – 1989. – Vol. 78, no. 2. – P. 220–261.
14. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R., Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations / B. Nicolaenko, B. Scheurer, R. Temam // *Communications in Partial Differential Equations*. – 1989. – Vol. 14, Iss. 2. – P. 245–297.
15. Тихонов, А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А.Н. Тихонов // *Математический сборник*. – 1952. – Т. 31(73), № 3. – P. 575–586.
16. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // *Математические заметки*. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.
17. Manakova, N.A. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2018. – Т. 11, № 4. – С. 161–168.
18. Андронов, А.Л. Математические проблемы теории автоколебаний / А.Л. Андронов // *Первая Всемирная конференция по автоколебаниям*. – М.; Л.: ГТТИ, 1933. – С. 32–71.
19. Арнольд, В.И. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // *Динамические системы – 5. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. – М.: ВИНТИ, 1986. – С. 5–218.
20. Berger, M.S. Folds and Cusps in Banach Spaces with Applications to Nonlinear Partial Differential Equations, I / M.S. Berger, P.T. Church, Y.G. Timourian // *Indiana University Mathematics Journal*. – 1985. – Vol. 34, no. 4. – P. 1–19.
21. Berger, M.S. Folds and Cusps in Banach Spaces with Applications to Nonlinear Partial Differential Equations, II / M.S. Berger, P.T. Church, Y.G. Timourian // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1988. – Vol. 307, no. 1. – P. 225–244.
22. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // *Дифференциальные уравнения*. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.
23. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // *Математические заметки*. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.
24. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // *Известия Вузов. Математика*. – 2005. – № 10. – С. 54–60.
25. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию 12 июля 2021 г.

Сведения об авторе

Гаврилова Ольга Витальевна – кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: gavrilovaov@susu.ru

ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ДИФFUЗИОННЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Г.Д. Кордюмов

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: georgekord300@gmail.com

Статья посвящена диффузионным моделям. Рассматриваются теоретические и методологические основы диффузионных моделей финансовой математики. Как и экономическая система, современный мир стремительно развивается. Кажется невозможным предсказать, что произойдет завтра, какое появление новых технологий окажет влияние на рынок и как изменение случайных факторов повлияет на продукт и рынок в целом. Диффузионные модели – один из основных методов исследования экономических объектов и процессов. Вот почему так важно разработать диффузионную модель.

Мы предлагаем расширение применимости моделей путем перехода от стохастических уравнений в форме Ито к уравнениям с так называемыми производными в среднем.

Для этого, следуя Э. Нельсону, вводим понятия производных в среднем справа и слева.

В уравнении с производным средним не участвует винеровский процесс, поэтому заранее не предполагается, что решение является диффузионным.

В статье дается описание некоторых известных диффузионных моделей, в которых переход от уравнений типа стохастического дифференциального уравнения в форме Ито к уравнениям, удовлетворяющим системе уравнений с производными в среднем, приводит к расширению множества возможных решений.

Также мы рассматриваем обобщение геометрического броуновского движения, которое удовлетворяет системе стохастических уравнений с производными в среднем и может покрывать более широкий класс задач.

Ключевые слова: диффузионные модели; модели в финансовой математике; уравнение Ито; производные в среднем; геометрическое броуновское движение; винеровский процесс.

Многие задачи диффузии решаются методами интегрального преобразования, например, методом операционного расчета. Существует несколько типов таких преобразований: преобразование Фурье, Лапласа, Ханкеля, Мейера, Конторовича-Лебедева, ряд других.

В ходе интегральных преобразований к каждому из членов дифференциального уравнения (а также к граничным условиям) применяется интегральное преобразование, в результате чего вместо уравнения и граничных условий по концентрациям создается уравнение и граничные условия получены относительно его образа.

Диффузионная модель развития процентных ставок в финансовой математике – это математическая модель, которая описывает динамику процентных ставок в форме стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа. Семейство моделей процентных ставок очень разнообразно, включая однофакторные модели (спотовые модели), многомерные модели и модели форвардных кривых [2].

Производные в среднем. Пусть $\zeta(t)$ – стохастический процесс в \mathbb{R}^n , заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) , который является L_1 -случайной величиной для всех $t \in [0, T] \subset R$. Обозначим через N_t^ζ σ -подалгебру σ -алгебры F , порожденную прообразами борелевских множеств при отображении $\zeta(t)$, а через E_t^ζ – условное математическое ожидание относительно N_t^ζ . Следуя Э. Нельсону, введем понятия производных в среднем справа и слева [5].

Определение 1. (i) Производная в среднем справа $D\zeta(t)$ процесса $\zeta(t)$ в момент времени t это L_1 -случайная величина вида

$$D\zeta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{\zeta} \left(\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right), \quad (1)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta t > 0$.

(ii) Производная в среднем слева $D\zeta(t)$ процесса $\zeta(t)$ в момент времени t это L_1 -случайная величина

$$D\zeta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{\zeta} \left(\frac{\zeta(t) - \zeta(t-\Delta t)}{\Delta t} \right), \quad (2)$$

где обозначения такие же, как в (i)[5].

В уравнении с производным средним не участвует винеровский процесс, то есть мы можем покрыть более широкий класс решений.

Напомним, что процесс Ито – это процесс вида

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t \beta(s) ds + \int_0^t A(s) dw(s), \quad (3)$$

где первый интеграл в правой части – интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито. Процесс Ито, называется диффузионным процессом, если $\beta(t)$ и $A(t)$ измеримы относительно N_t^{ζ} [4].

Теорема 1. Для диффузионного процесса $\zeta(t)$ вида (3) $D\zeta(t)$ существует и равно $\beta(t)$.

Утверждение Теоремы следует из того, что $\int_0^t A(s) dw(s)$ является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса.

Введем дифференциальный оператор D_2 формулой

$$D_2\zeta(t) = E_t^{\zeta} \left(\frac{(\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t))(\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t))^*}{\Delta t} \right), \quad (4)$$

где $(\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t))$ – столбец (вектор в \mathbb{R}^n), строка (транспонированный или сопряженный вектор) и предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ [5].

Определение 2. D_2 называется квадратичной производной в среднем. D_2 принимает значения в полях симметрических неотрицательно определенных матриц [4].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито вида

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))dt + A(t, \zeta(t))dw(t). \quad (5)$$

Теорема 2. (i) Решение уравнения (5) удовлетворяет следующей системе уравнений с производными в среднем

$$\begin{aligned} D\zeta(t) &= a(t, \zeta(t)), \\ D_2\zeta(t) &= \alpha(t, \zeta(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $a(t, x)$ – векторное поле, а $\alpha(t, x)$ – поле симметрических матриц вида $A(t, x)A(t, x)^*$, где $A(t, x)^*$ – транспонированная матрица A [4].

(ii) если $\zeta(t)$ – решение системы (6), в котором $a(t, x)$ – векторное поле, а $\alpha(t, x)$ – поле неотрицательно определенных симметрических матриц, то могут существовать его решения, которые не являются решениями уравнение типа (5), т. е. $\zeta(t)$ может принадлежать более широкому классу процессов, чем диффузионные.

Доказательство. Действительно, нетрудно видеть, что в уравнении (6), построенном по уравнению (5), снос $a(t, x)$ является правой частью в первом уравнении системы (6), а $\alpha(t, x) = A(t, x)A(t, x)^*$. Однако при переходе от (6) к уравнению типа (5) нахождение $A(t, x)$ по $\alpha(t, x)$ требу-

ет дополнительных предположений и, главное, в системе (6) не задействован винеровский процесс, т.е. $\zeta(t)$ заведомо может не быть диффузионным и не удовлетворять никакому уравнению в форме Ито.

Перейдем к описанию некоторых известных диффузионных моделей, в которых переход от уравнений типа (5) к уравнениям типа (6) приводит к расширению множества возможных решений.

Однофакторная модель краткосрочных процентных ставок выглядит следующим образом:

$$dr = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r)dw_t,$$

где w_t – винеровский процесс.

Простейшая модель, предложенная Мертоном в 1973 году, описывается уравнением:

$$dr = \mu dt + \sigma dw_t,$$

где μ и σ – константы [6]

Этот метод оценки стоимости свопа кредитного дефолта был разработан Робертом Мертоном в 1978 году. Метод Мертона основан на модели Блэка–Шоулза для расчета стоимости европейского опциона. Разница в том, что в методе Р. Мертона динамика стоимости капитализации компании следует геометрическому броуновскому движению:

$$dV = \mu V dt + \sigma_v V dW \quad (7)$$

где V – суммарная стоимость активов фирмы; μ – ожидаемая доходность активов фирмы; σ_v – волатильность стоимости активов фирмы; W – винеровский процесс [2].

Модель Васичека, предложенная им в 1977 году, предполагает, что процентные ставки колеблются около определенного среднего уровня:

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)\Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t},$$

где $\sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$ – винеровский процесс, β – средний уровень процентной ставки.

Эта модель была первой, которая учитывала тенденцию процентных ставок возвращаться к среднему значению (средняя инверсия): процентные ставки не могут расти бесконечно, потому что их высокий уровень ограничивает экономическую активность и после определенного предела ничего не достигает; с другой стороны, цены, конечно, снизу ограничены. Поэтому ставки должны быть в ограниченной зоне.

Недостатком модели Васичека является то, что она использует нормальное распределение для коэффициента дрейфа волатильности, которое теоретически допускает отрицательные ставки [3].

Следует отметить, что во всех перечисленных моделях, кроме (7), заранее не предполагается, что решение является диффузионным, и в этих случаях переход к системам типа (6) проводится достаточно просто и расширяет множество возможных решений. Для геометрического броуновского движения (7) это не так очевидно.

Рассмотрим следующее обобщение геометрического броуновского движения [1], которое также расширяет множество возможных решений, а именно, процесс $S(t)$, описываемый следующей системой стохастических дифференциальных уравнений

$$dS^a(t) = S^a a^a(t; S^1(t), \dots, S^n(t))dt + S^a A^a_\beta(t; S^1(t), \dots, S^n(t))dw^\beta, \quad (8)$$

где w^β – независимые винеровские процессы в \mathbb{R}^1 , образующие вместе винеровский процесс в \mathbb{R}^n , $a(t, x)$ – векторное поле на \mathbb{R}^n , $A(t, x)$ – отображение из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство линейных операторов $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, а A^a_β обозначает матрицу оператора A . Также отметим, что геометрическое броуновское движение (7) получается из (8) в случае, когда $a(t)$ и $A(t)$ зависят только от времени t (т. е. не зависят от точки $x \in \mathbb{R}^n$). В формуле (8) мы используем соглашение Эйнштейна о суммировании по одинаковым верхнему и нижнему индексам, т. е. в этом случае знак суммы не пишется.

Если координаты S^a решения (8) положительны при всех t , то по формуле Ито процесс

$$\xi(t) = \ln S(t) = \{\ln S^1(t), \dots, \ln S^n(t)\}$$

удовлетворяет уравнению

$$d\xi(t) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \text{diag}(AA^*) \right) (t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw(t), \quad (9)$$

где $\text{diag}(AA^*)$ – вектор, составленный из диагональных элементов матрицы AA^* (A^* – транспонированная A). Также по формуле Ито, если процесс $\xi(t)$ удовлетворяет (9), то процесс

$$S(t) = \exp \xi(t) = \left(\exp \xi^1(t), \dots, \exp \xi^n(t) \right)$$

удовлетворяет (8). Укажем, что в данной ситуации координаты S^a положительны [1].

Обозначим через B симметрическую положительно определенную матрицу AA (где A – транспонированная матрица A). Если процесс удовлетворяет уравнению (8), то он в свою очередь будет удовлетворять следующему уравнению с производными в среднем:

$$\begin{cases} D\xi(t) = \left(a - \frac{1}{2} \text{diag } B \right) (t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = B(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (10)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} D\xi(t) + \frac{1}{2} \text{diag } D_2(\xi(t)) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = B(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (11)$$

Пусть $\xi(t)$ – решение уравнения (10) (или (11)). Мы называем его логарифмом процесса

$$S(t) = \exp \xi(t) = \left(e^{\xi^1(t)}, \dots, e^{\xi^n(t)} \right) [1].$$

Отметим, что если уравнение (10) (или (11)) задано априори с некоторым B , то процесс $S(t) = \exp \xi(t)$ может не удовлетворять (8). Таким образом, модели, основанные на уравнениях (10) или (11), покрывают более широкий класс задач, чем те, которые основаны на (7) и (8).

Литература

1. Gliklikh, Y.E. Optimal Solutions For Inclusions Of Geometric Brownian Motion Type With Mean Derivatives / Y.E. Gliklikh, O.O. Zheltikova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 38–50.
2. Shreve, S.E. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models / S.E. Shreve. – Springer-Verlag New York, 2004. – 550 p. – P. 151
3. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика. – 2008. – 430 с.
4. Гликлик, Ю.Е. О полноте стохастических потоков, порожденных уравнениями с текущими скоростями / Ю.Е. Гликлик, Т.А. Щичко // Теория вероятностей и ее применения. – 2019. – Т. 64, № 1. – С. 3–16.
5. Гликлик, Ю.Е. Производные в среднем случайных процессов и их применения / Ю.Е. Гликлик. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. – 194 с.
6. Казанцев, С.Ю. Использование диффузионной модели в прогнозировании долей рынка / С.Ю. Казанцев. – 2012. – С. 248–260.

Поступила в редакцию 12 мая 2021 г.

Сведения об авторе

Кордюмов Георгий Дмитриевич – аспирант, кафедра алгебры и математических методов гидродинамики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: georgekord300@gmail.com

DERIVATIVES IN THE MEAN OF RANDOM PROCESSES AND DIFFUSION MODELS IN ECONOMICS

G.D. Kordyumov
Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: georgekord300@gmail.com

The article is devoted to diffusion models. The authors discuss the theoretical and methodological foundations of diffusion models in financial mathematics. Like the economic system, the modern world is developing rapidly. It seems impossible to predict what will happen tomorrow, how the emergence of new technologies will affect the market, and how changes in random factors will affect the product and the market as a whole. Diffusion models are one of the main methods for studying economic objects and processes. This is why it is so important to develop a diffusion model.

The authors propose extending the applicability of the models by passing from Itô type stochastic equations to equations with so-called derivatives in the mean. For this, following E. Nelson, the authors introduce the concept of derivatives in the mean on the right and on the left.

The equation with the derivative in the mean does not involve the Wiener process, therefore, it is not assumed in advance that the solution is diffusional.

The article describes some well-known diffusion models, in which the transition from equations like an Itô type stochastic differential equation to equations satisfying a system of equations with derivatives in the mean leads to an expansion of the set of possible solutions.

The authors also consider a generalization of geometric Brownian motion that satisfies a system of stochastic equations with derivatives in the mean and can cover a wider class of problems.

Keywords: diffusion models; models in financial mathematics; Itô equation; derivatives in the mean; geometric Brownian motion; Wiener process.

References

1. Gliklikh Y.E., Zheltikova O.O. Optimal Solutions For Inclusions Of Geometric Brownian Motion Type With Mean Derivatives. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modeling, Programming and Computer Software"*, 2013, Vol. 6, no. 3, pp. 38–50.
2. Shreve S.E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. – Springer-Verlag New York, 2004, 550 p.
3. Berezhnaya E.V., Berezhnoy V.I. *Matematicheskie Metody Modelirovaniya Ekonomicheskikh sistem* (Mathematical Methods of Modeling Economic Systems). Moscow, Finansy i statistika Publ., 2008, 430 p. (in Russ.).
4. Gliklikh Yu.E., Shchichko T.A. On the Completeness of Stochastic Flows Generated by Equations with Current Velocities. *Theory of Probability and its Applications*, 2019, Vol. 64, Iss. 1, pp. 1–11. DOI: 10.1137/S0040585X97T989350
5. Gliklikh, Yu.E. *Proizvodnye v Srednem Sluchaynykh Protsessov i ikh Primeneniya* (Average Derivatives of Random Processes and their Applications). Vladikavkaz, YuMI VNTs RAN Publ., 2016, 194 p. (in Russ.).
6. Kazantsev S.Yu. *Ispol'zovanie Diffuzionnoy Modeli v Prognozirovanii Doley Rynka* (Using the Diffusion Model in Forecasting Market Shares), 2012, pp. 248–260. (in Russ.).

Received May 12, 2021

Information about the author

Kordyumov Georgiy Dmitrievich, Post-graduate Student, Algebra and Mathematical Methods of Hydrodynamics Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: georgekord300@gmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.О. Мамытов

Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика
E-mail: mamytov1968@list.ru

Как нам известно, в обратной задаче кроме искомого «основного» решения задачи (т. е. решения прямой задачи) нам неизвестны какие-либо входящие в прямую задачу. Требуется найти и этих неизвестных, поэтому их тоже мы будем называть решениями обратной задачи. Для определения этих неизвестных в обратной задаче к заданным уравнениям добавляется какая-либо дополнительная информация о решении прямой задачи. Дополнительную информацию называют данными обратной задачи. В предлагаемой статье рассматривается конкретное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с известными начальными и краевыми условиями. Для простоты исследовали однородные краевые условия, так как с помощью линейного преобразования всегда неоднородные краевые условия можно привести к однородным. В правой части уравнения присутствуют n неизвестных функций: $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для определения этих неизвестных функций: $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ в обратной задаче имеется дополнительная информация о решении прямой задачи, т.е. нам известны значения искомого «основного» решения задачи в внутренних отрезках исследуемой области, т. е. $u(t, x_i) = g_i(t)$, $t \in [0, T]$, $x_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Задача исследуется в прямоугольнике, расположенном в первой четверти декартовой системы координат. Для решения обратной задачи разработан алгоритм, в результате найдены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи по восстановлению правой части в интегро-дифференциальном уравнении в частных производных четвертого порядка. При решении обратной задачи использованы методы: преобразования, функций Грина, решения систем линейных интегральных уравнений Вольтерра. В итоге обратную задачу мы приводим к системе $(n + 1)$ линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решение которого при малом $0 < T$ существует и единственно. Рассматриваемую обратную задачу можно называть обратной задачей об источнике.

Ключевые слова: обратная задача об источнике, интегро-дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, система интегральных уравнений Вольтерра, функция Грина, резольвента.

Введение. Обратные задачи впервые появились в практике, например, задача об определении скорости распространения сейсмических волн внутри нашей планеты по движению фронтов сейсмических волн по поверхности Земли. Нетрудно понять, насколько интересна и важна такая информация для физиков, геофизиков, врачей и вообще исследователей таких объектов и областей, проникновение внутрь которых либо слишком трудоемко, либо опасно, либо вообще невозможно [1–3]. Различные обратные задачи исследованы в [4–15], а также в цитируемых работах в них. Исследование теории и методы обратных задач интенсивно продолжается.

В статье предлагается конкретный алгоритм решения одной обратной задачи об источнике. Найдены достаточные условия, при выполнении которых гарантируется существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

Постановка задачи

Исследуем разрешимость обратной задачи об источнике

$$u_{tt}(t, x) = \alpha u_{xxtt}(t, x) - \beta u_{xx}(t, x) + \int_0^t K(t-s)u_{ss}(s, x)ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t, x) + F(t, x), \quad (t, x) \in G, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $K(t), F(t, x), \varphi(x), \psi(x), h_i(t, x), i = 1, 2, \dots, n$ – известные функций, T, α, β – заданные положительные постоянные, а функций $u(t, x), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ неизвестные, $G = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$.

Кроме этого, нам известны значения неизвестной функций $u(t, x)$ в внутренних отрезках области G , т. е.

$$u(t, x_i) = g_i(t), t \in [0, T], x_i \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Требуется найти неизвестные функций $u(t, x), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Подобную обратную задачу называют обратной задачей об источнике [1].

Решение задачи

Пусть выполняются следующие условия:

$$U_1: F \in C(G), \quad \varphi, \psi \in C^2[0, 1], g_i \in C^2[0, T],$$

$$U_2: \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0, g_i(0) = \varphi(x_i), g'_i(0) = \psi(x_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем обозначение, пусть

$$v(t, x) = u_{tt}(t, x), \quad (5)$$

интегрируя равенство (5) по переменной t и учитывая условие $u_t(0, x) = \psi(x)$, получим

$$u_t(t, x) = \int_0^t v(s, x) ds + \psi(x), \quad (6)$$

еще раз интегрируя последнее равенство по переменной t и учитывая начальное условие $u(0, x) = \varphi(x)$, имеем:

$$u(t, x) = \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \psi(x)t + \varphi(x). \quad (7)$$

Подставляя (5), (6) и (7) в уравнение (1) имеем:

$$v(t, x) = \alpha v_{xx}(t, x) - \beta \left(\int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds + \psi''(x)t + \varphi''(x) \right) + \int_0^t K(t-s)v(s, x) ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t, x) + F(t, x),$$

или

$$v_{xx} = \gamma \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds + \frac{1}{\alpha} v(t, x) + \gamma \psi''(x)t + \gamma \varphi''(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t K(s)v(t-s, x) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t, x) - \frac{1}{\alpha} F(t, x). \quad (8)$$

В нашей работе [18] доказана

Лемма 1. Резольвенту $R(t, s)$ ядра $K(t, s) = \gamma(t-s)$ можно представить в следующем виде

$$R(t, s) = \sqrt{\gamma} sh \left\{ \sqrt{\gamma}(t-s) \right\}, (t, s) \in G,$$

где $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, $(t, s) \in G = \{(t, s) | 0 \leq s \leq t \leq T\}$.

На основании этой леммы 1 равенство (8) запишем в виде:

$$v_{xx}(t, x) - \frac{1}{\alpha} v(t, x) = P_1(t, x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t K(s)v(t-s, x) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t, x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sqrt{\gamma} sh \left(\sqrt{\gamma}(t-s) \right) \left(v(s, x) - \int_0^s K(\tau)v(s-\tau, x) d\tau - \sum_{i=1}^n \varphi_i(s)h_i(s, x) \right) ds, \quad (9)$$

где $P_1(t, x) = \gamma\psi''(x)t + \gamma\varphi''(x) - \frac{1}{\alpha}F(t, x) - \sqrt{\gamma} \int_0^t sh(\sqrt{\gamma}(t-s))[\gamma\psi''(x)s + \gamma\varphi''(x) + \frac{1}{\alpha}F(s, x)]ds$.

Из равенства (5), для функции $v(t, x)$ получаем граничные условия вида:

$$v(t, 0) = v(t, 1) = 0. \tag{10}$$

Задачу (9)–(10) исследуем при фиксированном t , здесь $v(t, x)$ – искомая функция. Однородное уравнение $y''(x) - k^2y(x) = 0$ (в нашем случае $k^2 = 1/\alpha$) имеет два линейно независимых решения: $y_1(x) = sh(kx)$ и $y_2(x) = sh(kx - k)$, Вронскиан которых равен $W(y_1, y_2) = ksh(k)$.

Заметим, что $y_1(0) = 0$ и $y_2(1) = 0$ учитывая эти соотношения, легко можно построить решение следующей однородной краевой задачи с помощью функции Грина:

$$y''(x) - k^2y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad y_1(0) = 0 \text{ и } y_2(1) = 0.$$

т. е. решение записывается в виде [16–18]:

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$\text{где функция Грина } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh(kx - k)sh(k\xi)}{ksh(k)}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{sh(k\xi)sh(kx - k)}{ksh(k)}, & x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Применяя этот результат к интегро-дифференциальной задаче (9)–(10), получим «чисто» интегральное уравнение Вольтерра:

$$v(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \left(P_1(t, \xi) - \frac{1}{\alpha} \int_0^t K(s)v(t-s, \xi) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) h_i(t, \xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sqrt{\gamma} sh(\sqrt{\gamma}(t-s)) \left(v(s, \xi) - \int_0^s K(\tau)v(s-\tau, \xi) d\tau - \sum_{i=1}^n \varphi_i(s) h_i(s, \xi) \right) ds \right) d\xi. \tag{11}$$

Уравнение (11) перепишем в виде

$$v(t, x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 G(x, \xi) h_i(t, \xi) d\xi \right] \varphi_i(t) - \\ - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_0^1 [G(x, \xi) R(t, s) h_i(s, \xi)] d\xi \varphi_i(s) ds - \\ - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi) K(s) v(t-s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^s R(t, s) G(x, \xi) K(\tau) v(s-\tau, \xi) d\tau d\xi ds + P(t, x), \tag{12}$$

где $P(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) P_1(t, \xi) d\xi$.

Полагая $x = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$ и учитывая данные (4), а также равенство (5), из соотношения (12) имеем

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 G(x_j, \xi) h_i(t, \xi) d\xi \right] \varphi_i(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x_j, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \\ - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_0^1 [G(x_j, \xi) R(t, s) h_i(s, \xi)] d\xi \varphi_i(s) ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x_j, \xi) K(s) v(t-s, \xi) d\xi ds - \\ - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^s R(t, s) G(x_j, \xi) K(\tau) v(s-\tau, \xi) d\tau d\xi ds + P(t, x_j) - g_j''(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{13}$$

Введем обозначение

$$a_{ji}(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x_j, \xi) h_i(t, \xi) d\xi, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Пусть

$$\det A(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (15)$$

где $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая обозначение (14), систему (13) можно представить

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ji}(t) \varphi_i(t) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \int_0^1 G(x_j, \xi) (R(t, s) - K(t-s)) v(s, \xi) d\xi ds - \\ &- \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^1 [G(x_j, \xi) R(t, s) h_i(s, \xi)] d\xi \varphi_i(s) ds - \\ &- \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^s R(t, s) G(x_j, \xi) K(s-\tau) v(\tau, \xi) d\tau d\xi ds + P(t, x_j) - g_j''(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

В итоге мы пришли к системе из $(n+1)$ уравнений (12), (16). Из общей теории интегральных уравнений нам известно, что решение системы (12), (16) существует и единственно.

Следовательно справедлива

Теорема. Если выполняются U_1 U_2 и неравенство (15), то в пространстве $C^{2,2}(G) \times C_n[0, T]$, решение задачи (1)–(4) существует и единственно, $C_n[0, T] = \underbrace{C[0, T] \times C[0, T] \times \dots \times C[0, T]}_{n \text{ раз}}$.

