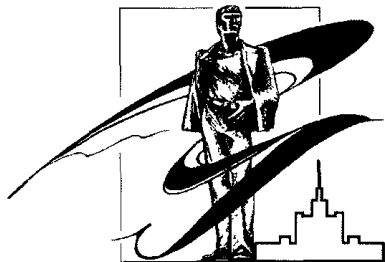


# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2013  
Т. 5, № 2**

**ISSN 2075-809X**

**СЕРИЯ**

**«МАТЕМАТИКА.  
МЕХАНИКА.  
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий

**ПОСВЯЩАЕТСЯ  
70-ЛЕТИЮ ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный  
университет» (национальный исследовательский университет)**

**Редакционная коллегия:**

д.ф.-м.н., профессор **Мирзоев А.А.** (отв. редактор),  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь),  
к.ф.-м.н., доцент **Заляпин В.И.**,  
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.**,  
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.**,  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.**,  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.**,  
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.**,  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.**,  
д.ф.-м.н., профессор **Менихес Л.Д.**,  
д.ф.-м.н., доцент **Келлер А.В.**

**Редакционный совет:**

д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва),  
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.**,  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, США),  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор, **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла),  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (Kim Kisik, ИНХА-Университет, г. Инчон, Корея),  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Kim Jaewan, Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея),  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, Нэшвилл, США)

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-26455 выдано 13 декабря 2006 г. Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России».

Периодичность выхода – 2 номера в год.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Математика

|   |    |
|---|----|
| АДУКОВ В.М. О факторизации Винера–Хопфа функционально-коммутативных матриц-функций .....  | 6  |
| КОЛЯСНИКОВ С.А. Единицы целочисленных групповых колец конечных групп с прямым сомножителем порядка 3.....   | 13 |
| ЛЕЩЕВИЧ В.В., ПЕНЯЗЬКОВ О.Г., РОСТЕН Ж.-К., ФЕДОРОВ А.В., ШУЛЬГИН А.В. Экспериментальное и математическое моделирование самовоспламенения микрочастиц железа..... | 21 |
| МАРТЮШЕВ Е.В. Алгоритмическое решение пятиточечной задачи оценки положения камер, основанное на представлении Кэли матриц вращения.....                           | 31 |
| МЕДВЕДЕВ С.В. О продолжении гомеоморфизмов в нульмерных однородных пространствах.....   | 39 |
| ОМЕЛЬЧЕНКО Е.А., ПЛЕХАНОВА М.В., ДАВЫДОВ П.Н. Численное решение линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля с запаздыванием.....            | 45 |
| РУБИНА Л.И., УЛЬЯНОВ О.Н. К вопросу об отличиях в поведении решений линейного и нелинейного уравнений теплопроводности .....                                      | 52 |
| СОЛДАТОВА Н.Г. Об оптимальных по рискам и сожалениям ситуациях в игре двух лиц.....   | 60 |
| ТАБАРИНЦЕВА Е.В. О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения методом проекционной регуляризации.....                    | 65 |
| ТАНАНА В.П., ЕРЫГИНА А.А. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи физики твердого тела .....  | 72 |
| УХОБОТОВ В.И., ТРОИЦКИЙ А.А. Об одной задаче импульсного преследования .....  | 79 |
| УШАКОВ А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области.....                | 88 |

## Физика

|   |     |
|---|-----|
| ВОРОНЦОВ А.Г. Изменение структуры металлических кластеров в процессе их получения .   | 94  |
| ГУРЕВИЧ С.Ю., ГОЛУБЕВ Е.В., ПЕТРОВ Ю.В. Волны Лэмба в ферромагнитных металлах: лазерная генерация и электромагнитная регистрация.....                           | 99  |
| РИДНЫЙ Я.М., МИРЗОЕВ А.А., МИРЗАЕВ Д.А. <i>Ab-initio</i> моделирование влияния ближнего окружения примесей углерода на энергию их растворения в ГЦК-железе..... | 108 |
| УШАКОВ В.Л., ПЫЗИН Г.П., БЕСКАЧКО В.П. Методика наблюдения малых движений поверхности лежащей капли в процессе ее испарения .....                               | 117 |

## Краткие сообщения

|   |     |
|---|-----|
| БЕРЕЗИН И.Я., ПЕТРЕНКО Ю.О. Вопросы вибрационной безопасности оператора промышленного трактора .....  | 123 |
| БОЛЬШАКОВ М.В., ГУСЕВА А.В., КУНДИКОВА Н.Д., ПОПКОВ И.И. Волоконно-интерференционный метод получения неоднородно поляризованного пучка.....                                     | 128 |
| БОЛЬШАКОВ М.В., ГУСЕВА А.В., КУНДИКОВА Н.Д., ПОПКОВ И.И. Преобразование спинового момента в орбитальный момент в лазерном пучке.....  | 133 |
| БОЛЬШАКОВ М.В., КОМАРОВА М.А., КУНДИКОВА Н.Д. Экспериментальное определение модового состава излучения, распространяющегося в многомодовом оптическом волкне .....              | 138 |
| БРЫЗГАЛОВ А.Н., ВОЛКОВ П.В. Влияние термической обработки на микротвердость кварцевых стекол марки КУ-1 .....   | 143 |
| ГЕРАСИМОВ А.М., КУНДИКОВА Н.Д., МИКЛЯЕВ Ю.В., ПИХУЛЯ Д.Г., ТЕРПУГОВ М.В. Эффективность генерации второй гармоники в одномерном фотонном кристалле из изотропного материала..... | 147 |

---

|  |     |
|--|-----|
| ИВАНОВ С.А. Устойчивость двухслойных рекурсивных нейронных сетей .....   | 151 |
| КАРИЦКАЯ С.Г., КАРИЦКИЙ Я.Д. Люминесцентные примесные центры для мониторинга физического состояния полимеров и компьютерное моделирование процессов структурирования полимерных пленок ..... | 155 |
| КАТКОВ М.Л. О существовании неподвижной точки у равномерно сжимающего монотонного оператора .....  | 160 |
| ЛЕЙВИ А.Я. Анализ механизмов формирования рельефа поверхности материала при обработке мощными плазменными потоками .....   | 162 |
| МАТВЕЕВА Л.В. Поведение полиномов Гронуолла вне области суммируемости.....   | 166 |
| ХАЙРИСЛАМОВ К.З. Течение Пуазейля для жидкости с переменной вязкостью.....   | 170 |
| ХАЙРИСЛАМОВ М.З., GERENШТЕЙН А.В. Явная схема решения третьей смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности .....   | 174 |
| ЭВНИН А.Ю. Многочлен как сумма периодических функций .....   | 178 |

---

## CONTENTS

### Mathematics

|   |    |
|---|----|
| ADUKOV V.M. About Wiener–Hopf factorization of functionally commutative matrix functions..  | 6  |
| KOLYASNIKOV S.A. Units of integral group rings of finite groups with a direct multiplier of order 3 .....   | 13 |
| LESCHEVICH V.V., PENYAZKOV O.G., ROSTAING J.-C., FEDOROV A.V., SHULGIN A.V. Experimental and mathematical simulation of auto-ignition of iron micro particles ..... | 21 |
| MARTYUSHEV E.V. Algorithmic solution of the five-point pose problem based on the Cayley representation of rotation matrices.....                                    | 31 |
| MEDVEDEV S.V. About extension of homeomorphisms over zero-dimensional homogeneous spaces.....   | 39 |
| OMELCHENKO E.A., PLEKHANOVA M.V., DAVYDOV P.N. Numerical solution of delayed linearized quasistationary phase-field system of equations .....                       | 45 |
| RUBINA L.I., UL'YANOV O.N. Towards the differences in behaviour of solutions of linear and non-linear heat-conduction equations.....                                | 52 |
| SOLDATOVA N.G. About optimum on risks and regrets situations in game of two persons .....   | 60 |
| TABARINTSEVA E.V. About solving of an ill-posed problem for a nonlinear differential equation by means of the projection regularization method.....                 | 65 |
| TANANA V.P., ERYGINA A.A. About the evaluation of inaccuracy of approximate solution of the inverse problem of solid state physics .....                            | 72 |
| UKHOBOTOV V.I., TROITSKY A.A. One problem of pulse pursuit.....   | 79 |
| USHAKOV A.L. Updating iterative factorization for the numerical solution of two elliptic equations of the second order in rectangular area .....                    | 88 |

### Physics

|   |     |
|---|-----|
| VORONTSOV A.G. Structure amendments in heated metal clusters during its process.....  | 94  |
| GUREVICH S.Yu., GOLUBEV E.V., PETROV Yu.V. Lamb waves in ferromagnetic metals: laser excitation and electromagnetic registration.....   | 99  |
| RIDNYI Ya.M., MIRZOEV A.A., MIRZAEV D.A. <i>Ab-initio</i> simulation of influence of short-range ordering carbon impurities on the energy of their dissolution in the FCC-iron..... | 108 |
| USHAKOV V.L., PYZIN G.P., BESKACHKO V.P. A method for monitoring small surface movements of a sessile drop during evaporation.....  | 117 |

### Short communications

|  |     |
|--|-----|
| BEREZIN I.Ya., PETRENKO Yu.O. Problems of vibration safety of operator of industrial tractor .   | 123 |
| BOLSHAKOV M.V., GUSEVA A.V., KUNDIKOVA N.D., POPKOV I.I. Fiber and interferential method of obtaining non-homogeneous polarized beam .....   | 128 |
| BOLSHAKOV M.V., GUSEVA A.V., KUNDIKOVA N.D., POPKOV I.I. Transformation of the spin moment into orbital moment in laser beam.....  | 133 |
| BOLSHAKOV M.V., KOMAROVA M.A., KUNDIKOVA N.D. Experimental determination of multimode optical fiber radiation mode composition.....  | 138 |
| BRYZGALOV A.N., VOLKOV P.V. Influence of heat-treating on microhardness of silica glass KU-1 .....   | 143 |
| GERASIMOV A.M., KUNDIKOVA N.D., MIKLYAEV Yu.V., PIKHULYA D.G., TERPUGOV M.V. Efficiency of second harmonic generation in one-dimensional photonic crystal from isotropic material.....         | 147 |
| IVANOV S.A. Stability of two-layer recursive neural networks .....   | 151 |
| KARITSKAYA S.G., KARITSKIY Ya.D. Fluorescent impurity centers for monitoring the physical state of polymers and a computer simulation of processes of structuring of the polymer matrices .... | 155 |

---

|   |     |
|---|-----|
| KATKOV M.L. Existence of the fixed point in the case of evenly contractive monotonic operator..   | 160 |
| LEYVI A.Ya. Analysis of mechanisms of surface pattern formation during the high-power plasma stream processing.....                       | 162 |
| MATVEEVA L.V. Behavior of Gronwall polynomials outside the boundary of summability region   | 166 |
| KHAYRISLAMOV K.Z. Poiseuille flow of a fluid with variable viscosity .....  | 170 |
| KHAYRISLAMOV M.Z., HERREINSTEIN A.W. Explicit scheme for the solution of third boundary value problem for quasi-linear heat equation..... | 174 |
| EVNIN A.Yu. Polynomial as a sum of periodic functions.....  | 178 |

## О ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОММУТАТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В.М. Адуков<sup>1</sup>

Для функционально-коммутирующих матриц-функций специального вида предложен алгоритм явного решения задачи факторизации Винера–Хопфа. Используются элементарные факты теории представлений конечных групп. Симметрия факторизуемой матрицы-функции позволяет диагонализировать ее с помощью постоянного линейного преобразования. Тем самым задача приводится к скалярному случаю.

*Ключевые слова.* факторизация Винера–Хопфа, частные индексы, конечные группы.

### 1. Введение

Пусть  $\Gamma$  – замкнутый гладкий жорданов контур, ограничивающий область  $D_+$ . Дополнение  $D_+ \cup \Gamma$  в  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  обозначим  $D_-$ , считаем, что  $0 \in D_+$ . Пусть  $A(t)$  – непрерывная и обратимая на контуре  $\Gamma$  матрица-функция порядка  $s$ . *Правой факторизацией Винера–Хопфа*  $A(t)$  называется ее представление в виде

$$A(t) = A_-(t)d(t)A_+(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $A_{\pm}(t)$  – непрерывные на  $\Gamma$  матрицы-функции, аналитически продолжимые в  $D_{\pm}$  и обратимые там, а  $d(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_s}]$ , где  $\rho_1, \dots, \rho_s$  – целые числа, которые называются *правыми частными индексами*  $A(t)$ . Можно считать, что  $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_s$ . Частные индексы – важные целочисленные инварианты матрицы-функции  $A(t)$ . В скалярном случае ( $s = 1$ ) задача факторизации может быть решена явно [1].

Задача факторизации Винера–Хопфа (красная задача Римана) – одна из самых востребованных задач комплексного анализа. Она находит многочисленные приложения в топологии, теории операторов, теории аппроксимаций Паде, дифференциальных уравнениях, механике сплошной среды.

Особенно важна для приложений матричная красная задача Римана, однако именно в этом случае имеются значительные трудности. Вызваны они отсутствием для матриц-функций общего вида явных формул для факторизационных множителей и частных индексов. Поэтому в настоящее время главной проблемой в теории факторизации является проблема отыскания классов матриц-функций, для которых задача может быть решена явно.

Один из таких классов был рассмотрен в работах [2–5]. Он состоит из достаточно часто встречающихся в приложениях мероморфных матриц-функций. Для данных матриц-функций один из факторизационных множителей является рациональным, то есть определяется конечным числом параметров. Это позволило получить явное решение задачи для мероморфных либо кусочно-мероморфных матриц-функций средствами линейной алгебры.

Если матрица-функция обладает определенной симметрией (например, является циркулянтной матрицей-функцией), то естественно ожидать, что использование теоретико-групповых методов позволит понизить размерность  $s$  задачи. В этой работе мы рассмотрим только случай, когда  $A(t)$  можно рассматривать как функцию на контуре  $\Gamma$  со значениями в групповой алгебре  $\mathbb{C}[G]$  конечной абелевой группы или в центре  $Z(\mathbb{C}[G])$  групповой алгебры конечной неабелевой группы  $G$ . Симметрия данной задачи факторизации такова, что она может быть сведена к одномерному случаю.

<sup>1</sup> Адуков Виктор Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: victor m adukov@gmail.com

Поскольку значения  $A(t)$  лежат в коммутативной матричной алгебре, то  $A(t)$  является функционально-коммутативной матрицей. Это – первый класс матриц-функций, для которого краевую задачу Римана удалось решить в явной форме [6]. Для рассматриваемого в работе специального класса функционально-коммутативных матриц-функций предлагаемое решение задачи факторизации значительно проще – оно требует только знания характеров неприводимых комплексных представлений группы.

## 2. Основные результаты

1. Пусть  $G$  – конечная группа порядка  $|G| = n$ ,  $e$  – единица  $G$ ,  $\mathbb{C}[G]$  – групповая алгебра, то есть линейное пространство формальных линейных комбинаций  $\sum_{g \in G} a(g)g$  элементов группы  $G$  с коэффициентами  $a(g)$  из  $\mathbb{C}$ . Группа  $G$  вкладывается в  $\mathbb{C}[G]$  отождествлением элемента  $g$  с линейной комбинацией  $1 \cdot g$ . Тогда  $G$  – базис линейного пространства  $\mathbb{C}[G]$ . Групповая операция на  $G$  задаст умножение базисных элементов, тем самым на  $\mathbb{C}[G]$  определяется структура алгебры над полем  $\mathbb{C}$ . Можно также рассматривать  $\mathbb{C}[G]$  как алгебру функций  $a(g)$  со сверткой в качестве умножения.

Пусть  $K_1 = \{e\}, K_2, \dots, K_s$  – сопряженные классы  $G$ ,  $h_j = |K_j|$  – порядок сопряженного класса  $K_j$ ,  $g_1, \dots, g_s$  – произвольные фиксированные представители сопряженных классов. Центр  $Z(\mathbb{C}[G])$  групповой алгебры состоит из центральных функций на  $G$ , то есть функций  $a(g)$ , постоянных на сопряженных классах.

Элементы  $C_j = \sum_{g \in K_j} g$ ,  $j = 1, \dots, s$  образуют базис коммутативной алгебры  $Z(\mathbb{C}[G])$ . Поэтому

$$C_i C_j = \sum_{k=1}^s c_{ij}^k C_k,$$

где  $c_{ij}^k$  – структурные константы алгебры  $Z(\mathbb{C}[G])$ .

Пусть  $A$  – оператор умножения на элемент  $a = \sum_{i=1}^s a_i C_i \in Z(\mathbb{C}[G])$ ,  $a_i = a(g_i)$ , действующий в линейном пространстве  $Z(\mathbb{C}[G])$ . Найдем его матрицу  $A$  в базисе  $C_1, \dots, C_s$ . Так как

$$a C_j = \sum_{i=1}^s a_i C_i C_j = \sum_{i,k=1}^s a_i c_{ij}^k C_k,$$

то элемент  $A_{kj}$  матрицы  $A$  оператора находится по формуле  $A_{kj} = \sum_{i=1}^s a_i c_{ij}^k$  и потому

$$A = \left( \sum_{i=1}^s a_i c_{ij}^k \right)_{k,j=1}^s. \quad (2)$$

В частности, если группа  $G$  – абелева, то  $s = n$ ,  $Z(\mathbb{C}[G]) = \mathbb{C}[G]$ , и матрица оператора  $A$  умножения на  $a = \sum_{g \in G} a(g)g \in \mathbb{C}[G]$  в базисе  $\{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a(g_1) & a(g_1 g_2^{-1}) & \cdots & a(g_1 g_n^{-1}) \\ a(g_2) & a(g_2 g_2^{-1}) & \cdots & a(g_2 g_n^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(g_n) & a(g_n g_2^{-1}) & \cdots & a(g_n g_n^{-1}) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Эта матрица получена из первого столбца с помощью группы перестановок, изоморфной  $G$ .

Например, если  $G$  есть циклическая группа порядка  $n$  с образующей  $a$ , то, выбрав базис  $\{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ , получим циркулянтную матрицу.

Групповую алгебру  $\mathbb{C}[G]$  (алгебру  $Z(\mathbb{C}[G])$ ) мы можем отождествить с алгеброй матриц вида (3) (вида (2)). Эти матричные представления алгебр  $\mathbb{C}[G]$ ,  $Z(\mathbb{C}[G])$  соответствуют регулярно-му представлению группы  $G$ .

Пусть  $\mathfrak{A}$  – произвольная алгебра с единицей  $I$  над полем  $\mathbb{C}$ . Тензорное произведение  $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}[G]$  мы отождествляем с алгеброй матриц вида (3) с элементами  $a(g_k) \in \mathfrak{A}$ . Соответственно,  $\mathfrak{A} \otimes Z(\mathbb{C}[G])$  рассматривается как алгебра матриц вида (2) с  $a_i \in \mathfrak{A}$ . Обозначим  $I_s$  диагональную матрицу порядка  $s$  с элементами  $I$  на диагонали.

**Теорема 1.** Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_s$  – характеры неприводимых комплексных представлений группы  $G$  и  $n_1, \dots, n_s$  – степени соответствующих представлений. Обозначим

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} h_1 \chi_1(g_1) I & h_2 \chi_1(g_2) I & \dots & h_s \chi_1(g_s) I \\ h_1 \chi_2(g_1) I & h_2 \chi_2(g_2) I & \dots & h_s \chi_2(g_s) I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1 \chi_s(g_1) I & h_2 \chi_s(g_2) I & \dots & h_s \chi_s(g_s) I \end{pmatrix}.$$

Тогда  $F$  – обратимая матрица,

$$F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \overline{\chi_1(g_1) I} & \overline{\chi_2(g_1) I} & \dots & \overline{\chi_s(g_1) I} \\ \overline{\chi_1(g_2) I} & \overline{\chi_2(g_2) I} & \dots & \overline{\chi_s(g_2) I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\chi_1(g_s) I} & \overline{\chi_2(g_s) I} & \dots & \overline{\chi_s(g_s) I} \end{pmatrix},$$

и любая матрица  $A \in \mathfrak{A} \otimes Z(\mathbb{C}[G])$  представляется в виде:

$$A = F^{-1} \Lambda F,$$

где

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_s], \quad \lambda_j = \frac{1}{n_j} \sum_{g \in G} a(g) \chi_j(g), \quad j = 1, \dots, s.$$

**Доказательство.** Найдем элементы матрицы  $FF^{-1}$ :

$$(FF^{-1})_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^s h_k \chi_i(g_k) \overline{\chi_j(g_k) I} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g) I} = \begin{cases} I, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} I. \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались первым соотношением ортогональности для характеров (см. [7, гл.3, § 4, Теорема 2]) и тем, что характеры являются центральными функциями на группе  $G$ . Соотношения (4) означают, что  $FF^{-1} = I_s$ .

Найдем элементы матрицы  $FAF^{-1}$ , воспользовавшись формулой (2) и определением матриц  $F$ ,  $F^{-1}$ :

$$(FAF^{-1})_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{l,k=1}^s F_{ik} A_{kl} (F^{-1})_{lj} = \frac{1}{n} \sum_{l,k,m=1}^s h_k a_m c_{ml}^k \chi_i(g_k) \overline{\chi_l(g_l)}.$$

Известно (см. [8, §109, формула (8)]), что характеры удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{k=1}^s h_k c_{ml}^k \chi_i(g_k) = \frac{h_m h_l}{n_i} \chi_i(g_m) \chi_i(g_l).$$

По терминологии Ван дер Вардена, это – второе соотношение между характерами.

Применив его, получаем

$$(FAF^{-1})_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{l,m=1}^s a_m \overline{\chi_l(g_l)} \frac{h_m h_l}{n_i} \chi_i(g_m) \chi_i(g_l) = \sum_{m=1}^s a_m \frac{h_m}{n_i} \chi_i(g_m) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^s h_l \chi_i(g_l) \overline{\chi_l(g_l)}.$$



Наконец, еще раз воспользовавшись первым соотношением ортогональности (4), приходим к результату:

$$(\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{n_i} \sum_{m=1}^s a_m h_m \chi_i(g_m).$$

Поскольку характеры – центральные функции, то суммирование в правой части этой формулы мы можем распространить на все элементы группы  $G$ . Таким образом, окончательно  $(\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1})_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$  и  $\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1} = \Lambda$ . Теорема доказана.  $\blacktriangle$

В случае, когда  $A \in \mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}[G]$ ,  $G$  – конечная абелева группа, в формулировке Теоремы 1 нужно положить  $h_1 = \dots = h_s = n_1 = \dots = n_s = 1$  и  $s = |G|$ .

Ясно, что матрица  $A$  обратима тогда и только тогда, когда  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  – обратимые элементы алгебры  $\mathfrak{A}$ .

2. Применим доказанную теорему к задаче факторизации (1). Пусть  $\mathfrak{A}$  – распадающаяся алгебра непрерывных на контуре  $\Gamma$  функций, допускающих факторизацию Винера–Хопфа. Например, можно взять в качестве  $\mathfrak{A}$  алгебру Винера  $W(\mathbb{T})$  на единичной окружности  $\mathbb{T}$  или алгебру  $H(\Gamma)$  гельдесовских на  $\Gamma$  функций (см. [1]).

Элемент  $a(g)$  является теперь функцией  $a_g(t) \in \mathfrak{A}$ ,  $t \in \Gamma$ . Матрица-функция  $A(t)$  обратима тогда и только тогда, когда функции  $\lambda_j(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{g \in G} a_g(t) \chi_j(g)$ ,  $j = 1, \dots, s$  отличны от нуля на  $\Gamma$ .

Обозначим  $\rho_j = \text{ind}_\Gamma \lambda_j(t)$  – индекс Коши относительно контура  $\Gamma$  функции  $\lambda_j(t)$ , то есть деленное на  $2\pi$  приращение аргумента этой функции, когда точка  $t$  пробегает контур  $\Gamma$ . Пусть  $\lambda_j(t) = \lambda_j^-(t) t^{\rho_j} \lambda_j^+(t)$  – факторизация Винера–Хопфа  $\lambda_j(t)$ . Тогда

$$\Lambda(t) = \text{diag} [\lambda_1^-(t), \dots, \lambda_s^-(t)] \cdot \text{diag} [\lambda_1^+(t), \dots, \lambda_s^+(t)]$$

– факторизация Винера–Хопфа диагональной матрицы-функции  $\Lambda(t)$  и применение Теоремы 1 дает следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $A(t) \in \mathfrak{A} \otimes Z(\mathbb{C}[G])$  – обратимая на контуре  $\Gamma$  матрица-функция вида (2). Тогда ее факторизация Винера–Хопфа  $A(t) = A_-(t)d(t)A_+(t)$  строится по формулам:

$$A_-(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^-(t) \overline{\chi_1(g_1)} & \lambda_2^-(t) \overline{\chi_2(g_1)} & \cdots & \lambda_s^-(t) \overline{\chi_s(g_1)} \\ \lambda_1^-(t) \overline{\chi_1(g_2)} & \lambda_2^-(t) \overline{\chi_2(g_2)} & \cdots & \lambda_s^-(t) \overline{\chi_s(g_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^-(t) \overline{\chi_1(g_s)} & \lambda_2^-(t) \overline{\chi_2(g_s)} & \cdots & \lambda_s^-(t) \overline{\chi_s(g_s)} \end{pmatrix},$$

$$d(t) = \text{diag} [t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_s}], \quad \rho_j = \text{ind}_\Gamma \lambda_j(t),$$

$$A_+(t) = \begin{pmatrix} h_1 \lambda_1^+(t) \chi_1(g_1) & h_2 \lambda_1^+(t) \chi_1(g_2) & \cdots & h_s \lambda_1^+(t) \chi_1(g_s) \\ h_1 \lambda_2^+(t) \chi_2(g_1) & h_2 \lambda_2^+(t) \chi_2(g_2) & \cdots & h_s \lambda_2^+(t) \chi_2(g_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1 \lambda_s^+(t) \chi_s(g_1) & h_2 \lambda_s^+(t) \chi_s(g_2) & \cdots & h_s \lambda_s^+(t) \chi_s(g_s) \end{pmatrix}.$$

$\blacktriangle$

### 3. Примеры

**Пример 1.** Пусть  $G = V_4$  – четверная группа Клейна. Она является абелевой подгруппой симметрической группы  $S_4$ :

$$V_4 = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\},$$

изоморфной прямому произведению  $C_2 \times C_2$  циклических групп второго порядка. Матрица  $A(t)$  поэтому есть 2-уровневая циркулянтная матрица, то есть  $2 \times 2$  блочно-циркулянтная матрица, с  $2 \times 2$  циркулянтными блоками

$$A(t) = \left( \begin{array}{cc|cc} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & a_4(t) \\ a_2(t) & a_1(t) & a_4(t) & a_3(t) \\ \hline a_3(t) & a_4(t) & a_1(t) & a_2(t) \\ a_4(t) & a_3(t) & a_2(t) & a_1(t) \end{array} \right).$$

Таблица характеров  $V_4$  (см. [7, гл.3, § 5])

|          |     |            |            |            |
|----------|-----|------------|------------|------------|
|          | $e$ | $(12)(34)$ | $(13)(24)$ | $(14)(23)$ |
| $\chi_1$ | 1   | 1          | 1          | 1          |
| $\chi_2$ | 1   | -1         | 1          | -1         |
| $\chi_3$ | 1   | 1          | -1         | -1         |
| $\chi_3$ | 1   | -1         | -1         | 1          |

задаст постоянную матрицу  $\mathcal{F}$ , которая приводит  $A(t)$  к диагональному виду с диагональными элементами:

$$\lambda_1(t) = a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) + a_4(t), \quad \lambda_2(t) = a_1(t) - a_2(t) + a_3(t) - a_4(t),$$

$$\lambda_3(t) = a_1(t) + a_2(t) - a_3(t) - a_4(t), \quad \lambda_4(t) = a_1(t) - a_2(t) - a_3(t) + a_4(t).$$

Индексы Коши этих функций являются частными индексами  $A(t)$ .

**Пример 2.** Пусть  $G = S_3$  – симметрическая группа степени 3. В этой неабелевой группе имеется 3 сопряженных класса:

$$K_1 = \{e\}, \quad K_2 = \{(12), (13), (23)\}, \quad K_3 = \{(123), (132)\}.$$

Таблица умножения базисных элементов  $C_j$  алгебры  $Z(\mathbb{C}[S_3])$  приведена ниже:

|       |       |               |              |       |
|-------|-------|---------------|--------------|-------|
| 1     | 2     | $C_1$         | $C_2$        | $C_3$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$         | $C_3$        |       |
| $C_2$ | $C_2$ | $3C_1 + 3C_3$ | $2C_2$       |       |
| $C_3$ | $C_3$ | $2C_2$        | $2C_1 + C_3$ |       |

Теперь по формуле (1) мы можем составить матрицу-функцию  $A(t)$ :

$$A(t) = \left( \begin{array}{ccc} a_1(t) & 3a_2(t) & 2a_3(t) \\ a_2(t) & a_1(t) + 2a_3(t) & 2a_2(t) \\ a_3(t) & 3a_2(t) & a_1(t) + a_3(t) \end{array} \right).$$

Таблица характеров  $S_3$  имеет вид (см. [7, гл.3, § 5])

|          |     |        |         |
|----------|-----|--------|---------|
|          | $e$ | $(12)$ | $(123)$ |
| $\chi_1$ | 1   | 1      | 1       |
| $\chi_2$ | 1   | -1     | 1       |
| $\chi_3$ | 2   | 0      | -1      |

Следовательно,  $\lambda_1(t) = a_1(t) + 3a_2(t) + 2a_3(t)$ ,  $\lambda_2(t) = a_1(t) - 3a_2(t) + 2a_3(t)$ ,  $\lambda_3(t) = a_1(t) - a_3(t)$ ,

и

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2 получаем

$$A_-(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^-(t) & \lambda_2^-(t) & 2\lambda_3^-(t) \\ \lambda_1^-(t) & -\lambda_2^-(t) & 0 \\ \lambda_1^-(t) & \lambda_2^-(t) & -\lambda_3^-(t) \end{pmatrix}, \quad A_+(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^+(t) & 3\lambda_1^+(t) & 2\lambda_1^+(t) \\ \lambda_2^+(t) & -3\lambda_2^+(t) & 2\lambda_2^+(t) \\ 2\lambda_3^+(t) & 0 & -2\lambda_3^+(t) \end{pmatrix},$$

и  $\rho_1 = \text{ind}_\Gamma(a_1(t) + 3a_2(t) + a_3(t))$ ,  $\rho_2 = \text{ind}_\Gamma(a_1(t) - 3a_2(t) + a_3(t))$ ,  $\rho_3 = \text{ind}_\Gamma(a_1(t) - a_3(t))$ .

**Пример 3.** Пусть  $G = Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  – группа кватернионов, заданная определяющими соотношениями  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . В группе имеется 5 сопряженных классов:

$$K_1 = \{1\}, K_2 = \{-1\}, K_3 = \{\pm i\}, K_4 = \{\pm j\}, K_5 = \{\pm k\}.$$

Таблица умножения базисных элементов  $C_j$  алгебры  $Z(\mathbb{C}[Q_8])$  имеет вид

|       |       |       |               |               |               |
|-------|-------|-------|---------------|---------------|---------------|
| 1 \ 2 | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$         | $C_4$         | $C_5$         |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$         | $C_4$         | $C_5$         |
| $C_2$ | $C_2$ | $C_1$ | $C_3$         | $C_4$         | $C_5$         |
| $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $2C_1 + 2C_2$ | $2C_5$        | $2C_4$        |
| $C_4$ | $C_4$ | $C_4$ | $2C_5$        | $2C_1 + 2C_2$ | $2C_3$        |
| $C_5$ | $C_5$ | $C_5$ | $2C_4$        | $2C_3$        | $2C_1 + 2C_2$ |

поэтому

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & 2a_3(t) & 2a_4(t) & 2a_5(t) \\ a_2(t) & a_1(t) & 2a_3(t) & 2a_4(t) & 2a_5(t) \\ a_3(t) & a_3(t) & a_1(t) + a_2(t) & 2a_5(t) & 2a_4(t) \\ a_4(t) & a_4(t) & 2a_5(t) & a_1(t) + a_2(t) & 2a_3(t) \\ a_5(t) & a_5(t) & 2a_4(t) & 2a_3(t) & a_1(t) + a_2(t) \end{pmatrix}.$$

Группа  $Q_8$  имеет следующую таблицу характеров:

|          |   |    |         |         |         |
|----------|---|----|---------|---------|---------|
|          | 1 | -1 | $\pm i$ | $\pm j$ | $\pm k$ |
| $\chi_1$ | 1 | 1  | 1       | 1       | 1       |
| $\chi_2$ | 1 | 1  | 1       | -1      | -1      |
| $\chi_3$ | 1 | 1  | -1      | 1       | -1      |
| $\chi_4$ | 1 | 1  | -1      | -1      | 1       |
| $\chi_5$ | 2 | -2 | 0       | 0       | 0       |

Знание ее позволяет найти частные индексы и факторизационные множители  $A(t)$ . Ограничимся только нахождением частных индексов.

Вычисление функций  $\lambda_j(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{g \in G} a_g(t) \chi_j(g)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , дает такой результат:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= a_1(t) + a_2(t) + 2a_3(t) + 2a_4(t) + 2a_5(t), \\ \lambda_2(t) &= a_1(t) + a_2(t) + 2a_3(t) - 2a_4(t) - 2a_5(t), \\ \lambda_3(t) &= a_1(t) + a_2(t) - 2a_3(t) + 2a_4(t) - 2a_5(t), \\ \lambda_4(t) &= a_1(t) + a_2(t) - 2a_3(t) - 2a_4(t) + a_5(t), \quad \lambda_5(t) = a_1(t) - a_2(t). \end{aligned}$$

Частные индексы  $A(t)$  есть индексы Коши этих функций.

### Литература

1. Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Adukov, V.M. On Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions / V.M. Adukov // Integral Equations and Operator Theory. – 1991. – V. 14. – P. 767–774.

3. Адуков, В.М. Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 54–74.
4. Адуков, В.М. О факторизации аналитических матриц-функций / В.М. Адуков // Теор. и матем. физика. – 1999. – Т. 118, № 3. – С. 324–336.
5. Адуков, В.М. Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 3–24.
6. Гахов, Ф.Д. Краевая задача Римана для системы  $n$  пар функций / Ф.Д. Гахов // Успехи матем. наук. – 1952. – Т. 7. – Вып. 4(50). – С. 3–54.
7. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Часть III / А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2000. – 272 с.
8. Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – СПб.: «Лань», 2004. – 624 с.

## ABOUT WIENER–HOPF FACTORIZATION OF FUNCTIONALLY COMMUTATIVE MATRIX FUNCTIONS

V.M. Adukov<sup>1</sup>

An algorithm of an explicit solution of the Wiener–Hopf factorization problem is proposed for functionally commutative matrix functions of a special kind. Elementary facts of the representation theory of finite groups are used. Symmetry of the matrix function that is factored out allows to diagonalize it by a constant linear transformation. Thus, the problem is reduced to the scalar case.

*Keywords: Wiener–Hopf factorization, special indexes, finite groups.*

### References

1. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* (Convolution equations and projection methods for their solution). Moscow: Nauka, 1971. 352 p. (in Russ.). [Gohberg I.C., Fel'dman I.A. *Convolution equations and projection methods for their solution*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 41. MR 0355675 (50 #8149) (in Eng.).]
2. Adukov V.M. On Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *Integral Equations and Operator Theory*. 1991. Vol. 14. pp. 767–774. DOI: 10.1007/BF01198935.
3. Adukov V.M. Faktorizatsiya Vinera–Khopfa meromorfnykh matrirts-funktsiy (Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix function). *Algebra i analiz*. 1992. Vol. 4. Issue 1. pp. 54–74. (in Russ.). [Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *St. Petersburg Mathematical Journal*. 1993. Vol. 4. Issue 1. pp. 51–69. (in Eng.).]
4. Adukov V.M. O faktorizatsii analiticheskikh matrirts-funktsiy (About factorization of analytical matrix functions) *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. 1999. Vol. 118, no. 3. pp. 324–336. [Adukov V.M. Factorization of analytic matrix-valued functions. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1999. Vol. 118, no. 3. pp. 255–263. DOI: 10.1007/BF02557319].
5. Adukov V.M. Faktorizatsiya Vinera–Khopfa kusочно meromorfnykh matrirts-funktsiy (Piece-wise Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions). *Matematicheskii sbornik*. 2009. Vol. 200, no. 8. pp. 3–24. (in Russ.).
6. Gakhov F.D. Kraevaya zadacha Rimana dlya sistemy  $n$  par funktsiy (Riemann boundary value problem for system of  $n$  pairs of functions). *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1952. Vol.7. Issue 4(50). pp. 3–54. (in Russ.).
7. Kostrikin A.I. *Vvedenie v algebru. Chast III*. (Introduction into algebra. Part III). Moscow: Fizmatlit, 2000. 272 p. (in Russ.).
8. Van der Varden B.L. *Algebra*. Saint Petersburg: Lan', 2004. 624 p. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.*

<sup>1</sup> Adukov Victor Mikhailovich is Dr Sc (Physics and Mathematics), Professor, Department of Mathematical Analysis, South Ural State University  
E-mail [victor.m.adukov@gmail.com](mailto:victor.m.adukov@gmail.com)

# ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ПРЯМЫМ СОМНОЖИТЕЛЕМ ПОРЯДКА 3

С.А. Колясников<sup>1</sup>

Получено строение единиц целочисленных групповых колец конечных групп типа  $A \times \mathbb{Z}_3$ , где  $A$  содержит центральную подгруппу порядка 3. В качестве примеров найдены группы единиц целочисленных групповых колец абелевых групп типов (9,3), (9,3,3) и (15,3).

Ключевые слова: абелева группа, групповое кольцо, группа единиц группового кольца.

## 1. Основная теорема

Пусть  $G = A \times \langle b \rangle$  – конечная группа, где  $b$  – элемент порядка 3,  $A$  содержит центральную подгруппу  $\langle a \rangle$  порядка 3. Через  $V(\mathbb{Z}G)$  обозначим нормализованную группу единиц целочисленного группового кольца  $\mathbb{Z}G$ .

Рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$\begin{aligned}\varphi_0: V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto 1; \\ \varphi_1: V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A) \cong V(\mathbb{Z}G/\langle ab \rangle), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto a^2; \\ \varphi_2: V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}A) \cong V(\mathbb{Z}G/\langle a^2b \rangle), \quad x \mapsto x(\forall x \in A), \quad b \mapsto a; \\ \varphi_3: V(\mathbb{Z}G) &\rightarrow V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle), \quad g \mapsto g\langle a \rangle \quad (\forall g \in G).\end{aligned}$$

Зафиксируем полную систему представителей левых смежных классов группы  $A$  по подгруппе  $\langle a \rangle$ , и обозначим это множество через  $H$ . Дополнительно рассмотрим инъективное отображение

$$\sim: \mathbb{Z}G/\langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Z}G, \quad h\langle a \rangle \mapsto h(\forall h \in H).$$

**Теорема 1.**  $V(\mathbb{Z}G) = (\langle b \rangle \times V(\mathbb{Z}A)) \ltimes K$ , где

$$\begin{aligned}K &= \langle v = 1 + \frac{v_1-1}{3}(1 + ab + a^2b^2) + \frac{v_2-1}{3}(1 + a^2b + ab^2) + \frac{v_3-1}{3}(1 + a + a^2) \rangle \cap \mathbb{Z}G, & \varphi_1(v) &= v_1, \\ \varphi_2(v) &= v_2 \in (1 + I(\langle a \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}A), \quad \varphi_3(v) = v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle). & I(\langle a \rangle) &- \text{идеал кольца } \mathbb{Z}A, \\ & \text{порожденный элементами } a-1, \quad a^2-1; & I(\langle b \rangle) &- \text{идеал кольца } \mathbb{Z}G/\langle a \rangle, \\ & \text{порожденный элементами } b-1, \quad b^2-1 \text{ (об идеалах см. [1]).}\end{aligned}$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 статьи [2] мы имеем  $V(\mathbb{Z}G) = (\langle b \rangle \times V(\mathbb{Z}A)) \ltimes K$ , где  $K = (1 + A(\mathbb{Z}A))A(\mathbb{Z}\langle b \rangle) \cap V(\mathbb{Z}G)$ ,  $A(\mathbb{Z}A)A(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$  – идеал, порожденный как аддитивная подгруппа кольца  $\mathbb{Z}G$  элементами  $(x-1)(b-1)$ ,  $(x-1)(b^2-1)$  для любого  $x \in A \setminus \{1\}$ . Поэтому нам осталось показать только то, что  $K$  имеет такой вид как в формулировке теоремы.

Возьмем  $v \in K$  и запишем его в следующем виде

$$\begin{aligned}v &= \left( \sum_{h \in H} \alpha_h h + \sum_{h \in H} \alpha_{ha} ha + \sum_{h \in H} \alpha_{ha^2} ha^2 \right) \cdot 1 + \left( \sum_{h \in H} \beta_h h + \sum_{h \in H} \beta_{ha} ha + \sum_{h \in H} \beta_{ha^2} ha^2 \right) \cdot b + \\ &+ \left( \sum_{h \in H} \gamma_h h + \sum_{h \in H} \gamma_{ha} ha + \sum_{h \in H} \gamma_{ha^2} ha^2 \right) \cdot b^2.\end{aligned}$$

А элементы  $v_1, v_2 \in V(\mathbb{Z}A)$  и  $v_3 \in V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$

$$v_1 = \left( \sum_{h \in H} \lambda_h h + \sum_{h \in H} \lambda_{ha} ha + \sum_{h \in H} \lambda_{ha^2} ha^2 \right),$$

<sup>1</sup> Колясников Сергей Андреевич – старший преподаватель, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: kolyasnikovsa@susu.ac.ru

$$v_2 = \left( \sum_{h \in H} \mu_h h + \sum_{h \in H} \mu_{ha} ha + \sum_{h \in H} \mu_{ha^2} ha^2 \right),$$

$$v_3 = \left( \sum_{h \in H} v_h h \langle a \rangle + \sum_{h \in H} v_{hb} hb \langle a \rangle + \sum_{h \in H} v_{hb^2} hb^2 \langle a \rangle \right).$$

Из условий, что  $\varphi_0(v) = 1$  (т.к.  $v \in K$ ) и если  $\varphi_1(v) = v_1$ ,  $\varphi_2(v) = v_2$ ,  $\varphi_3(v) = v_3$ , мы получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{ha} \\ \alpha_{ha^2} \\ \beta_h \\ \beta_{ha} \\ \beta_{ha^2} \\ \gamma_h \\ \gamma_{ha} \\ \gamma_{ha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_h \\ \lambda_{ha} \\ \lambda_{ha^2} \\ \mu_h \\ \mu_{ha} \\ \mu_{ha^2} \\ v_h \\ v_{hb} \\ v_{hb^2} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_h = \begin{cases} 1, & h = 1; \\ 0, & h \neq 1. \end{cases}$$

Заметим, что сложив три уравнения каждого отображения, мы получим ограничения для  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$

$$\lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h.$$

Отсюда мы имеем, что  $v_1, v_2 \in (1 + I(\langle a \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}A)$ , а  $v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$ .

Далее, решая нашу систему, мы получим единственное решение

$$\begin{aligned} \alpha_h &= (\lambda_h + \mu_h + v_h)/3; & \alpha_{ha} &= (\lambda_{ha} + \mu_{ha} + v_h - \varepsilon_h)/3; & \alpha_{ha^2} &= (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha^2} + v_h - \varepsilon_h)/3; \\ \beta_h &= (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha} + v_{hb})/3; & \beta_{ha} &= (\lambda_h + \mu_{ha^2} + v_{hb} - \varepsilon_h)/3; & \beta_{ha^2} &= (\lambda_{ha} + \mu_h + v_{hb} - \varepsilon_h)/3; \\ \gamma_h &= (\lambda_{ha} + \mu_{ha^2} + v_{hb^2})/3; & \gamma_{ha} &= (\lambda_{ha^2} + \mu_h + v_{hb^2} - \varepsilon_h)/3; & \gamma_{ha^2} &= (\lambda_h + \mu_{ha} + v_{hb^2} - \varepsilon_h)/3. \end{aligned}$$

Затем, подставив эти значения в  $v$  и сгруппировав соответствующие коэффициенты, легко увидеть, что получится

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + ab + a^2b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^2b + ab^2) + \frac{v_3 - 1}{3}(1 + a + a^2). \quad (1)$$

Введем дополнительное отображение  $\varphi: K \rightarrow V(\mathbb{Z}A) \times V(\mathbb{Z}A) \times V(\mathbb{Z}G/\langle a \rangle)$ , действующее по правилу

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)).$$

Это отображение является инъективным гомоморфизмом.

Действительно, так как

$$\varphi(vw) = (\varphi_1(vw), \varphi_2(vw), \varphi_3(vw)) = (\varphi_1(v)\varphi_1(w), \varphi_2(v)\varphi_2(w), \varphi_3(v)\varphi_3(w)).$$

И в силу того, что

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2)^2 &= 3(1 + a + a^2), \\ (1 + ab + a^2b^2)^2 &= 3(1 + ab + a^2b^2), \\ (1 + a^2b + ab^2)^2 &= 3(1 + a^2b + ab^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+a+a^2)(1+b+b^2) &= (1+b+b^2)(1+a+a^2) = \\ &= (1+a^2b+ab^2)(1+ab+a^2b^2) = (1+ab+a^2b^2)(1+a^2b+ab^2) = \\ &= (1+a+a^2)(1+ab+a^2b^2) = (1+ab+a^2b^2)(1+a+a^2) = \\ &= (1+a^2b+ab^2)(1+a+a^2) = (1+a+a^2)(1+a^2b+ab^2). \end{aligned}$$

И так как,  $w_1 - 1, w_2 - 1 \in I(\langle a \rangle)$ , а  $w_2 - 1 \in I(\langle b \rangle)$ ,

$$\begin{aligned} (w_1 - 1)(1+a+a^2) &= (w_2 - 1)(1+a+a^2) = (\tilde{w}_3 - 1)(1+b+b^2) = 0. \\ vw &= \left(1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{v}_3 - 1}{3}(1+a+a^2)\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2)\right) = \\ &= 1 + \frac{v_1 w_1 - 1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \frac{v_2 w_2 - 1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \frac{\tilde{v}_3 \tilde{w}_3 - 1}{3}(1+a+a^2). \end{aligned}$$

Вообще говоря,  $\widetilde{v_3 w_3} \neq \tilde{v}_3 \tilde{w}_3$ , но зато легко видеть, что  $\widetilde{v_3 w_3}(1+a+a^2) = \tilde{v}_3 \tilde{w}_3(1+a+a^2)$ .

Таким образом, мы показали, что отображение  $\varphi$  определено корректно и является гомоморфизмом. А инъективность следует из (1), как единственного решения системы. Теорема доказана.

В следующих разделах мы приведем примеры использования этой теоремы для некоторых абелевых групп.

## 2. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3)

Пусть  $G = \langle a \mid a^9 = 1 \rangle \times \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$ . Описание группы единиц  $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$  известно из работы [3]. Для удобства вычислений возьмем базис как в работе [2].

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times F, \quad F = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - (a + a^8) + (a^2 + a^7), \quad u_1^{-1} = -1 - (a + a^8) + (a^3 + a^6) + (a^4 + a^5), \\ u_2 &= 1 - (a^2 + a^7) + (a^4 + a^5), \quad u_2^{-1} = -1 - (a^2 + a^7) + (a^3 + a^6) + (a + a^8). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 мы имеем

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times K,$$

где для любого  $v \in K$

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + a^3b + a^6b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^6b + a^3b^2),$$

$v_1, v_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ , и так как  $V(\mathbb{Z}G / \langle a^3 \rangle)$  – тривиальная группа (см. [3])  $\varphi_3(v) = 1$ .

Если  $\sum_{i=0}^8 \lambda_i a^i, \sum_{i=0}^8 \mu_i a^i$ , то

$$\begin{aligned} v &= 1/3 \left( (1 + \lambda_0 + \mu_0) \cdot 1 + (\lambda_1 + \mu_1) \cdot a + (\lambda_2 + \mu_2) \cdot a^2 + (\lambda_3 + \mu_3) \cdot a^3 + (\lambda_4 + \mu_4) \cdot a^4 + \right. \\ &+ (\lambda_5 + \mu_5) \cdot a^5 + (\lambda_6 + \mu_6) \cdot a^6 + (\lambda_7 + \mu_7) \cdot a^7 + (\lambda_8 + \mu_8) \cdot a^8 + (\lambda_6 + \mu_3) \cdot b + (\lambda_7 + \mu_4) \cdot ab + \\ &+ (\lambda_8 + \mu_5) \cdot a^2b + (\lambda_0 + \mu_6 - 1) \cdot a^3b + (\lambda_1 + \mu_7) \cdot a^4b + (\lambda_2 + \mu_8) \cdot a^5b + (\lambda_3 + \mu_0 - 1) \cdot a^6b + \\ &+ (\lambda_4 + \mu_1) \cdot a^7b + (\lambda_5 + \mu_2) \cdot a^8b + (\lambda_3 + \mu_6) \cdot b^2 + (\lambda_4 + \mu_7) \cdot ab^2 + (\lambda_5 + \mu_8) \cdot a^2b^2 + \\ &+ (\lambda_6 + \mu_0 - 1) \cdot a^3b^2 + (\lambda_7 + \mu_1) \cdot a^4b^2 + (\lambda_8 + \mu_2) \cdot a^5b^2 + (\lambda_0 + \mu_3 - 1) \cdot a^6b^2 + \\ &\left. + (\lambda_1 + \mu_4) \cdot a^7b^2 + (\lambda_2 + \mu_5) \cdot a^8b^2 \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Далее заметим, что  $u_1, u_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle))$ , так как

$$u_1 = 1 - a^2(a^6 - 1) + a(a^6 - 1), \quad u_2 = 1 - a(a^6 - 1) + a(a^3 - 1) + a^2(a^3 - 1).$$

Поэтому рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: K \rightarrow F \times F$ , действующий по правилу  $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v))$ .

Составим таблицу произведений элементов  $u_1, u_2$

Таблица 1

|              | Коэффициенты при |         |           |           |           |
|--------------|------------------|---------|-----------|-----------|-----------|
|              | 1                | $a+a^8$ | $a^2+a^7$ | $a^3+a^6$ | $a^4+a^5$ |
| $u_1$        | 1                | -1      | 1         | 0         | 0         |
| $u_1^2$      | 5                | -4      | 3         | -2        | 1         |
| $u_1^3$      | 19               | -18     | 15        | -9        | 3         |
| $u_2$        | 1                | 0       | -1        | 0         | 1         |
| $u_2^2$      | 5                | 1       | -4        | -2        | 3         |
| $u_2^3$      | 19               | 3       | -18       | -9        | 15        |
| $u_1u_2$     | -1               | 0       | 1         | 1         | -1        |
| $u_1u_2^2$   | -5               | -1      | 5         | 3         | -4        |
| $u_1^2u_2$   | 1                | 1       | -2        | 0         | -1        |
| $u_1^2u_2^2$ | 7                | 1       | -6        | -3        | 5         |

Из табл. 1 с помощью (2) видно, что

$$(u_1^2, 1), (u_2^3, 1), (1, u_1^3), (1, u_2^3) \in \varphi(K),$$

и для  $0 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq 2$   $(u_1^{i_1}u_2^{j_1}, u_1^{i_2}u_2^{j_2}) \in \varphi(K)$  тогда и только тогда, когда

$$i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 2, j_2 = 1 \text{ или } i_1 = 2, i_2 = 1, j_1 = 1, j_2 = 2.$$

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

**Теорема 2.**  $\varphi(K) = \langle (u_1u_2^2, u_1^2u_2) \rangle \times \langle (u_2^3, 1) \rangle \times \langle (1, u_1^3) \rangle \times \langle (1, u_2^3) \rangle$ .  $F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

Таким образом, мы уже можем записать и порождающие группы  $V(\mathbb{Z}G)$ , но в следующей теореме, решив вопрос об индексе подгруппы Милнора (см. [1, стр. 45]), мы выберем более удобный базис.

**Теорема 3.** Пусть  $W(G)$  – подгруппа Милнора, тогда  $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$ ,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - (a + a^8) + (a^2 + a^7), & u_2 &= 1 - (a^2 + a^7) + (a^4 + a^5), \\ u_3 &= 1 - (ab + a^8b^2) + (a^2b^2 + a^7b), & u_4 &= 1 - (a^2b^2 + a^7b) + (a^4b + a^5b^2), \\ u_5 &= 1 - (ab^2 + a^8b) + (a^2b + a^7b^2), & u_6 &= 1 - (a^2b + a^7b^2) + (a^4b^2 + a^5b). \end{aligned}$$

**Доказательство.** По определению  $W(G)$  подгруппа группы  $V(\mathbb{Z}G)$ , порожденная подгруппами  $V(\mathbb{Z}C)$ , когда  $C$  пробегает все циклические подгруппы группы  $G$ . Перечислим все  $V(\mathbb{Z}C)$  для нашей группы.

$$V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle, V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, V(\mathbb{Z}\langle a^3b \rangle) = \langle a^3b \rangle, V(\mathbb{Z}\langle a^6b \rangle) = \langle a^6b \rangle,$$

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle, V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle, V(\mathbb{Z}\langle ab^2 \rangle) = \langle ab^2 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle.$$

Утверждение следует из теоремы 2 и из того, что

$$\begin{aligned} \varphi(u_1u_2u_5^{-1}u_6^{-1}) &= (u_1u_2^2, u_1^2u_2), & \varphi(u_2u_3u_5^{-1}u_6^{-1}) &= (u_2^3, 1), \\ \varphi(u_1u_4u_5^{-1}u_6^{-1}) &= (1, u_1^3), & \varphi(u_2u_3^{-1}u_4^{-1}u_5) &= (1, u_2^3). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### 3. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3,3)

Пусть  $G = \langle a | a^9 = 1 \rangle \times \langle b | b^3 = 1 \rangle \times \langle c | c^3 = 1 \rangle$ . Через  $A$  обозначим подгруппу  $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Описание группы единиц  $V(\mathbb{Z}A)$  возьмем из теоремы 3.

$$V(\mathbb{Z}A) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times F, F = \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_6 \rangle.$$



Согласно теореме 1 мы имеем  $V(\mathbb{Z}A) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_6 \rangle \times K$ ,  
где для любого  $v \in K$

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + a^3b + a^6b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^6b + a^3b^2),$$

$u_1, v_2 \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ , и так как  $V(\mathbb{Z}G/\langle a^3 \rangle)$  – тривиальная группа (см. [3])  $\varphi_3(v) = 1$ .

Далее заметим, что  $u_i \in (1 + I(\langle a^3 \rangle)), i = 1, \dots, 6$ . Поэтому рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: K \rightarrow F \times F$ , действующий по правилу  $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v))$ .

Из теоремы 2, так как  $(ab^i)^3 = a^3$ ,  $i = 0, 1, 2$ , следует что  $(u_i^3, 1), (1, u_i^3) \in \varphi(K)$ . Так же

$$(u_1^{i_1} u_2^{j_2}, u_1^{i_1} u_2^{j_2}), (u_3^{i_3} u_4^{j_4}, u_3^{i_3} u_4^{j_4}), (u_5^{i_5} u_6^{j_6}, u_5^{i_5} u_6^{j_6}) \in \varphi(K), i_l, j_l = 0, 1, 2$$

тогда и только тогда, когда

$$i_1 = i_3 = i_5 = 1, i_2 = i_4 = i_6 = 2, j_1 = j_3 = j_5 = 2, j_2 = j_4 = j_6 = 1$$

или

$$i_1 = i_3 = i_5 = 2, i_2 = i_4 = i_6 = 1, j_1 = j_3 = j_5 = 1, j_2 = j_4 = j_6 = 2.$$

Затем в пакете GAP (см. [4]) было проверено, что

$$(u_2^{i_2} u_4^{j_4} u_6^{k_6}, u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{l_3} u_4^{m_4} u_5^{n_5} u_6^{o_6}) \notin \varphi(K), i_l, j_l = 0, 1, 2.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

**Теорема 4.**  $K = \langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_{12} \rangle$ , где

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= (u_1 u_2^2, u_1^2 u_2), & \varphi(w_2) &= (u_3 u_4^2, u_3^2 u_4), & \varphi(w_3) &= (u_5 u_6^2, u_5^2 u_6), \\ \varphi(w_4) &= (u_2^3, 1), & \varphi(w_5) &= (u_4^3, 1), & \varphi(w_6) &= (u_6^3, 1), \\ \varphi(w_7) &= (1, u_1^3), & \varphi(w_8) &= (1, u_2^3), & \varphi(w_9) &= (1, u_3^3), \\ \varphi(w_{10}) &= (1, u_4^3), & \varphi(w_{11}) &= (1, u_5^3), & \varphi(w_{12}) &= (1, u_6^3). \end{aligned}$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Так же, как и в предыдущем разделе, решается вопрос об индексе подгруппы Милнора.

**Теорема 5.** Пусть  $W(G)$  – подгруппа Милнора, тогда  $|V(\mathbb{Z}G):W(G)| = 1$ .

#### 4. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (15,3)

Пусть  $G = \langle a | a^{15} = 1 \rangle \times \langle b | b^3 = 1 \rangle$ . Описание группы единиц  $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$  было получено в работе [2]. Для удобства вычислений возьмем другой базис.

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times F, F = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + (a^3 + a^{12}), & u_0^{-1} &= -1 + (a^6 + a^9), \\ u_1^{-1} &= -3 - 3(a + a^{14}) - 2(a^2 + a^{13}) - (a^3 + a^{12}) + 2(a^5 + a^{10}) + 3(a^6 + a^9) + 3(a^7 + a^8), \\ u_2 &= 3 - 2(a^2 + a^{13}) + (a^3 + a^{12}) + 2(a^4 + a^{11}) - (a^5 + a^{10}) - 2(a^6 + a^9) + (a^7 + a^8), \\ u_2^{-1} &= -3 + 3(a + a^{14}) - 3(a^2 + a^{13}) + 3(a^3 + a^{12}) - 2(a^4 + a^{11}) + 2(a^5 + a^{10}) - (a^6 + a^9), \\ u_3 &= 3 + (a + a^{14}) - 2(a^3 + a^{12}) - 2(a^4 + a^{11}) - (a^5 + a^{10}) + (a^6 + a^9) + 2(a^7 + a^8), \\ u_3^{-1} &= 3 + 3(a^2 + a^{13}) - (a^3 + a^{12}) - 3(a^4 + a^{11}) + 2(a^5 + a^{10}) + 3(a^6 + a^9) - 2(a^7 + a^8). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 мы имеем  $V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times K$ , где для любого  $v \in K$

$$v = 1 + \frac{v_1 - 1}{3}(1 + a^5b + a^{10}b^2) + \frac{v_2 - 1}{3}(1 + a^{10}b + a^5b^2) + \frac{\tilde{v}_3 - 1}{3}(1 + a^5 + a^{10}),$$

$u_1, v_2 \in (1 + I(\langle a^5 \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$ , а  $v_3 \in (1 + I(\langle b \rangle)) \cap V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle)$ .

Обозначим через  $\psi$  изоморфизм групп  $V(\mathbb{Z}\langle a \rangle)$  и  $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5 \rangle)$ , действующий по правилу  $\psi: a \rightarrow ab\langle a^5 \rangle$ . Тогда  $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5 \rangle) = \langle ab\langle a^5 \rangle \rangle \times \langle u'_0 \rangle \times F'$ ,  $F' = \langle u'_1 \rangle \times \langle u'_2 \rangle \times \langle u'_3 \rangle$ , где  $u'_i = \psi(u_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Далее заметим, что  $u_1, u_2, u_3 \in (1 + I(\langle a^5 \rangle))$ , а  $u'_1, u'_2, u'_3 \in (1 + I(\langle b \rangle))$  так как

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + (a^4 + a - 1)(a^5 - 1) - (2a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + 1)(a^{10} - 1), \\ u_2 &= 1 - (2a^4 - a^3 - a^2 + 2a + 1)(a^5 - 1) - (2a^3 - a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1), \\ u_3 &= 1 + (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a - 1)(a^5 - 1) - (a^4 - 2a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1), \\ u'_1 &= \langle a^5 \rangle + (a^4 \langle a^5 \rangle + 2a^3 \langle a^5 \rangle - 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b - 1) - \\ &\quad - (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle - a \langle a^5 \rangle + \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1), \\ u'_2 &= \langle a^5 \rangle + (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^3 \langle a^5 \rangle + a^2 \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b - 1) + \\ &\quad + (a^3 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle + 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1), \\ u'_3 &= \langle a^5 \rangle + (2a^4 \langle a^5 \rangle - 2a^2 \langle a^5 \rangle - a \langle a^5 \rangle + \langle a^5 \rangle)(b - 1) + \\ &\quad + (a^4 \langle a^5 \rangle + 2a^3 \langle a^5 \rangle - 2a \langle a^5 \rangle - \langle a^5 \rangle)(b^2 - 1). \end{aligned}$$

Причем  $u_0 \notin (1 + I(\langle a^5 \rangle))$ , а  $u'_0 \notin (1 + I(\langle b \rangle))$ .

Поэтому рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: K \rightarrow F \times F \times F'$ , действующий по правилу

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)).$$

Аналогично, как в примере для группы  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ , мы имеем здесь, что

$$(u_i^3, 1, 1), (1, u_i^3, 1), (1, 1, u_i^3) \in \varphi(K), i = 1, 2, 3.$$

Далее с помощью GAP (см. [4]) было проверено, что

$$(u_1^{i_1} u_2^{j_2} u_3^{k_3}, u_1^{j_1} u_2^{j_2} u_3^{j_3}, u_1^{k_1} u_2^{k_2} u_3^{k_3}) \in \varphi(K), \quad i_\ell, j_\ell, k_\ell = 0, 1, 2 (\ell = 1, 2, 3).$$

тогда и только тогда, когда показатели степеней соответствуют значениям из табл. 2.

Таблица 2

| $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 2     | 0     | 2     |
| 0     | 0     | 0     | 2     | 0     | 2     | 1     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2     | 1     | 0     | 2     |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 1     | 2     | 0     | 1     | 2     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 2     | 0     | 0     | 1     | 2     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 2     | 1     | 0     | 2     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 2     | 2     | 0     | 0     | 0     | 0     | 2     |

| $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 1     | 0     | 0     | 2     | 0     | 2     | 1     | 2     | 0     | 2     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 2     | 1     |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 2     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 2     | 0     |
| 0     | 1     | 0     | 2     | 2     | 2     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2     | 0     | 2     | 1     | 2     | 2     | 2     | 2     |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 2     | 2     | 0     | 1     | 1     | 0     | 2     | 1     | 0     | 1     | 2     | 2     | 2     | 0     |
| 0     | 1     | 1     | 1     | 2     | 0     | 2     | 1     | 0     | 0     | 2     | 1     | 1     | 1     | 0     | 1     | 2     | 2     |
| 0     | 1     | 1     | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     | 2     | 0     | 2     | 1     | 2     | 1     | 1     | 0     | 2     | 1     |
| 0     | 1     | 2     | 0     | 2     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 2     | 2     | 0     | 1     | 1     | 0     | 2     | 2     |
| 0     | 1     | 2     | 1     | 2     | 2     | 0     | 1     | 2     | 0     | 2     | 2     | 1     | 1     | 2     | 2     | 2     | 1     |
| 0     | 1     | 2     | 2     | 2     | 0     | 2     | 1     | 1     | 0     | 2     | 2     | 2     | 1     | 0     | 1     | 2     | 0     |
| 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 2     | 1     | 0     | 1     | 2     |
| 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 2     | 0     | 0     | 2     | 1     | 1     | 0     | 1     | 2     | 2     | 2     | 1     | 1     |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 |

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

**Теорема 6.**  $K = \langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_9 \rangle$ , где

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= (u_1, u_3, u'_1), & \varphi(w_2) &= (u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2), & \varphi(w_3) &= (u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2), \\ \varphi(w_4) &= (1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2), & \varphi(w_5) &= (1, u_2^3, 1), & \varphi(w_6) &= (1, u_3^3, 1), \\ \varphi(w_7) &= (1, 1, u_1^3), & \varphi(w_8) &= (1, 1, u_2^3), & \varphi(w_9) &= (1, 1, u_3^3), \end{aligned}$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Так же, как и в предыдущих примерах, решим вопрос об индексе подгруппы Милнора и выберем более удобный базис.

**Теорема 7.** Пусть  $W(G)$  – подгруппа Милнора, тогда  $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$ ,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \dots \times \langle u_{12} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 + (a^3 + a^{12}), \quad u(x) = 3 - 2(x + x^{14}) + 2(x^2 + x^{13}) - 2(x^3 + x^{12}) + (x^4 + x^{11}) - (x^5 + x^{10}) + (x^6 + x^9), \\ u_1 &= u(a), \quad u_2 = u(a^2), \quad u_3 = u(a^2), \quad u_4 = u(ab), \quad u_5 = u(a^2 b^2), \quad u_6 = u(a^4 b), \quad u_7 = u(a^2 b), \\ u_8 &= u(a^4 b^2), \quad u_9 = u(a^8 b), \quad u_{10} = u(a^3 b), \quad u_{11} = u(a^6 b^2), \quad u_{12} = u(a^{12} b). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Перечислим все  $V(\mathbb{Z}C)$ , порождающие  $W(G)$ , когда  $C$  пробегает все циклические подгруппы группы  $G$ .

$$\begin{aligned} V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle) &= \langle a^5 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^5 b \rangle) = \langle a^5 b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^{10} b \rangle) = \langle a^{10} b \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle \times \langle u_0 \rangle, \\ V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) &= \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle, \\ V(\mathbb{Z}\langle a^2 b \rangle) &= \langle a^2 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_7 \rangle \times \langle u_8 \rangle \times \langle u_9 \rangle, \quad V(\mathbb{Z}\langle a^3 b \rangle) = \langle a^3 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_{10} \rangle \times \langle u_{11} \rangle \times \langle u_{12} \rangle. \end{aligned}$$

Утверждение следует из теоремы 6 и из того, что

$$\begin{aligned} \varphi(u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (u_1, u_3, u'_1), & \varphi(u_1^{-1} u_2 u_3^{-1} u_4 u_6 u_7^{-1}) &= (u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2), \\ \varphi(u_1^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2), & \varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_7^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) &= (1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2), \end{aligned}$$

$$\varphi(u_2 u_4 u_6 u_9 u_{12}) = (1, u_2^3, 1),$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_4 u_8 u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) = (1, 1, u_1^3)$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_6 u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{11}) = (1, 1, u_3^3).$$

$$\varphi(u_3 u_4^{-1} u_6^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) = (1, u_3^3, 1),$$

$$\varphi(u_1 u_3 u_5 u_9 u_{10}) = (1, 1, u_2^3),$$

Теорема доказана.

## Литература

1. Бовди, А.А. Мультипликативная группа целочисленного группового кольца / А.А. Бовди. – Ужгород: Ужг.гос.ун., 1987. – 210 с. (Деп. УкрНИИТИ 24.09.87, №2712–Ук87).
2. Колясников, С.А. О группе единиц целочисленного группового кольца конечных групп разложимых в прямое произведение / С.А. Колясников. – Новосибирск, Ред. Сиб. мат. журн., 2000. – 45 с. (Деп. В ВИНТИ 30.03.00, №860–В00).
3. Алеев, Р.Ж. Единицы циклических групп порядков 7 и 9 / Р.Ж. Алеев, Г.А. Панина // Известия вузов, Математика. – 1999. – № 11(450). – С. 81–84.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

## UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE GROUPS WITH A DIRECT MULTIPLIER OF ORDER 3

S.A. Kolyasnikov<sup>1</sup>

The description of units of integral group rings of finite groups of type  $A \times Z_3$  was obtained, where  $A$  contains a central subgroup of order 3. For example, the unit groups of integral group rings of Abelian groups of the types  $(9,3)$ ,  $(9,3,3)$  and  $(15,3)$  were found.

*Keywords:* Abelian group, group ring, unit group of group ring.

## References

1. Bovdi A.A. *Mul'tiplykativnaya gruppya tselochislennogo gruppovogo kol'tsa* (Multiplicative group of integral group ring). Uzhgorod: Uzhgorodskiy gosudarstvennyy universitet, 1987. 210 p. (in Russ.).
2. Kolyasnikov S.A. *O gruppe edinit tselochislennogo gruppovogo kol'tsa konechnykh grupp razlozhimyykh v pryamoe proizvedenie* (About group of units of integral group ring of finite groups factorable into direct composition). Novosibirsk, Red. Sibirskogo Matematicheskogo Zhurnala, 2000. 45 p. (in Russ.).
3. Alev R.Zh., Panina G.A. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 1999. Vol. 43, no. 11. pp. 80–83.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik. Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.

<sup>1</sup> Kolyasnikov Sergey Andreevich is Senior Lecturer, General Mathematics Department, South Ural State University  
E-mail: kolyasnikovsa@susu.ac.ru

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ САМОВОСПЛАМЕНЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦ ЖЕЛЕЗА

В.В. Лещевич<sup>1</sup>, О.Г. Пенязьков<sup>2</sup>, Ж.-К. Ростен<sup>3</sup>, А.В. Федоров<sup>4</sup>, А.В. Шульгин<sup>5</sup>

Представлены экспериментальные и численные исследования самовоспламенения и горения микрочастиц железа в кислороде. Параметры высокотемпературной газовой среды были созданы при помощи установки быстрого сжатия. Изучались порошки с размерами частиц от 1 до 125 мкм при давлении кислорода от 0,5 до 28 МПа и температуре от 500 до 1100 К. Время задержки воспламенения измерялось с помощью регистрации излучения с боковой стенки камеры сгорания и измерения давления на торцевой стенке. Критические условия самовоспламенения микрочастиц железа определяются в зависимости от размера частиц, температуры и давления кислорода. Для описания механизмов воспламенения предложена точечная полуэмпирическая математическая модель, позволившая удовлетворительно описать экспериментальные данные по зависимости времени задержки воспламенения насыпки частиц железа от температуры окружающей среды с учетом зависимости предельных температур воспламенения от давления.

*Ключевые слова:* микрочастицы железа, кислород, установка быстрого сжатия, время задержки воспламенения, математическое моделирование.

## Введение

Мелкодисперсные частицы металлов нашли широкое применение в различных областях промышленности. В настоящее время металлические порошки используются в качестве каталитических добавок, улучшающих эффективность сгорания обычных топлив и подавляющих образование вредных веществ в энергетических установках [1–3]. Кроме того, процесс сжигания металлических частиц рассматривается как возможный способ синтеза ультрадисперсных порошков оксидов металлов [4]. Изучение воспламенения и горения металлов представляет собой комплексную научную задачу, включающую различные аспекты неравновесных фазовых превращений и химических реакций. Эти механизмы отличаются большим разнообразием вследствие различий в физико-химических характеристиках исходных веществ. Многочисленные работы были посвящены исследованию взрывных характеристик взвешенной в среде окислителя металлической пыли [5–7]. В камере постоянного объема осуществлялось воспламенение облака пыли с помощью мощных искровых инициаторов, а также на ударных трубах, в которых пылевая взвесь создавалась при прохождении падающей ударной волны, а воспламенение происходило за отраженной волной. Информация, имеющаяся в этой области, ограничена в основном формальными кинетическими данными по скоростям горения. Другой немаловажной задачей является изучение воспламенения и горения частиц, свободнолежащих в виде тонкого слоя в среде нагретого окислителя. Локальное самовоспламенение может быстро распространиться и вызвать медленное тлеющее горение всего слоя. Моделирование данного процесса – это физико-химическая задача, объединяющая как кинетические процессы окисления отдельных частиц, так и процессы теплообмена в системах «частица–частица» и «частица–газ». Поэтому для построения и проверки адекватности таких моделей необходимы исходные данные, в частности, критические параметры газовой среды, при которых происходит самовоспламенение, их зависимость от материала и раз-

<sup>1</sup> Лещевич Владимир Владимирович – младший научный сотрудник, Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси

<sup>2</sup> Пенязьков Олег Глебович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, директор, Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси

<sup>3</sup> Ростен Жан-Кристоф – Центр исследований КО Дером, Франция

<sup>4</sup> Федоров Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук

<sup>5</sup> Шульгин Алексей Валентинович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: shulgin@itam.nsc.ru

мера частиц. Как известно, проведение экспериментальных исследований в широких диапазонах начальных параметров системы зачастую представляется экономически затратным. Поэтому представляет интерес построение математических моделей, позволяющих дать прогноз поведения соответствующих засыпок металла в установку быстрого сжатия (УБС). В [8, 9] представлена физико-химическая математическая модель для описания явления самовоспламенения в рамках точечного подхода, описывающая некоторые критические параметры рассматриваемой системы.

В настоящей работе экспериментально исследованы критические условия и время самовоспламенения микрочастиц железа в кислороде, получены данные о температуре, развивающейся при горении. Для описания данного явления модифицирована полуэмпирическая точечная модель, позволяющая описать тепловую историю системы частиц, подвергающуюся воздействию в устройстве быстрого сжатия.

## Экспериментальная установка

Для создания нагретой окислительной среды с температурой 500–1100 К и давлением 0,5–28 МПа использовалась УБС, цилиндр сжатия которой схематично изображен на рис. 1. В тестовую камеру вмонтированы высокотемпературный пьезоэлектрический датчик давления Kistler 6031U18 (4), соединенный с усилителем заряда Kistler 5015A (11), клапан для вакуумирования и напуска кислорода (5) и кварцевое окно (6). Для регистрации светового излучения использовались два фотоэлектронных умножителя (ФЭУ), соединенные с окном при помощи сдвоенного оптоволоконного кабеля. Перед фотокатодом одного из ФЭУ был установлен нейтральный светофильтр (оптическая плотность  $D = 3,74$ ). Это позволило одновременно регистрировать слабое свечение при локальном самовоспламенении с помощью ФЭУ без фильтра и свечение всего горящего порошка с помощью ФЭУ с фильтром. Для регистрации положения поршня в ходе такта сжатия, т. е. значения текущего объема, использовался оптический датчик отражения, реагирующий на отметки, нанесенные на штоке через каждые 5 мм. Все сигналы записывались на цифровой осциллограф с временным разрешением 0,8 мкс. Температура сжатого кислорода рассчитывалась по уравнению адиабатического сжатия с учетом измеренного увеличения давления, начальной температуры и полиномиальной зависимости теплоемкости от температуры.

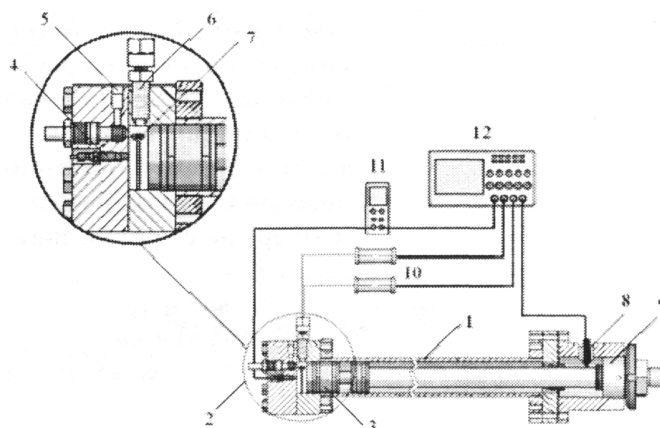


Рис. 1. Принципиальная схема измерений: 1 – цилиндр сжатия, 2 – тестовая камера, 3 – сжимающий поршень, 4 – датчик давления, 5 – клапан, 6 – кварцевое окно, 7 – керамическая чашка с образцом металлического порошка, 8 – оптический датчик отражения, 9 – конический фиксатор поршня в конечном положении, 10 – фотоумножители (или спектрометр и пирометр), 11 – усилитель заряда, 12 – цифровой осциллограф

Результаты гранулометрического анализа порошков железа

Таблица 1

| Порошок  | Диапазон размеров (min–max), мкм | Основная фракция   |               | Средний размер                           |               |
|--|----------------------------------|--|---------------|--|---------------|
|  |                                  | по количеству частиц (горизонтальная / вертикальная проекция), мкм | по массе, мкм | по количеству частиц (длина/ширина), мкм | по массе, мкм |
| Мелкодисперсные порошки железа                           | 0,2–9,2                          | 1–3/1–3  | 2–4           | 2,59/2,16                                | 3,4           |
|  | 0,2–16,4                         | 1–5/1–3  | 4–5           | 4,01/3,08                                | 4,7           |
| Порошки, разделенные с помощью сит с размером ячеек, мкм | 9,0–98,1                         | 20–40/30–40  | 30–60         | 42,92/30,56                              | 43,8          |
|  | 6,7–180,3                        | 60–90/70–90  | 70–90         | 82,76/59,01                              | 80,6          |
|  | 32,8–268,1                       | 110–140/100–110  | 130–160       | 155,48/114,8                             | 140,2         |

Изучались два мелкодисперсных порошка железа, основная фракция которых состояла из частиц размером 1–3 и 1–5 мкм соответственно. Кроме того, в работе были использованы порошки, разделенные с помощью сит с размерами ячеек 45, 56, 63, 80 и 125 мкм. Для уточнения диапазона размеров частиц в полученных порошках и определения размеров основной фракции проведен гранулометрический анализ с помощью сертифицированного сканера изображения «Mini-Magiscan». Результаты анализа приведены в табл. 1. Порошки помещались в керамическую чашку 7, установленную в тестовую камеру. Масса образца во всех экспериментах была 0,05 г.

### Результаты

В ходе экспериментов были определены критические условия самовоспламенения микропорошков железа (рис. 2). Параметры газовой фазы, при которых наблюдалось самовоспламенение частиц железа, нанесены зачерненными символами, незачерненными отмечены условия, при которых воспламенение не было зарегистрировано. Для наглядности точки, соответствующие минимальным (критическим) параметрам самовоспламенения, соединены линиями. Установлено, что порошок железа, состоящий из частиц размером до сотен микрометров, способен легко самовоспламениться в кислородной среде с температурой ниже температуры плавления железа, причем самовоспламенение порошка микрочастиц железа сильно зависит как от давления, так и от температуры кислорода. Характер этой зависимости существенно изменяется с уменьшением размера частиц. Так, порошок, состоящий из частиц размером 1–3 мкм, воспламеняется при температуре кислорода ниже 620 К и давлении выше 10 МПа.

Зависимость предельного давления кислорода  $P_{lim}$  от предельной температуры кислорода  $T_{lim}$  в плоскости  $(T, P)$  определяет границу области воспламенения. Эта зависимость может быть аппроксимирована выражением вида

$$T_{lim} = c \exp\left(-\frac{d}{P_{lim}}\right). \quad (1)$$

Значения  $c$  и  $d$ , полученные в результате аппроксимации экспериментальных данных, приведены в табл. 2, а соответствующие кривые – на рис. 2. Для частиц 20–40 мкм аппроксимация разбита на два интервала по предельным давлению и температуре в виду того, что она имеет два участка: один со слабым изменением предельного давления от температуры, второй – с резким.

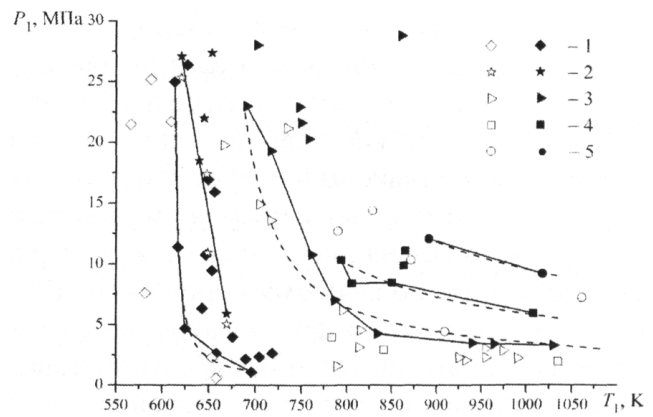


Рис. 2. Давление и температура кислорода при наличии (зачерненные символы) и отсутствии (незачерненные символы) самовоспламенения порошков железа. Размеры частиц основной фракции: 1 – 1–3 мкм; 2 – 1–5; 3 – 20–40; 4 – 60–90; 5 – 100–140. Штриховые линии — аппроксимации по формуле (1)

Таблица 2

Значения параметров  $c$  и  $d$  для аппроксимации (1)

| Радиус частиц, мкм | $c$                         | $d$                         |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1–3                | 610,3383651                 | –0,1390938854               |
| 20–40              | 651,1730614,                | –1,427623342,               |
|                    | 690 < T ≤ 835, 4 < P ≤ 30   | 690 < T ≤ 835, 4 < P ≤ 30   |
|                    | 471,7423449,                | –2,429618523,               |
|                    | 835 < T ≤ 1030, 3,1 ≤ P ≤ 4 | 835 < T ≤ 1030, 3,1 ≤ P ≤ 4 |
| 60–90              | 582,9068176                 | –3,157251589                |
| 100–140            | 577,7477786                 | –5,233353630                |

Кроме информации, касающейся условий самовоспламенения частиц железа в окислительной среде, для ряда практических приложений необходимы данные о характерных временах таких процессов. Воспламенение порошка, состоящего из частиц различного размера, представляет

собой случайный процесс. Как обнаружено, мелкие частицы способны воспламеняться при более низких температурах и давлениях кислорода, поэтому следует ожидать, что первыми будут воспламеняться самые мелкие частицы в порошке. Возможность и время воспламенения всего порошка будут зависеть от количества этих более мелких частиц, а также от условий теплоотвода из зоны реакции. Так как условия теплоотвода в камере сгорания установки быстрого сжатия всегда примерно одинаковы, следует ожидать повторяемости времени воспламенения порошка и, как следствие, возможности получения зависимости длительности индукционного периода от температуры и давления кислорода. Для проверки этого предположения были собраны экспериментальные данные по каждому порошку железа примерно для одинаковых давлений кислорода. Путем обработки сигнала фотоэлектронного умножителя, с установленным перед фотокатодом нейтральным фильтром, были измерены интервалы времени от окончания такта сжатия до появления свечения определенной интенсивности в камере. Результаты данных измерений представлены на рис. 3 в виде зависимости логарифма измеренного времени задержки самовоспламенения от обратной температуры кислорода. Как и ожидалось, время воспламенения сильно зависит

от размера частиц в порошке, а также от температуры и давления кислорода.

Сплошными линиями на рис. 3 представлены линейные аппроксимации результатов измерений для порошков 20–40 и 1–3 мкм, полученных для различных диапазонов давлений кислорода. Поскольку угол наклона линий для каждого порошка примерно одинаков, влияние давления кислорода на время воспламенения порошка железа можно найти с помощью сдвига линии вдоль оси температур на определенную величину. В качестве примера на рис. 3 приведены штриховые линии для промежуточных значений давления 13,9 МПа (порошок 20–40 мкм) и 5,625 МПа (порошок 1–3 мкм), которые получены линейной интерполяцией по соответствующим крайним значениям температуры и давления. Такой подход позволяет грубо прогнозировать время воспламенения порошка для других начальных условий.

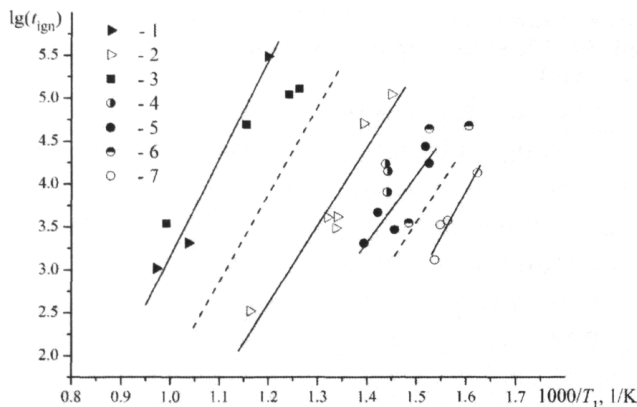


Рис. 3. Зависимость времени самовоспламенения порошков железа от температуры и давления кислорода. Точки – экспериментальные данные для порошков: 1 – 20–40 мкм при давлении 3,2–4,2 МПа; 2 – 20–40 мкм при 19,4–28,8 МПа; 3 – 60–90 мкм при 5,8–10,4 МПа; 4 – 1–3 мкм при 1–1,2 МПа; 5 – 1–3 мкм при 2–2,9 МПа; 6 – 1–3 мкм при 3,5–4,7 МПа; 7 – 1–3 мкм при 6,3–11,3 МПа; сплошные линии – линейные аппроксимации экспериментальных данных для порошка 20–40 мкм (точки 1 и 2) и для порошка 1–3 мкм (точки 5 и 7), штриховые – аппроксимации для промежуточных значений давления

### Физико-математическая модель

Процесс воспламенения порошка железа, находящегося в керамической чашке УБС, будем моделировать воспламенением «приведенного» сферического объема – частицы, которую получим путем осреднения по массе всех частиц, засыпанных в данную чашку. В результате для насыпки массой 0,05 г имеем такую оценку радиуса «приведенной» частицы  $r_p = 1,148 \cdot 10^{-3}$  м. Поскольку масса насыпки во всех экспериментах одинакова, то радиус «приведенной частицы» также будет одинаков для всех экспериментов. Различие будет в количестве частиц  $n_p$  в насыпке. Так, для насыпки из частиц размером 20–40 мкм или в среднем 30 мкм  $n_p \approx 56\,150$ , а для 1–3 мкм или в среднем 2 мкм  $n_p \approx 1,8 \cdot 10^8$ . Уравнения математической модели для описания процесса воспламенения «приведенной» частицы в рамках точечного подхода были предложены в [10–12] и могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{d\bar{T}_p}{dt} = -\frac{3}{2} \text{Nu} (\bar{T}_p - \bar{T}_1) + 3 \frac{q\rho_3}{\lambda_1 T_n} \frac{K}{h} (\bar{T}_b - \bar{T}_p) \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{T}_p}\right), \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{\rho_2 c_2}{\lambda_1} \frac{K}{h} \exp\left(-\frac{\bar{E}}{\bar{T}_p}\right), \quad \bar{T}_p(0) = 1, \quad \bar{h}(0) = \bar{h}_0, \quad (3)$$



где

$$\bar{t} = t/t_0, \bar{T}_p = T_p/T_n, \bar{h} = h/r_p, \bar{E} = E/(RT_n),$$

$T_p, T_1, T_b, T_n$  – температуры «приведенной» частицы, кислорода, кипения железа, нормальная соответственно,  $Nu$  – число Нуссельта,  $q$  – тепловой эффект реакции, отнесенный к массе оксида,  $\rho_2, \rho_3$  – плотности железа и окисной пленки,  $h$  – толщина оксидной пленки,  $\lambda_1$  – теплопроводность кислорода,  $c_2$  – теплоемкость железа,  $E$  – энергия активации,  $K$  – предэкспоненциальный множитель,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $t_0 = \rho_2 c_2 r_p^2 / \lambda_1$  – временной масштаб. Энергия активации была взята равной  $E = 3,1 \cdot 10^6$  Дж/кг [8, 9], величина теплового эффекта реакции задавалась равной  $q = 3 \cdot 10^6$  Дж/кг [13].

Задача (2), (3) решалась численно методом, реализующим формулы обратного дифференцирования, с переменными шагом и порядком, предназначенным для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [14].

Будем считать, что предэкспонентный множитель  $K$  является функцией температуры кислорода  $T_1$ , отражающей опосредованно его зависимость от плотности кислорода. Эта функция является неизвестной и определяется на основе экспериментальных данных путем решения последовательности прямых задач, дающих близкие к экспериментальным значения времени задержки воспламенения  $t_{ign}$  в зависимости от температуры окружающей среды. Экспериментальные значения времен задержки воспламенения получены на основе линейной аппроксимации зависимостей логарифма времени задержки воспламенения от температуры окружающей среды (рис. 3).

### Определение параметров математической модели

Экспериментальные и полученные в результате расчета времена задержки воспламенения  $t_{ign}$ , значения предэкспонента  $K$  в зависимости от температуры кислорода  $T_1$  приведены в табл. 3. Таким образом, в результате численных расчетов получены значения функции  $K(T_1)$  при фиксированных значениях радиуса частиц и давлениях в УБС, при которых экспериментальные и расчетные данные по временам задержки воспламенения совпадают с высокой точностью.

Таблица 3

Значения времен задержки воспламенения и предэкспонента при различных температурах

| $T_1, K$  | $t_{ign}, \text{мкс}$ |        | $K, \text{м}^2/\text{с}$ |
|---|-----------------------|--------|--------------------------|
|   | эксперимент           | расчет |                          |
| Радиус частиц 20–40 мкм, давление 3,2–4,2 МПа   |                       |        |                          |
| 1050  | 390                   | 391    | 113 952                  |
| 990   | 1708                  | 1709   | 33 251                   |
| 935   | 7851                  | 7850   | 9784                     |
| 900   | 26 053                | 26 029 | 2425                     |
| 865   | 99 508                | 99 490 | 773                      |
| Радиус частиц 20–40 мкм, давление 19,4–28,8 МПа |                       |        |                          |
| 875   | 115                   | 116    | 382 432                  |
| 840   | 372                   | 371    | 121 743                  |
| 800   | 1231                  | 1233   | 42 541                   |
| 770   | 3311                  | 3311   | 20 294                   |
| 740   | 10 000                | 10 001 | 7850                     |
| 710   | 30 196                | 30 187 | 2752                     |
| Радиус частиц 1–3 мкм, давление 2–2,9 МПа       |                       |        |                          |
| 720   | 1482                  | 1478   | 37 545                   |
| 690   | 4576                  | 4573   | 15 628                   |
| 670   | 11 212                | 11 225 | 7054                     |
| 650   | 25 707                | 25 715 | 3213                     |

| Радиус частиц 1–3 мкм, давление 6,3–11,3 МПа |        |        |        |
|--|--------|--------|--------|
| 655  | 1413   | 1417   | 38 474 |
| 635  | 4072   | 4073   | 17 250 |
| 620  | 9781   | 9778   | 8052   |
| 615  | 16 603 | 16 608 | 4875   |

Таблица 4

Значения коэффициентов  $a_K, b_K$  в аппроксимации предэкспонента (4)

| частицы, мкм; давление, МПа | $a_K$                        | $b_K$        |
|-----------------------------|------------------------------|--------------|
| 20–40; 3,2–4,2              | $0,1178315524 \cdot 10^{16}$ | 24 201,24516 |
| 20–40; 19,4–28,8            | $0,8630520001 \cdot 10^{15}$ | 18 890,19191 |
| 1–3; 2–2,9                  | $0,1102057198 \cdot 10^{19}$ | 20 311,21190 |
| 1–3; 6,3–11,3               | $0,1026538333 \cdot 10^{15}$ | 15 690,52785 |

Для проведения численных расчетов соответствующих задач Коши в промежуточных точках по температуре кислорода найдем аналитическое представление предэкспонента от температуры кислорода в виде

$$K = a_K \exp\left(-\frac{b_K}{T_1}\right). \quad (4)$$

Здесь величины  $a_K$  и  $b_K$  являются искомыми и определяются по предельным значениям функции  $K$  и ее аргумента на основе данных табл. 2 и они приведены в табл. 4.

Аппроксимация (4) позволяет экспоненциальный член в уравнении (2) представить в виде

$$a_K \exp\left[-\left(\frac{b_K}{T_1} + \frac{E}{RT_p}\right)\right], \quad (5)$$

что удобно при численной реализации. Результат аппроксимации численных значений  $K$  представлен на рис. 4. Как видим, использование данной формулы дает удовлетворительное описание численных значений  $K(T_1)$ .

Были проведены расчеты времени задержки воспламенения с численным (табл. 3) и аппроксимированным экспоненциальной функцией (4) предэкспонентом. Оказалось, что в крайних точках температурных интервалов значения  $t_{ign}$  совпадают полностью (что и должно быть, поскольку

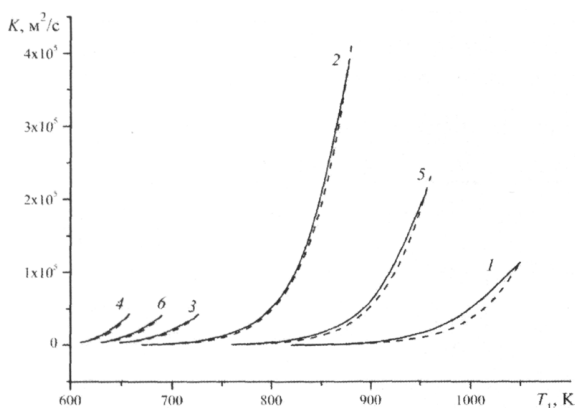


Рис. 4. Вычисленные и аппроксимирующие значения предэкспонента. Сплошные линии – результаты расчета (см. табл. 1), штриховая – экспоненциальная аппроксимация (3). 1 – радиус 20–40 мкм при давлении 3,2–4,2 МПа, 2 – 20–40 мкм при 19,4–28,8 МПа, 3 – 1–3 мкм при 2–2,9 МПа, 4 – 1–3 мкм при 6,3–11,3 МПа, 5 – 20–40 мкм при 13,9 МПа, 6 – 1–3 мкм при 5,625 МПа

по этим точкам и строилась аппроксимация (4)), а в промежуточных точках значительно отличаются при различных значениях давления окружающей среды.

Следующий шаг в разработке модели заключается во внесении в зависимость  $K(T_1)$  давления окружающей среды. Приведем пример этого для значений давления 5,625 и 13,9 МПа.

Проводя численный расчет, находим значения предэкспонента  $K(T_1)$ , соответствующие временам задержки воспламенения при промежуточных значениях давления (см. рис. 3). Затем находим аппроксимацию (4) для полученных значений предэкспонента: для насыпки из частиц 20–40 мкм при давлении 13,9 МПа  $b_K = 21\,241,57995$ ,  $a_K = 0,942161303610^{15}$ , а для частиц 1–3

мкм при давлении 5,625 МПа  $b_K = 17\,434,27789$ ,  $a_K = 0,3939796530 \cdot 10^{16}$ . Как видно, вновь найденные постоянные примерно соответствуют среднесрифметическому значению от базовых (см. табл. 4). Соответствующие зависимости приведены на рис. 4.

Таким образом, используя линейную интерполяцию зависимости логарифма времени задержки воспламенения от температуры окружающей среды и предельные значения давления можно найти зависимость предэкспонента от текущей температуры окружающей среды, то есть полностью определить параметры полуэмпирической математической модели. При этом зависимость от давления является параметрической.

На основе зависимости (1) модифицируем выражение для предэкспоненциального множителя следующим образом [15]

$$K(T_1, P_1) = \begin{cases} K(T_1), & T_1 \geq T_{lim} \\ 0, & T_1 < T_{lim} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $K(T_1)$  это экспоненциальная зависимость (4), приведенная выше для различных значений параметра  $P_1$ . Таким образом, если при фиксированном значении давления кислорода его температура  $T_1$  меньше, чем предельная температура воспламенения  $T_{lim}(P_1)$ , то химическая реакция окисления несущественна и не принимается во внимание в математической модели. То есть вклад тепловыделения от химической реакции не приводит систему к воспламенению. Условно можно полагать, что толщина окисной пленки не изменяется, разогрев частицы осуществляется только за счет конвективного теплообмена с окружающей средой и в пределе температура совокупности частиц стремится к температуре окружающей среды  $T_1$ . То есть в этом случае воспламенения частицы не происходит.

Привлекательным является построение аналитической зависимости предэкспонента от  $(T_1, P_1)$ . Нами предлагается следующий алгоритм построения предэкспонента в случае нелинейной зависимости (1). Фиксируется предельное давление, определяется по формуле (1) соответствующая предельная температура и в плоскости  $(1000/T_1, \log(t_{ign}))$  проводится прямая воспламенения. А затем можно определить и вид  $K(T_1)$ . В табл. 5 приведены как результаты расчета по

Таблица 5

Зависимость времени задержки воспламенения от температуры окружающей среды для различных давлений

| P, МПа | T <sub>lim</sub> , К | T <sub>1</sub> , К | t <sub>ign</sub> , мкс |             |
|--------|----------------------|--------------------|------------------------|-------------|
|        |                      |                    | расчет                 | эксперимент |
| 24     | 691                  | 650                | —                      | —           |
|        |                      | 700                | 50 939                 | 49 930      |
|        |                      | 710                | 30 188                 | 30 196      |
|        |                      | 740                | 10 007                 | 10 000      |
|        |                      | 750                | 7708                   | 7632        |
|        |                      | 770                | 3311                   | 3312        |
|        |                      | 795                | 1237                   | 1231        |
|        |                      | 800                | 1065                   | 1064        |
|        |                      | 840                | 372                    | 372         |
|        |                      | 850                | 228                    | 236         |
|        |                      | 875                | 116                    | 115         |
| 4      | 865                  | 850                | —                      | —           |
|        |                      | 870                | 99 490                 | 99 508      |
|        |                      | 895                | 26 019                 | 26 033      |
|        |                      | 900                | 25 012                 | 24 914      |
|        |                      | 940                | 7850                   | 7851        |
|        |                      | 950                | 5514                   | 5564        |
|        |                      | 990                | 1709                   | 1708        |
|        |                      | 1000               | 1324                   | 1326        |
|        |                      | 1050               | 388                    | 385         |

модифицированной модели, так и полученные выше данные (без корректировки (6)) для частиц с радиусом в диапазоне 20–40 мкм. При значениях температуры среды, близких к предельному, времена задержки воспламенения на порядки выше по сравнению с более высокими значениями температуры кислорода.

Выше с использованием линейной интерполяции были определены предельные температуры воспламенения для промежуточных значений давления. Теперь найдем эти предельные температуры на основе аппроксимации экспериментальных данных по формуле (1). Они приведены на рис. 5. На рис. 5 приведены также экспериментальные предельные кривые воспламенения для частиц 20–40 мкм. Как видим, для более мелких частиц оба подхода аппроксимации близки, а для крупных частиц линейная аппроксимация не является удовлетворительной. Поэтому расчеты нами были проведены по экспоненциальной зависимости.

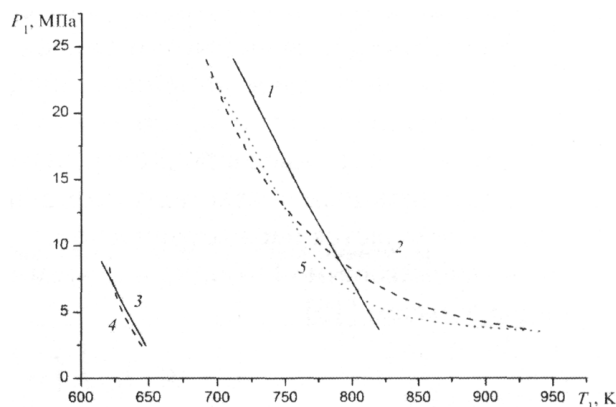


Рис. 5. Зависимость предельной температуры от давления окружающей среды. Сплошные линии (1, 3) — линейная интерполяция, штриховые (2, 4) — экспоненциальная интерполяция по формуле (5). 1, 2 — 30 мкм, 3, 4 — 2 мкм, 5 — экспериментальные данные

## Выводы

Таким образом, в работе определены критические условия для самовоспламенения микропорошков железа в устройстве быстрого сжатия. Установлено, что порошок железа с размером до сотен микрон способен легко самовоспламениться в кислородной среде с температурой ниже температуры плавления железа. С увеличением давления среды температура самовоспламенения существенно снижается. Определена длительность задержки воспламенения при различных давлениях и температурах кислорода. Показано, что максимальная температура при горении ограничена, по всей видимости, температурами кипения железа и разложения оксидов.

Полученная экспериментальная информация важна для оценки безопасности технологических процессов, при которых могут образовываться мелкодисперсные частицы железа, и производств, использующих кислород высокого давления.

Предложена и верифицирована с использованием этих данных полуэмпирическая физико-химическая точечная математическая модель для описания процесса воспламенения насыпки железных частиц, принимающая во внимание зависимость предельных температур воспламенения от давления при изменении давлений в диапазоне 2–25 МПа и температур 600–1100 К и удовлетворительно описывающая времена задержки воспламенения.

## Литература

1. Allen, C.M. Energetic-nanoparticle enhanced combustion of liquid fuels in a rapid compression machine / C.M. Allen, T. Lee // Proc. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition. – 2009. – AIAA 2009-227.
2. Trunov, M.A. Ignition of aluminum powders under different experimental conditions / M.A. Trunov, M. Schoenitz, E.L. Dreizin // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. – 2005. – Vol. 30. – P. 36–43.
3. Utilization of iron additives for advanced control of NO<sub>x</sub> emissions from stationary combustion sources / V.V. Lissianski, P.M. Maly, V.M. Zamansky, W.C. Gardiner // Ind. Eng. Chem. Res. – 2001. – Vol. 20, № 15. – P. 3287–3293.
4. Синтез нанооксидов в двухфазных ламинарных пламенах / А.Н. Золотко, Я.И. Вовчук, Н.И. Полстасв и др. // Физика горения и взрыва. – 1996. – Т. 32, № 3. – С. 24–34.
5. Cashdollar, K.L. Explosion temperatures and pressures of metals and other elemental dust clouds / K.L. Cashdollar, I.A. Zlochower // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. – 2007. – Vol. 20. – P. 337–348.

6. Dynamics of dispersion and ignition of dust layers by a shock wave / V.M. Boiko, A.N. Papyrin, M. Wolinski, P. Wolanski // *Progress in Astronautics and Aeronautics*. – 1984. – Vol. 94. – P. 293–301.
7. Ignition of dust suspensions behind shock waves / A.A. Borisov, B.E. Gel'fand, E.I. Timofeev *et al.* // *Progress in Astronautics and Aeronautics*. – 1984. – Vol. 94. – P. 332–339.
8. Photoemission measurements of soot particles temperature at pyrolysis of ethylene / Y.A. Baranyshyn, L.I. Belaziorava, K.N. Kasparov, O.G. Penyazkov // *Nonequilibrium Phenomena: Plasma, Combustion, Atmosphere*. – Moscow: Torus Press Ltd, 2009. – P. 87–93.
9. Optical properties of gases at ultra high pressures / Yu.N. Ryabinin, N.N. Sobolev, A.M. Markevich, I.I. Tamm // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 1952. – Vol. 23, № 5. – P. 564–575.
10. Альтман, И.С. Об определении температуры частиц по спектру излучения / И.С. Альтман // *Физика горения и взрыва*. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 75–77.
11. Федоров, А.В. О воспламенении железной насыпки в устройстве быстрого сжатия / А.В. Федоров, А.В. Шульгин // *Физика горения и взрыва*. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 98–100.
12. Условия и время задержки самовоспламенения микрочастиц железа в кислороде / В.В. Лещевич, О.Г. Пенязьков, А.В. Федоров и др. // *Инженерно-физический журнал*. – 2012. – Т. 85, № 1. – С. 139–144.
13. Болобов, В.И. Расчетный анализ условий воспламенения металлических компактных образцов и фольги в кислороде / В.И. Болобов, Н.А. Подлевских // *Физика горения и взрыва*. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 46–55.
14. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
15. Федоров, А.В. Воспламенение частицы алюминия / А.В. Федоров, Ю.В. Харламова // *Физика горения и взрыва*. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 65–68.

## EXPERIMENTAL AND MATHEMATICAL SIMULATION OF AUTO-IGNITION OF IRON MICRO PARTICLES

V.V. Leschevich<sup>1</sup>, O.G. Penyazkov<sup>2</sup>, J.-C. Rostaing<sup>3</sup>, A.V. Fedorov<sup>4</sup>, A.V. Shulgin<sup>5</sup>

The experimental and numerical studies of autoignition and burning of iron microparticles in oxygen were introduced. Parameters of high-temperature gas environment were created by rapid compression machine. Powders with a particle size 1–125 microns were studied at the oxygen pressure of 0,5–28 MPa and the temperature of 500–1100 K. Ignition delay time was measured by registration of radiation from the side wall of the combustion chamber and by measuring the pressure on the end wall. Critical auto-ignition conditions are determined according to size of the particles, oxygen temperature and pressure. For description of ignition mechanisms a punctual semiempirical simulator was introduced. The simulator gave the opportunity to describe the experimental data on dependence of ignition delay time of iron particles on the ambient temperature, taking into account correlations of critical ignition temperatures with pressure.

*Keywords: iron micro particles, oxygen, rapid compression machine, ignition delay time, mathematical simulation.*

<sup>1</sup> Leschevich Vladimir Vladimirovich is Junior Researcher, A V Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus

<sup>2</sup> Penyazkov Oleg Glebovich is Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, director, A V Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus

<sup>3</sup> Rostaing Jean-Christophe is L'Air Liquide Centre de Recherche Claude-Delorme, France

<sup>4</sup> Fedorov Alexander Vladimirovich is Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory S A Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

<sup>5</sup> Shulgin Alexey Valentinovich is Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, S A Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

E-mail: shulgin@itam.nsc.ru

## References

1. Allen C.M., Lee T. Energetic-nanoparticle enhanced combustion of liquid fuels in a rapid compression machine // *Proc. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. 2009. AIAA 2009-227.
2. Trunov M.A., Schoenitz M., Dreizin E.L. Ignition of aluminum powders under different experimental conditions. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 2005. Vol. 30. pp. 36–43.
3. Lissianski V.V., Maly P.M., Zamansky V.M., Gardiner W.C. Utilization of iron additives for advanced control of NO<sub>x</sub> emissions from stationary combustion sources. *Ind. Eng. Chem. Res.* 2001. Vol. 20, no. 15. pp. 3287–3293.
4. Zolotko A.N., Vovchuk Ya.I., Poletaev N.I., Frolko A.V., Al'tman I.S. *Fizika gorennya i vzryva*. 1996. Vol. 32, no. 3. pp. 24–34. (in Russ.).
5. Cashdollar K.L., Zlochower I.A. Explosion temperatures and pressures of metals and other elemental dust clouds. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 2007. Vol. 20. pp. 337–348.
6. Boiko V.M., Papyrin A.N., Wolinski M., Wolanski P. Dynamics of dispersion and ignition of dust layers by a shock wave. *Progress in Astronautics and Aeronautics*. 1984. Vol. 94. pp. 293–301.
7. Borisov A.A., Gel'fand B.E., Timofeev E.I., Tsyganov S.A., Khomic S.V. Ignition of dust suspensions behind shock waves. *Progress in Astronautics and Aeronautics*. 1984. Vol. 94. pp. 332–339.
8. Baranyshyn Y.A., Belaziorava L.I., Kasparov K.N., Penyazkov O.G. Photoemission measurements of soot particles temperature at pyrolysis of ethylene. *Nonequilibrium Phenomena: Plasma, Combustion, Atmosphere*. Moscow: Torus Press Ltd, 2009. pp. 87–93.
9. Ryabinin Yu.N., Sobolev N.N., Markevich A.M., Tamm I.I. Optical properties of gases at ultra high pressures. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1952. Vol. 23, no. 5. pp. 564–575.
10. Al'tman I.S. *Fizika gorennya i vzryva*. 2004. Vol. 40, no. 1. pp. 75–77.
11. Fedorov A.V., Shul'gin A.V. *Fizika gorennya i vzryva*. 2011. Vol. 47, no. 6. pp. 98–100.
12. Leshchevich V.V., Penyaz'kov O.G., Fedorov A.V., Shul'gin A.V., Rosten Zh.-K. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 2012. Vol. 85, no. 1. pp. 139–144. (in Russ.).
13. Bolobov V.I., Podlevskikh N.A. *Fizika gorennya i vzryva*. 2001. Vol. 37, no. 6. pp. 46–55. (in Russ.).
14. Khollo Dzh. (ed.), Uatta Dzh. (ed.) *Sovremennyye chislennyye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Contemporary numerical methods of solution of ordinary differential equation). Moscow: Mir, 1979. 312 p. (in Russ.). [Hall G., Watt J.M. *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Oxford: Clarendon press. 312 p.]
15. Fedorov A.V., Kharlamova Yu.V. *Fizika gorennya i vzryva*. 2003. Vol. 39, no. 5. pp. 65–68. (in Russ.).

Поступила в редакцию 8 мая 2013 г.

# АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЯТИТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПОЛОЖЕНИЯ КАМЕР, ОСНОВАННОЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ КЭЛИ МАТРИЦ ВРАЩЕНИЯ

Е.В. Мартюшев<sup>1</sup>

Предложено новое алгоритмическое решение 5-точечной задачи оценки относительного положения калиброванных камер. Наш подход не связан со знаменитым кубическим ограничением на существенную матрицу. Вместо этого мы используем представление Кэли матриц вращения для получения системы полиномиальных уравнений из эпиполярных ограничений. Решая эту систему, мы напрямую получаем относительные положения и ориентации камер через корни многочлена десятой степени.

*Ключевые слова:* 5-точечная задача оценки положения камер, калиброванная камера, эпиполярные ограничения, представление Кэли.

## 1. Введение

В настоящей работе мы предлагаем новое алгоритмическое решение задачи оценки относительного положения двух калиброванных камер по пяти точкам сцены. Коротко эту задачу мы будем называть 5-точечной задачей. Формулируется она следующим образом.

**Задача 1.** Пусть даны две калиброванные камеры-обскуры с центрами  $O_1$ ,  $O_2$  и пять точек сцены  $Q_1, \dots, Q_5$ , лежащие перед камерами в 3-мерном евклидовом пространстве, рис. 1. В системе координат каждой камеры известны только однородные координаты точек  $Q_i$ . Задача состоит в определении относительного положения и ориентации второй камеры относительно первой.

Пятиточечная задача является ключевой для более общей задачи трехмерной реконструкции сцены, которая в свою очередь используется во многих приложениях компьютерного зрения, таких как дополненная реальность, системы автопарковки, навигация и планировка маршрута для роботов и т.д. Как известно, 5-точечные алгоритмы показывают значительно лучшие результаты с точки зрения точности и надежности, чем 6-, 7- и 8-точечные алгоритмы оценки положения камер. Более того, для плоских и почти плоских сцен только 5-точечные методы позволяют надежно получать решение без каких-либо дополнительных модификаций алгоритма.

Как впервые показал Круппа [1] в 1913 году, задача 1 может иметь самое большее 11 решений. Используя методы проективной геометрии, он предложил алгоритм решения 5-точечной задачи, который, однако, не был численно устойчивым и потому не мог быть реализован программно. Позднее Демазур [2], Фогерас и Мэйбанк [3], Хейден и Спарр [4] уточнили результат Круппы и доказали, что точное количество решений (включая комплексные) равно 10.

Впервые численно устойчивое решение задачи 1 было предложено Филипом [5] в 1996. Его метод требовал нахождения корней полинома 13-й степени. В 2004 Нистер [6] улучшил алгоритм Филипа и выразил решение через корни полинома 10-й степени. После этого было предложено множество модификаций алгоритма Нистера, одни из которых упрощали его программную реализацию [7], а другие – повышали его численную устойчивость [8, 9].

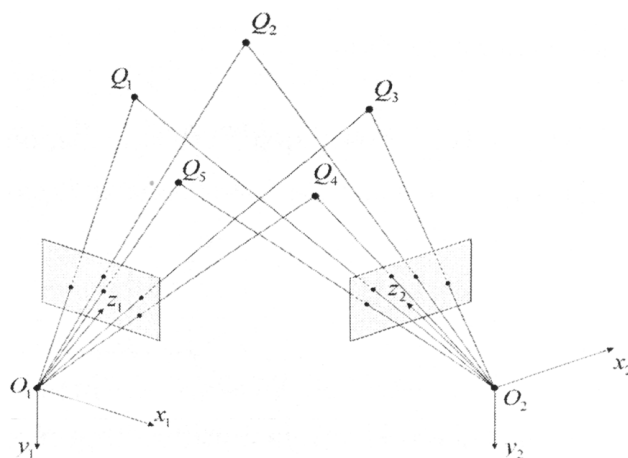


Рис. 1. К формулировке 5-точечной задачи

<sup>1</sup> Мартюшев Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: zhmart@mail.ru

В настоящей статье мы предлагаем еще одно алгоритмическое численно устойчивое решение задачи 1, использующее известное представление Кэли для матриц вращения [10]. В нашем подходе не смешиваются ротационные и трансляционные параметры существенной матрицы и, тем не менее, решение выражается через корни полинома 10-й степени. Эксперименты на синтетических данных показывают, что наш метод сравним по точности и надежности с существующими 5-точечными решениями.

*1.1. Обозначения.* Мы используем обозначение  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  для вектор-столбцов и  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$  для матриц. Элементы матрицы  $\mathbf{A}$  обозначаются  $A_{ij}$ ,  $\mathbf{A}^T$  – транспонированная к  $\mathbf{A}$  матрица,  $\det \mathbf{A}$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ . Для двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  мы обозначаем  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$  их векторное и скалярное произведения соответственно. Для вектора  $\mathbf{a}$  мы обозначаем  $[\mathbf{a}]_{\times}$  кососимметрическую матрицу такую, что  $[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  для всех  $\mathbf{b}$ . Символ  $\mathbf{I}$  обозначает единичную матрицу,  $\mathbf{0}$  – нулевую матрицу или вектор,  $\|\cdot\|$  – норму Фробениуса.

## 2. Описание алгоритма

*2.1 Преобразование начальных данных.* Начальными данными для нашего алгоритма являются однородные координаты  $x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}$  точек  $Q_i$  в системе координат  $j$ -й камеры,  $j=1, 2$ ,  $i=1, \dots, 5$  (рис. 1).

Без потери общности можно положить  $x_{j1} = y_{j1} = x_{j2} = 0$  для  $j=1, 2$ . Численно устойчивый способ добиться этого состоит в следующем. Мы объединяем начальные данные в две матрицы размера  $3 \times 5$ :

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} x_{j1} & \dots & x_{j5} \\ y_{j1} & \dots & y_{j5} \\ z_{j1} & \dots & z_{j5} \end{bmatrix} \quad (1)$$

и вычисляем матрицы

$$\mathbf{A}_j'' = \mathbf{H}_{j2} \mathbf{A}_j' = \mathbf{H}_{j2} \mathbf{H}_{j1} \mathbf{A}_j, \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}_{j1}$  и  $\mathbf{H}_{j2}$  – матрицы Хаусхолдера, обращающие в нуль  $x_{j1}, y_{j1}$  и  $x_{j2}$  соответственно. Соответствующие векторы Хаусхолдера имеют вид:

$$\mathbf{h}_{j1} = \begin{bmatrix} x_{j1} \\ y_{j1} \\ z_{j1} + \text{sign}(z_{j1}) \sqrt{x_{j1}^2 + y_{j1}^2 + z_{j1}^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{j2} = \begin{bmatrix} x'_{j2} \\ y'_{j2} + \text{sign}(y'_{j2}) \sqrt{x'^2_{j2} + y'^2_{j2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем мы увидим, что преобразование (2), будучи очень простым, существенно упрощает дальнейшие вычисления. В частности, это преобразование позволяет легко преобразовать полином 20-й степени (12) в полином 10-й степени (13).

*2.2. Эпиполярные ограничения и существенная матрица.* Напомним сначала некоторые определения из многопроекционной геометрии [11–13]. *Камера-обскура* – это тройка  $(O, \pi, \mathbf{P})$ , где  $\pi$  – плоскость изображения,  $\mathbf{P}$  – центральная проекция точек 3-мерного евклидова пространства на  $\pi$ , и  $O$  – центр камеры (центр проекции  $\mathbf{P}$ ). *Фокусное расстояние* – это расстояние между  $O$  и  $\pi$ , ортогональная проекция  $O$  на  $\pi$  называется *принципиальной точкой*. Камера-обскура называется *калиброванной*, если все ее внутренние параметры (такие как фокусное расстояние и координаты принципиальной точки) известны.

Пусть даны две калиброванные камеры-обскуры  $(O_j, \pi_j, \mathbf{P}_j)$  для  $j=1, 2$ . Без потери общности можно положить  $\mathbf{P}_1 = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [\mathbf{R} \ \mathbf{t}]$ , где  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$  – матрица вращения и  $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$  – вектор сдвига, подчиненный условию нормализации  $\|\mathbf{t}\| = 1$ .



Поскольку лучи  $O_1Q_i$  и  $O_2Q_i$  (рис. 1) должны пересекаться в  $\mathbb{R}^3$ , то это накладывает некоторые ограничения на  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{t}$ . Эти ограничения называются *эпиполярными* и имеют вид [12]:

$$\begin{bmatrix} x_{2i} & y_{2i} & z_{2i} \end{bmatrix} \mathbf{E} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ y_{1i} \\ z_{1i} \end{bmatrix} = 0, \tag{3}$$

где  $i=1, \dots, 5$ ,  $\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$  называется *существенной матрицей*.

2.3. Десять полиномов четвертой степени. Наш алгоритм основан на следующем хорошо известном результате.

**Теорема 1** ([10]). *Если матрица  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$  не является вращением вокруг некоторой оси на угол  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $\mathbf{R}$  может быть представлена в виде:*

$$\mathbf{R} = \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\times} \right) \left( \mathbf{I} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\times} \right)^{-1}, \tag{4}$$

где  $u, v, w \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $\mathbf{R}$  представлена в виде (4) и  $\mathbf{E}(u, v, w, \mathbf{t}) = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$  – существенная матрица.

**Предложение 1.** *Если*

$$\begin{aligned} u' &= \frac{-t_1 - vt_3 + wt_2}{\delta}, \\ v' &= \frac{-t_2 - wt_1 + ut_3}{\delta}, \\ w' &= \frac{-t_3 - ut_2 + vt_1}{\delta}, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\delta = ut_1 + vt_2 + wt_3$ , то  $\mathbf{E}(u', v', w', \mathbf{t}) = -\mathbf{E}(u, v, w, \mathbf{t})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу  $\mathbf{R}' = -\mathbf{H}_t \mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ , где матрица Хаусхолдера  $\mathbf{H}_t = \mathbf{I} - 2\mathbf{t}\mathbf{t}^T$ . Тогда  $\mathbf{E}' = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}' = -\mathbf{E}$ . Записывая матрицу  $\mathbf{R}'$  в форме (4) с параметрами  $u', v', w'$ , получаем следующую систему уравнений относительно переменных  $u', v', w'$ :

$$\left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix}_{\times} \right) \left( \mathbf{I} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\times} \right) = -\mathbf{H}_t \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\times} \right) \left( \mathbf{I} + \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix}_{\times} \right),$$

которая, как можно убедиться прямым вычислением, имеет единственное решение (5).  $\square$

Поскольку эпиполярные ограничения (3) линейны и однородны по  $\mathbf{t}$ , то их можно переписать так:

$$\mathbf{S} \mathbf{t} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

где  $i$ -я строка  $5 \times 3$  матрицы  $\mathbf{S}$  есть  $\begin{bmatrix} x_{1i} & y_{1i} & z_{1i} \end{bmatrix} \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} x_{2i} \\ y_{2i} \\ z_{2i} \end{bmatrix}_{\times}$ .

Представим матрицу вращения  $\mathbf{R}$  в форме (4) и найдем определители всех  $3 \times 3$  подматриц матрицы  $\mathbf{S}$ . В результате получим систему из десяти полиномиальных уравнений:

$$\begin{aligned} f_i &= [0]u^4 + [0]u^3v + [0]u^2v^2 + [0]uv^3 + [0]v^4 + [1]u^3 + [1]u^2v \\ &\quad + [1]uv^2 + [1]v^3 + [2]u^2 + [2]uv + [2]v^2 + [3]u + [3]v + [4] = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $i=1, \dots, 10$ ,  $[n]$  обозначает полином степени  $n$  по переменной  $w$ ,  $[0]$  – константа. Таким образом, мы получили десять полиномов  $f_i$ , каждый из которых имеет полную степень 4.

*Замечание 1.* На самом деле определители  $3 \times 3$  подматриц матрицы  $\mathbf{S}$  имеют вид  $F_i / \Delta^3$ , где  $\Delta = 1 + u^2 + v^2 + w^2$  и  $F_i$  – полином 6-й полной степени. Однако можно убедиться в том, что  $F_i$  факторизуется как  $F_i = f_i \Delta$ , и коэффициенты полинома  $f_i$  легко выражаются через коэффициенты полинома  $F_i$ .

2.4. *Многочлен десятой степени от одной переменной.* Перепишем систему (7) в виде:

$$\mathbf{B} \mathbf{m} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

где  $\mathbf{B}$  – матрица коэффициентов размера  $10 \times 35$  и  $\mathbf{m} = [u^4 \ u^3v \ u^3w \ \dots \ v \ w \ 1]^T$  – вектор мономов.

Расширим систему (8) еще двадцатью полиномами  $uf_i$ ,  $vf_i$  для  $i=1, \dots, 5$ , и  $wf_i$  для  $i=1, \dots, 10$ . Таким образом, мы получим:

$$\mathbf{B}' \begin{bmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

где  $\mathbf{B}'$  – новая матрица коэффициентов размера  $30 \times 50$  и

$$\mathbf{m}' = [u^4w \ u^3vw \ u^3w^2 \ \dots \ v^2w^3 \ vw^4 \ w^5]^T$$

– вектор мономов пятой степени. Ясно, что система (9) эквивалентна системе (8).

Переставим столбцы в матрице  $\mathbf{B}'$  и выполним преобразование Гаусса–Жордана с выбором ведущего элемента столбца (для лучшей численной устойчивости). Тогда последние шесть строк полученной матрицы можно представить в виде (пустые места заняты нулями):

|       | $u^3w^2$ | $u^3w$ | $u^3$ | $v^3w^2$ | $v^3w$ | $v^3$ | $uv$ | $u$ | $v$ | $1$ |
|-------|----------|--------|-------|----------|--------|-------|------|-----|-----|-----|
| $g_1$ | 1        |        |       |          |        |       | [3]  | [4] | [4] | [5] |
| $g_2$ |          | 1      |       |          |        |       | [3]  | [4] | [4] | [5] |
| $g_3$ |          |        | 1     |          |        |       | [3]  | [4] | [4] | [5] |
| $g_4$ |          |        |       | 1        |        |       | [3]  | [4] | [4] | [5] |
| $g_5$ |          |        |       |          | 1      |       | [3]  | [4] | [4] | [5] |
| $g_6$ |          |        |       |          |        | 1     | [3]  | [4] | [4] | [5] |

Мы опустили здесь первые 28 нулевых столбцов. Из шести соответствующих полиномов  $g_1, \dots, g_6$  можно получить следующие четыре полинома:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_4 \\ g_5 \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix} = \mathbf{C}(w) \begin{bmatrix} uv \\ u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

где матрица  $\mathbf{C}(w)$  имеет вид:

$$\mathbf{C}(w) = \begin{bmatrix} [4] & [5] & [5] & [6] \\ [4] & [5] & [5] & [6] \\ [4] & [5] & [5] & [6] \\ [4] & [5] & [5] & [6] \end{bmatrix}. \tag{11}$$

*Замечание 2.* Поскольку мы используем только последние шесть строк матрицы  $\mathbf{B}'$ , то нет необходимости выполнять «полное» преобразование Гаусса–Жордана матрицы  $\mathbf{B}'$ . Для первых 24 строк матрицы  $\mathbf{B}'$  только поддиагональные элементы должны быть обнулены. Это существенно уменьшает объем вычислений и повышает эффективность алгоритма.

Из (10) следует, что для существования решения системы (8) необходимо, чтобы  $\det \mathbf{C}(w) = 0$ . Обозначим  $W = \det \mathbf{C}(w)$ . В общем случае это полином 20-й степени по переменной  $w$ .

**Предложение 2.** *Полином  $W$  имеет специальную симметричную форму:*

$$W = \sum_{k=0}^{10} p_k [w^{10+k} + (-w)^{10-k}], \tag{12}$$

где  $p_k \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Из условий  $x_{j1} = y_{j1} = 0$  следует, что  $E_{33} = 0$ . Как следствие,

$$t_2 = t_1 \frac{R_{23}}{R_{13}} = t_1 \frac{vw + u}{uw - v}.$$

Подставляя это в последнее равенство из (5), получаем  $w' = -w^{-1}$ . Таким образом, числа  $w$  и  $(-w^{-1})$  одновременно являются (или не являются) корнями полинома  $W$ . Поэтому,

$$W = p_{10} \prod_{i=1}^{10} (w - w_i)(w + w_i^{-1}) = \sum_{k=0}^{10} p_k [w^{10+k} + (-w)^{10-k}].$$

□

Введем новую переменную  $\tilde{w} = w - w^{-1}$  и преобразуем  $W$  к полиному 10-й степени:

$$\tilde{W} = \sum_{k=0}^{10} \tilde{p}_k \tilde{w}^k, \tag{13}$$

где  $\tilde{p}_k$  могут быть получены с помощью формулы  $\tilde{w}^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} w^{2i-k}$ . Результат имеет вид:

$$\tilde{p}_k = \sum_{i=k}^{10} \binom{i}{k} \frac{i-k}{2} p_i, \tag{14}$$

где штрихованная сумма берется по всем  $i$  от  $k$  до 10, для которых  $i - k \bmod 2 = 0$ . Заметим, что в случае  $k = 0$  правая часть равенства (14) принимает вид  $\sum_{i=0}^{10} 2p_i$ .

*2.5. Восстановление структуры.* Комплексный корень полинома  $\tilde{W}$  дает комплексный корень полинома  $W$  и, согласно (4), – комплексную матрицу вращения, не имеющую геометрической интерпретации. Поэтому имеет смысл находить только вещественные корни полинома  $\tilde{W}$ . Для этого можно использовать, например, метод последовательностей Штурма [14] для изоляции корней и метод Риддерса [15] для их последующего уточнения. После этого матрица второй камеры может быть восстановлена следующим образом.

Пусть  $\tilde{w}_0$  – вещественный корень полинома  $\tilde{W}$ . Тогда  $w_0 = \tilde{w}_0 / 2 + \text{sign}(\tilde{w}_0) \sqrt{(\tilde{w}_0 / 2)^2 + 1}$  есть корень полинома  $W$ , подчиненный условию  $|w_0| \geq 1$ . Далее,  $u$ - и  $v$ -компоненты решения находятся с помощью метода исключения Гаусса с выбором ведущего элемента столбца на матрице  $\mathbf{C}(w_0)$  в (11).

После этого, по формуле (4) находятся элементы матрицы  $\mathbf{R}$ . Зная  $\mathbf{R}$ , вектор сдвига  $\mathbf{t}$  может быть найден с помощью метода исключения Гаусса с выбором ведущего элемента столбца на матрице  $\mathbf{S}(u_0, v_0, w_0)$  в (6). Здесь необходимо учесть условие нормализации  $\|\mathbf{t}\| = 1$ .

Пусть  $\mathbf{H}_t = \mathbf{I} - 2\mathbf{t}\mathbf{t}^T$  и  $\mathbf{R}' = -\mathbf{H}_t \mathbf{R}$ . Известно [12, 6], что существуют четыре возможности для матрицы второй камеры:  $\mathbf{P}_A = [\mathbf{R} \ \mathbf{t}]$ ,  $\mathbf{P}_B = [\mathbf{R} \ -\mathbf{t}]$ ,  $\mathbf{P}_C = [\mathbf{R}' \ \mathbf{t}]$  и  $\mathbf{P}_D = [\mathbf{R}' \ -\mathbf{t}]$ . Все эти матрицы удовлетворяют эпполярным ограничениям (3). Однако только одна из них верна, все остальные соответствуют нефизическим конфигурациям.

Истинная матрица второй камеры, обозначим ее  $\mathbf{P}_2$ , может быть получена из так называемого *кирального ограничения*, которое гласит, что все точки сцены должны находиться перед камерой, а не позади нее. В частности, это должно быть справедливо для точки  $Q_1$ . Обозначим

$$c_1 = -\frac{t_1}{R_{13}} = -\frac{t_2}{R_{23}}, \quad c_2 = c_1 R_{33} + t_3. \quad (15)$$

Тогда,

- если  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$ , то  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_A$ ;
- иначе если  $c_1 < 0$  и  $c_2 < 0$ , то  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_B$ ;
- иначе если  $c'_1 > 0$  и  $c'_2 > 0$ , то  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_C$ ;
- иначе  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_D$ .

Здесь величины  $c'_1$  и  $c'_2$  вычисляются в точности также как  $c_1$  и  $c_2$  в (15) с заменой  $\mathbf{R}$  на  $\mathbf{R}'$ .

Наконец, исходная матрица второй камеры получается по формуле

$$\mathbf{P}_2^{\text{ini}} = (\mathbf{H}_{22} \mathbf{H}_{21})^T \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

где матрицы Хаусхолдера  $\mathbf{H}_{j1}$  и  $\mathbf{H}_{j2}$  определены в подразделе 2.1.

### 3. Эксперименты на синтетических данных

В этом разделе мы сравниваем наш алгоритм с 5-точечным алгоритмом Нистера [6]. Для этого оба алгоритма были программно реализованы на C/C++. Все вычисления выполнялись с двойной точностью. Параметры синтетических данных были такими же как в [6], см. таблицу.

|                     |           |
|---------------------|-----------|
| Расстояние до сцены | 1         |
| Глубина сцены       | 0,5       |
| Длина базы          | 0,1       |
| Размеры изображения | 352 × 288 |
| Угол обзора камеры  | 45°       |

Средняя скорость из  $10^6$  тестов для нового алгоритма составила примерно 35 микросекунд/вызов, для алгоритма Нистера – 24 микросекунды/вызов на процессоре Intel Core i5 2,3 Ghz.

В качестве численной ошибки измерялась величина  $\varepsilon = \|\bar{\mathbf{P}}_2 - \mathbf{P}_2\|$ , где  $\bar{\mathbf{P}}_2$  – истинное значение матрицы второй камеры.

Распределения численной ошибки приведены на рис. 2. Полное число тестов в каждом эксперименте было  $10^6$ . Мы сравнили алгоритмы, во-первых, для случая условий по умолчанию – сцены глубины 0,5 и движения камеры общего вида, и, во-вторых, для случая, наиболее проблематичного с точки зрения численной устойчивости, – плоской сцены и движения камеры по направлению к сцене. Из приведенных графиков видно, что оба алгоритма имеют высокую численную устойчивость, хотя необходимо отметить, что алгоритм Нистера существенно превосходит новый алгоритм для первого случая.

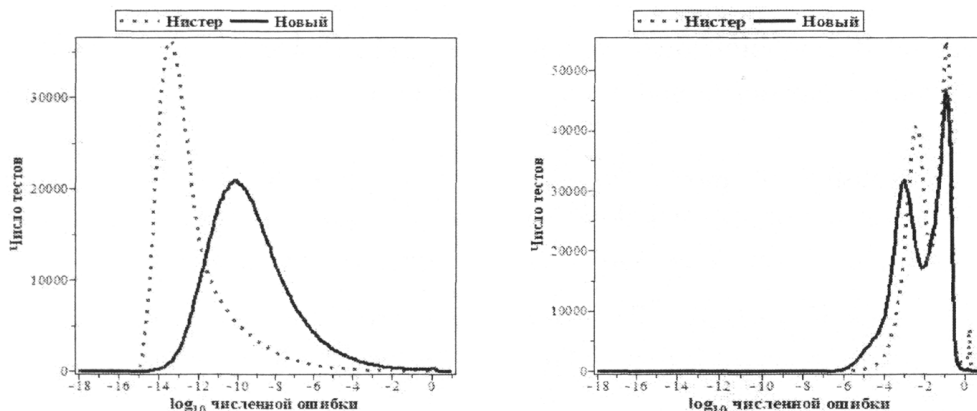


Рис. 2. Распределение численной ошибки. Слева: условия по умолчанию, ошибка медианы есть  $1,56 \times 10^{-13}$  для алгоритма Нистера и  $2,94 \times 10^{-10}$  для нового алгоритма. Справа: плоская сцена и движение по направлению к сцене, ошибка медианы есть  $1,52 \times 10^{-2}$  для алгоритма Нистера и  $7,17 \times 10^{-3}$  для нового алгоритма

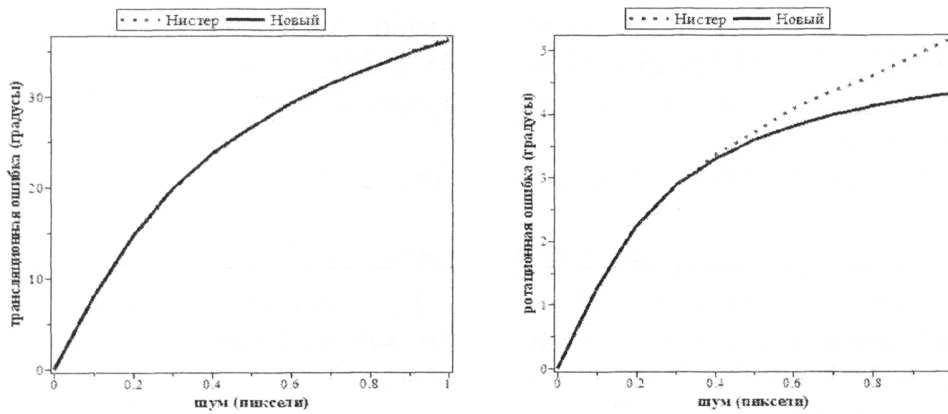


Рис. 3. Трансляционная (слева) и ротационная (справа) ошибки относительно шума.