Пример. Пусть в задаче (1)–(4): $\alpha = \beta = 1$, $n = 1$, $K(t) = t$, $h_1(t, x) = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $F(t, x) \equiv 0$, $g_1(t) = t^2$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ для всех $x \in [0, 1]$, т. е. рассмотрим задачу

$$u_{tt}(t, x) = u_{xxx}(t, x) - u_{xx}(t, x) + \int_0^t (t-s) u_{ss}(s, x) ds + \varphi_1(t), \quad (t, x) \in G$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad u(t, 1/2) = t^2, \quad t \in [0, T].$$

Ищем $u(t, x)$ и $\varphi_1(t)$.

Пусть $v(t, x) = u_{tt}(t, x)$, тогда $u(t, x) = \int_0^t (t-s) v(s, x) ds$ и имеем:

$$v(t, x) = v_{xxx}(t, x) - \int_0^t (t-s) v_{xx}(s, x) ds + \int_0^t (t-s) v(s, x) ds + \varphi_1(t),$$

или

$$v_{xx} = \int_0^t (t-s) v_{xx}(s, x) ds + v(t, x) - \int_0^t s v(t-s, x) ds - \varphi_1(t).$$

Резольвента примет вид: $R(t, s) = \text{sh}(t-s)$, $(t, s) \in G$.

Отсюда получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} v_{xx}(t, x) - v(t, x) &= - \int_0^t s v(t-s, x) ds - \varphi_1(t) + \int_0^t \text{sh}(t-s) \left(v(s, x) - \int_0^s \tau v(s-\tau, x) d\tau - \varphi(s) \right) ds, \\ v(t, 0) &= v(t, 1) = 0. \end{aligned}$$

Одрондную краевую задачу заменяем интегральным уравнением:

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \varphi(t) \int_0^1 G(x, \xi) d\xi - \int_0^t \int_0^1 [G(x, \xi) R(t, s)] d\xi \varphi(s) ds - \\ - \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi) s v(t-s, \xi) d\xi ds - \int_0^t \int_0^1 \int_0^s R(t, s) G(x, \xi) \tau v(s-\tau, \xi) d\tau d\xi ds,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(x-1)\text{sh}(s)}{\text{sh}(1)}, & 0 \leq s \leq x, \\ \frac{\text{sh}(x)\text{sh}(s-1)}{\text{sh}(1)}, & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Полагая $x = 1/2$ и учитывая, что $u(t, 1/2) = t^2$ и $v(t, x) = u_{tt}(t, x) = 2$, имеем

$$2 + \varphi(t)a = \int_0^t \int_0^1 G(1/2, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - a \int_0^t R(t, s) \varphi(s) ds - \\ - \int_0^t \int_0^1 G(1/2, \xi) (t-s) v(s, \xi) d\xi ds - \int_0^t \int_0^1 \int_0^s R(t, s) G(1/2, \xi) (s-\tau) v(\tau, \xi) d\tau d\xi ds,$$

$$\text{здесь } a = \int_0^1 G(1/2, \xi) d\xi = 0,11.$$

Мы получили систему из двух уравнений, решение которой существует и единственно.

Литература

1. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. – 511 с.
2. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
3. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Фалалеев, М.В. О разрешимости в классе распределений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2020. – Т. 34. – С. 77–92.
5. Исломов, Б.И. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области / Б.И. Исломов, У.Ш. Убайдуллаев // Изв. вузов. Матем. – 2021. – № 3. – С. 29–46.
6. Убайдуллаев, У. Ш. Обратная задача для смешанного нагруженного уравнения с оператором Римана–Лиувилля в прямоугольной области / У. Ш. Убайдуллаев // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 31, № 2. – С. 18–31.
7. Гласко, Ю. В. Обратная задача интерпретации гравитационной и магнитной аномалий месторождения углеводородов / Ю.В. Гласко // Сиб. журн. индустр. матем. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 46–57.
8. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с нелокальными условиями / Я.Т. Мегралиев, Б.К. Велиева // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29, № 2. – С. 166–182.
9. Дурдиев, У.Д. Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах / У. Д. Дурдиев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2019. – Т. 22, № 4. – С. 26–32.
10. Суляндзига, П.Б. Внутренняя обратная задача комплексного магнитного потенциала / П. Б. Суляндзига, А. Н. Иванов, Е. П. Суляндзига // Дальневост. матем. журн. – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 75–83.
11. Zamyshlyayeva, A.A. Inverse problem for Sobolev type mathematical models / A.A. Zamyshlyayeva, A.V. Lut // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 25–36.

12. Камынин, В.Л. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении / В.Л. Камынин // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 2. – С. 248–261.

13. Князьков, Д.Ю. Обратная задача дифракции электромагнитной волны на плоском слое / Д.Ю. Князьков // Программные системы: теория и приложения. – 2018. – Т. 9, № 1. – С. 21–36.

14. Бутерин, С.А. Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с условиями разрыва, / С.А. Бутерин // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН, Т. 64, № 3, Российский университет дружбы народов. – М., 2018. – С. 427–458.

15. Корнилов, В.С. История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений - составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике / В.С. Корнилов // Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2009. – № 17. – С. 108–113.

16. Мамытов, А.О. Обратная задача для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с переопределением во внутренних точках / А.О. Мамытов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2015. – № 7. – С. 10–15.

17. Мамытов, А.О. Определение правой части для одного класса линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / А.О. Мамытов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2014. – № 7. – С. 37–42.

18. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / А.О. Мамытов // Молодой учёный. – 2016. – № 11(115). – С. 49–53.

Поступила в редакцию 25 мая 2021 г.

Сведения об авторе

Мамытов Айтбай Омонович – преподаватель, Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика, e-mail: mamytov1968@list.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 31–38*

DOI: 10.14529/mmph210304

ON A PROBLEM OF DETERMINING THE RIGHT-HAND SIDE OF THE PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

A.O. Mamytov

Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

E-mail: mamytov1968@list.ru

As it is known, in the inverse problem, apart from the sought-for “basic” solution of the problem (i. e., the solution of the direct problem), the components of the direct problem are unknown. It is required to find these unknown components, so they will be also included in the solution of the inverse problem. To determine these components in the inverse problem, some additional information on the solution of the direct problem is added to the given equations. The additional information is called the inverse problem data. In the proposed article, the specific fourth-order partial integro-differential equation with the known initial and boundary conditions is considered. For simplicity, the homogeneous boundary conditions have been examined, since with the help of a linear transformation, the always inhomogeneous boundary conditions can be reduced to the homogeneous ones. The right-hand side of the equation contains n unknown functions: $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. To determine these unknown functions: $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ in the inverse problem there is additional information on the solution of the direct problem, i. e., the values of the sought-for “basic” solution to the problem in the inner segments of the investigated

region are known, i. e., $u(t, x_i) = g_i(t)$, $t \in [0, T]$, $x_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. The problem is investigated in a rectangle located in the first quarter of the Cartesian coordinate system. To solve the inverse problem, an algorithm has been elaborated and sufficient conditions for the existence and the uniqueness of the solution of the inverse problem for the restoration of the right-hand side in a fourth-order partial integro-differential equation have been found. When solving the inverse problem, the methods of transformations, Green's function, solutions of systems of linear Volterra integral equations have been used. As a result, the inverse problem has been reduced to a system of $(n + 1)$ linear Volterra integral equations of the second kind, the solution of which for small $0 < T$ exists and is unique. The considered inverse problem can be called the inverse source problem.

Keywords: inverse source problem; fourth-order partial integro-differential equation; system of Volterra integral equations; Green's function, resolvent.

References

1. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 2018, 511 s. (in Russ.).
2. Bukhgeym A.L. *Uravneniya Vol'terra i obratnye zadachi* (Volterra Equations and Inverse Problems). Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 207 p. (in Russ.).
3. Lavrent'ev M.M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* (On some Ill-Posed Problems in Mathematical Physics). Novosibirsk, Izd-vo SO AN SSSR Publ., 1962, 92 p. (in Russ.).
4. Falaleev M.V. On Solvability in the Class of Distributions of Degenerate Integro-Differential Equations in Banach Spaces. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, Vol. 34, pp. 77–92. (in Russ.). DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.77
5. Islomov B.I., Ubaydullayev U.S. The Inverse Problem for a Mixed Type Equation with a Fractional Order Operator in a Rectangular Domain. *Russ Math*, 2021, Vol. 65, pp. 25–42. DOI: 10.3103/S1066369X21030038
6. Ubaydullayev U.Sh. The inverse problem for a mixed loaded equation with the riemann-liouville operator in a rectangular domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, Vol. 31, no. 2, pp. 18–31. (in Russ.). DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-18-31
7. Glasko Yu.V. The inverse problem of interpretation of gravitational and magnetic anomalies of hydrocarbon deposits. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Vol. 23, no. 1, pp. 46–57. (in Russ.). DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.105
8. Megraliev Ya.T., Velieva B.K. Inverse boundary value problem for the linearized Benney-Luke equation with nonlocal conditions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, Vol. 29, no. 2, pp. 166–182. (in Russ.).
9. Durdiev U.D. An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Vol. 22, no. 4, pp. 26–32. DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.403
10. Sulyandziga P.B., Ivanov A.N., Sulyandziga E.P. Internal Inverse Problem of Complex Magnetic Potential. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2019, Vol. 19, no. 1, pp. 75–83. (in Russ.).
11. Zamyshlyayeva A.A., Lut A.V. Inverse Problem for Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 25–36.
12. Kamynin V.L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coefficients in a Parabolic Equation. *Mathematical Notes*, 2019, Vol. 106, no. 2, pp. 235–247. DOI: 10.1134/S0001434619070277
13. Knyazkov D.Y. Inverse Problem of Diffraction of Electromagnetic Wave on a Plane Layer. *Program Systems: Theory and Applications*, 2019, Vol. 9, no. 1, pp. 21–36. DOI: 10.25209/2079-3316-2018-9-1-21-36
14. Buterin S.A. Inverse Spectral Problem for Integro-Differential Sturm–Liouville Operators with Discontinuity Conditions. *Proc. Crimean autumn mathematical school-symposium, CMFD*, Vol. 64, no. 3, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2018, pp. 427–458. DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3

15. Kornilov V.S. Istoriya razvitiya teorii obratnykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy – sostavlyayushchaya gumanitarnogo potentsiala obucheniya prikladnoy matematike (The history of the development of the theory of inverse problems for differential equations is a component of the humanitarian potential of teaching applied mathematics). *Vestnik MGPU. Seriya: Informatika i informatizatsiya obrazovaniya* (Vestnik MGPU. Series: Informatics and informatization of education), 2009, no. 17, pp. 108–113. (in Russ.).

16. Mamytov A.O. On an Inverse Problem for a Linear Differential Equation of Fourth Degree with Redefined at Interior Points. *Science, New technologies and Innovations in Kyrgyzstan*, 2015, no. 7, pp. 10-15.

17. Mamytov A.O. Determination of the right side for one class of a fourth-order linear differential equation. *Science, new technologies and innovations of Kyrgyzstan*, 2014. no. 7, pp. 37–42.

18. Mamytov A.O. *Young Scientist*, 2016, no. 11(115), pp. 49–53. (in Russ.). <https://moluch.ru/archive/115/30705/>

Received May 25, 2021

Information about the author

Mamytov Aytbay Omonovich, Lecturer, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: mamytov1968@list.ru

БИФУРКАЦИИ ПОЛИЦИКЛА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ ПЕТЛЯМИ СЕПАРАТРИС НЕГРУБОГО СЕДЛА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Рассматривается семейство гладких динамических систем, заданных на плоскости и зависящих от двумерного параметра, меняющегося в окрестности нуля. Все системы семейства предполагаются инвариантными при преобразовании симметрии относительно начала координат. При нулевом значении параметра динамическая система имеет простейшее негрубое седло, обе выходящие сепаратрисы которого идут в то же седло, образуя две петли. Полицикл «восьмерка», состоящий из петель, является аттрактором этой системы. Он имеет окрестность U , в граничных точках которой все траектории систем семейства с параметрами, близкими к нулю, входят в U . При условии общего положения описываются бифуркации в окрестности U полицикла при изменении параметра. Значения параметра в малой окрестности нуля, при которых система является негрубой в U , образуют пять гладких кривых, входящих в начало координат, разбивающих эту окрестность на связные компоненты, для значений параметра из которых системы семейства являются грубыми. Для каждой компоненты описан топологический тип соответствующих динамических систем в U . В частности указаны области параметра, при которых система имеет в U единственный аттрактор – узел, два аттрактора – узел и цикл, гомотопный в U полициклу, или два симметричных цикла, гомотопных в U петлям из полицикла, а также три аттрактора – узел и два симметричных цикла.

Ключевые слова: семейство векторных полей на плоскости; центральная симметрия; инвариантность; негрубое седло; петля сепаратрисы седла; полицикл «восьмерка»; бифуркация; устойчивый предельный цикл

Введение

Динамические системы на плоскости, задаваемые гладкими векторными полями, инвариантными относительно центральной симметрии, используются при математическом моделировании ряда процессов. Представляет интерес изучение бифуркаций в типичных конечно-параметрических семействах таких систем. Описание нелокальных бифуркаций в однопараметрических семействах получается как следствие известного описания бифуркаций в типичных семействах динамических систем без симметрии с одним и двумя параметрами [1, 2]. В типичных двухпараметрических семействах систем с симметрией появляются системы с вырождениями, встречающимися для динамических систем без симметрии только в типичных семействах с числом параметров большим двух, описание бифуркаций в которых пока отсутствует. Примером такой динамической системы является система, имеющая в начале координат простейшее негрубое седло, сепаратрисы которого образуют две симметричных петли Γ_0^+ и Γ_0^- . Мы опишем ее типичные двухпараметрические деформации в окрестности полицикла $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$, гомеоморфного «восьмерке».

1. Постановка задачи. Формулировка результатов

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon(z) = P_1(z, \varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2(z, \varepsilon)\partial/\partial z_2$ на плоскости \mathbf{R}^2 переменных $z = (z_1, z_2)$, зависящее от двумерного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Будем предполагать, что векторные поля X_ε инвариантны относительно преобразования $S: z \mapsto -z$, то есть $X_\varepsilon(-z) = -X_\varepsilon(z)$, а $P_1, P_2 \in C^r$ ($r \geq 3$).

Пусть $O = (0, 0) \in \mathbf{R}^2$ является особой точкой векторного поля X_0 , т. е. $X_0(O) = 0$, и матрица $(\partial P_i(0, 0)/\partial z_j)$ линейной части поля в этой точке имеет собственные значения $\lambda_0 < 0$ и 0. Со-

гласно теореме 5.5 о редукции из [3] при значениях параметра ε , достаточно близких к нулю, в некоторой окрестности Π точки O существует замена координат $(z_1, z_2) \mapsto g(x, y, \varepsilon)$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, $g \in C^r$, $g(0,0,0) = 0$, такая, что в координатах (x, y) векторное поле X_ε имеет вид $P(x, \varepsilon)\partial/\partial x + yQ(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y$, где $P \in C^r$, $Q \in C^{r-1}$,

$$Q(0,0,0) = \lambda_0. \tag{1}$$

Из доказательства теоремы о редукции следует, что для рассматриваемого семейства $g(-x, -y, \varepsilon) = -g(x, y, \varepsilon)$. Поэтому если точка $z \in \Pi$ имеет координаты (x, y) , то симметричная ей точка $S(z)$ имеет координаты $(-x, -y)$ и

$$P(-x, \varepsilon) = -P(x, \varepsilon), \quad Q(-x, -y, \varepsilon) = Q(x, y, \varepsilon). \tag{2}$$

Ввиду (2) $P(0,0) = P'_x(0,0) = P''_{xx}(0,0) = 0$. Будем считать, что $P'''_{xxx}(0,0) > 0$. Тогда особая точка O поля X_0 является топологическим седлом. Назовем такую точку *простейшим негрубым седлом*. Пусть выходящая сепаратриса L_0^+ этого седла совпадает с входящей сепаратрисой, образуя вместе с седлом петлю Γ_0^+ . Без ограничения общности можно считать, что $L_0^+ \cap \Pi$ состоит из дуг $y=0, 0 < x < 1$ и $x=0, 0 < y < 1$. Вследствие симметрии поля X_0 $\Gamma_0^- = S\Gamma_0^+$ – также петля сепаратрисы поля. Обозначим $\Gamma_0 := \Gamma_0^- \cup \Gamma_0^+$.

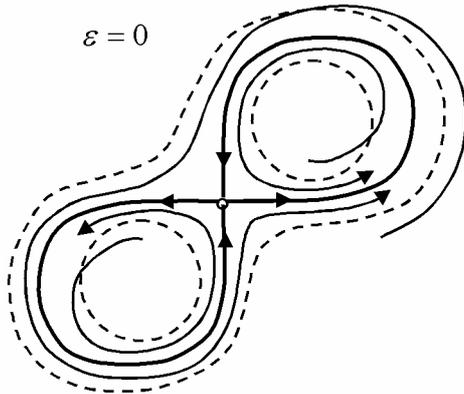


Рис. 1. Траектории поля X_0 в окрестности U полицикла. Граница U изображена пунктиром

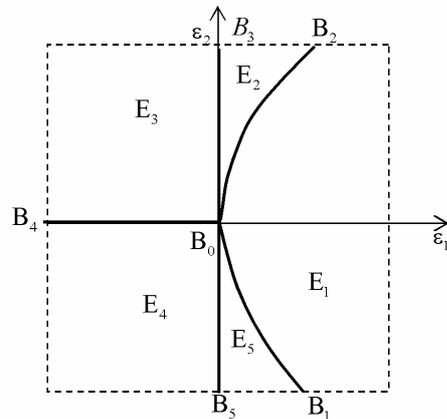


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

Теорема 1. Пусть векторное поле X_0 удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда существуют окрестность U полицикла Γ_0 с границей ∂U , состоящей из трех непересекающихся между собой гладких простых замкнутых кривых $\gamma_{int}^+, \gamma_{int}^- = S\gamma_{int}^+$ и γ_{ext} ($\gamma_{ext} = S\gamma_{ext}$), в точках которых поле X_0 направлено внутрь U , а все траектории поля, начинающиеся в кольцевой области между γ_{int}^+ и Γ_0^+ , γ_{int}^- и Γ_0^- , γ_{ext} и Γ_0 , ω -предельны соответственно к Γ_0^+ , Γ_0^- , Γ_0 и выходят из U при убывании времени соответственно в точках γ_{int}^+ , γ_{int}^- , γ_{ext} . (рис. 1).

Ввиду (1), (2) и неравенства $P'''_{xxx}(0,0) > 0$ при достаточно малом $d > 0$ и значениях параметра ε , достаточно близких к нулю,

$$\forall x \in [-d, d] \quad \forall y \in (0, d] \quad Q(x, y, \varepsilon) < 0, \quad |P'_x(x, \varepsilon)| \leq 1/2, \quad P'''_{xxx}(x, \varepsilon) > 0. \tag{3}$$

Так как $P'_{1z_1}(0,0) + P'_{2z_2}(0,0) = P'_x(0,0) + Q'_y(0,0) = \lambda_0$, то можно также считать, что

$$P'_{1z_1}(z, \varepsilon) + P'_{2z_2}(z, \varepsilon) < \lambda_0 / 2, \tag{4}$$

если точка z имеет координаты $(x, y) \in [-d, d]^2$.

При ε достаточно близких к нулю траектория L_ε^+ поля X_ε , начинающаяся в точке центрального многообразия $y=0$ с координатой $x=d$, пересекает дугу $y=d$ в точке с координатой $x=v(\varepsilon)$, где $v(\cdot) \in C^{r-1}$, $v(0) = 0$. Потребуем выполнение условия

$$\begin{vmatrix} P''_{x\varepsilon_1}(0,0) & P''_{x\varepsilon_2}(0,0) \\ v'_{\varepsilon_1}(0) & v'_{\varepsilon_2}(0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Заметим, что это условие не зависит от в выбора координат (x, y) и числа d . Из (5) следует, что, сделав замену параметров $\tilde{\varepsilon}_1 = -P'_x(0, \varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}_2 = v(\varepsilon)$ и вернувшись к их прежним обозначениям, мы можем считать, что при некотором $\delta_1 > 0$

$$P'_x(0, \varepsilon) = -\varepsilon_1, v(\varepsilon) = \varepsilon_2 \text{ для всех } \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in [-\delta_1, \delta_1]^2. \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть семейство векторных полей X_ε удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда окрестность U полицикла Γ_0 , о которой идет речь в теореме 1, и число $\delta > 0$ можно выбрать следующим образом.

В точках ∂U векторные поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, направлены внутрь U .

Область параметров $(-\delta, \delta)^2$ разбивается на множества $B_0, E_i, V_i, i=1, \dots, 5$, где (рис. 2)

$$B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_1(\varepsilon_2)\}, \beta_1 : (-\delta, 0) \rightarrow (0, \delta), \beta_1 \in C^1, \beta_1(-0) = \beta'_1(-0) = 0,$$

$$B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_2(\varepsilon_2)\}, \beta_2 : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta), \beta_2 \in C^1, \beta_2(+0) = \beta'_2(+0) = 0,$$

$$B_0 = \{(0, 0)\}, B_3 = \{0\} \times (0, \delta), B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}, B_5 = \{0\} \times (-\delta, 0),$$

E_i – связная компонента $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^5 B_k$, в границу которой входят V_i и V_{i+1} (здесь $B_6 = B_1$), такие, что

- 1) схемы векторных полей X_ε в U для $\varepsilon \in E_i$ и $\varepsilon \in V_i$ ($i=1, \dots, 5$) имеют вид, изображенный на рис. 3;
- 2) для любого $i=1, \dots, 5$ векторные поля X_ε при $\varepsilon \in E_i$ грубые в U , а потому принадлежат одному классу топологической эквивалентности в U ;
- 3) для любого $i=1, \dots, 5$ векторные поля X_ε при $\varepsilon \in V_i$ негрубые в U и принадлежат одному классу топологической эквивалентности в U .

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в параграфах 2 и 3.

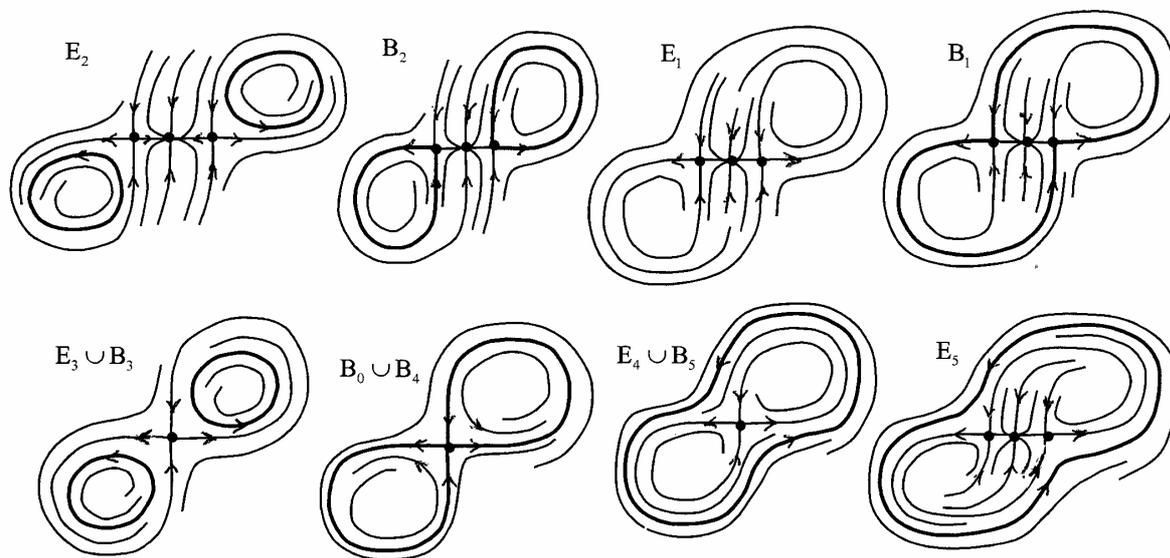


Рис. 3. Перестройки фазовых портретов в окрестности полицикла

2. Функции соответствия и функции последования

Пусть V – окрестность Γ_0 с компактным замыканием. При достаточно малых $\bar{u} \in (0, d)$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ траектория поля X_ε , $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$, начинающаяся в точке с координатами $x = d$, $y = u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$, не выходит из V и пересекает дугу $y = d$ в точке с координатой $x = \varphi(u, \varepsilon)$ в

момент времени $t = T_2(u, \varepsilon) > 0$, где $\varphi \in C^r$, $\varphi(0, \varepsilon) = v(\varepsilon)$, $\varphi'_u(u, \varepsilon) > 0$, $T_2 \in C^r$. Пусть T_{\max} – наибольшее значение $T_2(u, \varepsilon)$ на $[-\bar{u}, \bar{u}] \times [-\delta_2, \delta_2]^2$, а M – наибольшее значение $|P'_{1z_1}(z, \varepsilon) + P'_{2z_2}(z, \varepsilon)|$ на $\bar{V} \times [-\delta_2, \delta_2]^2$.

Из (2), (3) и (6) следует, что $\forall x \in [-d, d] \forall \varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$

$$P(x, \varepsilon) = x \int_0^1 P'_x(xt, \varepsilon) dt = x(-\varepsilon_1 + a(x, \varepsilon)), \tag{7}$$

где $a(0, \varepsilon) = a'_x(0, \varepsilon) = 0$, $a''_{xx}(x, \varepsilon) > 0$. Поэтому существует такое $\delta_3 \in (0, \delta_2]$, что уравнение $P(x, \varepsilon) = 0$ имеет на отрезке $[-d, d]$ при $\varepsilon \in (0, \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3)$ ровно три решения: $x = 0$, $x = x_+(\varepsilon) \in (0, d)$ и $x = x_-(\varepsilon) = -x_+(\varepsilon)$, причем $x_{\pm}(\cdot) \in C^1$, $x_{\pm}(+0, \varepsilon_2) = 0$, $(x_+)'_{\varepsilon_1}(\varepsilon) > 0$, $P'_x(0, \varepsilon) < 0$, $P'_x(x_{\pm}(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon \in (-\delta_3, 0) \times (-\delta_3, \delta_3)$ – единственное решение $x = 0$, причем $P'_x(0, \varepsilon) > 0$, если $\varepsilon_1 < 0$ и $P'_x(0, \varepsilon) = P''_{xx}(0, \varepsilon) = 0$, $P'''_{xxx}(0, \varepsilon) > 0$, если $\varepsilon_1 = 0$. Учитывая первое неравенство в (3), получаем, что векторное поле X_{ε} , $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)^2$, имеет в замкнутой области, заданной неравенствами $-d \leq x \leq d$, $-d \leq y \leq d$, при $\varepsilon_1 > 0$ ровно три особых точки – седла O_{ε}^{\pm} с координатами $x = x_{\pm}(\varepsilon)$, $y = 0$ и узел O , при $\varepsilon_1 \leq 0$ единственную особую точку O , являющуюся грубым седлом, если $\varepsilon_1 < 0$ и простейшим негрубым седлом если $\varepsilon_1 = 0$.

Пусть $l(\varepsilon) = x_+(\varepsilon)$, если $\varepsilon \in (0, \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3)$, и $l(\varepsilon) = 0$, если $\varepsilon \in (-\delta_3, 0) \times (-\delta_3, \delta_3)$. При $l(\varepsilon) < x < d$ имеем $P(x, \varepsilon) > 0$. Отсюда и из первого неравенства в (3) получаем, что траектория поля X_{ε} , $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)^2$, начинающаяся в точке с координатами $l(\varepsilon) < x < d$ и $y = d$ (соответственно, $y = -d$) через время $T_1(x, \varepsilon) = \int_x^d d\xi / P(\xi, \varepsilon)$, пересекает дугу $x = d$, $-d < y < d$ в точке с $y = \psi^+(x, \varepsilon) > 0$ (соответственно, $y = \psi^-(x, \varepsilon) > 0$), где $\psi^{\pm} \in C^1$, $(\psi^+)'_x(x, \varepsilon) > 0$, $(\psi^-)'_x(x, \varepsilon) < 0$, $\lim_{x \rightarrow l(\varepsilon)} \psi^{\pm}(x, \varepsilon) = 0$. Выберем $\bar{x} \in (0, d/2)$ так, чтобы $-\bar{u} < \psi^-(\bar{x}, 0) < 0 < \psi^+(\bar{x}, 0) < \bar{u}$ и

$$\ln(d/2\bar{x}) > MT_{\max} / |\lambda_0|. \tag{8}$$

При достаточно малом $\delta_4 \in (0, \delta_3]$ для всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ будет $l(\varepsilon) < \bar{x}$, $-\bar{u} < \psi^-(\bar{x}, \varepsilon) < 0 < \psi^+(\bar{x}, \varepsilon) < \bar{u}$. Тогда при всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ и $x \in (l(\varepsilon), \bar{x}]$ справедливы неравенства $-\bar{u} < \psi^-(x, \varepsilon) < 0 < \psi^+(x, \varepsilon) < \bar{u}$. Поэтому для любого $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ на промежутке $(l(\varepsilon), \bar{x}]$ определены функция последования $f_{\varepsilon}^+ := \varphi(\psi^+(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ и функция соответствия $f_{\varepsilon}^- := \varphi(\psi^-(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$.

Используя формулу конечных приращений и второе неравенство в (3), получаем $0 < P(\xi, \varepsilon) \leq (\xi - l(\varepsilon))/2$ при всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$, $\xi \in (l(\varepsilon), d]$. Тогда

$$T_1(x, \varepsilon) \geq \int_{\bar{x}}^d d\xi / P(\xi, \varepsilon) \geq 2 \ln \frac{d - l(\varepsilon)}{\bar{x} - l(\varepsilon)} \geq 2 \ln \frac{d}{2\bar{x}}.$$

Отсюда и из (8) получаем окончательно

$$T_1(x, \varepsilon) > 2MT_{\max} |\lambda_0| \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2, x \in (l(\varepsilon), \bar{x}]. \tag{9}$$

Покажем, что если x_* – неподвижная точка функции последования f_{ε}^+ , $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$, то $(f_{\varepsilon}^+)'(x_*) < 1$. Через точку z_* с координатами $x = x_*$, $y = d$ проходит периодическая траектория поля X_{ε} . Пусть ее период равен T , а уравнение $z = \zeta(t)$, $t \in [0, T]$, причем $\zeta(0) = z_*$. Тогда $T = T_1(x_*, \varepsilon) + T_2(\psi^+(x_*, \varepsilon), \varepsilon)$. Согласно [4, с. 126]

$$(f_{\varepsilon}^+)'(x_*) = \exp \int_0^T (P'_{1z_1}(\zeta(t), \varepsilon) + P'_{2z_2}(\zeta(t), \varepsilon)) dt.$$

Из (4), (9) и определения чисел T_{\max} и M получаем

$$\int_0^{T_1(x_*, \varepsilon)} (P'_{1z_1}(\zeta(t), \varepsilon) + P'_{2z_2}(\zeta(t), \varepsilon)) dt \leq \lambda_0 T_1(x_*, \varepsilon) / 2 < -MT_{\max},$$

$$\int_{T_1(x_*, \varepsilon)}^T |P'_{1z_1}(\zeta(t), \varepsilon) + P'_{2z_2}(\zeta(t), \varepsilon)| dt \leq MT_{\max},$$

и потому $(f_\varepsilon^+)'(x_*) < 1$. Отсюда в частности следует, что f_ε^+ имеет не более одной неподвижной точки.

Покажем теперь, что

$$\forall x \in (0, \bar{x}] \quad f_0^+(x) < x. \tag{10}$$

Предположим временно, что это не так. Тогда $f_0^+(x_0) > x_0$ при некотором $x_0 \in (0, \bar{x}]$. При достаточно малом $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta_4, 0)$ и $f_\varepsilon^+(x_0) > x_0$, а, кроме того, $f_\varepsilon^+(+0) = \varepsilon_2 < 0$. Поэтому f_ε^+ имеет на интервале $(0, x_0)$ неподвижную точку x_* . Так как $(f_\varepsilon^+)'(x_*) < 1$, то $f_\varepsilon^+(x_1) < x_1$ при некотором $x_1 \in (x_*, x_0)$. Но тогда f_ε^+ имеет на интервале (x_1, x_0) еще одну неподвижную точку, что невозможно. Поэтому сделанное предположение неверно и справедливо (10).

Введем функции последования $f_\varepsilon(x) := -f_\varepsilon^-(-f_\varepsilon^-(x))$. Ввиду симметрии поля X_ε через точку с координатами $x = x_*, y = -d$ проходит замкнутая траектория поля тогда и только тогда, когда $f_\varepsilon^-(x_*) = -x_*$. Это равенство равносильно тому, что x_* – неподвижная точка функции последования: $f_\varepsilon(x_*) = x_*$. Как и для f_ε^+ , получаем $0 < (f_\varepsilon)'(x_*) < 1$ и потому $-1 < (f_\varepsilon^-)'(x_*) < 0$, а f_ε имеет не более одной неподвижной точки. Аналогично (10) имеем неравенства

$$\forall x \in (0, \bar{x}] \quad -x < f_0^-(x) < 0 \quad \text{и} \quad 0 < f_0(x) < x. \tag{11}$$

Ввиду (10) и (11) мы можем считать, что δ_4 выбрано столь малым, что для $\forall \varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ значение $f_\varepsilon(\bar{x})$ определено и

$$f_\varepsilon^+(\bar{x}) < \bar{x}, \quad -\bar{x} < f_\varepsilon^-(\bar{x}) < 0 \quad \text{и} \quad 0 < f_\varepsilon(\bar{x}) < \bar{x}. \tag{12}$$

3. Бифуркационные кривые. Перестройки фазовых портретов

Из (12) согласно [5, п. 3.14] получаем, что через точку с координатами $x = f_0^+(\bar{x}), y = d$ ($x = f_0^-(\bar{x}), y = -d$) можно провести гладкую замкнутую кривую γ_{int}^+ ($\gamma_{\text{ext}} = S\gamma_{\text{ext}}$), в точках которой поле X_0 трансверсально кривой и направлено внутрь ее положительной (отрицательной) полукрестности. Обозначим U окрестность полицикла с границей ∂U , состоящей из $\gamma_{\text{int}}^+, \gamma_{\text{int}}^- := S\gamma_{\text{int}}^+$ и γ_{ext} . Из конструкции U , (10) и (11) следуют все утверждения теоремы 1.

Считая δ_4 выбранным достаточно малым, получим, что поле X_ε при всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ в точках ∂U направлено внутрь U и не имеет в U особых точек, отличных от точек O и O_ε^\pm .

Так как $\varphi(0, \varepsilon) = \varepsilon_2$, а $x_+(\varepsilon)$ – решение уравнения $\varepsilon_1 = a(x, \varepsilon)$, то при $\varepsilon_1 > 0$ уравнение $\varphi(0, \varepsilon) = x_+(\varepsilon)$ равносильно уравнению $\varepsilon_1 = a(\varepsilon_2, \varepsilon)$. Последнее уравнение определено при всех $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$. Согласно (7) $a(0, 0) = a'_{\varepsilon_1}(0, 0) = a'_{\varepsilon_2}(0, 0) = a'_x(0, 0) = 0$. Поэтому по теореме о неявной функции существуют такие число $\delta \in (0, \delta_4]$ и C^1 -функция $\beta_2 : (-\delta, \delta) \rightarrow [0, \delta)$, что $\beta_2(0) = \beta_2'(0) = 0$ и при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ $\varepsilon_1 = a(\varepsilon_2, \varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon_1 = \beta_2(\varepsilon_2)$. Так как для $\varepsilon_2 \in (0, \delta)$ $a(\varepsilon_2, \varepsilon) > 0$, то и $\beta_2(\varepsilon_2) > 0$. Поэтому $\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (0, \delta)$ $\varphi(0, \varepsilon) = x_+(\varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon_1 = \beta_2(\varepsilon_2)$. Так как $(x_+)_{\varepsilon_1}'(\varepsilon) > 0$, то

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (0, \delta) \quad \text{sgn}(x_+(\varepsilon) - \varphi(0, \varepsilon)) = \text{sgn}(\varepsilon_1 - \beta_2(\varepsilon_2)). \tag{13}$$

Аналогично (13) доказывается, что δ можно выбрать так, что

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0) \quad \text{sgn}(\varphi(0, \varepsilon) - x_-(\varepsilon)) = \text{sgn}(\varepsilon_1 - \beta_1(\varepsilon_2)), \tag{14}$$

где $\beta_1 : (-\delta, 0) \rightarrow (0, \delta)$ – такая C^1 -функция, что $\beta_1(+0) = \beta_1'(+0) = 0$.

Определим теперь множества V_0, E_i, V_i так, как это описано в формулировке теоремы 2.

При $\varepsilon \in B_1$ из (14) следует, что выходящая сепаратриса L_ε^+ седла O_ε^+ идет в седло O_ε^- , а выходящая сепаратриса $L_\varepsilon^- = SL_\varepsilon^+$ седла O_ε^- идет в седло O_ε^+ . Так как $f_\varepsilon^+(x) < x_-(\varepsilon) = -x_+(\varepsilon)$, то функция последования $f_\varepsilon(x)$ определена при всех $x \in (x_+(\varepsilon), \bar{x}]$. Покажем, что все траектории, пересекающие дугу $y = -d$, $x_+(\varepsilon) < x < \bar{x}$, а потому все траектории, начинающиеся в точках кольца между γ_{ext} и полициклом $\Gamma_\varepsilon = L_\varepsilon^+ \cup O_\varepsilon^+ \cup L_\varepsilon^- \cup O_\varepsilon^-$, ω -предельны к Γ_ε и выходят из U в точках γ_{ext} . Ввиду последнего из неравенств (12) достаточно показать, что f_ε не имеет неподвижных точек. Это равносильно тому, что функция $f_\varepsilon^-(x) + x$ не имеет нулей. Предположим, что это не так и $f_\varepsilon^-(x_*) + x_* = 0$. Так как $(f_\varepsilon^-)'(x_*) + 1 < 0$, то существует точка $x_0 \in (x_+(\varepsilon), x_*)$, для которой $f_\varepsilon^-(x_0) + x_0 > 0$. При всех $\tilde{\varepsilon}$, достаточно близких к ε , будет $x_+(\tilde{\varepsilon}) < x_0$ и $f_{\tilde{\varepsilon}}^-(x_0) + x_0 > 0$. Выберем $\tilde{\varepsilon} \in E_1$. Из (14) получаем $\lim_{x \rightarrow x_+(\tilde{\varepsilon})} [f_{\tilde{\varepsilon}}^-(x) + x] = \varphi(0, \tilde{\varepsilon}) - x_-(\tilde{\varepsilon}) < 0$. Но тогда существует точка $x_1 \in (x_+(\tilde{\varepsilon}), x_0)$, в которой $f_{\tilde{\varepsilon}}^-(x_1) + x_1 = 0$. Поскольку двух неподвижных точек f_ε иметь не может, то получаем, что их нет вообще. Из первого из неравенств (12) и из неравенства $f_\varepsilon^+(x_+(\varepsilon)) = x_-(\varepsilon) < x_+(\varepsilon)$, аналогично тому, как это было доказано выше для f_ε , следует, что $f_\varepsilon^+(x) < x$ для любого $x \in (x_+(\varepsilon), \bar{x}]$. Поэтому все траектории, пересекающие дугу $y = d$, $x_-(\varepsilon) < x < \bar{x}$, а потому и все траектории, начинающиеся в точках кольца C_ε^+ между γ_{int}^+ и замкнутой кривой, составленной из сепаратрисы L_ε^+ и дуги $y = 0$, $x_-(\varepsilon) \leq x \leq x_+(\varepsilon)$, выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^+ , и, за исключением входящей сепаратрисы седла O_ε^+ , ω -предельны к узлу O . Соответственно, все траектории, начинающиеся в точках кольца SC_ε^+ , выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^- , и, за исключением входящей сепаратрисы седла O_ε^- , ω -предельны к узлу O . Выходящие сепаратрисы $y = 0$, $0 < x < x_+(\varepsilon)$ седла O_ε^+ и $y = 0$, $x_-(\varepsilon) < x < 0$ седла O_ε^- ω -предельны к узлу O . Таким образом, мы описали поведение всех траекторий векторных полей X_ε , $\varepsilon \in B_1$. Это поведение схематично отображено на рис. 3.

Пусть $\varepsilon \in E_3$. Из (14) получаем $\lim_{x \rightarrow x_+(\varepsilon)} [f_\varepsilon^-(x) + x] = \varphi(0, \varepsilon) - x_-(\varepsilon) = \varepsilon_2 - x_-(\varepsilon) < 0$. Согласно (12) $f_\varepsilon^-(\bar{x}) + \bar{x} > 0$. Поэтому существует такое $x_* \in (x_+(\varepsilon), \varepsilon_2)$, что $f_\varepsilon^-(x_*) = -x_*$. Следовательно через точки с координатами $x = x_*$, $y = -d$ и $x = -x_*$, $y = d$ проходит грубая устойчивая замкнутая траектория Γ_ε поля X_ε , причем Γ_ε – единственная замкнутая траектория, пересекающая дугу $y = -d$, $x_+(\varepsilon) < x \leq \bar{x}$.

Любая траектория поля X_ε в U , не лежащая на дуге $y = 0$, $x_-(\varepsilon) \leq x \leq x_+(\varepsilon)$, пересекает либо дугу $T^+ : y = d, -\bar{x} < x < \bar{x}$, либо дугу $T^- : y = -d, -\bar{x} < x < \bar{x}$. Траектория, проходящая через точку T^+ (T^-) с координатой $x \in (-\bar{x}, -x_*)$ ($x \in (x_*, \bar{x})$), ω -предельна к Γ_ε и выходит из U при убывании времени в точке, принадлежащей γ_{ext} . Из первого из неравенств (12) и неравенства $\lim_{x \rightarrow x_+(\varepsilon)} [f_\varepsilon^+(x) - x] = \varphi(0, \varepsilon) - x_+(\varepsilon) < 0$ следует, что $f_\varepsilon^+(x) < x$ для всех $x \in (x_+(\varepsilon), \bar{x})$. Поэтому траектории, проходящие через точки T^+ (T^-) с координатой $x \in [x_-(\varepsilon), \bar{x}]$ ($x \in [-\bar{x}, x_+(\varepsilon)]$), выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^+ (γ_{int}^-); все они ω -предельны к узлу O , за исключением входящих сепаратрис седел O_ε^+ и O_ε^- , проходящих через точки с координатами $x = x_+(\varepsilon)$ и $x = x_-(\varepsilon)$. Траектория, проходящая через точку T^+ (T^-) с координатой $x \in (-x_*, x_-(\varepsilon))$ ($x \in (x_+(\varepsilon), x_*)$), ω -предельна к Γ_ε , выходит из U при убывании времени в точке γ_{int}^+ (γ_{int}^-), если $\varepsilon_2 < x < x_-(\varepsilon)$ ($x_+(\varepsilon) < x < -\varepsilon_2$), в точке γ_{int}^- (γ_{int}^+), если $x_* < x < \varepsilon_2$ ($-\varepsilon_2 < x < x_*$), и является выходящей сепаратрисой L_ε^+ (L_ε^-) седла O_ε^+ (O_ε^-), если $x = \varepsilon_2$ ($x = -\varepsilon_2$).

Таким образом, поведение траекторий векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in E_5$ такое, как изображено на рис. 3. Случаи $\varepsilon \in E_j$ и $\varepsilon \in E_{j+1}$ ($j=1,2,3,4$) рассматриваются аналогично.

Грубость векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in E_j$ ($j=1,\dots,5$) следует из грубости особых точек, замкнутых траекторий и отсутствия траекторий, идущих из седла в седло [4]. На этом доказательство теоремы 2 закончено.

Литература

1. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – Т. 5. – М.: ВИНТИ, 1986. – С. 5–218.
2. Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 548 с.
3. Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2004. – 416 с.
4. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронон, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.
5. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронон, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

Поступила в редакцию 26 мая 2021 г.

Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, e-mail: vroitenberg@mail.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 3, pp. 39–46*

DOI: 10.14529/mmph210305

BIFURCATIONS OF A POLYCYCLE FORMED BY TWO SEPARATRIX LOOPS OF A NON-ROUGH SADDLE OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH CENTRAL SYMMETRY

V.Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

A family of smooth dynamical systems defined on the plane and depending on a two-dimensional parameter varying in a neighborhood of zero is considered. All systems of the family are assumed to be invariant under a symmetry transformation about the origin. At zero value of the parameter, the dynamical system has the simplest non-rough saddle, both outgoing separatrices of which go to the same saddle, forming two loops. The polycycle "eight", consisting of the loops, is an attractor of this system. It has a neighborhood U , at the boundary points of which all trajectories of systems of the family with parameters close to zero enter U . Under the condition of general position, bifurcations in the neighborhood U of the polycycle are described when the parameter changes. The values of the parameter in a small neighborhood of zero, for which the system is non-rough in U , form five smooth curves entering the origin, dividing this neighborhood into connected components, for values of the parameter from which the systems of the family are rough. For each component, the topological type of the corresponding dynamical systems in U is described. In particular, the regions of the parameter are indicated for which the system has a single attractor in U – a node, two attractors – a node and a cycle

homotopic in U to a polycycle, or two symmetric cycles homotopic in U to loops from a polycycle, as well as three attractors – a node and two symmetric cycles.

Keywords: family of vector fields on the plane; central symmetry; invariance; non-rough saddle; separatrix loop; polycycle “eight”; bifurcation; stable limit cycle.

References

1. Arnold V.I., Afrajmovich V.S., Ilyashenko Y.S., Shilnikov L.P. *Dynamical Systems V. Bifurcation theory and catastrophe theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-57884-7
2. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev, D., Chua L.O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 2*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, Vol. 5, River Edge, N.J.: World Sci., 2001. DOI: 10.1142/4221
3. Shilnikov L.P., Shilnikov A. L., Turaev D., Chua L.O., *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 1*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, Vol. 4, River Edge, N.J.: World Sci., 1998.
4. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973.
5. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973. DOI: 10.1063/1.3128815

Received May 26, 2021

Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, e-mail: vroitenberg@mail.ru

EXACT SOLUTIONS OF THE HIROTA EQUATION USING THE SINE-COSINE METHOD

G.N. Shaikhova, Y.S. Kalykbay

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

E-mail: g.shaikhova@gmail.com

Nonlinear partial differential equations of mathematical physics are considered to be major subjects in physics. The study of exact solutions for nonlinear partial differential equations plays an important role in many phenomena in physics. Many effective and viable methods for finding accurate solutions have been established.

In this work, the Hirota equation is examined. This equation is a nonlinear partial differential equation and is a combination of the nonlinear Schrödinger equation and the complex modified Korteweg–de Vries equation. The nonlinear Schrödinger equation is the physical model and occurs in various areas of physics, including nonlinear optics, plasma physics, superconductivity, and quantum mechanics. The complex modified Korteweg–de Vries equation has been applied as a model for the nonlinear evolution of plasma waves and represents the physical model that incorporates the propagation of transverse waves in a molecular chain model and in a generalized elastic solid.

To find exact solutions of the Hirota equation, the sine-cosine method is applied. This method is an effective tool for searching exact solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. The obtained solutions can be applied when explaining some of the practical problems of physics.

Keywords: Hirota equation; sine-cosine method; solution; ordinary differential equation; partial differential equation; nonlinearity.

Introduction

Nonlinear partial differential equations (PDEs) are widely used as models to describe physical phenomena in various fields of sciences such as biology, solid state physics, fluid mechanics, plasma physics, plasma wave, condensed matter physics, chemical physics, optical fibers, and chemical physics [1]. Various powerful methods such as, Darboux transformation method [2], Hirota's method [3] and sine-cosine method [1, 4–6], modification of the truncated expansion method [7], have been developed to obtain exact solutions of these equations.

In this work, we study the Hirota equation

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q + i\alpha q_{xxx} + 6i\alpha|q|^2 q_x = 0, \quad (1)$$

where $q(x,t)$ is a complex valued function of the spatial coordinate x and the time t , α is a real constant, i is imaginary unit. The equation was introduced in [8] and studied in [9–11]. It is a combination of the nonlinear Schrödinger equation and the complex modified Korteweg–de Vries equation. When $\alpha = 0$ the Hirota equation (1) can be reduced to the nonlinear Schrödinger equation.

1. Review of the sine-cosine method

In this section, we describe the sine-cosine method [1, 4–6]. According to the sine-cosine method by using a wave transformation

$$u(x,t) = u(\xi), \xi = (x - ct), \quad (2)$$

the partial differential equation (PDE)

$$E_1(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3)$$

can be converted to ordinary differential equation (ODE)

$$E_2(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (4)$$

Then the equation (4) is integrated as long as all terms contain derivatives where integration constants are considered zeros. The solutions of ODE (4) can be expressed in the form [1, 4–6]

$$u(x,t) = \begin{cases} \lambda \cos^\beta(\mu\xi), & |\xi| \leq \frac{\pi}{2\mu}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5)$$

or

$$u(x,t) = \begin{cases} \lambda \sin^\beta(\mu\xi), & |\xi| \leq \frac{\pi}{2\mu}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (6)$$

where $\xi = x - ct$, the parameters μ and β will be determined, and μ is wave number and c is wave speed respectively [1]. The derivatives of (5) become

$$\left(u^n(\mu\xi)\right)' = -n\beta\mu\lambda^n \cos^{n\beta-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi), \quad (7)$$

$$\left(u^n(\mu\xi)\right)'' = -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi), \quad (8)$$

and the derivatives of (6) have next forms

$$\left(u^n(\mu\xi)\right)' = n\beta\mu\lambda^n \sin^{n\beta-1}(\mu\xi)\cos(\mu\xi), \quad (9)$$

$$\left(u^n(\mu\xi)\right)'' = -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n \sin^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\sin^{n\beta-2}(\mu\xi), \quad (10)$$

and so on for the other derivatives. Applying (5)–(10) into the reduced ordinary differential equation (4) we obtain a trigonometric equation of $\cos^r(\mu\xi)$ or $\sin^r(\mu\xi)$ terms. Then, we determine the parameters by first balancing the exponents of each pair of cosine or sine to determine β . Next, we collect all coefficients of the same power in $\cos^r(\mu\xi)$ or $\sin^r(\mu\xi)$, where these coefficients have to vanish. The system of algebraic equations among the unknown β and μ will be given and from that, we can determine coefficients.

2. Implementation of the sine-cosine method

We consider the Hirota equation (1). By transformation

$$q = e^{i(ax+dt)}u(x,t), \quad (11)$$

where a, d are real constants, the equation (1) can be converted to

$$-du + iu_t + 2iau_x + u_{xx} - a^2u + 2u^3 - 3a^2i\alpha u_x - 3a\alpha u_{xx} + a^3\alpha u + i\alpha u_{xxx} - 6a\alpha u^3 + 6i\alpha u^2u_x = 0. \quad (12)$$

By separating real and imaginary parts in the equation (12) we obtain the system of equations

$$-du + u_{xx} - a^2u + 2u^3 - 3a\alpha u_{xx} + a^3\alpha u - 6a\alpha u^3 = 0, \quad (13)$$

$$u_t + 2au_x - 3a^2\alpha u_x + \alpha u_{xxx} + 6\alpha u^2u_x = 0. \quad (14)$$

Substituting the wave transformation

$$u(x,t) = u(\zeta) = u(x - ct), \quad (15)$$

into system of equations (13)–(14) we get the following two ordinary differential equations:

$$\left(a^3\alpha - a^2 - d\right)u + (1 - 3a\alpha)u'' + 2(1 - 3a\alpha)u^3 = 0, \quad (16)$$

$$\left(-c + 2a - 3a^2\alpha\right)u' + \alpha u''' + 2\alpha\left(u^3\right)' = 0. \quad (17)$$

Integrate equation (17) once, with respect to ζ , yields

$$\left(-c + 2a - 3a^2\alpha\right)u + \alpha u'' + 2\alpha u^3 = L, \quad (18)$$

where L is constant of integration.