На рис. 3 показано поведение алгоритмов при наличии погрешности (шума) в определении однородных координат на изображениях. В наши синтетические данные мы добавили нормально распределенный шум со стандартной девиацией, меняющейся от 0 до 1 пикселя. Можно видеть, что в присутствии шума результаты обоих алгоритмов практически совпадают.

#### 4. Обсуждение

Представлен новый алгоритм решения 5-точечной задачи оценки положения камер. Тестирование на синтетических данных подтверждает его численную устойчивость и надежность. В целом, представленный алгоритм является хорошей альтернативой к существующим 5-точечным решениям. Его преимущество состоит в том, что он позволяет восстанавливать относительные положения и ориентации камер напрямую без вычисления существенной матрицы. Такой подход является более гибким, когда имеется некоторая дополнительная информация о векторе сдвига и/или о матрице вращения. Например, если известно, что углы Эйлера  $(\varphi, \theta, \psi)$ , представляющие матрицу  $\mathbf{R}$ , лежат в некоторых известных пределах, то пределы изменения величины  $\tilde{w} = -2\text{ctg}(\varphi + \psi)$  также известны. Это позволяет сразу отбрасывать некоторые корни полинома 10-й степени  $\tilde{W}$  без вычисления матриц камер.

#### Литература

1. Kruppa, E. Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit Innerer Orientierung / E. Kruppa // Sitz.-Ber. Akad. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. Abt. IIa. – 1913. – Vol. 122. – P. 1939–1948.
2. Demazure, M. Sur Deux Problemes de Reconstruction / M. Demazure // INRIA. – 1988. – № RR-0882. – P. 1–29.
3. Faugeras, O. Motion from Point Matches: Multiplicity of Solutions / O. Faugeras, S. Maybank // International Journal of Computer Vision. – 1990. – Vol. 4. – P. 225–246.
4. Heyden, A. Reconstruction from Calibrated Camera – A New Proof of the Kruppa-Demazure Theorem / A. Heyden, G. Sparr // Journal of Mathematical Imaging and Vision. – 1999. – Vol. 10. – P. 1–20.
5. Philip, J. A Non-Iterative Algorithm for Determining all Essential Matrices Corresponding to Five Point Pairs / J. Philip // Photogrammetric Record. – 1996. – Vol. 15. – P. 589–599.
6. Nistér, D. An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem / D. Nistér // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2004. – Vol. 26. – P. 756–777.
7. Li, H. Five-Point Motion Estimation Made Easy / H. Li, R. Hartley // IEEE 18th Int. Conf. of Pattern Recognition. – 2006. – P. 630–633.
8. Kukelova, Z. Polynomial Eigenvalue Solutions to the 5-pt and 6-pt Relative Pose Problems / Z. Kukelova, M. Bujnak, T. Pajdla // Proceedings of the British Machine Conference. – 2008. – P. 56.1–56.10.
9. Stewénius, H. Recent Developments on Direct Relative Orientation / H. Stewénius, C. Engels, D. Nistér // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. – 2006. – Vol. 60. – P. 284–294.
10. Cayley, A. Sur Quelques Propriétés des Déterminants Gauches / A. Cayley // J. Reine Angew. Math. – 1846. – Vol. 32. – P. 119–123.

11. Faugeras, O. *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint* / O. Faugeras // MIT Press, 1993. – 663 p.
12. Hartley, R. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. / R. Hartley, A. Zisserman. – Cambridge University Press, 2004. – 655 p.
13. Maybank, S. *Theory of Reconstruction from Image Motion* / S. Maybank // Springer-Verlag, 1993. – 261 p.
14. Hook, D.G. Using Sturm Sequences to Bracket Real Roots of Polynomial Equations / D.G. Hook, P.R. McAree // *Graphic Gems I* : сб. науч. тр. – Academic Press, 1990. – P. 416–422.
15. *Numerical Recipes in C. Second Edition* / W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery. – Cambridge University Press, 1993. – 1020 p.

## ALGORITHMIC SOLUTION OF THE FIVE-POINT POSE PROBLEM BASED ON THE CAYLEY REPRESENTATION OF ROTATION MATRICES

*E.V. Martyushev*<sup>1</sup>

A new algorithmic solution to the five-point relative pose problem is introduced. Our approach is not connected with or based on the famous cubic constraint on an essential matrix. Instead, we use the Cayley representation of rotation matrices in order to obtain a polynomial system of equations from epipolar constraints. Solving that system, we directly obtain positional relationships and orientations of the cameras through the roots for a 10th degree polynomial.

*Keywords: five-point pose problem, calibrated camera, epipolar constraints, Cayley representation.*

### References

1. Kruppa E. Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit Innerer Orientierung. *Sitz-Ber. Akad. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. Abt. IIa*. 1913. Vol. 122. pp. 1939–1948.
2. Demazure M. Sur Deux Problemes de Reconstruction. *INRIA*. 1988. no. RR-0882. pp. 1–29.
3. Faugeras O., Maybank S. Motion from Point Matches: Multiplicity of Solutions. *International Journal of Computer Vision*. 1990. Vol. 4. pp. 225–246.
4. Heyden A., Sparr G. Reconstruction from Calibrated Camera – A New Proof of the Kruppa-Demazure Theorem. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 1999. Vol. 10. pp. 1–20.
5. Philip J. A Non-Iterative Algorithm for Determining all Essential Matrices Corresponding to Five Point Pairs. *Photogrammetric Record*. 1996. Vol. 15. pp. 589–599.
6. Nistér D. An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2004. Vol. 26. pp. 756–777.
7. Li H., Hartley R. Five-Point Motion Estimation Made Easy. *IEEE 18th Int. Conf. of Pattern Recognition*. 2006. pp. 630–633.
8. Kukulova Z., Bujnak M., Pajdla T. Polynomial Eigenvalue Solutions to the 5-pt and 6-pt Relative Pose Problems. *Proceedings of the British Machine Conference*. 2008. pp. 56.1–56.10.
9. Stewénius H., Engels C., Nistér D. Recent Developments on Direct Relative Orientation. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. 2006. Vol. 60. pp. 284–294.
10. Cayley A. Sur Quelques Propriétés des Déterminants Gauches. *J. Reine Angew. Math*. 1846. Vol. 32. pp. 119–123.
11. Faugeras O. *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*. MIT Press, 1993. 663 p.
12. Hartley R., Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision (Second Edition)*. Cambridge University Press, 2004. 655 p.
13. Maybank S. *Theory of Reconstruction from Image Motion*. Springer-Verlag, 1993. 261 p.
14. Hook D.G., McAree P.R. Using Sturm Sequences To Bracket Real Roots of Polynomial Equations. *Graphic Gems I (A. Glassner ed.)*. Academic Press, 1990. pp. 416–422.
15. Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. *Numerical Recipes in C (Second Edition)*. Cambridge University Press, 1993. 1020 p.

*Поступила в редакцию 18 февраля 2013 г.*

<sup>1</sup> Martyushev Evgeniy Vladimirovich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Mathematical analysis department, South Ural State University  
E-mail zhmart@mail.ru

# О ПРОДОЛЖЕНИИ ГОМЕОМОРФИЗМОВ В НУЛЬМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.В. Медведев<sup>1</sup>

Пусть  $X$  – нульмерное однородное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Доказана теорема о продолжении гомеоморфизма  $g: A \rightarrow B$  между счётными непересекающимися компактными подмножествами  $A$  и  $B$  пространства  $X$  до гомеоморфизма  $f: X \rightarrow X$ . Если, дополнительно, пространство  $X$  не псевдокомпактно, то гомеоморфизм  $g$  можно продолжить до гомеоморфизма  $f: X \rightarrow X \setminus A$ .

*Ключевые слова:* однородное пространство, гомеоморфизм, первая аксиома счётности, псевдокомпактное пространство.

В статье изучается возможность продолжения гомеоморфизмов в нульмерных однородных пространствах с первой аксиомой счётности. Интерес к этому вопросу появился после знакомства с одним результатом ван Дауэна [1]. Ван Дауэн показал, что любое нульмерное однородное не дискретное метрическое пространство гомеоморфно своему собственному подмножеству.

*Обозначения.* Запись  $X \approx Y$  означает, что пространства  $X$  и  $Y$  гомеоморфны.  $w(X)$  – вес пространства  $X$ . Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой  $\omega$ , также  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Мы будем предполагать, что любая рассматриваемая последовательность точек состоит из различных точек. Если в пространстве  $X$  последовательность  $\{a_n : n \in \omega\}$  точек сходится к точке  $a \in X$ , то положим  $S(a) = \{a\} \cup \{a_n : n \in \omega\}$ .

Пространство  $X$  называется *однородным*, если для любых двух точек  $a$  и  $b$  из  $X$  найдется гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X$ , для которого  $f(a) = b$ . Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно является  $T_1$ -пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств. Отметим, что каждое нульмерное пространство является тихоновским пространством. Тихоновское пространство называется *псевдокомпактным*, если любая непрерывная вещественная функция, определенная на этом пространстве, ограничена. Пространство называется *сжимаемым*, если оно гомеоморфно некоторому своему собственному подмножеству.

Остальные используемые определения и обозначения можно найти в [2].

**Лемма 1.** Пусть  $X$  – нульмерное однородное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Пусть в пространстве  $X$  даны две сходящиеся последовательности точек  $\{a_n : n \in \omega\}$  и  $\{b_n : n \in \omega\}$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  и  $S(a) \cap S(b) = \emptyset$ .

Тогда для любой открыто-замкнутой окрестности  $U$  точки  $a$  существуют открыто-замкнутая окрестность  $V$  точки  $a$  и гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X$ , такие, что:  $V \subset U$ ,  $f(a) = b$ ,  $f(V) \cap V = \emptyset$ ,  $f \circ f = id_X$ ,  $f(x) = x$  для любой точки  $x \notin V$  и  $\forall i (a_i \in V \Leftrightarrow b_i \in f(V))$ .

*Доказательство.* Так как пространство  $X$  однородное, то существует гомеоморфизм  $g: X \rightarrow X$ , переводящий точку  $a$  в точку  $b$ . Найдем такую открыто-замкнутую окрестность  $W$  точки  $a$ , что  $W \subset U$  и  $g(W) \cap W = \emptyset$ .

Рассмотрим два множества:  $J_a = \{i \in \omega : a_i \in W, b_i \notin g(W)\}$  и  $J_b = \{i \in \omega : a_i \notin W, b_i \in g(W)\}$ . Множества  $J_a$  и  $J_b$  – конечные, так как мы имеем дело со сходящимися последовательностями.

Для каждого  $i \in J_a$  выберем открыто-замкнутую окрестность  $Q_i$  точки  $a_i$  таким образом, чтобы  $Q_i \subset W$  и  $Q_i \cap S(a) = \{a_i\}$ . При этом можно считать, что множества  $\{Q_i : i \in J_a\}$  попарно не пересекаются, так как последовательность  $\{a_n : n \in \omega\}$  состоит из попарно различных точек.

<sup>1</sup> Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Возможны два случая в зависимости от того, принадлежит точка  $g(a_i)$  множеству  $S(b)$  или нет. Поэтому  $J_a = J_{a1} \cup J_{a2}$ , где  $J_{a1} = \{i \in J_a : g(a_i) \notin S(b)\}$  и  $J_{a2} = \{i \in J_a : g(a_i) \in S(b)\}$ .

Первый случай:  $i \in J_{a1}$ . Тогда легко найти такую открыто-замкнутую окрестность  $D_i$  точки  $a_i$ , что  $D_i \subset Q_i$  и  $g(D_i) \cap S(b) = \emptyset$ . В этом случае положим  $g_i = g$ .

Второй случай:  $i \in J_{a2}$ , т.е.  $g(a_i) = b_j$  для некоторого индекса  $j$ . Так как  $X$  – не дискретное пространство, а множество  $g(Q_i) \cap S(b)$  – конечное, то найдется точка  $c_i \in Q_i$ , для которой  $g(c_i) \notin S(b)$ . Зафиксируем гомеоморфизм  $\psi_i : X \rightarrow X$ , переводящий точку  $a_i$  в точку  $c_i$ . Выберем открыто-замкнутую окрестность  $D_i \subset Q_i$  точки  $a_i$  таким образом, чтобы  $D_i \cup \psi_i(D_i) \subset Q_i$ ,  $D_i \cap \psi_i(D_i) = \emptyset$  и  $g(\psi_i(D_i)) \cap S(b) = \emptyset$ . Определим отображение  $g_i : X \rightarrow X$  по правилу:

$$g_i(x) = \begin{cases} g \circ \psi_i(x), & \text{если } x \in D_i, \\ g \circ \psi_i^{-1}(x), & \text{если } x \in \psi_i(D_i), \\ g(x), & \text{если } x \in X \setminus (D_i \cup \psi_i(D_i)). \end{cases}$$

Несложно проверить, что отображение  $g_i$  является гомеоморфизмом и  $g_i(D_i) \cap S(b) = \emptyset$ .

Определим отображение  $g^* : X \rightarrow X$  по правилу:

$$g^*(x) = \begin{cases} g_i(x), & \text{если } x \in D_i \text{ для некоторого } i \in J_a, \\ g(x), & \text{если } x \in X \setminus \bigcup \{D_i : i \in J_a\}. \end{cases}$$

Несложно проверить, что  $g^*$  – гомеоморфизм. По построению,  $W^* = W \setminus \bigcup \{D_i : i \in J_a\}$  – открыто-замкнутая окрестность точки  $a$ . При этом  $g^*(a) = b$  и  $S(b) \cap g(W) = S(b) \cap g^*(W^*)$ .

Отметим, что если  $J_a = \emptyset$ , то полагаем  $W^* = W$  и  $g^* = g$ .

Аналогично, для каждого  $i \in J_b$  выберем открыто-замкнутую окрестность  $E_i$  точки  $b_i$  таким образом, чтобы  $E_i \subset g^*(W^*)$ ,  $E_i \cap S(b) = \{b_i\}$ ,  $S(a) \cap h_i^{-1}(E_i) = \emptyset$ , а сами множества  $\{E_i : i \in J_b\}$  попарно не пересекались бы. При этом гомеоморфизм  $h_i : X \rightarrow X$  определяется через  $g^*$  тем же способом, как был построен гомеоморфизм  $g_i$  на основе отображения  $g$ .

Множество  $V = W^* \setminus \bigcup \{h_i^{-1}(E_i) : i \in J_b\}$  – искомая открыто-замкнутая окрестность точки  $a$ .

Сначала рассмотрим отображение  $h : X \rightarrow X$ , определенное по формуле:

$$h(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{если } x \in h_i^{-1}(E_i) \text{ для некоторого } i \in J_b, \\ g^*(x), & \text{если } x \in X \setminus \bigcup \{h_i^{-1}(E_i) : i \in J_b\}. \end{cases}$$

Затем определим отображение  $f : X \rightarrow X$  по правилу:

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x \in V, \\ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(V), \\ x, & \text{если } x \in X \setminus (V \cup h(V)). \end{cases}$$

Рутинная проверка показывает, что отображение  $f$  – искомое. Лемма 1 доказана.

**Теорема 1.** Пусть  $X$  – нульмерное однородное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Пусть в пространстве  $X$  даны две сходящиеся последовательности точек  $\{a_n : n \in \omega\}$  и  $\{b_n : n \in \omega\}$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  и  $S(a) \cap S(b) = \emptyset$ .

Тогда существует такой гомеоморфизм  $f : X \rightarrow X$ , что  $f \circ f = id_X$ ,  $f(a) = b$  и  $f(a_n) = b_n$  для любого  $n \in \omega$ .

*Доказательство.* Возьмем убывающую базу  $\{U_n^* : n \in \omega\}$  в точке  $a$ , образованную открыто-замкнутыми множествами. По лемме 1 существуют открыто-замкнутая окрестность  $U_0$  точки  $a$  и гомеоморфизм  $g_0 : X \rightarrow X$ , такие, что:  $U_0 \subset U_0^*$ ,  $g_0(a) = b$ ,  $g_0(U_0) \cap U_0 = \emptyset$ ,  $g_0 \circ g_0 = id_X$ ,  $g_0(x) = x$  для любой точки  $x \notin U_0$  и  $\forall i (a_i \in U_0 \Leftrightarrow b_i \in g_0(U_0))$ . Продолжая этот процесс по ин-



дукции, для любого  $n \geq 1$  построим открыто-замкнутую окрестность  $U_n$  точки  $a$  и гомеоморфизм  $g_n: X \rightarrow X$ , такие, что:  $U_n \subset U_n^* \cap U_{n-1}$ ,  $g_n(a) = b$ ,  $g_n(U_n) \cap U_n = \emptyset$ ,  $g_n \circ g_n = id_X$ ,  $g_n(x) = x$  для любой точки  $x \notin U_n$  и  $\forall i (a_i \in U_n \Leftrightarrow b_i \in g_n(U_n))$ . Ясно, последовательность множеств  $\{U_n: n \in \omega\}$  образует убывающую базу в точке  $a$ , а последовательность  $\{g_n(U_n): n \in \omega\}$  образует базу в точке  $b$ . Для любого  $n \in \omega$  определим множество индексов  $J_n = \{i \in \omega: a_i \notin U_n\}$ .

Для каждого  $j \in \omega$  зафиксируем гомеоморфизм  $\chi_j: X \rightarrow X$ , для которого  $\chi_j(a_j) = b_j$ . Возьмем открыто-замкнутую окрестность  $O_j$  точки  $a_j$ . Тогда  $\chi_j(O_j)$  – открыто-замкнутая окрестность точки  $b_j$ . Без ограничения общности можно считать, что множества  $\{O_j: j \in \omega\}$  и  $\{\chi_j(O_j): j \in \omega\}$  попарно не пересекаются,  $\lim_{j \rightarrow \infty} O_j = \{a\}$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j(O_j) = \{b\}$ ,  $O_j \subset U_k \setminus U_{k+1}$  и  $\chi_j(O_j) \subset g_k(U_k) \setminus g_{k+1}(U_{k+1})$ , если точка  $a_j \in U_k \setminus U_{k+1}$  для некоторого  $k \in \omega$ .

Для любого  $n \in \omega$  множество  $J_n$  конечно, поэтому два множества  $V_n = U_n \cup \bigcup \{O_j: j \in J_n\}$  и  $W_n = g_n(U_n) \cup \bigcup \{\chi_j(O_j): j \in J_n\}$  открыто-замкнуты в  $X$ , причем  $S(a) \subset V_n$ ,  $S(b) \subset W_n$ ,  $V_{n+1} \subset V_n$ ,  $W_{n+1} \subset W_n$  и  $V_n \cap W_n = \emptyset$ . Более того,  $f_n(V_n) = W_n$  для гомеоморфизма  $f_n: X \rightarrow X$ , определенно-го индуктивно следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{если } x \in U_n, \\ g_n^{-1}(x), & \text{если } x \in g_n(U_n), \\ \chi_j(x), & \text{если } x \in O_j \text{ для некоторого } j \in J_n, \\ \chi_j^{-1}(x), & \text{если } x \in \chi_j(O_j) \text{ для некоторого } j \in J_n, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $f_n \circ f_n = id_X$ .

Определим отображение  $f: X \rightarrow X$  по правилу  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . В частности,  $f(a) = b$  и  $f(b) = a$ . Покажем, что это определение корректно. Действительно, так как  $\bigcap \{U_n: n \in \omega\} = \{a\}$  и  $\bigcap \{g_n(U_n): n \in \omega\} = \{b\}$ , то для точки  $x \in X \setminus \{a, b\}$  найдется  $n$ , для которого  $x \notin U_n \cup g_n(U_n)$ . Тогда  $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ ; поэтому предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  всегда существует. Несложно проверить, что  $f$  – искомый гомеоморфизм. Теорема 1 доказана.

Точка  $a$  называется *точкой накопления* множества  $A$  в пространстве  $X$ , если  $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$ , где чертой сверху обозначается замыкание в  $X$ . Множество  $A^d$  всех точек накопления множества  $A$  называется *производным множеством* множества  $A$ . Для  $n \in \omega$  определим по индукции *производное множество*  $A^{(n)}$  порядка  $n$  множества  $A$  по правилу:  $A^{(0)} = A$  и  $A^{(n+1)} = (A^{(n)})^d$ . Говорят, что множество  $A$  имеет *ранг*  $n$ , если  $A^{(n-1)} \neq \emptyset$ , а  $A^{(n)} = \emptyset$ . Если  $A^{(n)} = \emptyset$  для некоторого  $n \in \omega$ , то говорят, что множество  $A$  имеет *конечный ранг*.

Следующая теорема усиливает результат теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  – нульмерное однородное пространство с первой аксиомой счётности. Пусть в пространстве  $X$  даны два счётных непересекающихся гомеоморфных компактных множества  $A$  и  $B$  конечного ранга. Тогда любой гомеоморфизм  $g: A \rightarrow B$  продолжается до гомеоморфизма  $f: X \rightarrow X$ , удовлетворяющего условию  $f \circ f = id_X$ .

*Доказательство.* Если  $X$  – дискретное пространство, то  $A$  и  $B$  – конечные множества первого ранга. В этом случае несложно построить нужный гомеоморфизм  $f$ .

Рассмотрим случай, когда пространство  $X$  не дискретное. Тогда  $A$  и  $B$  – нигде не плотные множества. Доказательство проведем индукцией по рангу  $n$  множеств  $A$  и  $B$ .

База индукции:  $n = 1$ . Так как  $A^{(1)} = B^{(1)} = \emptyset$ , то  $A$  и  $B$  – дискретные конечные множества. Значит,  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  и  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ , где  $b_i = g(a_i)$  для  $1 \leq i \leq k$ . По определению, для каждого  $i$  существует такой гомеоморфизм  $f_i: X \rightarrow X$ , что  $f_i(a_i) = b_i$ . Найдем попарно непересекающиеся

ся открыто-замкнутые окрестности  $U_i$  и  $V_i$  точек  $a_i$  и  $b_i$  соответственно. При этом можно считать, что  $f_i(U_i) = V_i$ . Требуемый гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X$  определим по правилу:

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{если } x \in U_i \text{ для некоторого } i, \\ f_i^{-1}(x), & \text{если } x \in V_i \text{ для некоторого } i, \\ x, & \text{если } x \in X \setminus \bigcup\{U_i \cup V_i : 1 \leq i \leq k\}. \end{cases}$$

Допустим, что утверждение верно для любых множеств ранга не больше, чем  $n$ . Возьмем множества  $A$  и  $B$  ранга  $n+1$ . Тогда ранг множеств  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$  равен  $n$ . Ясно, что  $g(A^{(1)}) = B^{(1)}$ . По индуктивному предположению существует продолжение гомеоморфизма  $g$  до гомеоморфизма  $h: X \rightarrow X$ , для которого  $h \circ h = id_X$ ,  $h(B^{(1)}) = A^{(1)}$  и  $h(A^{(1)}) = B^{(1)}$ . Занумеруем точки множества  $A \setminus A^{(1)}$  в последовательность  $\{a_m : m \in \omega\}$ . Тогда  $B \setminus B^{(1)} = \{g(a_m) : m \in \omega\}$ . Применяя рассуждения как в доказательстве леммы 1, можно считать, что  $g(a_m) \neq h(a_k)$  для любых индексов  $m$  и  $k$ . Тогда  $h(A \setminus A^{(1)}) \cap B = \emptyset$  и  $h(B \setminus B^{(1)}) \cap A = \emptyset$ . Для любого  $m \in \omega$  зафиксируем гомеоморфизм  $\chi_m: X \rightarrow X$ , переводящий точку  $a_m$  в точку  $g(a_m)$ . Множество  $A \cup h(A) \cup B \cup h(B)$  нигде не плотно в  $X$ , поэтому существуют такие открыто-замкнутые окрестности  $U_m$  и  $V_m = \chi_m(U_m)$  точек  $a_m$  и  $g(a_m)$  соответственно, что множества  $U_m, V_m, h(U_m) = h^{-1}(U_m)$  и  $h(V_m) = h^{-1}(V_m)$  попарно не пересекаются, а также не пересекаются с множеством  $A^{(1)} \cup B^{(1)}$ . Более того, так как  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$  – компактные множества, то можно считать, что последовательность  $\{U_m, j \in \omega\}$  сходится к точке  $a^* \in A^{(1)} \Leftrightarrow$  последовательность  $\{V_m, j \in \omega\}$  сходится к точке  $g(a^*) = h(a^*) \in B^{(1)} \Leftrightarrow$  последовательность множеств  $\{h(V_m), j \in \omega\}$  сходится к точке  $a^* = h \circ h(a^*) \in A^{(1)}$ . Определим искомого отображение  $f$  следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \chi_m(x), & \text{если } x \in U_m \text{ для некоторого } m, \\ \chi_m^{-1}(x), & \text{если } x \in V_m \text{ для некоторого } m, \\ h \circ \chi_m^{-1} \circ h(x), & \text{если } x \in h^{-1}(V_m) \text{ для некоторого } m, \\ h^{-1} \circ \chi_m \circ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(U_m) \text{ для некоторого } m, \\ h(x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Индуктивный переход закончен. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим вопрос о продолжении гомеоморфизма  $g: A \rightarrow B$  между двумя замкнутыми множествами  $A$  и  $B$  в пространстве  $X$  до гомеоморфизма  $f: X \rightarrow X \setminus A$ .

**Лемма 2.** Пусть в топологическом пространстве  $X$  даны такие две последовательности  $\{U_n : n \in \omega\}$  и  $\{V_n : n \in \omega\}$  открыто-замкнутых множеств, что:

- 1)  $U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ ,
- 2)  $U_0 \cap V = \emptyset$ , где  $V = \bigcup\{V_n : n \in \omega\}$ ,
- 3) семейство множеств  $\{V_n : n \in \omega\}$  дискретно в пространстве  $X$ ,
- 4) для любого  $n \in \omega$  существует гомеоморфизм  $g_n: U_n \rightarrow V_n$ .

Тогда для множества  $A = \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$  существует такой гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X \setminus A$ , что  $f(A) = g_0(A) \subset V_0$ .

*Доказательство.* Определим отображение  $f: X \rightarrow X \setminus A$  по правилу:

$$f(x) = \begin{cases} g_0(x), & \text{если } x \in U_0, \\ g_{n+1} \circ g_n^{-1}(x), & \text{если } x \in g_n(U_{n+1}) \text{ для } n \in \omega, \\ g_n^{-1}(x), & \text{если } x \in V_n \setminus g_n(U_{n+1}) \text{ для } n \in \omega, \\ x, & \text{если } x \notin U_0 \cup V. \end{cases}$$

Учитывая, что  $U_0 \setminus A = \bigoplus \{U_n \setminus U_{n+1} : n \in \omega\}$  и  $f(V_n) = (U_n \setminus U_{n+1}) \cup V_{n+1}$  для любого  $n \in \omega$ , несложно проверить, что  $f$  взаимно однозначно отображает пространство  $X$  на  $X \setminus A$ . Так как множества  $g_n(U_{n+1})$  и  $V_n \setminus g_n(U_{n+1})$  открыто-замкнуты в  $V_n$  (следовательно, и в  $X$ ), множество  $U_0 \cup V$  открыто-замкнуто в  $X$ , а каждое отображение  $g_n$  является гомеоморфизмом, то и отображение  $f$  будет гомеоморфизмом. По построению,  $f(A) = g_0(A) \subset V_0$ . Лемма 2 доказана.

**Теорема 3.** Пусть в нульмерном однородном не псевдокомпактном пространстве  $X$  с первой аксиомой счётности даны две разные точки  $a$  и  $b$ . Тогда существует такой гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X \setminus \{a\}$ , что  $f(a) = b$ .

*Доказательство.* Так как пространство  $X$  нульмерное и не псевдокомпактное, то в  $X$  существует счётная дискретная система  $\{W_n : n \in \omega\}$ , состоящая из открыто-замкнутых множеств. Ясно, что  $W = \bigcup \{W_n : n \in \omega\}$  является открыто-замкнутым множеством в  $X$ . Без ограничения общности можно считать, что  $a \notin W$  и  $b \in W_0$ . В точке  $a$  зафиксируем убывающую базу  $\{U_n^* : n \in \omega\}$ , состоящую из открыто-замкнутых множеств и удовлетворяющую условию  $W \cap U_0^* = \emptyset$ .

Так как пространство  $X$  однородное, то существует гомеоморфизм  $g_0: X \rightarrow X$ , переводящий точку  $a$  в точку  $b$ . Найдем такую открыто-замкнутую окрестность  $U_0$  точки  $a$ , что  $U_0 \subset U_0^*$  и  $V_0 = g_0(U_0) \subset W_0$ . Далее, по индукции, для каждого  $n \geq 1$  найдем гомеоморфизм  $g_n: X \rightarrow X$  и открыто-замкнутую окрестность  $U_n$  точки  $a$  согласно следующим условиям:  $U_n \subset U_{n-1} \cap U_n^*$  и множество  $V_n = g_n(U_n)$  открыто-замкнуто в  $W_n$ . Очевидно, что  $\bigcap \{U_n : n \in \omega\} = \{a\}$ . Для завершения доказательства теоремы 3 остаётся применить лемму 2.

**Следствие 1.** Пусть дано нульмерное однородное не псевдокомпактное пространство  $X$  с первой аксиомой счётности. Тогда  $X$  – сжимаемое пространство.

**Лемма 3.** Пусть в нульмерном однородном пространстве  $X$  дана открыто-замкнутая окрестность  $U^*$  компактного счётного множества  $A$  и дана дискретная система  $\{W_i : i \in \omega\}$ , состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда существуют такие открыто-замкнутые гомеоморфные множества  $U \subset U^*$  и  $V \subset \bigcup \{W_i : i \in \omega\}$ , что  $A \subset U$ .

*Доказательство.* По условию, множество  $A = \bigcup \{a_i : i \in \omega\}$ . Для каждого индекса  $i$  выберем точку  $b_i \in W_i$  и гомеоморфизм  $g_i: X \rightarrow X$ , переводящий точку  $a_i$  в точку  $b_i$ . Найдем открыто-замкнутую окрестность  $U_i$  точки  $a_i$ , удовлетворяющую условиям:  $U_i \subset U^*$  и  $g_i(U_i) \subset W_i$ . Из покрытия  $\{U_i : i \in \omega\}$  компакта  $A$  можно выбрать конечное подпокрытие  $\{U_i : i \leq k\}$ . Заменив множество  $U_i$  на множество  $U_i \setminus \bigcup \{U_j : j < i\}$ , можно считать, что семейство  $\{U_i : i \leq k\}$  состоит из попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств. Тогда множества  $U = \bigcup \{U_i : i \leq k\}$  и  $V = \bigcup \{g_i(U_i) : i \leq k\}$  – искомым. Лемма 3 доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $X$  – нульмерное однородное не псевдокомпактное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Пусть в пространстве  $X$  даны два счётных непересекающихся гомеоморфных компактных множества  $A$  и  $B$  конечного ранга. Тогда существует такой гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X \setminus A$ , что  $f(A) = B$ .

*Доказательство.* Так как пространство  $X$  не псевдокомпактное, то в  $X$  существует счётное дискретное семейство, состоящее из открыто-замкнутых множеств, не пересекающихся с  $A \cup B$ . Занумеруем это семейство как  $\{W_m : m \geq 1, i \in \omega\}$ . Положим  $W = \bigcup \{W_m : m \geq 1, i \in \omega\}$ .

По теореме 2 возьмём гомеоморфизм  $g: X \rightarrow X$ , для которого  $g(A) = B$ . Так как  $A$  и  $B$  – непесекающиеся компакты, то существует открыто-замкнутая окрестность  $U_0$  множества  $A$ , для которой выполняются условия:  $B \subset g(U_0)$ ,  $U_0 \cap W = \emptyset$ ,  $g(U_0) \cap W = \emptyset$  и  $U_0 \cap g(U_0) = \emptyset$ .

С помощью леммы 3 для любого  $n \geq 1$  построим по индукции открыто-замкнутые множества  $U_n$ ,  $V_n$  и гомеоморфизм  $g_n: U_n \rightarrow V_n$ , так, чтобы  $A \subset U_n$ ,  $U_{n+1} \subset U_n$  и  $V_n \subset \bigcup \{W_m : m \in \omega\}$ . При этом можно считать, что  $A = \bigcap \{U_n : n \in \omega\}$ , так как пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счётности. Теперь теорема 4 вытекает из леммы 2.

**Замечание.** Если бы теорему 2 удалось доказать для произвольных счётных компактных множеств, то теорема 4 выполнялась бы для счётных компактных множеств произвольного ранга.

**Теорема 5.** Пусть  $X$  – нульмерное однородное не псевдокомпактное и не дискретное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности. Тогда для любого счётного компактного множества  $Z$  конечного ранга существует такое расширение  $X^*$  пространства  $X$ , что парост  $X^* \setminus X$  гомеоморфен множеству  $Z$ , а само расширение  $X^*$  гомеоморфно  $X$ .

*Доказательство.* Применяя индукцию по рангу множества  $Z$ , несложно проверить, что пространство  $X$  содержит два замкнутых непесекающихся множеств  $A$  и  $B$ , каждое из которых гомеоморфно  $Z$ . По теореме 4 существует такой гомеоморфизм  $f: X \rightarrow X \setminus A$ , что  $f(A) = B$ . Тогда множество  $X \setminus A$  гомеоморфно  $X$  и всюду плотно в  $X$ . Полагая  $X^* = f^{-1}(X \setminus A)$ , получаем нужное расширение пространства  $X$ .

## Литература

1. van Douwen, E.K. A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic / E.K. van Douwen // *Adv. in Math.* – 1984. – Vol. 52. – Issue 1. – P. 1–33.
2. Engelking, R. *General topology* / R. Engelking. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 540 p.

## ABOUT EXTENSION OF HOMEOMORPHISMS OVER ZERO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES

S.V. Medvedev<sup>1</sup>

Let  $X$  be a zero-dimensional homogeneous space satisfying the first axiom of countability. We prove the theorem about an extension of a homeomorphism  $g: A \rightarrow B$  to a homeomorphism  $f: X \rightarrow X$ , where  $A$  and  $B$  are countable disjoint compact subsets of the space  $X$ . If, additionally,  $X$  is a non-pseudocompact space, then the homeomorphism  $g$  is extendable to a homeomorphism  $f: X \rightarrow X \setminus A$ .

*Keywords:* homogeneous space, homeomorphism, first axiom of countability, pseudocompact space.

## References

1. van Douwen E.K. A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic. *Adv. in Math.* 1984. Vol. 52. Issue 1. pp. 1–33.
2. Engelking R. *General topology*. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. 540 p.

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.

<sup>1</sup> Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University  
E-mail medv@math.susu.ac.ru

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.А. Омельченко<sup>1</sup>, М.В. Плеханова<sup>2</sup>, П.Н. Давыдов<sup>3</sup>

Для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля с запаздыванием представлен численный метод решения, исследована сходимость явной разностной схемы, учитывающей эффект запаздывания в исследуемой системе. На основе полученных результатов осуществлена программная реализация метода.

*Ключевые слова:* уравнение соболевского типа, квазистационарная система уравнений фазового поля, разностная схема.

## 1. Введение

В настоящей работе предложен численный метод решения линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля [1] с запаздыванием

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t) - \Delta w(x, t) + \Phi_{11}v'(x, \cdot) + \Phi_{12}w'(x, \cdot), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T], \quad (1)$$

$$0 = v(x, t) + (\beta + \Delta)w(x, t) + \Phi_{21}v'(x, \cdot) + \Phi_{22}w'(x, \cdot), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T], \quad (2)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$v(x, t) = \varphi(x, t), \quad w(x, t) = \psi(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [-r, 0], \quad (4)$$

где  $v'(x, s) = v(x, t + s)$ ,  $w'(x, s) = w(x, t + s)$  при  $s \in [-r, 0]$ ,  $r > 0$ . При этом отображения  $\Phi_{11}: v'(x, \cdot) \rightarrow z_{11}(x, t)$ ,  $\Phi_{12}: w'(x, \cdot) \rightarrow z_{12}(x, t)$  при каждом  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \in [0, T]$  линейно и непрерывно действуют из пространства  $C([-r, 0]; R)$  в  $R$ .

Исследование разрешимости этой задачи в рамках начальной задачи

$$u(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \quad (5)$$

для операторно-дифференциального уравнения соболевского типа с запаздыванием

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi u' + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

было проведено ранее в работах В.Е. Федорова и Е.А. Омельченко [2, 3]. Здесь  $U, F$  – банаховы пространства,  $u'(s) = u(t + s)$  при  $s \in [-r, 0]$ , операторы  $L: U \rightarrow F$ ,  $\Phi: C([-r, 0]; U) \rightarrow F$  линейны и непрерывны,  $\ker L \neq \{0\}$ , оператор  $M: \text{dom}M \rightarrow F$  линейен, замкнут и плотно определен в  $U$ ,  $f: [0, T] \rightarrow F$ . Особенность линейного эволюционного уравнения с запаздыванием (6) в том, что оно является вырожденным в смысле присутствия оператора при производной, не обратимого в силу наличия у него нетривиального ядра. Настоящая работа представляет собой шаг к завершению естественного цикла исследований задач вида (5), (6), заключающемуся в разработке численных методов решения класса задач.

Численным аспектам исследования задач для уравнений с последствием, в том числе задач для функционально-дифференциально-алгебраических уравнений, которые относятся к классу уравнений вида (6), посвящены работы В.Г. Пименова и его учеников [4–6]. В этих работах, в частности, сконструировано семейство сеточных методов для численного решения эволюцион-

<sup>1</sup> Омельченко Екатерина Александровна – старший преподаватель, кафедра гуманитарных и социально-экономических дисциплин, Уральский филиал «Российская академия правосудия»

E-mail omelchenko\_ea@mail.ru

<sup>2</sup> Плеханова Марина Васильевна – доцент, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет

E-mail mariner79@mail.ru

<sup>3</sup> Давыдов Павел Николаевич – аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный университет

E-mail davydov@esu.ru

ных уравнений с, вообще говоря, нелинейной функцией запаздывания на основе идеи разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих.

С помощью результатов работ [2, 3, 5, 6] авторами данной статьи исследована сходимость явной разностной схемы для задачи (1)–(4). В первом параграфе, следуя идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих, показана сходимость сеточного метода для соответствующей задачи без запаздывания ( $\Phi_{ij} = 0, i, j = 1, 2$ ). Во втором параграфе доказана сходимость разностной схемы, учитывающей запаздывание. При этом соответствующая схеме дискретная модель определяется стартовыми значениями, формулой продвижения на шаг и оператором интерполяции и поэтому относится к классу моделей, исследованному в [5, 6] в связи с рассмотрением невырожденных эволюционных уравнений. И, наконец, третий параграф посвящен конкретной программной реализации метода.

## 2. Линеаризованная квазистационарная система уравнений фазового поля

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t) - \Delta w(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T], \quad (7)$$

$$0 = v(x, t) + (\beta + \Delta)w(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T], \quad (8)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (10)$$

где  $\beta < 0$ , а  $v, w$  – искомые функции. Заметим, что начальное значение  $w(x, 0)$  для одной из искомым функций  $w$  не задано. Однако, как показано в [7], задача (7)–(10) однозначно разрешима. В случае же задания обеих начальных функций  $v(x, 0), w(x, 0)$  задача оказывается персепределенной и необходимо выполнение условий согласования данных задачи (7)–(10) для ее разрешимости.

Разобьем отрезок пространственной переменной  $[0, \pi]$  на части с шагом  $h = \pi / N$ , определив тем самым точки  $x_n = nh, n = 0, \dots, N$ . Аналогичным образом разобьем временной отрезок  $[0, T]$  на части с шагом  $\tau > 0$ , получив точки разбиения  $t_m = m\tau, m = 0, \dots, M$ . Приближенные значения функций  $v, w$  в узлах с координатами  $(x_n, t_m)$  будем обозначать через  $v_n^m, w_n^m$ . Рассмотрим сеточный метод

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} = \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{h^2} - \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2}, \quad m = 0, \dots, M-1, \quad (11)$$

$$0 = v_n^m + \beta w_n^m + \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2}, \quad m = 0, \dots, M, \quad (12)$$

где  $n = 1, \dots, N-1$ , с начальными условиями

$$v_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, \dots, N,$$

и граничными условиями

$$v_0^m = v_N^m = w_0^m = w_N^m = 0, \quad m = 0, \dots, M.$$

Невязкой метода (11), (12) назовем сеточную функцию  $\Psi_n^m = (\xi_n^m, \eta_n^m)$ , где

$$\xi_n^m = \frac{v(x_n, t_{m+1}) - v(x_n, t_m)}{\tau} - \frac{v(x_{n+1}, t_m) - 2v(x_n, t_m) + v(x_{n-1}, t_m)}{h^2} + \frac{w(x_{n+1}, t_m) - 2w(x_n, t_m) + w(x_{n-1}, t_m)}{h^2},$$

$$\eta_n^m = v(x_n, t_m) + \beta w(x_n, t_m) + \frac{w(x_{n+1}, t_m) - 2w(x_n, t_m) + w(x_{n-1}, t_m)}{h^2},$$

через  $v(x_n, t_m), w(x_n, t_m)$  обозначены истинные значения решения  $v, w$  задачи (7)–(10) в соответствующих точках. Будем говорить, что невязка имеет порядок  $\tau^{p_1} + h^{p_2}$ , если существует такая

константа  $C$ , не зависящая от  $\tau$  и  $h$ , что  $\|\Psi_n^m\|_{R^2} \leq C(\tau^{p_1} + h^{p_2})$  для всех,  $n=1, \dots, N-1, m=0, \dots, M-1$ .

**Лемма 1.** Пусть точное решение  $v, w$  задачи (7)–(10) таково, что функция  $v$  дважды непрерывно дифференцируема по  $t$ , функции  $v, w$  четырежды непрерывно дифференцируемы по  $x$ . Тогда невязка метода (11), (12) имеет порядок  $\tau + h^2$ .

**Доказательство.** С помощью тейлоровского разложения функций  $v(x, t), w(x, t)$  получим выражения для невязки

$$\xi_n^m = -\frac{1}{2}\tau v_{tt} + \frac{1}{12}h^2(v_{xxxx} + w_{xxxx}), \quad \eta_n^m = -\frac{1}{12}h^2w_{xxxx}. \quad \square$$

Исследуем устойчивость этой схемы методом разделения переменных.

**Теорема 1.** Пусть  $\beta < 0$ . Тогда схема (11), (12) устойчива, если выполнено условие  $\tau \leq h^2$ .

**Доказательство.** Обозначив через  $\rho_q^m, \sigma_q^m$  коэффициенты  $q$ -х гармоник на  $m$ -м слое, имеем

$$v(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{iqx_n}, \quad w(x_n, t_m) = \sigma_q^m e^{iqx_n}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Подстановка этих функций в (11), (12) приведет к равенствам

$$\rho_q^{m+1} - \rho_q^m = \frac{\tau}{h^2}(2\rho_q^m(\cos qh - 1) - 2\sigma_q^m(\cos qh - 1)), \quad (13)$$

$$0 = \rho_q^m + \beta\sigma_q^m + \frac{2\sigma_q^m}{h^2}(\cos qh - 1).$$

Из последнего равенства получим выражение

$$\sigma_q^m = \frac{\rho_q^m}{\frac{2}{h^2}(1 - \cos qh) - \beta} \quad (14)$$

и подставим его в (13), тогда

$$\rho_q^{m+1} = \rho_q^m \left( 1 - \frac{2\tau}{h^2}(1 - \cos qh) \left( 1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \right) \right). \quad (15)$$

Из того, что  $\beta < 0$ , следует неравенство

$$r_q \equiv 1 - \frac{2\tau}{h^2}(1 - \cos qh) \left( 1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \right) \leq 1$$

сразу для всех  $q \in N$ . Покажем, что  $r_q \geq -1$  при любом  $q \in N$ . Для этого надо показать, что

$$\frac{\tau}{h^2}(1 - \cos qh) \left( 1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \right) \leq 1.$$

Это неравенство выполняется при  $\tau \leq h^2$ .

В силу равенств (14) и (15)

$$\begin{aligned} \sigma_q^{m+1} &= \frac{\rho_q^{m+1}}{\frac{2}{h^2}(1 - \cos qh) - \beta} = \frac{\rho_q^m \left( 1 - \frac{2\tau}{h^2}(1 - \cos qh) \left( 1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \right) \right)}{\frac{2}{h^2}(1 - \cos qh) - \beta} = \\ &= \sigma_q^m \left( 1 - \frac{2\tau}{h^2}(1 - \cos qh) \left( 1 - \frac{1}{\frac{2}{h^2}(1 - \cos qh) - \beta} \right) \right). \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент перехода для второй неизвестной функции также равен  $r_q$  и поэтому рассматриваемая разностная схема является устойчивой при  $\tau \leq h^2$ .  $\square$

**Замечание 1.** Анализ доказательства теоремы 1 приводит к выводу, что при  $\beta \geq 0$  не представляется возможным доказать устойчивость предложенной разностной схемы и необходима ее модификация или выбор другого метода вычисления.

В качестве итога полученных результатов сформулируем теорему о сходимости, которая сразу следует из критерия Куранта [8], леммы 1 и теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\beta < 0$  и для разностной схемы (11), (12)  $\tau, h$  таковы, что  $\tau \leq h^2$ . Тогда разностное решение сходится к точному решению задачи (7) – (10) с порядком не ниже  $\tau + h^2$ .

### 3. Система уравнений с запаздыванием

Вернемся к начально-краевой задаче с запаздыванием (1)–(4). Для отрезка пространственной переменной  $[0, \pi]$  имеем прежние разбиение с шагом  $h = \pi/N$  и точками  $x_n = nh, n = 0, \dots, N$ . Временной отрезок теперь имеет вид  $[-r, T]$ . Для определенности считаем, что  $T/r$  – рациональное число, шаг разбиения  $\tau = T/M = r/L$ , где  $L, M \in \mathbb{N}$ , точки разбиения  $t_m = m\tau, m = -L, \dots, 0, \dots, M$ . Помимо приближений  $v_n^m, w_n^m$  искомых функций  $v, w$  понадобится также дискретная предыстория в точке  $x_n$  к моменту  $t_k$ :

$$\left\{ (v_n^m, w_n^m) \right\}_k = \left\{ (v_n^m, w_n^m) : k - L \leq m \leq k \right\}, \quad n = 0, \dots, N, \quad k = 0, \dots, M.$$

Предполагается также, что задан оператор интерполяции дискретной предыстории  $I : \left\{ (v_n^m, w_n^m) \right\}_k \rightarrow (g_n^k, h_n^k) \in Q[-r, 0] \times Q[-r, 0]$ . Здесь  $n = 0, \dots, N, Q[-r, 0]$  – множество кусочно-непрерывных функций на  $[-r, 0]$  с конечным числом точек разрыва первого рода в точках разрыва непрерывных справа. Зададим норму:  $\|g\|_{Q[-r, 0]} = \sup_{s \in [-r, 0]} |g(s)|$  для  $g \in Q[-r, 0]$ . Будем считать,

что линейные операторы  $\Phi_{ij}$  продолжимы на пространство  $Q[-r, 0]$  ограниченным образом.

Следуя работам [4, 5], будем говорить, что оператор интерполяции имеет порядок погрешности  $\tau^p$  на точном решении  $v, w$ , если существуют такие положительные константы  $C_1, C_2$ , что для всех  $n = 0, \dots, N, k = 0, \dots, M$  и  $t \in [t_k - r, t_k]$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left| g_n^k(t) - v(x_n, t) \right| &\leq C_1 \max_{k-L \leq m \leq k} \left| v_n^m - v(x_n, t_m) \right| + C_2 \tau^p, \\ \left| h_n^k(t) - w(x_n, t) \right| &\leq C_1 \max_{k-L \leq m \leq k} \left| w_n^m - w(x_n, t_m) \right| + C_2 \tau^p. \end{aligned}$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} = \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{h^2} - \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + \Phi_{11} g_n^m + \Phi_{12} h_n^m, \quad (16)$$

$$0 = v_n^m + \beta w_n^m + \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + \Phi_{21} g_n^m + \Phi_{22} h_n^m, \quad (17)$$

где  $n = 1, \dots, N-1, m = 0, \dots, M-1$  в (16) и  $m = 0, \dots, M$  в (17), с начальными условиями

$$v_n^0 = \varphi(x_n, 0), \quad w_n^0 = \psi(x_n, 0), \quad n = 0, \dots, N, \quad (18)$$

$$g_n^0(t) = \varphi(x_n, t), \quad h_n^0(t) = \psi(x_n, t), \quad n = 0, \dots, N, \quad t \in [-r, 0], \quad (19)$$

и граничными условиями

$$v_0^m = v_N^m = w_0^m = w_N^m = 0, \quad m = 0, \dots, M. \quad (20)$$

Согласно результатам работ [2, 3] необходимым условием разрешимости задачи (1) – (4) является выполнение условия согласования начальных данных  $\varphi$  и  $\psi$

$$0 = \varphi(x, 0) + (\beta + \Delta)\psi(x, 0) + \Phi_{21}\varphi(x, \cdot) + \Phi_{22}\psi(x, \cdot), \quad x \in (0, \pi).$$



По умолчанию считаем, что оно выполняется.

Невязкой метода (16), (17) назовем сеточную функцию  $\tilde{\psi}_n^m = (\tilde{\xi}_n^m, \tilde{\eta}_n^m)$ , где

$$\tilde{\xi}_n^m = \frac{v(x_n, t_{m+1}) - v(x_n, t_m)}{\tau} - \frac{v(x_{n+1}, t_m) - 2v(x_n, t_m) + v(x_{n-1}, t_m))}{h^2} +$$

$$+ \frac{w(x_{n+1}, t_m) - 2w(x_n, t_m) + w(x_{n-1}, t_m))}{h^2} - \Phi_{11} v'^m(x_n, \cdot) - \Phi_{12} w'^m(x_n, \cdot),$$

$$\tilde{\eta}_n^m = v(x_n, t_m) + \beta w(x_n, t_m) + \frac{w(x_{n+1}, t_m) - 2w(x_n, t_m) + w(x_{n-1}, t_m))}{h^2} + \Phi_{21} v'^m(x_n, \cdot) + \Phi_{22} w'^m(x_n, \cdot).$$

Так же, как теорема 4 в [5], с помощью теоремы 1 настоящей работы об устойчивости схемы (11), (12), теорем 1 и 3 из [5] доказывается следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть  $\beta < 0$ ,  $\tau \leq h^2$ , оператор  $I: R^{2l+2} \rightarrow Q[-r, 0]$  липшицев и имеет порядок погрешности  $\tau^{p_0}$  на точном решении, невязка  $\tilde{\psi}_n^m$  имеет порядок  $\tau^{p_1} + h^{p_2}$ . Тогда разностное решение сходится к точному решению задачи (1)–(4) с порядком  $\tau^{\min\{p_0, p_1\}} + h^{p_2}$ .

Отметим лишь, что требующаяся для доказательства теоремы липшицевость операторов  $\Phi_{ij}$  в данном случае очевидна, поскольку они линейны и ограничены.

#### 4. Численный эксперимент

Пусть  $\Phi_{ij} g = a_{ij} g(-1)$  для  $g \in Q[-1, 0]$ ,  $i, j = 1, 2$ . Другими словами, система (1)–(4) имеет вид

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t) - \Delta w(x, t) + a_{11} v(x, t-1) + a_{12} w(x, t-1), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T], \quad (21)$$

$$0 = v(x, t) + (\beta + \Delta)w(x, t) + a_{21} v(x, t-1) + a_{22} w(x, t-1), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T], \quad (22)$$

и снабжена краевыми и начальными условиями (3), (4). Разностная схема (16), (17) для нее при выборе, например, кусочно-постоянной или кусочно-линейной интерполяции будет иметь вид

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} = \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{h^2} - \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + a_{11} v_n^{m-L} + a_{12} w_n^{m-L}, \quad (23)$$

$$0 = v_n^m + \beta w_n^m + \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + a_{21} v_n^{m-L} + a_{22} w_n^{m-L}, \quad (24)$$

где  $n = 1, \dots, N-1$ ,  $m = 0, \dots, M-1$  в (23) и  $m = 0, \dots, M$  в (24), с начальными условиями (18), (19) и граничными условиями (20). При этом порядок погрешности оператора кусочно-постоянной интерполяции на точном решении равен  $\tau$ , для кусочно-линейной интерполяции –  $\tau^2$  [9]. По аналогии с леммой 1, нетрудно доказать следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть точное решение  $v, w$  задачи (21), (22), (3), (4) таково, что функция  $v$  дважды непрерывно дифференцируема по  $t$ , функции  $v, w$  четырежды непрерывно дифференцируемы по  $x$ . Тогда невязка метода (23), (24) имеет порядок  $\tau + h^2$ .

Теорема 3 влечет

**Следствие 1.** Пусть  $\beta < 0$ ,  $\tau \leq h^2$ , интерполяция кусочно-постоянна или кусочно-линейна.

Тогда разностное решение сходится к точному решению задачи (1)–(4) с порядком  $\tau + h^2$ .

На рис. 1 представлено решение  $(v, w)$  для параметров  $\beta = -0,75$ ,  $T = 10$ ,  $M = 1000$ ,  $N = 16$  с начальным условием  $v(x, 0) = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  для задачи (7)–(10).

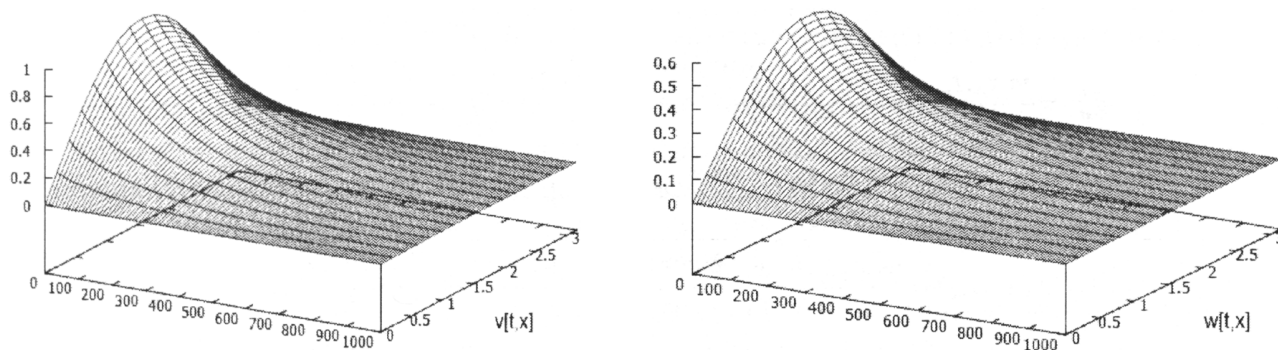


Рис. 1

Для задачи с запаздыванием (1)–(4) при значениях  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ ,  $\beta = -0,75$ ,  $T = 10$ ,  $M = 1000$ ,  $N = 16$ ,  $v(x,t) = (t+1)\sin x$ ,  $(x,t) \in [0,\pi] \times [-1,0]$  решение  $(v,w)$  показано на рис. 2.

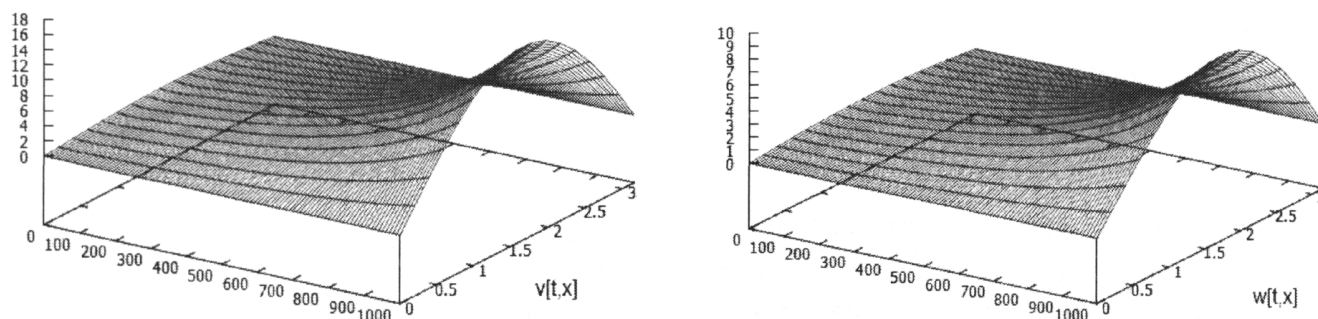


Рис. 2

### Литература

1. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651–669.
2. Fedorov, V.E. On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay / V.E. Fedorov, E.A. Omelchenko // Functional Differential Equations. – 2011. – Vol. 18, № 3–4. – P. 187–199.
3. Федоров, В.Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В.Е. Федоров, Е.А. Омельченко // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 418–429.
4. Лекомцев, А.В. Полуявный метод для численного решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений / А.В. Лекомцев, В.Г. Пименов // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 5. – С. 62–67.
5. Пименов, В.Г. Разностные схемы в моделировании эволюционных управляемых систем с последствием / В.Г. Пименов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 5. – С. 151–158.
6. Пименов, В.Г. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последствием / В.Г. Пименов, А.Б. Ложников // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 178–189.
7. Федоров, В.Е. Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений / В.Е. Федоров, А.В. Уразова // Тр. Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: ВГУ. – 2004. – С. 161–172.
8. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения красных задач / Р. Рихтмайер, К.М. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
9. Ким, А.В. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Ким, В.Г. Пименов. – Ижевск: РХД, 2004. – 256 с.

## NUMERICAL SOLUTION OF DELAYED LINEARIZED QUASISTATIONARY PHASE-FIELD SYSTEM OF EQUATIONS

E.A. Omelchenko<sup>1</sup>, M.V. Plekhanova<sup>2</sup>, P.N. Davydov<sup>3</sup>

For delayed linearized quasistationary phase-field system of equations the numerical method of solution was proposed. The convergence of explicit difference scheme that takes account of delay in the system under investigation was thoroughly studied. On the basis of the results obtained the implementation of the method was realized.

*Keywords:* Sobolev type equation, quasistationary phase-field system of equations, difference scheme.

### References

1. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. *Siberian Mathematical Journal*. 2001. Vol. 42, no. 3. pp. 551–567.
2. Fedorov V.E., Omelchenko E.A. On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay. *Functional Differential Equations*. 2011. Vol. 18, no. 3–4. pp. 187–199.
3. Fedorov V.E., Omel'chenko E.A. *Siberian Mathematical Journal*. 2012. Vol. 53, no. 2. pp. 335–344.
4. Lekomtsev A.V., Pimenov V.G. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 2009. Vol. 53, no. 5. pp. 54–58.
5. Pimenov V.G. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2010. Vol. 16, no. 5. pp. 151–158. (in Russ.).
6. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*. 2011. Vol. 275. Suppl. 1. pp. 137–148.
7. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. *Trudy Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly* (Proc. of the Voronezh Winter Mathematical School). Voronezh: VGU. 2004. pp. 161–172.
8. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Interscience, New York, 1967. 405 p.
9. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-Gladkiy analiz i chislennyye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* (i-differential analysis and numerical methods of solutions of functional and differential equations). Izhevsk: RKhD, 2004. 256 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 15 апреля 2013 г.

<sup>1</sup> Omelchenko Ekaterina Aleksandrovna is Senior Lecturer, Department of Humanities and socio-economic disciplines, Ural Branch of Russian Academy of Justice.

E-mail: omelchenko\_ea@mail.ru

<sup>2</sup> Plekhanova Marina Vasilyevna is Associate Professor, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University.

E-mail: mariner79@mail.ru

<sup>3</sup> Davydov Pavel Nikolaevich is Post-graduate student, Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University

E-mail: davydov@csu.ru

# К ВОПРОСУ ОБ ОТЛИЧИЯХ В ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ<sup>1</sup>

Л.И. Рубина<sup>2</sup>, О.Н. Ульянов<sup>3</sup>

Ранее предложенным геометрическим методом исследования нелинейных уравнений в частных производных исследуются линейное и нелинейное уравнения теплопроводности. Показано, чем обусловлено отличие в поведении решений рассматриваемых уравнений и что в случае нелинейного уравнения приводит к обострению. Выделен некоторый класс решений линейного уравнения, представляющий поверхности уровня рассматриваемого нелинейного уравнения теплопроводности.

*Ключевые слова:* нелинейные уравнения в частных производных, уравнения теплопроводности, точные решения, поверхности уровня.

## Введение

Известно (см., например, серию работ [1–5]), что нелинейные уравнения теплопроводности и некоторые другие нелинейные уравнения в частных производных описывают режимы, значительно отличающиеся от тех режимов, которые наблюдаются, если используется линейная модель процесса. Часто в случае нелинейных моделей наблюдаются так называемые катастрофы, при которых решение неограниченно возрастает за конечный промежуток времени [1].

В данной работе приведены некоторые точные решения для линейного и нелинейного уравнений теплопроводности [1], которые являются хорошей иллюстрацией описанной выше проблемы. Полученные одним и тем же геометрическим методом [6, 7] решения имеют одинаковые поверхности уровня, но их поведение значительно отличается, так как сами решения удовлетворяют разным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), к которым сведены первоначальные уравнения теплопроводности. Аналогично при рассмотрении характеристик уравнений отличие в представлении их решений связано с отличием ОДУ, которые задают условия совместности для получения решения вдоль характеристик. Вид выписанных явно точных решений делает наглядными их отличия и позволяет легко увидеть, почему в нелинейном случае наблюдается обострение, а в линейном случае обострение отсутствует. Приводятся картины течений нелинейного уравнения теплопроводности в зависимости от параметров задачи, которые показывают, как можно отодвинуть по времени момент обострения в решении или, переключаясь на другое решение при подходе к обострению, избежать катастрофы.

## Сведение линейного и нелинейного уравнения теплопроводности к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Будем рассматривать два (линейное и нелинейное) уравнения теплопроводности [1]

$$u_t = ku_{xx} + qu, \quad k = \text{const}, \quad q = \text{const}. \quad (1)$$

$$u_t = ku_{xx} + qu - \alpha u^3, \quad \alpha = \text{const}. \quad (2)$$

Здесь и далее нижние индексы указывают на независимую переменную, по которой вычисляется производная.

В уравнениях (1) и (2) сделаем замену [6]  $u = Q_x$ , тогда получим уравнения

$$Q_{xt} = kQ_{xxx} + qQ_x, \quad (3)$$

$$Q_{xt} = kQ_{xxx} + qQ_x - \alpha Q_x^3. \quad (4)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках программы межрегиональных и межведомственных исследований УрО РАН (проект 12-С-1-1001)

<sup>2</sup> Рубина Людмила Ильинична – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИММ УрО РАН  
E-mail: rl@imm.uran.ru

<sup>3</sup> Ульянов Олег Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ученый секретарь института, ИММ УрО РАН  
E-mail: secretary@imm.uran.ru

Считаем, что существует такая система координат [6, 7], в которой функция  $Q$  зависит от одной независимой переменной:  $Q = Q(\psi(x, t))$ , тогда  $\psi(x, t) = \text{const}$  – поверхность уровня решения  $Q(x, t)$ . В этой системе координат уравнения (3) и (4) соответственно имеют вид

$$kQ'''\psi_x^3 + Q''(-\psi_x\psi_t + 3k\psi_x\psi_{xx}) + Q'(-\psi_{xt} + k\psi_{xxx} + q\psi_x) = 0, \quad (5)$$

$$(kQ''' - \alpha Q'^3)\psi_x^3 + Q''(-\psi_x\psi_t + 3k\psi_x\psi_{xx}) + Q'(-\psi_{xt} + k\psi_{xxx} + q\psi_x) = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее штрих (') указывает на производную по переменной  $\psi$ . Сравнивая (5) и (6), замечаем, что для определения функции  $\psi(x, t)$  имеем одни и те же уравнения, если положим, что  $\psi_x \neq 0$  [6, 7]

$$\frac{-\psi_t + 3k\psi_{xx}}{\psi_x^2} = f_1(\psi), \quad \frac{-\psi_{xt} + k\psi_{xxx} + q\psi_x}{\psi_x^3} = f_2(\psi). \quad (7)$$

Здесь  $f_1(\psi)$ ,  $f_2(\psi)$  – произвольные функции. Будем устанавливать, когда система уравнений (7) совместна. Из первого уравнения системы  $\psi_{xx} = (\psi_t + f_1\psi_x^2)/(3k)$ . Продифференцируем это соотношение по переменной  $x$  и полученную производную  $\psi_{xxx}$  подставим во второе уравнение системы. Разрешив полученное соотношение относительно производной  $\psi_{xt}$ , имеем

$$\psi_{xx} = \frac{\psi_t + f_1\psi_x^2}{3k}, \quad \psi_{xt} = \frac{3}{2}q\psi_x + f_3\psi_x^3 + \frac{1}{3k}f_1\psi_x\psi_t, \quad f_3 = \frac{1}{2}f_1' + \frac{1}{3k}f_1^2 - \frac{3}{2}f_2. \quad (8)$$

Соотношения (8) будут задавать производные второго порядка одной и той же функции, если смешанные производные равны ( $\psi_{xxt} = \psi_{xtx}$ ). Это условие выполняется, когда

$$\psi_{tt} = \frac{3}{2}q\psi_t + \frac{1}{3k}f_1\psi_t^2 + 3f_3\psi_t\psi_x^2 + f_4\psi_x^4, \quad f_4 = 2f_1f_3 + 3kf_3'. \quad (9)$$

Чтобы все полученные вторые производные были производными одной функции  $\psi_{xt}$ , их смешанные производные должны быть равны. Требуем, чтобы  $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ . Условие будет выполняться, если

$$6f_4\psi_t\psi_x^2 + 6f_3\psi_t^2 + 3k(f_4' + f_1f_4/k)\psi_x^4 = 0. \quad (10)$$

Замечаем, что если  $f_3 = 0$ , соотношение (10) обращается в тождество. Полученные результаты приводят к следующему утверждению:

**Утверждение 1.** Система (7) совместна, если вторые производные функции  $\psi(x, t)$  определяются из соотношений (8), (9) и  $f_2 = f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)$ ,  $f_1(\psi)$  – произвольная функция. В этом случае уравнения (5), (6) имеют вид соответственно

$$kQ''' + Q''f_1 + Q'[f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)] = 0; \quad (kQ''' - \alpha Q'^3) + Q''f_1 + Q'[f_1'/3 + 2f_1^2/(9k)] = 0.$$

Если  $f_3 \neq 0$ , то, выписав дифференциальные следствия соотношения (10) и подставив в полученные выражения вторые производные из (8), (9), получим, что  $\psi_x = g_1(\psi)$ ,  $\psi_t = g_2(\psi)$ . Потребовав равенства смешанных производных, будем иметь  $g_2(\psi) = Cg_1(\psi)$ ,  $C = \text{const}$ . Тогда справедливо

**Утверждение 2.** Если  $f_3 \neq 0$ , то  $\psi = \psi(ax + bt)$ ,  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ . Тогда, так как  $u = Q = Q(\psi)\psi_x(\psi)$ , то  $u = u(ax + bt)$  и уравнения (1) и (2) имеют вид соответственно  $-bu_z + ka^2u_{zz} + qu = 0$ ,  $-bu_z + ka^2u_{zz} + qu - \alpha u^3 = 0$ ,  $z = ax + bt$ .

### Отыскание поверхностей уровня для уравнений теплопроводности

Положим, что произвольное  $f_1 = \text{const}$  и  $f_2 = 2f_1^2/(9k) = \text{const}$ . Тогда условие (10) выполняется. Из соотношения (9) находим  $\psi_t$ , считая, что  $x$  – параметр. Предварительно полагая, что  $\psi_t \neq 0$ , запишем (9) в виде  $(1/\psi_t)_t + 1,5q(1/\psi_t) = f_1/(3k)$ . Решаем это линейное уравнение и получаем, что  $\psi_t = 1,5qC(x)\exp(3qt/2)/[1 - f_1C(x)\exp(3qt)/(3k)]$ . Затем из второго соотношения (8) определяем  $\psi_x$ . Получаем, что

$$\psi_x = C_x \exp(3qt/2) / [1 - f_1 C(x) \exp(3qt/2) / (3k)].$$

Требую тождественного выполнения первого соотношения (8), приходим к уравнению для определения  $C(x)$ :  $C_{xx} = qC/(2k)$ . Отсюда  $C(x) = A_1 \exp[\pm x\sqrt{q/(2k)}] + A_2 \exp[\mp x\sqrt{q/(2k)}]$ . Здесь  $A_1 = \text{const}$ ,  $A_2 = \text{const}$ . Далее положим, что  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$  и выпишем для этого случая окончательный вид  $\psi_t$  и  $\psi_x$

$$\psi_t = \frac{3q \exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}] / 2}{1 - f_1 \exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}] / (3k)}, \quad \psi_x = \frac{\pm \sqrt{q/(2k)} \exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - f_1 \exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}] / (3k)}.$$

В выражении для  $\psi_x$  знак перед числителем выражения совпадает со знаком в показателе степени экспоненты. Далее, находим, что поверхность уровня в этом случае имеет вид

$$\psi = -3k \ln \{1 - f_1 \exp[(3qt/2) \pm x\sqrt{q/(2k)}] / (3k)\} / f_1. \quad (11)$$

Положим  $f_2 = 0$ . Тогда  $f_1(\psi) = 3k / (2\psi + \psi_0)$ ,  $\psi_0 = \text{const}$  (см. утверждение 1). Требуем далее, чтобы вторые производные функции  $\psi(x,t)$  удовлетворяли условиям (8), (9). Решая уравнение (9) и второе уравнение из (8) и считая при этом, что  $x$  – параметр, получаем, что

$$\psi_t = \sqrt{2\psi + \psi_0} [M(x) + 3q\sqrt{2\psi + \psi_0} / 2], \quad \psi_x = N(x)\sqrt{2\psi + \psi_0} \exp(3qt/2).$$

Требую тождественного выполнения первого условия (8), окончательно получаем

$$\psi = \frac{2k^2}{q^2} \left[ \pm \sqrt{\frac{q}{2k}} \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - \frac{M}{3k} \right]^2 - \frac{\psi_0}{2}, \quad M = \text{const}, \quad \psi_0 = \text{const}. \quad (12)$$

Заметим, что знаки перед экспонентой и в показателе степени экспоненты совпадают.

Из условия  $f_2 = 0$  следует, что  $\psi_t - k\psi_{xx} - q\psi = A = \text{const}$ . Нетрудно проверить, что если  $\psi_0 = 4M^2 / (9q^2)$ , то подстановка функции  $\psi(x,t)$  из (2) в уравнение (1) дает  $A = 0$ . Итак, имеем

**Следствие 1.** Решение  $u(x,t) = (2k^2/q^2) \{ \pm \sqrt{q/(2k)} \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] - M/(3k) \}^2 - \psi_0/2$  линейного дифференциального уравнения  $u_t = ku_{xx} + qu + C$ , где  $M = \text{const}$ ,  $\psi_0 = \text{const}$ ,  $C = C(q, M, \psi_0)$ , является поверхностью уровня уравнения (2).

**Следствие 2.** Решение  $u(x,t) = (2k^2/q^2) \{ \pm \sqrt{q/(2k)} \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] - M/(3k) \}^2 - \psi_0/2$  линейного дифференциального уравнения (1) является поверхностью уровня уравнения (2), если  $\psi_0 = 4M^2 / (9q^2)$ .

Положим, что  $f_2 = \alpha Q'^2(\psi)$ , тогда согласно утверждению 1 система уравнений (7) совместна, если

$$f_1' / 3 + 2f_1^2 / (9k) = f_2 = \alpha Q'^2. \quad (13)$$

С другой стороны, уравнение (6) в этом случае будет иметь вид  $kQ''' + Q''f_1 = 0$ . Выражая отсюда  $f_1$  и подставляя полученное значение в (13), приходим к зависимости

$$Q'''Q'' - 5Q''^2 / 3 + 3\alpha Q''^2 Q'^2 / k = 0.$$

Решая это уравнение, получаем частное решение  $Q' = \mp \sqrt{2k/\alpha} (3\psi + \psi_0)$ , где  $\psi_0 = \text{const}$ . Далее из (13) определяем, что  $f_1 = 6k / (3\psi - \psi_0)$ . Требуем, чтобы выполнялись соотношения (8), (9). В результате окончательно получаем, что

$$\psi = \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3q} \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - c \right]^3 - \frac{\psi_0}{3}, \quad c = \text{const}. \quad (14)$$

### Точные решения уравнений теплопроводности

Определяем  $Q(\psi)$  из уравнений (случай  $f_1 = \text{const}$ )

$$kQ''' + Q''f_1 + Q'[f_1' / 3 + 2f_1^2 / (9k)] = 0; \quad (kQ''' - \alpha Q'^3) + Q''f_1 + Q'[f_1' / 3 + 2f_1^2 / (9k)] = 0.$$

Решая линейное уравнение для  $Q(\psi)$ , находим, что

$$Q' = C_1 \exp[-f_1 \psi / (3k)] + C_2 \exp[-2f_1 \psi / (3k)], \quad C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const}.$$

Учитывая, что решение уравнения (1)  $u = Q_x = Q' \psi_x$ , получаем

$$u = \frac{\pm \sqrt{q/(2k)} \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - f_1 \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]/(3k)} \{C_1 \exp[-f_1 \psi / (3k)] + C_2 \exp[-2f_1 \psi / (3k)]\}.$$

Подставив сюда выражение для  $\psi$  из (11), имеем

$$u = \pm \sqrt{\frac{q}{2k}} \exp\left(\frac{3q}{2}t \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) \left\{ C_1 + C_2 \left[ 1 - \frac{f_1}{3k} \exp\left(\frac{3q}{2}t \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) \right] \right\}.$$

Решаем нелинейное уравнение для  $Q(\psi)$ . Полагаем, что  $Q' = p(\psi)$ , а затем полагаем, что  $p' = r(p)$ . В результате приходим к уравнению  $krr_p + f_1 r = \alpha p^3 - 2f_1^2 p / (9k)$ . Находим частное решение данного уравнения вида  $r = ap^2 + bp$ , где  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ . Получаем, что  $a = \pm \sqrt{\alpha/(2k)}$ ,  $b = f_1 / (3k)$ . Возвращаясь к первоначальному уравнению, имеем

$$Q' = -\frac{f_1 / (3k)}{\pm \sqrt{\alpha/(2k)} - C \exp[f_1 \psi / (3k)]}, \quad C = \text{const}.$$

Учитывая, что решение уравнения (2)  $u = Q_x = Q' \psi_x$ , выпишем окончательно решение уравнения (2)

$$u = \frac{\pm [f_1 / (3k)] \sqrt{q/\alpha} \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1 / (3k)] \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}]}, \quad C = \pm C_0 \sqrt{\frac{\alpha}{2k}}. \quad (15)$$

Здесь знак числителя не зависит от знака в показателе экспоненты, то есть фактически имеется четыре решения

$$\begin{aligned} u &= \frac{[f_1 / (3k)] \sqrt{q/\alpha} \exp[3qt/2 + x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1 / (3k)] \exp[3qt/2 + x\sqrt{q/(2k)}]}, & u &= \frac{-[f_1 / (3k)] \sqrt{q/\alpha} \exp[3qt/2 + x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1 / (3k)] \exp[3qt/2 + x\sqrt{q/(2k)}]}, \\ u &= \frac{[f_1 / (3k)] \sqrt{q/\alpha} \exp[3qt/2 - x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1 / (3k)] \exp[3qt/2 - x\sqrt{q/(2k)}]}, & u &= \frac{-[f_1 / (3k)] \sqrt{q/\alpha} \exp[3qt/2 - x\sqrt{q/(2k)}]}{1 - C_0 - [f_1 / (3k)] \exp[3qt/2 - x\sqrt{q/(2k)}]}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для случая, когда  $f_2 = 0$  уравнение (5) имеет вид  $Q''' + 3Q'' / (2\psi + \psi_0) = 0$ . Решая это уравнение, определяем, что  $Q' = C_1 - C_2 / \sqrt{2\psi + \psi_0}$ ,  $C_1 = \text{const}$ ,  $C_2 = \text{const}$ . Тогда окончательно получаем, учитывая (12), что

$$u = \frac{2k}{q} C_1 \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) \left[ \pm \sqrt{\frac{q}{2k}} \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - \frac{M}{3k} \right] - C_2 \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right).$$

Если  $f_2 = 0$ , то уравнение (6) имеет вид  $(Q''' - \alpha Q'^3 / k) + 3Q'' / (2\psi + \psi_0) = 0$ . Выпишем частное решение этого уравнения:  $Q' = \pm \sqrt{2k/\alpha} [1 / (2\psi + \psi_0)]$ . Соответствующее решение уравнения (6) будет иметь вид

$$u = \frac{q}{k} \sqrt{\frac{2k}{\alpha}} \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) \left[ \pm \sqrt{\frac{q}{2k}} \exp\left(\frac{3}{2}qt \pm x\sqrt{\frac{q}{2k}}\right) - \frac{M}{2k} \right]^{-1}. \quad (17)$$

Если поверхность уровня определяется выражением (14), решение уравнения (2) имеет вид

$$u = \pm \sqrt{q/\alpha} \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] \{ \exp[3qt/2 \pm x\sqrt{q/(2k)}] - c \}^{-1}, \quad c = \text{const}. \quad (18)$$

Здесь знак перед выражением для  $u$  может не совпадать со знаком в показателе экспоненты (имеем, фактически, четыре решения).

#### Другой подход к изучению поведения решений нелинейного уравнения теплопроводности

Покажем, что характеристиками уравнений (1) и (2) являются линии  $t = \text{const}$ .

Чтобы доказать это утверждение, в уравнении (2) перейдем от функции  $u(x, t)$  к функции  $u(u, x)$  [8]. Получим

$$t_u^2 + k(t_u^2 t_{xx} - 2t_x t_u t_{xu} + t_x^2 t_{uu}) - (qu - \alpha u^3) t_u^3 = 0. \quad (19)$$

В уравнении (19) сделаем замену независимых переменных  $u - \varphi(x) = \xi$ ,  $x = \eta$ :

$$t_\xi^2 + k[t_\xi^2(t_{\eta\eta} - 2t_{\xi\eta}\varphi_x + t_{\xi\xi}\varphi_x^2 - t_\xi\varphi_{xx}) - 2t_\xi(t_\eta - t_\xi\varphi_x)(t_{\xi\eta} - t_{\xi\xi}\varphi_x) + t_{\xi\xi}(t_\eta - t_\xi\varphi_x)^2] - [q(\xi + \varphi) - \alpha(\xi + \varphi)^3] t_\xi^3 = 0.$$

Полагая, что  $\xi = \text{const}$  – характеристика уравнения (19), выпишем выражение перед производной  $t_{\xi\xi}$  и приравняем его нулю. Получим, что  $t_\eta = 0$ . Отсюда следует, что на характеристике  $\xi = \text{const}$  имеем  $t = \text{const}$ . Тогда, чтобы уравнение (19) имело решение, вдоль характеристики должно выполняться условие совместности  $t_\xi^2 - kt_\xi^3\varphi_{xx} - [q(\xi + \varphi) - \alpha(\xi + \varphi)^3] t_\xi^3 = 0$ . Решая это ОДУ, в случае, когда  $\alpha = 0$  (уравнение (1)), и заменяя  $\xi + \varphi = u$ , получаем, что вдоль характеристики  $t = \text{const}$  должно выполняться соотношение

$$u(t, x) = \{w_0(t) + c_0(t) \sin[\pm(x + c_1(t))\sqrt{q/k}]\} / q, \\ c_0(t) = \text{const}, \quad w_0(t) = \text{const}, \quad c_1(t) = \text{const}. \quad (20)$$

Подробнее остановимся на решении уравнения (2). Выпишем вид уравнения, считая, что  $x(u, t)$  – независимая переменная

$$x_t x_u^2 - kx_{uu} + (qu - \alpha u^3) x_u^3 = 0. \quad (21)$$

Когда  $\alpha \neq 0$ , требуя выполнения вдоль характеристики  $t = \text{const}$  условия совместности, приходим к выражению

$$x = c_1 \pm \int \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 / (4k) - qu^2 / (4k) + w_0 u + c_0}}. \quad (22)$$

Здесь, вообще говоря, можно положить  $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t), w_0 = w_0(t)$  и, подставляя полученное выражение в уравнение (21), получить соотношения для определения неизвестных функций  $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t), w_0 = w_0(t)$ . Чтобы представить в этом случае характер изменения интересующей нас функции  $u(x, t)$ , преобразуем выражение под знаком корня в интеграле (22):

$$\alpha u^4 / (4k) - qu^2 / (4k) + w_0 u + c_0 = [\alpha / (4k)][u^2 + 2a(t)u - (q/\alpha - 2a^2(t) - b(t))][u^2 - 2a(t)u - (q/\alpha - 2a^2(t) + b(t))]$$

и таким образом вычисление интеграла (22) приведем к выражению его через эллиптический интеграл первого рода, обратной функцией которого является функция Вейерштрасса [9]. Следовательно вдоль любой характеристики  $t = \text{const}$  имеем  $u(x, t) = \wp(x)$  ( $\wp(x)$  – функция Вейерштрасса). Известно также [10], что функция Вейерштрасса имеет полюсы, приближение к которым, очевидно, будет приводить к обострению в решении, что не наблюдается в решении (20) линейного уравнения (1).

### Заключение

Из полученных решений уравнения (2) следует, что катастрофа в процессах, которые описываются данным уравнением, возникает тогда, когда знаменатель решения (а он присутствует в решениях нелинейного уравнения (15)–(18) и у функции Вейерштрасса) стремится к нулю.

На рис. 1 показано поведение решения нелинейного уравнения в зависимости от времени (1:  $t = 0$ ; 2:  $t = 0,5$ ; 3:  $t = 1$ ; 4:  $t = 1,5$ ; 5:  $t = 2$ ; 6:  $t = 2,5$ ). На рис. 2 имеем вид решения в зависимости от времени для линейного уравнения (1:  $t = 0$ ; 2:  $t = 0,1$ ; 3:  $t = 0,5$ ; 4:  $t = 1$ ; 5:  $t = 1,5$ ).

В выражениях (15), (17), (18) сразу виден управляющий параметр, выбор которого позволяет, по крайней мере, отодвинуть катастрофу в случае нелинейного уравнения – это произвольная постоянная в знаменателе решения нелинейного уравнения (см. рис. 3, вид  $u(x, t)$  для разных произвольных постоянных  $c$  в знаменателе решения при  $t = 1$  (1:  $c = 100$ ; 2:  $c = 1000$ ; 3:  $c = 2500$ ; 4:  $c = 4000$ ; 5:  $c = 7000$ ).

Величина произвольной постоянной в знаменателе связана со значением решения в точке  $\{x = 0, t = 0\}$ . Так, в решении (18)  $c = [\pm\sqrt{q/\alpha} - u(0,0)] / u(0,0)$ . Если  $u(0,0) = \mp\sqrt{q/\alpha}$ , то  $c = 0$  и



$u(x,t) = \text{const} = \mp \sqrt{q/\alpha}$ . Катастрофы удастся избежать также, если при стремлении знаменателя выражения к нулю сменить знак в числителе на противоположный (рис. 4, вид решения  $u(x,t)$  в случае задания разных произвольных постоянных  $c$  в знаменателе решения, 1:  $c = 1600$ ; 2:  $c = 2800$ ; 3:  $c = 4900$ ). Здесь возрастающие ветви решений получены, когда перед выражением (15) знак плюс, а убывающие участки решений получены, когда перед выражением (15) задавался знак минус (см. (16)). При каждом заданном значении  $u(0,0)$  увеличение времени процесса ведет к приближению катастрофы (рис. 1, сравните с поведением решения в зависимости от времени в случае линейного уравнения рис. 2).

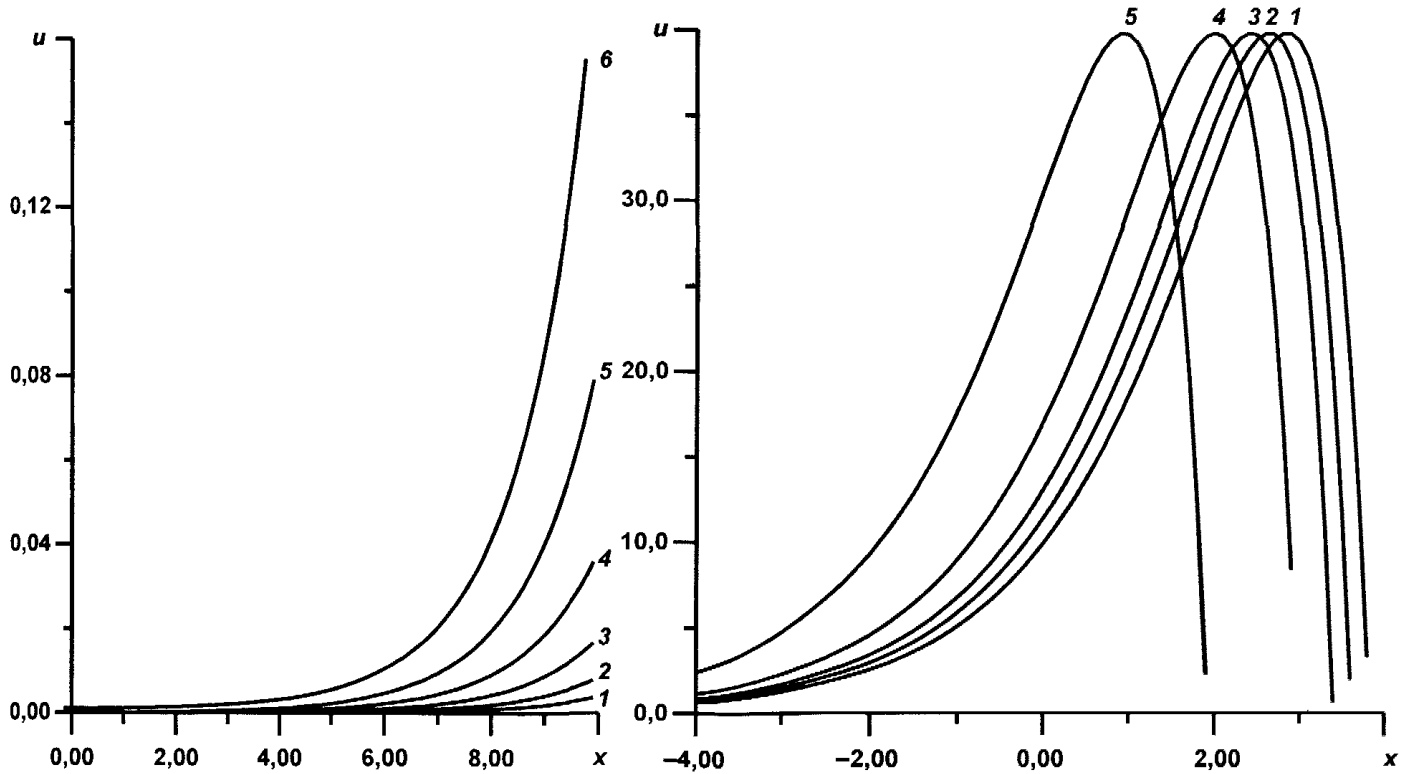


Рис. 1. Вид решения нелинейного уравнения

Рис. 2. Вид решения линейного уравнения

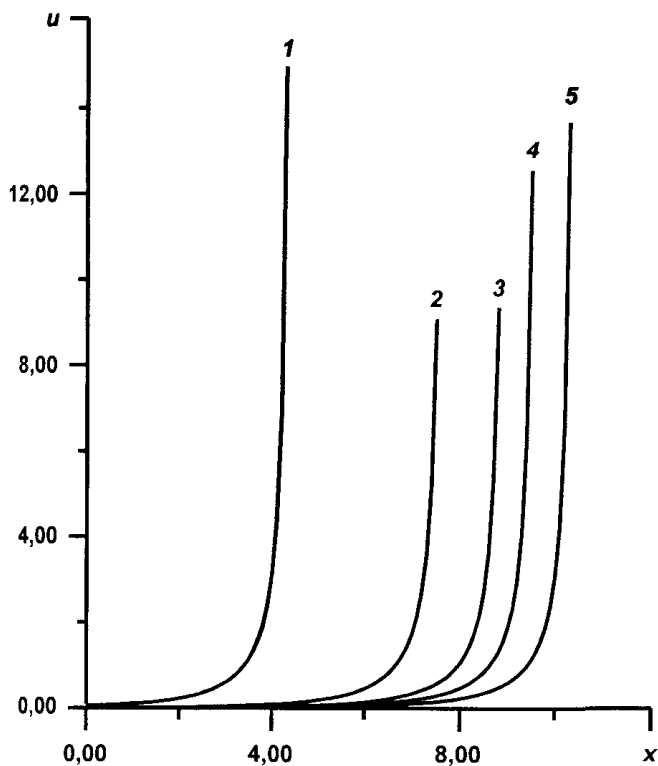


Рис. 3. Вид решения при различных постоянных

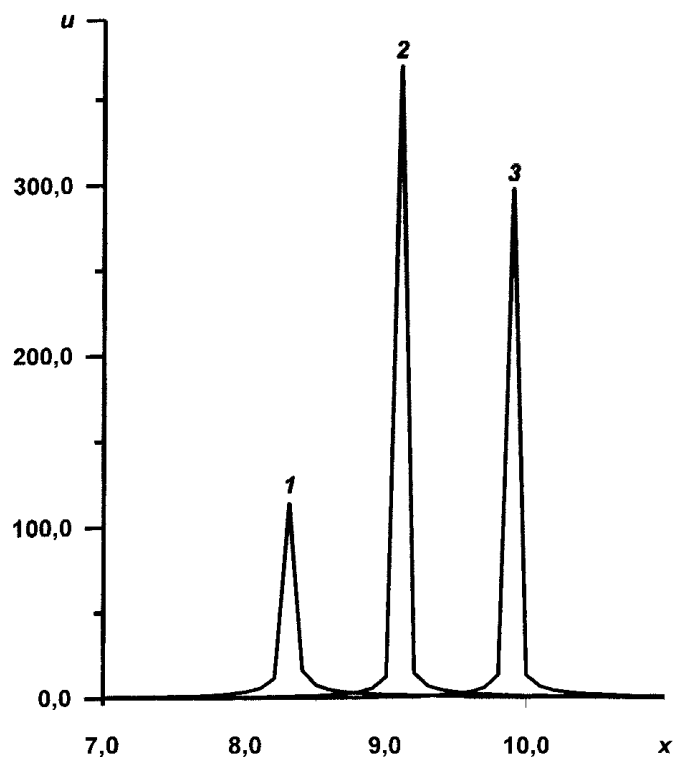


Рис. 4. Вид решения при смене знака

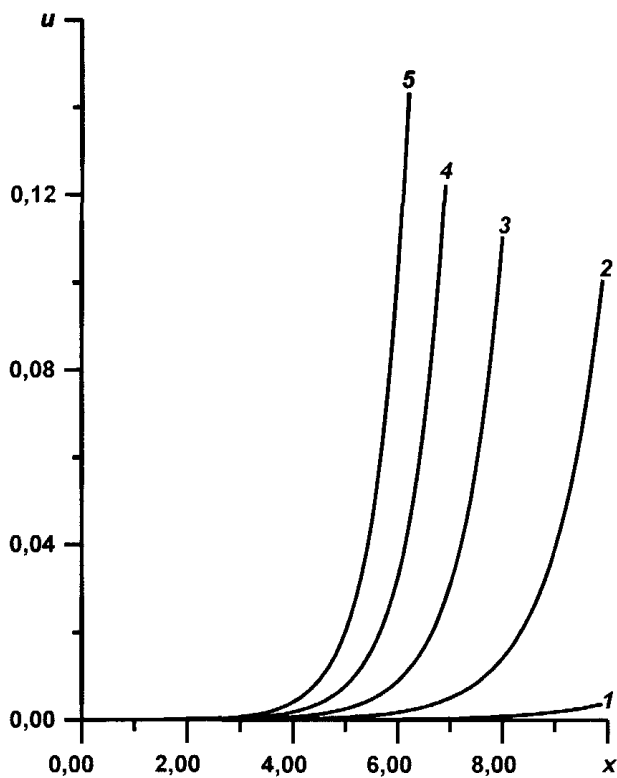


Рис. 5. Зависимость решения от параметра  $q$

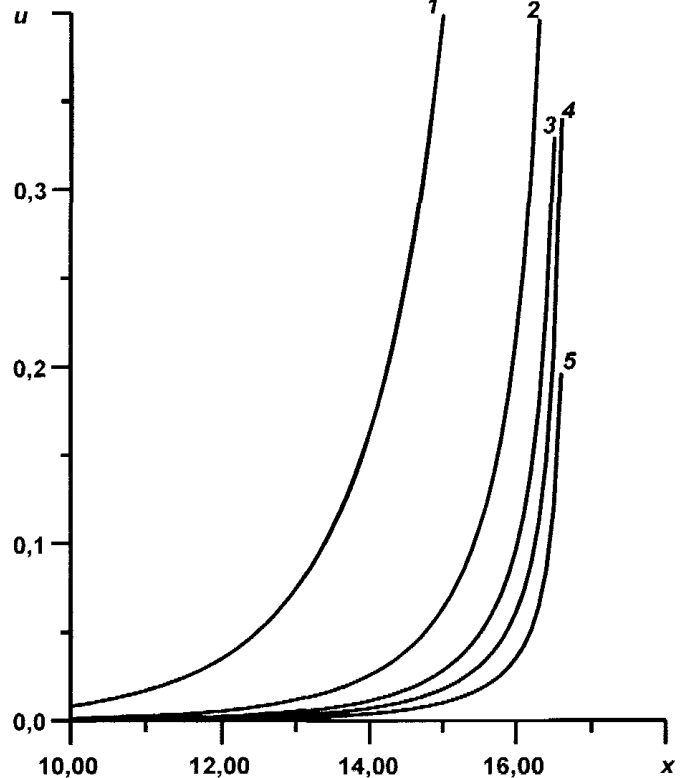


Рис. 6. Зависимость решения от параметра  $\alpha$

На рис. 5 показана зависимость решения от параметра  $q$ . Увеличение этого параметра приближает катастрофу ( $1: q = 1; 2: q = 2; 3: q = 3; 4: q = 4; 5: q = 5$ ). Изменение параметра  $\alpha$  слабо влияет на решение, но большие его значения заметно отодвигают катастрофу (см. рис. 6;  $1: \alpha = 1; 2: \alpha = 40; 3: \alpha = 200; 4: \alpha = 500; 5: \alpha = 1500$ ).

### Литература

1. Курдюмов, С.П. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Наука, 1996. – 111 с.
2. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / Самарский А.А., Галактионов В.А. и др. – М.: Наука, 1987. – 477 с.
3. Vazquez, J.L. A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations. A Dynamical System Approach / J.L. Vazquez, V. – Birkhauser Verlag, 2004. – 377 p.
4. Беркович, Л.М. Некоторые аналитические методы нелинейной динамики / Л.М. Беркович // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2005. – № 2(36). – С. 32–64.
5. Куркина, Е.С. О режимах с обострением в уравнениях  $u_t = \text{div}(u^\sigma \text{grad } u) + u^\beta$  / Е.С. Куркина, И.М. Никольский // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. – Новосибирск, 2008. – С. 512.
6. Рубина, Л.И. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных / Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. – Т. 16, № 2. – С. 209–225.
7. Рубина, Л.И. О решении уравнения потенциала / Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. – Т.14, № 1. – С. 130–145.
8. Рубина, Л.И. О характеристиках и решениях одномерного нестационарного уравнения фильтрации / Л.И. Рубина // ПММ. – 2005. – Т. 69. – Вып. 5. – с. 829–836.
9. Ломкаци, Ц.Д. Таблицы эллиптической функции Вейерштрасса. Теоретическая часть / Ц.Д. Ломкаци; под ред. В.М. Белякова, К.А. Карпова. – М.: ВЦ АН СССР, 1967. – 88 с.
10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматлит, 1962. – 1100 с.

## TOWARDS THE DIFFERENCES IN BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF LINEAR AND NON-LINEAR HEAT-CONDUCTION EQUATIONS

L.I. Rubina<sup>1</sup>, O.N. Ul'yanov<sup>2</sup>

The linear and non-linear heat-conduction equations are analyzed by the previously initiated geometrical method of analyzing linear and non-linear equations in partial derivatives. The reason of the difference in behavior of solutions of equations under consideration was stated, as well as the reason of aggravation of the non-linear equation. A class of solutions of linear equations that represents the surfaces of the levels of non-linear heat-conduction equations was excluded.

*Keywords:* non-linear equations in partial derivatives, heat-conduction equations, exact solutions, surfaces of the level.

### References

1. Kurdyumov S.P., Malinetskiy G.G., Potapov A.B. Nestatsionarnye struktury, dinamicheskiy kaos, kletochnye avtomaty. Novoe v sinergetike. Zagadki mira neravnovesnykh struktur (Unsteady structures, dynamic chaos, cellular automata. New in synergetics. Mysteries of the world of nonequilibrium structure). Moscow: Nauka, 1996. 111 p. (in Russ.).
2. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* (Blow-up regimes in problems for quasilinear parabolic equations). Moscow: Nauka, 1987. 477 p. (in Russ.).
3. Vazquez J.L., Galaktionov V. *A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations. A Dynamical System Approach*. Birkhauser Verlag, 2004. 377 p. (ISBN: 0-8176-4146-7)
4. Berkovich L.M. *Vestnik SamGU – Estestvennonauchnaya seriya*. 2005. no. 2(36). pp. 32–64. (in Russ.).
5. Kurkina E.S., Nikol'skiy I.M. O rezhimakh s obostreniem v uravneniyakh  $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$  (About blow-up regimes in equations  $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$ ). *Differentsial'nye uravneniya. Funktsional'nye prostranstva. Teoriya priblizheniy: Tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya Sergeya L'vovicha Soboleva*. (Abstracts of the International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Sobolev “Differential Equations. Functional Space. Theory of Approximation”) Novosibirsk, 2008. p. 512.
6. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 209–225. (in Russ.).
7. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*. 2008, Vol. 261. Suppl. 1. pp. 183–200.
8. Rubina L.I. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005. Vol. 69. Issue 5. pp. 829–836. (in Russ.).
9. Lomkatsi Ts.D. *Tablitsy ellipticheskoy funktsii Veyershtrassa. Teoreticheskaya chast'* (Weierstrass elliptic function charts. Theoretical part). Moscow: VTs AN SSSR, 1967. – 88 p. (in Russ.).
10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* (Table of integrals, sums, series and compositions). Moscow : Fizmatlit, 1962. 1100 p.

Поступила в редакцию 17 сентября 2012 г.

<sup>1</sup> Rubina Lyudmila Il'michna is Cand Sc (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch)

E-mail rli@imm.uran.ru

<sup>2</sup> Ul'yanov Oleg Nikolaevich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, University's academic secretary, Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch)

E-mail secretary@imm.uran.ru

# ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РИСКАМ И СОЖАЛЕНИЯМ СИТУАЦИЯХ В ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

Н.Г. Солдатова<sup>1</sup>

Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц. Качество функционирования игроков оценивается четырехкомпонентным векторным критерием, где учитываются исход (выигрыш), риск и сожаления игроков. Рассмотрены понятия оптимальных ситуаций бескоалиционной игры «с точки зрения» таких векторных оценок. Приведен пример. На основе принципа гарантированного результата и функции сожаления, введенной Сэвиджем, формализовано решение рассматриваемой игры. Установлено существование данного решения.

*Ключевые слова:* стратегия, равновесие по Нэшу, максимум, сожаление по Сэвиджу, риск по Вальду.

**Введение.** Рассмотрим математическую модель конфликта, которая представляет собой бескоалиционную игру двух лиц с дополнительным учетом рисков и сожалений [1, 2]:

$$\langle \{X_i\}_{i \in \{1,2\}}, \{f_i(x_1, x_2), \varphi_i(x_1, x_2), R_V^i(x_i), R_S^i(x_i)\}_{i \in \{1,2\}} \rangle. \quad (1)$$

В (1) предполагаем, что каждый  $i$ -ый игрок выбирает «свою» стратегию  $x_i \in X_i \subseteq \text{comp} \mathbf{R}^n$ ; в результате возникает ситуация  $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ ; скалярные функции  $f_i(x_1, x_2)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) выигрыша игроков предполагаются непрерывными на произведении компактов  $X_1 \times X_2$ .

*Ситуационное сожаление по Сэвиджу для  $i$ -го игрока* определим как

$$\varphi_i(x) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_1, x_2) - f_i(x_1, x_2) \quad (i \in \{1, 2\}).$$

*Стратегический риск по Вальду  $i$ -го игрока* положим

$$R_V^i(x_i) = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_k \in X_k} f_i(x_1, x_2) - \min_{x_k \in X_k} f_i(x_1, x_2) \quad (i, k \in \{1, 2\}, i \neq k).$$

*Стратегическое сожаление по Сэвиджу*

$$R_S^i(x_i) = \max_{x_k \in X_k} \varphi_i(x_1, x_2) - \min_{x_i \in X_i, x_k \in X_k} \varphi_i(x_1, x_2) \quad (i, k \in \{1, 2\}, i \neq k).$$

Отметим, что риск по Вальду  $R_V^i(x_i)$  и сожаление по Сэвиджу  $R_S^i(x_i)$  для каждого из игроков ( $i \in \{1, 2\}$ ) определены как стратегические, то есть являются скалярными функциями только от выбранной стратегии  $x_i \in X_i$ . Вследствие непрерывности функций  $f_i(x_1, x_2)$  и компактности множеств  $X_i$  все указанные максимумы и минимумы существуют, причем функции  $\varphi_i(x_1, x_2)$ ,  $R_V^i(x_i)$ ,  $R_S^i(x_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) будут непрерывными.

В игре (1) игрок  $i$  оценивает ситуацию  $(x_1, x_2)$  векторным критерием

$$(f_i(x_1, x_2), \varphi_i(x_1, x_2), R_V^i(x_i), R_S^i(x_i)), \quad (2)$$

причем значение первой компоненты  $f_i(x_1, x_2)$  он стремится (за счет выбора  $x_i \in X_i$ ) максимизировать, а значения остальных компонент желает получить возможно меньшими.

**1. Оптимальные стратегии с учетом рисков и сожалений.** Исследуем: каковы значения компонент векторных оценок (2) при условии оптимальности стратегий игроков?

Общепринятым понятием оптимальности в бескоалиционной игре является концепция равновесия (по Нэшу). Именно, пусть бескоалиционная игра двух лиц в нормальной форме описывается упорядоченным набором:

$$\langle \{X_i\}_{i \in \{1,2\}}, \{f_i(x_1, x_2)\}_{i \in \{1,2\}} \rangle, \quad (3)$$

где каждый  $i$ -й игрок оценивает ситуацию  $(x_1, x_2)$  данной игры значением «своей» скалярной функции выигрыша  $f_i(x_1, x_2)$ .

<sup>1</sup> Солдатова Наталья Геннадьевна – старший преподаватель, кафедра математики и физики, Московский государственный областной гуманитарный институт. E-mail: solnata@pochta.ru

*Утверждение 1.* Если в бескоалиционной игре двух лиц (3) ситуация  $(x_1^e, x_2^e)$  является равновесной (по Нэшу), то есть

$$\begin{cases} f_1(x_1^e, x_2^e) \geq f_1(x_1, x_2^e) & \forall x_1 \in X_1, \\ f_2(x_1^e, x_2^e) \geq f_2(x_1^e, x_2) & \forall x_2 \in X_2, \end{cases}$$

то ситуационные сожаления по Сэвиджу в ситуации равновесия  $(x_1^e, x_2^e)$  равны нулю. Верно и обратное, если  $\varphi_i(x_1^*, x_2^*) = 0$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), то ситуация  $(x_1^*, x_2^*)$  будет равновесной по Нэшу.

Данное утверждение сразу следует из определений равновесия по Нэшу и ситуационных сожалений по Сэвиджу.

*Утверждение 2.* Пусть в бескоалиционной игре двух лиц (3) стратегия первого игрока  $x_1^*$  является максиминной, то есть  $\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1, x_2) = \min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1^*, x_2)$ .

Тогда стратегический риск первого игрока  $R_V^1(x_1^*) = 0$ .

Аналогично, если стратегия второго игрока  $x_2^*$  является максиминной, именно

$$\max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2^*),$$

то стратегический риск второго игрока  $R_V^2(x_2^*) = 0$ .

Также из равенства нулю стратегического риска игрока следует, что его соответствующая стратегия будет максиминной.

*Утверждение 3.* Предположим, что в антагонистической игре  $\langle \{X_i\}_{i \in \{1, 2\}}, f(x_1, x_2) \rangle$  функция выигрыша первого игрока  $f_1(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ , функция выигрыша второго игрока  $f_2(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$  и ситуация  $(x_1^e, x_2^e)$  является равновесной (седловой точкой). Тогда

1) ситуационные сожаления по Сэвиджу в ситуации равновесия равны нулю, то есть  $\varphi_i(x_1^e, x_2^e) = 0$  ( $i \in \{1, 2\}$ );

2) стратегические риски по Вальду для равновесных стратегий равны нулю, то есть  $R_V^i(x_i^e) = 0$  ( $i \in \{1, 2\}$ );

3) если  $(x_{11}^e, x_{21}^e)$  и  $(x_{12}^e, x_{22}^e)$  – две равновесные ситуации (седловые точки), то они эквивалентны для обоих игроков «с точки зрения» значений функций выигрыша, то есть  $f(x_{11}^e, x_{21}^e) = f(x_{12}^e, x_{22}^e)$ .

Таким образом, для любых равновесных ситуаций (седловых точек)  $(x_1^e, x_2^e)$  антагонистической игры первые три компоненты векторных оценок  $(f_i(x_1^e, x_2^e), \varphi_i(x_1^e, x_2^e), R_V^i(x_i^e), R_S^i(x_i^e))$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) ситуаций  $(x_1^e, x_2^e)$  игры для обоих игроков совпадают (с учетом равенства  $f_2(x_1^e, x_2^e) = -f_1(x_1^e, x_2^e)$ ).

Проиллюстрируем «важность» четвертой компоненты векторной оценки ситуаций равновесия антагонистической игры на примере матричной игры.

Рассмотрим конечную (матричную) игру

$$\langle X_1 = \{x_1^1, \dots, x_1^m\}, X_2 = \{x_2^1, \dots, x_2^n\}, A = (a_{ij}) \rangle \quad (4)$$

с действительной  $m \times n$ -матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где стратегия  $x_1^i \in X_1$  первого игрока означает выбор  $i$ -ой строки матрицы  $A$ , стратегия  $x_2^j \in X_2$  второго игрока есть выбор  $j$ -ого столбца этой же матрицы, значения функций выигрыша игроков

в ситуации  $(x_1^i, x_2^j)$  определяются элементом  $a_{ij}$  матрицы  $A = (a_{ij})$ , именно,

$$f_1(x_1^i, x_2^j) = f(x_1^i, x_2^j) = a_{ij}, \quad f_2(x_1^i, x_2^j) = -f(x_1^i, x_2^j) = -a_{ij}. \quad (5)$$

**Формализуем матричную игру с учетом рисков и сожалений**

$$\Gamma_A = \left\langle \{X_k\}_{k \in \{1,2\}}, A = (a_{ij}), \{\Phi_k = (\varphi_{ij}^k)\}_{k \in \{1,2\}}, \{R_V^1(x_1^i)R_V^2(x_2^j), R_S^1(x_1^i), R_S^2(x_2^j)\} \right\rangle,$$

где  $X_1 = \{x_1^1, \dots, x_1^m\}$  – множество стратегий первого игрока,  $X_2 = \{x_2^1, \dots, x_2^n\}$  – совокупность стратегий второго игрока, значения функций выигрыша игроков в ситуации  $(x_1^i, x_2^j)$  определены выше.

Определим матрицы ситуационных сожалений игроков и их риски при выборе соответствующих стратегий. Матрица  $\Phi_1 = (\varphi_{ij}^1)$  ситуационных сожалений по Сэвиджу для первого игрока вычисляется следующим образом:

$$\varphi_{ij}^1 = \varphi_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{x_1^i \in X_1} f_1(x_1^i, x_2^j) - f_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} a_{ij} - a_{ij},$$

для второго игрока компоненты матрицы  $\Phi_2 = (\varphi_{ij}^2)$  ситуационных сожалений по Сэвиджу есть

$$\varphi_{ij}^2 = \varphi_2(x_1^i, x_2^j) = \max_{x_2^j \in X_2} f_2(x_1^i, x_2^j) - f_2(x_1^i, x_2^j) = a_{ij} - \min_{j \in \{1, \dots, n\}} a_{ij}.$$

Стратегический риск по Вальду для первого игрока при выборе стратегии  $x_1^i$  равен

$$R_V^1(x_1^i) = \max_{x_1^i \in X_1} \min_{x_2^j \in X_2} f_1(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_2^j \in X_2} f_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} a_{ij} - \min_{j \in \{1, \dots, n\}} a_{ij},$$

для второго игрока при реализации стратегии  $x_2^j$  стратегический риск по Вальду

$$R_V^2(x_2^j) = \max_{x_2^j \in X_2} \min_{x_1^i \in X_1} f_2(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_1^i \in X_1} f_2(x_1^i, x_2^j) = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} a_{ij} - \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} a_{ij}.$$

Стратегическое сожаление по Сэвиджу для первого игрока при выборе стратегии  $x_1^i$  равно

$$R_S^1(x_1^i) = \max_{x_2^j \in X_2} \varphi_1(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_2^j \in X_2} \max_{x_1^i \in X_1} \varphi_1(x_1^i, x_2^j) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \varphi_{ij}^1 - \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \varphi_{ij}^1,$$

для второго игрока при реализации стратегии  $x_2^j$  стратегическое сожаление по Сэвиджу

$$R_S^2(x_2^j) = \max_{x_1^i \in X_1} \varphi_2(x_1^i, x_2^j) - \min_{x_1^i \in X_1} \max_{x_2^j \in X_2} \varphi_2(x_1^i, x_2^j) = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \varphi_{ij}^2 - \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \varphi_{ij}^2.$$

Приведем определение седловой точки матричной игры (4). Пусть задана матричная игра (4), где значения функции выигрыша первого игрока в ситуации  $(x_1^i, x_2^j)$  определены в (5).

Ситуация  $(x_1^k, x_2^t) \in X_1 \times X_2$  является равновесной (седловой точкой игры), если

$$f(x_1^k, x_2^t) \leq f(x_1^k, x_2^{t'}) \leq f(x_1^{k'}, x_2^t)$$

для всех стратегий  $x_1^k \in X_1$  первого игрока и любой стратегии  $x_2^t \in X_2$  второго игрока.

В матричной форме последнее условие имеет вид  $a_{kt} \leq a_{t'j} \leq a_{it}$  для всех  $k \in \{1, \dots, m\}, t \in \{1, \dots, n\}$ .

*Пример.* Рассмотрим антагонистическую (матричную) игру, в которой у каждого игрока по четыре чистых стратегии. Игра задана матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

В данной игре четыре равновесия  $(x_1^2, x_2^2), (x_1^2, x_2^4), (x_1^3, x_2^2), (x_1^3, x_2^4)$ , причем в каждой равновесной ситуации выигрыш первого игрока (проигрыш второго) равен двум единицам.

Вычислим стратегические сожаления игроков для равновесных стратегий:

$$R_S^1(x_1^2), R_S^1(x_1^3), R_S^2(x_2^2), R_S^2(x_2^4).$$

Компоненты матрицы  $\Phi_S^1 = (\varphi_{ij}^1)$  сожалений (ситуационных) первого игрока вычисляются по формуле:

$$\varphi_{ij}^1 = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Получаем

$$\Phi_S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 11 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $\Phi_S^2 = (\varphi_{ij}^2)$  сожалений второго игрока определяются равенствами:

$$\varphi_{ij}^2 = \max_j (-a_{ij}) - (-a_{ij}) = a_{ij} - \min_j a_{ij},$$

здесь учитываем тот факт, что  $f_2(x_1^i, x_2^j) = -a_{ij}$ . Поэтому

$$\Phi_S^2 = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно принципу минимаксного сожаления получаем:

$$\min_i \max_j \varphi_{ij}^1 = 4, \quad \min_j \max_i \varphi_{ij}^2 = 3.$$

Используя равенства

$$R_S^1(x_1^i) = \max_j \varphi_{ij}^1 - \min_j \max_j \varphi_{ij}^1 \quad \text{и} \quad R_S^2(x_2^j) = \max_i \varphi_{ij}^2 - \min_j \max_i \varphi_{ij}^2,$$

находим стратегические сожаления:

$$R_S^1(x_1^2) = 0, \quad R_S^1(x_1^3) = 1, \quad R_S^2(x_2^2) = 0, \quad R_S^2(x_2^4) = 2.$$

Следовательно, существует единственное равновесие  $(x_1^2, x_2^2)$  в данной игре, для которого все риски и сожаления каждого игрока нулевые.

## 2. S-оптимальные по рискам и сожалениям равновесные стратегии

Исходной игре (1) поставим в соответствие две двухкритериальные задачи:

$$\Gamma_1 = \langle X_1^e, \{-R_V^1(x_1), -R_S^1(x_1)\} \rangle,$$

где  $X_1^e$  – множество равновесных стратегий первого игрока,

$$\Gamma_2 = \langle X_2^e, \{-R_V^2(x_2), -R_S^2(x_2)\} \rangle,$$

где  $X_2^e$  – множество равновесных стратегий второго игрока.

*Определение 1.* Равновесные стратегии  $x_1^e \in X_1^e$  первого и  $x_2^e \in X_2^e$  второго игроков в игре (1) назовем s-оптимальными по рискам и сожалениям, если они являются максимальными по Слейтеру для задач  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно.

*Теорема 1.* Пусть в игре (1) выполнено:

1) множества  $X_1$  и  $X_2$  выпуклы и компактны;

2) функция  $f_1(x_1, x_2)$  непрерывна на  $X_1 \times X_2$  и вогнута по  $x_1$  при любых фиксированных значениях  $x_2 \in X_2$ ;

3) функция  $f_2(x_1, x_2)$  непрерывна на  $X_1 \times X_2$  и вогнута по  $x_2$  для каждого  $x_1 \in X_1$ .

Тогда в (1) существуют  $s$ -оптимальные равновесные стратегии для каждого игрока.

Данное утверждение следует из достаточных условий существования равновесных ситуаций в бескоалиционной игре двух лиц, компактности множества равновесий по Нэшу и свойств максимальных по Слейтеру решений для многокритериальных задач.

**Теорема 2.** Пусть  $x_1^e \in X_1^e$ ,  $x_2^e \in X_2^e$  есть  $s$ -оптимальные по рискам и сожалениям равновесные стратегии игроков.

Тогда  $x_1^e$  является максиминным по Слейтеру решением [3] четырехкритериальной задачи

$$\Gamma_1^* = \left\langle X_1^e, X_2, \{f_1(x_1, x_2), -\varphi_1(x_1, x_2), -R_V^1(x_1), -R_S^1(x_1)\} \right\rangle.$$

Соответственно  $x_2^e$  будет также максиминным по Слейтеру решением для задачи

$$\Gamma_2^* = \left\langle X_1, X_2^e, \{f_2(x_1, x_2), -\varphi_2(x_1, x_2), -R_V^2(x_2), -R_S^2(x_2)\} \right\rangle.$$

**Заключение.** Рассмотренные утверждения и пример показывают: добавление рисков и сожалений игроков к их функциям выигрышей позволяет в ряде случаев выделить в игре *единственное равновесие* по Нэшу.

## Литература

1. Бардин, А.Е. Риски и сожаления игроков в игровых моделях / А.Е. Бардин // Материалы 3-ей международной научно-практической конференции. МГОГИ. Орехово-Зуево. – 2010. – С. 86–89.
2. Бардин, А.Е. Риски и сожаления ЛПР в игре с природой / А.Е. Бардин, Ю.Н. Житенева // Международный научный журнал «Спектральные и эволюционные задачи». Симферополь. – 2012. – Т. 22. – С. 2–5.
3. Zhukovskiy, V.I. The Vector-Valued Maximin / V.I. Zhukovskiy, M.E. Salukvadze. – N.Y. etc.: Academic Press, 1994. – 282 p.

## ABOUT OPTIMUM ON RISKS AND REGRETS SITUATIONS IN GAME OF TWO PERSONS

*N.G. Soldatova*<sup>1</sup>

Non-cooperative game of two persons is considered. Quality of functioning of players is estimated by four-component vector criterion. Here an outcome (payoff), risk and regrets of players are considered. Concepts of optimum situations of non-cooperative game from the point of view of the stated vector estimates are considered. The example is given. Solution of game is based on the principle of guaranteed result and function of regret used by Savage. Existence of this solution is established.

*Keywords:* strategy, Nash equilibrium, maximin, Savage regret, Wald risk.

## References

1. Bardin A.E. Riski i sozhaleniya igrokov v igrovyykh modelyakh. Materialy 3-ey mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Risks and regret players in the game models. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference). MGOGI. Orekhovo-Zuevo, 2010. pp. 86–89. (in Russ.).
2. Бардин А.Е., Житенева Ю.Н. Mezhdunarodnyy nauchnyy zhurnal «Spektral'nye i evolyutsionnye zadachi». Simferopol'. 2012. Vol. 22. pp. 2–5. (in Russ.).
3. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin*. N.Y. etc.: Academic Press, 1994. 282 p.

*Поступила в редакцию 1 августа 2013 г.*

<sup>1</sup> Soldatova Natalya Gennadevna is Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities  
E-mail: solnata@pochta.ru



# О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Е.В. Табаринцева<sup>1</sup>

Рассмотрена задача с обратным временем для полулинейного дифференциального уравнения. Устойчивое приближенное решение данной нелинейной некорректно поставленной задачи строится методом проекционной регуляризации с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева. Получена точная по порядку оценка погрешности этого метода на одном из классов корректности.

*Ключевые слова:* обратная задача, нелинейное дифференциальное уравнение, метод приближенного решения, оценка погрешности.

## Введение

В статье рассматривается задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения.

Данная задача поставлена некорректно, поэтому основными вопросами при ее исследовании являются вопросы построения устойчивого приближенного решения и оценки погрешности приближенного решения.

Для линейных некорректно поставленных задач вопросы построения приближенных решений и оценки погрешности построенных приближенных решений на классах корректности рассматривались, например, в работах В.К. Иванова, В.Н. Страхова, их учеников и последователей (см., напр., [1–3]). Были введены понятия оптимального и оптимального по порядку метода приближенного решения [1].

Соответствующие понятия были введены и для нелинейных некорректно поставленных задач [4, 5].

Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $M \subset U$ , а  $C[H]$  – пространство непрерывных отображений, действующих в  $H$ .

Рассмотрим операторное уравнение

$$A_0 u = f; u \in H; f \in H, \quad (1)$$

где  $A_0 \in C[H]$  – взаимно-однозначный оператор.

Предположим, что при  $f = f_0$  существует точное решение  $u_0$  уравнения (1), которое принадлежит множеству  $M$ , но точное значение правой части нам не известно, а вместо него дано приближенное значение  $f_\delta \in H$  такое, что  $\|f_0 - f_\delta\| \leq \delta$ . Требуется по исходным данным задачи  $M$  и  $f_\delta$  определить приближенное решение уравнения (1) и оценить его отклонение от точного решения.

*Определение 1.* Семейство операторов  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве  $M$ , если для любого  $\delta \in (0; \delta_0]$  оператор  $T_\delta$  непрерывно отображает пространство  $H$  в  $H$  и  $T_\delta f_\delta \rightarrow u_0$  при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно на множестве  $M$  при условии  $\|A_0 u_0 - f_\delta\| \leq \delta$ .

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  на множестве  $M$ :

$$\Delta(T_\delta) = \sup \{ \|u - T_\delta f_\delta\| : u \in M, \|A_0 u - f_\delta\| \leq \delta \}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \sup \{ \|u_1, u_2\| : u_1, u_2 \in M, \|A_0 u_1 - A_0 u_2\| \leq \tau \}$$

<sup>1</sup> Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: eltab@rambler.ru

модуль непрерывности оператора, обратного к  $A_0$ , на множестве  $A_0M$ .

*Определение 2.* Метод  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  будем называть оптимальным по порядку на множестве  $M$ , если существует число  $k$  такое, что для любого  $\delta \in (0; \delta_0]$

$$\Delta(T_\delta) \leq k\omega_1(\delta; M).$$

Различные подходы к приближенному решению нелинейных некорректно поставленных задач предложены и исследованы, например, в монографиях [6–9] и статьях [10, 11].

В настоящей работе предложен метод приближенного решения полулинейной обратной задачи (модификация метода проекционной регуляризации) и доказана его оптимальность по порядку на одном из классов корректности.

## 1. Задача с обратным временем для дифференциально-операторного уравнения.

Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $A$  – линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $H$ .

Рассмотрим задачу вычисления элемента  $\varphi \in H$ , такого, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -Au + f(t, u(t)); \quad t \in (t_0; T), \\ u(t_0) &= \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T, \end{aligned} \quad (2)$$

удовлетворяет условию  $u(T) = \chi$ . Здесь  $f : [t_0; T] \times H \rightarrow H$  – отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной  $u$  и условию Гельдера по переменной  $t$ , т.е. существуют постоянные  $L > 0$ ,  $K > 0$  и  $0 < \alpha < 1$ , такие,

$$\|f(u_1, t) - f(u_2, t)\|_H \leq L \|u_1 - u_2\|_H$$

для всех  $t_1, t_2 \in [t_0; T]$ ,  $u_1, u_2 \in H$ .

Зафиксируем число  $r > 0$ . Рассмотрим множество

$$M = \{\varphi \in D(e^{At_0}) : \|e^{At_0}\varphi\| \leq r\}.$$

Предположим, что при заданном  $\chi \in H$  существует точное решение  $\varphi \in H$  поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству  $M$ .

Элемент  $\chi \in H$  нам не известен, а вместо него дано приближенное значение  $\chi_\delta \in H$ , такое, что  $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$ . Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение  $\varphi_\delta$  задачи с обратным временем и оценить его отклонение от точного решения.

Задача Коши (2) равносильна интегральному уравнению

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}\varphi + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (3)$$

(см., напр., [12]).

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \chi_1 - \chi_2 \| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2 \| \leq \delta\} -$$

Наряду с нелинейной обратной задачей, рассмотрим соответствующую обратную задачу для линейного уравнения, т.е. задачу вычисления элемента  $\varphi \in H$  такого, что решение задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Av; \quad t \in (t_0; T), \quad (2)$$

$$v(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию  $v(T) = \tilde{\chi}$ , где  $\tilde{\chi} \in H$  – заданный элемент.

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \chi_1 - \chi_2 \| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup \{\| \varphi_1 - \varphi_2 \| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \| \hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2 \| \leq \delta\} -$$

модуль непрерывности для соответствующей линейной обратной задачи.

Справедлива следующая лемма (см. [13]).

**Лемма.** Существует  $\delta_0 > 0$ , такое, что для всех  $\delta < \delta_0$  выполняются неравенства

$$\hat{\omega}(M, e^{-Ll} \delta) \leq \omega(M, \delta) \leq \hat{\omega}(M, e^{Ll} \delta).$$

### 3. Метод приближенного решения задачи с обратным временем.

Обозначим через  $\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$  разложение единицы, порожденное оператором  $A$ . Пусть  $A_\alpha$  – линейный ограниченный оператор в  $H$ , определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2) рассмотрим задачу вычисления элемента  $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$ , где  $u^\alpha(t)$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha(t)}{dt} &= -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \\ u^\alpha(T) &= E_\alpha \chi. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha(t)}{dt} &= -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \\ u^\alpha(t_0) &= \varphi_\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\varphi_\alpha = E_\alpha \varphi_\alpha$ .

Так как  $A_\alpha$  – ограниченный самосопряженный оператор в  $H$ , то задача Коши (5) равносильна интегральному уравнению

$$u^\alpha(t) = e^{-A_\alpha(t-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha + \int_{t_0}^t e^{-A_\alpha(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u^\alpha(\tau)) d\tau. \tag{6}$$

Выполняется

**Теорема.** Для любого элемента  $\chi \in H$  существует элемент  $\varphi = \varphi_\alpha \in E_\alpha H$ , такой, что решение  $u(t)$  задачи Коши (5) удовлетворяет условию  $u^\alpha(T) = E_\alpha \chi$ .

*Доказательство.* Рассмотрим решение задачи Коши (5), которое удовлетворяет также интегральному уравнению (6). Из (6) следует, что функция  $u^\alpha(t)$  удовлетворяет также уравнению

$$u^\alpha(t) = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{A_\alpha(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u^\alpha(\tau)) d\tau \tag{7}$$

Рассмотрим в пространстве  $C([t_0; T] \rightarrow H)$  непрерывных функций на  $[0; T]$  со значениями в  $H$  норму

$$\|u\|_k = \max_{t_0 \leq t \leq T} e^{-kt} \|u(t)\|_H,$$

эквивалентную норму

$$\|u\|_k = \max_{t_0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H$$

пространства  $C([t_0; T] \rightarrow H)$ . Рассмотрим оператор  $P_\alpha$ , действующий в  $C([t_0; T] \rightarrow H)$  по правилу

$$P_\alpha u = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{A_\alpha(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Имеем неравенство (для любых  $u_1, u_2 \in C([0; T] \rightarrow H)$ )

$$\begin{aligned} \|P_\alpha u_1 - P_\alpha u_2\|_k &\leq L e^{\alpha T} \max_{t_0 \leq t \leq T} \int_t^T e^{-k(t-\tau)} e^{-k\tau} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_H d\tau \leq \\ &\leq L e^{\alpha t} \|u_1 - u_2\|_k \max_{t_0 \leq t \leq T} \int_t^T e^{-k(t-\tau)} d\tau \leq L e^{\alpha t} \frac{1 - e^{-kI}}{k} \|u_1 - u_2\|_k. \end{aligned}$$

Выбирая  $k > L e^{\alpha I}$ , убеждаемся, что отображение  $P_\alpha$  является сжимающим в пространстве  $C([t_0; T] \rightarrow H)$  с нормой  $\|\cdot\|_k$ . Следовательно, уравнение (7) имеет единственное решение в  $C([t_0; T] \rightarrow H)$ . Обозначим  $B_\alpha : H \rightarrow E_\alpha H$  оператор, действующий по правилу

$$B_\alpha \chi = u^\alpha(t_0),$$

где  $u^\alpha(t)$  – решение уравнения (7). Тогда

$$\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0) = B_\alpha \chi - \tag{8}$$

искомый элемент, определяемый элементом  $\chi$  однозначно. Теорема доказана.

**4. Оценка погрешности метода проекционной регуляризации.**

Обозначим  $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$ , где  $u^\alpha(t)$  – решение задачи (4);  $\varphi_\delta^\alpha = \varphi_\delta^\alpha(t_0)$ , где  $u_\delta^\alpha(t)$  – решение задачи (4) с приближенными исходными данными. В качестве приближенного решения задачи с обратным временем рассмотрим элемент  $\varphi_\delta^{\alpha(\delta)} = P_{\alpha(\delta)} \chi_\delta$  при подходящем выборе зависимости  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

Рассмотрим величину

$$\Delta_M(\alpha, \delta) = \sup \{ \|\varphi_\delta^\alpha - \varphi\| : \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta \},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения задачи (2) на введенном множестве  $M$ .

Воспользуемся неравенством

$$\Delta_M(\alpha, \delta) \leq \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha, \delta),$$

где

$$\Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta} \|\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha\|;$$

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{\varphi \in M} \|\varphi^\alpha - \varphi\|.$$

Оценим величину  $\Delta_2(\alpha, \delta)$ . Рассмотрим функцию  $v_\alpha(t) = e^{(t-t_0)\alpha} u_\alpha(t)$ . Функция  $v_\alpha(t)$ , очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dv_\alpha(t)}{dt} = -(A_\alpha - \alpha E)v_\alpha(t) + E_\alpha g_\alpha(t, v_\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T), \tag{9}$$

где  $g_\alpha(t, v) = E_\alpha e^{(t-t_0)\alpha} f(t, e^{-(t-t_0)\alpha} v) : [t_0; T] \times H \rightarrow H$  – отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной  $v$  и условию Гельдера по переменной  $t$ ,  $t \in [t_0; T]$ .

По построению функция  $v^\alpha(t)$  удовлетворяет также условиям

$$v^\alpha(t_0) = \varphi_\alpha; \tag{10}$$

$$v^\alpha(T) = e^{(T-t_0)\alpha} \chi. \tag{11}$$

Решение задачи Коши (9), (10) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v^\alpha(t) = e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha + \int_{t_0}^t e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-\tau)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \tag{12}$$

Из равенства (12) при  $t = T$  с учетом (11) следует равенство

$$e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi = e^{-(A_\alpha - \alpha E)(T-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha + \int_{t_0}^T e^{-(A_\alpha - \alpha E)(T-\tau)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \tag{13}$$

Из (13) следует

$$e^{-(A_\alpha - \alpha E)(t-t_0)} E_\alpha \varphi_\alpha = e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi - \int_{t_0}^T e^{-(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в равенство (12), имеем

$$v^\alpha(t) = e^{(A_\alpha - \alpha E)(T-t)} e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\alpha(\tau)) d\tau. \quad (15)$$

Аналогично, функция  $v_\delta^\alpha(t)$  удовлетворяет уравнению

$$v_\delta^\alpha(t) = e^{(A_\alpha - \alpha E)(T-t)} e^{\alpha(T-t_0)} E_\alpha \chi_\delta - \int_t^T e^{(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)} E_\alpha g_\alpha(\tau, v_\delta^\alpha(\tau)) d\tau. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует неравенство

$$\|v^\alpha - v_\delta^\alpha(t)\| \leq \|e^{(A_\alpha - \alpha E)(T-t)}\| \|e^{\alpha(T-t_0)}\| \|\chi - \chi_\delta\| + L \int_t^T \|e^{(A_\alpha - \alpha E)(\tau-t)}\| \|v^\alpha - v_\delta^\alpha(\tau)\| d\tau. \quad (17)$$

Из неравенства (17) с учетом леммы Гронуолла и неравенства

$$\|e^{(\lambda - \alpha)(T-t)}\| \leq \max_{0 \leq \lambda \leq \alpha} e^{(\lambda - \alpha)(T-t)} \leq 1$$

следует

$$\|v^\alpha(t) - v_\delta^\alpha(t)\| \leq e^{\alpha(T-t_0)} e^{L(T-t)} \delta,$$

откуда при  $t = t_0$

$$\|\varphi^\alpha - \varphi_\delta^\alpha\| \leq e^{\alpha(T-t_0)} e^{L(T-t_0)} \delta.$$

Следовательно, для величины  $\Delta_2(\alpha, \delta)$  имеем оценку

$$\Delta_2(\alpha, \delta) \leq e^{\alpha(T-t_0)} e^{LTe^{LT}} \delta \quad (18)$$

Оценим величину  $\Delta_1(\alpha)$ . Рассмотрим функцию  $u(t)$ , удовлетворяющую интегральному уравнению (3) и функцию  $u_\alpha(t)$ , удовлетворяющую (6) и функцию  $\bar{u}(t) = E_\alpha u(t)$ . Рассмотрим равенство

$$\bar{u}(t) = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi - \int_t^T e^{A_\alpha(\tau-t)} E_\alpha f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (19)$$

Из (3) следует равенство

$$\chi = e^{-A(T-t_0)} \varphi + \int_{t_0}^T e^{-A(T-\tau)} f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (20)$$

Подставляя выражение (20) в равенство (6) и учитывая, что  $e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha = e^{A(T-t)} E_\alpha$ , имеем равенство

$$u^\alpha(t) = e^{-A(t-t_0)} E_\alpha \varphi + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} E_\alpha f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int_t^T e^{-A(t-\tau)} E_\alpha (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u^\alpha(\tau))) d\tau. \quad (21)$$

С учетом равенства (19) из (21) следует

$$u^\alpha(t) - u(t) = E_\alpha u(t) - u(t) + \int_t^T e^{-A(t-\tau)} E_\alpha (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u^\alpha(\tau))) d\tau \quad (22)$$

Из (22) с учетом неравенства  $\|e^{A(\tau-t)} E_\alpha\| \leq e^{\alpha(\tau-t)}$  следует

$$e^{-\alpha(T-t)} \|u^\alpha(t) - u(t)\| \leq e^{-\alpha(T-t)} \|E_\alpha u(t) - u(t)\| + L \int_t^T e^{-\alpha(T-\tau)} \|u^\alpha(\tau) - u(\tau)\| d\tau. \quad (23)$$

Из (23) в силу леммы Гронуолла

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\| \leq e^{L(T-t_0)} \|E_\alpha u(t) - u(t)\|.$$

Следовательно,

$$\Delta_1(\alpha) \leq e^{L(T-t_0)} \sup\{\|\varphi - E_\alpha \varphi\|: \varphi \in M\} = e^{L(T-t_0)} \Delta_1(\alpha) \leq e^{L(T-t_0)} r e^{-\alpha t_0}.$$

Выберем зависимость  $\alpha = \alpha^1(\delta)$ . из условия

$$e^{\alpha(T-t_0)} \delta = e^{LT} r e^{-\alpha t_0} \quad (24)$$

(см. [14]). Из (24) следует, что

$$\alpha^1(\delta) = \frac{1}{T} \ln(re^{L(T-t_0)}/\delta).$$

Таким образом, оценка погрешности метода проекционной регуляризации на множестве  $M$  с выбором параметра регуляризации из условия (24) имеет вид

$$\Delta_M(\alpha^1(\delta), \delta) \leq e^{L(T-t_0)} r^{T-t_0} \delta^{t_0}. \quad (25)$$

Так как модуль непрерывности для полулинейной обратной задачи на множестве  $M$  удовлетворяет неравенству

$$\omega(M, \delta) \leq e^{L(T-t_0)} r^{T-t_0} \delta^{t_0}$$

(см. [13]), то из оценки (25) следует теорема.