As the same function $u(\zeta)$ satisfies both equations (16) and (18), we obtain the following constraint condition:

$$\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{-c + 2a - 3a^2\alpha} = \frac{(1 - 3a\alpha)}{\alpha}, \quad L = 0. \quad (19)$$

By using condition (19), we have

$$c = 2a - 3a^2\alpha - \frac{(a^3\alpha^2 - d\alpha - a^2\alpha)}{(1 - 3a\alpha)}. \quad (20)$$

We can rewrite second order ordinary differential equation (16) as

$$u'' + 2u^3 + \left(\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{1 - 3a\alpha}\right)u = 0. \quad (21)$$

In next subsection, we solve the equation (21) by the sine-cosine method.

2.1. The sine solution

According to method the solution of the (21) can be found by transformation

$$u(\mu\xi) = \lambda \sin^\beta(\mu\xi). \quad (22)$$

To find sine solution we use (22) and its derivative

$$u''(\mu\xi) = -\mu^2 \beta^2 \lambda \sin^\beta(\mu\xi) + \mu^2 \lambda \beta(\beta - 1) \sin^{\beta-2}(\mu\xi). \quad (23)$$

Substitute (22) and (23) into (21) we get

$$-\mu^2 \beta^2 \lambda \sin^\beta(\mu\xi) + \mu^2 \lambda \beta(\beta - 1) \sin^{\beta-2}(\mu\xi) + 2\lambda^3 \sin^{3\beta}(\mu\xi) + \left(\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{1 - 3a\alpha}\right) \lambda \sin^\beta(\mu\xi) = 0. \quad (24)$$

Using the balance method, by equating the exponents of \sin^j , (24) we determine β :

$$\begin{aligned} \beta - 1 &\neq 0, \\ \beta - 2 &= 3\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1. \end{aligned} \quad (25)$$

Substitute (25) in (24) we obtain next equation

$$-\mu^2 \lambda \sin^{-1}(\mu\xi) + 2\mu^2 \lambda \sin^{-3}(\mu\xi) + 2\lambda^3 \sin^{-3}(\mu\xi) + \left(\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{1 - 3a\alpha}\right) \lambda \sin^{-1}(\mu\xi) = 0. \quad (26)$$

Equating the coefficients of each pair of the sine functions, we find the following system of algebraic equations:

$$\sin^{-1}(\mu\xi): \quad -\mu^2 \lambda + \left(\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{1 - 3a\alpha}\right) \lambda = 0, \quad (27)$$

$$\sin^{-3}(\mu\xi): \quad 2\lambda\mu^2 + 2\lambda^3 = 0. \quad (28)$$

From (27)–(28) we have

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{1 - 3a\alpha}}, \quad \alpha = \frac{a^2 + d - \lambda^2}{a^3 - 3a\lambda^2}, \quad (29)$$

where a, d, λ are real numbers.

Substituting (25), (29) into (22) and then obtained expression into (11) we have the sine solution of the Hirota equation

$$q_1(x, t) = \pm e^{i(ax+dt)} \lambda \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{a^3\alpha - a^2 - d}{1 - 3a\alpha}} (x - ct) \right), \quad (30)$$

where $c = 2a - 3a^2\alpha - \frac{(a^3\alpha^2 - d\alpha - a^2\alpha)}{(1 - 3a\alpha)}, \alpha = \frac{a^2 + d - \lambda^2}{a^3 - 3a\lambda^2}.$

2.2. The cosine solution

To find cosine solution we use

$$u(\mu\xi) = \lambda \cos^\beta(\mu\xi), \quad (31)$$

and its second order derivative

$$u''(\mu\xi) = -\mu^2 \beta^2 \lambda \cos^\beta(\mu\xi) + \mu^2 \lambda \beta(\beta-1) \cos^{\beta-2}(\mu\xi). \quad (32)$$

Substitute (31) and (32) into (21) we get

$$-\mu^2 \beta^2 \lambda \cos^\beta(\mu\xi) + \mu^2 \lambda \beta(\beta-1) \cos^{\beta-2}(\mu\xi) + 2\lambda^3 \cos^{3\beta}(\mu\xi) + \left(\frac{a^3 \alpha - a^2 - d}{1-3a\alpha}\right) \lambda \cos^\beta(\mu\xi) = 0. \quad (33)$$

Using the balance method, by equating the exponents of \cos^j , (33) we find β :

$$\begin{aligned} \beta - 1 &\neq 0, \\ \beta - 2 = 3\beta &\Rightarrow \beta = -1. \end{aligned} \quad (34)$$

Substituting (34) in (33) we obtain next equation

$$-\mu^2 \lambda \cos^{-1}(\mu\xi) + 2\mu^2 \lambda \cos^{-3}(\mu\xi) + 2\lambda^3 \cos^{-3}(\mu\xi) + \left(\frac{a^3 \alpha - a^2 - d}{1-3a\alpha}\right) \lambda \cos^{-1}(\mu\xi) = 0. \quad (35)$$

From (35) equating the coefficients of each pair of the cosine functions, we find the following system of algebraic equations:

$$\cos^{-1}(\mu\xi): \quad -\mu^2 \lambda + \left(\frac{a^3 \alpha - a^2 - d}{1-3a\alpha}\right) \lambda = 0, \quad (36)$$

$$\cos^{-3}(\mu\xi): \quad 2\lambda\mu^2 + 2\lambda^3 = 0. \quad (37)$$

Solving system (36)–(37) leads to the results,

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{a^3 \alpha - a^2 - d}{1-3a\alpha}}, \quad \alpha = \frac{a^2 + d - \lambda^2}{a^3 - 3a\lambda^2}, \quad (38)$$

where a, d, λ are real numbers.

Substituting (34), (38) into (31) and then obtained expression into (11) we have the cosine solution

$$q_2(x, t) = \pm e^{i(ax+dt)} \lambda \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{a^3 \alpha - a^2 - d}{1-3a\alpha}} (x-ct) \right), \quad (39)$$

where $c = 2a - 3a^2 \alpha - \frac{(a^3 \alpha^2 - d\alpha - a^2 \alpha)}{(1-3a\alpha)}$, $\alpha = \frac{a^2 + d - \lambda^2}{a^3 - 3a\lambda^2}$.

Conclusion

The sine-cosine method was effectively used for the analytic treatment of the Hirota equation. Exact solutions were derived. The obtained solutions can have an application to some practical physical problems. As the Hirota equation is a combination of the nonlinear Schrödinger equation and the complex modified Korteweg-de Vries equation in case $\alpha = 0$ we can get exact solutions for the nonlinear Schrödinger equation. The applied method can be used in further works to establish more entirely new solutions for other kinds of nonlinear evolution partial differential equations.

The research work was prepared with the financial support of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, IRN project AP08956932.

References

1. Wazwaz A. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 700 p. DOI: 10.1007/978-3-642-00251-9
2. Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R., Shaikhova G. Darboux Transformation and Soliton Solution for the (2+1)-Dimensional Complex Modified Korteweg-De Vries Equations. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, Vol. 936, p. 012045 (1–6). DOI: 10.1088/1742-6596/936/1/012045
3. Kutum B.B., Shaikhova G.N. *Q-Soliton Solution for Two-Dimensional q-Toda Lattice*. *Bulletin of the Karaganda University. Physics series*, 2019, no. 3(95), pp. 22–26. DOI: 10.31489/2019Ph3/22-26.
4. Wazwaz A.M. The Sine-Cosine Method for Obtaining Solutions with Compact and Noncompact Structures. *Appl. Math. Comput.*, 2004, Vol. 159, Iss. 2, pp. 559–576. DOI: 10.1016/j.amc.2003.08.136

5. Yusufoglu E., Bekir A. Solitons and Periodic Solutions of Coupled Nonlinear Evolution Equations by using Sine-Cosine Method. *Internat. J. Comput. Math.*, 2006, Vol. 83, Iss. 12, pp. 915–924. DOI: 10.1080/00207160601138756
6. Wazwaz A.M. A Sine-Cosine Method for Handling Nonlinear Wave Equations. *Mathematical and Computer Modeling*, 2004, Vol. 40, Iss. 5, pp. 499–508. DOI: 10.1016/j.mcm.2003.12.010
7. Shaikhova G.N., Kutum B.B., Altaybaeva A.B., Rakhimzhanov B.K. Exact Solutions For the (3+1)-Dimensional Kudryashov–Sinelschikov Equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, Vol. 1416, pp. 012030(1-6). DOI: 10.1088/1742-6596/1416/1/012030
8. Hirota R. Exact Envelope Solutions of a Nonlinear Wave Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, Vol. 14, Iss. 7, pp. 805–809. DOI: 10.1063/1.1666399
9. Sasa N., Satsuma J. New-Type of Soliton Solutions for a Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1991, Vol. 60, no. 2, pp. 409–417. DOI: 10.1143/JPSJ.60.409
10. Karpman V.I., Rasmussen J.J., Shagalov A.G., Dynamics of Solitons and Quasisolitons of the Cubic Third-Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Phys. Rev. E.*, 2001, Vol. 64, Iss. 2, pp. 026614(1-13). DOI: 10.1103/PhysRevE.64.026614
11. Tao Y., He J. Multisolitons, Breathers, and Rogue Waves for the Hirota Equation Generated by the Darboux Transformation. *Phys. Rev. E.*, 2012, Vol. 85, Iss. 2, pp. 02660(1-7). DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026601

Received March 24, 2021

Information about the authors

Shaikhova Gaukhar Nurlybekovna, PhD, Associate Professor, Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Kazakhstan, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0819-5338>, e-mail: g.shaikhova@gmail.com

Kalykbay Yrysbay, L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Kazakhstan, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1465-8298>.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 3, pp. 47–52

УДК 517.1+517.3

DOI: 10.14529/mmph210306

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХИРОТА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИНОС–КОСИНУС

Г.Н. Шайхова, Ы.С. Калыкбай

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан
E-mail: g.shaikhova@gmail.com

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных математической физики являются важным объектом в физике. Так, изучение точных решений нелинейных уравнений в частных производных играет важную роль во многих явлениях в физике. Существует множество эффективных и действенных методов нахождения точных решений.

В данной работе исследовано уравнение Хироты. Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных и представляет собой комбинацию нелинейного уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза. Нелинейное уравнение Шредингера является физической моделью и встречается в различных областях физики, включая нелинейную оптику, физику плазмы, сверхпроводимость и квантовую механику. Комплексное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза применяется в качестве модели нелинейной эволюции плазменных волн и представляет собой физическую модель, которая включает распространение поперечных волн в модели молекулярной цепочки и в обобщенном упругом твердом теле.

Для нахождения точных решений уравнения Хироты применен метод синус-косинус. Этот метод является эффективным инструментом для поиска точных решений нелинейных уравнений в частных производных математической физики. Полученные решения могут иметь приложение для объяснения некоторых практических задач физики.

Ключевые слова: уравнение Хироты, метод синус-косинус, решение, обыкновенное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейность.

Литература

1. Wazwaz, A. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory / A. Wazwaz. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 700 p.
2. Darboux Transformation and Soliton Solution for the (2+1)-Dimensional Complex Modified Korteweg-de Vries Equations / G. Bekova, K. Yesmakhanova, R. Myrzakulov, G. Shaikhova // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 936. – P. 012045 (1–6).
3. Kutum, B.B. Q -Soliton Solution for Two-Dimensional q -Toda Lattice. Bulletin of the Karaganda university / B.B. Kutum, G.N. Shaikhova // Physics series. – 2019. – no. 3(95). – P. 22–26.
4. Wazwaz, A.M. The Sine-Cosine Method for Obtaining Solutions with Compact and Noncompact Structures / A.M. Wazwaz // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – Vol. 159, Iss. 2. – P. 559–576.
5. Yusufoglu, E. Solitons and Periodic Solutions of Coupled Nonlinear Evolution Equations by using Sine-Cosine Method / E. Yusufoglu, A. Bekir // Internat. J. Comput. Math. – 2006. – Vol. 83, Iss. 12. – P. 915–924.
6. Wazwaz, A.M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations / A.M. Wazwaz // Mathematical and Computer Modeling. – 2004. – Vol. 40, Iss. 5. – P. 499–508.
7. Exact solutions for the (3+1)-dimensional Kudryashov-Sinelshchikov equation / G.N. Shaikhova, B.B. Kutum, A.B. Altaybaeva, B.K. Rakhimzhanov // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1416. – P. 012030(1-6).
8. Hirota, R. Exact Envelope Solutions of a Nonlinear Wave Equation / R. Hirota // Journal of Mathematical Physics. – 1973. – Vol. 14, Iss. 7. – P. 805–809.
9. Sasa, N. New-Type of Soliton Solutions for a Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equation / N. Sasa, J. Satsuma // J. Phys. Soc. Jpn. – 1991. – Vol. 60, no. 2. – P. 409–417
10. Karpman, V.I. Dynamics of Solitons and Quasisolitons of the Cubic Third-Order Nonlinear Schrödinger Equation / V.I. Karpman, J.J. Rasmussen, A.G. Shagalov // Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 64, Iss. 2. – P. 026614.
11. Tao, Y. Multisolitons, Breathers, and Rogue Waves for the Hirota Equation Generated by the Darboux Transformation / Y. Tao, J. He // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 85, Iss. 2. – P. 02660(1-7).

Поступила в редакцию 24 марта 2021 г.

Сведения об авторах

Шайхова Гаухар Нурлибековна – PhD, доцент, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0819-5338>, e-mail: g.shaikhova@gmail.com

Калыкбай Ырысбай – Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1465-8298>.

ОПИСАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСЧЕТАХ МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

О.Ф. Чернявский, А.О. Чернявский

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: cherniavskii@susu.ru*

Рассматриваются вопросы достоверности результатов расчетов долговечности конструкций, работающих в условиях циклического неупругого деформирования. Учитывается ограниченность имеющейся экспериментальной информации и особенности расчетных технологий.

Показано, что деление процесса эксплуатации на стадии (приработка, стабильная работа, предразрушение) и явное выделение типов неупругого циклического деформирования (знакопеременное течение, одностороннее накопление деформаций, их комбинация) позволяют указать, какие из результатов ограниченных расчетов, проведение которых возможно в сегодняшних условиях, являются достоверными, а какие – заведомо нет. Без такого деления обосновать достоверность результатов невозможно – по крайней мере в настоящее время, пока физические «первопринципные» модели материалов слишком сложны для применения в расчетах конструкций, а эмпирические не могут быть построены из-за недостатка данных. Приведен пример расчета, демонстрирующий как нестандартное использование существующих в пакетах МКЭ средств для более полного описания свойств материала, так и существенное различие результатов в зависимости от способа учета рассматриваемых эффектов.

Ключевые слова: малоцикловая усталость; знакопеременное деформирование; прогрессирующее накопление деформаций; расчет кинетики деформирования.

Введение

Долговечность конструкций при малоцикловом нагружении лимитируется либо образованием трещин, либо накоплением недопустимых перемещений, т. е. изменением геометрии конструкции, делающим невозможным ее дальнейшее использование. Первое из этих предельных состояний, т. е. образование трещин, встречается чаще, и его исследованию посвящено большое число работ – [1–6 и др.]. Методы экспериментальных исследований стандартизованы [7–9], а их результаты представляются в виде кривых усталости [10–12] или законов суммирования циклических и статических повреждений [3, 13].

Неупругое деформирование конструкций сопровождается перераспределением напряжений, и определение размахов деформаций в опасной точке конструкции требует учета деформационных свойств материала (в отличие от испытаний образцов на малоцикловую усталость в условиях однородного напряженно-деформированного состояния). Современные пакеты МКЭ сняли вопрос учета реальной геометрии детали, но вопрос описания свойств материала нельзя считать окончательно решенным. За пределами упругости эти свойства зависят не только от технологии изготовления, но и от всей предшествующей истории неупругого деформирования. Конкретные проявления этой зависимости весьма разнообразны. Следствием явилось появление в библиотеках свойств материалов пакетов МКЭ многих десятков различных моделей деформирования [14, 15], развивающихся в направлении попыток охватить все больший круг эффектов. Чаще всего эти модели приводятся без указания конкретных границ применимости. Отсутствие общепринятого подхода с доказанной адекватностью компенсируется большими коэффициентами запаса по числу циклов (например, $n_N = 10$ в [12]). Результатом является существенное сокращение маневренности конструкций, возможностей и скоростей изменения режимов работы при нормальной эксплуатации.

В то же время деформационных характеристик, определяемых в стандартных испытаниях на малоцикловую усталость, может оказаться достаточно для расчета в некоторых случаях. Такой подход, рассматриваемый ниже, возможен на основе дифференциации различных типов малоциклового деформирования, стадий работы конструкции и целей расчетов.

Типы и стадии малоциклового деформирования

В широко известной работе [16] были выделены 3 типа неупругого деформирования (знакопеременное течение, прогрессирующее накопление деформаций, их комбинация) и для модельной конструкции определены комбинации нагрузок, приводящих к реализации каждого типа деформирования. Решение Врее вошло в нормативные документы [10] и было распространено на другие конструкции.

Отметим некоторые особенности решения Врее. Во-первых, оно получено для идеально упруго-пластического материала со свойствами, не зависящими от типа деформирования в цикле (эксперименты – см., например, [17] – показывают, что это не так). Во-вторых, решение Врее было выполнено с использованием критерия текучести Треска – Сен-Венана, поверхность текучести которого кусочно-линейна. Такой характер поверхности текучести вместе с ассоциированным законом течения и обусловил существование области «чистого знакопеременного течения» конечного размера – рис. 1. Если векторы скорости пластической деформации в 2 момента времени цикла параллельны, то их сумма может быть равна 0 (чистое знакопеременное течение без накопления деформаций). Для критерия Мизеса параллельность этих векторов достигается лишь при идеальной симметрии цикла напряжений; цикл, смещенный постоянной нагрузкой от начала координат, сопровождается накоплением деформаций – см. рис. 1. Нужно отметить здесь разницу между силовым и кинематическим – скажем, тепловым – нагружением. При кинематическом нагружении вырабатываемые остаточные деформации приводят к симметризации цикла, а при силовом нагружении – нет. В задаче Врее, моделирующей реальную конструкцию – ТВЭЛ атомного реактора, – силовое и кинематическое нагружение сочетаются: внутренне давление соответствует силовому нагружению, а перепад температур – кинематическому. Оценивать соотношение между размахом деформаций в цикле и накоплением за цикл можно через величины соответствующих повреждений. Пример результатов конечно-элементных расчетов задачи Врее с использованием критерия текучести Мизеса и методик расчета статического и циклического повреждения из [13] приведен на рис. 2.

Задача Врее характерна тем, что в рассматриваемой конструкции – длинной цилиндрической оболочке – отсутствует перераспределение напряжений по длине и окружности; именно это обеспечивает возможность существования «чистого накопления деформаций». Для конструкций с концентраторами напряжений и локальной зоной неупругого циклического деформирования такое накопление может быть исключено – за счет упругой части конструкции. Однако это верно лишь для стабильного цикла, т. е. стадии стабильной работы конструкции. На стадиях приработки и предразрушения это не так.

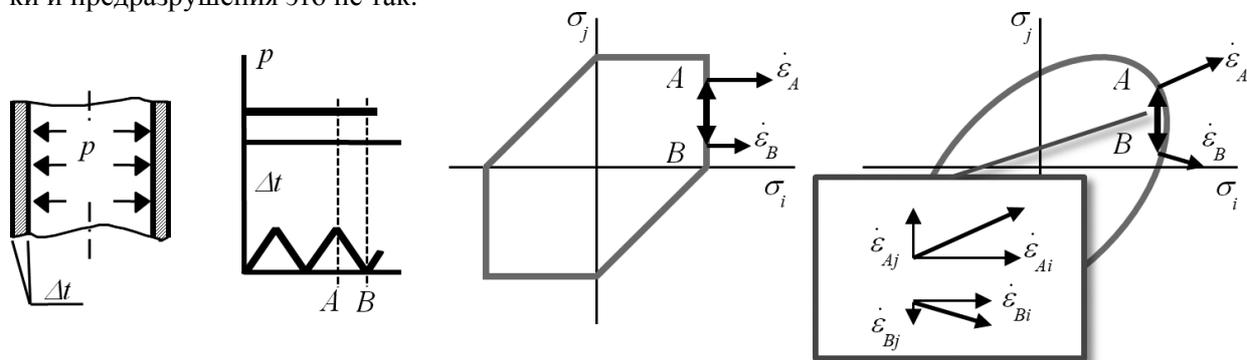


Рис. 1. Поверхности текучести Треска–Сен-Венана и Мизеса (и векторы скорости пластической деформации в разные моменты цикла)

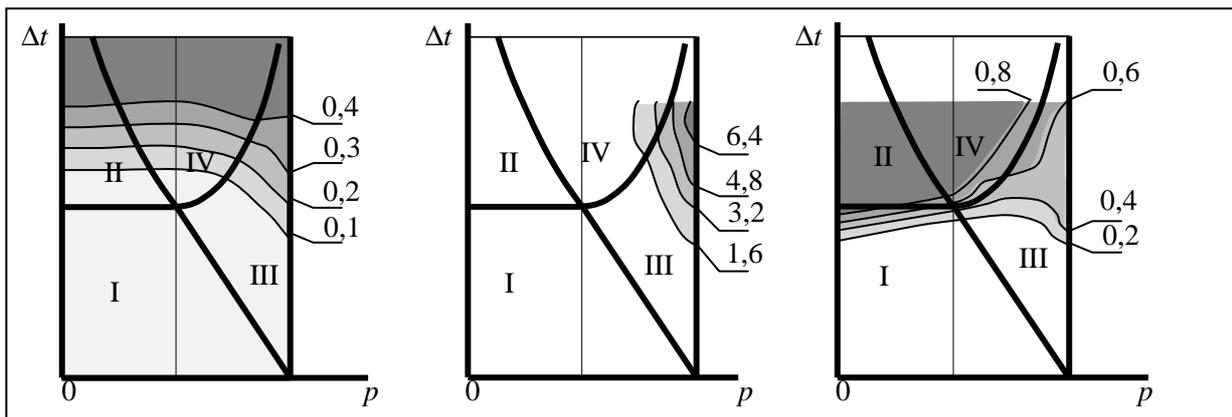


Рис. 2. Решение Врее и доли статического и циклического повреждения при использовании критерия Мизеса: а) интенсивность размахов деформации за цикл; б) интенсивность приращений деформации за цикл; в) доля циклической составляющей в суммарном повреждении за цикл

Материал в решении Врее полагается стабильным: свойства не меняются от цикла к циклу и не зависят от типа деформирования. Свойства реальных материалов от типа деформирования зависят вследствие проявления эффектов, невозможных при однократном нагружении: при знакопеременном течении – циклическое упрочнение-разупрочнение и многократное ускорение неустановившейся ползучести вследствие предшествующей пластической деформации другого знака; при прогрессирующем формоизменении – повторением в каждом цикле неустановившейся ползучести при высоких напряжениях (ползучесть ниже не рассматривается).

На стадии приработки от цикла к циклу меняются свойства материала (циклическое упрочнение или разупрочнение) и поля остаточных напряжений и деформаций в конструкции. Эксперименты [4, 17] показывают, что для стабилизации свойств материала обычно достаточно нескольких десятков циклов. Примерно такое же количество циклов нужно для стабилизации полей остаточных деформаций и размахов деформаций за цикл при стабильных свойствах материала. Для конструкций с плановым ресурсом порядка 10 000 циклов, например авиационных двигателей, повреждения, накапливаемые на стадии приработки, оказываются небольшими. Это является основанием для достаточно многочисленных попыток ограничиться рассмотрением накопления повреждений только в стабильных циклах, см., например [18, 19].

Однако в ряде задач такой подход не может быть использован. К ним относятся задачи расчетов конструкций с малым плановым ресурсом и расчеты на стадии предразрушения.

Особенности технологии расчетов кинетики деформирования

Для конструкций с плановым ресурсом на уровне десятков и сотен циклов стадия приработки может составлять значительную часть ресурса – особенно при наличии ползучести, вызывающей продолжающееся от цикла к циклу изменение границы зоны неупругого деформирования. Одним из вариантов анализа работы конструкции в этих условиях является расчет кинетики неупругого деформирования.

Существенное влияние на результаты расчета этой стадии работы конструкции могут оказать остаточные напряжения и изменения пределов текучести (наклепы) вследствие деформирования в технологическом процессе. В качестве примера на рис. 3 показаны поцикловые расчеты кинетики окружной деформации ϵ_r , осевой деформации ϵ_z и интенсивности деформаций ϵ_i в задаче Врее в случае отсутствия и наличия технологических остаточных напряжений. Остаточные напряжения сдвигают петлю гистерезиса, изменяя значения накопленных к моменту стабилизации компонент деформаций и размахов интенсивности деформаций (размахи компонент и, соответственно, интенсивность размахов при этом не зависят от остаточных напряжений).

Отметим, что расчетное получение информации об остаточных напряжениях и наклепах требует моделирования всего технологического процесса, является сложным и применяется редко. Одним из первых примеров, по-видимому, может считаться работа [20]. Несмотря на рост вычислительных возможностей, эти задачи, прежде всего в силу сложности получения и недостаточной надежности исходных данных, остаются скорее уникальными, чем типичными.