**Теорема.** Метод проекционной регуляризации приближенного решения задачи с обратным временем, определенный равенством (8), оптимален по порядку на множестве  $M$ .

### Литература

1. Иванов, В.К. Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Страхов, В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве / В.Н. Страхов // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, № 8. – С. 1490–1495.
3. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филингов. – М.: Наука, 1995. – 176 с.
4. Танана, В.П. Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач / В.П. Танана // ЖВМиМФ. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 503–507.
5. Танана, В.П. О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений / В.П. Танана // Сиб. журнал индустр. математики. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 119–133.
6. Тихонов, А.Н. Нелинейные некорректные задачи / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1995. – 312 с.
7. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Анеев. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 262 с.
8. Кокурин, М.Ю. Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач // М.Ю. Кокурин. – Йошкар-Ола, Изд. Марийского гос. Ун-та, 1998. – 292 с.
9. Tanana, V.P. Methods for solving of nonlinear operator equations / V.P. Tanana. – Utrecht, VSP, 1997. – 241 p.
10. Табаринцева, Е.В. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычисл. математики. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 259–271.
11. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 129–142.
12. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
13. Табаринцева, Е.В. Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи / Е.В. Табаринцева // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 253–257
14. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики // М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1962. – 92 с.

**ABOUT SOLVING OF AN ILL-POSED PROBLEM FOR A NONLINEAR  
DIFFERENTIAL EQUATION BY MEANS OF THE PROJECTION REGULARIZATION  
METHOD**E.V. Tabarintseva<sup>1</sup>

A retrospective inverse problem for a semi-linear differential equation is studied. The projection regularization method with the choice of the regularization parameter by means of M.M. Lavrentiev scheme is used to find a stable approximate solution to the ill-posed problem under consideration. An explicit evaluation of inaccuracy of this method was measured on one of the cases of robustness.

*Keywords:* inverse problem, nonlinear differential equation, approximate method, evaluation of inaccuracy.

**References**

1. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektno postavlennykh zadach i ee prilozheniya* (Theory of linear ill-posed problem and its applications). Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russ.).
2. Strakhov V.N. *Differentsial'nye uravneniya*. 1970. Vol. 6, no. 8. pp. 1490–1495.
3. Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. *Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* (Differential and operator equations and ill-posed problems). Moscow: Nauka, 1995. 176 p. (in Russ.).
4. Tanana V.P. Optimal order methods of solving non-linear ill-posed problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1976. Vol. 16, no. 2. pp. 219–225.
5. Tanana V.P. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2003. Vol. 6, № 3. pp. 119–133. (in Russ.).
6. Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G. *Nelineynye nekorrektnye zadachi* (Non-linear ill-posed problems). Moscow: Nauka, 1995. 312 p. (in Russ.).
7. Vasin V.V., Aneev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoj informatsiyey* (Ill-posed problems with prior information). Ekaterinburg: Nauka, 1993. 262 p. (in Russ.).
8. Kokurin M.Yu. *Operatornaya regulyariizatsiya i issledovanie nelineynykh monotonnykh zadach* (Operator regularization and the study of non-linear monotonic problem). Yoshkar-Ola, Izd. Mariyskogo gosudarstvennogo universiteta, 1998. 292 p.
9. Tanana V.P. *Methods for solving of nonlinear operator equations*. Utrecht, VSP, 1997. 241 p.
10. Tabarintseva E.V. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* 2005. Vol. 8, no. 3. pp. 259–271. (in Russ.).
11. Tanana V.P., Tabarintseva I.V. *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2005. Vol. 8, no. 1. pp. 129–142. (in Russ.).
12. Khenri D. *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy* (Geometrical theory of semilinear parabolic equations). Moscow: Mir, 1985. 376 p. (in Russ.). [Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, 1981. 348 p.]
13. Tabarintseva E.V. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2013. Vol. 19, no. 1. pp. 253–257. (in Russ.).
14. Lavrent'ev M.M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* (Some improperly-posed problems in mathematical physics). Novosibirsk: Sibirskoe otdelenie AN SSSR, 1962. 92 p. (in Russ.). [Lavrentiev M.M. *Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, Berlin, 2012. 88 p.]

Поступила в редакцию 15 февраля 2013 г.

<sup>1</sup> Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Computational Mathematics Department, South Ural State University  
E-mail: eltab@rambler.ru

# ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.П. Танана<sup>1</sup>, А.А. Ерыгина<sup>2</sup>

Изучена задача определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости. Получена оценка точности метода регуляризации А.Н. Тихонова с параметром регуляризации, выбранным из принципа невязки.

Ключевые слова: регуляризация, модуль непрерывности, оценка погрешности, некорректная задача.

**Введение.** В настоящей работе получена оценка точности метода регуляризации А.Н. Тихонова [1] с параметром  $\alpha$ , выбранным из принципа невязки [2, 3] при решении задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости, зависящей от температуры.

Эта задача в известной статье Лифшица [4] была сведена к интегральному уравнению первого рода, что доказывает ее некорректность.

Ввиду важности для физиков знание оценки погрешности приближенного решения данной задачи следует актуальность приведенных в статье исследований.

**1. Постановка задачи.** Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Sn(\varepsilon) = \int_0^{\infty} S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \frac{\varepsilon}{\theta} n(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{C(\theta)}{\theta}; \quad 0 \leq \theta < \infty, \quad (1)$$

где  $S(x) = \frac{x^2}{2\text{sh}^2(x/2)}$ ,  $C(\theta)$  – теплоемкость системы,  $\theta = kT$ ,  $T$  – абсолютная температура, а  $k$  – константа, определяемая системой,  $n(\varepsilon)$  – спектральная плотность [4].

Обозначим через  $H$  действительное пространство измеримых на  $[0, \infty)$  функций  $f(x)$  с нормой, определяемой формулой

$$\|f(x)\|_H^2 = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \frac{dx}{x}. \quad (2)$$

Заметим, что интеграл в формуле (2) понимается в смысле Лебега.

Предположим, что при  $\frac{C(\theta)}{\theta} = \frac{C_0(\theta)}{\theta} \in H$  существует точное решение  $n_0(\varepsilon) \in H$  уравнения (1), которое единственно и удовлетворяет соотношению  $n_0(\varepsilon) \in G_r$ , где

$$G_r = \left\{ n(\varepsilon) : n(\varepsilon) \in H, \int_0^{\infty} \frac{n^2(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{\infty} [n'(\varepsilon)]^2 \varepsilon d\varepsilon \leq r^2 \right\}, \quad (3)$$

где  $n'(\varepsilon)$  – производная от функции  $n(\varepsilon)$ , но вместо точного значения правой части  $\frac{C_0(\theta)}{\theta}$  уравнения (1) известны некоторое приближение  $\frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \in H$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что

$$\left\| \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} - \frac{C_0(\theta)}{\theta} \right\|_H \leq \delta.$$

Требуется определить приближенное решение  $n_\delta(\varepsilon) \in H$  уравнения (1) и оценить отклонение  $\|n_\delta(\varepsilon) - n_0(\varepsilon)\|_H$  от точного решения  $n_0(\varepsilon)$  в метрике пространства  $H$ .

<sup>1</sup> Танана Виталий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: tvpa@susu.ac.ru

<sup>2</sup> Ерыгина Анна Александровна – магистрант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет

E-mail: anya\_erygina174@gmail.com



Если предположить, что  $\frac{C(\theta)}{\theta}, n(\varepsilon) \in H$ , то уравнение (1) становится некорректной задачей.

**2. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.** Метод регуляризации А.Н. Тихонова [1] для приближенного решения уравнения (1) заключается в сведении его к вариационной задаче

$$\inf \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ S \left( \frac{\varepsilon}{\theta} \right) \frac{\varepsilon}{\theta} n(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right]^2 \frac{d\theta}{\theta} + \alpha \int_0^\infty [n'(\varepsilon)]^2 \varepsilon d\varepsilon + \alpha \int_0^\infty n^2(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} : n(\varepsilon) \in H^1[0, \infty) \right\}, \quad (4)$$

где  $H^1[0, \infty)$  – гильбертово пространство, определяемое нормой

$$\|n(\varepsilon)\|_{H^1[0, \infty)}^2 = \int_0^\infty \frac{n^2(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^\infty [n'(\varepsilon)]^2 \varepsilon d\varepsilon, \text{ а } \alpha > 0.$$

Известно из [5], что для любой функции  $\frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \in H$  существует единственное решение вариационной задачи (4).

Для определения значения параметра регуляризации  $\alpha$  в задаче (4), используется принцип невязки [2, 3], который сводится к решению уравнения

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left[ S \left( \frac{\varepsilon}{\theta} \right) \frac{\varepsilon}{\theta} n_\delta^\alpha(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right]^2 \frac{d\theta}{\theta} = \delta^2 \quad (5)$$

относительно  $\alpha$ .

Известно [3], что при выполнении условия  $\int_0^\infty \left[ \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right]^2 \frac{d\theta}{\theta} > \delta$ , уравнение (5) имеет единственное решение  $\bar{\alpha}(C_\delta, \delta)$ .

Приближенное решение  $n_\delta(\varepsilon)$  уравнения (1) определим формулой

$$n_\delta(\varepsilon) = n_{\bar{\alpha}(C_\delta, \delta)}(\varepsilon),$$

соответствующий метод регуляризации определим семейством операторов  $\{R_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  непрерывно отображающей  $H$  в  $H$  и определяемой формулой

$$R_\delta \left[ \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right] = \begin{cases} n_\delta(\varepsilon), & \left\| \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right\|_H > \delta, \\ 0, & \left\| \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right\|_H \leq \delta. \end{cases}$$

**3. Оценка погрешности метода  $\{R_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  на классе решений  $G_r$ .** Оценку погрешности метода  $\{R_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  определим с помощью семейства функционалов  $\{\Delta_\delta(R_\delta) : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  определяемых формулой [6]

$$\Delta_\delta(R_\delta) = \sup \left\{ \left\| R_\delta \left( \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right) - n_0(\varepsilon) \right\|_H : n_0(\varepsilon) \in G_r, \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \in H, \left\| S n_0(\varepsilon) - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta} \right\|_H \leq \delta \right\}. \quad (6)$$

Обозначим через  $w(\delta, r)$  модуль непрерывности в нуле оператора  $S^{-1}$  на множестве  $S[G_r]$

$$w(\delta, r) = \sup \{ \|n(\varepsilon)\|_H : n(\varepsilon) \in G_r, \|S n(\varepsilon)\| \leq \delta \}. \quad (7)$$

Для величины  $\Delta_\delta(R_\delta)$  в [7] получена оценка

$$\Delta_\delta(R_\delta) \leq 2w(\delta, r); 0 < \delta \leq \delta_0, \quad (8)$$

где  $w(\delta, r)$  определен формулой (7), а  $\Delta_\delta(R_\delta)$  формулой (6).

**4. Оценка модуля непрерывности  $w(\delta, r)$ , определенного формулой (7).** Сделаем замену переменных

$$\varepsilon = e^t \text{ и } \theta = e^\tau; \quad -\infty < t < \infty, -\infty < \tau < \infty \quad (9)$$

после которой оператор  $S$  сведется к оператору  $A$  типа свертки

$$Au(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau - t)u(t)dt; \quad \infty < t < \infty, -\infty < \tau < \infty, \quad (10)$$

$$u(t) = n(e^t),$$

$$K(x) = \frac{e^{-3x}}{2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)},$$

кроме того  $u(t), Au(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ .

Заметим, что после замены (9) класс корректности  $G_r$ , определяемый формулой (3) перейдет в множество  $M_r$

$$M_r = \{u(t) : u(t) \in W_2^1(-\infty, \infty), \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} |u'(t)|^2 dt \leq r^2\}. \quad (11)$$

Теперь определим модуль непрерывности в нуле оператора  $A^{-1}$  на множестве  $N_r = AM_r$  формулой

$$\bar{w}(\delta, r) = \sup\{\|u(t)\|_{L_2} : u(t) \in M_r, \|Au(t)\|_{L_2} \leq \delta\}. \quad (12)$$

**Лемма 1.** Пусть  $w(\delta, r)$  определен формулой (7), а  $\bar{w}(\delta, r)$  формулой (12). Тогда справедливо равенство  $\bar{w}(\delta, r) = w(\delta, r)$ .

### 5. Оценка модуля непрерывности $\bar{w}(\delta, r)$ , определенного формулой (12)

Полагая, что  $u(t) \in L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$ , определим преобразование Фурье  $F$

$$F[u(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{ipt} dt. \quad (13)$$

Из теоремы Планшереля следует изометричность преобразования  $F$  в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$ . Чтобы отличать комплексное пространство от действительного, будем обозначать его  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$ . Таким образом, оператор  $F$ , определяемый формулой (13) будет изометрично в метрике  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$  отображать множество  $L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$  в пространство  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$ .

Ввиду того, что пространство  $L_1(-\infty, \infty)$  плотно в  $L_2(-\infty, \infty)$ , расширим оператор  $F$  на все пространство  $L_2(-\infty, \infty)$ . Это расширение обозначим через  $\bar{F}$ .

Теперь оператор  $\bar{F}$  будет изометрично отображать пространство  $L_2(-\infty, \infty)$  в  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$ . В дальнейшем образ оператора  $\bar{F}$  обозначим через  $Y$  и заметим, что  $Y$  будет являться подпространством  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$ .

После преобразования  $\bar{F}$  оператор  $A$  сведется к следующему

$$\hat{A}\hat{u}(p) = \hat{K}(p)\hat{u}(p); \quad \hat{u}(p) \in Y, \text{ а } \hat{A}\hat{u}(p) \in \bar{L}_2(-\infty, \infty), \quad (14)$$

где  $\hat{u}(p) = \bar{F}[u(t)]$ , а ввиду того, что  $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$

$$\hat{K}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{ixp} dx.$$

Из вида  $K(x)$  будет следовать, что

$$\hat{K}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(2-ip)x} e^{-x}}{\operatorname{ch}(e^{-x}) - 1} dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(2-ip)x} e^{-e^{-x}}}{(e^{-e^{-x}} - 1)^2} d(e^{-x}).$$

Сделав в последнем выражении замену  $z = e^{-x}$ , получим

$$\hat{K}(p) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{-(2-ip)} e^{-z}}{(e^{-z} - 1)^2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{z^{-(2-ip)} e^{-z}}{(e^{-z} - 1)^2} dz.$$

Используя свойства гамма и дзета-функций [8]

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

получим, что

$$\hat{K}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2-ip)\Gamma(2-ip)\zeta(2-ip) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(3-ip)\zeta(2-ip),$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма функция Эйлера, а  $\zeta(z)$  – дзета-функция Римана.

Для оценки снизу поведения функции  $|\hat{K}(p)|$  при  $p \rightarrow \infty$  приведем некоторые известные свойства гамма-функции, сформулированные в [8, стр. 16 и 19]:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (15)$$

$$\bar{\Gamma}(z) = \Gamma(\bar{z}), \quad (16)$$

где  $\bar{z}$  сопряжено  $z$ , а  $\bar{\Gamma}(z)$  сопряжено  $\Gamma(z)$  и

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (17)$$

Таким образом, из (15) следует, что

$$|\Gamma(3-ip)| = \sqrt{1+p^2}\sqrt{4+p^2}|\Gamma(1-ip)|, \quad (18)$$

а из (16) и (17), что

$$|\Gamma(1-ip)| = \sqrt{\frac{\pi p}{\operatorname{sh} \pi p}}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) для любого  $p \geq 2$  справедлива оценка

$$|\Gamma(3-ip)| \geq \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}p}. \quad (20)$$

Теперь перейдем к оценке снизу модуля дзета-функции Римана  $\zeta(2-ip)$ .

Так как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (21)$$

то из (21) следует, что

$$\zeta(2-ip) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ip \ln n}}{n^2}. \quad (22)$$

Учитывая, что  $|e^{ip \ln k}| = 1$ , из соотношения (22) получим

$$\zeta(2-ip) \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{3}. \quad (23)$$

Таким образом, из (20) и (23) следует, что при  $p \geq 2$  справедлива оценка снизу

$$|\hat{K}(p)| \geq \frac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{2}p}. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим расширение  $\hat{A}_1$  оператора  $\hat{A}$ , определенного формулой (14) на все пространство  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$

$$\hat{A}_1 \hat{u}(p) = \hat{K}(p)\hat{u}(p); \hat{u}(p), \hat{A}_1 \hat{u}(p) \in \bar{L}_2(-\infty, \infty). \quad (25)$$

Рассмотрим множество  $\hat{M}_r \subset \bar{L}_2(-\infty, \infty)$  и определяемое формулой

$$\hat{M}_r = \{\hat{u}(p) : \hat{u}(p), p\hat{u}(p) \in \bar{L}_2(-\infty, \infty), \int_{-\infty}^{\infty} (1+p^2)|\hat{u}(p)|^2 dp \leq r^2\}. \quad (26)$$

Тогда из (11) и (26) следует, что

$$\bar{F}[M, ] \subset \hat{M}_r. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим модули непрерывности, в нуле определяемые формулами

$$\hat{w}(\delta, r) = \sup \left\{ \|\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} : \hat{u}(p) \in \bar{F}[M_r], \|\hat{A}_1 \hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} \leq \delta \right\}, \quad (28)$$

$$\hat{w}_1(\delta, r) = \sup \left\{ \|\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} : \hat{u}(p) \in \hat{M}_r, \|\hat{A}_1 \hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} \leq \delta \right\}. \quad (29)$$

Из унитарности преобразования  $\bar{F}$  и формул (10), (12), (14) и (28) следует, что

$$\hat{w}(\delta, r) = w(\delta, r), \quad (30)$$

а из (14), (25), (27)–(29), что

$$\hat{w}_1(\delta, r) \geq \hat{w}(\delta, r). \quad (31)$$

Таким образом, из (30) и (31) следует, что

$$w(\delta, r) \leq \hat{w}_1(\delta, r).$$

Для удобства изложения оператор  $\hat{A}_1$ , определенный формулой (25) заменим обратным  $\hat{A}_1^{-1}$ , который обозначим через  $\hat{T}_1$

$$\hat{T}_1 \hat{f}(p) = \hat{A}_1^{-1} \hat{f}(p); \quad \hat{f}(p) \in R(\hat{A}_1), \quad \hat{T}_1 \hat{f}(p) \in \bar{L}_2(-\infty, \infty), \quad (32)$$

где  $R(\hat{A}_1)$  – множество значений оператора  $\hat{A}_1$ .

Множество  $\hat{M}_r$ , определенное формулой (27) зададим с помощью оператора  $B$

$$B\hat{u}(p) = \sqrt{1+p^2} \hat{u}(p); \quad \hat{u}(p), B\hat{u}(p) \in L_2(-\infty, \infty), \quad (33)$$

$$\hat{M}_r = B^{-1} \bar{S}_r, \quad (34)$$

где  $\bar{S}_r = \{\hat{u}(p) : \hat{u}(p) \in \bar{L}_2(-\infty, \infty), \|\hat{u}(p)\|_{\bar{L}_2} \leq r\}$ .

В пространстве  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$  введем множество  $\hat{N}_r^1$  определяемое формулой

$$\hat{N}_r^1 = \hat{T}_1^{-1}(\hat{M}_r). \quad (35)$$

Тогда из (26), (29), (32)–(34), (35) следует, что

$$\hat{w}_1(\delta, r) = \sup \left\{ \|\hat{T}_1 \hat{f}(p)\| : \hat{f}(p) \in \hat{N}_r^1, \|\hat{f}(p)\|_{\bar{L}_2} \leq \delta \right\}.$$

Перейдем к оценке модуля непрерывности  $\hat{w}_1(\delta, r)$ .

Для этого рассмотрим оператора  $\hat{T}$ , действующий из  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$  в  $\bar{L}_2(-\infty, \infty)$  и определяемый формулой

$$\hat{T} \hat{f}(p) = g(p) \hat{f}(p), \quad (36)$$

Где

$$g(p) \in C(-\infty, \infty), \quad g(-p) = g(p), \quad g(0) > 0, \quad (37)$$

$\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = \infty$  и  $g(p)$  возрастает на  $[0, \infty)$ .

Обозначим через  $\hat{w}_2(\delta, r)$  модуль непрерывности в нуле оператора  $\hat{T}$  на множестве  $\hat{N}_r = \hat{T}^{-1}(\hat{M}_r)$ , а  $\hat{M}_r$  определено формулой (34) и рассмотрим уравнение

$$\frac{r}{\sqrt{1+p^2}} = g(p) \delta. \quad (38)$$

Если  $g(0)\delta < r$ , то уравнение (38) имеет единственный положительный корень  $\bar{p}(\delta, r)$ .

Из леммы доказанной в [6] следует, что

$$\hat{w}_2(\delta, r) = \frac{r}{\sqrt{1+\bar{p}^2(\delta, r)}}. \quad (39)$$

Предположим, что оператор  $\hat{T}_1$  определен формулами (25) и (32), а  $\hat{T}$  формулой (36).

Тогда справедлива лемма.

**Лемма 2.** Если  $g(p)$  удовлетворяет (37) и существует  $p_0 \geq 0$  такое, что для любого  $p \geq p_0$  справедливо соотношение

$$|\hat{K}(p)|^{-1} \leq g(p),$$

то при условии, что  $g(p_0)\delta < \frac{r}{\sqrt{1+p_0^2}}$  справедлива оценка

$$\hat{\eta}_1(\delta, r) \leq \hat{\eta}_2(\delta, r).$$

Теперь используем лемму 2 для оценки точности метода  $\{R_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ .

Из (24) следует, что при  $p \geq 2$

$$|\hat{K}(p)|^{-1} \leq \frac{3}{2} e^{\frac{\pi}{2}p}. \quad (40)$$

Таким образом, из (8), (30), (31), (39), (40) и леммы 2 следует, что при

$$\delta_0 = \frac{2re^{-\pi}}{3\sqrt{5}}$$

для метода  $\{R_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  справедлива оценка

$$\Delta_\delta(R_\delta) \leq \frac{2r}{\sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2} \ln^2\left(\frac{2r}{3\delta}\right)}}.$$

### Литература

1. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов. – Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
2. Иванов, В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журн. вычислит. мат. и мат. физ. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.
3. Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // Журн. вычислит. мат. и мат. физ. – 1966. – Т. 6, № 1. – С. 170–175.
4. Лифшиц, И.М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплосмкости / И.М. Лифшиц // Журн. экспериментальной и теоретической физики. – 1954. – Т. 26, вып. 5. – С. 551–556.
5. Васин, В.В. Приближенное решение операторного уравнения первого рода / В.В. Васин, В.П. Танана // Мат. зап. Уральск. ун-та. – 1968. – Т. 6. – Т. 2. – С. 27–37.
6. Танана, В.П. Об оптимальных по порядку методах решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.
7. Танана, В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач / В.П. Танана. – Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 220, № 5. – С. 1035–1037.
8. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – С. 468.

## ABOUT THE EVALUATION OF INACCURACY OF APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF SOLID STATE PHYSICS

V.P. Tanana<sup>1</sup>, A.A. Erygina<sup>2</sup>

The problem of determining of the phonon spectrum of the crystal from its thermal capacity was studied. The accuracy evaluation for regularization method of A.N. Tikhonov chosen from the residual principle was obtained.

*Keywords: regularization, module of continuity, evaluation of inaccuracy, ill-posed problem.*

### References

1. Tikhonov A.N. *Doklady AN SSSR*. 1963. Vol. 151, no. 3. pp. 501–504. (in Russ.).
2. Ivanov V.K. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1966. Vol. 6, no. 6. pp. 1089–1094.
3. Morozov V.A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1966. Vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russ.).
4. Lifshits I.M. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki*. 1954. Vol. 26, Issue 5. pp. 551–556. (in Russ.).
5. Vasin V.V., Tanana V.P. *Matematicheskie zapiski Ural'skogo universiteta*. 1968. Vol. 6, Issue 2. pp. 27–37. (in Russ.).
6. Tanana V.P., Yaparova N.M. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* 2006. Vol. 9, no. 4. pp. 353–368. (in Russ.).
7. Tanana V.P. *Doklady AN SSSR*. 1975. Vol. 220, no. 5. pp. 1035–1037. (in Russ.).
8. Uitteker E.T., Watson Dzh.N. *Kurs sovremennogo analiza* (A Course of Modern Analysis). Moscow: Nauka, 1978. Part 2. 468 p. (in Russ.). [Whittaker E.T., Watson G.H. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press; 1927. 612 p.]

*Поступила в редакцию 15 апреля 2013 г.*

<sup>1</sup> Tanana Vitaliy Pavlovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Computational Mathematics, South Ural State University.

E-mail: tvpa@susu.ac.ru

<sup>2</sup> Erygina Anna Aleksandrovna is Master Student, Department of Theory of Management and Optimization, Chelyabinsk State University.

E-mail: anya.erygina174@gmail.com

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

В.И. Ухоботов<sup>1</sup>, А.А. Троицкий<sup>2</sup>

Найдено оптимальное время преследования в линейной дифференциальной игре второго порядка с импульсным управлением. Построены оптимальные управления игроков.

*Ключевые слова:* дифференциальная игра, импульсное управление, время преследования.

## 1. Введение

Задачи управления механическими системами переменного состава, в которых допускается мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью, сводятся к задачам с импульсными управлениями [1, стр. 85–87]. Наличие импульсных управлений может приводить к мгновенному изменению фазового состояния системы. Это приводит к специфическим особенностям при исследовании дифференциальных игр с импульсными управлениями [2–6] и, в частности, задачи импульсного преследования [7, 8].

В работе [7] рассмотрена игровая задача, в которой преследователь управляет точкой переменного состава, движущейся только под действием реактивной силы. Убегающий управляет ограниченной по величине скоростью. В работе [8] рассмотрен усложненный вариант задачи, когда на точку переменного состава действует еще сила, пропорциональная скорости. В данной работе предполагается, что на каждую управляемую точку наряду с силой трения, пропорциональной скорости, действует сила, линейно зависящая от координат.

## 2. Постановка задачи

Движение точки переменного состава описывается уравнением Мещерского [1]

$$\ddot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 \dot{x}_1 + g + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} u.$$

Здесь  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathbb{R}^n$ ;  $u$  – вектор относительной скорости отделяющихся частиц, норма  $\|u\| = c = \text{const}$ ;  $m(t) = 1 + \frac{m_1(t)}{m_0(t)}$ ,  $m_1(t)$  – масса топлива в момент времени  $t$ ,  $m_0$  – неизменная часть массы.

Эта точка преследует другую управляемую точку, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x}_2 = a_1 x_2 + a_2 \dot{x}_2 + g - v, x_2 \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leq b.$$

Цель преследования заключается в том, чтобы побыстрее осуществить неравенство  $\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \varepsilon$ . Здесь  $\varepsilon \geq 0$  – заданное число.

В начальный момент времени имеется начальный запас топлива  $m_1(0) \geq 0$ , который не может быть перерасходован в процессе управления.

## 3. Формализация задачи

В переменных  $x = x_1 - x_2$ ,  $y = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$ ,  $\varphi(t) = \ln(m(t))$ , сформулированная задача принимает вид

$$\dot{x} = y, \dot{y} = a_1 x + a_2 y + \dot{\varphi}(t)u + v, \quad (1)$$

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет

E-mail: ukh@esu.ru

<sup>2</sup> Троицкий Антон Александрович – аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет

E-mail: antonio.troitsky@gmail.com

Поскольку  $m(t)$  убывает, то  $\dot{\varphi}(t) \leq 0$ . Преследователь не может перерасходовать имеющийся запас топлива  $m_1(0) \geq 0$ . Условие не перерасхода топлива запишем в виде неравенства  $m(t) \geq 1$  при  $t \geq 0$ , которое равносильно

$$\varphi(t) \geq 0 \text{ при } t \geq 0. \quad (3)$$

Считаем, что наряду с непрерывным изменением массы  $m(t)$  в отдельные моменты времени  $\tau$  может происходить мгновенное отделение конечного количества массы  $0 \leq \Delta m \leq m(\tau) - 1$  со скоростью  $u(\tau)$ . Это приводит к мгновенному уменьшению скорости [1]

$$y(\tau + 0) = y(\tau)u(\tau)(\varphi(\tau + 0) - \varphi(\tau)), \varphi(\tau + 0) = \ln(m(\tau) - \Delta m). \quad (4)$$

Управление убегающего строится в классе произвольных функций  $v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих ограничению  $\|v(t, x, y)\| \leq b$ .

Управлением догоняющего является невозрастающая функция  $\varphi(t) \geq 0$  при  $t \geq 0$  и произвольная функция  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая равенству  $\|u(t, x, y)\| = c$ . При выборе функции  $\varphi(t)$  в отдельные моменты времени осуществляется её коррекция, которая проводится следующим образом. Преследователь в начальный момент времени выбирает набор моментов коррекций  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q$ . В момент времени  $\tau_i$ , зная реализовавшееся состояние  $x(\tau_i), y(\tau_i), \varphi(\tau_i)$ , он выбирает при  $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$  непрерывно дифференцируемую функцию  $\varphi(t)$ , такую, что

$$\varphi(t) \geq 0, \dot{\varphi}(t) \leq 0, \varphi(\tau_i + 0) \leq \varphi(\tau_i), \tau_i < t \leq \tau_{i+1}. \quad (5)$$

С помощью формулы (4) при  $\tau = \tau_i$  и при  $u = u(\tau_i, x(\tau_i), y(\tau_i))$  определяет значение скорости  $y(\tau_i + 0)$ .

Движение, порожденное выбранными управлениями на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ , определим с помощью ломаных. С этой целью фиксируем разбиение:

$$\omega: \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}$$

с диаметром разбиения

$$d(\omega) = \max_{0 \leq j \leq k} (t^{(j+1)} - t^{(j)})$$

и построим ломаную  $x_\omega(t), y_\omega(t), \tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ .

Положим в (1)  $u = u(\tau_i, x(\tau_i), y(\tau_i)), v = v(\tau_i, x(\tau_i), y(\tau_i))$  и найдем решение  $x_\omega(t), y_\omega(t)$  при  $t^{(0)} < t \leq t^{(1)}$  с начальным условием  $x_\omega(t^{(0)}) = x(\tau_i), y_\omega(t^{(0)}) = y(\tau_i + 0)$ . Допустим, что при  $t^{(0)} < t < t^{(j)}$  определена ломаная. Положим в (1)  $u = u^{(j)}, v = v^{(j)}$ , где

$$w^{(j)} = w(\tau^{(j)}, x(\tau^{(j)}), y(\tau^{(j)})), w = u, v \quad (6)$$

и продлим решение  $x_\omega(t), y_\omega(t)$  при  $t^{(j)} < t < t^{(j+1)}$ . Продолжая этот процесс дальше, построим ломаную при  $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ .

Можно показать, что все ломаные  $x_\omega(t), y_\omega(t)$  удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [9, стр. 236]. Под движением будем понимать равномерный предел последовательности ломаных  $x_{\omega_k}(t), y_{\omega_k}(t)$ , у которых диаметр разбиения  $d(\omega_k) \rightarrow 0$ .

Предельные функции  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют условию Липшица. Поэтому у них почти всюду на отрезке  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  существуют производные.

Будем считать, что выполнено следующее предположение.

**Предположение 1.** Характеристический многочлен  $\lambda^2 - a_2\lambda - a_1 = 0$  матрицы в системе (1) имеет два различных действительных корня, один из которых неотрицателен. Это значит, что  $4a_1 + a_2^2 > 0$ , а корни равны



$$\lambda_1 = \frac{a_2 + \sqrt{4a_1 + a_2^2}}{2} \geq 0, \lambda_2 = \frac{a_2 - \sqrt{4a_1 + a_2^2}}{2}. \quad (7)$$

**Предположение 2.** Выполнено неравенство

$$b + a_1 \varepsilon \geq 0. \quad (8)$$

#### 4. Формулировка результатов

Введем в рассмотрение функции

$$f_1(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}), \quad f_2(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (9)$$

Из неравенства  $\lambda_1 > \lambda_2$  следует, что функция  $f_2(t) > 0$  при  $t > 0$  и строго возрастает. Из условия  $\lambda_1 \geq 0$  получим, что  $\int_0^t f_2(r) dr \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому при любом числе  $\varepsilon \geq 0$  уравнение:

$$\frac{\varepsilon}{b} = \int_0^t f_2(r) dr \quad (10)$$

имеет единственный неотрицательный корень  $t = t(\varepsilon)$ .

При  $t \geq 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$  положим

$$g(t, \varepsilon) = \varepsilon - b \int_0^t f_2(r) dr \quad \text{при } 0 \leq t \leq t(\varepsilon), \\ g(t, \varepsilon) = -(t - t(\varepsilon)) b f_2(t) \quad \text{при } t(\varepsilon) \leq t. \quad (11)$$

Обозначим

$$f(t) = f_1(t) + \frac{a_2}{2} f_2(t) = \frac{1}{2} (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) \quad (12)$$

и при

$$0 \leq t \leq t(\varepsilon) + \frac{c}{b} \varphi(0) = T(\varepsilon, \varphi(0)) \quad (13)$$

положим

$$K(x, y, \varphi(0), \varepsilon, t) = \bigcup_{0 \leq r \leq t} \left( \left( \frac{a_2}{2} x - y \right) \frac{f_2(r)}{f(r)} + \frac{c f_2(r) \varphi(0) + g(r, \varepsilon)}{f(r)} S \right). \quad (14)$$

Здесь обозначено  $S = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leq 1\}$ .

**Теорема 1.** Пусть начальное состояние таково, что

$$x(0) \notin K(x(0), y(0), \varphi(0), \varepsilon, T(\varepsilon, \varphi(0))). \quad (15)$$

Тогда убегающий может построить свое управление таким образом, что

$$\|x(t)\| > \varepsilon \quad \text{при всех } t \geq 0. \quad (16)$$

Пусть в (15) стоит включение. Тогда, как следует из вида множества (14), существует число  $0 \leq T_0 \leq T(\varepsilon, \varphi(0))$ , такое, что при  $t = T_0$  выполнено включение

$$x(0) \in K(x(0), y(0), \varphi(0), \varepsilon, t), \quad (17)$$

а при любом  $0 \leq t < T_0$  включение (11) не выполнено.

**Теорема 2.** Преследователь может построить свое управление таким образом, что при некотором  $0 \leq t \leq T_0$  будет осуществлена поимка (2) при любом поведении убегающего.

**Теорема 3.** Для любого числа  $0 \leq T < T_0$  убегающий может построить свое управление таким образом, что неравенство (16) будет выполнено при всех  $0 \leq t \leq T$  и при любом поведении преследователя.

5. Решение задачи преследования

Рассмотрим начальное состояние  $x(0), y(0), \varphi(0) \geq 0$ , у которого  $\|x(0)\| > \varepsilon$  и в (15) стоит включение. Тогда минимальный корень  $p = t$  включения (17) является минимальным неотрицательным корнем уравнения

$$\|f_1(p)x(0) + f_2(p)y(0)\| = cf_2(p)\varphi(0) + g(p, \varepsilon). \quad (18)$$

Обозначим

$$z = f_1(p-t)x + f_2(p-t)y. \quad (19)$$

Из формулы (4) следует, что

$$z(\tau+0) = z(\tau) + u(\tau, x(\tau), y(\tau))(\varphi(\tau+0) - \varphi(\tau))f_2(p-t). \quad (20)$$

Дифференцируя равенство (19) и используя уравнение (1) и формулы (9), получим, что

$$\dot{z} = f_2(p-t)\dot{\varphi}(t)u + f_2(p-t)v, t^{(j)} < t \leq t^{(j+1)}, j = \overline{0, k}. \quad (21)$$

Далее,  $x(p) = z(p)$ .

Преследователь берет

$$u(t, x, y) = cw; w = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } z \neq 0 \text{ и любой } \|w\| = 1 \text{ при } z = 0. \quad (22)$$

Пусть  $0 < p \leq t(\varepsilon)$ . Равенство (18) принимает вид

$$\|z(0)\| = cf_2(p)\varphi(0) + \varepsilon - b \int_0^p f_2(r) dr. \quad (23)$$

Преследователь берет  $\varphi(t) = 0$  при  $0 < t \leq p$ . Тогда из формулы (20) получим, что

$$z(0+) = z(0) - u(0, x(0), y(0))\varphi(0)f_2(p).$$

Подставляя сюда функцию (22), будем иметь  $\|z(0+)\| = \|z(0)\| - c\varphi(0)f_2(p)$ . Отсюда и из (23) получим, что

$$\|z(0+)\| = \varepsilon - b \int_0^p f_2(r) dr.$$

При выбранном управлении убегающего реализуется движение  $x(t)$  и  $y(t)$ . Подставим его в формулу (19). Получим функцию  $z(t)$ . Из (21) следует, что  $\|\dot{z}(t)\| \leq b f_2(p-t)$ . Поэтому

$$\|x(p)\| = \|z(p)\| \leq \|z(0+)\| + b \int_0^p f_2(r) dr = \varepsilon.$$

Пусть  $t(\varepsilon) < p \leq T(\varepsilon, \varphi(0))$ . Тогда равенство (18) принимает вид

$$\|z(0)\| = cf_2(p)\varphi(0) - (p-t(\varepsilon))bf_2(p). \quad (24)$$

Преследователь выбирает функцию

$$\varphi(t) = \varphi(0) - \frac{\|z(0)\|}{cf_2(p)} - \frac{b}{c}t \text{ при } 0 < t \leq p-t(\varepsilon) \quad (25)$$

и  $\varphi(t) = 0$  при  $p-t(\varepsilon) < t \leq p$ . Тогда из (24) получим, что

$$\varphi(0+) = (p-t(\varepsilon))\frac{b}{c} > 0, \varphi(p-t(\varepsilon)) = 0.$$

Используя формулы (20), (22), (25) получим, что  $\|z(0+)\| = 0$ . Покажем, что  $\|z(p-t(\varepsilon))\| = 0$ .

Допустим, что  $\|z(p-t(\varepsilon))\| > 0$ . Тогда, учитывая, что  $\|z(0+)\| = 0$ , найдем число  $0 \leq t_0 < p-t(\varepsilon)$  такое, что  $\|z(t)\| > 0$  при  $t_0 < t \leq p-t(\varepsilon)$  и  $\|z(t_0)\| = 0$ . Функция  $z(t)$  является абсолютно непрерывной на отрезке  $[t_0, p-t(\varepsilon)]$ . Поскольку  $\|z(t)\| > 0$  при  $t_0 < t \leq p-t(\varepsilon)$ , то можно показать, используя формулы (21), (22) и (25), что

$$\dot{z}(t) = -bf_2(p-t) \frac{z(t)}{\|z(t)\|} + f_2(p-t)v, \|v\| \leq b. \quad (26)$$

для почти всех  $t \in (t_0, p-t(\varepsilon)]$ . Так как функция  $\|z\|$  удовлетворяет условию Липшица, то норма  $\|z(t)\|$  является абсолютно непрерывной функцией. Поэтому ее производная существует почти всюду и [10, стр. 118]

$$\frac{d\|z(t)\|}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|z(t) + h\dot{z}(t)\| - \|z(t)\|}{h}.$$

Отсюда и из формулы (26) следует, что  $\frac{d\|z(t)\|}{dt} \leq 0$ . Из этого неравенства получим, что  $\|z(p-t(\varepsilon))\| < \|z(t)\|$  при любом  $t \in (t_0, p-t(\varepsilon))$ . Устремляя  $t \rightarrow t_0$ , будем иметь требуемое равенство  $\|z(p-t(\varepsilon))\| \leq 0$ .

При  $p-t(\varepsilon) \leq t \leq p$  из формул (21) и (25) получим, что  $\dot{z}(t) = f_2(p-t)v, \|v\| \leq b$ . Поэтому, учитывая определение числа  $t(\varepsilon)$ , будем иметь  $\|z(t)\| \leq \varepsilon$ .

## 6. Задача убегания

Для построения управления убегающего потребуются некоторые свойства множества (14).

**Лемма 1.** Множество (14) является выпуклым компактом.

**Доказательство.** Замкнутость и ограниченность множества (14) следует из непрерывности функций  $f_2(t)$ ,  $f(t)$  и  $g(t, \varepsilon)$  по переменной  $t$ . Для доказательства его выпуклости перейдем к новой переменной

$$\tau = \frac{f_2(t)}{f(t)}, t \geq 0.$$

Поскольку

$$\frac{f_2(0)}{f(0)} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_2(t)}{f(t)} = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ и } \frac{d}{dt} \left( \frac{f_2(t)}{f(t)} \right) = \frac{e^{a_2 t}}{f^2(t)} > 0,$$

то при  $0 \leq \tau \leq \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}$  определена обратная функция  $t = \psi(\tau)$ , у которой

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = f^2(t) e^{-a_2 t} \text{ при } t = \psi(\tau) \quad (27)$$

С помощью переменной  $\tau$  множество (14) представимо в виде

$$\bigcup_{0 \leq \tau \leq \tau(t)} \left( \left( \frac{a_2}{2} x - y \right) \tau + G(\tau) S \right). \quad (28)$$

Здесь обозначено

$$G(\tau) = \frac{g(\psi(\tau), \varepsilon)}{f(\psi(\tau))} + c\varphi(0)\tau. \quad (29)$$

Покажем, что функция  $G(\tau)$  является вогнутой. Отсюда будет следовать выпуклость множества (28).

Из формулы (11) получим, что производная  $\frac{dg(t, \varepsilon)}{dt}$  является непрерывной при  $0 \leq t$ . По теореме о производной сложной функции производная функции (29) является непрерывной при  $0 \leq \tau < \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ . Дифференцируя формулу (29) и учитывая равенство (27), получим, что

$$\frac{dG}{d\tau} = Q(\psi(\tau)) + c\varphi(0). \quad (30)$$

Здесь обозначено

$$Q(t) = \left( \frac{dg(t, \varepsilon)}{dt} f(t) - g(t, \varepsilon) \frac{df(t)}{dt} \right) e^{-a_2 t}. \quad (31)$$

Нужно показать, что производная (30) не возрастает. Для этого достаточно проверить, что  $\frac{dQ(t)}{dt} \leq 0$  при  $t \geq 0$ .

Функция (12) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = a_2 \frac{df(t)}{dt} + a_1 f(t). \quad (32)$$

Поэтому

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \left( \frac{d^2 g(t, \varepsilon)}{dt^2} - a_2 \frac{dg(t, \varepsilon)}{dt} - a_1 g(t, \varepsilon) \right) f(t) e^{-a_2 t}. \quad (33)$$

Пусть  $0 \leq t < t(\varepsilon)$ . Тогда, как следует из формул (11) и (33), неравенство  $\frac{dQ(t)}{dt} \leq 0$  принимает вид

$$b \left( \frac{df_2(t)}{dt} - a_2 f_2(t) - a_1 \int_0^t f_2(r) dr \right) + a_1 \varepsilon \geq 0. \quad (34)$$

Функция  $f_2(t)$  удовлетворяет уравнению (32). Поэтому левая часть неравенства (34) является постоянной величиной. При  $t = 0$  она равна  $b + a_1 \varepsilon$ . Согласно предположению 2 неравенство (34) выполнено.

При  $t(\varepsilon) < t$  формула (33) принимает вид

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \left( -2 \frac{df_2(t)}{dt} + a_2 f_2(t) \right) b f(t) = -2b f^2(t) < 0.$$

**Лемма 2.** Пусть выполнено условие (15). Тогда существует вектор  $\|\psi\| = 1$  такой, что

$$\langle f_1(s)x(0) + f_2(s)y(0), \psi \rangle > cf_2(s)\varphi(0) + g(s, \varepsilon) \quad (35)$$

при всех  $s \geq 0$ .

Здесь посредством  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Из (14) следует, что вектор  $x(0)$  не принадлежит множеству (28), в котором объединение берется по всем  $0 \leq \tau \leq \tau(T(\varepsilon, \varphi(0))) = \tau_0$ . Из формул (11), (13) и (29) следует, что  $G(\tau_0) = 0$ . Из формул (9), (10) и (12) получим, что при  $t(\varepsilon) < t$  функция (31) равна

$$Q(t) = -b f_2(t) f(t) e^{-a_2 t} - (t - t(\varepsilon)) b.$$

Отсюда и из формулы (30) следует, что

$$\frac{dG(\tau_0)}{d\tau} = -b f_2(T) f(T) e^{-a_2 T} < 0, T = T(\varepsilon, \varphi(0)).$$

Применяя лемму из работы [7], найдем трсбуемый вектор  $\psi$ .

Геометрический смысл неравенства (35) заключается в том, что гиперплоскость, перпендикулярная вектору  $\psi$ , отделяет точку  $x(0)$  от выпуклого множества  $K$ , которое задается формулой (14) при  $x = x(0), y = y(0), t = T(\varepsilon, \varphi(0))$  (см. рисунок).

**Лемма 3.** При любых  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$  и  $t > 0$  выполнено неравенство

$$g(t, \varepsilon_1) > g(t, \varepsilon_2) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (36)$$

**Лемма 4.** При любых  $\varepsilon \geq 0, \varphi(0) \geq 0, 0 \leq s \leq T(\varepsilon, \varphi(0)), \tau > 0$  выполнено неравенство

$$g(s + \sigma, \varepsilon) - g(s, \varepsilon) + b \int_s^{s+\sigma} f_2(\tau) d\tau \geq -(s + \sigma - t(\varepsilon))(f_2(s + \sigma) - f_2(s))b. \quad (37)$$

Доказательство неравенств (36) и (37) следует из формулы (11). При доказательстве неравенства (37) используется монотонность функции  $f_2(t)$ .

**Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим начальное состояние, для которого выполнено (15). Тогда существует число  $\eta > 0$ , такое, что выполнено (15) с заменой  $\varepsilon$  на  $(1 + \eta)\varepsilon$ .

Зафиксируем число  $T > T((1 + \eta)\varepsilon, \varphi(0))$ . Разобьем отрезок  $[0, T]$  на конечное число равных частей точками  $t_i = i\sigma$ . Число  $\sigma$  возьмем из условия

$$0 < \sigma < t(\varepsilon), \beta(\sigma) = \eta\varepsilon e^{-1} \frac{1 - e^{-\sigma}}{\sigma} - \max_{0 \leq s \leq T} (f_2(s + \sigma) - f_2(s)) > 0. \quad (38)$$

Обозначим

$$\varepsilon_i = (1 + \eta e^{-i\sigma})\varepsilon. \quad (39)$$

Допустим, что убегавший смог обеспечить в момент времени  $t_i$  условие

$$x(t_i) \notin K(x(t_i), y(t_i), \varphi(t_i), \varepsilon_i, T(\varepsilon_i, \varphi(t_i))). \quad (40)$$

Отметим, что при  $i = 0$  это условие выполнено.

Согласно лемме 2 существует единичный вектор  $\psi_i$  такой, что

$$\langle f_1(s)x(t_i) + f_2(s)y(t_i), \psi_i \rangle > cf_2(s)\varphi(t_i) + g(s, \varepsilon_i) \quad (41)$$

для всех  $s \geq 0$ .

Убегавший берет при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  управление  $v(t) = \psi_i$ . При выбранном управлении первого игрока реализуется движение  $x(t), y(t)$ . Подставим эти функции в формулу (19) с произвольным фиксированным числом  $p \geq t_i$ . Тогда из уравнений движения (20) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle f_1(p-t)x(t) + f_2(p-t)y(t), \psi_i \rangle \geq \\ & \geq \langle f_1(p-t_i)x(t_i) + f_2(p-t_i)y(t_i), \psi_i \rangle - (\varphi(t_i) - \varphi(t))cf_2(p-t_i) + b \int_{p-t}^{p-t_i} f_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

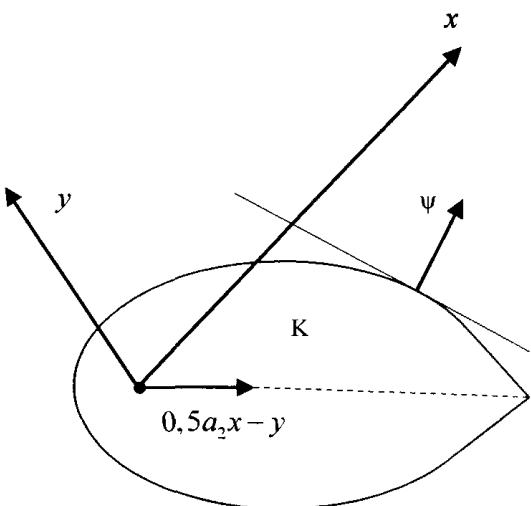
Отсюда из неравенства (41) при  $s = p - t_i$  получим, что

$$\langle f_1(p-t)x(t) + f_2(p-t)y(t), \psi_i \rangle > cf_2(p-t_i)\varphi(t) + g(p-t_i, \varepsilon_i) + b \int_{p-t}^{p-t_i} f_2(\tau) d\tau. \quad (42)$$

Положим в этом неравенстве  $p = t$ . Получим, что  $\|x(t)\| = \langle x(t), \psi_i \rangle > \varepsilon_i > \varepsilon$  при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ .

Покажем, что при любом

$$0 \leq s \leq t(\varepsilon_{i+1}) + \frac{c}{b}\varphi(t_{i+1}) \quad (43)$$



Схематическое изображение выпуклого множества  $K$ , отделяемого гиперплоскостью, перпендикулярной вектору  $\psi$

выполнено неравенство  $A(s) > 0$ . Здесь обозначено

$$A(s) = \langle f_1(s)x(t_{i+1}) + f_2(s)y(t_{i+1}), \psi_i \rangle - c f_2(s)\varphi(t_{i+1}) - g(s, \varepsilon_{i+1}).$$

Тогда условие (40) будет выполнено и при  $i+1$ . Возьмем любое число  $s$ , удовлетворяющее условиям (43), и положим в неравенстве (42)  $p = s + t_{i+1}, t = t_{i+1}$ . Получим

$$A(s) > c(f_2(s + \sigma) - f_2(s))\varphi(t_{i+1}) + g(s + \sigma, \varepsilon_i) - g(s, \varepsilon_{i+1}) + b \int_s^{s+\sigma} f_2(\tau) d\tau.$$

Отсюда, используя неравенства (36), (37), будем иметь

$$A(s) > (c\varphi(t_{i+1}) - bs + bt(\varepsilon_{i+1}))(f_2(s + \sigma) - f_2(s)) - \sigma(f_2(s + \sigma) - f_2(s)) + \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}.$$

Отсюда, используя монотонность функции  $f_2(t)$ , неравенства (43) и формулу (39), получим, что

$$A(s) > \sigma \left( \eta \varepsilon e^{-T} \frac{1 - e^{-\sigma}}{\sigma} - f_2(s + \sigma) + f_2(s) \right) \geq \sigma \beta(\sigma).$$

Из второго условия в (38) получим требуемое неравенство  $A(s) > 0$ .

По описанному выше алгоритму убегающий строит свое управление на отрезке  $[T, 2T]$  и т.д.

**Доказательство теоремы 3.** Пусть начальное состояние и число  $0 < T < T(\varepsilon, \varphi(0))$  таковы, что включение (17) при  $t = T$  не выполнено. Тогда существует число  $\eta > 0$  и единичный вектор  $\psi$  такие, что при всех  $0 \leq s \leq T$  выполнено неравенство (35) с заменой в нем  $\varepsilon$  на  $(1 + \eta)\varepsilon$ . Разобьем отрезок  $[0, T]$  точками  $t_i = i\sigma$ . Число  $\sigma$  выбирается из условий (38). Допустим, что в момент времени  $t_i$  выполнено неравенство (41) на некотором единичном векторе  $\psi_i$  при всех  $0 \leq s \leq T - t_i$ .

Убегающий берет управление  $v(t) = \psi_i$  при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Тогда при всех  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  и при любом  $p \geq t_i$  выполнено неравенство (42). Как и ранее из него, получим, что  $\|x(t)\| > \varepsilon_i > \varepsilon$  при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Далее, при любом  $0 \leq s \leq T - t_{i+1}$  будет выполнено неравенство  $A(s) > 0$ . Поэтому, если  $T - t_{i+1} < T(\varepsilon_{i+1}, \varphi(t_{i+1}))$ , то неравенство (41) выполнено при  $i+1$ . Если  $T(\varepsilon_{i+1}, \varphi(t_{i+1})) \leq T - t_{i+1}$ , то реализовавшееся в момент времени  $t_{i+1}$  состояние удовлетворяет условию (40).

## Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский – М.: Наука, 1970. – 420 с.
2. Красовский, Н.Н. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы / Н.Н. Красовский // Прикл. матем. и мех. – 1968. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 177–184.
3. Пожарицкий, Г.К. Импульсное преследование в случае однотипных объектов второго порядка / Г.К. Пожарицкий // Прикл. матем. и мех. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5 – С. 897–907.
4. Субботина, Н.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков / Н.Н. Субботина, А.Н. Субботин // Прикл. матем. и мех. – 1975. – Т. 39. – Вып. 3. – С. 397–406.
5. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей / Н.Н. Петров // Известия РАН, Теория и системы управления. – 2009. – № 2. – С. 38–44.
6. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челябинский государственный университет. – 2005. – 124 с.
7. Ухоботов, В.И. Модификация игры изотропные ракеты. Многокритериальные системы при неопределенности и их приложениях / В.И. Ухоботов // Межвузовский сборник научных трудов: Челябинский государственный университет. – Челябинск: изд-во Башкирского университета, 1988. – С. 123–130.

8. Ухоботов, В.И. Одна задача импульсного преследования при ограниченной скорости убегающего / В.И. Ухоботов, О.В. Зайцева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 11. – № 2 (178). – С. 29–32.

9. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

10. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. Наука, 1985. – 224 с.

## ONE PROBLEM OF PULSE PERSUIT

V.I. Ukhobotov<sup>1</sup>, A.A. Troitsky<sup>2</sup>

Optimum time is found in second order linear differential game with pulse control. Optimum control has been developed for players.

*Keywords: differential game, pulse control, pursuit time.*

### References

1. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (The Theory of Motion Control). Moscow: Nauka, 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1968. Vol. 32. Issue 2. pp. 177–184. (in Russ.).

3. Pozharitskiy G.K. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1966. Vol. 30. Issue 5. pp. 897–907. (in Russ.).

4. Subbotina N.N., Subbotin A.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1975. Vol. 39. Issue 3. pp. 397–406. (in Russ.).

5. Petrov, N.N. *Izvestiya RAN, Teoriya i sistemy upravleniya*. 2009. no. 2. pp. 38–44. (in Russ.).

6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide). Chelyabinsk: Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet. 2005. 124 p. (in Russ.).

7. Ukhobotov V.I. *Modifikatsiya igry izotropnye rakety. Mnogokriterial'nye sistemy pri neopredelyennosti i ikh prilozheniyakh* (Modification of the isotropic rockets game. Multi-criterion systems in indeterminateness and its applications) // *Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov: Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet* (Interuniversity collection of scientific papers: Chelyabinsk State University). – Chelyabinsk: izd-vo Bashkirskogo universiteta, 1988. pp. 123–130. (in Russ.).

8. Ukhobotov V.I., Zaytseva O.V. *Oдна задача impul'snogo presledovaniya pri ogranichennoy skorosti ubegayushchego* (About one Problem of Impulse Pursuit at the Limited Velocity of the Escaping) *Vestnik YuUrGU. Seriya «Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika»*. 2010. Issue 11. no. 2(178). pp. 29–32. (in Russ.).

9. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. *Jelementy funkcional'nogo analiza* (Elements of functional analysis). Moscow, Nauka, 1965. 520 p. (in Russ.).

10. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential equations with diffuse right member). Moscow: Nauka, 1985. 224 p. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 9 апреля 2013 г.*

<sup>1</sup> Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr Sc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University

E-mail ukh@csu.ru

<sup>2</sup> Troitsky Anton Aleksandrovich is Post-graduate Student, Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University

E-mail antonio.troitsky@gmail.com

# МОДИФИКАЦИЯ ИТЕРАЦИОННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.Л. Ушаков<sup>1</sup>

Рассматриваются два эллиптических уравнения второго порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Их численное решение с помощью итерационной факторизации и фиктивных продолжений сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трех.

*Ключевые слова:* итерационная факторизация, фиктивные продолжения.

## Введение

Рассматриваются два эллиптических дифференциальных уравнения второго порядка в прямоугольной области со сторонами параллельными осям координат. При этом на правой и верхней сторонах прямоугольной области задано главное краевое условие, а на остальной части границы задано естественное краевое условие. При достаточно гладких данных и, как следствие, гладких решениях эти уравнения сводятся к уравнению Пуассона, экранированному уравнению Пуассона. Для разностных аналогов этих уравнений в виде систем линейных алгебраических уравнений приводится факторизующийся переобуславливатель попеременно треугольного вида при модификации [1]. Эта методика аналогична модификации метода фиктивных компонент, предложенной и изучаемой в [2]. Дискретные задачи такого вида могут быть также получены в методе типа фиктивных компонент при решении более сложных задач в [2, 3]. Решаемые в работе разностные уравнения получаются и при численном решении эллиптического дифференциального уравнения уже четвертого порядка в [4].

## Первая и вторая непрерывные задачи

Рассматриваются две задачи

$$u_\alpha \in W : A_\alpha(u_\alpha, v) = l_\alpha(v) \quad \forall v \in W, \quad l_\alpha \in W', \quad \alpha = 1, 2, \quad (1)$$

где соболевское пространство функций

$$W = W(\Omega) = \{v \in W_2^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

на прямоугольной области

$$\Omega = (0; b_1) \times (0; b_2), \quad \text{с } \Gamma_1 = \{b_1\} \times [0; b_2] \cup [0; b_1] \times \{b_2\},$$

билинейные формы

$$A_\alpha(u, v) = \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y + (\alpha - 1)cu v) d\Omega$$

и заданы константы  $b_1, b_2 > 0, c \geq 0$ .

Заметим, основываясь на [5-7], что решение каждой задачи из (1) существует и единственно.

Если

$$l_\alpha(v) = \int_{\Omega} f_\alpha v d\Omega, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1,$$

где  $f_\alpha$  – заданные действительные достаточно гладкие функции, то задачи из (1) представляются в следующем виде

$$-\Delta u_\alpha + (\alpha - 1)cu_\alpha = f_\alpha, \quad u_\alpha|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Ушаков Андрей Леонидович – старший преподаватель, кафедры дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: ushakov\_al@inbox.ru



Можно отметить, что в (2) уравнения с точностью до знака совпадают с уравнением Пуассона, когда  $\alpha = 1$ , с экранированным уравнением Пуассона, когда  $\alpha = 2$ .

### Первая и вторая дискретные задачи

Рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений, получающиеся при дискретизации (1), (2) на основе метода сумматорных тождеств

$$\bar{u}_\alpha \in \mathbb{R}^N : A_\alpha \bar{u}_\alpha = \bar{f}_\alpha, \bar{f}_\alpha \in \mathbb{R}^N, \alpha = 1, 2, \quad (3)$$

где векторы

$$\bar{v}_\alpha \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_\alpha = (v_{\alpha,1}, \dots, v_{\alpha,N})', N = m \cdot n, m, n \in \mathbb{N},$$

при этом считается, что

$$v_{\alpha, m(j-1)+i} = v_{\alpha,i,j}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$$

а  $v_{\alpha,i,j}$  – являются значениями функции дискретного аргумента, соответствующего узлам сетки

$$(x_i, y_j) = ((i-0,5)h_1, (j-0,5)h_2), i, j \in \mathbb{Z},$$

шаги сетки

$$h_1 = b_1 / (m + 0,5), h_2 = b_2 / (n + 0,5),$$

состоящей из указанных выше узлов, а матрицы  $A_\alpha$  размерности  $N \times N$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha \bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha \rangle &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ((u_{\alpha,i+1,j} - u_{\alpha,i,j})(v_{\alpha,i+1,j} - v_{\alpha,i,j})h_1^{-2} + \\ &+ (u_{\alpha,i,j+1} - u_{\alpha,i,j})(v_{\alpha,i,j+1} - v_{\alpha,i,j})h_2^{-2} + (\alpha - 1)cu_{\alpha,i,j}v_{\alpha,i,j})h_1h_2, \\ u_{\alpha,i,n+1} = v_{\alpha,i,n+1} &= 0, i = 1, \dots, m, u_{\alpha,m+1,j} = v_{\alpha,m+1,j} = 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение векторов следующего вида

$$\langle \bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha \rangle = \sum_{k=1}^N u_{\alpha,k} v_{\alpha,k} h_1 h_2 \quad \forall \bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha \in \mathbb{R}^N.$$

Если функции  $f_\alpha$  непрерывны на области  $\Omega$ , то возможно положить

$$f_{\alpha,i,j} = f(x_i, y_j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Решение каждой задачи из (3) существует и единственно, т.к.  $A_\alpha > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

### Фиктивные продолжения дискретных задач и их решений

Выбираются фиктивные продолжения для (3)

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^{2N} : D\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{2N}, \bar{f}_{3-i} = 0, \alpha = 1, 2, \quad (4)$$

где векторы

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^{2N} : \bar{v} = (\bar{v}'_1, \bar{v}'_2)',$$

блочная, верхнетреугольная матрица  $D$  размерности  $2N \times 2N$  такова, что

$$D_{11} = A = A_1, D_{12} = \theta, D_{21} = 0, D_{22} = A = A_2,$$

матрицы

$$\theta = \nabla_x' \nabla_y - \nabla_y' \nabla_x, A = \nabla_x' \nabla_x + \nabla_y' \nabla_y,$$

а матрицы  $\nabla_x, \nabla_y$  размерности  $N \times N$  определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x \bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha \rangle &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-(u_{\alpha,i+1,j} - u_{\alpha,i,j})h_1^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2, u_{\alpha,m+1,j} = v_{\alpha,m+1,j} = 0, j = 1, \dots, n, \\ \langle \nabla_y \bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha \rangle &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-(u_{\alpha,i,j+1} - u_{\alpha,i,j})h_2^{-1}v_{\alpha,i,j})h_1h_2, u_{\alpha,i,n+1} = v_{\alpha,i,n+1} = 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Введём подпространства векторов в пространстве  $\mathbb{R}^{2N}$ :

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}'_1, \bar{v}'_2)' : \bar{v}_2 = 0 \right\}, \quad \bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}'_1, \bar{v}'_2)' : A\bar{v}_1 - \theta\bar{v}_2 = 0 \right\}.$$

Утверждение 1. Решение каждой задачи из (4)  $\bar{u} \in \bar{V}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , существует и единственно.

**Итерационная факторизация на фиктивных продолжениях**

Определим блочную матрицу  $C$  размерности  $2N \times 2N$  такую, что

$$C_{11} = C_{22} = A, \quad C_{12} = -\theta, \quad C_{21} = \theta.$$

Для решения задач из (4) предлагаются итерационные процессы:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^{2N} : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_k(D\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \tau_k > 0 \quad \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

Заметим, что в итерационных процессах из (5) возникают задачи с факторизуемым оператором и следующего вида

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N : LL^t \bar{U} = \bar{F}, \quad \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\bar{W} \in \mathbb{C}^N : L\bar{W} = \bar{F}, \quad \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N : L^t \bar{U} = \bar{W}, \quad \bar{W} \in \mathbb{C}^N,$$

где матрицы

$$L = \nabla'_x - i\nabla'_y, \quad L^t = \bar{L} = \nabla_x + i\nabla_y,$$

$$LL^t = (\nabla'_x - i\nabla'_y)(\nabla_x + i\nabla_y) = A + i\theta,$$

тогда

$$(A + i\theta)(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2) = \bar{f}_1 + i\bar{f}_2,$$

что равносильно:

$$\begin{cases} A\bar{u}_1 - \theta\bar{u}_2 = \bar{f}_1, & \bar{u}_1 + i\bar{u}_2 = \bar{U}, \\ \theta\bar{u}_1 + A\bar{u}_2 = \bar{f}_2, & \bar{f}_1 + i\bar{f}_2 = \bar{F} \end{cases}$$

и, действительно, на каждом шаге итерационных процессов из (5) возникают задачи типа

$$C\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{u} = (\bar{u}'_1, \bar{u}'_2)', \quad \bar{f} = (\bar{f}'_1, \bar{f}'_2)'$$

Утверждение 2. Если в итерационных процессах из (5)  $\bar{u}^{k-1} = \bar{u}$ , то  $\bar{u}^k = \bar{u} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $\bar{u}^k = \bar{u} + \bar{\psi}^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Утверждение 3. В итерационных процессах из (5)

$$A\bar{\psi}_1^k - \theta\bar{\psi}_2^k = (1 - \tau_k)(A\bar{\psi}_1^{k-1} - \theta\bar{\psi}_2^{k-1}),$$

если  $\alpha = 1$ ,  $\tau_1 = 1$ , то  $\bar{\psi}^k \in \bar{V}_2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , если  $\alpha = 2$ , то  $\bar{\psi}^k \in \bar{V}_2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Введём нормы

$$\|\bar{v}_\alpha\|_{\Lambda_\alpha} = \sqrt{\langle A_\alpha \bar{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha \rangle}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Замечание 1. Имют место неравенства

$$\exists \delta \in [1; +\infty) : A \leq \Lambda \leq \delta A,$$

где  $\delta = 1 + c\lambda^{-1}$ ,  $\lambda = 2,25(b_1^{-2} + b_2^{-2}) = \lambda_{1,1}(1,1) \leq \lambda_{1,1}(m,n) < \lim_{m,n \rightarrow \infty} \lambda_{1,1}(m,n) = \frac{\pi^2}{9} \lambda$ , а собственные числа матрицы  $A$  из [1]:

$$\lambda_{i,j}(m,n) = \left( \frac{2m+1}{b_1} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{(2i-1)\pi}{2(2m+1)} \right) + \left( \frac{2n+1}{b_2} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)} \right).$$

Утверждение 4. Имеет место равенство

$$\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle = \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2.$$

Доказательство. Учитывая, что

$$A\bar{\psi}_1 - \theta\bar{\psi}_2 = 0, \quad \theta' = -\theta,$$

получается

$$\begin{aligned} \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle &= \langle \theta\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2 \rangle + \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle = \langle \bar{\psi}_1 \theta' \bar{\psi}_2 \rangle + \langle A\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \rangle = \\ &= \langle A\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \rangle - \langle \theta\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 \rangle = \langle A\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1 \rangle. \end{aligned}$$

*Предположение 1.* (О фиктивном продолжении) Имеет место неравенство

$$\exists \alpha_1 \in (0; 1): \langle A\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle \leq \alpha_1 \langle A\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \quad \forall \bar{v} \in \bar{V}_2.$$

Можно отметить ( $\gamma = (1 - \alpha_1)^{-1}$  или  $\alpha_1 = 1 - \gamma^{-1}$ ), что

$$\exists \gamma \in (1; +\infty): \langle A\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \leq \gamma \langle C\bar{v}, \bar{v} \rangle = \gamma (\langle A\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle - \langle A\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle) \quad \forall \bar{v} \in \bar{V}_2,$$

т.к. матрица  $A > 0$ , а из [8] и матрица  $C > 0$ . А именно в нашем случае выводится, что

$$(C\bar{v}, \bar{v}) = (\nabla_x \bar{v}_1 - \nabla_y \bar{v}_2)^2 + (\nabla_y \bar{v}_1 + \nabla_x \bar{v}_2)^2 > 0 \quad \forall \bar{v} \neq 0,$$

последнее, т.к.  $(\nabla_x + i\nabla_y)(\bar{v}_1 + i\bar{v}_2) \neq 0 \quad \forall \bar{v} \neq 0$ . Также отметим, что

$$\exists \lambda^{-1} \in (0; +\infty): 0 \leq \langle A\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = \langle \theta\bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = \langle A^{-1}\theta\bar{v}_2, \theta\bar{v}_2 \rangle \leq \lambda^{-1} \langle \theta\bar{v}_2, \theta\bar{v}_2 \rangle \rightarrow 0, \text{ при } h_1, h_2 \rightarrow 0,$$

где опять  $\lambda = \lambda_{1,1}(1, 1) = 2, 25(b_1^{-2} + b_2^{-2})$ , т.е.

$$\langle A\bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle \rightarrow 0, \quad \bar{v}_1 \rightarrow \bar{0}, \text{ т.к. } \theta\bar{v}_2 = (\nabla_x' \nabla_y - \nabla_y' \nabla_x) \bar{v}_2 \rightarrow \bar{0}, \text{ при } h_1, h_2 \rightarrow 0 \quad \forall v \in \bar{V}_2.$$

*Утверждение 5.* Имеют место неравенства

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \leq (1 - \alpha_1) \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \leq \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2.$$

*Доказательство.* Используя, что

$$\langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \leq \alpha_1 \langle C\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle &\leq (1 - \alpha_1) \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle = \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle - \alpha_1 \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \leq \\ &\leq \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle = \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2. \end{aligned}$$

*Утверждение 6.* Если в итерационном процессе из (5)  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\tau_1 = 1$ , то имеют место оценки

$$\langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \rangle = (\gamma - 1) \langle C\bar{\psi}^0, \bar{\psi}^0 \rangle, \quad \|\bar{\psi}_1^1\|_A \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \|\bar{\psi}_1^0\|_A = (\gamma - 1) \|\bar{\psi}_1^0\|_A.$$

*Доказательство.* Из итерационного процесса имеем

$$C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) = -D\bar{\psi}^0, \quad \langle C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0), \bar{\psi}^1 \rangle = \langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle = -\langle D\bar{\psi}^0, \bar{\psi}^1 \rangle = -\langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^1 \rangle \leq \|\bar{\psi}_1^0\|_A \|\bar{\psi}_1^1\|_A,$$

тогда

$$\langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle \leq \frac{\langle A\bar{\psi}_1^1, \bar{\psi}_1^1 \rangle}{\langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle} \langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \rangle \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \rangle = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \langle C\bar{\psi}^0, \bar{\psi}^0 \rangle,$$

учитывая, что

$$\langle A\bar{\psi}_1^1, \bar{\psi}_1^1 \rangle \leq \alpha_1 \langle C\bar{\psi}_2^1, \bar{\psi}_2^1 \rangle, \quad \langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle = \langle A\bar{\psi}_2^1, \bar{\psi}_2^1 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1^1, \bar{\psi}_1^1 \rangle \geq (1 - \alpha_1) \langle A\bar{\psi}_2^1, \bar{\psi}_2^1 \rangle.$$

Из утверждения 5.

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1^1, \bar{\psi}_1^1 \rangle \leq \langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \langle C\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \rangle,$$

следовательно, выполняется вторая оценка.

*Утверждение 7.* Имеют место неравенства

$$\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \leq \langle D\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \leq \delta \gamma \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2.$$

*Доказательство.* Заметим,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_1}{\delta} \langle D\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle &\leq \frac{1 - \alpha_1}{\delta} \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \leq (1 - \alpha_1) \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \leq \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle = \\ &= \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle - \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \leq \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle = \langle D\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 8. Если в итерационных процессах из (5)  $\alpha \neq 1$  или  $k \neq 1$ ,

$$0 < \tau_k = \tau = \frac{2}{1 + \gamma\delta} < \frac{2}{\gamma\delta}, \quad q = \frac{\delta - 1 + \alpha_1}{\delta + 1 - \alpha_1} = \frac{\gamma\delta - 1}{\gamma\delta + 1} < 1,$$

то

$$\langle C\bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \rangle \leq q^2 \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из итерационных процессов получается, что

$$C(\bar{\psi}^k - \bar{\psi}^{k-1}) = -\tau D\bar{\psi}^{k-1}, \quad \bar{\psi}^k = T\bar{\psi}^{k-1}, \quad T = E - \tau C^{-1}D, \quad T = T' > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} \langle C\bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \rangle &= \langle CT\bar{\psi}^{k-1}, T\bar{\psi}^{k-1} \rangle \leq \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \frac{\langle CT\bar{\psi}, T\bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \\ &= \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \left( \frac{\langle CT\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \left( \frac{\langle (C - \tau DT)\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \\ &= \sup_{\bar{\psi} \in \bar{V}_2} \left( 1 - \tau \frac{\langle D\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \max \left\{ |1 - \tau|^2 |1 - \tau\gamma\delta|^2 \right\} \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = q^2 \langle C\bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle. \end{aligned}$$

Теорема 1. В итерационных процессах из (5)

$$\| \bar{u}_\alpha^k - \bar{u}_\alpha \|_{A_\alpha} \leq \varepsilon_\alpha \| \bar{u}_\alpha^0 - \bar{u}_\alpha \|_{A_\alpha},$$

при

$$\tau_1 = (2 - \alpha) + (\alpha - 1)\tau, \quad \tau_k = \tau, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

получается, что

$$\varepsilon_\alpha \leq \left( (2 - \alpha)(\gamma - 1) + (\alpha - 1)\sqrt{\gamma\delta}q \right) q^{k-1}.$$

Доказательство. Если  $\alpha = 1$ , то из утверждения 5 имеем

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_1 \rangle \leq \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2,$$

а из утверждения 6 следует  $\langle C\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^1 \rangle \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \rangle = (\gamma - 1) \langle A\bar{\psi}_1^0, \bar{\psi}_1^0 \rangle$ .

Если  $\alpha = 2$ , то из утверждения 7 получается

$$\frac{1 - \alpha_1}{\delta} \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \leq \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle, \quad \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle \leq \langle A\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_2 \rangle \quad \forall \bar{\psi} \in \bar{V}_2.$$

Вывод. Учитывая вид матриц  $L, L^i$ , можно отметить, что для решения задач из (3) с  $N$  неизвестными, на основании приведенной теоремы 1, предложенными итерационными процессами из (5) с относительными погрешностями  $\varepsilon_\alpha$ , требуется не более чем  $O(N \ln \varepsilon_\alpha^{-1})$  арифметических операций.

### Литература

1. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптической красной задачи второго порядка / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып. 7. – № 7(62). – С. 64–70.
2. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков // Челябинский государственный технический университет. – Челябинск, 1991. – 40 с. (Деп. в ВИНТИ 11.11.91, № 4232-В91)
3. Мацокин, А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.

4. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Известия Челябинского научного центра. – 2007. – Вып. 1 (35) – С. 33–36.
5. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.
6. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. – 256 с.
7. Обэн, Ж.-П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
8. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

## UPDATING ITERATIVE FACTORIZATION FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF TWO ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER IN RECTANGULAR AREA

A.L. Ushakov<sup>1</sup>

Two elliptic equations of the second order in rectangular area under the mixed regional conditions are considered. Their numerical decision is reduced by means of iterative factorization and fictitious continuations to the solution of systems of the linear algebraic equations with triangular matrixes, in which the quantity of nonzero elements in each line do not exceed three.

*Keywords: iterative factorization, fictitious continuations.*

### References

1. Ushakov A.L. Modelirovanie iteratsionnoy faktorizatsii dlya ellipticheskoy kraevoy zadachi vtorogo poryadka (Simulation of iterative factorization for the elliptic second-order boundary value problem). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika, fizika, khimiya»*. 2006. Issue 7. no. 7(62). pp. 64–70. (in Russ.).
2. Ushakov A.L. *Modifikatsiya metoda fiktivnykh komponent* (Updating of the method of fictitious entries). Chelyabinsk: Chelyabinskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet, 1991. 40 p. (Dep. v VINITI 11.11.91, no. 4232-V91). (in Russ.).
3. Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V. The fictitious-domain method and explicit continuation operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1993. Vol. 33, no. 1. pp. 45–59.
4. Ushakov A.L. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra*. 2007. Issue 1(35). pp. 33–36. (in Russ.).
5. Oganesyanyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* (Variational differential solution method of elliptic equations). Erevan: Izd-vo AN ArmSSR, 1979. 235 p. (in Russ.).
6. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* (Some applications of functional analysis in mathematical physics). Leningrad: Izd-vo LGU, 1950. 256 p. (in Russ.).
7. Oben Zh.-P. *Priblizhyennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* (Approximate answer to elliptic boundary value problems). Moscow: Mir, 1977. 383 p. (in Russ.). [Aubin J.-P. *Approximation of elliptic boundary-value problems*. New York: Wiley-Interscience, 1972. 360 p.]
8. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i vychisleniya* (Matrices and calculations). Moscow: Nauka, 1984. 320 p. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 11 февраля 2013 г.*

<sup>1</sup> Ushakov Andrei Leonidovich is Associate Professor, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University  
E-mail: ushakov\_al@inbox.ru

## ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КЛАСТЕРОВ В ПРОЦЕССЕ ИХ ПОЛУЧЕНИЯ<sup>1</sup>

А.Г. Воронцов<sup>2</sup>

Методами компьютерного моделирования изучается структура кластеров, находящихся в неравновесном состоянии. Для анализа привлечены данные моделирования процесса формирования металлических кластеров в методе испарение – конденсация [1]. Найдено, что граница кластера имеет два слоя: внешний слой малой плотности и внутренний слой с упаковкой более плотной, чем центральная часть кластера. Обсуждается изменение приповерхностного слоя при разной степени неравновесности кластера.

*Ключевые слова:* структура металлических кластеров, конденсация, молекулярная динамика.

### Введение

Металлические частицы нанометрового размера (также будет использоваться термин кластеры) привлекают внимание исследователей из-за возможности их использования в электронике, химическом катализе, модификации различных материалов и т.д. [2]. Одной из основных особенностей данных объектов является сильная зависимость их свойств от размера и структуры. Структура металлических кластеров всесторонне изучалась в экспериментах и методами компьютерного моделирования. Обзор методик и результатов данных работ можно найти, например, в статье Балетто [3]. Большинство работ направленно на исследование основного и начальных возбужденных состояний кластеров, т.к. именно они важны в практических приложениях. Однако некоторые методики получения данных частиц, например, метод «испарение – конденсация» [4], имеют дело с неравновесным состоянием кластеров. Как было найдено в работе [5], при синтезе данным методом кластеры находятся в сильно неравновесном состоянии, для описания которого не могут быть использованы известные результаты.

В работах [5, 6] изучались распределения кластеров по размерам, по энергии поступательного и вращательного движения, а также по внутренней энергии, заключенной в кластере. Оказалось, что тепловые потоки, увеличивающие и понижающие собственную энергию кластеров при интенсивной нуклеации, не скомпенсированы, что ведет к увеличению внутренней энергии кластеров и появлению ее зависимости от размера. Кластеры, размер которых превосходит несколько десятков атомов, имеют значительную степень неравновесности. Например, для кластеров меди энергия теплового движения атомов в кластере в расчете на один атом может составлять величины до 0,37 эВ/атом [5], что примерно на порядок больше, чем средняя энергия теплового движения частиц парогазовой смеси, окружающей кластер.

Неравновесное состояние кластеров оказывает влияние на динамику их роста и в конечном итоге определяет свойства получаемых материалов. В связи с этим представляется интересным изучить структуру металлических кластеров, находящихся в сильно возбужденном состоянии, определить взаимосвязь между энергетическим состоянием кластера, его структурой и стабильностью.

### Условия моделирования

Для изучения были использованы модели кластеров, полученные методом молекулярной динамики при изучении процесса роста кластеров в среде буферного газа [1]. Условия моделирования процесса роста кластеров подробно описаны в работах [1, 5]. Для моделирования использо-

<sup>1</sup> Работа поддержана РФФИ, проект № 11-08-00891-а

<sup>2</sup> Воронцов Александр Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: sas@physics.susu.ac.ru

вался метод классической молекулярной динамики с потенциалом погруженного атома для взаимодействия атомов металла (Cu) и потенциалом Леннарда-Джонса для взаимодействия атомов инертного газа (Ar) между собой и с атомами металла. Начальное состояние системы получали по следующему алгоритму: после моделирования нуклеации из системы убиралась атомы металла, за исключением атомов, принадлежащих одному кластеру. Температурный режим в системе, содержащей один кластер, поддерживался регулированием кинетической энергии атомов буферного газа, т.е. изменение внутренней энергии кластера происходило при соударении с атомами буферного газа. Рассматривались кластеры содержащие до нескольких тысяч атомов и находящиеся при разных температурах. Моделирование постепенного нагрева кластера, первоначально содержащего 3200 атомов, показало, что изменение внутренней энергии до 0,3 эВ/атом не приводит к изменению размера кластера, для энергий 0,3–0,35 эВ/атом кластер постепенно испаряется, при энергиях выше 0,37 эВ/атом – кластер разрушается. Таким образом, значение внутренней энергии выше 0,35 эВ/атом уже соответствует интенсивному испарению.

### Анализ атомной структуры кластеров

Геометрическая структура кластеров анализировалась статистико-геометрическим методом [7, 8], основанном на разбиении Делоне. Разбиение Делоне позволяет находить четверки атомов (симплексы) попарно соседствующие друг с другом. В использованном методе структура характеризуется долей симплексов определенного типа. Тип симплекса – это число от 0 до 4, которое показывает на сколько плотно четверка атомов симплекса примыкают друг к другу. Симплексы типа 0 и 1 – тетраэдры близкие к правильным, симплексы типа 2 – фрагмент плотноупакованной структуры кристаллов (части октаэдров), 3 и 4 – фрагменты рыхлых структур [7].

Анализ структур нагретых кластеров сопровождается естественными трудностями: взаимное расположение атомов постоянно меняется, т.е. необходима статистическая интерпретация данных; размер кластера относительно мал, поэтому методика должна использовать минимальные фрагменты структуры. В данном случае использование симплексов Делоне является удачным решением, т.к. повышается статистическая надежность результата из-за того, что их число в разы больше, чем число атомов. Симплекс Делоне является наименьшим элементом структуры, поэтому оказывается возможным изучать зависимость структуры от расстояния до центра кластера.

Для анализа были выбраны кластеры размерами 3200, 290 и 21 атомов. Кластер из 3200 атомов может считаться «большим», т.к. он содержит более 10 атомных слоев; кластер из 290 атомов – «средним»; а кластер из 21 атомов – «малым», т.к. он содержит всего 1–2 слоя атомов. Для получения результатов по структуре проводилось усреднение по  $10^5$  конфигурациям, за начало отсчета выбирался центр масс кластера. Анализировались только внутренние симплексы кластера, т.е. симплексы у которых присутствуют все соседи.

### Структура кластеров

Зависимость доли симплексов разного типа от расстояния до центра масс кластера показаны на рис. 3, 4. Структура кластеров анализировалась для разных значений внутренней энергии (эквивалентные собственные температуры кластеров можно получить по формуле  $T = 2/3 E/k_B$ ). Основное внимание было уделено двум состояниям: стабильному (энергия 0,15–0,20 эВ/атом) и близкому к нестабильной области (0,30 – 0,35 эВ/атом), которая начинается выше 0,37 эВ/атом. Согласно графикам (рис. 1, 2), структура сформировавшегося кластера (3200 атомов) состоит из 3-х слоев: внутренняя часть с постоянной структурой (радиус менее 17 Å), наружное облако атомов уменьшающейся плотности (расстояния свыше 21 Å) и слой, разделяющий конденсированную часть кластера от его псевдогазовой оболочки. Промежуточный слой имеет толщину 3–4 Å и отличается от ядра кластера повышенным содержанием правильных тетраэдрических элементов (симплексы типа 0 и 1) и пониженным содержанием рыхлых элементов (симплексы типа 3 и 4). Данная структура соответствует более плотной объемной фазе, и по всей видимости, обеспечивает стабильность кластера. Стоит заметить, что при изучении профиля плотности нагретых кластеров, слой уплотнения заметить не удастся из-за значительной статистической погрешности. Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что при нагреве кластера до энергий 0,30–0,35 эВ/атом структура разделительного слоя приближается по свойствам к структуре центральной части кластера (см. рис. 2), при этом ширина слоя увеличивается на величину порядка 15 %. В ядре кластера при

нагревании также увеличивается доля неплотных симплексов типа 3 и 4 и уменьшается доля симплексов типа 0 и 1.

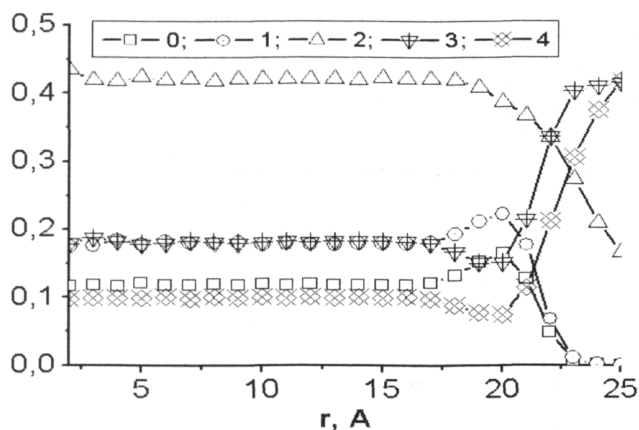


Рис. 1. Доля симплексов разного типа (0...4) в зависимости от радиуса в кластере из 3200 атомов. Энергия теплового движения 0,15 – 0,20 эВ/атом (эквивалентная температура 1150 – 1540 К)

Для кластеров меньшего размера разделение на слои сохраняется (рис. 3). При этом в кластере из 290 атомов и внутренняя часть и уплотненный слой вблизи поверхности имеют большую долю правильных симплексов (типа 0 и 1) в сравнении с кластером из 3200 атомов. Таким образом, малый кластер при той же внутренней энергии имеет более плотную атомную структуру, что может быть связано с изменением типа упорядочения на икосаэдрическую в малых кластерах [3]. Сверхмалые кластеры (21 атом) имеют большую подвижность атомов и большие флуктуации значений энергии, что приводит к высоким погрешностям и необходимости усреднения увеличенного количества атомных конфигураций. Для сверхмалых кластеров ядро кластера объединено с уплотненным слоем, который сохраняет размер порядка 2–3 Å.

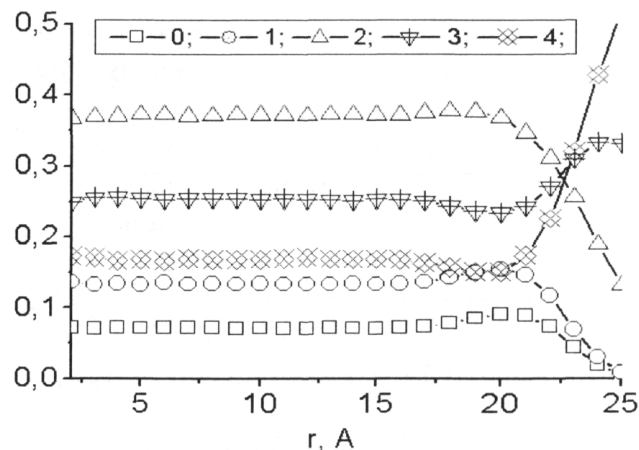


Рис. 2. Доля симплексов разного типа (0...4) в зависимости от радиуса в кластере из 3200 атомов. Энергия теплового движения 0,30 – 0,35 эВ/атом (эквивалентная температура 2300 – 2700 К).

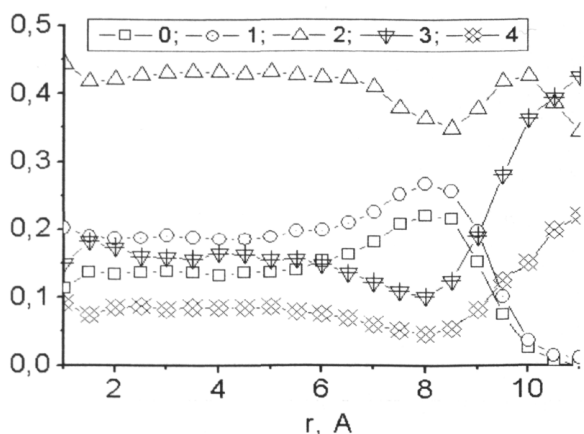


Рис. 3. Доля симплексов разного типа (0...4) в зависимости от радиуса в кластере из 290 атомов. Энергия теплового движения 0,15 – 0,20 эВ/атом (эквивалентная температура 1150 – 1540 К).

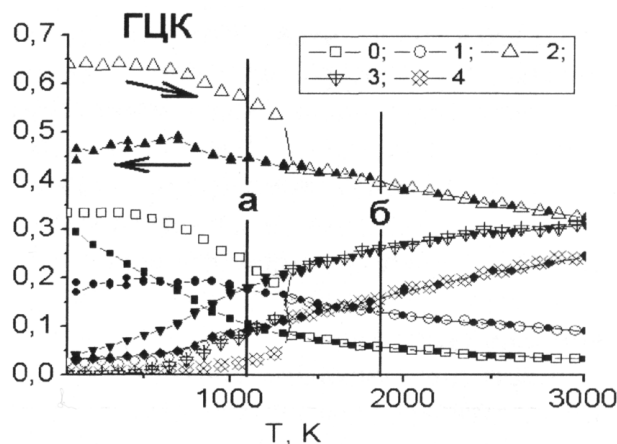


Рис. 4. Доля симплексов разного типа (0...4) для объемной фазы меди. Пустые символы – нагрев из ГЦК кристалла. Заполненные символы – охлаждение с образованием аморфной структуры. Вертикальные линии – структура эквивалентная структуре ядра кластера с разной внутренней энергией (пояснение в тексте).

Для сравнения структуры кластеров с объемной структурой меди на рис. 4 показаны доли симплексов определенного типа (от 0 до 4) для объемных моделей меди с используемым потенциалом. Перед анализом модели из 4000 атомов с периодическими граничными условиями выдерживались при указанных температурах и давлении близком к атмосферному. На рис. 4 приведены состояния, соответствующие жидкости, аморфному состоянию и ГЦК кристаллу. На рисунке хорошо видна точка плавления модели вблизи истинной температуры плавления (1356 К). Можно заметить, что структура жидкой фазы не зависит от исходного состояния, т.е. появляется возможность проводить сравнение неупорядоченных структур. Вертикальными линиями на рис. 4 показаны структуры, характерные для ядра большого кластера (3200 атомов) с разной внутренней энергией: линия (а) – энергия 0,15–0,20 эВ/атом, линия (б) – энергия 0,30–0,35 эВ/атом. Можно отметить, что структура кластера соответствует структуре объемной фазы с



более низкой температурой. Это может быть следствием избыточного давления, связанного с поверхностным натяжением, которое делает структуру кластера более упорядоченной.

### Заключение

Моделирование структуры нагретых металлических кластеров показало, что кластер состоит из трех слоев: центральной части – ядра, псевдогазовой оболочки и разделяющего слоя между ними. Ядро в объеме имеет постоянную атомную структуру, а промежуточный слой более упорядочен, чем ядро и имеет постоянный размер порядка 2–4 Å. При увеличении температуры разница в структуре промежуточного слоя и ядра уменьшается и практически исчезает при приближении к границе стабильности кластера.

### Литература

1. Воронцов, А.Г. Моделирование зарождения и роста металлических наночастиц в процессе конденсации из пересыщенного пара / А.Г. Воронцов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2009. – Вып. 1. – № 22(155). – С. 39–44.
2. Inorganic nanoparticles: synthesis, applications, and perspectives / ed. by C. Altavilla, E. Ciliberto. – Boca Raton; London: CRC, 2011. – 558 p.
3. Baletto, Fr. Structural properties of nanoclusters: Energetic, thermodynamic, and kinetic effects / Fr. Baletto, R. Ferrando // Reviews of Modern Physics. – 2005. – Vol. 77. – P. 371–423.
4. Фришберг, И.В. Газофазный метод получения порошков / И.В. Фришберг, Л.И. Кватер, Б.П. Кузьмин, С.В. Грибовский. – М.: Наука. – 1978. – 223 с.
5. Воронцов, А.Г. Кинетика и энергетические состояния нанокластеров в начальной стадии процесса гомогенной конденсации при высоких степенях пересыщения / А.Г. Воронцов, Б.Р. Гельчинский, А.Е. Коренченко // ЖЭТФ. – 2012. – Т. 142. – вып. 5(11). – С. 897–907.
6. Воронцов, А.Г. Статистический анализ столкновений металлических наночастиц при высоких степенях пересыщения / А.Г. Воронцов, Б.Р. Гельчинский, А.Е. Коренченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 61–66.
7. Vorontsov, A.G. Use of interatomic space for studying structure transition in melts / A.G. Vorontsov, G.P. Vyatkin, A.A. Mirzoev // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2007. – Vol. 353, № 32–40. – P. 3510–3514.
8. Vorontsov, A.G. Structural changes of simple expanded liquids at high temperatures / A.G. Vorontsov, D.A. Kuts // Journal of Physics: Conference Series. – 2008. – Vol. 98. – P. 012004.

## STRUCTURE OF HEATED METAL CLUSTERS DURING ITS PREPARATION

A.G. Vorontsov<sup>1</sup>

Computer simulation study of non-equilibrium metal clusters are performed. It is found that cluster contains three layers: core layer, gas-like outer layer and intermediate well ordered layer. The changes of the layers with cluster size and its internal energy are discussed.

*Keywords: structure of metal clusters, condensation, molecular dynamics.*

### References

1. Vorontsov A.G. Modelirovanie zarozhdeniya i rosta metallicheskih nanochastits v protsesse kondensatsii iz peresyshchennogo para (Modeling of Nucleation and Growth of Metal Nanoparticles During the Condensation from Vopour Phase). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2009. Issue 1. no. 22(155). pp. 39–44. (in Russ.).
2. Altavilla C. (ed.), Ciliberto E. (ed.) *Inorganic nanoparticles: synthesis, applications, and perspectives*. Boca Raton; London: CRC, 2011. 558 p.
3. Baletto Fr., Ferrando R. Structural properties of nanoclusters: Energetic, thermodynamic, and kinetic effects. *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77. pp. 371–423.

<sup>1</sup> Vorontsov Alexander Gennadevich is Cand Sc (Physics and Mathematics), Associate Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University  
E-mail sas@physics.susu.ac.ru

4. Frishberg I.V., Kvater L.I., Kuz'min B.P., Gribovskiy S.V. *Gazofaznyy metod polucheniya poroshkov* (The gas-phase method for producing powders). Moscow: Nauka. 1978. 223 p. (in Russ.).
5. Vorontsov A.G., Gel'chinskii B.R., Korenchenko A.E. Kinetics and energy states of nanoclusters in the initial stage of homogeneous condensation at high supersaturation degrees. *JETP*. Vol. 115. Issue 5. pp. 789–797.
6. Vorontsov A.G., Gel'chinskiy B.R., Korenchenko A.E. Statisticheskiy analiz stolknoveniy metallicheskih nanochastits pri vysokikh stepenyakh peresyshcheniya (Statistical analysis of metal nanoparticle collisions at high supersaturation rates). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 61–66. (in Russ.).
7. Vorontsov A.G., Vyatkin G.P., Mirzoev A.A. Use of interatomic space for studying structure transition in melts. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2007. Vol. 353, no. 32–40. pp. 3510–3514.
8. Vorontsov A.G., Kuts D.A. Structural changes of simple expanded liquids at high temperatures. *Journal of Physics: Conference Series*. 2008. Vol. 98. pp. 012004.

*Поступила в редакцию 22 сентября 2013 г.*

# ВОЛНЫ ЛЭМБА В ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛАХ: ЛАЗЕРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ РЕГИСТРАЦИЯ

С.Ю. Гуревич<sup>1</sup>, Е.В. Голубев<sup>2</sup>, Ю.В. Петров<sup>3</sup>

Всесторонне исследованы процессы генерации и регистрации волн Лэмба в ферромагнитных металлах в интервале от комнатных температур до температур магнитного фазового перехода (точка Кюри). Установлены основные зависимости между параметрами указанных процессов.

*Ключевые слова:* волны Лэмба, лазерная генерация, электромагнитная регистрация, ферромагнитные металлы.

## Введение

Неразрушающий контроль качества композитных материалов и листовых металлоизделий, широко используемых в авиа- и ракетостроении, основан, как правило, на применении акустических методов контроля. В силу высоких технологических требований указанные методы должны быть преимущественно бесконтактными. По этой причине внимание специалистов привлекают генерация ультразвука в изделии за счет оптико-акустического преобразования (термоупругий эффект) с использованием импульсного лазерного излучения и регистрации ультразвука на основе обратного электромагнитно-акустического (ЭМА) преобразования с помощью широкополосных (по спектру) ЭМА-приёмников.

Так как длительность лазерного импульса на два-три порядка короче импульса, излучаемого пьезопреобразователями, то применение импульсных лазеров в ультразвуковой дефектоскопии значительно сокращает величину «мертвой» (неконтролируемой) зоны ответственного металлоизделия. Кроме того, короткий лазерный импульс генерирует в металлоизделии акустический сигнал широкого спектра, что увеличивает возможности спектрального акустического метода контроля, позволяющего распознавать образы (формы и размеры) дефектов. В свою очередь, регистрация отражённых от дефектов, или испытавших дифракцию на дефектах акустических импульсов с помощью широкополосного ЭМА-приёмника позволяет зафиксировать почти почти все спектральные составляющие сигнала.

## Теория

Впервые возникновение термоупругих волн в упругом полупространстве под действием внезапного нагревания границы было рассмотрено в так называемой «задаче Даниловской» [1]. В дальнейшем результаты подобных исследований были подытожены, например, в работе [2]. В 1989 году было экспериментально обнаружено влияние магнитного фазового перехода на возбуждение ультразвука в ферромагнитных металлах под действием лазерных импульсов [3]. Теория генерации объёмных акустических волн с учетом указанного выше эффекта была опубликована в работе [4]. Здесь впервые был произведен учёт температурной зависимости термического коэффициента линейного расширения (ТКЛР) среды, испытывающей аномалии в районе точки Кюри, а при определении направленностей лазерных излучателей ультразвука – конечность значений скорости распространения тепла и времени релаксации теплового потока. В дальнейшем были сформулированы основы теории лазерной генерации волн Рэлея в ферромагнитных металлах [5], однако к настоящему времени отсутствуют системные теоретические и экспериментальные исследования свойств Лэмба в указанных металлах. Представленная работа имеет цель восполнить этот пробел.

<sup>1</sup> Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: sergur@susu.ac.ru

<sup>2</sup> Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: ev\_golubev@mail.ru

<sup>3</sup> Петров Юрий Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет

В теоретическом плане настоящая работа посвящена решению несвязанной задачи динамической термоупругости для бесконечной упругой однородной пластины и выделению в поле векторов смещения слагаемых, описывающих волны Лэмба, которые возникают вследствие действия импульса оптического излучения. На первом этапе определяется температурное поле в пластине, которое было определено по методике, изложенной в работе [6]. На втором – поле вектора смещений, дисперсионные кривые и спектры симметричных и антисимметричных мод соответствующих номеров.

Для определения поля вектора смещения  $\vec{u}(r, z, t)$  рассмотрим уравнение движения упругой среды [7]

$$c_2^2 \Delta \vec{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + (3 - 4c_2^2/c_1^2)c_1^2 \alpha_T \text{grad } T. \quad (1)$$

Здесь  $T(r, z, t)$  – отклонение температуры от равновесного значения;  $A$  – коэффициент поглощения оптической энергии на границе металла;  $a$  – коэффициент температурной проводимости среды;  $\lambda_q$  – теплопроводность среды. Ось  $z$  направлена по нормали к поверхности вглубь среды;  $r$  – расстояние от оси цилиндрической системы координат,  $t$  – время. Границы пластины, занимающей область  $z \in [0, h]$ , тепло не проводят.

Представим вектор смещения через скалярный  $\Phi$  и векторный  $\vec{\Psi}$  потенциалы Ламэ

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}. \quad (2)$$

Тогда уравнение движения упругой среды может быть записано в виде двух дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = f(r, z, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где  $c_1, c_2$  – скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно;  $\psi$  – отличная от нуля компонента векторного потенциала  $\vec{\Psi} = \{0, \psi, 0\}$ . В правой части уравнения (3) учтено изменение ТКЛР  $\alpha_T$  с температурой

$$f(r, z, t) = (3 - 4c^2) \int_0^{T(r, z, t)} \alpha_T (T_0 + T) dT, \quad (5)$$

где  $T_0$  – равновесная температура в среде;  $c = c_2/c_1$ .

Решение уравнений (3) и (4) получаем с помощью интегрального преобразования Фурье по времени и преобразования Бесселя по пространственной координате, причем уравнение (3) преобразуется по функции  $J_0$ , а уравнение (4) по функции  $J_1$ , что обусловлено видом левых частей соответствующих уравнений. Получаем

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^*}{\partial z^2} - \beta_1^2 \tilde{\Phi}^* = \tilde{f}^*(\lambda, z, \omega), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}^*}{\partial z^2} - \beta_1^2 \tilde{\psi}^* = 0, \quad (7)$$

где  $\beta_1^2 = \lambda^2 - \omega^2/c_1^2$ ,  $\beta_2^2 = \lambda^2 - \omega^2/c_2^2$ .

Решения уравнений (6) и (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^*(\lambda, z, \omega) = & \left[ B_1 + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^z \tilde{f}^*(\lambda, z, \omega) \exp(-\beta_1 z) dz \right] \exp(\beta_1 z) + \\ & + \left[ B_2 - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^z \tilde{f}^*(\lambda, z, \omega) \exp(\beta_1 z) dz \right] \exp(-\beta_1 z), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tilde{\Psi}^*(\lambda, z, \omega) = B_3 \exp(-\beta_2 z) + B_4 \exp(\beta_2 z), \quad (9)$$

где неизвестные функции  $B_i(\omega, \lambda)$ , определяющие решение нашей задачи, необходимо получить, используя граничные условия, которые заключаются в отсутствии напряжений на гранях пластины.

Приведем окончательные выражения для проекций вектора деформации на границе пластины, соответствующей  $z = 0$

$$U_{Lr}(r, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega \left\{ \int_0^{\infty} \lambda J_1(\lambda r) \left[ \frac{\lambda^2 - \beta_2^2}{2\lambda} \left( \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_4} \right) \right] d\lambda \right\}, \quad (10)$$

$$U_{Lz}(r, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega \left\{ \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) \left[ \frac{\lambda^2 - \beta_2^2}{2\lambda} \left( \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{\Delta_4} \right) \right] d\lambda \right\}. \quad (11)$$

Обратное преобразование Бесселя в (10) и (11) позволяет получить выражение для спектральной плотности импульсов волн Лэмба, возбуждаемых импульсным оптическим излучением в ферромагнитной пластине. Подынтегральные выражения обладают особенностями – полюсами, сумма вычетов в которых и определяет спектральную плотность акустических импульсов, которая, вследствие дисперсии, определяется не только распределением термооптических источников в пластине, но и расстоянием от зоны возбуждения звука. Выражения (10) и (11) также дают и смещения в волнах Рэлея, если перейти к пределу  $h \rightarrow +\infty$ .

Исходными данными являются параметры оптического импульса (длительность, радиус, энергия) и свойства среды: равновесная температура, зависимость ТКЛР, температуропроводность, скорости распространения упругих колебаний, толщина пластины. В заданный момент времени и на заданном расстоянии до точки наблюдения необходимо вычислить значение проекции вектора смещения. Для уменьшения параметров задачи введём безразмерные переменные

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{at_0}}, \quad \chi = \frac{z}{\sqrt{at_0}}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad (12)$$

константы

$$\eta_r = \frac{R_0}{2\sqrt{at_0}}, \quad \chi_r = \frac{h}{\sqrt{at_0}}, \quad (13)$$

и параметры интегральных преобразований

$$\kappa = \lambda \sqrt{at_0}, \quad \xi = \omega t_0. \quad (14)$$

Вычисления были основаны, в основном, на решении задач трех типов. Во-первых, нахождение корня уравнения вида  $f(x) = 0$ . Во-вторых, нахождение точек экстремума функции  $f(x)$ . В-третьих, вычисление значения интеграла функции. Для каждой подынтегральной функции выбиралась шаговая функция, такая, что погрешность интерполяции не превышала  $\varepsilon = 10^{-8}$ . При этом результирующая погрешность вычисления избыточной температуры составляет  $10^{-7}$ , а смещений –  $10^{-3} - 10^{-4}$ . Программа была построена таким образом, что зависимость ТКЛР от температуры можно было задавать произвольной функцией (например, полиномиальной).

При расчетах использовались свойства следующих металлов: алюминий, медь, железо и никель, а также железо-никелевого сплава инварного состава 32НКД.

Корни дисперсионных уравнений зависят от частоты, толщины пластины и отношения скоростей объемных волн. Введем безразмерный параметр  $y = \lambda h = \kappa \chi_r$  – определяющий волновое число и  $x = \omega h / c_2 = \sqrt{at_0} \xi \chi_r / c_2$  – параметр, связанный с частотой. Тогда фазовая скорость может быть вычислена по формуле  $c = c_2 x / y$ .

На рис. 1 представлены зависимости  $y(x)$  для низших мод Лэмба в пластине с параметрами сплава 32НКД. На графиках имеются, но не показаны вертикальные участки, соответствующие малым значениям  $y$ , а также участки, где каждому параметру  $x$  соответствует два значения  $y$ . Нулевые моды  $A_0$  и  $S_0$  существуют во всем частотном интервале, причём волновое число антисимметричной моды всегда больше  $y_R$  – волнового числа рэлеевской волны, а симметричной –

меньше. Это означает, что при формировании  $S_0$  распределение оптико-акустических источников по глубине оказывает большее влияние, чем при формировании  $A_0$ . При увеличении параметра  $x$ , что соответствует увеличению произведения частоты и толщины пластины, волновые числа стремятся к  $y_R$ . Это означает, что на верхней грани толстой ( $x \gg 1$ ) пластины формируется

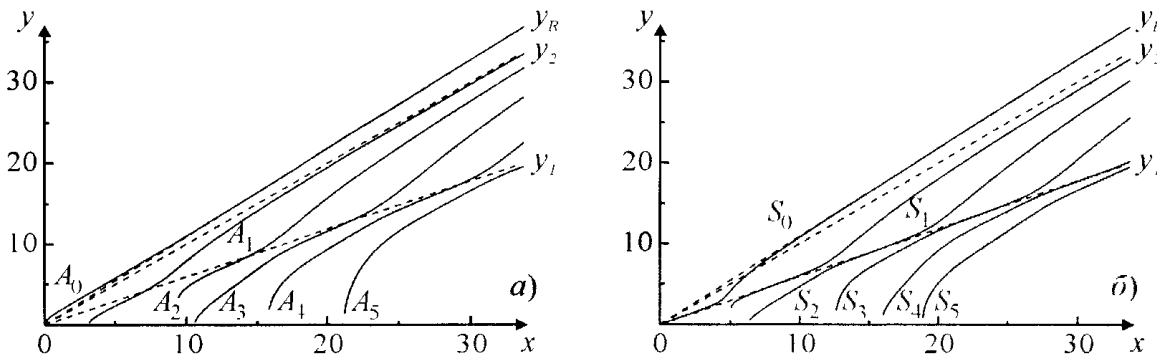


Рис. 1. Дисперсионные кривые для низших мод Лэмба: (а) – антисимметричные; (б) – симметричные. Сплав 32НКД

ся волна Рэлея, которая является суммой  $A_0$  и  $S_0$ . Волновые числа остальных мод Лэмба ограничены значением  $y_2(x)$  – волновым числом поперечной волны. Отклонения зависимостей  $y(x)$  от линейной означают, что разные спектральные компоненты одной моды распространяются с различной скоростью, что приведёт к изменению формы сигнала, соответствующего этой моде, при её распространении.

Далее были определены спектральные функции для нормальных составляющих смещений на поверхности ферромагнитной пластины, в которой распространяются волны Лэмба.

Спектральные функции определяются толщиной пластины, зависят от параметров лазерного импульса и параметров среды, которые могут изменяться с температурой  $T_0$  и в процессе поглощения лазерного импульса. Поскольку основным параметром, определяющим амплитуду акустического сигнала при термооптическом возбуждении является ТКЛР и его температурная зависимость, все остальные параметры среды мы будем полагать постоянными.

Расчеты, проведенные для пластин толщиной  $h = 0,5-5$  мм, длительности оптического импульса  $t_0 = 15$  нс и радиуса пучка  $R_0 = 1$  мм показывают, что при малых  $h$  спектр носит выраженный полосатый характер. При увеличении толщины пластины он существенно изменяется и, в результате уширения и наложения отдельных полос, спектр результирующего сигнала становится сплошным. При малых  $R_0$  спектр результирующего сигнала сплошной и составлен из перекрывающихся полос, а при увеличении радиуса становится полосатым. Энергия лазерного импульса при больших радиусах лазерного пучка преобразуется, в основном, в энергию колебаний низших мод.

Из решения линейной задачи следует, что спектр акустических импульсов пропорционален энергии оптического импульса. Поэтому для выявления изменений, обусловленных нелинейным характером преобразования, будем приводить спектры, отнесенные к максимальной избыточной температуре, которая, в нашем случае, также пропорциональна энергии оптического импульса.

Рассмотрим характеристики акустических импульсов, возбуждаемых в сплаве 32НКД, характеризующимся значительным изменением ТКЛР при нагреве среды от комнатной температуры до температуры плавления и наибольшим ростом в окрестности магнитного фазового перехода.

На рис. 2 показаны модули спектральных плотностей симметричных и антисимметричных мод низших номеров при различной энергии оптического импульса. В скобках показаны величины максимальной избыточной температуры  $T_{max}$  в процессе поглощения оптического импульса. Как показывает расчет, характер зависимости ТКЛР влияет на спектральный состав всех мод, поддерживаемых пластиной. При приближении температуры среды к точке Кюри, которая у рассматриваемого сплава составляет 493 К, наблюдается появление высокочастотной части, также максимум спектра смещается в сторону более высоких частот. Это объясняется тем, что интенсивность оптико-акустических источников изменяется с температурой нелинейно и ее распределение по объему пластины носит более сложный характер.

Наибольшее влияние на спектр акустического сигнала оказывает поведение ТКЛР в окрестности равновесной температуры. Поскольку наиболее существенные особенности ТКЛР соответ-

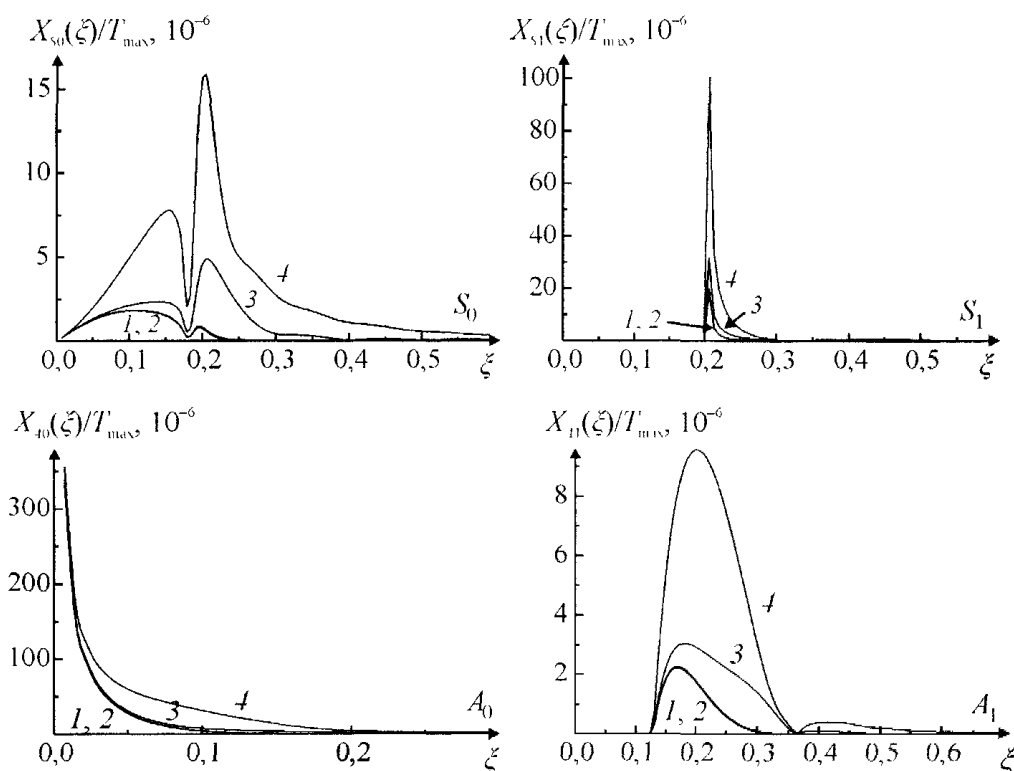


Рис. 2. Спектральные функции нормальных волн.  $S$  – симметричные моды.  $A$  – антисимметричные моды. Энергия импульса: 1 – 0,25; 2 – 0,5; 3 – 2,0; 4 – 5,0 мДж. Сплав 32НКД.  $R_0 = 1$  мм,  $h = 1$  мм,  $T_0 = 300$  К

ствуют фазовым переходам в материале образца, то и наибольшие изменения в спектральных функциях будут соответствовать случаю возбуждения акустических сигналов в среде, где происходит фазовый переход при поглощении лазерного импульса. Аналогичный результат для объемных волн был получен в [3].

Расчеты для других металлов (алюминия, меди, железа, никеля), выполненные для тех же условий, не выявили существенных изменений в спектре возбуждаемых импульсов нормальных волн, поскольку при  $T_0 = 300$  К ТКЛР изменяется незначительно.

### Эксперимент

Экспериментальная проверка теоретических расчетов производилась с помощью стенда, описанного в работе [8]. Результатами исследования являются дисперсионные кривые, а также формы акустических импульсов, возбужденных импульсным лазером, зарегистрированных серийным пьезоприёмником.

Некоторые результаты показаны на рис. 3 и 4, из которых видно, что собственная частота колебаний пьезоприёмника может не совпадать с квазичастотой  $\nu$  акустических импульсов волн Лэмба. Длительность импульсов и число колебаний в них для симметричных волн примерно в три раза меньше, чем для антисимметричных. Связано это, очевидно, с особенностями лазерной генерации волн Лэмба. С увеличением толщины пластины независимо от квазичастоты колебаний амплитуда импульсов симметричных волн уменьшается, их длительность увеличивается. Для антисимметричных волн – наоборот.

Для определения влияния магнитного фазового перехода на параметры импульсов волн Лэмба были проведены температурные исследования на пластине из ферромагнитного сплава инварного состава 32НКД, точка Кюри которого равна  $210^\circ$  С (рис. 5). Из полученных результатов видно, что имеет место нелинейное увеличение амплитудного значения импульсов примерно в семь раз. Существенных изменений формы импульсов, их длительности и квазичастоты колебаний при нагревании пластин не наблюдалось.

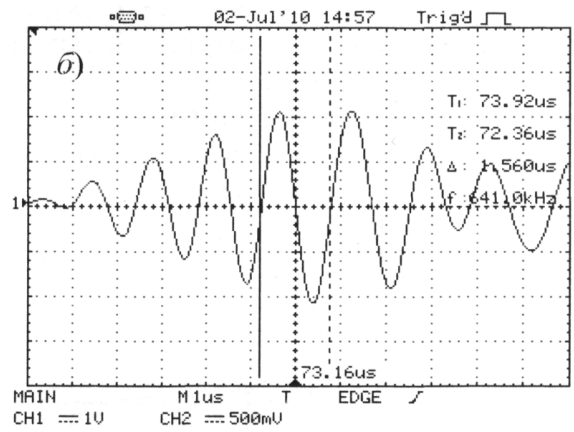
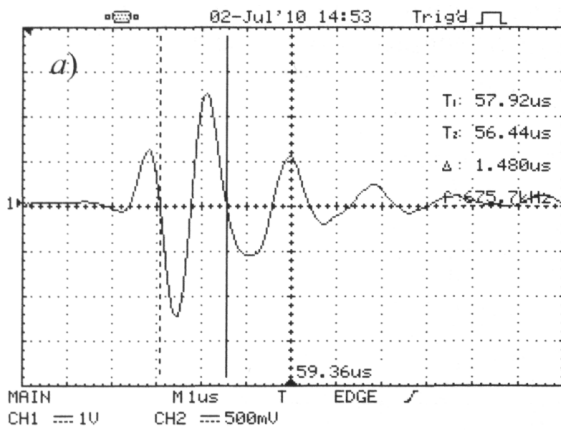


Рис. 3. Импульсы волн Лэмба в пластине  $h = 0,60$  мм и  $\nu = 0,60$  мГц:  
а – антисимметричные; б – симметричные

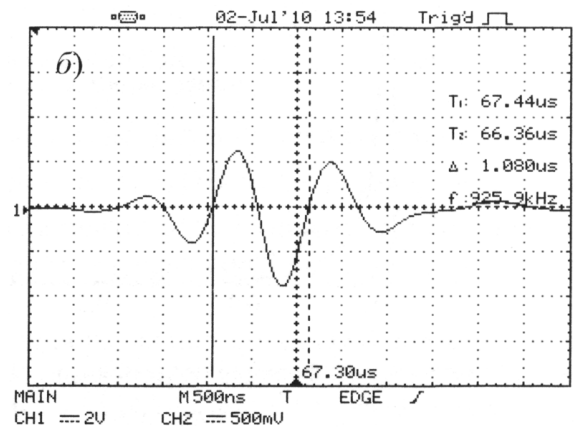
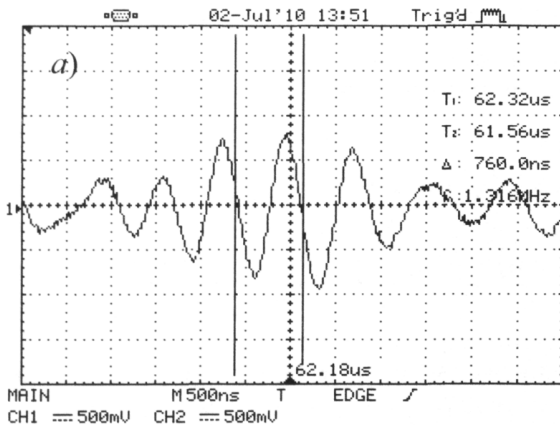


Рис. 4. Импульсы волн Лэмба в пластине  $h = 1,5$  мм и  $\nu = 1,25$  мГц:  
а – антисимметричные; б – симметричные

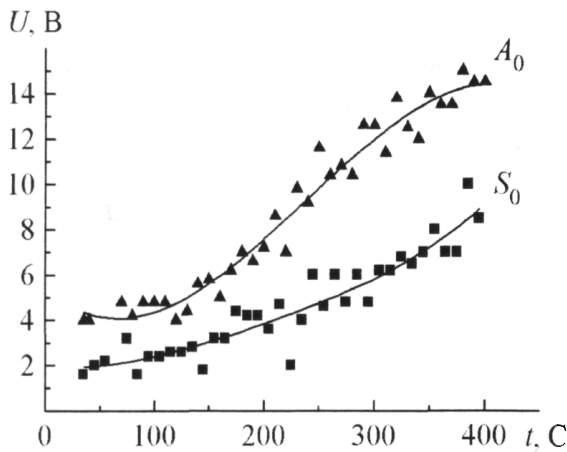


Рис. 5. Зависимость амплитуды импульсов симметричных ( $S_0$ ) и антисимметричных ( $A_0$ ) мод волн Лэмба от температуры.  
 $h = 0,60$  мм и  $\nu = 0,60$  мГц

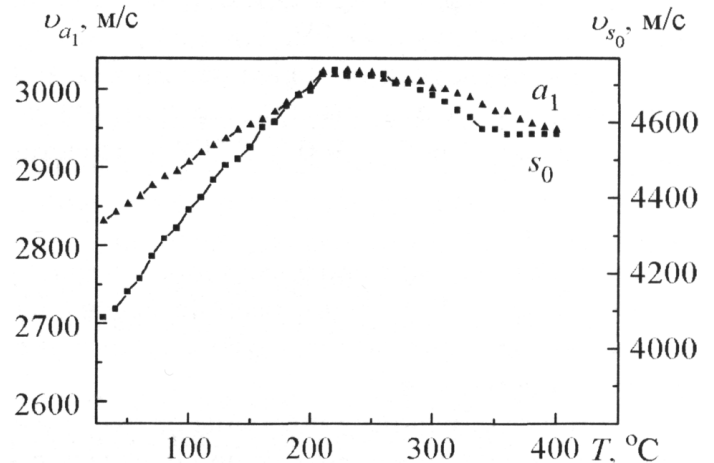


Рис. 6. Зависимость средней групповой скорости симметричных ( $S_0$ ) и антисимметричных ( $A_0$ ) мод волн Лэмба от температуры.  
 $h = 1,5$  мм и  $\nu = 1,25$  мГц

Известны способы оценки физико-механических свойств ферромагнитных металлоизделий, основанные на измерении скоростей акустических волн различных видов. Для определения влияния температуры на скорость волн Лэмба было проведено соответствующее экспериментальное исследование, результаты которого представлены на рис. 6. Видно, что скорости симметричных и антисимметричных волн Лэмба в ферромагнитной пластине инварного состава с повышением температуры увеличивается по линейному закону, достигает максимума в области точки Кюри и затем уменьшается. Такое поведение температурной кривой аналогично температурной зависимости продольных волн, полученной ранее [9]. На рис. 10 видно, что увеличение скорости в диапазоне от комнатной температуры до  $250^\circ\text{C}$  составляет примерно 12%. Хорошо



прослеживается точка перегиба, соответствующая магнитному фазовому переходу. Изменение толщины пластины и квазичастоты акустических колебаний на температурную зависимость скорости волн Лэмба существенного влияния не оказывает.

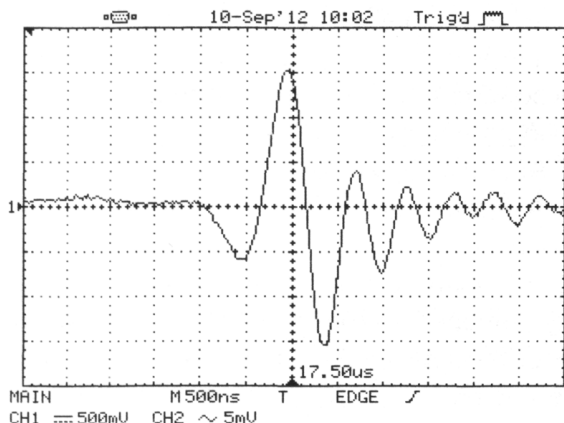


Рис. 7. Электромагнитный импульс, наведённый в ЭМА приёмнике модой  $S_0$  волны Лэмба

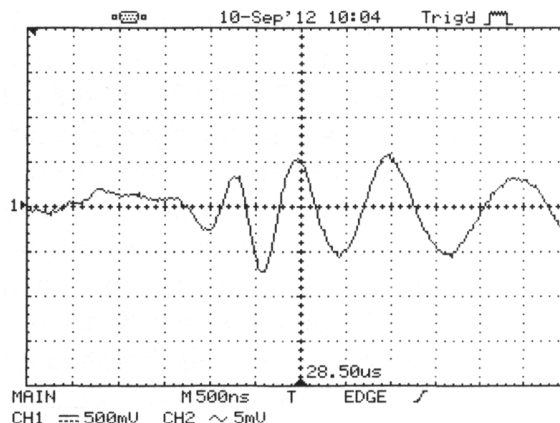


Рис. 8. Электромагнитный импульс, наведённый в ЭМА приёмнике модой  $A_0$  волны Лэмба

### Электромагнитная регистрация

Как уже отмечалось, контактные методы регистрации волн Лэмба не могут быть использованы для высокоскоростного и высокотемпературного ультразвукового контроля металлоизделий. В связи с этим авторами настоящей статьи была разработана методика и аппаратура для бесконтактной (электромагнитной) регистрации волн Лэмба. Теоретические основы этого процесса можно найти в работе [10]. Эксперимент проводился на стенде, описанном в работе [11].

Учитывая, что проведенные исследования являются довольно объемными, в статье приводятся результаты, относящиеся только к одной пластине. При этом считается, что параметры электромагнитных импульсов, наблюдаемых на экране дисплея осциллографа, пропорциональны соответствующим параметрам у.з. импульсов.

На рис. 7, 8 приведена осциллограмма электромагнитных импульсов, наводимых в электромагнитоакустическом приёмнике волнами Лэмба, распространяющимися в пластине толщиной 0,6 мм. Тип и номер возбуждаемых в пластине у.з. волн Лэмба определялись по методике, предложенной авторами в работе [8]. Из результатов экспериментов и расчетов следует, что при лазерной генерации акустических волн в ферромагнитной металлической пластине широкополосный ЭМА-приёмник регистрирует импульсы симметричных  $S_0$  и антисимметричных  $A_0$  у.з. волн Лэмба нулевых номеров. Для сравнения максимальной амплитуды  $U$ , длительности  $\tau$ , средней частоты колебаний  $\langle \nu \rangle$  и формы этих импульсов, на рис. 7 и 8 приведены их осциллограммы с меньшей временной разверткой. Видно, что форма импульсов различается, амплитуда импульса симметричных у.з. волн значительно больше, чем антисимметричных, разница в длительности импульсов небольшая, а квазичастота колебаний практически одинакова. Наблюдаемые отличия связаны, очевидно, с особенностями лазерной генерации волн Лэмба.

Для оценки ширины частотного спектра возбуждаемых лазером у.з. импульсов с помощью Фурье-преобразования был рассчитан спектр импульса симметричных волн (рис. 9). Видно, что вся энергия у.з. импульса, длительность которого равна 2,9 мкс, практически заключена в пределах от 0 до 1,75 МГц с максимумом амплитуды на частоте  $\approx 1,0$  МГц. В то же время у оптического импульса, длительность которого  $\approx 30$  нс, верхний предел частотного диапа-

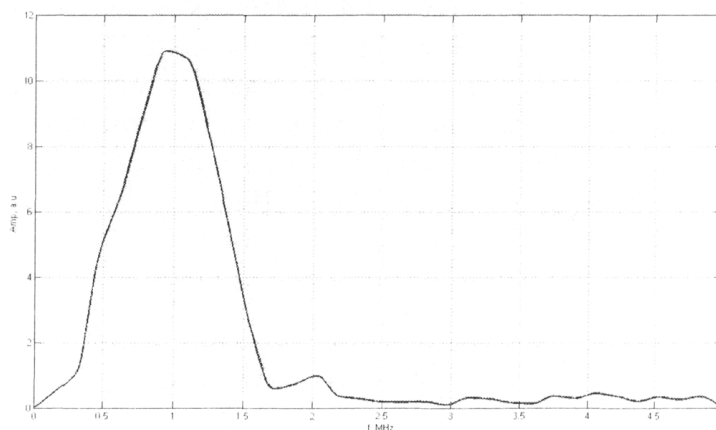


Рис. 9. Спектр электромагнитного импульса, наведённого в ЭМА приёмнике модой  $S_0$  волны Лэмба.

зона ограничивается  $\approx 30$  МГц. Такое уменьшение частоты означает, что металл хорошо пропускает низкочастотную часть спектра у.з. импульса (до 2,5 МГц) и интенсивно поглощает его высокочастотную (больше 2,5 МГц) часть.

Из анализа полученного спектра следует, что, когда необходимо получить максимальную амплитуду наведенного электромагнитного импульса, например, для реализации тенсового или эхо-методов контроля, целесообразнее использовать резонансный ЭМА-приёмник. Его высокочастотный индуктор выполняется в виде эквидистантной решетки с шагом равным половине длины волны. На частоту спектра, соответствующую максимальной амплитуде, индуктор настраивается подбором числа витков. Резонансный ЭМА-приемник может подключаться непосредственно к входу усилителя стандартного дефектоскопа.

Информацию, полученную в ходе проведенного исследования, можно применить для создания оптимальных бесконтактных методов и средств акустического контроля листовых металлоизделий, либо композитных материалов на основе листового металлоизделия, когда излучателем ультразвука является импульсный лазер, а приёмником – электромагнитоакустический преобразователь.

*Авторы выражают признательность Шульгинову А.А. за помощь в работе и обсуждение полученных результатов.*

## Литература

1. Даниловская, В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающее вследствие внезапного нагревания поверхности / В.И. Даниловская // Прикл. матем. и механика. – 1950. – Т. 14, № 3. – С. 129–133.
2. Гусев, В.А. Лазерная оптоакустика / В.Э. Гусев, А.А. Карабутов. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
3. Возбуждение ультразвука в железе при фазовом переходе под действием лазерных импульсов / Г.А. Буденков, С.Ю. Гуревич, А.Д. Каунов, А.Ф. Маскаев // Акуст. журн. – 1983. – Т. 29, № 4. – С. 561–562.
4. Гуревич, С.Ю. Основы теории и практического применения высокотемпературного ультразвукового контроля ферромагнитных металлоизделий: автореферат дис. ... д-ра техн. наук / С.Ю. Гуревич. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. техн. ун-та, 1995. – 43 с.
5. Голубев, Е.В. Лазерная генерация поверхностных акустических волн в ферромагнитном металле / Е.В. Голубев, С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров // ФММ. – 2004. – Т. 97, № 2. – С. 8–12.
6. Голубев, Е.В. К теории возбуждения волн Лэмба в металлах импульсным лазерным излучением / Е.В. Голубев, С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров // Акустич. журнал. – 2011. – Т. 57, № 5. – С. 600–606.
7. Ландау, Л.Д. Теория упругости. Теоретическая физика: в 10-ти т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – Т. VII. – 248 с.
8. Петров, Ю.В. Экспериментальное определение параметров волн Лэмба при их лазерной инерции / Ю.В. Петров, С.Ю. Гуревич, Е.В. Голубев // Дефектоскопия. – 2010. – № 3. – С. 45–49.
9. Температурные зависимости скорости распространения продольных ультразвуковых волн в сталях / С.Ю. Гуревич, Ю.Г. Гальцев, А.В. Каунов, Р.С. Каримов // Дефектоскопия. – 1987. – № 2. – С. 47–52.
10. Комаров, В.А. Теория физических полей: в 3 т. / В.А. Комаров, В.Ф. Мужичкий, С.Ю. Гуревич. – Челябинск–Ижевск: Издательство ЮУрГУ, 2000. – Т. III. – 627 с.
11. Экспериментальная установка для регистрации импульсных электромагнитных полей, возбуждаемых волнами Лэмба в магнитополяризованной металлической пластине / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Е.В. Голубев, А.А. Шульгинов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 146–149.

## LAMB WAVES IN FERROMAGNETIC METALS: LASER EXCITATION AND ELECTROMAGNETIC REGISTRATION

S.Yu. Gurevich<sup>1</sup>, E.V. Golubev<sup>2</sup>, Yu.V. Petrov<sup>3</sup>

The processes of laser excitation and receiving of the Lamb waves in ferromagnetic metals in the range of from room temperature to magnetic phase transition (the Curie point). The basic parameters of the relationship between these processes were investigated.