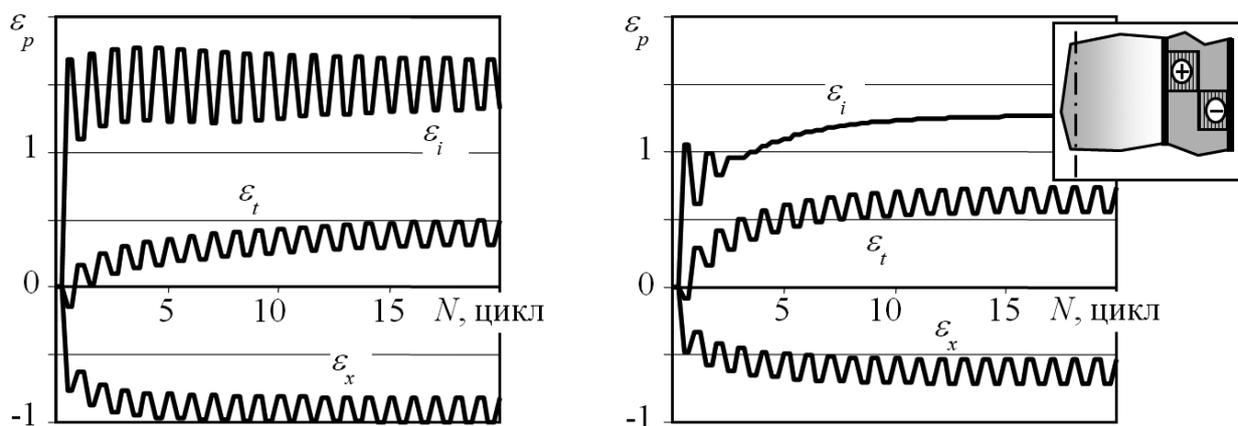


Рис. 3. Результаты поциклового расчета неупругих деформаций в задаче Вреге при отсутствии или наличии технологических остаточных напряжений. Справа вверху – распределение окружных остаточных напряжений на начало процесса

Экспериментальное получение этой информации затрудняется необходимостью разрушить деталь (для определения остаточных напряжений) и высокими градиентами свойств и напряжений в приповерхностных слоях, зонах термического влияния сварных швов и т. п.

Для оценки возможности получения информации о наклепах и остаточных напряжениях неразрушающим методом была предпринята попытка моделирования определения твердости по Бринеллю в образце из стали 12Х18Н10Т. Условия моделируемых испытаний соответствовали ГОСТ 9012-59. Истинная диаграмма деформирования материала строилась по значениям предела текучести (196 МПа) и предела прочности (491 МПа) из [12] с использованием аппроксимирующих формул приложения 3.Д к [11]. Попытка оказалась неудачной: предварительное растяжение до 350 МПа (и последующая разгрузка) с целью создания наклепа изменило расчетную величину вдавливания менее чем на 5 %, что, по-видимому, лежит в пределах точности измерений. Причиной является то, что предварительное растяжение поднимает наблюдаемый предел текучести лишь в направлении предварительного растяжения, а на результатах вдавливания шарика сказываются усредненные по направлениям свойства (возможно, вдавливание призмы в 2 взаимно перпендикулярных направлениях могло бы дать дополнительную информацию, но такие испытания не являются стандартизованными). Влияние остаточных напряжений на вдавливание шарика может маскировать даже это небольшое влияние наклепа, так как знаки изменений оказываются различны.

Таким образом, целью расчета на стадии приработки может быть оценка ширины петли неупругого деформирования для определения уровня циклического упрочнения (разупрочнения) материала с использованием циклической кривой – в предположении, что соответствующее упрочнение (разупрочнение) успевает полностью реализоваться. Такой расчет, по-видимому, не имеет смысла, если плановый ресурс конструкции достаточно велик и стадия стабильной работы (см. ниже) достаточно продолжительна для того, чтобы установившиеся на этой стадии размахи и уровни упрочнения слабо зависели от стадии приработки.

На стадии стабильной работы единственность решения, как известно, доказывается лишь для областей, где идет пластическое деформирование – при условии известных свойств материала. Учет циклического упрочнения-разупрочнения может быть сделан итерационным способом: путем последовательных расчетов нескольких циклов, оценки ширины петли гистерезиса и величины накопления деформаций за цикл, и подстановки соответствующих им свойств материала – с последующим повторением расчета. Такая процедура сложнее, чем применяемые сейчас (реализованные, например, в пакете ABAQUS) процедуры расчета стабильных циклов, предполагающие независимость диаграмм циклического деформирования от размахов и приращений деформаций в цикле.

Если приращения деформаций в цикле невелики и свойства материала близки к свойствам при жестком циклическом нагружении, то в расчет должны быть заложены диаграммы циклического деформирования в стабилизированном жестком цикле для каждого заданного размаха

деформаций в цикле. При отсутствии таких данных в справочной литературе в качестве первого приближения можно, видимо, рекомендовать коррекцию кривой однократного деформирования на основе циклической кривой (см., например, [4]) и предположения, что модуль упругости не меняется. Технологически описать такое изменение диаграмм в существующих пакетах можно так же, как изменение диаграмм при нагреве. При этом после расчета одного цикла деформирования конструкции в каждой точке (каждом конечном элементе) должна быть вычислена интенсивность размаха неупругой деформации, по ней – величина упрочнения и выбрана соответствующая «температура», определяющая диаграмму деформирования. Повторять процесс нужно до обеспечения сходимости, понимаемой как малое отличие последовательных циклов (более корректным является сравнение не 2 последовательных циклов, а результатов расчетов в текущем цикле с результатами экстраполяции по рассчитанным циклам на большое число циклов). При изотермическом нагружении такая процедура может быть реализована в конечно-элементных пакетах использованием зависимости свойств от квази-температуры; нужно только иметь в виду, что в существующих пакетах (в частности, ANSYS) нет встроенных средств расчета интенсивности размахов неупругих деформаций и соответствующей «квази-температуры», это должно быть сделано, например, с использованием программирования на встроенных языках пакетов МКЭ (APDL в ANSYS, Python в ABAQUS и т. п.).

В качестве методического примера ниже рассмотрен расчет круглого образца с кольцевой выточкой. В качестве материала рассматривается сталь 12X18H10T; диаграммы деформирования, восстановленные по аппроксимационным формулам [4], показаны на рис. 4.

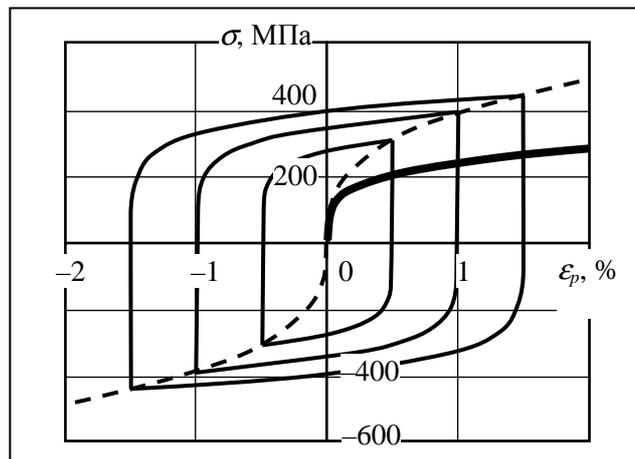


Рис. 4. Диаграмма деформирования при монотонном нагружении (жирная кривая), циклическая кривая (штриховая) и диаграммы деформирования в стабильных циклах с разными размахами деформаций

Для диаграмм циклического деформирования (в координатах σ_* , ε_{p*} , отсчитываемых от точки реверса) использовано степенное описание вида $\sigma_* = A \varepsilon_{p*}^n$ с постоянным значением показателя $n = 0,08$ [4]; множитель A определяется из условия, что при заданной амплитуде неупругой деформации ε_{pa} вершины петель гистерезиса попадают на циклическую кривую. При задании свойств материала в ANSYS учитывается то, что в модели материала с кинематическим упрочнением реализуется принцип Мазинга, и диаграммы циклического деформирования задаются в виде «однократных» диаграмм, центрально подобных полученным с коэффициентом подобия 1/2.

Результаты расчетов существенно зависят от методики. Так, максимальная интенсивность размаха пластических деформаций за цикл, рассчитанная при описании свойств материала кривой однократного деформирования составляет 1,54 %; при описании кривой, учитывающей упрочнение, определенное по размахам деформаций вдали от концентратора – 1,87 %; при полном учете упрочнения (упрочнение в каждой точке конструкции зависит от размаха деформаций в этой точке) – 0,81 % (см. рис.5). Учитывая, что долговечность в малоциклового области обратно пропорциональна квадрату размаха деформаций в цикле, найденные различия представляются очень существенными с точки зрения оценки ресурса конструкции – до 5 раз.

Единственность решения обеспечивается лишь в том случае, если упрочнение зависит от размаха деформаций в стабильном цикле и не зависит от истории. В общем случае это не так – см., например, [21]. Предложенная выше технология предполагает отсутствие в программе нагружения перегрузок, которые могли бы привести к повышенному упрочнению материала.

Если нагружение является неизотермическим или если в стабильном цикле обнаруживается – кроме размаха – накопление неупругой деформации, которое меняет свойства материала [17], то замена диаграммы деформирования несколько осложняется. Возможным выходом является создание набора описаний материала, каждое из которых содержит диаграмму стабильного деформирования в определенных условиях, выбор соответствующего описания по результатам расчета и повторение этой процедуры до обеспечения сходимости. Описание зависимости упрочнения от размаха и приращения неупругой деформации в цикле при этом получается дискретным (кусочно-постоянным). В существующих пакетах «замена» материала не может быть сделана в середине программы нагружения, поскольку получающиеся поля накопленных деформаций и остаточных напряжений не будут удовлетворять условиям совместности и уравнениям равновесия. Необходима итерационная процедура обеспечения сходимости.

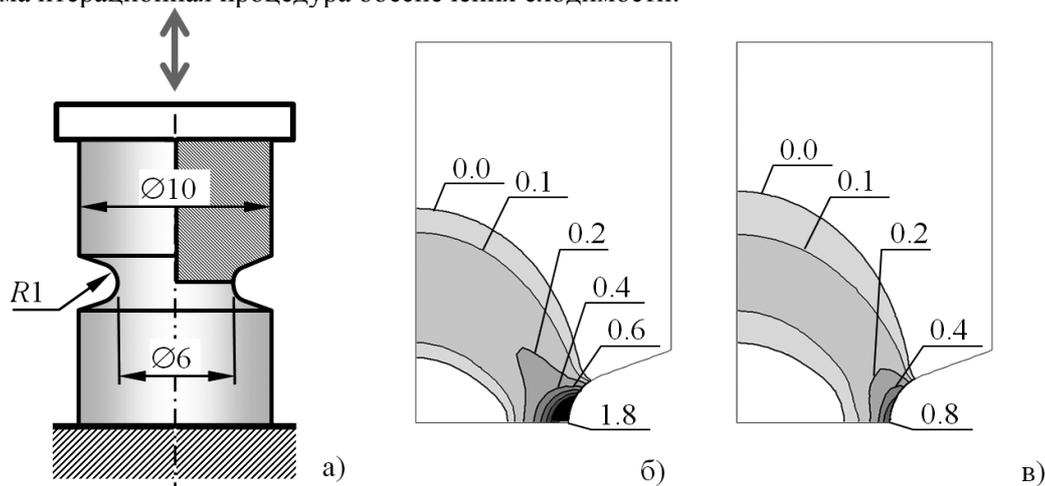


Рис. 5. Распределение интенсивности размаха пластических деформаций (в %) в круглом образце с надрезом при жестком циклическом нагружении: а) схема, б) расчет без учета циклического упрочнения, в) с учетом (разный уровень упрочнения в разных точках конструкции)

Наиболее трудной проблемой является расчет на стадии предразрушения и разрушения. Циклическое разупрочнение, характерное для материала на этой стадии, не позволяет считать стабильный цикл и вынуждает ограничиваться поцикловыми расчетами кинетики, главной проблемой которых является отсутствие достоверной исходной информации: ни на стадии приработки, ни на стадии стабильной работы накопленные деформации не могли быть корректно определены. Если предположить, что остаточные технологические деформации невелики по сравнению с ресурсом пластичности (что, очевидно, верно не всегда), а накопление деформаций в стабильном цикле в опасных зонах оценено на предыдущей стадии корректно, то такой расчет – с соответствующим поцикловым изменением диаграмм деформирования – может быть сделан, хотя и требует, как в предыдущем случае, дополнений к стандартным средствам пакетов МКЭ и обладает ограниченной информативностью.

Выводы

Полный «прямой» расчет процесса малоциклового деформирования конструкции в течение всего ресурса в настоящее время невозможен по 4 причинам:

- отсутствие экспериментальных данных для произвольного неупругого нагружения, характеризующегося ненулевыми размахами и приращениями пластической деформации в цикле (более того, отсутствуют стандарты таких испытаний);
- отсутствие моделей материала (физические «первопринципные» модели слишком сложны, а эмпирические не могут быть построены из-за отсутствия данных);
- отсутствие (в большинстве случаев) достаточно точной и полной информации о технологии и ее влиянии на свойства материала;
- трудоемкость и сложность обеспечения точности при расчете достаточно большого числа циклов.

Деление процесса эксплуатации на стадии (приработка, стабильная работа, предразрушение) и явное выделение типов неупругого циклического деформирования (знакопеременное течение, одностороннее накопление деформаций, их комбинация) позволяет указать, какие из результатов ограниченных расчетов, проведение которых возможно в сегодняшних условиях, являются достоверными. Без такого деления обосновать достоверность результатов невозможно – пока не устранены все причины, перечисленные в п. 1.

Используемые в существующих пакетах МКЭ модели материалов требуют дополнения, поскольку погрешности, связанные с не учитываемыми ими факторами, могут быть значительны. В некоторых случаях такие дополнения удастся обеспечить нестандартным использованием существующих в пакетах средств.

Литература

1. Мэнсон, С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость / С. Мэнсон. – М.: Машиностроение, 1974. – 343 с.
2. Coffin, L.F. A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal / L.F. Coffin, N.Y. Schenectady // Trans. ASME (Ser. A). – 1954. – Vol. 76, no. 6. – P. 931–950.
3. Серенсен, С.В. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению / С.В. Серенсен. – М.: Атомиздат, 1975. – 191 с.
4. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник / Д.А. Гохфельд, Л.Б. Гецов, К.М. Кононов и др. – Екатеринбург, УрО РАН, 1996. – 408 с.
5. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность: Руководство и справ. пособие / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
6. Portella P.D. Low Cycle Fatigue and Elasto-Plastic Behaviour of Materials / P.D. Portella, K.-T.Rie. – Elsevier publ., 2005. – 890 p.
7. ГОСТ 25.502-79. Расчёты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость. – Москва: Изд-во стандартов, 1986. – 34 с.
8. ГОСТ 25.505-85. Расчёты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Метод испытаний на малоцикловую усталость при термомеханическом нагружении. – Москва: Изд-во стандартов, 1985. – 14 с.
9. ASTM E606 / E606M-19e1. Standard Test Method for Strain-Controlled Fatigue Testing. – ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019.
10. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 1 (BPVC-VIII-1 – 2019) – American Society of Mechanical Engineers, 2019. – 796 p. ISBN 9780791872871.
11. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 2-Alternative Rules (BPVC-VIII-2 – 2019) – American Society of Mechanical Engineers, 2019. – 872 p. ISBN 9780791872888.
12. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок ПНАЭ Г-7-002-86. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 527 с.
13. Махутов, Н.А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. В 2-х ч. Ч. 1: Критерии прочности и ресурса / Н.А. Махутов. – Новосибирск: Наука, 2005. – 493 с.
14. ANSYS Mechanical User Guide – ANSYS Inc., 2020, 2422 p.
15. LS-DYNA user's manual. – Livermore Software Technology Inc., 2020. – Vol. 2. – 3527 p.
16. Bree, J. Elastic-Plastic Behavior of Thin Tubes Subjected to Internal Pressure and Intermittent High-Heat Fluxes with Application to Fast Nuclear Reactor Fuel Elements / J. Bree // J. Strain Anal. – 1967. – Vol. 2 (3). – P. 226–238.
17. Cherniavsky, O. Properties of Steels and Chromium-Nickel Alloys under Low-Cycle Combined Deformation / O. Cherniavsky, Yu. Rebiakov, A. Cherniavsky // International Journal of Fatigue. – 2017. – Vol. 103. – pp. 415–418.
18. Spiliopoulos, K. Direct Methods for Limit States in Structures and Materials / K. Spiliopoulos, D. Weichert. – Springer publ., 2014. – 278 p.

19. Tereshin, D.A. Theoretical basis and a finite element formula for the direct calculation of steady plastic states / D.A. Tereshin, O.F. Cherniavsky // *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*. Springer, Cham, 2015. – P. 81–104.

20. Зарубин, В.С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций / В.С. Зарубин. – М.: Машиностроение, 1985. – 293 с.

21. Влияние предыстории нагружения на сопротивление материалов циклическому упруго-пластическому деформированию / Д.А. Гохфельд, С.В. Горский, К.М. Кононов, О.С. Садаков // *Проблемы прочности*. – 1979. – № 1. – С. 6–9.

Поступила в редакцию 14 мая 2021 г.

Сведения об авторах

Чернявский Олег Федорович – доктор технических наук, профессор, кафедра технической механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0023-8871>.

Чернявский Александр Олегович – доктор технических наук, профессор, кафедра технической механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2900-3948>, e-mail: cherniavskiiiao@susu.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 3, pp. 53–61*

DOI: 10.14529/mmph210307

DESCRIPTION OF THE DEFORMATION PROPERTIES OF MATERIALS IN LOW-CYCLE FATIGUE CALCULATIONS

O.F. Cherniavsky, A.O. Cherniavsky

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: cherniavskiiiao@susu.ru*

The issues of reliability of the results of calculations of the structures durability operating under conditions of cyclic inelastic deformation are considered. The limited available experimental information and the specifics of computational technologies are taken into account.

It is shown that division of the operation process into stages (running-in, stable operation, pre-fracture) and evident identification of the types of cyclic inelastic deformation (alternating flow, one-sided accumulation of deformations, their combination) allow to indicate which of the results of limited calculations, possible in today's conditions, are reliable and which are certainly not. Without such a division, it is impossible to substantiate the reliability of the results, at least at present time, while physical "ab initio" models of materials are too complex for use in structural calculations, and the empirical ones cannot be built due to the lack of data. An example of a calculation, demonstrating both the non-standard use of the means existing in the FEM packages for a more complete description of the material properties, and a significant difference in the results depending on the method of accounting for the effects under consideration is given.

Keywords: low-cycle fatigue; alternating deformation; progressive accumulation of deformations; calculation of the kinetics of deformation.

References

1. Manson S.S. *Temperature Stresses and Low-Cycle Fatigue*. McGraw-Hill publ., 1966, 404 p.
2. Coffin L.F., Schenectady N.Y. A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile metal. *Trans. ASME (Ser. A)*, 1954, Vol. 76, no. 6, pp. 931–950.
3. Serensen S.V. *Soprotivlenie materialov ustalostnomu i khrupkomu razrusheniyu* (Resistance of Materials to Fatigue and Brittle Fracture). Moscow, Atomizdat Publ., 1975, 191 p. (in Russ.).
4. Gokhfeld D.A., Getsov L.B., Kononov K.M., Kulchikhin E.T., Rebyakov Yu.N., Sadakov O.S., Timashev S.A., Chepurskiy V.N. *Mekhanicheskie svoystva staley i splavov pri nestatsionarnom nagruz-*

henii. *Spravochnik* (Mechanical Properties of Steels and Alloys under Non-Stationary Loading. Handbook). Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 1996, 408 p. (in Russ.).

5. Serensen S.V., Kogaev V.P., Shneyderovich R.M. *Nesushchaya sposobnost' i raschet detaley mashin na prochnost': Rukovodstvo i sprav. posobie* (Bearing Capacity and Strength Calculations of Machine Parts. Manual and Reference). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 488 p. (in Russ.).

6. Portella P.D., Rie K.-T. *Low Cycle Fatigue and Elasto-Plastic Behavior of Materials*. Elsevier publ., 2005, 890 p.

7. *GOST 25.502-79. Strength Analysis and Testing in Machine Building. Methods of Metals Mechanical Testing. Methods of Fatigue Testing*. Moscow, Izd-vo standartov Publ., 1986, 34 p. (in Russ.).

8. *GOST 25.505-85. Design, Calculation and Strength Testing. Methods of Mechanical Testing of metals. Method of Testing on the Low Cycle Fatigue at Heat Mechanical Loading*. Moscow, Izd-vo standartov Publ., 1985, 14 p. (in Russ.).

9. *ASTM E606 / E606M-19e1, Standard Test Method for Strain-Controlled Fatigue Testing*, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019. DOI: 10.1520/E0606_E0606M-19E01

10. *ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII - Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 1 (BPVC-VIII-1 – 2019) - American Society of Mechanical Engineers*, 2019, 796 p. ISBN 9780791872871.

11. *ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 2-Alternative Rules (BPVC-VIII-2 – 2019) – American Society of Mechanical Engineers*, 2019, 872 p. ISBN 9780791872888.

12. *Normy rascheta na prochnost' oborudovaniya i truboprovodov atomnykh energeticheskikh ustanovok PNAE G-7-002-86* (Strength Code for Equipment and Pipelines of Nuclear Power Plants PNAE G-7-002-86). Moscow, Energoatomizdat Publ., 1989, 527 p. (in Russ.).

13. Makhutov N.A. *Konstruksionnaya prochnost', resurs i tekhnogennaya bezopasnost. Ch. 1: Kriterii prochnosti i resursa* (Structural strength, resource and industrial safety. In 2 parts. Part 1. Strength and resource criteria). Novosibirsk, Nauka Publ., 2005, 493 p.

14. *ANSYS Mechanical User Guide*. ANSYS Inc., 2020, 2422 p.

15. *LS-DYNA user's manual*. Livermore Software Technology Inc., 2020, Vol. 2, 3527 p.

16. Bree J. Elastic-plastic behavior of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements. *J. Strain Anal.*, 1967, Vol. 2 (3), pp. 226–238.

17. Cherniavsky O., Rebiakov Yu., Cherniavsky A. Properties of Steels and Chromium-Nickel Alloys under Low-Cycle Combined Deformation. *International Journal of Fatigue*, 2017, Vol. 103, pp. 415–418. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2017.06.025

18. Spiliopoulos K., Weichert D. *Direct Methods for Limit States in Structures and Materials*. Springer publ., 2014, 278 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6827-7

19. Tereshin D.A., Cherniavsky O.F. *Theoretical Basis and a Finite Element Formula for the Direct Calculation of Steady Plastic States*. In: *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*. Springer, Cham, 2015, pp. 81–104. DOI:10.1007/978-3-319-12928-0_5

20. Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruksiy* (Applied Problems of Thermal Strength of Structural Elements). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 293 p. (in Russ.).

21. Gokhfel'd D.A., Gorskiy S.V., Kononov K.M., Sadakov O.S. Vliyanie predystorii nagruzheniya na soprotivlenie materialov tsiklicheskomu uprugoplasticheskomu deformirovaniyu (Influence of the Prehistory of Loading on the Resistance of Materials Cyclic Elastoplastic Deformation). *Problemy prochnosti* (Problems of strength), 1979, no. 1, pp. 6–9. (in Russ.).

Received May 14, 2021

Information about the authors

Cherniavsky Oleg Fedorovich, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Technical Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0023-8871>.

Cherniavsky Aleksandr Olegovich, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Technical Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2900-3948>, e-mail: cherniavskii@susu.ru

О ПРОЦЕССЕ РАЗРЯДА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ИОНИСТОРОВ

Е.С. Богданов¹, О.Р. Сухова¹, А.Г. Воронцов²

¹ МБОУ «Физико-математический лицей № 31 г. Челябинска», г. Челябинск, Российская Федерация

² Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: vorontsovag@susu.ru

Несмотря на растущую популярность ионисторов (суперконденсаторов), общепринятая модель разряда и единая методика описания их характеристик пока отсутствуют. Это связано со сложностью физико-химических процессов, происходящих в них. В данной работе был проведен анализ заряд-разрядных кривых изготовленного в лаборатории и промышленного ионисторов.

Было показано, что для исследованных ионисторов, в отличие от обычных конденсаторов, характерен двухступенчатый механизм разряда с отличающимися примерно на порядок постоянными времени. Быстрый разряд определяется внутренними параметрами ионистора, а постоянная времени этого процесса не зависит от сопротивления внешней цепи. Для медленного процесса постоянная времени линейно зависит от сопротивления внешней цепи, поэтому этот процесс является аналогом разряда обычного конденсатора. Из параметров медленного процесса возможно определить эффективное внутреннее сопротивление ионистора и его емкость.

Соотношение скоростей быстрого и медленного разряда в случаях лабораторного и промышленного ионисторов примерно одинаково, что указывает на сходность процессов, протекающих в них. Существенная разница между ионисторами наблюдается в соотношении амплитуд напряжений, соответствующих быстрому и медленному процессам. Для промышленного ионистора вклад напряжения, приходящегося на медленный (зависящий от параметров внешней цепи) процесс, существенно выше, что говорит о большей его эффективности при работе в электрических цепях.

Ключевые слова: ионистор; заряд-разрядные кривые; двухступенчатый разряд.

Введение

Ионисторы (суперконденсаторы) – это электрохимические накопители энергии. Они отличаются от обычных конденсаторов тем, что для сохранения электрической энергии используется не макроскопический диэлектрический слой между проводящими обкладками, а микроскопический поляризованный слой на границе поверхности раздела твердого вещества и электролита [1, 2]. По характеристикам ионистор занимает промежуточное положение между конденсатором и химическим источником тока [3]. Благодаря уникальным свойствам ионисторы находят применение в различных устройствах. Они дают ощутимую экономию энергии при применении совместно с обычными аккумуляторными батареями (АКБ) в автомобилестроении [4], что не только улучшает характеристики гибридной АКБ, но и позволяет запускать двигатель при экстремально низких температурах; они могут применяться в системе активного фильтра электросети [5], что позволяет поднять показатели отказоустойчивости и долговечности электрических устройств; используются в системах рекуперации энергии, например с их помощью удается вернуть до 35 % кинетической энергии вагонов метрополитена, теряемой во время торможения [6]. Эти и многие другие способы применения ионисторов находятся в стадии экспериментальной разработки.