*Keywords: Lamb waves, laser excitation, the electromagnetic receiving, ferromagnetic metals.*

### References

1. Danilovskaya V.I. Temperaturnye napryazheniya v uprugom poluprostranstve, vznikayushchee vsledstvie vnezapnogo nagrevaniya poverkhnosti (Thermal stresses in an elastic half-space due to sudden heating surface). *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1950. Vol. 14, no. 3. pp. 129–133. (in Russ.).
2. Gusev V.E., Karabutov A.A. *Lazernaya optoakustika* (Laser Optical Acoustics). Moscow: Nauka, 1991. 304 p. (in Russ.).
3. Budenkov G.A., Gurevich S.Yu., Kaunov A.D., Maskaev A.F. *Akusticheskiy zhurnal*. 1983. Vol. 29, no. 4. pp. 561–562. (in Russ.).
4. Gurevich S.Yu. Osnovy teorii i prakticheskogo primeneniya vysokotemperaturnogo ul'trazvukovogo kontrolya ferromagnitnykh metalloizdeliy: avtoreferat dis. ... d-ra tekhn. nauk (Basic theory and practical applications of high-temperature ultrasonic testing of ferromagnetic metal: thesis abstract of doctor of science). Chelyabinsk: Izd-vo Chelyab. gos. tekhn. un-ta, 1995. 43 p. (in Russ.).
5. Golubev E.V., Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V. Laser Generation of Surface Acoustic Waves in a Ferromagnetic Metal. *The Physics of Metals and Metallography*. 2004. Vol. 97, no. 2. pp. 124–128.
6. Golubev E.V., Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V. On the Theory of Lamb wave excitation in metals by pulsed laser radiation. *Acoustical Physics*. 2011. Vol. 57, no. 5, pp. 620–626.
7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya uprugosti. Teoreticheskaya fizika: v 10-ti t.* (The theory of elasticity. Theoretical physics: in 10 volumes.). Moscow: Nauka, 1987. Vol. 7. 248 p.
8. Petrov Yu.V., Gurevich S.Yu., Golubev E.V. Experimental determination of parameters of laser-generated Lamb waves. *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2010. Vol. 46, no. 3. pp. 185–188.
9. Gurevich S.Yu., Gal'tsev Yu.G., Kaunov A.V., Karimov R.S. *Defektoskopiya*. 1987. no. 2. pp. 47–52. (in Russ.).
10. Komarov V.A., Muzhitskiy V.F., Gurevich S.Yu. *Teoriya fizicheskikh poley: v 3 t.* (Field Theory: in 3 volumes). Chelyabinsk–Izhevsk: Izdatel'stvo YuUrGU, 2000. Vol. 3. 627 p.
11. Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V., Golubev E.V., Shulginov A.A. Eksperimental'naya ustanovka dlya registratsii impul'snykh elektromagnitnykh poley, vzbuzhdaemykh volnami Lemba v magnitopol-yarizovannoy metallicheskoj plastine (Experimental setup for registration pulsed electromagnetic fields, excited by Lamb waves in magnetically polarized metal plate). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»* 2012. Issue 7. no. 34(293). pp. 146–149. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 30 сентября 2013 г.*

<sup>1</sup> Gurevich Sergei Yurevich is Dr. Sc (Engineering), Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University  
E-mail: sergur@susu.ac.ru

<sup>2</sup> Golubev Evgeny Valerievich is Cand. Sc (Physics and Mathematics), Associate Professor, General and Experimental Physics Department  
South Ural State University  
E-mail: ev\_golubev@mail.ru

<sup>3</sup> Petrov Yuriy Vladimirovich is Cand. Sc (Engineering) Associate Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University

# AB-INITIO МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ БЛИЖНЕГО ОКРУЖЕНИЯ ПРИМЕСЕЙ УГЛЕРОДА НА ЭНЕРГИЮ ИХ РАСТВОРЕНИЯ В ГЦК-ЖЕЛЕЗЕ<sup>1</sup>

Я.М. Ридный<sup>2</sup>, А.А. Мирзоев<sup>3</sup>, Д.А. Мирзаев<sup>4</sup>

В программном пакете WIEN2k проведено первопринципное моделирование равновесной структуры и свойств ГЦК-железа. Получены оптимальные параметры, позволяющие построить наиболее точную модель. Произведено вычисление энергий растворения атомов углерода, их взаимного расположения и вклада упругих эффектов в энергию системы для немагнитного (НМ) и антиферромагнитного двухслойного (АФМД) состояний ГЦК железа.

*Ключевые слова:* первопринципное моделирование, ГЦК-железо, примеси углерода, WIEN2k.

## Введение

Сплавы на основе железа, несмотря на развитие производства пластмасс, керамики, композитов, остаются основными конструкционными материалами. Исключительным достоинством чёрных металлов является, прежде всего, их дешёвизна, а также универсальность — при помощи небольших добавок можно резко изменить свойства их сплавов. Например, внедрение всего лишь 1 ат. % углерода радикально повышает прочность железа. Железо является полиморфным металлом [1, 2]: при нагревании выше 911 °С низкотемпературное  $\alpha$ -железо с ОЦК решёткой превращается в  $\gamma$ -железо с ГЦК решёткой. Углерод растворяется в обеих фазах железа, так что при температурах выше 723–911 °С существует аустенит – раствор углерода в  $\gamma$ -Fe, ниже этого интервала возникает феррит – раствор углерода в  $\alpha$ -Fe [2]. Растворимость углерода в  $\gamma$ -Fe довольно высока – до 2 масс. %. Напротив,  $\alpha$ -железо растворяет очень мало углерода. Наибольшая растворимость (0,025 масс. %) наблюдается при 723 °С. В ходе медленного охлаждения аустенита он превращается в феррит, а избыток углерода сверх равновесной концентрации выделяется в виде карбида Fe<sub>3</sub>C. Поэтому превращение аустенита при охлаждении стали, помимо перестройки решётки, требует прохождения процесса диффузии углерода в аустените и феррите.

Углерод образует твердый раствор внедрения как с  $\gamma$ -, так и с  $\alpha$ -железом, что было установлено довольно давно [1]. По результатам совместного измерения плотности  $\rho$  и параметра кристаллической решётки  $a$  для серии сплавов удается рассчитать число атомов  $n$ , приходящихся на одну элементарную ячейку:

$$n = \rho a^3 N_a / A, \quad (1)$$

где  $A$  – средняя атомная масса, а  $N_a$  – число Авогадро. Наблюдавшееся возрастание  $n$  при увеличении содержания углерода в аустените и феррите однозначно свидетельствовало об образовании углеродом растворов внедрения в решетках железа. В структуре  $\gamma$ - и  $\alpha$ -железа существуют пустоты (поры), ограниченные атомами железа, расположенными в вершинах октаэдра или тетраэдра, в связи с чем их называют октаэдрическими и тетраэдрическими порами. Вопрос о том, в порах какого типа расположены атомы углерода в решетках  $\gamma$ -Fe и  $\alpha$ -Fe, вызвавший многолетнюю дискуссию, был решен на основе данных экспериментов по ядерному гамма-резонансу и нейтронографии [2]. Было показано, что атомы углерода в обеих решетках располагаются в октаэдрических порах (ОП).

<sup>1</sup> Работа «Многомасштабное моделирование поведения водорода в сплавах железа с целью разработки энергоэффективных методов борьбы с водородными трещинами в сталях» выполнена в рамках государственной НИР в Южно-Уральском государственном университете

<sup>2</sup> Ридный Ярослав Максимович – студент, Южно-Уральский государственный университет

E-mail yaroslav@physics.susu.ac.ru

<sup>3</sup> Мирзоев Александр Аминулаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail mirzoev@physics.susu.ac.ru

<sup>4</sup> Мирзаев Джалал Аминулович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра физического металловедения и материаловедения, Южно-Уральский государственный университет

E-mail mirzaev@physmet.susu.ac.ru

В условиях быстрого охлаждения аустенита, когда диффузия углерода подавлена, происходит бездиффузионное мартенситное превращение, при котором все атомы углерода принудительно переходят в решетку мартенсита, а последняя, хотя и похожа на решетку  $\alpha$ -железа, имеет слабую тетрагональность [1–3]. Возникновение тетрагональности и бездиффузионный характер мартенситного ГЦК-ОЦК превращения был объяснен Бейном, который обратил внимание, что ГЦК-решетку можно превратить в объемно-центрированный куб при небольшом сжатии вдоль оси OZ и растяжении в направлениях осей OX и OY (Бейновская деформация). Октапоры ГЦК-решетки вместе с располагающимися в них атомами углерода переходят только в октапоры типа «Z» решетки ОЦК-железа. При этом все атомы углерода растягивают решетку в одном Z-направлении, и она из кубической превращается в тетрагональную. Хотя теория Бейна общепризнана, вопрос теоретического обоснования ее справедливости остается открытым.

В связи с этим, вопрос о распределении атомов углерода в ГЦК-решетке железа и их упорядочении остается очень важным. Очевидно, что мартенсит наследует расположение атомов углерода в аустените, которое, в свою очередь, зависит от характера взаимодействия соседних атомов углерода. Среди многочисленных характеристик аустенита наиболее чувствительной к особенностям распределения атомов углерода по октапорам оказалась активность углерода в  $\gamma$ -фазе  $\alpha_c^\gamma$  [4]. Еще Вагнер с сотрудниками [5] показали, что при отсутствии взаимодействия между атомами углерода величина активности дается выражением:

$$\alpha_c^\gamma = \frac{x_c}{1 - \beta x_c}, \quad (2)$$

где  $x_c$  – доля атомов углерода в сплаве, а коэффициент  $\beta = 2$ . Однако результаты экспериментального изучения активности углерода в  $\gamma$ -железе показали, что величина  $\alpha_c^\gamma$  с увеличением содержания углерода возрастает сильнее, чем это предписывает формула (2). Было высказано предположение, что это обстоятельство связано с наличием отталкивания между ближайшими атомами углерода, что и приводит к уменьшению числа возможных мест их расположения. Даркен и Смит [6] математически оформили данную идею, введя величину  $\varepsilon$  – энергию взаимодействия рассматриваемого атома углерода с другими атомами С, расположенными в любой из 12 октапор ближайшего окружения. Окончательный результат для активности оказался таким:

$$\alpha_c^\gamma = \frac{x_c}{1 - (14 - 12\theta)x_c}, \quad (3)$$

где  $\theta = \exp(-\varepsilon/kT)$ . Сопоставление с экспериментальными данными для активности углерода позволило определить величину  $\varepsilon = 0,065$  эВ/атом, что для 1200 К дает  $\beta = 7,6$ . Видно, что учет отталкивания действительно увеличивает активность углерода в растворе.

Темкиным и Шварцманом [7], а затем Кауфманом [8] была разработана модель блокировки, в которой выдвинуто предположение, что каждый атом С блокирует, т.е. делает недоступным для заполнения другими атомами углерода, некоторое число  $m$  октапор, ближайших к нему. В этом варианте:

$$\ln \alpha_c^\gamma = \ln \frac{x_c}{1 - (m+1)x_c}. \quad (4)$$

Параметру  $m$  придавали значение 5 в [9], и 4 в [7]. Последнее значение можно интерпретировать в модели, что атомы углерода занимают только октапоры, расположенные в центре кубов. Квазихимическая модель (модель мягкого отталкивания) была разработана В.А. Кожеуровым [10], и позднее Мак-Лелланом [9]. В ней принимается, что атом углерода отталкивает с энергией  $\varepsilon_1$  любой атом углерода, расположенный в первой координационной сфере исходного атома. Совпадение теории и экспериментальных данных достигается при  $\varepsilon_1 = 0,085$  эВ/атом [11]. Позднее Большовым Л.А. [12] была разработана более общая теория, учитывающая энергии взаимодействия пар атомов углерода не только в первой, но и последующих координационных сферах.

Поскольку все рассмотренные и сильно различающиеся модели позволяют довольно точно описать активность углерода в аустените, можно заключить, что данные об активности не позволяют провести детальную реконструкцию распределения углерода в ГЦК-железе.

Важные данные о распределении углерода получены в экспериментах по ядерному гамма-резонансу (ЯГР). ЯГР-спектр аустенита имеет особенности, заключающиеся в существовании

центрального максимума от атомов железа, не имеющих в своем окружении атомов углерода, и дублета от атомов железа, соседствующих с углеродом в ближайших междоузлиях. Обзор мессбауровских исследований распределения углерода в аустените был сделан Гаврилюком В.Г. [13] и Надутовым В.М. [14]. Было показано, что, хотя в выводах исследователей имеются противоречия, в основном большинство авторов склоняются в пользу модели жесткого отталкивания, т.е. блокировки октапор не только в первой, но и во второй координационной сфере. Этот вывод согласуется с результатами расчета энергии взаимодействия пары атомов углерода при их расположении в первом и втором соседствах –  $+0,15$  эВ и  $0,4$  эВ, полученными Гаврилюком В.Г. методом функций Грина [13]. В диссертации Надутова В.М. [14] методом Монте-Карло были получены области возможных значений энергий взаимодействия атомов углерода в первой и второй координационных сферах на основании мессбауровских экспериментов. Было показано, что энергия отталкивания атомов углерода во второй координационной сфере в разы превышает отталкивание в первой сфере и превосходит величину  $0,08$  эВ.

Таким образом, экспериментальными методами довольно легко определить концентрацию углерода, но достоверно установить позиции атомов углерода в решетке железа, а также структуру их ближнего порядка на данный момент времени представляет очень сложную и дорогостоящую задачу. Поэтому в последние годы все большее внимание уделяется методам первопринципного компьютерного моделирования, главным достоинством которых является отсутствие каких-либо входных данных, влияющих на достоверность результатов при использовании минимального количества подгоночных параметров.

Джианг и др. исследовали энергию растворения углерода в ферромагнитном (ФМ) состоянии ГЦК железа в программном пакете VASP [15]. Энергия растворения вычислялась относительно графита и составила  $-0,17$  эВ. Этот результат оказался существенно ниже экспериментального значения  $0,36$  эВ, полученного в работе [16] методом рассеяния электронов. В работе [17] в программном пакете SIESTA проводилось моделирование растворения углерода в АФМД состоянии ГЦК-железа, энергия составила  $0,55$  эВ. В ряде работ [18–20] рассматривали растворение второго атома углерода в ГЦК-решетке железа и показали, что атомы углерода предпочитают располагаться на максимально возможном расстоянии. Наиболее полный анализ растворения углерода проведен в работе Медведевой [18], но она ограничилась только немагнитным (НМ) состоянием железа.

Видно, что несмотря на значительное количество работ, посвященных изучению растворения углерода в железе, вопросы о расположении атомов углерода, энергиях их растворения, а также энергиях взаимодействия между атомами углерода остаются открытыми. В связи со всем вышесказанным, целью данной работы являлось *ab-initio* моделирование влияния расположения соседних примесей на энергию растворения атома углерода в различных магнитных фазах ГЦК-железа с помощью программного пакета WIEN2k [21].

Реальное ГЦК-железо существует в парамагнитном состоянии, при температурах порядка  $1000$  °С. Его магнитный момент равняется  $0,6$  мБ [22]. Моделирование парамагнитного состояния методами зонной теории в пакете WIEN2k довольно затруднительно, поскольку они позволяют проводить моделирование лишь коллинеарных магнитных состояний. Поэтому мы будем описывать парамагнитное состояние с помощью двух приближений – немагнитного (НМ), в котором магнитные моменты равны нулю, и в антиферромагнитном двухслойном состоянии (АФМД). Согласно работе [23] оно является наиболее стабильным из коллинеарных магнитных состояний в ГЦК-железе.

## Методы

В данной работе расчёты проводились первопринципным полнопотенциальным методом LAPW, с учетом обобщенного градиентного приближения PBE-GGA в программном пакете WIEN2k, обеспечивающим высокую точность расчета полной энергии при минимальном количестве подгоночных параметров.

В методе LAPW [24] волновые функции, зарядовая плотность и потенциал разлагаются по сферическим гармоникам в неперекрывающихся атомных сферах радиуса  $R_{\text{mt}}$  и по плоским волнам в остальной области элементарной ячейки. Предполагается, что внутри маффин-тин сферы зарядовая плотность сферически-симметрична. Волновые функции в междоузлии раскладываются по плоским волнам с максимальным волновым вектором  $K_{\text{max}}$ . Эта величина является одним

из основных параметров, влияющих на точность, так как она определяет число базисных функций (размер матриц). Для интегрирования в обратном пространстве и вычисления электронной плотности использовалась схема Монхорста–Пака с сеткой из  $N_k$  точек в зоне Бриллюэна. Чем больше используется точек, тем выше точность интегрирования, однако при этом возрастает расчетное время, поэтому оптимальное значение определяется из условия достижения требуемой точности энергии системы.

В нашей работе использована ГЦК-суперячейка, состоящая из 32 атомов. Была проведена оптимизация параметров моделирования, которая показала, что для достижения требуемой точности расчета полной энергии в 1 мРб/систему, необходимо использование следующих параметров:  $R_{\text{mt}}(\text{Fe}) = 2,0$  а.е.,  $K_{\text{max}} = 5$  а.е.<sup>-1</sup>. Эти значения совпадают с параметрами, определенными в работах [25, 26] для ОЦК железа. Для определения геометрических параметров необходимо использование  $N_k = 64$  точки, а чтобы гарантировать точность вычисления полной энергии в 1 мРб, необходимо его увеличить до  $N_k = 343$ .

Для определения энергии растворения углерода относительно фазы графита использовалась формула:

$$\Delta H = E(\text{Fe}_{32}\text{C}) - E(\text{Fe}_{32}) - E(\text{C}), \quad (5)$$

где  $E(\text{Fe}_{32}\text{C}_1)$  – энергия отрелаксированной суперячейки, состоящей из 32 атомов железа и одного атома углерода, находящегося в октапоре,  $E(\text{Fe}_{32})$  – энергия суперячейки состоящей из 32 атомов железа, а  $E(\text{C})$  – энергия одного атома углерода в решётке графита. Для нахождения энергии растворения второго атома углерода формула (1) преобразуется:

$$\Delta H_2 = E(\text{Fe}_{32}\text{C}_2) - E(\text{Fe}_{32}\text{C}) - E(\text{C}). \quad (6)$$

В формуле (6)  $E(\text{Fe}_{32}\text{C}_2)$  – энергия релаксированной суперячейки, состоящей из 32 атомов железа и двух атомов углерода находящихся в октапорах.

Для нахождения энергии взаимодействия между атомами углерода из энергии системы с двумя атомами углерода вычитается энергия двух суперячеек, содержащих одиночные атомы углерода, и суммируется с энергией беспримесной суперячейки ГЦК железа:

$$\Delta V = E(\text{Fe}_{32}\text{C}_2) - 2E(\text{Fe}_{32}\text{C}) + E(\text{Fe}_{32}). \quad (7)$$

Для нахождения энергии углерода в графите мы использовали значения параметров решётки, полученные из рентгеноструктурных данных ( $a = 2,462$  Å,  $c = 6,656$  Å [15]). В расчете использовались оптимизированные параметры  $K_{\text{max}} = 5$  а.е.<sup>-1</sup>,  $R_{\text{mt}}(\text{C}) = 1,2$  а.е. Количество  $k$ -точек было увеличено по сравнению с работой [15] для обеспечения точности в 1 мРб/систему от  $N_k = 256$  до  $N_k = 300$ .

### Растворение углерода и деформация решётки

Для получения равновесных параметров суперячейки ГЦК-железа с растворенными атомами углерода была проведена атомно-силовая релаксация системы и объемная минимизация энергии. Была получена зависимость параметра решётки от концентрации углерода, приведенная на рис. 1.

При ее построении мы использовали результаты моделирования с растворенными одним и двумя атомами углерода. Было получено, что растворение одиночного атома С в НМ ГЦК-железе увеличивает параметр решётки с 3,45 Å до 3,475 Å и расталкивает ближайшие атомы железа на 7,5 %. При растворении углерода в АФМД состоянии происходит увеличение параметра решётки с 3,54 Å до 3,555 Å, и образование в первом окружении слегка несимметричного октаэдра, у которого апикальный атом с противоположным направлением спина относительно других атомов железа

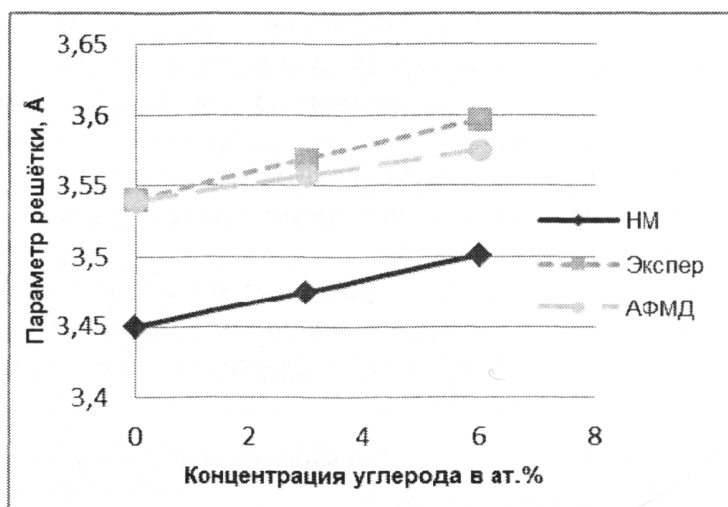


Рис. 1. График зависимости параметра решётки от концентрации углерода. Штриховая линия – АФМД состояние, короткий пунктир – экспериментальные значения, сплошная линия – НМ состояние

смещается лишь на 4 %, другой апикальный атом – на 6,5 %, тогда как планарные атомы – на 7,1 %. Полученные результаты находятся в согласии с аналогичными результатами, полученными Н. Медведевой в работах [18, 23], где при растворении углерода в НМ состоянии было получено, что атом С увеличивает параметр решётки с 3,456 Å до 3,472 Å и расталкивает ближайшие атомы железа на 7,7 %, а при растворении углерода в АФМД состоянии с 3,53 Å до 3,55 Å.

Реальное ГЦК-железо существует при температурах выше 911 °С. При такой температуре атомы углерода имеют практически одинаковую вероятность нахождения во всех конфигурационных сферах. Поэтому для вычисления параметра решётки было взято среднее значение параметра решётки, которое составило для НМ  $\langle a \rangle = 3,5 \text{ Å}$  и для АФМД  $\langle a \rangle = 3,575 \text{ Å}$ . Экспериментальная зависимость параметра решётки от концентрации и температуры была получена в работе [27] нейтронной дифракцией.

Проведя сравнение наших результатов с экстраполяцией экспериментальных результатов (рис. 1), мы пришли к выводу, что АФМД-состояние намного лучше описывает железо, чем НМ, и для него наблюдается довольно хорошее согласие углового коэффициента зависимости параметра решётки от концентрации углерода.

### Энергии растворения атомов углерода в ГЦК железе

При использовании формулы (1), нами была вычислена энергия растворения атома углерода. В табл. 1 приведено сравнение нашей энергии с данными других работ, среди которых и экспериментальные данные для парамагнитного железа [28, 29].

Таблица 1

Значения энергии растворения одного атома углерода в октапоре для немагнитного состояния (Результаты представлены для концентрации 3 ат. % углерода)

| Статья        | Состояние             | Энергия, мэВ |
|---------------|-----------------------|--------------|
| [28]          | эксп. (парамагнитное) | 360          |
| [29]          | эксп. (парамагнитное) | 420          |
| [28]          | НМ                    | 145          |
| Данная работа | НМ                    | 180          |
| [17]          | АФМД                  | 550          |
| Данная работа | АФМД                  | 340          |

Видно, что энергия, полученная при растворении углерода в решётке ГЦК-железа, находящегося в АФМД-состоянии, практически совпадает с экспериментальным значением.

Наиболее полный анализ растворения второго атома углерода проведён в работе [18], однако он был проведен только для НМ-состояния матрицы. В суперячейке из 32 атомов железа существует 4 координационных сферы (рис. 2). Конфигурация с двумя ближайшими атомами углерода, образующими 180° С-Fe-С позицию, является наименее энергетически выгодной. Наши данные для НМ-состояния хорошо согласуются с данными Медведевой [18].

В табл. 2 приведено сравнение значений энергии растворения 2 атомов углерода, полученных в нашем расчете как для НМ, так и для АФМД-фазы ГЦК-железа. Для их получения использовалась формула (6).

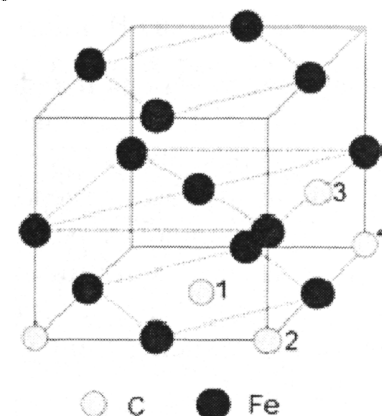


Рис. 2. Возможные расположения атомов углерода в ячейке Fe<sub>32</sub>

Таблица 2

Значения энергии растворения второго атома углерода

| Номер конфигурации | НМ, мэВ | АФМД, мэВ |
|--------------------|---------|-----------|
| 1                  | 260     | 510       |
| 2                  | 1400    | 840       |
| 3                  | 150     | 470       |
| 4                  | 310     | 250       |

Проведя анализ полученных результатов, был сделан вывод, что энергия растворения второго атома углерода близка к энергии растворения первого для всех конфигураций, кроме второй.



Для оценки упругих взаимодействий в рассматриваемой системе мы нашли разность полной энергии релаксированной системы и энергии системы, в которой не производилось релаксации. Назовем эту величину энергией упругой релаксации. Данные представлены в табл. 3.

Для атомов углерода, находящихся во второй координационной сфере, релаксация оказалась наиболее слабой, потому что атомы углерода находятся на одной линии и разделены одним атомом Fe, который по этой причине не двигается. Скорее всего, это обстоятельство и объясняет энергетическую невыгодность данной конфигурации.

Таблица 3

| Номер конфигурации | НМ, мэВ | АФМД, мэВ |
|--------------------|---------|-----------|
| 1                  | -4220   | -2600     |
| 2                  | -3180   | -2140     |
| 3                  | -4000   | -2460     |
| 4                  | -3860   | -2600     |

Для вычисления энергии взаимодействия между атомами была использована формула (7). В табл. 4 мы привели значения энергий растворения второго атома углерода для различных конфигураций в суперячейке состоящей из 32 атомов железа.

Таблица 4

| Номер конфигурации | Гаврилюк В.Г. [13], мэВ | Данная работа, НМ, мэВ | Данная работа, АФМД, мэВ |
|--------------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| 1                  | 150                     | 80                     | 170                      |
| 2                  | 400                     | 1220                   | 500                      |
| 3                  | —                       | -30                    | 130                      |
| 4                  | —                       | 130                    | -90                      |

Видно, что учет магнитных эффектов (АФМД-состояние матрицы) несколько уменьшает отталкивание атомов углерода во второй координационной сфере, но увеличивает его в первой и третьей сферах. Атомы углерода в ГЦК-железе отталкиваются и предпочитают занимать наиболее удаленные позиции. Полученные нами значения энергии взаимодействия между атомами углерода в АФМД-состоянии матрицы хорошо согласуются с работой Гаврилюка В.Г. [13], в которой он получил указанные энергии, используя метод функции Грина. Это говорит о том, что АФМД-приближение для описания магнитного состояния может быть использовано для расчета как структуры реального ГЦК-железа, так и энергии взаимодействия атомов углерода в нем.

### Заключение

Таким образом, в результате проведенных исследований:

1. Были найдены: энергия растворения приходящаяся на один атом углерода (при концентрации 3 ат.%) и энергии растворения второго атома углерода (при концентрации 6 ат.%, в зависимости от их взаимного расположения) в суперячейке из 32 атомов ГЦК решетки железа.
2. Растворение одиночного атома С в НМ ГЦК-железе увеличивает параметр решетки с 3,45 Å до 3,475 Å и расталкивает ближайшие атомы железа на 7,5 %. При растворении углерода в АФМД-состоянии происходит увеличение параметра решетки с 3,54 Å до 3,555 Å и образование в первом окружении слегка несимметричного октаэдра.
3. Показано, что между соседними атомами углерода в ГЦК-железе наблюдается отталкивание при их расположении в первой, второй и третьей координационных сферах. При этом наиболее сильно отталкивание между вторыми ближайшими соседями.
4. Показано, что для моделирования свойств ГЦК-железа с примесями углерода лучше использовать АФМД-состояние матрицы, чем НМ-состояние.

### Литература

1. Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия / Я.С. Уманский, Ю.А. Скаков, А.Н. Иванов, Л.Н. Расторгуев. – М.: Металлургия. – 1982. – 632 с.
2. Курдюмов, Г.В. Превращения в железе и стали / Г.В. Курдюмов, Л.М. Утевский, Р.И. Энтин. – М.: Наука. – 1977. – С. 236.

3. Хачатурян, А.Г. Углерод в мартенсите стали. Несовершенства кристаллического строения и мартенситные превращения / А.Г. Хачатурян. – М.: Наука, 1971. – С. 34–45.
4. Могутнов, Б.М. Термодинамика железо-углеродистых сплавов / Б.М. Могутнов, Н.А. Томилин, Л.А. Шварцман. – М.: Металлургия, 1972. – С. 328.
5. Dunwald, H. Thermodynamische Untersuchungen zum System Eisen–Kohlenstoff–Sauerstoff / H. Dunwald, C. Wagner // *Z. Anorg. Allgem. Chem.* – 1931. – Vol. 199. – P. 321–346.
6. Darken, L.S. Appendix to the paper by Smith R.P. Equilibrium of iron–carbon alloys / L.S. Darken, R.P. Smith // *J. Amer. Chem. Soc.* – 1946. – № 7. – P. 1163–1175.
7. Темкин, М.И. Активность углерода в аустените / М.И. Темкин, Л.А. Шварцман // *Журнал физической химии.* – 1949. – № 6. – С. 755–760.
8. Kaufman, L. Thermodynamics of bainite reaction / L. Kaufman, S.V. Radcliffe, M. Cohen / *Decomposition of Austenite by Diffusional Processes: сб. науч. тр. – AIME, New York: Interscience Publishers, 1962. – P. 313–352.*
9. McLellan, R.B. A quasi-chemical treatment of interstitial solid solutions: its application to carbon austenite / R.B. McLellan, W.W. Dunn // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1969. – V. 30, № 11. – P. 2631–2637.
10. Кожуров, В.А. К термодинамике растворов внедрения / В.А. Кожуров // *Известия ВУЗов. Черная металлургия.* – 1965. – № 2. – С. 10–16.
11. Dunn, W.W. The Application of Quasi-chemical Solid Solution Model to Carbon Austenite / W.W. Dunn, R.B. McLellan // *Metall Trans.* – 1970. – Vol. 1, № 5. – P. 1263–1265.
12. Большов, Л.А. Изучение ближнего порядка в аустените системы Fe-C методами статистической теории и Монте-Карло / Л.А. Большов, В.Н. Суслов. // *Физика металлов и металловедение.* – 2004. – Т. 98, № 6. – P. 3–7.
13. Гаврилюк, В.Г. Распределение углерода в стали / В.Г. Гаврилюк. – Киев: Наукова Думка, 1987. – С. 208.
14. Надутов, В.М. Межатомное взаимодействие и распределение атомов внедрения в железо-азотистых и железо-углеродистых сплавах: автореферат дис. д-ра физ.-мат. наук / В.М. Надутов. – Киев: ИМФ НАН Украины им. Г.В.Курдюмова, 1997. – 55 с.
15. Jiang, D.E. Carbon dissolution and diffusion in ferrite and austenite from first principles / D.E. Jiang, E.A. Carter // *Physical Review B.* – 2003. – Vol. 67. – P. 214103.
16. Slane, J.A. Experimental and Theoretical Evidence for Carbon-Vacancy Binding in Austenite / J.A. Slane, C. Wolverton, R. Gibala // *Metallurgical and Materials Transactions A.* – 2004. – Vol. 35, № 8. – P. 2239–2245.
17. Magnetism and Local Distortions near Carbon Impurity in  $\gamma$ -Iron / D.W. Boukhalov, Y.N. Gornostyrev, M.I. Katsnelson, A.I. Lichtenstein. // *Physical Review Letters.* – 2007. – Vol. 99. – P. 247205.
18. Ивановский Л.И. Распределение примесей Mn, Al, Si, C в аустените и их влияние на энергии дефектов упаковки / Л.И. Ивановский, Н.И. Медведева. // *Фазовые переходы, упорядоченные состояния и новые материалы.* – 2012. – № 10. – P. 24–28.
19. Timoshevskii, A.N. *Ab-initio* modeling of the short range order in Fe-N and Fe-C austenitic alloys / A.N. Timoshevskii, S.O. Yablonovskii // *Functional Materials.* – 2011. – Vol. 18, № 4. – P. 517–522.
20. Gavriljuk, V.G. Change in the electron structure caused by C, N and H atoms in iron and its effect on their interaction with dislocations / V.G. Gavriljuk, V.N. Shivanyuk, B.D. Shanina // *Acta Materialia.* – 2005. – Vol. 53. – P. 5017–5024.
21. Schwarz, K. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material science / K. Schwarz, P. Blaha, G.K.H. Madsen // *Computer Physics Communications.* – 2002. – Vol. 147. – P. 71–76.
22. The Role of the Nature of Magnetic Coupling on the Martensitic Transformation in Fe-Ni / M. Acet, E.F. Wassermann, K. Andersen *et al.* // *Journal de Physique IV France.* – 1997. – Vol. 7, № C5. – P. 401–404.
23. Medvedeva, N.I. Magnetism in bcc and fcc Fe with carbon and manganese / N.I. Medvedeva, D.V. Aken, J.E. Medvedeva // *Journal of Physics: Condensed Matter.* – 2010. – Vol. 22. – P. 316002.
24. Cottenier, S. Density Functional Theory and the family of (L)APW-methods: a step-by-step introduction/ S. Cottenier, 2004. [[http://www.wien2k.at/reg\\_user/textbooks/DFT\\_and\\_LAPW-2\\_cottenier.pdf](http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/DFT_and_LAPW-2_cottenier.pdf)]

25. Урсаева, А.В. Выбор оптимальных параметров для построения максимально точной модели ОЦК-железа / А.В. Урсаева, Г.Е. Рузанова, А.А. Мирзоев. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 2. – № 9(185). – С. 97–101.
26. Ракитин, М.С. Изменение электронной структуры  $\alpha$ -железа, содержащего внедренные атомы водорода / М.С. Ракитин, А.А. Мирзоев, Д.А. Мирзаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». – 2010. – Вып. 14. – № 13(189). – Р. 67–71.
27. The lattice parameters of austenite and ferrite in Fe-C as functions of carbon concentration and temperature / M. Onink, C.M. Brakman, F.D. Tichelaar *et al.* // Scripta Metallurgica Et Materialia. – 1993. – Vol. 29, № 8. – P. 1011–1016.
28. Slane, J.A. Experimental and Theoretical Evidence for Carbon-Vacancy Binding in Austenite / J.A. Slane, C. Wolverton, R. Gibala // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2004. – Vol. 35, № 8. – P. 2239–2245.
29. Lobo, J.A. Thermodynamics of carbon in austenite and Fe-Mo austenite / J.A. Lobo, G.H. Geiger // Metallurgical Transactions A. – 1976. – Vol. 7, № 8. – P. 1359–1364.

## AB-INITIO SIMULATION OF INFLUENCE OF SHORT-RANGE ORDERING CARBON IMPURITIES ON THE ENERGY OF THEIR DISSOLUTION IN THE FCC-IRON

Ya.M. Ridnyi<sup>1</sup>, A.A. Mirzoev<sup>2</sup>, D.A. Mirzaev<sup>3</sup>

The first principle simulation of equilibrium structure and FCC-iron characteristics was carried out by the software package WIEN2k. The optimal parameters which allow building the most accurate model were generated. Energies of dissolution of carbon atoms, their relative positions and the contribution of the elastic effects to the energy of system were calculated for non-magnetic (NM) and double-layer antiferromagnetic states (AFMD) of FCC-iron.

*Keywords:* first principle simulation, FCC-iron, carbon impurity, WIEN2k.

### References

1. Umanskiy Ya.S., Skakov Yu.A., Ivanov A.N., Rastorguev L.N. *Kristallografiya, rentgenografiya i elektronnaya mikroskopiya* (Crystallography, radiographic imaging and electronic microscopy). Moscow: Metallurgiya. 1982. 632 p. (in Russ.).
2. Kurdyumov G.V., Utevskiy L.M., Entin R.I. *Prevrashcheniya v zheleze i stali* (Transformations in iron and steel). Moscow: Nauka. 1977. 236 p. (in Russ.).
3. Khachaturyan A.G. *Uglerod v martensite stali. Nesovershenstva kristallicheskogo stroeniya i martensitnye prevrashcheniya* (Carbon in martensite of steel. Imperfections of crystalline construction and martensitic transformations). Moscow: Nauka. 1971. pp. 34–45. (in Russ.).
4. Mogutnov B.M., Tomilin N.A., Shvartsman L.A. *Termodinamika zhelezo-uglerodistykh splavov* (Thermodynamics of iron-carbon alloys). Moscow: Metallurgiya. 1972. 328 p. (in Russ.).
5. Dünwald H., Wagner C. Thermodynamische Untersuchungen zum System Eisen–Kohlenstoff–Sauerstoff. *Z. Anorg. Allgem. Chem.* 1931. Vol. 199. pp. 321–346. DOI: 10.1002/zaac.19311990132
6. Darken L.S., Smith R.P. Appendix to the paper by Smith R.P. Equilibrium of iron – carbon alloys // *J. Amer. Chem. Soc.* 1946. no. 7. pp. 1163–1175.
7. Temkin M.I., Shvartsman L.A. *Zhurnal fizicheskoy khimii.* 1949. no. 6. pp. 755–760. (in Russ.).
8. Kaufman L.R., Radcliffe S.V., Cohen M. *Thermodynamics of the Bainite Reaction. Decomposition of Austenite by Diffusional Processes.* AIME, New York: Interscience Publishers, 1962. pp. 313–352.

<sup>1</sup> Ridnyi Yaroslav Maksimovich is Student, South Ural State University

E-mail yaroslav@physics.susu.ac.ru

<sup>2</sup> Mirzoev Aleksander Aminulaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University

E-mail mirzoev@physics.susu.ac.ru

<sup>3</sup> Mirzaev Dzhalal Aminulovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Physical Metallurgy and Material Science, Southern Ural State University

E-mail mirzaev@physmet.susu.ac.ru

9. McLellan R.B., Dunn W.W. A quassi-chemical treatment of interstitial solid solutions: its application to carbon austenite. *J.Phys.Chem.Solids*. 1969. Vol. 30. no. 11. pp. 2631–2637.
10. Kozheurov V.A. *Izvestiya VUZov. Chernaya metallurgiya*. 1965. no. 2. pp. 10–16. (in Russ.).
11. Dunn W.W., McLellan R.B. The Application of Quassi-chemical Solid Solution Model to Carbon Austenite. *Metall Trans.* 1970. Vol. 1, no. 5. pp. 1263–1265.
12. Bol'shov L.A., Suslov V.N. *Fizika metallov i metallovedenie*. 2004. Vol. 98, no. 6. pp. 3–7. (in Russ.).
13. Gavriilyuk V.G. *Raspredelenie ugleroda v stali* (Carbon distribution in steel). Kiev: Naukova Dumka. 1987. p. 208.
14. Nadutov V.M. *Mezhatomnoe vzaimodeystvie i raspredelenie atomov vnedreniya v zhelezo-azotistykh i zhelezo-uglerodistykh splavakh. Avtoreferat na soiskanie uchyenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk* (Interatomic interaction and distribution of interstitial atoms in iron-nitrogenous and iron-carbon alloys. Dr. phys. and math. sci. synopsis of diss.). Kiev: IMF NAN Ukrainy im. G.V. Kurdyumova, 1997. 55 p.
15. Jiang D.E., Carter E.A. Carbon dissolution and diffusion in ferrite and austenite from first principles. *Physical Review B*. 2003. Vol. 67. pp. 214103.
16. Slane J.A., Wolverton C., Gibala R. Experimental and Theoretical Evidence for Carbon-Vacancy Binding in Austenite. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2004. Vol. 35, no. 8. pp. 2239–2245.
17. Boukhalov D.W., Gornostyrev Y.N., Katsnelson M.I., Lichtenstein A.I. Magnetism and Local Distortions near Carbon Impurity in  $\gamma$ -Iron. *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99. p. 247205.
18. Ivanovskiy L.I., Medvedeva N.I. *Fazovye perekhody, uporyadochennyye sostoyaniya i novyye materialy*. 2012. no. 10. pp. 24–28. (in Russ.).
19. Timoshevskii A.N., Yablonovskii S.O. *Functional Materials*. 2011. Vol. 18, no. 4. pp. 517–522.
20. Gavriljuk V.G., Shivanyuk V.N., Shanina B.D. *Acta Materialia*. 2005. Vol. 53. pp. 5017–5024.
21. Schwarz K., Blaha P., Madsen G.K.H. *Computer Physics Communications*. 2002. Vol. 147. pp. 71–76.
22. Acet M., Wassermann E.F., Andersen K., Murani A., Scharpff O. *Journal de Physique IV France*. 1997. Vol. 7, no. C5. p. 401–404.
23. Medvedeva N.I., Aken D.V., Medvedeva J.E. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2010. Vol. 22. pp. 316002.
24. Cottenier S. *Density Functional Theory and the family of (L)APW-methods: a step-by-step introduction*. 2004. Available at: [http://www.wien2k.at/reg\\_user/textbooks/DFT\\_and\\_LAPW-2\\_cottenier.pdf](http://www.wien2k.at/reg_user/textbooks/DFT_and_LAPW-2_cottenier.pdf)
25. Ursaeva A.V., Ruzanova G.E., Mirzoev A.A. *Vybor optimal'nykh parametrov dlya postroeniya maksimal'no tochnoy modeli OTsK-zheleza* (Selection of optimal parameters for formation the most accurate model of BCC iron). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2010. Issue 2. no. 9(185). pp. 97–101. (in Russ.).
26. Rakitin M.C., Mirzoev A.A., Mirzaev D.A. *Izmenenie elektronnoy struktury  $\alpha$ -zheleza, sodержashchego vnedrennye atomy vodoroda* (Change of electronic structure in iron containing interstitial atoms of hydrogen) // *Vestnik YuUrGU. Seriya: Metallurgiya*. 2010. Issue 14. no. 13(189). pp. 67–71. (in Russ.).
27. Onink M., Brakman C.M., Tichelaar F.D., Mittemeijer E.J., Van der Zwaag S., Root J.H., Konyer N.B. *Scripta Metallurgica Et Materialia*. 1993. Vol. 29, no. 8. pp. 1011–1016.
28. Slane J.A., Wolverton C., Gibala R. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2004. Vol. 35, no. 8. pp. 2239–2245.
29. Lobo J.A., Geiger G.H. *Metallurgical Transactions A*. 1976. Vol. 7, no. 8. pp. 1359–1364.

Поступила в редакцию 11 июня 2013 г.

# МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЯ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛЕЖАЩЕЙ КАПЛИ В ПРОЦЕССЕ ЕЕ ИСПАРЕНИЯ<sup>1</sup>

В.Л. Ушаков<sup>2</sup>, Г.П. Пызин<sup>3</sup>, В.П. Бескачко<sup>4</sup>

Интерференционные методы позволяют получить информацию о величине нормальных перемещений фазовой поверхности с высоким разрешением и в реальном времени. Эта возможность реализована для наблюдения изменения во времени высоты испаряющейся капли с точностью до доли длины волны оптического излучения. Рассматривается возможность изучения на поверхности капли процессов, сопутствующих ее испарению и имеющих малый временной и пространственный масштаб.

*Ключевые слова* межфазные явления, испарение, форма капли, метод лежащей капли, интерферометрические методы

**Введение.** Ранее нами была предложена методика [1, 2] наблюдения параметров формы капли в процессе ее испарения, обладающая высокой разрешающей способностью и безинерционностью. Она позволяет регистрировать изменение высоты капли с точностью до десятых долей длины волны света оптического диапазона ( $\lambda \sim 0,7$  мкм) и определять радиус кривизны капли в ее вершине с точностью до долей процента. Разрешающая способность по времени этой методики ограничивается только быстродействием электроники и в наших экспериментах достигает величины порядка  $10^{-4}$  с. Все это даст возможность наблюдать гораздо более тонкие процессы, сопровождающие испарение капли, чем это возможно в традиционных экспериментах. К их числу относятся, например, следующие.

Во-первых, возникающее при испарении жидкости охлаждение ее поверхностных слоев приводит к развитию массообменных процессов как внутри лежащей капли (за счет естественной конвекции), так и на ее поверхности (за счет градиента поверхностного натяжения). Следствием является нарушение состояния механического равновесия и изменение формы капли. Капля, выведенная из состояния механического равновесия небольшим возмущением ее формы, стремится вернуться в него в процессе затухающих колебаний, параметры которых зависят от природы жидкости (вязкости, плотности, поверхностного натяжения) и условий опыта (свободная, висющая или лежащая капли) [3]. Во-вторых, несмотря на обычные в интерферометрии меры предосторожности, экспериментальная установка испытывает вибрации, вызванные многочисленными источниками механического шума, расположенными как внутри, так и за пределами лаборатории. Поэтому в процессе измерений нельзя исключить возможности возбуждения колебаний капли теми из этих источников, что имеют спектральные составляющие вблизи ее собственных частот. Тогда можно предположить, что капля, испаряющаяся или нет, всегда находится в состоянии колебаний, индуцированных этим шумом.

В настоящей работе делается попытка наблюдения процессов формоизменения капли, имеющих малую амплитуду и малый (по сравнению со временем испарения) временной масштаб, методами лазерной интерферометрии.

**Эксперимент.** Лежащая капля жидкости является оптическим объектом с фазовой отражающей поверхностью. Для нее необходимо определить изменение  $\Delta h(t) = h(0) - h(t)$  высоты ее вершины как функции времени  $t$  в процессе испарения с точностью, достаточной для наблюдения малых колебаний, обусловленных причинами, рассмотренными выше или какими-либо другими. Ожидается, что частоты этих колебаний находятся в окрестности низших собственных частот колебаний лежащей капли, имеющих в наших экспериментах порядок  $10^2$  Гц.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ гранты 10-03-00719-а, 13-03-00918

<sup>2</sup> Ушаков Владимир Леонидович – ассистент кафедры общей и теоретической физики Южно-Уральский государственный университет

<sup>3</sup> Пызин Георгий Петрович – кандидат технических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики Южно-Уральский государственный университет

E-mail: hologrph@mail.ru

<sup>4</sup> Бескачко Валерий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Южно-Уральский государственный университет

Предлагаемый способ измерений состоит в следующем. Неразведенный вертикальный луч лазера после отражения от вершины осесимметричной лежащей (или висящей) капли имеет сферические волновые поверхности, поскольку в малой окрестности вершины поверхность капли можно считать сферической. Если это волновое поле наложить на когерентное ему опорное плоское волновое поле, возникнет интерференционная картина, изменение которой во времени обусловлено изменением  $\Delta l$  оптической разности хода  $l$  между опорными и отраженными от капли лучами. Для центра интерференционной картины  $\Delta l = 2\Delta h$  и поэтому связь наблюдаемой здесь интенсивности света с величиной  $\Delta h$  имеет вид

$$I(t) = I(\Delta h(t)) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta h(t) + \delta_0\right),$$

где  $I_1, I_2$  – интенсивности света в накладываются лучах света,  $\delta_0$  – разность фаз этих лучей в начальный момент времени, когда  $\Delta h = 0$ . Контрастная интерференционная картина получается, когда  $I_1 = I_2 = I_0$ . Тогда можно написать

$$I(t) = I(\Delta h(t)) = 2I_0 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta h(t) + \delta_0\right) \right\} = 4I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta h(t) + \delta_0/2\right). \quad (1)$$

За счет выбора начала отсчета времени можно положить  $\delta_0 = 0$ . Удобно считать, что при  $t = 0$   $\Delta h(0) = 0$ . Тогда  $I(0) = 4I_0$ , то есть время отсчитывается с момента, когда интенсивность света в центре картины достигнет своего максимума. Разрешая последнее уравнение относительно  $\Delta h(t)$ , при выбранных начальных условиях можно написать

$$\Delta h(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \arccos\left\{\frac{I(t)}{4I_0}\right\}. \quad (2)$$

По этой формуле удобно оценивать  $\Delta h$  на масштабах длины порядка  $\lambda$  или долей  $\lambda$ . На больших масштабах справедлива более простая оценка

$$\Delta h(t_n) = n \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

где  $t_n$  – время появления в центре интерференционной картины  $n$ -го максимума интенсивности света.

Схема натурального эксперимента, позволяющего реализовать обсуждаемый метод, подробно рассмотрена в работе [1] и воспроизведена на рис. 1. Здесь  $H$  – расстояние от подложки, на которой лежит капля, до фокальной плоскости объектива,  $B$  – расстояние от фокальной плоскости объектива до места расположения фотоэлемента, который регистрирует интенсивность света в центре интерферограммы,  $h$  – высота капли,  $f$  – длина фокусного расстояния объектива. Отметим, что линза, отражением от поверхности которой создается опорное поле, позиционирована по отношению к объективу таким образом, что формирует в плоскости регистрации интерферограммы плоский волновой фронт.

Отличия настоящего эксперимента от описанного в [1] состоят в следующем. Для увеличения скорости регистрации опытных данных в центре интерференционной картины вместо ПЗС-матрицы установлен фотодиод ФД256 с полосой светочувствительности 500–1200 нм. Входная диафрагма, установленная перед фотодиодом, имеет диаметр 1,2 мм, что при выбранных нами геометрических параметрах оптической схемы позволяет фиксировать данные с участка поверхности капли диаметром около 10 мкм. Фотодиод подключен на вход операционного усилителя по схеме, снижающей синфазные помехи. В дальнейшем полученный сигнал усиливался вторым операционным усилителем с регулируемым коэффициентом усиления. На выход этого усилителя подключен АЦП Е14-140 фирмы L-Card, позволяющий регистрировать на компьютере данные об интенсивности в центре интерференционной картины с частотой

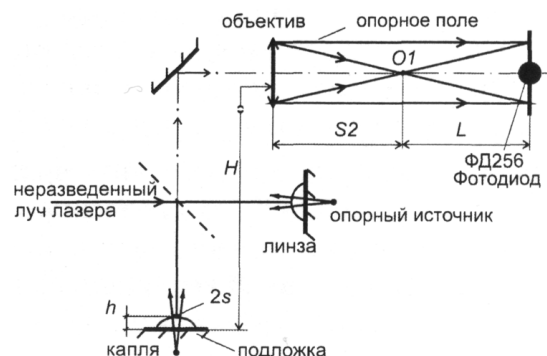


Рис. 1. Оптическая схема эксперимента по наблюдению картин интерференции от вершины испаряющейся капли

той 100 кГц в динамическом диапазоне 14 бит. В экспериментах использовался He-Ne лазер ЛГН-215 с длиной волны  $\lambda = 632,8$  нм. Представленная схема позволяет уверенно регистрировать колебания поверхности капли с амплитудой, начиная от 20–40 нм, и частотами до 5 кГц.

В экспериментах изучались капли дистиллированной воды с массами 0,05–0,10 г, помещенные на подложку из стекла. Испарение происходило в объеме лаборатории, где поддерживалась температура около 20 °С и относительная влажность 50 %. В ходе эксперимента регистрировалась интенсивность  $I(t)$  в центре интерферограммы с частотой 100 кГц на временных интервалах до 10 мин. На рис. 2 приведен пример зависимости  $I(t)$  в эксперименте с испаряющейся каплей воды. На выносах в увеличенном виде показаны фрагменты этой зависимости, дающие представление о статистическом характере данных в области минимумов и максимумов интенсивности. Частота следования полос интерференции,  $f_{исп}$ , зависит от скорости испарения капли и в условиях описываемых опытов составляла величину  $f_{исп} \sim 1$  Гц. На рис. 3 приведен пример зависимости  $\Delta h(t)$ , полученной с помощью (3). Сравнение этой зависимости с линейной аппроксимацией ее начального участка показывает, что поведение  $\Delta h(t)$  может заметно изменяться на временных интервалах порядка десятков секунд.

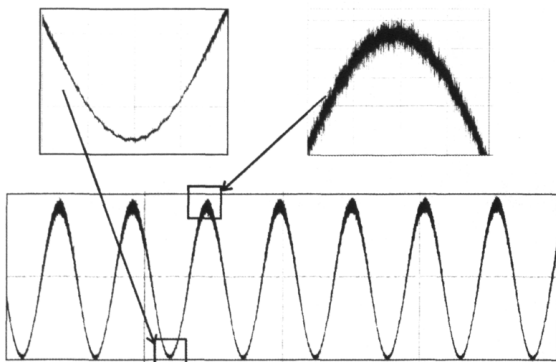


Рис. 2. Интенсивность света в центре интерференционной картины как функция времени, полученная в эксперименте с испаряющейся каплей воды

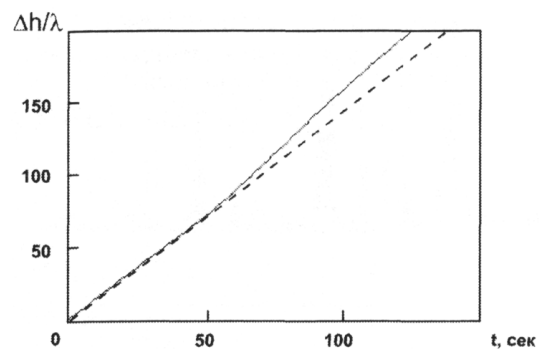


Рис. 3. Зависимость уменьшения  $\Delta h/\lambda$  высоты вершины испаряющейся капли воды от времени. Пунктир – линейная аппроксимация начальной части зависимости

Наблюдаемую зависимость  $\Delta h(t)$  можно связать с зависимостью от времени объема  $V(t)$  (или массы  $M(t)$ ) капли и со скоростью испарения  $v(t) = dM/dt$ . Используя методы, изложенные в работе [2], можно предварительно определить величину поверхностного натяжения  $\sigma$  жидкости подгонкой решения уравнения Лапласа под наблюдаемые геометрические параметры капли: радиус кривизны в вершине капли  $R(0)$ , ее высоту  $h(0)$  и радиус пятна смачивания  $r(0)$ . Попутно становится известным профиль капли и ее объем  $V(0)$  в начальный момент времени. Заметим, что в экспериментах [2] обеспечивается условие  $r(t) = r(0) = const$ . Если теперь считать, что величина  $\sigma$  не изменяется по мере испарения капли, то для определения формы и объема капли в следующие моменты времени нет необходимости находить радиус кривизны  $R(t)$  капли в вершине, и эксперименты можно продолжить по схеме, описанной выше, определяя только высоту капли  $h(t) = h(0) - \Delta h(t)$ . Тогда  $V(t)$  можно найти, вновь решая уравнение Лапласа для каждого набора  $\{\sigma, r(0), h(t)\}$ . На рис. 4 приведен пример зависимости  $V(t)$ , найденной таким образом. Видно практически линейное уменьшение объема капли в течении примерно часового интервала наблюдения.

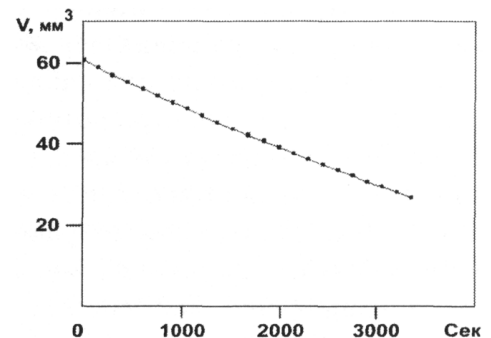


Рис. 4. График зависимости изменения объема испаряющейся капли от времени

Присутствие в эксперименте колебательных процессов проще всего выявить с помощью анализа Фурье наблюдаемой функции интенсивности  $I(t)$ . На рис. 5, а приведен пример Фурье-спектра, полученного для испаряющейся капли объемом 60 мм<sup>3</sup>. Богатая структура спектра означает присутствие многих источников колебаний: механических колебаний элементов оптической схемы (подложек, зеркал, объектива, детектора и т.п.), интенсивности излучения лазера, фоновой подсветки и

пр. Чтобы определить, какие элементы спектра связаны с колебаниями поверхности капли, а какие имеют аппаратное происхождение, были выполнены эксперименты с «пустой» установкой, в которых капля отсутствовала. Результаты представлены на рис. 5, б. Сравнение рис. 5, а и б свидетельствует о том, что богатство спектральной структуры в опытах с каплей связано, в основном, с аппаратными причинами. Последующие эксперименты по измерению интенсивности падающего лазерного пучка от двух лазеров разных типов (гелий-неонового и полупроводникового) в интересующей нас частотной области выявили, в основном, колебания с частотой 50 Гц и кратными ей, обусловленные, очевидно, колебаниями напряжения в питающей лазеры сети (см. рис. 5, в). Это означает, что главными источниками аппаратного шума являются колебания использованных в опыте элементов оптической схемы, представленной на рис. 1. В связи с этим было решено упростить оптическую схему, оставив в ней минимум элементов.

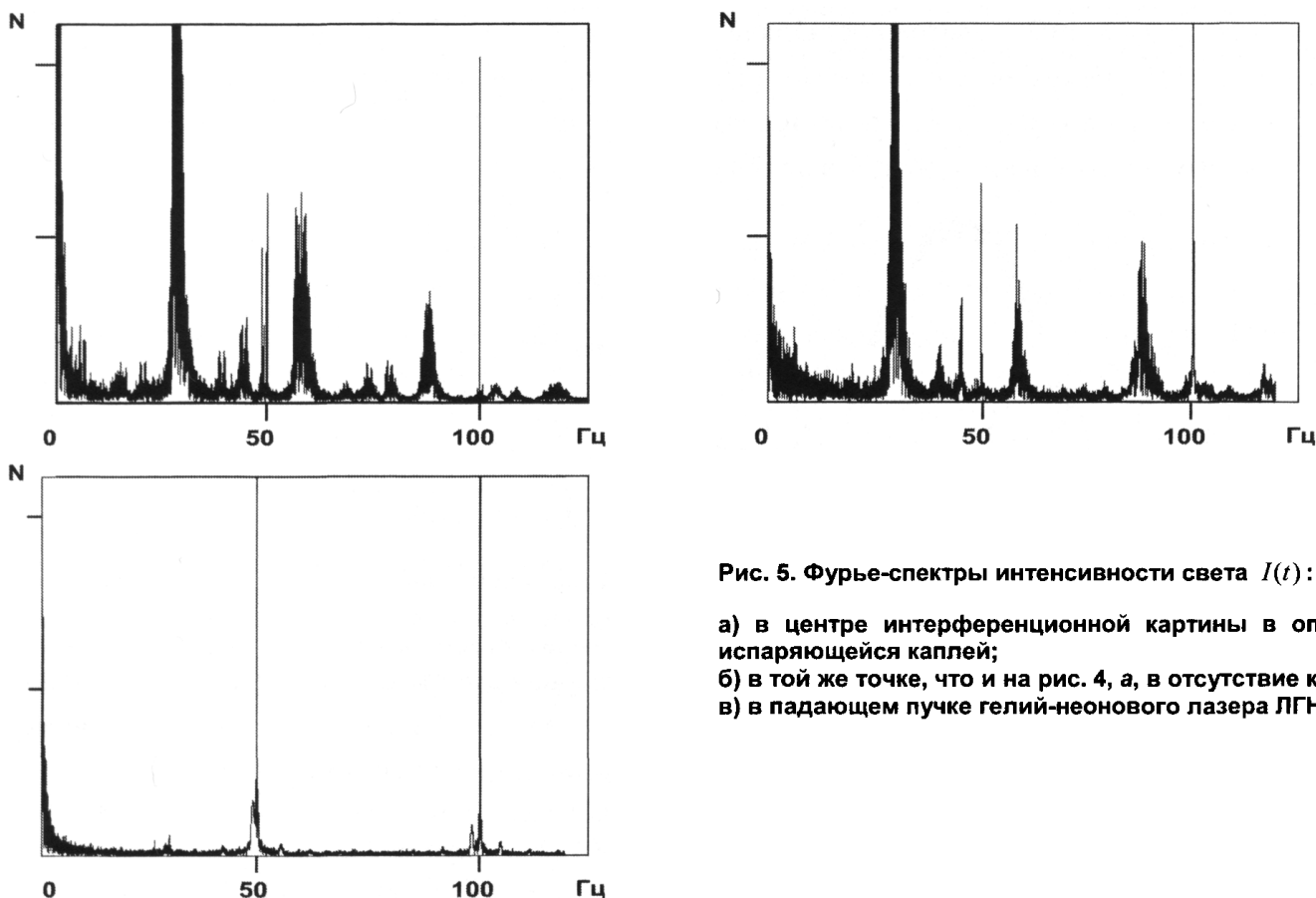


Рис. 5. Фурье-спектры интенсивности света  $I(t)$ :

- а) в центре интерференционной картины в опыте с испаряющейся каплей;
- б) в той же точке, что и на рис. 4, а, в отсутствие капли;
- в) в падающем пучке гелий-неонового лазера ЛГН-215

Новая оптическая схема представлена на рис. 6 и включает два зеркала. После отражения в первом из них неразведенный луч лазера направляется вертикально на вершину лежащей капли, располагающейся на плоскопараллельной стеклянной пластинке (подложке). Затем формируются два сферических волновых поля: первое возникает после отражения луча лазера непосредственно от поверхности капли (предметное), второе (опорное) – после прохождения луча лазера сквозь каплю и его отражения от поверхности стеклянной подложки (нижняя часть подложки сделана матовой для предотвращения отражения от нее света). Длины когерентности используемого лазера оказались достаточно для наблюдения устойчивой интерференционной картины в виде концентрических колец, в центре которой располагается фотодиод.

В новой оптической схеме нельзя получить информацию для расчета радиуса кривизны в вершине капли так же просто, как и в старой, поскольку здесь фаза не только предметного, но и опорного пучка зависит как от радиуса, так и от высоты испаряющейся капли. Это, однако, не является препятствием для наблюдения колебаний малой амплитуды (до 20–40 нм) с периодами, много меньшими чем характерное время существенного изменения формы капли, например, время ее жизни. На рис. 7 приведен спектр частот колебаний поверхности испаряющейся капли вблизи ее вершины, полученный с использованием газового лазера ЛГН-215. Видно, что изменения в оптической схеме эксперимента позволили избавиться от большинства паразитных колебаний. В диапазоне 10–100 Гц присутствуют только колебания с частотами, кратными частоте электрической сети, и два парных пика малой мощности на частотах 29 и 48 Гц, отсутствующие в спектре излучения этого лазера (см. рис. 5, в). Эксперименты с полупроводниковым лазером в



том же и в более широком частотном диапазоне (до  $10^3$  Гц) также не выявили каких-либо заметных колебаний, которые можно было бы связать с каплей. Таким образом, при указанных условиях опытов не удастся обнаружить колебательных процессов на поверхности капли с частотами в интервале 10–1000 Гц.

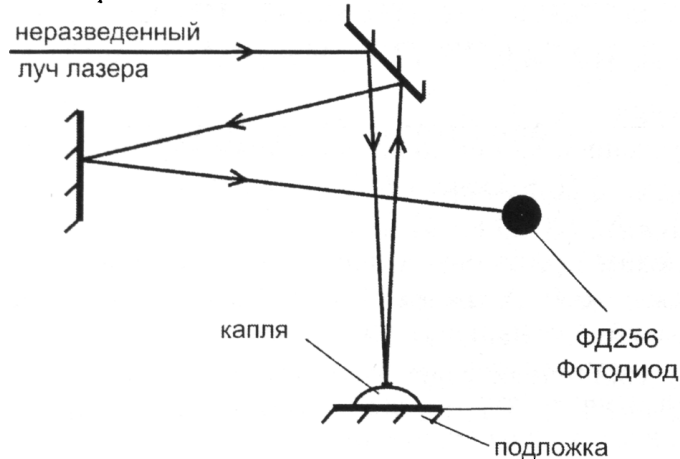


Рис. 6. Новая схема эксперимента

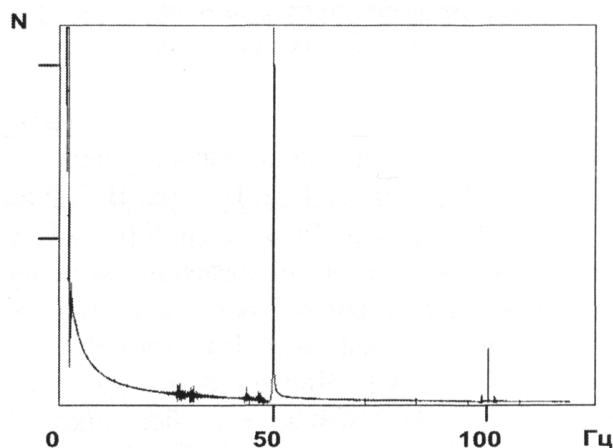


Рис. 7. Фурье-спектр  $I(t)$  в эксперименте с испаряющейся каплей при использовании газового лазера ЛГН-215

Типичный вид спектра в низкочастотной области, вблизи частоты  $f_{исп}$  ( $\sim 2$  Гц), показан на рис. 8.

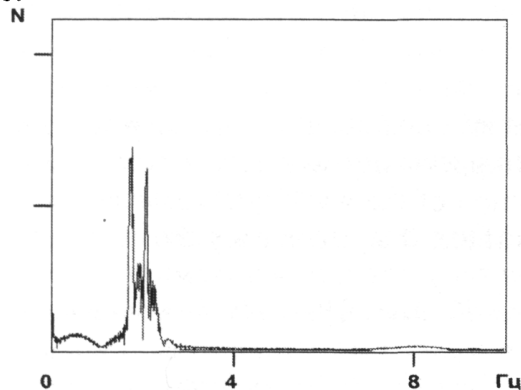


Рис. 8. Фурье-спектр  $I(t)$  в области низких частот вблизи  $f_{исп}$ .

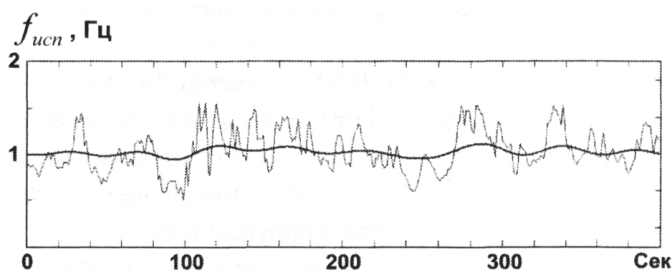


Рис. 9. Зависимость частоты следования полос интерференции,  $f_{исп}$ , от времени.

Гладкая кривая – результат Фурье-фильтрации.

Видно, что пик, отвечающий этой частоте, имеет сложную структуру и занимает целый диапазон шириной  $\Delta f_{исп} \sim 1$  Гц, определяемый диапазоном скоростей, с которыми движется вершина капли в процессе испарения на отрезке времени, в котором за ней велось наблюдение. Пример того, как изменяется  $f_{исп}$  с течением времени, приведен на рис. 9. Видно, что эта функция ведет себя довольно нерегулярным образом, а ее вариация имеет порядок ее среднего значения. Гладкая кривая на этом рисунке представляет собой попытку выделить в  $f_{исп}(t)$  регулярную составляющую с помощью процедуры Фурье-сглаживания. Происхождение случайной и гладкой периодических составляющих нуждается в дальнейшем исследовании.

## Заключение

Предложенная ранее [1] оптическая схема для регистрации параметров лежащей капли методами лазерной интерферометрии исследована с целью обнаружения малых движений на поверхности раздела жидкость – газ в процессе испарения, вызванных как самим процессом испарения, так и сейсмическими шумами различного происхождения. Спектральный анализ временных зависимостей интенсивности света в центре интерференционной картины, выполненный с помощью различных способов ее наблюдения, показал, что большая часть спектральных деталей связана с вибрацией элементов оптической схемы, а также с модуляцией интенсивности излучения лазеров промышленной частотой, на которой работают их источники питания. Предложена схема экспериментов, позволяющая свести к минимуму влияние элементов оптической схемы за счет уменьшения их числа до минимально возможного. С ее помощью проведены исследования испаряющихся капель воды с массами 0,05–0,10 г и показано, что в частотном диапазоне от 5 до  $10^3$

Гц волновые процессы на их поверхности отсутствуют. В области более низких частот имеется широкий пик со сложной структурой, расположенный вблизи частоты  $f \sim 2$  Гц и отвечающий движению поверхности капли вследствие ее испарения, а также пик вблизи  $f \sim 0$ , указывающий на медленные движения поверхности с периодом в десятки секунд. Интерпретация этих деталей спектра требует дальнейших исследований.