Несмотря на расширяющуюся область применения ионисторов и их активное промышленное производство, теоретическое описание процессов, происходящих в ионисторе, далеко от завершения. Установлено [1–3], что накопление энергии в ионисторе происходит в двойном электрическом слое (ДЭС) на границе раздела электрода и электролита. Толщина внутренней части ДЭС

порядка нанометров, что приводит к значительному увеличению емкости, которая обратно пропорциональна расстоянию между зарядами. При этом не происходит образование химической связи, то есть данная электрохимическая система ведет себя как конденсатор. Из-за малости расстояний между зарядами (порядка размеров атома) и обширной площади поверхности материала электродов (например, у активированного угля) емкость ионисторов может составлять несколько Фарад, а плотность запасенной энергии исчисляется Ваттами на килограмм [3].

Существуют разные модели разряда ионистора и его эквивалентные схемы. Наиболее часто встречаются модели линейного и экспоненциального разряда. В работе [7] используется модель экспоненциального разряда, тем самым ионистор отождествляется с обычным конденсатором. В работе [8], напротив, процесс разряда ионистора рассматривают как резкий спад напряжения и дальнейшее его линейное уменьшение. При этом ионисторы выделяются в отдельный тип накопителей энергии наряду с конденсаторами и аккумуляторными батареями. Эквивалентные схемы, предложенные для ионисторов, тоже различны [1]. Обычно предлагается рассматривать каждую пору материала электрода как конденсатор, соединенный через сопротивление с одной из обкладок ионистора. Однако даже одинаковые физические модели в работах разных авторов приводят к различным эквивалентным схемам [9, 10]. Трудности теоретического описания связаны, в том числе, с тем, что в ДЭС входят ионы двух типов: потенциалопределяющие – способные терять свою водную оболочку и «прилипнуть» к электроду, изменяя его потенциал, и индифферентные – сохраняющие водную оболочку и поэтому находящиеся на несколько больших расстояниях. Таким образом, сложность физико-химических процессов, происходящих в ионисторе, пока не позволяет создать единую теорию.

Целью данной работы стало экспериментальное изучение закономерностей разрядных кривых изготовленных в лаборатории электростатических ионисторов и их промышленных аналогов.

Подготовка образцов и схема эксперимента

В работе исследовались характеристики промышленных ионисторов (внутренним сопротивлением 15 Ом и емкостью 2 Ф) и ионисторов, изготовленных в лабораторных условиях. Электроды ионистора изготавливались из алюминиевой фольги, покрытой электродной смесью, состоящей из порошка активированного угля, находящегося в связующем токопроводящем веществе (клею ПВА). В качестве электролита использовали сульфат алюминия, который не разрушает алюминиевые токосъемники и является хорошим проводником электричества. Активированный уголь, связующее вещество и электролит брались в объемных соотношениях 15:5:3. Сборка ионистора выполнялась в несколько этапов: нанесение электродной смеси тонким слоем на фольгу и последующая сушка при температуре 100 °С; пропитка сепаратора электролитом; формирование слоистой структуры из двух электродов, разделенных сепаратором.

Для получения заряд-разрядных кривых использовалась схема, показанная на рис. 1. Изменением положения ключа можно осуществить заряд (положение 1), саморазряд, который заключается в протекании внутренних токов, (положение 2) и разряд ионистора через нагрузку (положение 3). Для измерения силы тока в цепи использовался эталонный резистор сопротивлением $r = 1,0$ Ом. В качестве вольтметров использовались 15-битовые АЦП ADS1115, подключенные к компьютеру. Данная схема позволила измерять напряжение на ионисторе U в диапазоне $-6,14...6,14$ В с шагом 0,19 мВ и ток через ионистор I в диапазоне $-2,56...2,56$ А с шагом 66 мкА.

Зарядка ионистора осуществлялась в течении 3–5 мин (до достижения насыщения), напряжение при этом составляло около 2,1 В, оно не приводило к необратимым химическим изменениям. Разрядка производилась через 32 различных постоянных сопротивления $R_{нагр}$ номиналом 3...42 Ом. Измерение завершалось в момент, когда напряжение на ионисторе падало до 5 мВ (при меньших напряжениях невозможно корректно измерять ток в цепи). Точное значение $R_{внеш}$ – внешнего сопротивления цепи (с учетом сопротивления проводов и эталонного сопротивления) – было получено по зависимости $U(I)$, которая с высокой точностью была линейной.

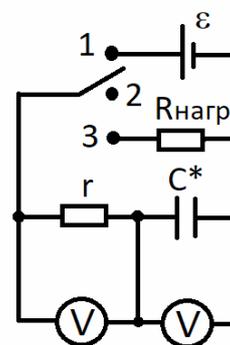


Рис. 1. Схема установки

Результаты и обсуждение

Заряд-разрядные кривые для лабораторного и промышленного ионисторов показаны на рис. 2. Они представляют собой резкие переходы в моменты переключения, сменяющиеся плавным приближением к стационарному состоянию. Для обоих ионисторов наблюдаются сходные зависимости, однако необходимо обратить внимание на разницу масштабов времени. Стоит отметить следующие различия: для лабораторного ионистора скачки напряжения при переключениях существенно больше; для силы тока наблюдается обратная закономерность – скачки тока при переключении больше для промышленного ионистора. Для лабораторного ионистора существует значительный ток утечки. Это можно увидеть для времен $t_1 = 40...60$ с, когда напряжение на ионисторе достигло напряжения источника питания (2,1 В), а в цепи остается существенный ток (около 15 мА). Остаточное напряжение и ток для лабораторного ионистора свидетельствуют о его неполном разряде за указанное время. Из вышеперечисленного можно заключить, что лабораторный ионистор уступает заводскому по качеству исполнения, так как имеет существенно меньшее сопротивление саморазряда (большой ток утечки) и существенно меньшую емкость (быстрое нарастание / падение напряжения).

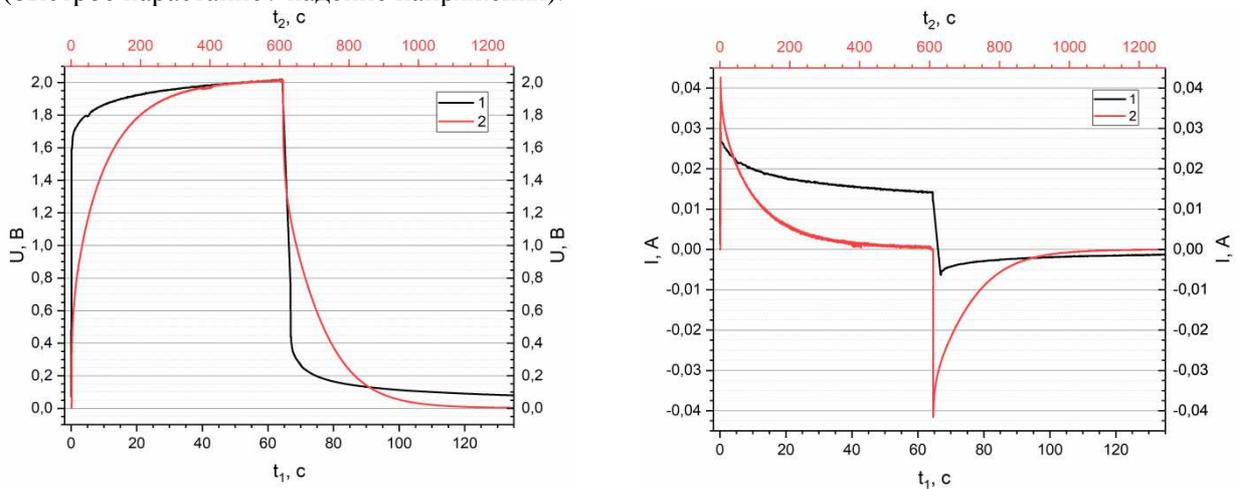


Рис. 2. Заряд-разрядные кривые ионисторов для напряжения (слева) и силы тока (справа). 1 – лабораторный ионистор и нижняя шкала времени (t_1), 2 – заводской ионистор и верхняя шкала времени (t_2)

При анализе разрядных кривых выяснилось (рис. 3), что они не могут быть описаны одной функцией вида:

$$U(t) = U_0 e^{-t/\tau}, \quad (1)$$

так как начальный и конечный участки существенно различны по форме. Это говорит о том, что ионистор является более сложным объектом, чем конденсатор, который имеет постоянную емкость и одну постоянную времени разряда. Как показано на рис. 3, для описания экспериментальных зависимостей гораздо лучше подходит линейная комбинация двух экспонент:

$$U(t) = U_1 e^{-t/\tau_1} + U_2 e^{-t/\tau_2}, \quad (2)$$

в которой быстрый лавинообразный спад описывается первым слагаемым, а последующее плавное падение напряжения – вторым. Хорошее совпадение аппроксимации по формуле (2) и разрядных кривых свидетельствует о наличии двух механизмов накопления и переноса заряда, U_1 и U_2 – их вклады в напряжение, а τ_1 и τ_2 – характерные для них времена переноса заряда.

На рис. 4 и 5 приведены зависимости постоянных времени от внешнего сопротивления цепи. Можно заметить, что τ_1 не зависит от $R_{\text{внеш}}$, и равно $(3,45 \pm 0,06)$ с, а τ_2 – имеет линейную зависимость:

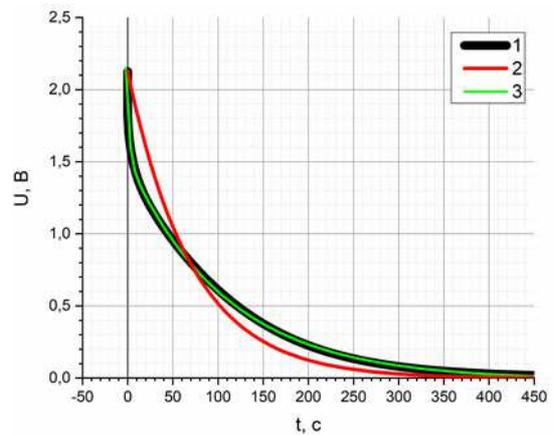


Рис. 3. Аппроксимация разрядной кривой промышленного ионистора. 1 – разрядная кривая, 2 – аппроксимация формулой 1, 3 – аппроксимация формулой 2

$$\tau_2 = A + B \cdot R_{\text{внеш}}, \quad (3)$$

где $A = (29,3 \pm 1,9)$ с, $B = (1,88 \pm 0,07)$ с/Ом. Указанные погрешности соответствуют среднеквадратичному отклонению точек от аппроксимирующей линии. Заметим, что скорости процессов различаются на порядок, поэтому будем называть первый процесс «быстрым», а второй – «медленным».

В случае идеальной цепи (с нулевым полным сопротивлением) переключения состояний ионистора, в том числе разряд, происходят мгновенно, то есть постоянная времени стремится к нулю. Поэтому из рис. 5 можно оценить внутреннее сопротивление ионистора. Так как $R_{\text{цепи}} = R_{\text{внеш}} + R_{\text{внут}}$, то для $R_{\text{цепи}} = 0$ и $\tau_2 = 0$, получим $R_{\text{внут}} = A/B = (14 \pm 2)$ Ом. Производителем заявлено значение 15 Ом, что соответствует нашим данным. Если медленный процесс в разряде ионистора рассматривать как разряд обычного конденсатора, то коэффициент B является «емкостью» ионистора: $\tau_2 = B \cdot (R_{\text{внут}} + R_{\text{внеш}}) = C \cdot R_{\text{цепи}}$. В нашем случае получается $C = (1,88 \pm 0,07)$ Ф (заявленная производителем – 2 Ф). Таким образом, медленный участок разрядной кривой соответствует номинальным характеристикам ионистора, а предложенная методика является удобным способом их определения. Параметры начального (быстрого) процесса не входят в стандартные характеристики, указываемые производителем.

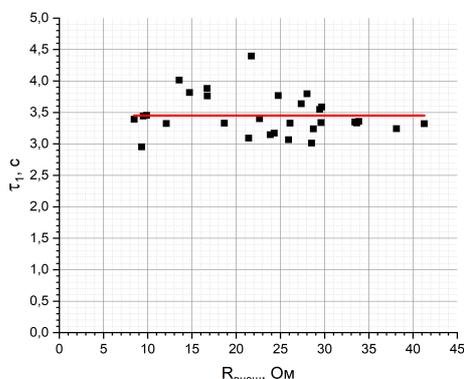


Рис. 4. Зависимость постоянной времени быстрого процесса от внешнего сопротивления

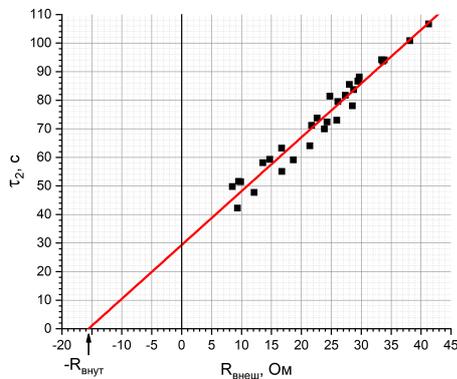


Рис. 5. Зависимость постоянной времени медленного процесса от внешнего сопротивления

Полученные двухступенчатые зависимости могут быть объяснены наличием двух разных физико-химических процессов. Из теории строения ДЭС известно [1–3], что в ионисторе существуют два типа ионов, которые имеют свои характерные поведения: индифферентные и потенциалопределяющие. Индифферентные ионы приближаются к обкладке противоположного заряда под действием внешнего электрического поля. После отключения внешнего источника ионы достаточно быстро отдаляются друг от друга и от обкладок, понижая потенциал на них. Данный процесс достаточно быстрый и не зависит от параметров внешней цепи (внешнего сопротивления). Потенциалопределяющие ионы во время заряда, напротив, теряют свою водную оболочку и вступают в электрохимическое взаимодействие с материалом электрода. После отключения внешнего источника они продолжают удерживаться на поверхности электродов. Их отсоединение происходит при переносе заряда по внешней цепи, то есть скорость процесса обратно пропорциональна внешнему сопротивлению.

Отметим, что отношение амплитуд медленного и быстрого процессов U_2 / U_1 для промышленного ионистора во всех измерениях составляло 2,86 ... 3,33, а для лабораторного ионистора – 0,05 ... 0,10. При этом для малого внешнего сопротивления отношение характерных времен быстрого и медленного процессов τ_2 / τ_1 в обоих случаях составляло около 10. Это свидетельствует о том, что процессы релаксации в лабораторном и промышленном ионисторах имеют сходную природу, однако качество изготовления сильно влияет на количество удерживаемого заряда (напряжение U_2 медленного процесса, которое не теряется при быстром саморазряде).

Заключение

В результате работы получены заряд-разрядные кривые для лабораторного и промышленного ионисторов. Было показано, что разрядные кривые хорошо описываются линейной комбинацией

цией двух экспоненциально спадающих функций, что свидетельствует о наличии двух механизмов релаксации заряда. Найдено, что один из механизмов (медленный) зависит от параметров внешней цепи, а второй (быстрый) является собственной характеристикой ионистора. Зависимость постоянной времени медленного процесса позволяет определить внутреннее сопротивление ионистора и его емкость с приемлемой точностью.

Литература

1. Conway, B.E. *Electrochemical Supercapacitors: Scientific Fundamentals and Technological Applications* / B.E. Conway. – Springer, 1999. – 698 p.
2. *Electrolytes for Electrochemical Supercapacitors* / C. Zhong, Y. Deng, W. Hu *et al.* – CRC Press, 2016, 361 p.
3. Frackowiak, E. Carbon Materials for the Electrochemical Storage of Energy in Capacitors / E. Frackowiak, F. Béguin // *Carbon*. – 2001. – Vol. 39, Iss. 6. – P. 937–950.
4. Илимбетов, Р.Ю. Разработка компоновочной схемы комбинированной энергетической установки для грузового автомобиля с улучшенными экологическими показателями / Р.Ю. Илимбетов, А.М. Астапенко // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение»*. – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 72–79.
5. Жданкин, Е.В. Имитационное моделирование активной накопительной системы / Е.В. Жданкин, Д.А. Устинов // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика»*. – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 52–58.
6. Кошелев, К.С. Выбор схемы поперечно подключаемого активного фильтра с функцией компенсации кратковременных прерываний напряжения / К.С. Кошелев, Н.А. Алексеев, В.Н. Карпов, А.М. Матинян, М.В. Пешков // *Электрические станции. Серия: Силовая преобразовательная техника*. – 2018. – № 3 (1040). – С. 47–52.
7. Определение интегральной емкости двойного электрического слоя (ДЭС) на межфазной границе блокирующий электрод – твердый электролит кулонометрическим методом. Случай замедленной диффузии и адсорбции-десорбции двух разных сортов частиц / Р.М. Гусейнов, Х.М. Махмудов, Р.А. Раджабов и др. // *Известия ДГПУ. Естественные и точные науки*. – 2016. – № 1. – С. 11–15.
8. Панкрашин, А. Ионисторы Panasonic: физика, принцип работы, параметры / А. Панкрашин // *Компоненты и технологии*. – 2006. – № 9(62). – С. 12–17.
9. Belhachemi, F. A Physical Based Model of Power Electric Double-Layer Supercapacitors / F. Belhachemi, S. Rael, B. Davat // *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Fifth IAS Annual Meeting and World Conference on Industrial Applications of Electrical Energy (Cat. No.00CH37129)*. – 2000. – Vol. 5. – P. 3069–3076.
10. Embedded Fractional Nonlinear Supercapacitor Model and Its Parametric Estimation Method / N. Bertrand, J. Sabatier, O. Briat, J. Vinassa // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2010. – Vol. 57, Iss. 12. – P. 3991–4000.

Поступила в редакцию 14 июля 2021 г.

Сведения об авторах

Богданов Евгений Сергеевич – учащийся, МБОУ «Физико-математический лицей № 31 г. Челябинска», г. Челябинск, Российская Федерация.

Сухова Ольга Радиевна – учитель физики, МБОУ «Физико-математический лицей № 31 г. Челябинска», г. Челябинск, Российская Федерация.

Воронцов Александр Геннадьевич – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1965-1474>, e-mail: vorontsovag@susu.ru

ON THE PROCESS OF ELECTROSTATIC SUPERCAPACITORS DISCHARGE

E.S. Bogdanov¹, O.R. Sukhova¹, A.G. Vorontsov²

¹ MBOU "Physical-mathematical Lyceum № 31 of Chelyabinsk", Chelyabinsk, Russian Federation

² South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: vorontsovag@susu.ru

Despite the growing popularity of supercapacitors (supercondensers), the common model of discharge and the unified method of describing their characteristics are not available as of yet. This is explained by the complexity of the physical and chemical processes occurring there. This work provides an analysis of the charge/discharge curves for a laboratory-manufactured and an industrial supercapacitor.

It has been shown that a two-step discharge mechanism is typical for the supercapacitors under study, unlike for usual capacitors, and time constants differ by approximately one order of magnitude. Fast discharge is determined by the internal parameters of a supercapacitor, and the time constant of this process does not depend on the external resistance. For a slow process, the time constant is in linear dependence with the external resistance, that is why this process is analogous to the discharge of a usual capacitor. Using the parameters of the slow process, it is possible to determine the effective internal resistance of the supercapacitor and its capacity.

The ratio of speeds of the fast and slow discharge in case of a laboratory-manufactured and an industrial supercapacitor is approximately equal, what is indicative of the similarity of the processes occurring there. A significant difference between supercapacitors is observed in the ratio of voltage amplitudes corresponding to the fast and slow processes. For an industrial supercapacitor, the contribution of the voltage of the slow process (which depends on the external circuit parameters) is considerably higher, what proves its higher efficiency during operation in electric circuits.

Keywords: supercapacitor; charge/discharge curves; two-step discharge.

References

1. Conway B.E. *Electrochemical Supercapacitors: Scientific Fundamentals and Technological Applications*. Springer, 1999, 698 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-3058-6
2. Zhong C., Deng Y., Hu W., Sun D., Han X., Qiao J., Zhang J. *Electrolytes for Electrochemical Supercapacitors*. CRC Press, 2016, 361 p. DOI: 10.1201/b21497
3. Frackowiak E., Béguin F. Carbon Materials for the Electrochemical Storage of Energy in Capacitors. *Carbon*, 2001, Vol. 39, Iss. 6, pp. 937–950. DOI: 10.1016/S0008-6223(00)00183-4
4. Ilimbetov R.Yu., Astapenko A.M. Razrabotka komponovochnoy skhemy kombinirovannoy energeticheskoy ustanovki dlya gruzovogo avtomobilya s uluchshennymi ekologicheskimi pokazatelyami (Development of the Assembly Scheme Combined Power Plant for Trucks With Improved Environmental Performance). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mechanical Engineering Industry"*, 2013, Vol. 13, no. 1, pp. 72–79. (in Russ.).
5. Zhdankin E.V., Ustinov D.A. Imitatsionnoe modelirovanie aktivnoy nakopitel'noy sistemy (Imitation Modeling of Active Electricity Storage System). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Power Engineering"*, 2018, Vol. 18, no. 4, pp. 52–58. (in Russ.). DOI: 10.14529/power180406
6. Koshelev K.S., Alekseev N.A., Karpov V.N., Matinyan A.M., Peshkov M.V. Selection of a Circuit of a Transversely Connected Active Filter with Compensation Function for Short-Term Voltage Interruptions. *Power Technology and Engineering*, 2018, Vol. 52, no. 3, pp. 352–356.
7. Guseynov R.M., Makhmudov Kh.M., Radzhsbov R.A., Bakhmudkadiyev N.D., Bakhmudkadiyeva Z.N., Zaynutdinova Z.A. The Determination of the Integral Capacitance of the Double Electric Layer On The Blocking Electrode – Solid Electrolyte Interface by Coulometric Method. The Case of the Delayed Diffusion and Adsorption-Desorption of Two Sort of Particles. *Izvestiya DGPU. Estestvennye i tochnye nauki*, 2016, no. 1, pp. 11–15. (in Russ.).

8. Pankrashin A. Ionistory Panasonic: fizika, printsip raboty, parametry (Panasonic Ionistors: Physics, Operating Principle, Parameters). *Komponenty i tekhnologii*, 2006, no. 9(62), pp. 12–17. (in Russ.).

9. Belhachemi F., Rael S., Davat B. A Physical Based Model of Power Electric Double-Layer Supercapacitors. *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Fifth IAS Annual Meeting and World Conference on Industrial Applications of Electrical Energy* (Cat. No.00CH37129), 2000, Vol. 5, pp. 3069–3076. DOI: 10.1109/IAS.2000.882604

10. Bertrand N., Sabatier J., Briat O., Vinassa J. Embedded Fractional Nonlinear Supercapacitor Model and Its Parametric Estimation Method. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, Vol. 57, Iss. 12, pp. 3991–4000. DOI: 10.1109/TIE.2010.2076307

Received July 14, 2021

Information about the authors

Bogdanov Evgeniy Sergeevich, Pupil of MBOU “Physical-mathematical Lyceum no. 31 of Chelyabinsk”, Chelyabinsk, Russian Federation.

Sukhova Olga Radiевна, Teacher of Physics, MBOU “Physical-mathematical Lyceum no. 31 of Chelyabinsk”, Chelyabinsk, Russian Federation.

Vorontsov Alexander Gennadevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1965-1474>, e-mail: vorontsovag@susu.ru

К ТЕОРИИ ЛАЗЕРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛАХ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ МАГНИТНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

С.Ю. Гуревич, А.А. Шульгинов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: shulginovaa@susu.ru

Лазерная генерация ультразвука нашла широкое применение в современных технологиях: для контроля качества композиционных материалов, для выявления расслоений клеевых соединений, внутренних и поверхностных дефектов, а также качества поверхности изделия в процессе производства. Для возбуждения волн в металлах обычно используют импульсный лазер. В металлургии, а также в перспективных 3D-технологиях, необходимо контролировать изделия при высоких (800 °С и более) температурах. Для проектирования ультразвуковых контролируемых устройств, содержащих генератор импульсного лазерного излучения в качестве источника ультразвука, необходимо теоретическое исследование процесса лазерной генерации ультразвука в ферромагнитных металлах при температуре магнитного фазового перехода, т. к. передел горячего металла осуществляется, как правило, именно при этой температуре 768 °С для железа и сплавов на его основе. Из результатов экспериментальных работ следует, что температурная зависимость нормированной амплитуды акустического импульса в железе имеет экстремальный характер в районе магнитного фазового перехода, т.е. в районе точки Кюри. В данной работе поставлена цель исследовать процесс лазерной генерации ультразвука в ферромагнитном металле при условии нелинейной зависимости коэффициента объёмного расширения от температуры. Решена задача термоупругого возбуждения продольных и поперечных волн в ферромагнитном металле лазерным импульсом при температуре магнитного фазового перехода. Получены диаграммы направленности продольных и поперечных волн при воздействии на ферромагнитный металл лазерных импульсов различного диаметра. Даны рекомендации для эффективного использования лазерной генерации ультразвука в дефектоскопии и толщинометрии.

Ключевые слова: лазерная генерация ультразвука; ферромагнитные металлы; магнитный фазовый переход; продольные и поперечные волны.

Введение

Для создания методов и средств контроля изделий металлургического производства значительный интерес представляет процесс генерации упругих колебаний ультразвуковых частот под действием лазерных импульсов. Использование лазеров в ультразвуковом контроле привлекает внимание с той точки зрения, что позволяет осуществить дистанционный контроль изделий. Для комнатных температур разработка теории генерации ультразвука в металлах лазерными импульсами в основном завершена и подтверждена экспериментальными разработками [1–4]. Лазерная генерация ультразвука нашла широкое применение в современных технологиях: для контроля качества композиционных материалов авиатехники [5], для контроля изделий из нержавеющей стали, меди в процессе лазерной обработки [6], для выявления расслоений клеевых соединений углепластика и алюминия [7], внутренних [8, 9] и поверхностных дефектов [10, 11], а также качества поверхности изделия в процессе производства [12]. Кроме того, этот метод возбуждения акустических волн оказался удобен для точных измерений, например, скорости волн в стекле [13], среднего размера зёрен стали, нагретой до 1000 °С [14], параметров анизотропных кристаллов [15], порогов плавления тугоплавких металлов [16]. Лазерный дистанционный метод возбуждения ультразвука оказался незаменимым в испытаниях материалов из алмаза при высоких давлениях [17]. Для возбуждения волн в металлах обычно используют импульсный твердотельный Nd:YAG лазер [1], но в последние годы всё большее распространение для этих целей получают

волоконные лазеры благодаря их надёжности и эффективности [5, 18]. Делаются попытки создать ультразвуковой томограф для визуализации внутренних дефектов [19, 20]. Для достижения этих целей проводятся исследования направленности термоакустического источника [21] и поиск методов управления ею [22–24].

В металлургии, а также в перспективных 3D-технологиях необходимо контролировать изделия при высоких (800°C и более) температурах [6, 14, 25, 26]. Для проектирования ультразвуковых контролирующих устройств, содержащих генератор импульсного лазерного излучения в качестве источника ультразвука, необходимо теоретическое исследование процесса лазерной генерации ультразвука в ферромагнитных металлах при температуре магнитного фазового перехода, т.к. передел горячего металла осуществляется, как правило, именно при этой температуре, 768°C , для железа и сплавов на его основе. Экспериментальные исследования процесса генерации акустических импульсов продольной волны лазерными импульсами в железе и алюминиевом сплаве проведены в широком интервале температур [27]. Из результатов работы следует, что температурная зависимость нормированной амплитуды акустического импульса в железе имеет экстремальный характер в районе магнитного фазового перехода, т. е. в районе точки Кюри. Анализ публикаций по исследованию физических свойств ферромагнитных сплавов позволил идентифицировать отмеченную температурную зависимость аномалией коэффициента теплового расширения железа [1, 28]. При использованной в работе [27] поверхностной плотности теплового потока лазерного излучения (до 50 МВт/см^2) в металлах при комнатной температуре ответственным за механизм генерации является термоупругий эффект. Если металл ферромагнитный, то нелинейная температурная зависимость коэффициента теплового расширения объясняется следующим образом. При нагреве ферромагнетика до точки Кюри силы взаимодействия между атомами кристаллической решетки, обусловленные намагничиванием, исчезают вследствие перехода ферромагнетик–парамагнетик. Следовательно, противодействующие (упругие) силы немагнитного происхождения более не компенсированы и для железа вблизи точки Кюри происходит сжатие решетки. В результате коэффициент теплового расширения с приближением к точке Кюри убывает. При дальнейшем повышении температуры коэффициент возрастает до «неферромагнитного» значения. В данной работе поставлена цель исследовать процесс лазерной генерации ультразвука в ферромагнитном металле при условии нелинейной зависимости коэффициента объёмного расширения от температуры.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ферромагнитное полупространство, подвергающееся воздействию импульсного лазерного излучения. При этом считаем, что температура полупространства находится либо в районе магнитного фазового перехода (точки Кюри), либо мощность лазерного излучения достаточна для нагрева поверхности полупространства до этой температуры. При этом полупространство становится парамагнитным, а аномальность термоупругих свойств среды будет учтена температурной зависимостью коэффициента теплового расширения. Вещество полупространства характеризуется постоянными Ламэ μ и λ , плотностью ρ , удельной теплоёмкостью c , скоростями продольной и поперечной волны c_l и c_t , коэффициентами: теплопроводности λ_q , температуропроводности a , теплового расширения α_T , скоростью распространения теплового возмущения c_q . Поскольку среда оптически непрозрачная, то глубину проникновения оптического излучения можно считать близкой к нулю. Поглощаемый средой поток лазерного излучения выделяется в виде тепла, поэтому решение поставленной задачи сводится к решению динамической задачи термоупругости для теплового потока, действующего на поверхности полупространства. В результате распространения тепловой энергии вглубь среды в поверхностном слое последней возникают акустические источники, распределённые вблизи поверхности, поскольку глубина проникновения в металл тепловой энергии составляет 2–5 мкм [29]. Пусть поле смещений в цилиндрической системе координат (z, r, φ) характеризуется скалярным Φ и векторным Ψ потенциалами смещений.

В общем случае деформации элементарных объёмов термоупругой среды возникают от тепловых и механических воздействий, и наоборот, изменение температурного поля обусловлено деформацией среды. Решение вопроса о том, можно ли разделить уравнения теплопроводности и деформаций, заключается в вычислении коэффициента связанности [30]:

$$\varepsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{(\lambda + 2\mu)c\rho}, \quad (1)$$

где T_0 – температура поверхности среды до облучения лазерным импульсом в градусах Цельсия. Проведя вычисления в соответствии с данными [31], получим, что $\varepsilon \approx 0,01$. Таким образом, решаемая задача является несвязанной.

Составим систему уравнений термоупругости в потенциалах упругих смещений Φ , Ψ и температур T [30], которые связаны со смещениями:

$$\mathbf{u}(z, r, t) = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi. \quad (2)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = m\alpha_T (T_0 + \theta)\theta; \quad \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{c_q^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Здесь $m = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}$, $\theta = T - T_0$.

Граничные условия ($z = 0$) имеют вид [32]:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{z\rho} = 0; \quad -\lambda_q \frac{\partial \theta}{\partial z} = L[q(r, t)], \quad L = 1 + t_r \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь t_r – время релаксации теплового потока, т. е. время, в течение которого отклонение значения теплового потока от равновесного уменьшится в e раз; A – коэффициент поглощения лазерного излучения. Напряжения связаны с деформациями соотношением Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\theta)\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Начальные условия ($t \rightarrow -\infty$):

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0; \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0; \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

В формуле (2) учтено, что процесс нагрева поверхностного слоя среды является высокоинтенсивным, поэтому необходимо учитывать, что тепло распространяется не бесконечно быстро, а с некоторой конечной скоростью $c_q = \sqrt{a/t_r}$ [32]. Для металлов время релаксации $t_r \approx 10^{-11}$ с. Отсюда, скорость распространения тепла, например, для железа составит $c_q \approx 1,3 \cdot 10^3$ м/с, что примерно совпадает со скоростью акустической волны в этом же материале.

Поверхностную плотность теплового потока зададим с помощью функции Гаусса по радиальной координате r и по времени t :

$$q(r, t) = A \frac{E}{\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi t_0}} \exp\left(-\frac{4t^2}{t_0^2}\right), \quad (7)$$

где A – коэффициент поглощения излучения, E – энергия лазерного импульса, Дж, R_0 – радиус пятна по критерию HWe^{-1}M (Half Width at e^{-1} Maximum), t_0 – длительность по критерию FWe^{-1}M (Full Width at e^{-1} Maximum).

2. Решение задачи

Применение интегральных преобразований Фурье по временной переменной и Фурье–Бесселя по радиальной координате позволяет решить задачу (3)–(7) в квадратурах. Решение состоит из трёх этапов:

Этап 1. Решение уравнения теплопроводности (3) для θ с учётом начальных и граничных условий (4) и (6).

$$\theta^*(z, r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(z, r, t) \exp(-i\omega t) dt, \quad \tilde{\theta}^*(z, k, \omega) = \int_0^{+\infty} \theta^*(z, r, t) I_0(kr) r dr,$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{c_q^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{\theta}^*}{dz^2} - \alpha^2 \tilde{\theta}^* = 0, \quad \alpha^2 = k^2 + \frac{i\omega}{a} - \frac{\omega^2}{c_q^2},$$

$$-\lambda_q \frac{\partial \tilde{\theta}^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = G = A \frac{E}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} i\omega t_r \right) \exp \left(-\frac{\omega^2 t_0^2}{16} - \frac{k^2 R_0^2}{4} \right), \quad \tilde{\theta}^* \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0,$$

$$\tilde{\theta}^* = \frac{G}{\alpha \lambda_q} \exp(-\alpha z), \quad \theta(z, r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \tilde{\theta}^*(z, k, \omega) I_0(kr) k dk \right) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (8)$$

Этап 2. Полученная функция приращения температуры $\theta(z, r, t)$ входит в правую часть волнового уравнения (2) для Φ . При этом учтена нелинейная зависимость $\alpha_T(\theta + T_0)$ (рис. 1) [28]. На этом этапе необходимо решить волновые уравнения (2) для Φ и Ψ с учётом начальных и граничных условий (3)–(5). Учитывая осевую симметрию граничных условий, останется единственная ненулевая компонента векторного потенциала $\Psi_\phi \equiv \Psi$.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = m\alpha_T(T_0 + \theta)\theta, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\tilde{\Phi}^*(z, k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \Phi(z, r, t) I_0(kr) r dr \right) \exp(-i\omega t) dt, \quad \frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \beta_1^2 \tilde{\Phi}^* = m\tilde{f}^*,$$

$$\tilde{\Psi}^*(z, k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \Psi(z, r, t) I_1(kr) r dr \right) \exp(-i\omega t) dt, \quad \frac{d^2 \tilde{\Psi}^*}{dz^2} - \beta_2^2 \tilde{\Psi}^* = 0,$$

$$\beta_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad \beta_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad \tilde{f}^*(z, k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \alpha_T(T_0 + \theta)\theta I_0(kr) r dr \right) \exp(-i\omega t) dt,$$

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - (1 - 2\eta^2)k^2 \tilde{\Phi}^* + 2\eta^2 k \frac{d\tilde{\Psi}^*}{dz} - m\tilde{f}^* \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{\Psi}^*}{dz^2} + k^2 \tilde{\Psi}^* + 2k \frac{d\tilde{\Phi}^*}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \quad \eta = \frac{c_t}{c_l},$$

$$\tilde{\Phi}^* = \exp(\beta_1 z) \left(B_1 + \frac{m}{2\beta_1} \int_0^z \tilde{f}^* \exp(-\beta_1 z') dz' \right) + \exp(-\beta_1 z) \left(B_2 - \frac{m}{2\beta_1} \int_0^z \tilde{f}^* \exp(\beta_1 z') dz' \right),$$

$$\tilde{\Psi}^* = B_3 \exp(\beta_2 z) + B_4 \exp(-\beta_2 z). \quad (9)$$

Здесь $B_1 = -\frac{m}{2\beta_1} \int_0^{\infty} \tilde{f}^* \exp(-\beta_1 z') dz'$, $B_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} B_1$, $B_3 = 0$, $B_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} B_1$,

$$\Delta = 4k^2 \beta_1 \beta_2 - (k^2 + \beta_2^2)^2, \quad \Delta_1 = 4k^2 \beta_1 \beta_2 + (k^2 + \beta_2^2)^2, \quad \Delta_2 = 2k \beta_1 (k^2 + \beta_2^2).$$

После получения трансформант Фурье–Бесселя потенциалов $\tilde{\Phi}^*$ и $\tilde{\Psi}^*$ производится обратное преобразование для получения Φ и Ψ .

Этап 3. На последнем этапе определили смещения $\mathbf{u}(z, r, t)$, используя полученные потенциалы Φ и Ψ по формуле (2). Окончательным результатом является расчёт диаграммы направленности продольных и поперечных волн при различных радиусах лазерного пятна. Решение было получено в виде функции сферических координат R и ϑ :

$$u_{l,t}(R, \vartheta) = \frac{B_{l,t}}{R} \cdot f_{l,t}(\vartheta), \quad (10)$$

где R – расстояние от центра лазерного пятна, ϑ – угловая координата, отсчитываемая от нормали к поверхности металла, $u_l = u_{RR}$ – амплитуда смещения среды в радиальном направлении для продольной волны, $u_t = u_{R\vartheta}$ – амплитуда смещения в поперечной волне, $f_{l,t}(\vartheta)$ – функция направленности волн.

Расчёты производились для инварного сплава 35НКД [31]. Параметры лазерного импульса: $E = 1$ мДж, $t_0 = 30$ нс, $A = 0,45$. Максимальный скачок температуры – 60 К. Константа $V_{l,t} \sim (1-2) \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$ (5). На расстоянии 1 см по нормали от места поглощения лазерного луча смещения частиц среды составят величину порядка 1–2 мкм. Диаграммы направленности продольный и поперечных волн для лазерных пятен разных радиусов R_0 (0,125; 0,250; 0,375; 1,000 мм)

имеют двулепестковую форму (рис. 2). Продольные волны имеют центральный лепесток при 0 градусов, а второй лепесток имеет максимум от 50° до 70° . Именно под этими углами удобнее всего вести контроль образца. Одновременно с продольной возбуждается интенсивная поперечная волна под углом примерно 35° , которая также может быть применена для ультразвукового контроля. Другой лепесток под углом 60° – 80° является менее интенсивным. При этом, ультразвуковые импульсы, соответствующие продольной и поперечной волне, легко различимы, так как скорость продольной волны почти вдвое превышает скорость поперечной. С увеличением диаметра лазерного пятна происходит перераспределение акустической энергии от периферийного лепестка к центральному. Отсюда следует, что для толщинометрии и дефектоскопии металлоизделий простой формы (слябы, листы, трубы и т.п.) оптимальным является лазерный излучатель, диаметр пятна которого больше 2 мм. Дальнейшее увеличение диаметра лазерного пятна приведёт к уменьшению плотности потока теплового излучения и, соответственно, к уменьшению величин смещений как в продольной, так и в поперечной волне. Кроме перераспределения энергии между центральным и периферийным лепестком обращает на себя внимание возрастающая концентрация акустической энергии вблизи нормали к поверхности с увеличением диаметра пятна, т. е. происходит сужение центрального пятна.

При контроле металлоизделий сложной формы (рельсы, фасонный и профильный прокат и т. п.) необходимо использовать устройства наклонного ввода ультразвука. Для этого следует использовать лазерные излучатели, имеющие малый диаметр пятна, если контроль ведётся на продольных волнах и необходимо осуществлять ввод ультразвука под углом около 60° . Поскольку, как видно из рис. 2, одновременно с продольной возбуждается интенсивная поперечная волна под углом около 35° , то возможен контроль металлоизделий на поперечных волнах, вводимых в изделие под указанным углом. Ультразвуковые импульсы продольной и поперечной волны легко различимы, т.к. скорость продольной волны почти вдвое превышает скорость поперечной.

Продемонстрировать влияние близости к точке Кюри на характеристики направленности лазерного излучателя лучше всего непосредственным сравнением этих характеристик для комнатных температур с полученными результатами. Для комнатных температур характеристики направленности представлены в работе [3, с. 154]. Из сравнения видно, что при температуре магнитного фазового перехода характеристики направленности имеют более сложную угловую зависимость. Связано это с тем, что в работе [3] не учитывалась конечность скорости распространения тепла, установленная в работе [32], и аномальная температурная зависимость коэффициента теплового расширения в области точки Кюри.

Заключение

Таким образом, построена модель взаимодействия лазерного излучения с ферромагнитным металлом. Расчёты, проведённые на основе этой модели, позволяют дать рекомендации для эффективного использования лазерной генерации ультразвука в дефектоскопии и толщинометрии.

Рассмотрены теоретические положения процесса высокотемпературной лазерной генерации акустических импульсов в ферромагнитных металлах, температура которых находится в районе

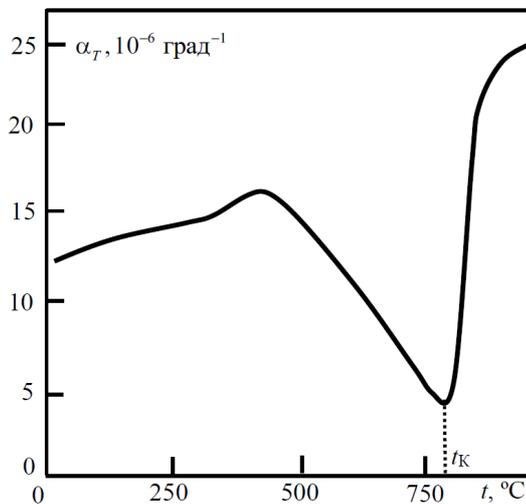


Рис. 1. Температурная зависимость коэффициента расширения железа

точки Кюри. Учтено, что генерация происходит за счёт термоупругого эффекта и испытывает влияние нелинейной температурной зависимости коэффициента теплового расширения. В рамках несвязанной динамической задачи термоупругости предложена методика расчёта параметров акустических полей и определены оптимальные параметры лазерного излучателя, предназначенного для дистанционной генерации акустических импульсов в ферромагнитных металлах при высоких температурах (500 °С и выше для железосодержащих сплавов).

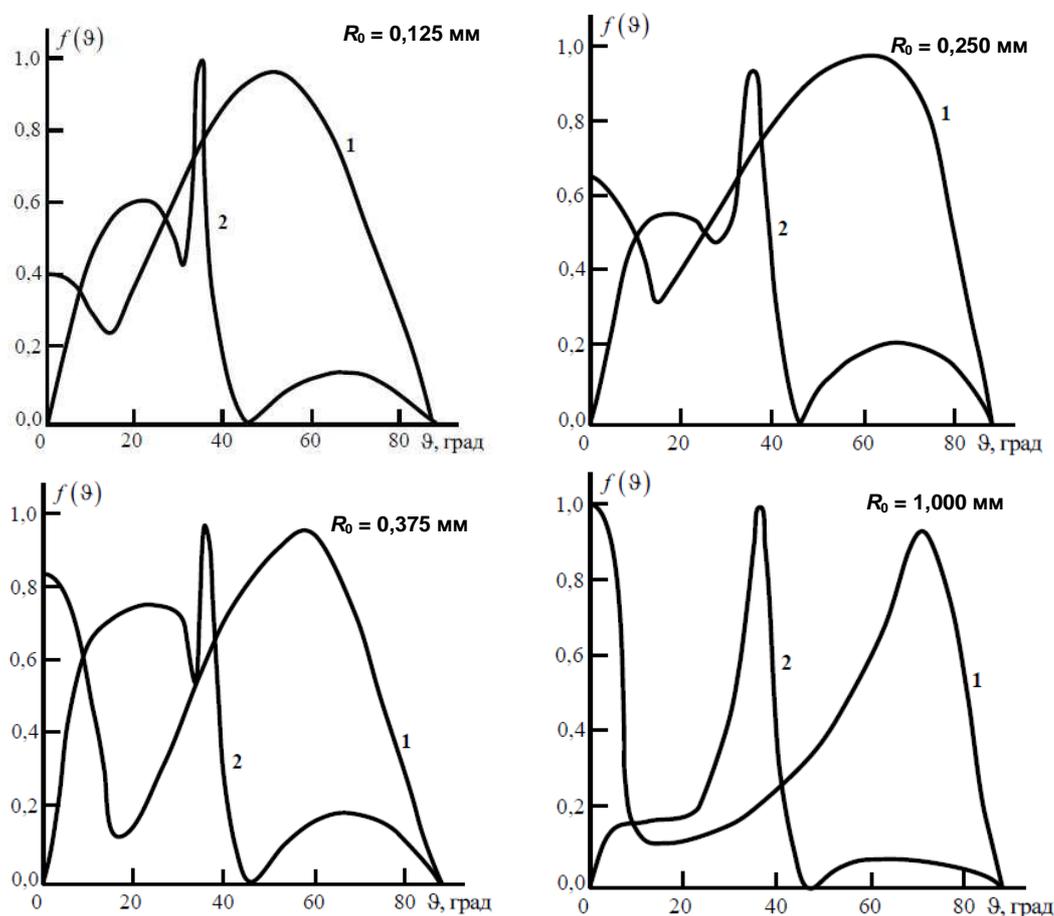


Рис. 2. Диаграммы направленностей волн продольных (1) и поперечных (2) при различных радиусах пятна R_0

Литература

1. Гуревич, С.Ю. Лазерная генерация и электромагнитная регистрация нормальных акустических волн в ферромагнитных металлах / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров // ЖТФ. – 2016. – Т. 86, Вып. 3. – С. 114–117.
2. Гусев, В.Э. Лазерная оптоакустика / В.Э. Гусев, А.А. Карабутов. – М.: Наука, 1991. – 303 с.
3. Лямшев, Л.М. Лазерное термооптическое возбуждение звука / Л.М. Лямшев. – М.: Наука, 1989. – 237 с.
4. Dewhurst, R.J. Quantitative measurements of laser-generated acoustic waveforms / R.J. Dewhurst, D.A. Hutchins, S.B. Palmer // J. Appl. Phys. – 1982. – Vol. 53, no. 6. – pp. 4064–4071.
5. A new fiber-optic non-contact compact laser-ultrasound scanner for fast non-destructive testing and evaluation of aircraft composites / I. Pelivanov, T. Buma, J. Xia *et al.* // J. Appl. Phys. – 2014. – Vol. 115, no. 11. – P. 113105.
6. Manzo, A.J. Pulsed laser ultrasonic excitation and heterodyne detection for in situ process control in laser 3D manufacturing / A.J. Manzo, H. Helvajian // J. Laser Appl. – 2017. – Vol. 29, no. 1. – P. 012012.

7. Ultrasonic inspection of adhesively bonded CFRP/aluminum joints using pulsed laser scanning / N. Toyama, T. Yamamoto, K. Urabe, H. Tsuda // *Adv. Compos. Mater.* – 2019. – Vol. 28, no. 1. – pp. 27–35.
8. Podymova, N.B. Broadband Laser-Ultrasonic Spectroscopy for Quantitative Characterization of Porosity Effect on Acoustic Attenuation and Phase Velocity in CFRP Laminates / N.B. Podymova, A.A. Karabutov // *J. Nondestruct. Eval.* – 2013. – Vol. 33, no. 1. – pp. 141–151.
9. Stratoudaki, T. Laser Induced Ultrasonic Phased Array Using Full Matrix Capture Data Acquisition and Total Focusing Method / T. Stratoudaki, M. Clark, P.D. Wilcox // *Opt. Express.* – 2016. – Vol. 24, no. 19. – P. 21921.
10. Application of laser ultrasonic technique for non-contact detection of structural surface-breaking cracks / Z. Zhou, K. Zhang, J. Zhou *et al.* // *Opt. Laser Technol.* – 2015. – Vol. 73. – P. 173–178.
11. Full non-contact laser-based Lamb waves phased array inspection of aluminum plate / Z. Liu, H. Chen, K. Sun, C. He, B. Wu *et al.* // *J. Vis.* – 2018. – Vol. 21, no. 5. – P. 751–761. DOI: 10.1007/s12650-018-0497-z
12. Bakre, C. Influence of Surface Roughness from Additive Manufacturing on Laser Ultrasonics Measurements / C. Bakre, M. Hassanian, C. Lissenden // *AIP Conference Proceedings.* – 2019. – Vol. 2102. – P. 020009.
13. Bazylev, P.V. Laser generation of ultrasound and ultrasound velocity measurements in glasses / P.V. Bazylev, I.Y. Krumgolts, V.A. Lugovoy // *Asia-Pacific Conference on Fundamental Problems of Opto- and Microelectronics.* – 2016. – Vol. 10176. – P. 101760S.
14. Nondestructive Evaluation Method of Average Grain Size in TWIP Steel by Laser Ultrasonic / Y.J. Zhang, X.C. Wang, Q. Yang *et al.* // *Mater. Sci. Forum.* – 2018. – Vol. 913. – P. 324–330.
15. Generation and detection of plane coherent shear picosecond acoustic pulses by lasers: Experiment and theory / T. Pezeril, P. Ruello, S. Gougeon *et al.* // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 75, Iss. 17. – P. 174307.
16. Examination of nanosecond laser melting thresholds in refractory metals by shear wave acoustics / A. Abdullaev, B. Muminov, A. Rakhymzhanov *et al.* // *AIP Adv.* – 2017. – Vol. 7, Iss. 7. – P. 075203.
17. Экспериментальное изучение генерации и распространения коротких наносекундных акустических импульсов при высоких давлениях в алмазных наковальнях методом лазерного ультразвука / П.В. Зинин, В. Пракапенка, К. Вургесс, Д.Ю. Великовский // *Учёные записки физического факультета.* – 2014. – № 6. – С. 146314-1–146314-5.
18. Hayashi, T. Generation of narrowband elastic waves with a fiber laser and its application to the imaging of defects in a plate / T. Hayashi, K. Ishihara // *Ultrasonics.* – 2017. – Vol. 77. – P. 47–53.
19. Three dimensional evaluation of aluminum plates with wall-thinning by full-field pulse-echo laser ultrasound / S.-C. Hong, A.-D. Abetew, J.-R. Lee, J.-B. Ihn // *Opt. Lasers Eng.* – 2017. – Vol. 99. – P. 58–65.
20. Chen S.-L. Review of Laser-Generated Ultrasound Transmitters and Their Applications to All-Optical Ultrasound Transducers and Imaging / S.-L. Chen // *Appl. Sci.* – 2016. – Vol. 7, Iss 1. – P. 25.
21. Гуревич, С.Ю. Характеристики направленности лазерного импульсного термоакустического излучателя в немагнитных металлах / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Е.В. Голубев // *Дефектоскопия.* – 2017. – № 4. – С. 22–26.
22. Hess, P. Laser-based linear and nonlinear guided elastic waves at surfaces (2D) and wedges (1D) / P. Hess, A.M. Lomonosov, A.P. Mayer // *Ultrasonics.* – 2014. – Vol. 54, Iss. 1. – P. 39–55.
23. Lomonosov, A.M. Generation of negative group velocity Lamb waves by a moving laser source / A.M. Lomonosov, C. Ni, Z. Shen, Z. Li // *Ultrasonics.* – 2019. – Vol. 99. – P. 105950.
24. Scanning high-power continuous wave laser-generated bulk acoustic waves / Z. Li, S. Yan, Q. Xie, C. Ni, Z. Shen // *Appl. Opt.* – 2017. – Vol. 56, Iss. 15. – P. 4290.
25. Murray, T.W. Noncontact alternatives to laser detection of ultrasound signals / T.W. Murray, D.A. Oursler, J.W. Wagner // *Mater. Sci. Forum.* – 1996. – Vol. 210–213. – P. 251–258.
26. Every, A.G. Laser Thermoelastic Generation in Metals Above the Melt Threshold / A.G. Every, Z.N. Utgulov, I.A. Veres // *J. Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 114, no. 20. – P. 203508.

27. Возбуждение ультразвука в железе при фазовом переходе под действием лазерных импульсов / Г.А. Буденков, С.Ю. Гуревич, А.Д. Каунов, А.Ф. Маскаев // Акустический журнал. – 1983. – Т. 29, № 4. – С. 561–562.
28. Лариков, Л.Н. Тепловые свойства железоникелевых сплавов / Л.Н. Лариков, Ю.В. Усов // Металлофизика. – 1977. – Вып. 68. – С. 28–35.
29. Рэди, Д. Действие мощного лазерного излучения / Д. Рэди. – М.: Мир, 1974. – 468 с.
30. Коваленко, А.Д. Термоупругость / А.Д. Коваленко. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
31. Таблицы физических величин. Справочник / под. ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.
32. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

Поступила в редакцию 24 марта 2021 г.

Сведения об авторах

Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1042-0303>, e-mail: gurevichsi@susu.ru

Шульгинов Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0085-0550>, e-mail: shulginovaa@susu.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 3, pp. 69–78*

DOI: 10.14529/mmph210309

TO THE THEORY OF LASER GENERATION OF ELASTIC WAVES IN FERROMAGNETIC METALS AT THE TEMPERATURE OF MAGNETIC PHASE TRANSITION

S.Yu. Gurevich, A.A. Shulginov

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: shulginovaa@susu.ru*

Laser generation of ultrasound has found wide application in modern technologies: to control the quality of composite materials, to detect layer separation in adhesive-bonded joints, subsurface and surface defects, as well as the quality of a product's surface in the process of manufacture. For excitation of waves in metals, pulse laser is normally used. In metallurgy, as well as in promising 3D technologies, it is necessary to control products at high temperatures (800°C and higher). To design ultrasound equipment with a pulsed laser radiation generator as the ultrasound source, it is required to conduct theoretical research of the process of laser generation of ultrasound in ferromagnetic metals at the temperature of magnetic phase transition, since the hot metal conversion for ferrum and ferrum-based alloys is, as a rule, performed namely at this temperature of 768 °C. The results of the experimental works allow to conclude that the temperature dependence of normalized amplitude of acoustic pulse in ferrum is of extreme character in the range of magnetic phase transition, i.e., in the range of Curie point. In this work a goal has been set to study the process of laser generation of ultrasound in ferromagnetic metal in the condition of non-linear dependence of the volume-expansion coefficient on the temperature. The task of thermoelastic excitation of longitudinal and transverse waves in ferromagnetic metal by a laser pulse at the temperature of magnetic phase transition has been solved. Diagrams of longitudinal and transverse wave patterns when ferromagnetic metal is exposed to laser pulses of various diameters have been obtained. Recommendations for effective use of laser generation of ultrasound in non-destructive testing and thickness measurement have been given.

Keywords: laser generation of ultrasound; ferromagnetic metals; magnetic phase transition; longitudinal and transverse waves.

References

1. Gurevich S.Y., Petrov Y.V. Laser Generation and Electromagnetic Detection of Normal Acoustic Waves in Ferromagnetic Metals. *Technical Physics*, 2016, Vol. 61, no. 3, pp. 432–435. DOI: 10.1134/s1063784216030099
2. Gusev V.E., Karabutov A.A. *Lazernaya optoakustika* (Laser Optical Acoustics). Moscow, Nauka Publ., 1991, 303 p. (in Russ.).
3. Lyamshev L.M. *Lazernoe termoopticheskoe vozбuzhdenie zvuka* (Laser Thermal Optical Excitation of the Sound). Moscow, Nauka Publ., 1989, 237 p. (in Russ.).
4. Dewhurst R.J., Hutchins D.A., Palmer S.B. Quantitative measurements of laser-generated acoustic waveforms. *J. Appl. Phys.*, 1982, Vol. 53, no. 6, pp. 4064–4071. DOI: 10.1063/1.331270
5. Pelivanov I., Buma T., Xia J., Wei C.-W., O'Donnell M. A new fiber-optic non-contact compact laser-ultrasound scanner for fast non-destructive testing and evaluation of aircraft composites. *J. Appl. Phys.*, 2014, Vol. 115, no. 11, p. 113105. DOI: 10.1063/1.4868463
6. Manzo A.J., Helvajian H. Pulsed laser ultrasonic excitation and heterodyne detection for in situ process control in laser 3D manufacturing. *J. Laser Appl.*, 2017, Vol. 29, no. 1, p. 012012. DOI: 10.2351/1.4967366
7. Toyama N., Yamamoto T., Urabe K., Tsuda H. Ultrasonic Inspection of Adhesively Bonded CFRP/Aluminum Joints using Pulsed Laser Scanning. *Adv. Compos. Mater.*, 2019, Vol. 28, no. 1, pp. 27–35. DOI: 10.1080/09243046.2017.1416517
8. Podymova N.B., Karabutov A.A. Broadband Laser-Ultrasonic Spectroscopy for Quantitative Characterization of Porosity Effect on Acoustic Attenuation and Phase Velocity in CFRP Laminates. *J. Nondestruct. Eval.*, 2013, Vol. 33, no. 1, pp. 141–151. DOI: 10.1007/s10921-013-0210-z
9. Stratoudaki T., Clark M., Wilcox P.D. Laser Induced Ultrasonic Phased Array using Full Matrix Capture Data Acquisition and Total Focusing Method. *Opt. Express*, 2016, Vol. 24, no. 19, p. 21921. DOI: 10.1364/OE.24.021921
10. Zhou Z., Zhang K., Zhou J., Sun G., Wang J. Application of Laser Ultrasonic Technique for Non-Contact Detection of Structural Surface-Breaking Cracks. *Opt. Laser Technol.*, 2015, Vol. 73, pp. 173–178. DOI: 10.1016/j.optlastec.2015.04.026
11. Liu Z., Chen H., Sun K., He C., Wu B. Full Non-Contact Laser-Based Lamb Waves Phased Array Inspection of Aluminum Plate. *J. Vis.*, 2018, Vol. 21, no. 5, pp. 751–761. DOI: 10.1007/s12650-018-0497-z
12. Bakre C., Hassanian M., Lissenden C. Influence of Surface Roughness from Additive Manufacturing on Laser Ultrasonics Measurements. *AIP Conference Proceedings*, 2019, Vol. 2102, p. 020009. DOI: 10.1063/1.5099713
13. Bazylev P.V., Krungolts I.Y., Lugovoy V.A. Laser Generation of Ultrasound and Ultrasound Velocity Measurements in Glasses. *Asia-Pacific Conference on Fundamental Problems of Opto- and Microelectronics*, 2016, Vol. 10176, p. 101760S. DOI: 10.1117/12.2268232
14. Zhang Y.J., Wang X.C., Yang Q., Xue R.J., Yin A.M. Nondestructive Evaluation Method of Average Grain Size in TWIP Steel by Laser Ultrasonic. *Mater. Sci. Forum*, 2018, Vol. 913, pp. 324–330. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.913.324
15. Pezeril T., Ruello P., Gougeon S., Chigarev N., Mounier D., Breteau J.-M., Picart P., Gusev V. Generation and Detection of Plane Coherent Shear Picosecond Acoustic Pulses by Lasers: Experiment and theory. *Phys. Rev. B.*, 2007, Vol. 75, Iss. 17, P. 174307. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.174307
16. Abdullaev A., Muminov B., Rakhymzhanov A., Mynbayev N., Utegulov Z.N. Examination of Nanosecond Laser Melting Thresholds in Refractory Metals by Shear Wave Acoustics. *AIP Adv.*, 2017, Vol. 7, Iss. 7, P. 075203. DOI: 10.1063/1.4993591
17. Zinin P.V., Prakepernka V., Burges K., Velikovskii D.Y. Experimental Study of the Generation And Propagation of Short Nanosecond Acoustic Pulses at High Pressures in a Diamond Anvil Cells by Laser Ultrasonics. *Memoirs of the Faculty of Physics Lomonosov Moscow State University*, 2014, no. 6, pp. 146314-1–146314-5. (in Russ.).
18. Hayashi T., Ishihara K. Generation of Narrowband Elastic Waves with a Fiber Laser and its Application to the Imaging of Defects in a Plate. *Ultrasonics*, 2017, Vol. 77, pp. 47–53. DOI: 10.1016/j.ultras.2017.01.016

19. Hong S.-C., Abetew A.-D., Lee J.-R., Ihn J.-B. Three Dimensional Evaluation of Aluminum Plates with Wall-Thinning by Full-Field Pulse-Echo Laser Ultrasound. *Opt. Lasers Eng.*, 2017, Vol. 99, pp. 58–65. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.08.010
20. Chen S.-L. Review of Laser-Generated Ultrasound Transmitters and Their Applications to All-Optical Ultrasound Transducers and Imaging. *Appl. Sci.*, 2016, Vol. 7, Iss. 1, p. 25. DOI: 10.3390/app7010025
21. Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V., Golubev E.V. Directional Characteristics of a Laser Pulsed Thermoacoustic Emitter in Nonmagnetic Metals. *Russ. J. Nondestruct. Test.*, 2017, Vol. 53, no. 4, pp. 260–264. DOI: 10.1134/S1061830917040027
22. Hess P., Lomonosov A.M., Mayer A.P. Laser-Based Linear and Nonlinear Guided Elastic Waves at Surfaces (2D) and Wedges (1D). *Ultrasonics*, 2014, Vol. 54, Iss. 1, pp. 39–55. DOI: 10.1016/j.ultras.2013.05.013
23. Lomonosov A.M., Ni C., Shen Z., Li Z. Generation of Negative Group Velocity Lamb Waves by a Moving Laser Source. *Ultrasonics*, 2019, Vol. 99, p. 105950. DOI: 10.1016/j.ultras.2019.105950
24. Li Z., Yan S., Xie Q., Ni C., Shen Z. Scanning High-Power Continuous Wave Laser-Generated Bulk Acoustic Waves. *Appl. Opt.*, 2017, Vol. 56, Iss. 15, pp. 4290. DOI: 10.1364/AO.56.004290
25. Murray T.W., Oursler D.A., Wagner J.W. Noncontact Alternatives to Laser Detection of Ultrasound Signals. *Mater. Sci. Forum*, 1996, Vol. 210–213, pp. 251–258. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.210-213.251
26. Every A.G., Utegulov Z.N., Veres I.A. Laser Thermoelastic Generation in Metals above the Melt Threshold. *J. Appl. Phys.*, 2013, Vol. 114, no. 20, p. 203508. DOI: 10.1063/1.4832483
27. Budenkov G.A., Gurevich S.Yu., Kaunov A.D., Maskaev A.F. Vozbuzhdenie ul'trazvuka v zheleze pri fazovom perekhode pod deystviem lazernykh impul'sov (Excitation of Ultrasound in the Ferrum during the Phase Transition under the Action of Laser Pulses). *Akusticheskiy zhurnal*, 1983, Vol. 29, no. 4, pp. 561–562. (in Russ.).
28. Larikov L.N., Usov Yu.V. Teplovye svoystva zhelezonikelevykh splavov (Thermal Properties of Iron-Nickel Alloys). *Metallofizika*, 1977, Iss. 68, pp. 28–35. (in Russ.).
29. Ready J.F. *Effects of High-Power Laser Radiation*. New York, Academic Press, 1971, 448 p.
30. Kovalenko, A.D. *Termouprugost* (Thermoelasticity). Kiev, Vishcha shkola Publ., 1975, 216 p. (in Russ.).
31. Kikoin I.K. (Ed.) *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* (Tables of Physical Values. The Manual). Moscow, Atomizdat Publ., 1976, 1005 p. (in Russ.).
32. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (Theory of Heat Conduction). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967, 599 p. (in Russ.).

Received March 24, 2021

Information about the authors

Gurevich Sergey Yuryevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1042-0303>, e-mail: gurevichsi@susu.ru

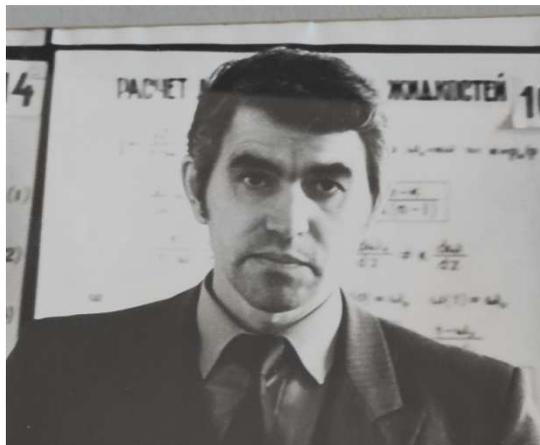
Shulginov Alexandr Anatolyevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0085-0550>, e-mail: shulginovaa@susu.ru

Информация

ИЗМАЙЛОВ ЮРИЙ ГЕННАДЬЕВИЧ – К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Измайлов Юрий Геннадьевич, доктор химических наук (1993), профессор (1995), первый декан факультета прикладной математики и физики ЧГТУ–ЮУрГУ (1996–1997), проректор по учебной работе ЮУрГУ (1997–1998). Трагически погиб 14 июня 1998 года.

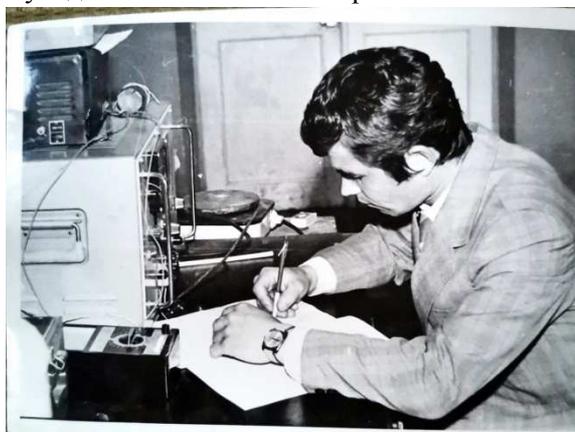
Измайлов Юрий Геннадьевич родился в семье инженерно-технических работников 10 мая 1951 года в г. Семипалатинске (Казахстан), более всего известном располагавшимся в его окрестностях ядерным полигоном. В детстве мечтал стать летчиком. В пятом классе написал письмо знаменитому летчику, герою Советского Союза Алексею Маресьеву, чтобы узнать, как следует готовиться к этой профессии.



Ответ был такой: надо хорошо учиться, заниматься спортом, укреплять силу воли. И самое главное, кем бы ты не стал, «надо, чтобы твоя работа принесла пользу народу, Родине. Вот к этой благородной задаче и готовь себя». Этим заповедям и следовал Юрий Геннадьевич всю жизнь. Он отличником окончил среднюю школу. Школьником, занимаясь легкой атлетикой (тройной прыжок), поднялся до призера первенства Казахстана, а начиная со студенческих лет, был центрфорвардом самостийной футбольной команды университета, вдохновителем которой был Рощин В.Е. (позднее профессор, заведующий кафедрой, декан М-факультета). Она состояла из студентов, аспирантов, доцентов и профессоров – всех любителей этой игры как на металлургическом факультете, так и за его пределами. Некоторые из коллег называли Измайлова Марадоной за внешнюю похожесть, футбольные повадки и, главное, за результативность. Что касается силы воли, то любое дело, за которое он брался, он выполнял с блеском и до конца.

Товарищи Юрия Геннадьевича, вспоминая времена студенчества и аспирантуры, отмечают, что при общении с ним в первую очередь бросались в глаза его серьезность и рассудительность. Все, что он говорил, было взвешено, обдуманно, рассмотрено со всех сторон и тем вызывало полное доверие. При этом Юрий Геннадьевич был очень компанейским человеком, с которым было интересно общаться. Он был необыкновенным рассказчиком – рассказывал с увлечением и большим пафосом. Искусство оратора было у него в крови и вместе с другими качествами очень ему пригодилось, когда он стал лектором и когда перешел на руководящую работу. Люди, проходя мимо лекционной аудитории, невольно притормаживали, когда оттуда доносился голос Юрия Геннадьевича – «Ну да, это Измайлов. Четко, ясно и убедительно». Он очень трепетно относился к своей семье, гордился своей красивой женой Валей, любил гулять с дочками Наташей и Иришей. Его отношение к окружающим не изменилось, когда он стал подниматься по служебной лестнице (декан, проректор). Он сохранял добрые товарищеские отношения со всеми, кого знал.

В 1973 г. Юрий Геннадьевич с отличием окончил ЧПИ (металлургический факультет по специальности «Металлургия черных металлов»), а в 1976 г. – аспирантуру кафедры металлургии стали с тем же успехом. В 1982 г. ему присвоено учёное звание доцента по кафедре физики, в 1995 г. утверждён в звании профессора кафедры общей и теоретической физики. В 1996 г. стал пер-



Измайлов Ю.Г., аспирантура, 1975 г.

Информация

вым деканом образованного в ЧГТУ факультета прикладной математики и физики, в 1997 г. – проректором по учебной работе ЮУрГУ.

Свой путь в науку Юрий Геннадьевич начал в середине 70-х годов на кафедре металлургии стали ЧПИ, где в то время были развернуты интенсивные экспериментальные исследования ионных расплавов в связи с разработкой новых металлургических технологий. Студент Измайлов здесь приобрел первые навыки выполнения экспериментов над высокотемпературными расплавами, обработки опытных данных и их интерпретации. Дипломную работу по этой тематике он защитил на «отлично», на ту же оценку, впрочем, которую он получал во все время обучения. В 1973 году он поступил в аспирантуру по той же тематике, его научным руководителем стал доцент, к.т.н. Вяткин Герман Платонович (позднее доктор химических наук, профессор, член-корреспондент РАН, ректор и президент ЮУрГУ). В 1976 году Юрий Геннадьевич успешно защитил кандидатскую диссертацию и вскоре перешел на работу на кафедру физики № 1, которой к тому времени заведовал Г.П. Вяткин. Вместе с ними на кафедру физики № 1 пришла и новая тематика исследований, которые к середине 80-х годов сосредоточились в лаборатории физической химии гетерогенных систем, руководимой Юрием Геннадьевичем.

В это время внимание Ю.Г. Измайлова привлек один из классов ионных систем – тройные взаимные системы с летучими компонентами, такие как, например, система $\text{CaO-A}_2\text{O}_3\text{-CaF}$. Эти системы представляют значительный интерес как с практической точки зрения (ввиду их широкого использования в металлургии), так и в теоретическом плане – вследствие их неравновесности в открытых условиях. Были установлены важнейшие закономерности их поведения: 1) несмотря на летучесть продуктов обменной реакции, система в состоянии достичь равновесия из-за развития параллельно идущих реакций комплексообразования; 2) скорость обменных реакций ограничивается сравнительно медленным процессом испарения летучих продуктов со свободной границы расплава, что позволяет рассматривать систему в каждый момент времени как квазиравновесную и строить соответствующие «диаграммы состояния», которые в совокупности с предложенной техникой так называемых диаграмм испарения являются сегодня важным инструментом в прогнозировании свойств и поведения таких систем в металлургических процессах.

Для количественной интерпретации накопленных опытных данных о свойствах ионных расплавов с летучими компонентами необходимо было более детально изучить процессы открытого испарения жидкостей вообще с учетом всех факторов, способных повлиять на результаты экспериментов. Для этого был выполнен комплекс теоретических исследований над жидкостями разной природы, испаряющимися в различных условиях, близких к тем, что имеют место в натуральных экспериментах. Предложенные математические модели верифицировались в специально выполненных экспериментах. Разработанные в результате методы, математические модели и программы позволили адекватно анализировать закономерности процессов массопереноса при испарении чистых жидкостей, растворов и расплавов бинарных и тройных взаимных систем, полученные в экспериментальных условиях, а также дали возможность для расчета транспортных и термодинамических характеристик расплавов по опытным данным о скоростях испарения.

Выполненные разработки существенно расширили круг возможностей физико-химического исследования массообменных процессов с участием систем, содержащих летучие соединения. Они использовались как для оптимизации составов растворов и расплавов, применяемых в химических и металлургических производствах, так и для разработки экологически чистых технологий. Эти исследования были положены в основу докторской диссертации, которую Юрий Геннадьевич успешно защитил в 1992 году. Под его руководством была защищена кандидатская диссертация А.Т. Белоножко (ныне доцент, долгое время работавший заместителем декана энергетического факультета ЮУрГУ) и подготовлена кандидатская диссертация А.Е. Коренченко (ныне профессор, доктор физ.-мат. наук, профессор МИРЭА), защиты которой Юрий Геннадьевич, увы, не увидел.

Способности Ю.Г. Измайлова как лидера проявились рано – еще в студенчестве и аспирантуре, когда он был неформальным организатором разнообразных мероприятий за рамками учебного процесса: спортивных соревнований, включая интеллектуальные игры (преферанс), локальных диспутов философского содержания, а также диспутов по актуальным проблемам общественной и частной жизни. В полной мере эти способности материализовались и стали развиваться, когда Юрий Геннадьевич перешел на руководящую работу, став кандидатом и доктором наук.

Сначала он был заведующим лабораторией физической химии гетерогенных систем, затем заместителем и исполняющим обязанности заведующего кафедрой физики № 1 (ныне кафедра физики наноразмерных систем), далее деканом факультета прикладных математики и физики, проректором университета, как упоминалось выше. Под его руководством и непосредственном участии было выполнено несколько крупных проектов, таких как создание полного комплекта графических материалов (фолий) для сопровождения лекций по вузовскому курсу общей физики – около тысячи изображений, демонстрирующих весь спектр физических законов, представлений и понятий. Это комплект параллельно был адаптирован и для занятий по физике в средней школе. В 80-е годы по инициативе Ю.Г. Измайлова на кафедре была сформирована группа экспериментаторов, специалистов по механике и оптике (Г.П. Пызин, В.Л. Ушаков и др.), которая наряду с выполнением научных исследований занялась разработкой и изготовлением оборудования для физического практикума в вузах и школах. Это направление к 2000-м годам развилось настолько, что группа стала поставлять оборудование по всей России, от Ноябрьска на Дальнем Востоке до Петербурга на Северо-Западе и Севастополя на юге, а также и за рубеж, в страны СНГ (Казахстан, Таджикистан, Азербайджан). Это оборудование работает в лучших вузах страны – МГУ, МИФИ, МАИ, МИСиС. Общественным признанием этой деятельности было проведение в 1996 году в ЮУрГУ международной конференции стран СНГ «Современный физический практикум», за организацию которой со стороны университета отвечал Юрий Геннадьевич. Он был также членом оргкомитета VII Всесоюзной конференции «Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов» (Челябинск, 1990), членом редакции первого на Урале и одного из первых в России электронных научных изданий – журнала «Высокотемпературные расплавы», появление которого инициировало возникновение в университете современных «Вестников ЮУрГУ».

Наиболее глубокий след в истории ЮУрГУ Юрий Геннадьевич оставил как основная движущая сила в создании факультета прикладных математики и физики, первого естественно-научного подразделения, из которого в начале 2000-х годов образовались физический, химический и математический факультеты. Толчком для создания этого факультета послужил замечательный опыт, полученный ранее, в первой половине 90-х годов, по обучению студентов в потоке усиленной физико-математической подготовки. Этот поток был создан по инициативе выдающегося советского ученого-физика, Бориса Яковлевича Зельдовича, бывшего тогда профессором ЮУрГУ. В этом потоке был подготовлен целый ряд талантливых молодых исследователей, сделавших потом заметную карьеру в России и за рубежом. Однако с отъездом Б.Я. Зельдовича из Челябинска этот опыт мог рассеяться, в связи с чем руководством ЮУрГУ было принято решение легализовать подготовку естественно-научных кадров, создав факультет прикладной математики и физики (ПМФ). Эта непростая работа была поручена Юрию Геннадьевичу. Здесь ему потребовался весь дар убеждения, чтобы ненасильственным путем собрать вместе естественно-научные и наукоемкие в физико-математическом отношении кафедры, прекрасно себя чувствовавшие на своих исходных факультетах. В результате напряженных дебатов и дискуссий, консенсус был найден, и Юрий Геннадьевич был назначен первым деканом нового факультета. Он в кратчайшие сроки организовал слаженную работу всех органов факультета,



**Работа над докторской, эксперимент
(1990 г.)**



**Встреча руководства ЮУрГУ
с губернатором Челябинской
области П.И. Суминым**

Информация

женную работу всех органов факультета, используя не столько административный ресурс, сколько личный пример – «Поняли? Видели? Делайте, как я, или лучше». Бывшие ответственные работники кафедр и деканата не помнят случаев применения Измайловым каких-либо карательных мер, только разъяснение и убеждение. Эти качества заботливого воспитателя и наставника распространялись и на студентов. Один из выпускников того времени, Алексей Гун (ныне научный сотрудник Принстона), вспоминая учебу на ПМФ, пишет в «Технополисе»: «Конечно, прежде всего, надо вспомнить Юрия Геннадьевича Измайлова, необыкновенную личность, подлинного отца нового дела, факультета». Об этом же говорят рассеянные теперь по Евразии и Америке и другие выпускники, когда навещают Alma Mater.

Нет сомнения, что Юрий Геннадьевич Измайлов совершил бы много других больших и важных дел «на пользу народу, Родине», однако судьба распорядилась иначе. Но и то, что он успел сделать, оставило глубокий след в памяти тех, кому посчастливилось с ним соприкоснуться.

*Бескачко В.П., Вяткин Г.П., Дрозин А.Д.,
Заляпин В.И., Мирзоев А.А., Роцин В.Е.*

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 13, № 3
2021

16+

Редакторы: *С.И. Уварова, Н.Н. Егорьева*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 26.07.2021. Дата выхода в свет 30.07.2021.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 9,76.

Тираж 500 экз. Заказ 258/272. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.