## Литература

1. Определение радиуса кривизны в вершине лежащей капли по наблюдениям картин интерференции / В.Л. Ушаков, Г.П. Пызин, В.Г. Речкалов, В.П. Бескачко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2009. – Вып. 1. – № 22(155). – С. 91–96.
2. Оценка параметров интерферограмм, необходимых для определения радиуса кривизны в вершине лежащей капли / Г.П. Пызин, В.Л. Ушаков, В.Г. Речкалов, В.П. Бескачко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 3. – № 30(206). – С. 95–100.
3. Коренченко, А.Е. Численное моделирование свободных колебаний лежащей капли / А.Е. Коренченко, А.Ж. Илимбасва, В.П. Бескачко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 72–76.

## A METHOD FOR MONITORING SMALL SURFACE MOVEMENTS OF A SESSILE DROP DURING EVAPORATION

V.L. Ushakov<sup>1</sup>, G.P. Pyzin<sup>2</sup>, V.P. Beskachko<sup>3</sup>

Interference methods allow researchers to obtain the information about normal displacements of a phase surface with high resolution and in real time. This opportunity was realized to observe time changes of the height of evaporating drop accurate to a fraction of the wavelength of visible light. We consider the possibilities of studying processes on a drop surface, that accompany the evaporation and are small-scale in terms of space and time.

*Keywords: interfacial phenomena, evaporation, drop shape, sessile drop method, interferometric methods.*

## References

1. Ushacov V.L., Pyzin G.P., Rechkalov V.G., Beskachko V.P. Opredelenie radiusa krivizny v vershine lezhashchey kapli po nablyudeniym kartin interferentsii (The determination of the curvature radius at the top of a sessile drop based on observations of interference patterns). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2009. Issue 1. no. 22(155). pp. 91–96. (in Russ.).
2. Pyzin G.P., Ushacov V.L., Rechkalov V.G., Beskachko V.P. Otsenka parametrov interferogram, neobkhodimyykh dlya opredeleniya radiusa krivizny v vershine lezhashchey kapli (The estimation of parameters of the interference patterns needed to determine the radius of curvature at the top of a sessile drop). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2010. Issue 3. no. 30(206). pp. 95–100. (in Russ.).
3. Korenchenko A.E., Ilimbaeva A.G., Beskachko V.P. Chislennoe modelirovanie svobodnykh kolebaniy lezhashchey kapli. (The numerical simulation of sessile drop free oscillations). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 72–76. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 1 октября 2013 г.*

<sup>1</sup> Ushakov Vladimir Leonidovich is Assistant, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University

<sup>2</sup> Pyzin Georgii Petrovich is Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University

E-mail: hologrph@mail.ru

<sup>3</sup> Beskachko Valeriy Petrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University

## ВОПРОСЫ ВИБРАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ОПЕРАТОРА ПРОМЫШЛЕННОГО ТРАКТОРА

И.Я. Березин<sup>1</sup>, Ю.О. Петренко<sup>2</sup>

Регистрация динамических процессов в условиях реальной эксплуатации трактора позволила выявить источник низкочастотного вибрационного воздействия, обусловленный чередованием траков гусеницы в опорной ветви обвода, который по данным медико-биологических исследований является наиболее неблагоприятным для тела оператора. Рассмотрена линейная дискретная модель системы «виброзащитное кресло – таз – туловище – голова»; исследовано влияние динамических параметров виброзащитного кресла на уровень вибрационной нагруженности оператора.

*Ключевые слова* явление «бегущая волна», случайный вибрационный процесс, дискретная линейная модель, передаточная функция, спектральная плотность виброускорений, санитарные нормы

Промышленный трактор представляет собой связанную динамическую систему, элементы которой могут служить источниками вибрационного воздействия на корпус трактора и тело человека-оператора. Широкий спектр циклического возмущения определяется, с одной стороны, низкочастотным взаимодействием рабочих органов с внешней средой в диапазоне 0,15–1 Гц (бульдозирование, рыхление, транспортный режим по случайному профилю дороги) и высокочастотными колебаниями силовой установки в диапазоне 30–50 Гц (работа двигателя, трансмиссии и других агрегатов), с другой.

Как показывают результаты медико-биологических исследований, наибольшую опасность с точки зрения утомляемости и здоровья человека-оператора представляют вибрационные воздействия в диапазоне 2–20 Гц [1], так как именно в нем расположены резонансные частоты основных органов тела человека. Это также подчеркивается нормативными документами [2, 3], которые задают в указанном диапазоне частот предельные значения параметров вибраций при сертификационных испытаниях тракторов.

Как показали результаты экспериментальных исследований, проведенных на кафедре «Прикладная механика, динамика и прочность машин» ЮУрГУ [4], особое значение приобретает непрерывно действующее явление, вызванное перекачиванием каждого из опорных катков по звенчатой гусенице, лежащей на податливом основании. Отмеченное явление названо эффектом «бегущая волна»; его воздействие на корпус трактора можно представить в виде узкополосного случайного процесса изменения угла поворота между соседними звеньями гусеничной цепи, максимумы которого определяются изменчивостью податливости дорожного полотна, а частота чередования циклов – шагом гусеницы, скоростью движения трактора и случайным фазовым сдвигом левой и правой гусениц. Значения оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимумов углов поворота траков для различных грунтовых фонов приведены в таблице.

Статистические характеристики максимальных взаимных углов поворота между смежными траками

| Грунтовый фон            | Статистические характеристики |                          |
|--------------------------|-------------------------------|--------------------------|
|                          | $m_{\phi}$ , (град)           | $\sigma_{\phi}$ , (град) |
| Жесткая грунтовая дорога | 8,6                           | 5,1                      |
| Луговой фон              | 9,6                           | 4,6                      |
| Песчаное покрытие        | 7,9                           | 3,8                      |

<sup>1</sup> Березин Игорь Яковлевич – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики, динамики и прочности машин Южно-Уральского государственного университета

<sup>2</sup> Петренко Юлия Олеговна – аспирант, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин Южно-Уральского государственного университета

E-mail: yulyapetrenko@list.ru

Выполнена сравнительная оценка диапазонов «траковой» частоты, выявленной в результате натурального эксперимента, и установленного в результате медико-биологических исследований интервала резонансных частот для тела человека. Полученные результаты указывают на их достаточно близкое схождение. В связи с этим в предлагаемом исследовании ставится частная задача, в которой в качестве источника вибрационной нагруженности тела оператора промышленного трактора учитывается только кинематическое воздействие со стороны гусеничного двигателя.

В период с 60-х годов до настоящего времени в нашей стране центром исследований проблем защиты человека от вибрации являлся институт машиноведения РАН имени А.А. Благонравова, в котором под руководством академика К.В. Фролова были развернуты исследования по широкому кругу вопросов вибрационной безопасности. Результаты исследований в этой области опубликованы в научных трудах В.И. Бабицкого, И.И. Блехмана, И.И. Быховского, В.Л. Вейца, А.М. Мартыненко, А.А. Хачатурова, Ю.И. Иориша, М.З. Коловского, Г.Я. Пановко, Б.А. Потемкина и других авторов.

В основу исследования воздействия вибраций на оператора промышленного трактора положено допущение о том, что тело человека можно рассматривать как дискретную линейную вязкоупругую механическую систему, испытывающую случайные внешние воздействия. Обоснованием к выбору расчетной схемы послужили результаты, полученные Г.Я. Пановко [1, 5, 6]. На рис. 1 представлена заимствованная из [5] амплитудно-частотная характеристика, полученная при натуральных стендовых испытаниях, из которой следует, что в отмеченном ранее диапазоне частот четко проявляются три резонансные области.

В связи с этим была рассмотрена дискретная модель тела оператора с тремя степенями свободы. Внешнее воздействие ( $Y$ ) на модель, в соответствии с ГОСТ 27259-87 (ИСО 7096-82), задается в виде функции спектральной плотности вертикальных ускорений, которую необходимо воспроизвести у основания кресла при проведении сертификационных испытаний. Таким образом, возникла необходимость рассматривать тело оператора совместно с виброзащитным креслом (рис. 2).

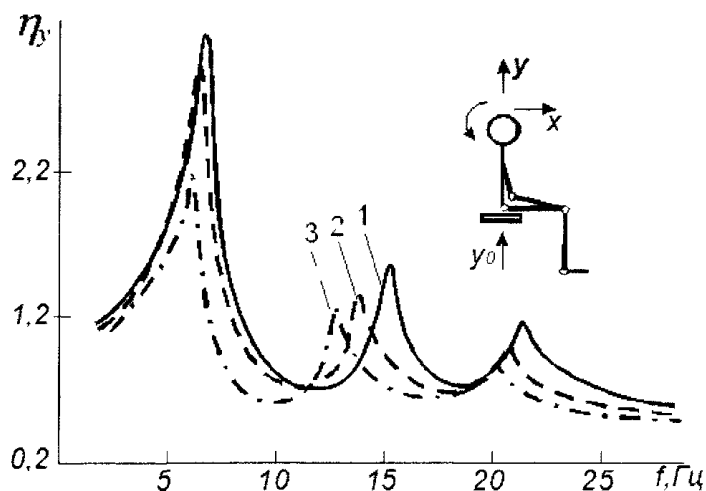


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики тела сидящего человека, измеренные в направлении оси  $y$ , трехкомпонентной модели при значениях виброскорости (м/сек): 1 – 0,0015, 2 – 0,0052, 3 – 0,028

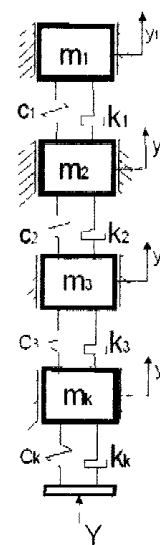


Рис. 2. Модель тела человека-оператора с учетом виброзащитного кресла

Параметры модели тела  $m_i, c_i, k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) заимствованы из справочной литературы [1]. Характеристики виброзащитного кресла  $m_k, c_k, k_k$  определены при стендовых испытаниях серийного варианта. Комплексная модель системы «виброзащитное кресло – тело человека-оператора» описывается системой с четырьмя степенями свободы и представляет собой систему четырех связанных дифференциальных уравнений (1)

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 &= -c_1 (y_1 - y_2) - k_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\
 m_2 \ddot{y}_2 &= -c_2 (y_2 - y_3) - k_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + c_1 (y_1 - y_2) + k_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\
 m_3 \ddot{y}_3 &= -c_3 (y_3 - y_k) - k_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_k) + c_2 (y_2 - y_3) + k_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \\
 m_k \ddot{y}_k &= -c_k (y_k - Y) - k_k (\dot{y}_k - \dot{Y}) + c_3 (y_3 - y_k) + k_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_k).
 \end{aligned} \tag{1}$$

В результате расчетных исследований получены передаточные функции, которые в последующем применяются при решении задач статистической механики. Полученные результаты показали, что модель тела оператора с виброзащитным креслом работает адекватно, поскольку на передаточных функциях элементов модели  $W_{y_i/Y}, W_{y_k/Y}$  видно проявление четырех резонансных частот: кресла – 1,7 Гц; туловища – 5,1 Гц; головы – 10,1 Гц; таза – 11,4 Гц (рисунок 3а).

В нормативных документах по вибронегруженности операторов одним из основных критериев приняты значения виброускорений на сиденье кресла. Исходя из допущения о стационарности процессов колебаний, для каждого из отдельных элементов тела оператора, с помощью основного соотношения спектрального метода были получены спектральные плотности виброускорений, которые приведены на рис. 3, б. Из рис. 3, б видно, что из частей тела наиболее подверженной вибрационному воздействию оказалась голова оператора. Эти результаты характеризуют общую нагруженность элементов модели в широком интервале изменения частоты. Однако санитарные нормы [3] предусматривают не общую оценку, а соответствие среднеквадратических значений ускорений определенным полосам частот. В связи с этим рассмотренный интервал частот (от 2 – 20 Гц) представлен в виде третьоктавных полос, в каждой из которых определяются соответствующие этим полосам среднеквадратические значения виброускорений. Результаты расчетов показали, что в 6-й третьоктавной полосе (6,3 – 8 Гц) значения среднеквадратических отклонений виброускорений превышает допустимые санитарные нормы в 1,26 раза.

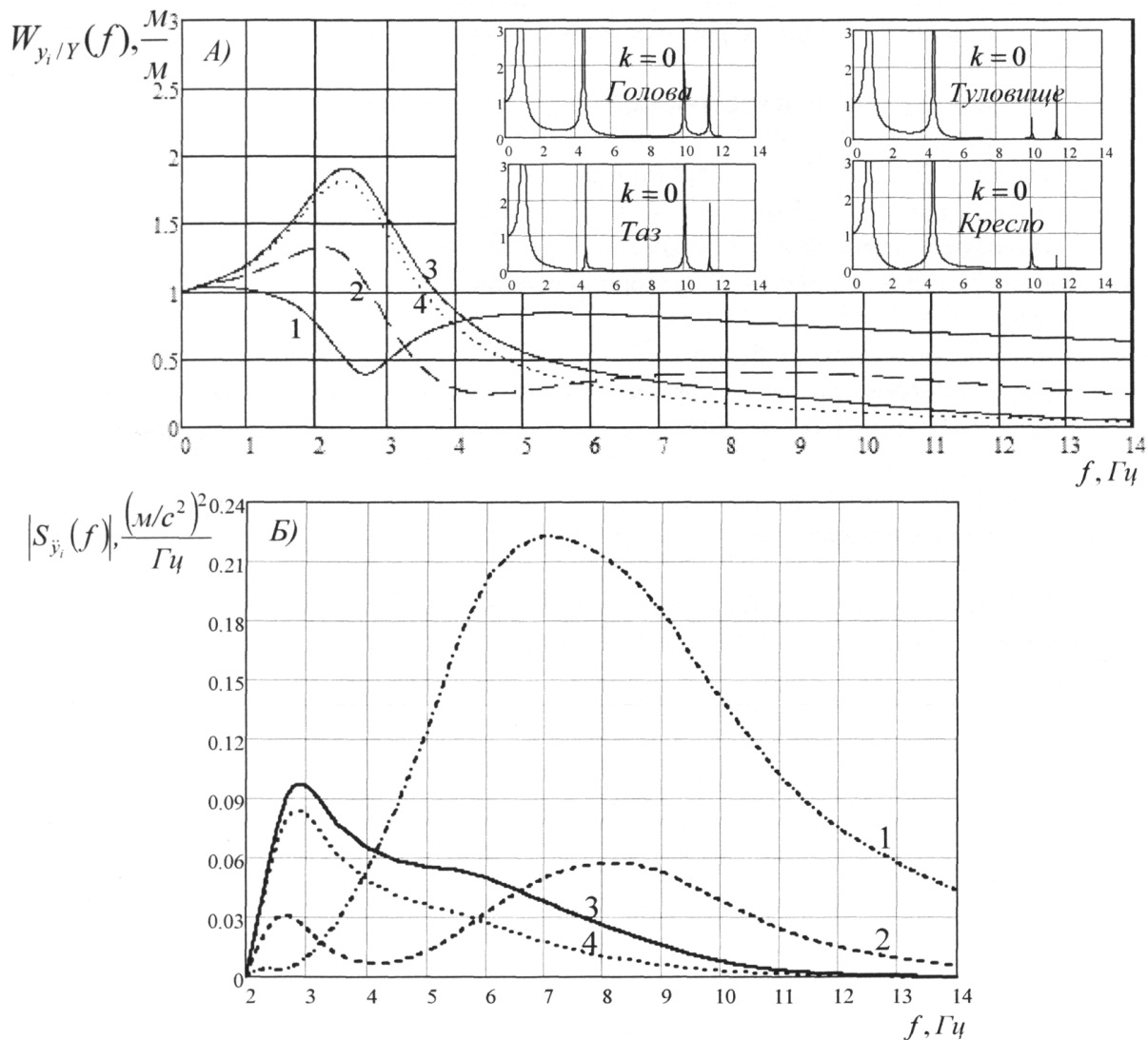


Рис. 3. А) Передаточные функции модели с креслом;  
Б) Спектральные плотности виброускорений модели:  
1 – кресло; 2 – таз; 3 – голова; 4 - туловище

С целью оценить влияние характеристик виброзащитного кресла на нагруженность оператора был задан диапазон возможных изменений параметров кресла относительно номинального значения. Результаты расчетов представлены на рис. 4, из которого видно, что возможно путем варьирования характеристик кресла, в частности уменьшения уровня демпфирования, добиться

желаемых значений среднеквадратических ускорений на кресле оператора. По-видимому, этот факт объясняется тем, что снижение демпфирования в зарезонансной области приводит к уменьшению уровня вибрационного воздействия.

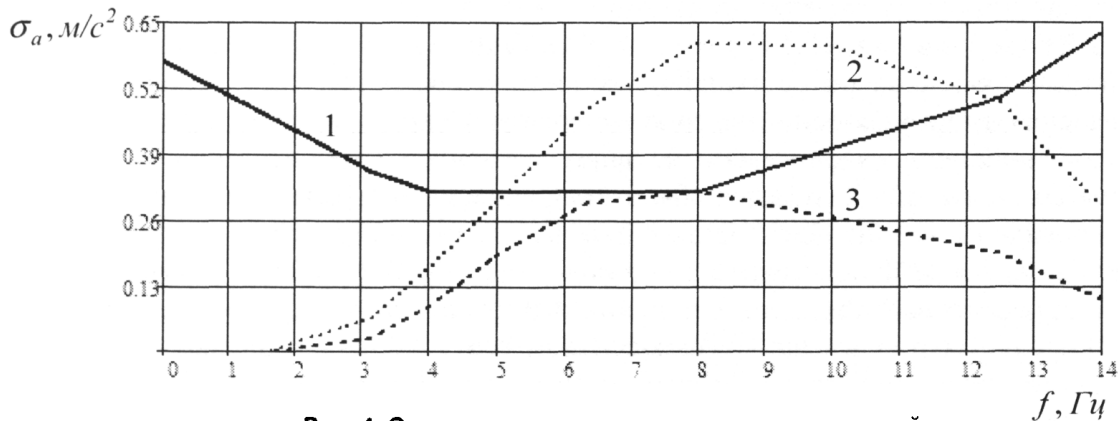


Рис. 4. Среднеквадратические значения ускорений:  
1 – санитарные нормы; 2 – номинальное значение коэффициента демпфирования; 3 – коэффициент демпфирования уменьшен в 4 раза

Дальнейшее исследование планируется проводить в направлениях:

1. Проведение экспериментальных работ с целью проверки адекватности модели тела человека;
2. Совершенствование модели, в частности, учет угловых колебаний головы.

### Литература

1. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / под ред. В.Н. Челомея. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
2. Машины землеройные. Сиденье оператора. Передаваемая вибрация. ГОСТ 27259-87 (ИСО 7096-82)
3. Вибрационная безопасность. Общие требования. ГОСТ 12.1.012-90.
4. Хрипунов, Д.В. Методы оценки вибронагруженности промышленного трактора со стороны гусеничного движителя: автореферат дис. ... канд. техн. наук / Д.В. Хрипунов. – Челябинск, 2002. – 22 с.
5. Пановко, Г.Я. Построение динамических моделей тела человека-оператора при вибрационных воздействиях: автореферат дис. ... канд. техн. наук / Г.Я. Пановко. – Машиноведение, 1973. – 28 с.
6. Пановко, Г.Я. Дискретная колебательная модель тела человека и определение ее параметров / Г.Я. Пановко, Б.Г. Трактовенко // Машиноведение. – 1974. – № 4. – С. 16–20.

## PROBLEMS OF VIBRATION SAFETY OF OPERATOR OF INDUSTRIAL TRACTOR

I.Ya. Berezin<sup>1</sup>, Yu.O. Petrenko<sup>2</sup>

Registration of dynamic processes in the context of real operation gave the researches opportunity to find the source of low-frequency vibration impact driven by rotation of caterpillar track in supporting frame of by-pass which is, according to biomedical researches, the most unfavorable for the body of the operator. The linear discrete model of the "Antivibration seat – Pelvis – Body – Head" system is studied as well as the impact of the dynamic parameters of antivibration seat on the level of vibrational load of the operator.

*Keywords: progressive wave, haphazard vibrational process, discrete linear model, transfer function, spectral density of vibrational acceleration, sanitary standards.*

### References

1. Chelomey V.N. (ed.) *Vibratsii v tekhnike: spravochnik. T. 6. Zashchita ot vibratsii i udarov* (Vibration technology: a handbook. Vol. 6. Protection from vibration and shocks). Moscow: Mashinostroyeniye, 1981. 456 p. (in Russ.).

2. GOST 27259-87 (ISO 7096-82) *Mashiny zemleroynye. Siden'e operatora. Peredavaemaya vibratsiya*. (Earth-moving machinery. The operator's seat. Transmitted vibration.) (in Russ.).

3. GOST 12.1.012-90. *Vibratsionnaya bezopasnost'. Obshchie trebovaniya*. (GOST 12.1.012-90. Vibration safety. General requirements.) (in Russ.).

4. Khripunov D.V. *Metody otsenki vibronagruzhennosti promyshlennogo traktora so storony gusenichnogo dvizhitelya: avtoreferat dis. ... kand. tekhn. nauk* (Methods for assessing vibration loading the tractor from the caterpillar drive: synopsis of the cand. tech. sci. diss.). Chelyabinsk, 2002. 22 p. (in Russ.).

5. Panovko G.Ya. *Postroenie dinamicheskikh modeley tela cheloveka-operatora pri vibratsionnykh vozdeystviyakh: avtoreferat dis. ... kand. tekhn. nauk* (Building a dynamic model of the body of the human operator with vibration impacts: synopsis of the cand. tech. sci. diss.). Mashinovedenie, 1973. 28 p. (in Russ.).

6. Panovko G.Ya., Traktovenko B.G. Diskretnaya kolebatel'naya model' tela cheloveka i opredeleniye ee parametrov (Discrete vibrational model of the human body and the determination of its parameters). *Mashinovedenie*. 1974. no. 4. pp. 16–20. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 11 марта 2013 г.*

<sup>1</sup> Berezin Igor Yakovlevich is Dr Sc (Engineering), Professor, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University

<sup>2</sup> Petrenko Yulia Olegovna is Post-graduate Student, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University

E-mail yuliyapetrenko@list.ru

# ВОЛОКОННО-ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ПУЧКА<sup>1</sup>

М.В. Большаков<sup>2</sup>, А.В. Гусева<sup>3</sup>, Н.Д. Кундикова<sup>4</sup>, И.И. Попков<sup>5</sup>

Рассмотрен процесс распространения циркулярно поляризованного излучения в маломодовом оптическом волокне. Предложен интерференционный метод получения неоднородно поляризованных по сечению пучков.

Ключевые слова: поляризация, оптическое волокно, интерференция.

## Введение

Наблюдению поляризационных эффектов света посвящено большое число исследований. В последнее время возрос интерес к световым полям, имеющим неоднородную поляризацию. Наибольший практический интерес представляют пучки с радиальной и азимутальной поляризацией. Такие пучки применяются для решения разнообразных задач в лазерной микроскопии сверхвысокого разрешения [1–3], лазерной манипуляции [4–7], медицинской диагностике [8], в технологических процессах обработки металлов [9–11], для ускорения электронов [12–14], для исследования плазмонов [15].

Формирование множества различных типов векторных поляризационно неоднородных мод с уникальными свойствами осуществляется с помощью дополнительных внутри- или внерезонаторных устройств [16]. Внутрирезонаторные методы основаны на модификации лазерных резонаторов. Главный недостаток такого метода состоит в том, что он ориентирован на конкретный тип лазеров и, как правило, на получение какого-то одного типа неоднородной поляризации.

Синтез неоднородно поляризованных пучков с помощью внешних устройств либо интерференционных схем относится к внерезонаторным методам. Главным преимуществом внерезонаторных методов является универсализм, недостатком – сложность выполнения. Принцип действия поляризационных устройств основан на локальном изменении состояния поляризации в каждой точке поперечного сечения лазерного пучка.

Целью данной работы является разработка волоконно-интерференционного метода получения неоднородно поляризованного по сечению светового пучка.

## Анализ распространения циркулярно поляризованного излучения в оптическом волокне

Рассмотрим распространение излучения в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления [17].

Пусть на вход волокна падает циркулярно поляризованная волна со спиновым моментом  $\sigma = +1$ :

$$E^+(r, \varphi, z=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma i \end{pmatrix} \left\{ e^{-i\varphi} \sum_N C_{-,1,N} F_{1,N}(r) + \sum_{m \neq 1} \sum_N C_{-,m,N} e^{-im\varphi} F_{m,N}(r) + \sum_m \sum_N C_{+,m,N} e^{im\varphi} F_{m,N}(r) \right\},$$

где  $\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma i \end{pmatrix}$  – столбец Максвелла [18],  $\sigma = +1$ , коэффициенты  $C_{-,1,N}$  и  $C_{+,1,N}$  определяют вклад мод

$e_{+,m,N}^+(r, \varphi)$  и  $e_{-,m,N}^+(r, \varphi)$  в световое поле на входе в волокно. На выходе из волокна имеем следующее распределение поля:

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения 14.132.21.1396, 14.В37.21.1633 и при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 12-02-31448 мол\_а

<sup>2</sup> Большаков Максим Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: bolshakovmv@susu.ac.ru

<sup>3</sup> Гусева Анна Валентиновна – студент, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: avroga-org@bk.ru

<sup>4</sup> Кундикова Наталья Дмитриевна – доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета, отдел нелинейной оптики Института электрофизики РАН, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: knd@susu.ac.ru

<sup>5</sup> Попков Иван Игоревич – ассистент, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: popkov\_iv@gmail.com



$$\begin{aligned}
 E^+(r, \varphi, z) = & \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \left\{ \sum_{m \neq 1} \sum_N C_{-,m,N} e^{-im\varphi} F_{m,N}(r) \cdot \exp \left[ iz \left( \beta_{m,N} + \delta\beta_{m,N}^{(2)} \right) \right] + \right. \\
 & + \sum_m \sum_N C_{+,m,N} e^{+im\varphi} F_{m,N}(r) \exp \left[ iz \left( \beta_{m,N} + \delta\beta_{m,N}^{(1)} \right) \right] + \\
 & + \sum_N C_{-,1,N} e^{-i\varphi} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left( e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} + 1 \right) \left. \right\} + \\
 & + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \left[ e^{i\varphi} \sum_N C_{-,1,N} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left( e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} - 1 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\delta\beta_{m,N}^{(i)}$  – поляризационная поправка к константе распространения моды с индексами  $m$ ,  $F_{m,N}(r)$  – радиальная функция. Аналогичные выражения можно записать и для случая, когда на вход волокна падает излучение со спиновым моментом  $\sigma = -1$ .

Из выражения (1) следует, что на выходе из волокна появляется излучение с противоположным спиновым моментом  $\sigma = -1$  («чужая» поляризация), вклад в которое дают только моды  $e_{1,N}^2$  и  $e_{1,N}^4$ . Эти моды являются особыми, т.к. они соответствуют меридиональным лучам, для которых циркулярная поляризация не сохраняется в силу условий симметрии [17, 19].

Если на выходе из волокна поставить «циркулярный анализатор», пропускающий циркулярное излучение со знаком, противоположным знаку  $\sigma$  на входе в волокно, то через него пройдут только соответствующие моды с орбитальным моментом  $m = 1$ . Если после поляризатора поставить четвертьволновую пластинку, то прошедшая волна может приобрести любую поляризацию, в том числе и циркулярную. Пусть после четвертьволновой пластинки распространяется циркулярно поляризованное излучение с  $m = 1$ . Рассмотрим подробнее поле, прошедшее через «циркулярный анализатор». Этот анализатор состоит из четвертьволновой пластинки и поляризатора. Поле описывается последним членом в сумме в (1). Если на вход волокна падает свет со спиновым моментом  $\sigma = +1$ , то поле, прошедшее через анализатор, будет иметь следующий вид:

$$E^{+-}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\varphi} \cdot \left\{ \sum_N C_{-,1,N} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left[ e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} - 1 \right] \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\varphi} A^{+-}.$$

Если на вход волокна подавать излучение со спиновым моментом  $\sigma = -1$ , то поле, прошедшее через анализатор, будет иметь вид:

$$E^{-+}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} e^{-i\varphi} \cdot \left\{ \sum_N C_{+,1,N} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left[ e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} - 1 \right] \right\} = A^{-+}.$$

Если выровнять интенсивности этих двух пучков, то есть сделать равными коэффициенты  $A^{-+} = A^{+-} = A$ , то результирующее поле имеет следующий вид:

$$E^{+-}(r, \varphi, z) + E^{-+}(r, \varphi, z) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{+i\varphi} + \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} e^{-i\varphi} \right] A = E^\Sigma(r, \varphi, z) A.$$

Распределение поляризации в поперечном сечении поля (1) на выходе волокна определяется выражением:

$$E^\Sigma(r, \varphi, z) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{+i\varphi} + \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} e^{-i\varphi} \right].$$

Легко показать, что

$$E^\Sigma(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{+i\varphi} + \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} e^{-i\varphi} = 2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Поляризацию в каждой точке поперечного сечения суммарного пучка можно определить, используя комплексное число  $\chi = E_y/E_x$ . Угол наклона эллипса поляризации  $\theta$  определяется выражением:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{Re}(\chi)}{1-|\chi|^2},$$

а угол эллиптичности  $\varepsilon$  :

$$\sin(2\varepsilon) = \frac{2\operatorname{Im}(\chi)}{1+|\chi|^2}. \quad (3)$$

Из выражения (2) следует, что  $\chi = \sin \varphi / \cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi$  и, следовательно:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1-|\operatorname{tg} \varphi|^2},$$

откуда следует, что  $\theta = \varphi$ , т.е. наклон эллипса поляризации задается азимутальной координатой. Так как число  $\chi$  – действительное, то в соответствии с выражением (3)  $\sin(2\varepsilon) = 0$ , следовательно, эллиптичность тоже равна нулю и излучение является линейно поляризованным.

Таким способом можно получить пучок с неоднородно распределенной по сечению линейной поляризацией, а именно, в каждой точке сечения колебания вектора электрического поля направлены по радиусу сечения.

Рассмотрим случай, когда в один из пучков внесена разность фаз  $\pi$ . Тогда выражение приобретает следующий вид:

$$E^{\Sigma}(r, \varphi, z) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{+i(\varphi+\pi)} + \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} e^{-i\varphi} \right].$$

Рассмотрим отдельно член, который определяет поляризацию:

$$e^{+i(\varphi+\pi)} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что  $\chi = \sin \varphi / \cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi$ , и, следовательно:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = -\operatorname{tg}\left(2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

откуда следует, что  $\theta = -(\varphi + \pi/2)$ , т.е. большая ось эллипса поляризации перпендикулярна радиусу. Угол эллиптичности в данном случае равен нулю, следовательно, эллиптичность тоже равна нулю.

Таким образом, можно получить линейно поляризованное излучение, направленное азимутально, т.е. направление поляризации перпендикулярно радиусу.

Складывая такие пучки с различным соотношением фаз, можно получить различные неоднородно поляризованные по сечению пучки.

Таким образом, на основе анализа распространения излучения в оптическом волокне показано, что излучение, вышедшее из оптического волокна, можно использовать для получения неоднородно линейно поляризованных пучков, в частности, поляризованных радиально или азимутально.

### Литература

1. Biss, D.P. Polarization-vortex-driven second-harmonic generation / D.P. Biss, T.G. Brown // Optics Letters. – 2003. – Vol. 28, № 11. – P. 923–925.
2. Second- and third-harmonic generation with vector Gaussian beams / S. Carrasco, B.E. Saleh, M.C. Teich, J.T. Fourkas // J. Opt. Soc. Am. B. – 2006. – Vol. 23, № 10. – P. 2134–2141.
3. Biss, D.P. Dark-field imaging with cylindrical-vector beams / D.P. Biss, K.S. Youngworth, T.G. Brown // Appl. Opt. – 2006. – Vol. 45, № 3. – P. 470–479.
4. Zhan, Q. Radiation forces on a dielectric sphere produced by highly focused cylindrical vector beams / Q. Zhan // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2003. – Vol. 5, № 3. – P. 229–232.
5. Zhan, Q. Trapping metallic Rayleigh particles with radial polarization / Q. Zhan // Opt. Express. – 2004. – Vol. 12, № 15. – P. 3377–3382.

6. Kozawa, Y. Optical trapping of micrometer-sized dielectric particles by cylindrical vector beams / Y. Kozawa, S. Sato // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, № 10. – P. 10828–10833.
7. Zhang, Y. Trapping two types of particles using a double-ring-shaped radially polarized beam / Y. Zhang, D. Biaofeng, S. Taikei // *Phys. Rev. A.* – 2010. – Vol. 81, № 2. – P. 023831.
8. Rang, H. Enhanced photothermal therapy assisted with gold nanorods using a radially polarized beam / H. Rang, B. Jia, J. Li // *Applied Physics Letters.* – 2010. – Vol. 96, № 6. – P. 063702.
9. Meier, M. Material processing with pulsed radially and azimuthally polarized laser radiation / M. Meier, V. Romano, T. Feurer // *Applied Physics A: Materials Science & Processing.* – 2007. – Vol. 86, № 3. – P. 329–334.
10. Kraus, M. Microdrilling in steel using ultrashort pulsed laser beams with radial and azimuthal polarization / M. Kraus, M.A. Ahmed, A. Michalowski // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, № 21. – P. 22305.
11. Niziev, V.G. Influence of beam polarization on laser cutting efficiency / V.G. Niziev, A.V. Nesterov // *Journal of Physics D: Applied Physics.* – 1999. – Vol. 32, № 13. – P. 1455.
12. Steinhauer, L.C. A new approach for laser particle acceleration in vacuum / L.C. Steinhauer, W. D. Kimura // *J. Appl. Phys.* – 1992. – Vol. 72, № 8. – P. 3237.
13. Wong, L.J. Direct acceleration of an electron in infinite vacuum by a pulsed radially-polarized laser beam / L.J. Wong, F.X. Kartner // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, № 24. – P. 25035.
14. Bochkareva, S.G. Vacuum electron acceleration by a tightly focused, radially polarized, relativistically strong laser pulse / S.G. Bochkareva, K.I. Popov, V.Yu. Bychenkova // *Plasma Physics Reports.* – 2011. – Vol. 37, № 7. – P. 603.
15. Demonstration of an elliptical plasmonic lens illuminated with radially-like polarized field / G.M. Lerman, A. Yanai, N. Ben-Yosef, U. Levy // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, № 10. – P. 10871.
16. Zhan, Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Q. Zhan // *Advances in Optics and Photonics.* – 2009. – Vol. 1. – Issue 1. – P. 1–57.
17. Формирование единичной дислокации волнового фронта / М.Я. Даршт, Б.Я. Зельдович, И.В. Катаевская, Н.Д. Кундикова // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* – 1995. – Т. 107, № 5. – С. 1464–1472.
18. Джерард А., Берч Д.М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. – 341 с.
19. Снайдер, А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Д. Лав. – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.

## FIBER AND INTERFERENTIAL METHOD OF OBTAINING NON-HOMOGENEOUS POLARIZED BEAM

**M.V. Bolshakov<sup>1</sup>, A.V. Guseva<sup>2</sup>, N.D. Kundikova<sup>3</sup>, I.I. Popkov<sup>4</sup>**

The process of distribution of circularly polarized radiation in small-mode optical fiber is represented in this paper. The interferential method of obtaining non-homogeneous polarized beams is described.

*Keywords: polarization, optical fiber, interference.*

### References

1. Biss D.P., Brown T.G. Polarization-vortex-driven second-harmonic generation. *Optics Letters.* 2003. Vol. 28, no. 11. pp. 923–925.

<sup>1</sup> Bolshakov Maxim Vyacheslavovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), associate professor, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University.

E-mail: bolshakovmv@susu.ac.ru

<sup>2</sup> Guseva Anna Valentynovna is Undergraduate Student, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University.

E-mail: avrora-org@bk.ru

<sup>3</sup> Kundikova Nataliya Dmitrievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Dean of Physics Faculty, Joint Nonlinear Optics Laboratory of IEF RAS, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail: knd@susu.ac.ru

<sup>4</sup> Popkov Ivan Igorevich is Assistant, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail: popkov.iv@gmail.com

2. Carrasco S., Saleh B.E., Teich M.C., Fourkas J.T. Second- and third-harmonic generation with vector Gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2006. Vol. 23, no. 10. pp. 2134–2141.
3. Biss D.P., Youngworth K.S., Brown T.G. Dark-field imaging with cylindrical-vector beams / *Appl. Opt.* 2006. Vol. 45, no. 3. pp. 470–479. [<http://dx.doi.org/10.1364/AO.45.000470>]
4. Zhan Q. Radiation forces on a dielectric sphere produced by highly focused cylindrical vector beams. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2003. Vol. 5, no. 3. pp. 229–232.
5. Zhan Q. Trapping metallic Rayleigh particles with radial polarization. *Opt. Express*. 2004. Vol. 12, no. 15. pp. 3377–3382.
6. Kozawa Y., Sato S. Optical trapping of micrometer-sized dielectric particles by cylindrical vector beams. *Opt. Express*. 2010. Vol. 18, no. 10. pp. 10828–10833.
7. Zhang Y., Biaofeng D., Taikei S. Trapping two types of particles using a double-ring-shaped radially polarized beam. *Phys. Rev. A*. 2010. Vol. 81, no. 2. p. 023831.
8. Rang H., Jia B., Li J. Enhanced photothermal therapy assisted with gold nanorods using a radially polarized beam. *Applied Physics Letters*. 2010. Vol. 96, no. 6. p. 063702.
9. Meier M., Romano V., Feurer T. Material processing with pulsed radially and azimuthally polarized laser radiation. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*. 2007. Vol. 86, no. 3. pp. 329–334.
10. Kraus M., Ahmed M.A., Michalowski A. Microdrilling in steel using ultrashort pulsed laser beams with radial and azimuthal polarization. *Opt. Express*. 2010. Vol. 18, no. 21. p. 22305.
11. Niziev V.G., Nesterov A.V. Influence of beam polarization on laser cutting efficiency. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1999. Vol. 32, no. 13. p. 1455.
12. Steinhauer L.C., Kimura W.D. A new approach for laser particle acceleration in vacuum. *J. Appl. Phys.* 1992. Vol. 72, no. 8. p. 3237.
13. Wong L.J., Kartner F.X. Direct acceleration of an electron in infinite vacuum by a pulsed radially-polarized laser beam. *Opt. Express*. 2010. Vol. 18, no. 24. p. 25035.
14. Bochkareva S.G., Popov K.I., Bychenkova V.Yu. Vacuum electron acceleration by a tightly focused, radially polarized, relativistically strong laser pulse. *Plasma Physics Reports*. 2011. Vol. 37, no. 7. p. 603.
15. Lerman G.M., Yanai A., Ben-Yosef N., Levy U. Demonstration of an elliptical plasmonic lens illuminated with radially-like polarized field. *Opt. Express*. 2010. Vol. 18, no. 10. pp. 10871.
16. Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Advances in Optics and Photonics*. 2009. Vol. 1. Issue 1. pp. 1–57. [<http://dx.doi.org/10.1364/AOP.1.000001>]
17. Darsht M.Ya., Zel'dovich B.Ya., Kataevskaya I.V., Kundikova N.D. Formation of an isolated wavefront dislocation. *JETP*. Vol. 80, no. 5. p. 817.
18. Dzherard A., Berch D.M. *Vvedenie v matrichnyuyu optiku* (Introduction into matrix optics). Moskva, Mir, 1978. 341 p. (in Russ.). [Gerrard A., Burch J.M. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. John Wiley & Sons, New York, 1975. 356 p.]
19. Snyder A., Lav D. *Teoriya opticheskikh volnovodov* (Theory of optical waveguide). Moscow: Radio i svyaz', 1987. 656 p. (in Russ.). [Snyder A.W., Love J.D. *Optical Waveguide Theory*. Springer, 1983. 734 p.]

*Поступила в редакцию 21 июня 2013 г.*

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПИНОВОГО МОМЕНТА В ОРБИТАЛЬНЫЙ МОМЕНТ В ЛАЗЕРНОМ ПУЧКЕ<sup>1</sup>

*М.В. Большаков<sup>2</sup>, А.В. Гусева<sup>3</sup>, Н.Д. Кундикова<sup>4</sup>, И.И. Попков<sup>5</sup>*

Рассмотрен процесс распространения циркулярно поляризованного излучения в маломодовом оптическом волокне. Экспериментально продемонстрирована возможность преобразования спинового момента  $\pm 1$  пучка в орбитальный с топологическим зарядом  $\pm 1$ .

*Ключевые слова* спиновый момент, орбитальный момент, оптическое волокно, топологический заряд

## Введение

Интерес к действиям в реальном масштабе времени, обусловленным орбитальным моментом импульса световых пучков, вызван многообещающими возможностями применения этого явления в квантовых компьютерах, криптографии и квантовой телепортации [1–3]. Информация может быть декодирована с помощью перемножения набора состояний, так как фотон несет большое количество информации, распределенной по его спиновым и орбитальным квантовым состояниям [4]. Кроме того, операции с орбитальным моментом позволяют увеличить количество параметров, по которым можно модулировать оптические пучки, а именно, любая информация, содержащаяся в сигнале, может быть декодирована не только в фазу, интенсивность, поляризацию или частоту света, но также в его орбитальный момент. В итоге развитие прямых методов, позволяющих производить действия с орбитальным моментом, даст новые возможности для применения квантовых свойств фотона. Однако достаточно сложно найти подходящую среду для преобразования спинового момента фотона в орбитальный в реальном времени.

В работе [5] рассмотрена возможность совершения такого преобразования благодаря эффекту Погкельса, возникающему в случае, когда в кристалле  $\text{LiNbO}_3$  создается внешнее электрическое поле конической формы. Существует ряд публикаций, в которых демонстрируется возможность преобразования спинового момента в орбитальный с топологическим зарядом  $m = \pm 2$  при помощи нематических жидких кристаллов [6]. В [7] представлено оптическое устройство под названием *q-plate*, представляющее из себя двулучепреломляющую пластинку (сделанную, например, из нематического жидкого кристалла), которая позволяет наблюдать преобразование спинового момента светового пучка в орбитальный с топологическим зарядом  $\pm 2$ .

Поиск новых сред, которые позволяют преобразовывать спиновый момент в орбитальный, является актуальной задачей. Оптическое волокно может быть именно такой средой.

Таким образом, целью данной работы является исследование возможности преобразования спинового момента пучка  $\sigma = \pm 1$  в орбитальный момент пучка  $m = \pm 1$  при распространении излучения в оптическом волокне.

## Анализ распространения циркулярно поляризованного излучения в оптическом волокне

Рассмотрим распространение излучения в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления [8].

Пусть на вход волокна падает циркулярно поляризованный пучок Гаусса со спиновым моментом  $\sigma = +1$ :

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.132.21.1396, 14.В37.21.1633) и при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 12-02-31448 мол.а

<sup>2</sup> Большаков Максим Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: bolshakovmv@susu.ac.ru

<sup>3</sup> Гусева Анна Валентиновна – студент кафедры оптики и спектроскопии Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: avrora-org@bk.ru

<sup>4</sup> Кундикова Наталья Дмитриевна – доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета, отдел нелинейной оптики Института электрофизики РАН, кафедра оптики и спектроскопии Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: knd@susu.ac.ru

<sup>5</sup> Попков Иван Игоревич – ассистент кафедры оптики и спектроскопии Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: popkov.iv@gmail.com

$$E(r) = (e_x + ie_y) E_0 \exp\left(\frac{r^2}{r_0}\right),$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ . Попадая в оптическое волокно, пучок распадается на вытекающие и направляемые моды. Вытекающие моды не рассматриваются, так как полагаем, что до выходного торца волокна они не дойдут. Поле направляемых мод на входе в оптическое волокно имеет следующий вид:

$$E^+(r, \varphi, z=0) = (e_x + ie_y) \cdot \left\{ e^{-i\varphi} \sum_N C_{-1,N} F_{1,N}(r) + \sum_{m \neq 1} \sum_N C_{-,m,N} e^{-im\varphi} F_{m,N}(r) + \sum_m \sum_N C_{+,m,N} e^{im\varphi} F_{m,N}(r) \right\},$$

где коэффициенты  $C_{-,1,N}$  и  $C_{+,1,N}$  определяют вклад мод  $e_{+,m,N}^+(r, \varphi)$  и  $e_{-,m,N}^+(r, \varphi)$  в световое поле на входе в волокно. Тогда в волокне возбуждаются моды с положительным ( $+m$ ) и отрицательным ( $-m$ ) топологическим зарядом, и поле представляет собой суперпозицию полей с разными орбитальными моментами. На выходе из волокна имеем следующее распределение поля для направляемых мод:

$$\begin{aligned} E^+(r, \varphi, z) = (e_x + ie_y) & \left\{ \sum_{m \neq 1} \sum_N C_{-,m,N} e^{-im\varphi} F_{m,N}(r) \cdot \exp\left[iz\left(\beta_{m,N} + \delta\beta_{m,N}^{(2)}\right)\right] + \right. \\ & + \sum_m \sum_N C_{+,m,N} e^{+im\varphi} F_{m,N}(r) \exp\left[iz\left(\beta_{m,N} + \delta\beta_{m,N}^{(1)}\right)\right] + \\ & \left. + \sum_N C_{-,1,N} e^{-i\varphi} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left[ e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} + 1 \right] \right\} + \\ & + (e_x - ie_y) \left[ e^{i\varphi} \sum_N C_{-,1,N} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left[ e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} - 1 \right] \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta\beta_{m,N}^{(i)}$  – поляризационная поправка к константе распространения моды с индексами  $m$  и  $N$ ,  $F_{m,N}(r)$  – радиальная функция. Аналогичные выражения можно записать и для случая, когда на вход волокна падает излучение со спиновым моментом  $\sigma = -1$ .

Из выражения (1) следует, что на выходе из волокна появляется излучение с противоположным спиновым моментом с  $\sigma = -1$  («чужая» поляризация) [8, 9].

Если на выходе из волокна поставить «циркулярный анализатор», пропускающий циркулярно поляризованное излучение со знаком, противоположным знаку  $\sigma$  на входе в волокно, то через него пройдут только соответствующие моды с  $m = 1$ . Этот анализатор состоит из четвертьволновой пластинки и поляризатора. При помощи пластинки выделяются две ортогональные компоненты циркулярной поляризации, преобразуя их в линейно поляризованные. Поляризатор выделяет поле, описываемое последним членом в уравнении (1).

Поле пучка, прошедшего через «циркулярный анализатор», описывается последним членом в сумме (1):

$$E^{+-}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\varphi} \cdot \left\{ \sum_N C_{-,1,N} F_{1,N}(r) e^{iz\beta_{1,N}} \left[ e^{i2z\delta\beta_{1,N}^{(2)}} - 1 \right] \right\}. \quad (2)$$

Множитель  $e^{i\varphi}$  свидетельствует о присутствии положительного орбитального момента с топологическим зарядом  $+1$ . Аналогичное выражение можно записать и для случая, когда на вход волокна падает излучение со спиновым моментом с  $\sigma = -1$ . Таким образом, в рассматриваемой схеме происходит преобразование спинового момента пучка в единичный орбитальный момент того же знака, то есть, спиновый момент с  $\sigma = +1$  преобразуется в орбитальный с  $m = +1$ , а спиновый момент с  $\sigma = -1$  в орбитальный с  $m = -1$ . Из выражения (1) следует, что эффективность преобразования определяется долей вклада мод с  $m = \pm 1$ , поэтому, чем меньше мод распространяется в оптическом волокне, тем выше эффективность преобразования.

Эффективность преобразования также зависит и от длины волокна. Из выражения (2) легко получить зависимость интенсивности излучения  $I^{+-}$  от длины волокна. В случае такого маломодового оптического волокна, когда  $m = 1$  и  $N = 1$ , эта зависимость носит периодический характер:

$$I^{+-}(r, \varphi) = E^{+-} \cdot (E^{+-})^* = (C_{-1,1} F_{1,1}(r))^2 [1 - \cos(2z \delta\beta_{1,1}^{(2)})]. \quad (3)$$

Максимальное значение интенсивность  $I^{+-}$  приобретает при длинах волокна:

$$Z_n = \frac{\pi(2n-1)}{2\delta\beta_{1,1}^{(2)}},$$

где  $n$  – целое число. Следовательно, можно подбирать длину оптического волокна так, чтобы эффективность преобразования спинового момента в орбитальный была максимальной.

Таким образом, если на вход волокна со ступенчатым профилем показателя преломления подавать циркулярно поляризованное излучение с определенным знаком  $\sigma$ , а на выходе волокна выделять «циркулярным анализатором» циркулярно поляризованное излучение противоположного знака, то прошедшее излучение будет представлять собой световую волну, обладающую единичным орбитальным моментом того же знака, что и  $\sigma$ . Смена знака  $\sigma$  на входе волокна при соответствующем изменении знака «циркулярного анализатора» приводит к смене знака орбитального момента. Наличие орбитального момента подтверждается присутствием спирали на интерференционной картине при сложении полученного пучка с гауссовским пучком. Направление раскручивания спирали зависит от знака орбитального момента.

### Экспериментальное исследование преобразования спинового момента пучка в орбитальный

Для экспериментального преобразования спинового момента лазерного пучка в орбитальный было выбрано оптическое волокно с диаметром сердцевины  $2\rho = 9$  мкм, со ступенчатым профилем показателя преломления  $n(r)$ :

$$n(r) = \begin{cases} n_{co}, r/\rho < 1 \\ n_{cl}, r/\rho > 1 \end{cases}$$

где  $r = |r|$ ,  $(x, y) = r$  – поперечные координаты,  $\rho$  – радиус сердцевины,  $n_{co}$  и  $n_{cl}$  – показатели преломления сердцевины и оболочки. Длина волокна составляла 259 мм. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.

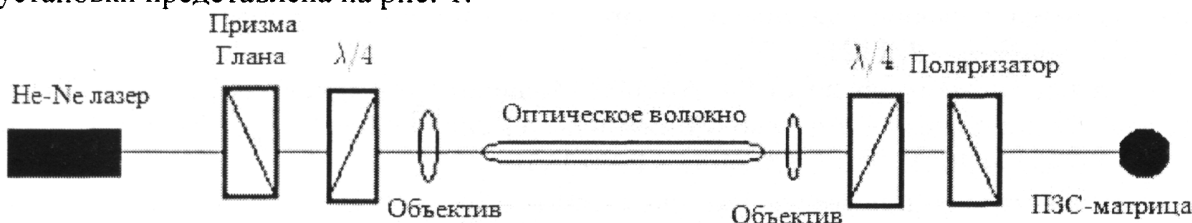


Рис.1. Оптическая схема экспериментальной установки

Излучение He-Ne лазера с длиной волны  $\lambda = 632$  нм, пройдя через призму Глана, попадало на пластинку  $\lambda/4$ , при помощи которой формировалось циркулярно поляризованное излучение. Затем излучение фокусировалось объективом на входной торец оптического волокна. Вышедшее из волокна излучение коллимировалось объективом и проходило через пластинку  $\lambda/4$ , а затем через поляризатор, преобразуясь в линейно поляризованное. Изображение наблюдалось при помощи ПЗС-матрицы. Пластинка  $\lambda/4$  и поляризатор вместе образуют «циркулярный анализатор», при помощи которого выделялось излучение с нулевым спиновым и единичным орбитальным моментом.

На рис. 2 представлено экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности в поперечном сечении

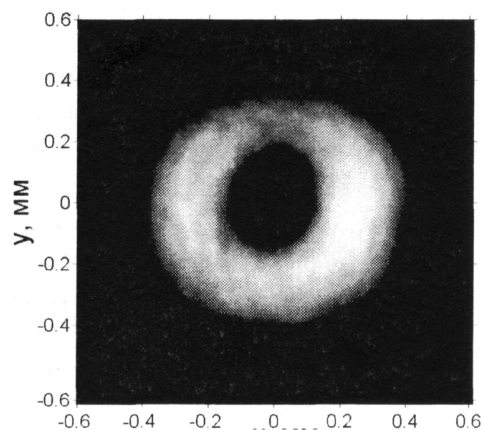


Рис. 2. Распределение интенсивности в поперечном сечении пучка, прошедшего через оптическую схему, представленную на рис. 1

пучка после прохождения «циркулярного анализатора». Как видно из рис. 2, распределение интенсивности имеет вид однородного кольца, что соответствует выражению (3).

Для проверки наличия орбитального момента регистрировалась интерференционная картина исследуемого пучка и пучка Гаусса. Как указывалось выше, интерференционная картина двух пучков должна представлять собой спираль, направление раскручивания которой определяется знаком топологического заряда. В случае, если  $m = +1$ , спираль раскручивается по часовой стрелке, а если  $m = -1$ , то наоборот – против часовой. На рис. 3 представлено распределение интенсивности в интерференционной картине для случая, когда на вход волокна падает циркулярно поляризованное излучение со спиновым моментом  $\sigma = +1$ .

На рис. 3 отчетливо видна спираль, направление раскручивания которой (по часовой стрелке) свидетельствует о том, что исследуемый пучок имеет орбитальный момент  $m = +1$ .

Таким образом, на основе анализа распространения циркулярно поляризованного излучения в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления продемонстрирована возможность преобразования спинового момента пучка с  $\sigma \pm 1$  в орбитальный момент пучка с  $m \pm 1$ .

Показано, что эффективность преобразования выше для маломодовых волокон. В зависимости от длины волокна эффективность может изменяться от 0 до некоторой максимальной величины, значение которой определяется количеством мод, распространяющихся в волокне и условиями ввода излучения в волокно.

Возможность преобразования спинового момента пучка с  $\sigma \pm 1$  в орбитальный момент пучка с  $m \pm 1$  доказана экспериментально.

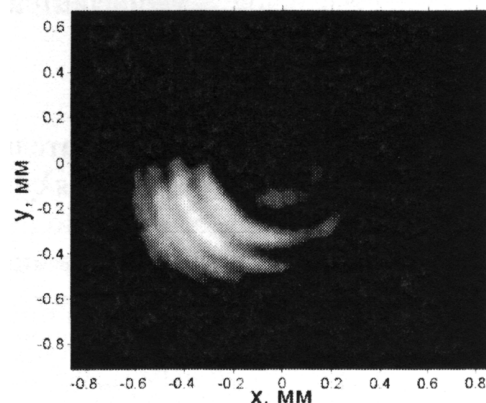


Рис. 3. Распределение интенсивности в интерференционной картине полученного пучка с пучком Гаусса

### Литература

1. DiVincenzo, D.P. Quantum computation / D.P. DiVincenzo // *Science*. – 1995. – Vol. 270, № 5234. – P. 255–261.
2. Kilin, S.Ya. Quantum information / S.Ya. Kilin // *Physics – Uspekhi*. – 1999. – Vol. 42, № 5. – P. 435–452.
3. Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels / D. Boschi, S. Branca, F. De Martini *et al.* // *Physical Review Letters*. – 1998. – Vol. 80, № 6. – P. 1121–1125.
4. Molina-Terriza, G. Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum / G. Molina-Terriza, J.P. Torres, L. Torner // *Physical Review Letters*. – 2001. – Vol. 88, № 1. – P. 013601.
5. Spin-to-orbital momentum conversion via electro-optic Pockels effect in crystals / I. Skab, Yu. Vasyukiv, I. Smaga, R. Vlokh // *Physical Review A*. – 2011. – Vol. 84, № 4. – P. 043815.
6. Brasselet, E. Electrically controlled topological defects in liquid crystals as tunable spin-orbit encoders for photons / E. Brasselet, C. Loussert // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36, № 5. – P. 719–721.
7. Quantum interference by coherence transfer from spin to orbital angular momentum of photons / E. Nagali, F. Sciarrino, L. Sansoni *et al.* // *SPIE Proceedings-Quantum Cryptography and Quantum Information Processing*. – 2009. – Vol. 7355. – P. 735507
8. Формирование единичной дислокации волнового фронта / М.Я. Даршт, Б.Я. Зельдович, И.В. Катавская, Н.Д. Кундикова // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1995. – Т. 107, № 5. – С. 1464–1472.
9. Снайдер, А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Д. Лав. – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.



## TRANSFORMATION OF THE SPIN MOMENT INTO ORBITAL MOMENT IN LASER BEAM

M.V. Bolshakov<sup>1</sup>, A.V. Guseva<sup>2</sup>, N.D. Kundikova<sup>3</sup>, I.I. Popkov<sup>4</sup>

The process of distribution of circularly polarized radiation in small-mode optical fiber is studied in this paper. It was experimentally proven that the transformation of spin moment of  $\pm 1$  beam into orbital moment with topological charge  $\pm 1$ .

*Keywords: spin moment, orbital moment, optical fiber, topological charge.*

### References

1. DiVincenzo D.P. Quantum computation. *Science*. 1995. Vol. 270, no. 5234. pp. 255–261.
2. Kilin S.Ya. Quantum information. *Physics – Uspekhi*. 1999. Vol. 42, no. 5. pp. 435–452.
3. Boschi D., Branca S., De Martini F., Hardy L., Popescu S. Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80, no. 6. pp. 1121–1125.
4. Molina-Terriza G., Torres J.P., Torner L. Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 88, no. 1. p. 013601.
5. Skab I., Vasyukiv Yu., Smaga I., Vlokh R. Spin-to-orbital momentum conversion via electro-optic Pockels effect in crystals. *Physical Review A*. 2011. Vol. 84, no. 4. p. 043815.
6. Brasselet E., Loussert C. Electrically controlled topological defects in liquid crystals as tunable spin-orbit encoders for photons. *Optics Letters*. 2011. Vol. 36, no. 5. p. 719–721.
7. Nagali E., Sciarrino F., Sansoni L., De Martini F., Marrucci L., Piccirillo B., Karimi E., Santamato E. Quantum interference by coherence transfer from spin to orbital angular momentum of photons. *SPIE Proceedings-Quantum Cryptography and Quantum Information Processing*. 2009. Vol. 7355. p. 735507.
8. Darsht M.Ya., Zel'dovich B.Ya., Kataevskaya I.V., Kundikova N.D. Formation of an isolated wavefront dislocation. *JETP*. Vol. 80, no. 5. p. 817.
9. Snyder A., Lav D. *Teoriya opticheskikh volnovodov* (Theory of optical waveguide). Moscow: Radio i svyaz', 1987. 656 p. (in Russ.). [Snyder A.W., Love J.D. *Optical Waveguide Theory*. Springer, 1983. 734 p.]

*Поступила в редакцию 21 июня 2013 г.*

<sup>1</sup> Bolshakov Maxim Vyacheslavovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), associate professor, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail: bolshakovmv@susu.ac.ru

<sup>2</sup> Guseva Anna Valentinovna is Undergraduate Student, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail: avrora-org@bk.ru

<sup>3</sup> Kundikova Nataliya Dmitrievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Dean of Physics Faculty, Joint Nonlinear Optics Laboratory of IEF RAS, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail: knd@susu.ac.ru

<sup>4</sup> Popkov Ivan Igorevich is Assistant, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail: popkov\_iv@gmail.com

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДОВОГО СОСТАВА ИЗЛУЧЕНИЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В МНОГОМОДОВОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ

*М.В. Большаков<sup>1</sup>, М.А. Комарова<sup>2</sup>, Н.Д. Кундикова<sup>3</sup>*

Предлагается метод определения модового состава излучения, распространяющегося в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления, в основе которого лежит разложение комплексного светового поля по неортогональным модам. Расчет комплексных коэффициентов мод излучения оптического волокна проведен для экспериментальных данных.

*Ключевые слова:* оптическое волокно, моды оптического волокна.

Использование многомодовых волокон в оптических линиях передачи (по сравнению с маломодовыми волокнами) имеют большие преимущества, так как позволяют передавать большой объем информации, кроме того, распространение в волокне нескольких мод делает возможным параллельную передачу данных. Особенно перспективно использование многомодовых волокон для пространственного модового мультиплексирования [1], параллельной передачи данных [2] и передачи изображения через волокно [3]. Важнейшим вопросом при разработке и исследовании многомодовых систем связи является разложение излучения, распространяющегося в оптическом волокне, по модам. Существуют множество методов определения модового состава излучения оптического волокна (например, [4–6]), но до настоящего момента нет метода экспериментального анализа модового состава излучения многомодовых волокон с произвольными параметрами.

В данной работе предлагается метод определения модового состава излучения, распространяющегося в оптическом волокне, в основе которого лежит разложение комплексного светового поля по неортогональным модам. Рассмотрим распространение света в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления. В приближении слабонаправляющего волновода можно записать четыре поляризационные моды в поперечном сечении на длине  $z$  для любого значения орбитального момента  $m$  ( $m \geq 0$ ) и радиального квантового числа  $N$  [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m,N}^{(1)}(x, y, z) &= [\cos(m\varphi)\mathbf{e}_x - \sin(m\varphi)\mathbf{e}_y] \cdot F_{m,N}(x, y) \cdot e^{i z \beta_{m,N}^1}, \\ \mathbf{M}_{m,N}^{(2)}(x, y, z) &= [\cos(m\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(m\varphi)\mathbf{e}_y] \cdot F_{m,N}(x, y) \cdot e^{i z \beta_{m,N}^2}, \\ \mathbf{M}_{m,N}^{(3)}(x, y, z) &= [\sin(m\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(m\varphi)\mathbf{e}_y] \cdot F_{m,N}(x, y) \cdot e^{i z \beta_{m,N}^3}, \\ \mathbf{M}_{m,N}^{(4)}(x, y, z) &= [\sin(m\varphi)\mathbf{e}_x - \cos(m\varphi)\mathbf{e}_y] \cdot F_{m,N}(x, y) \cdot e^{i z \beta_{m,N}^4}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  – собственные вектора,  $\varphi = \arctg(x/y)$ ,  $F_{m,N}(x, y)$  – функции Бесселя,  $\beta_{m,N}^k$  – постоянные распространения, определяющие скорость распространения мод.

Разложение произвольной функции по системе неортогональных функций является классической задачей функционального анализа [8]. Разложим электрическую составляющую светового поля  $\mathbf{E}(x, y)$ , распространяющегося в оптическом волокне, представив в виде суперпозиции поляризационных мод  $\mathbf{M}_{m,N}^k(x, y)$ :

$$\mathbf{E}(x, y) = \sum_{k=1}^4 \sum_m \sum_N C_{m,N}^k \mathbf{M}_{m,N}^k(x, y) \quad (2)$$

<sup>1</sup> Большаков Максим Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет

<sup>2</sup> Комарова Марианна Алексеевна – аспирант, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: marianna@mail.ru

<sup>3</sup> Кундикова Наталия Дмитриевна – доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета, отдел нелинейной оптики Института электрофизики РАН, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: knd@susu.ac.ru

где постоянные  $C_{m,N}^k$  – комплексные коэффициенты при различных поляризационных модах. Для удобства перейдем к сквозной нумерации мод: вместо индексов  $k, m, N$  введем индекс  $i = 0 \dots (L-1)$ , где  $(L-1)$  – полное количество мод, распространяющихся в оптическом волокне. Перепишем выражение (2):

$$\mathbf{E}(x, y) = \sum_i C_i \mathbf{M}_i(x, y), \quad (3)$$

постоянные  $C_i$  называются коэффициентами разложения функции светового поля  $\mathbf{E}(x, y)$  в базисе функций  $\{\mathbf{M}_i(x, y)\}$ . Базис  $\{\mathbf{M}_i(x, y)\}$  не удовлетворяет условию ортогональности

$$(\mathbf{M}_i(x, y), \mathbf{M}_j(x, y)) \neq 0 \text{ при } i \neq j;$$

где функционал скалярного произведения определяется выражением

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \iint \mathbf{a}(x, y) \mathbf{b}(x, y) dx dy.$$

Распределение поля каждой моды  $\mathbf{M}_i(x, y)$  определяется из выражений (1). Суммарное световое поле  $\mathbf{E}(x, y)$  известно из эксперимента. Таким образом, коэффициенты разложения  $C_i$  по неортогональной системе функций определяются системой линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{L-1} C_i (\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j) = (\mathbf{E}, \mathbf{M}_j), \quad j = 0, \dots, (L-1). \quad (4)$$

Такая система получается в результате скалярного умножения (3) на систему базисных функций  $\{\mathbf{M}_i(x, y)\}$ . Матрица системы (4) состоит из попарных скалярных произведений базисных функций. Решая полученную систему, можно получить коэффициенты  $C_i$ . Для расчета комплексных коэффициентов  $c_i$  была написана программа в пакете MATLAB. Для апробации модели определения модового состава излучения сначала была проведена серия расчетов с теоретически заданным распределением поля. Генерировался случайно заданный модовый состав излучения  $C_i$  на входе в волокно, рассчитывалось распределение поля на выходе из волокна  $\mathbf{E}(x, y)$ . Распределение поля каждой моды  $\mathbf{M}_i$  (1) определяется параметрами волокна и длиной волны света. Составлялась система линейных уравнений (4), решением которой были комплексные коэффициенты  $C_i = C_a^\pm \exp(iC_\varphi^\pm)$ , здесь  $C_a^\pm$  – амплитудные коэффициенты,  $C_\varphi^\pm$  – фазовые коэффициенты. Проверка осуществлялась сравнением рассчитанных комплексных коэффициентов  $C_i$  с генерированными изначально. Тестовые расчеты проведены для волокна со следующими параметрами: показатель преломления сердцевины  $n_{co} = 1,47$ , числовая апертура  $N_a = 0,11$ , радиус сердцевины волокна  $r = 6$  мкм, длина волокна  $z = 20$  см, длина волны света  $\lambda = 0,633$  мкм. В оптическом волокне с данными параметрами для данной длины волны света распространяются семь поляризационных мод  $\mathbf{M}_i(x, y)$ .

В результате тестирования обнаружено, что для  $m > 0$  погрешность определения коэффициентов составляет 0,001 %, однако для  $m = 0$  коэффициенты отличались от заданных. Данные результаты можно объяснить тем, что для  $m = 0$  распределение поля  $\mathbf{M}_{0,N}^k$  является аксиально симметричным и находятся несколько наборов модовых коэффициентов, удовлетворяющих условию. Таким образом, модовые коэффициенты для  $m = 0$  являются вырожденными. Полученные распределения интенсивностей с рассчитанными коэффициентами полностью идентичны распределениям интенсивности с заданными коэффициентами, среднеквадратичное отклонение распределений интенсивности порядка  $10^{-12}$ . Таким образом, была решена задача определения модового состава излучения по теоретическому распределению поля на выходе из волокна. Погрешность метода составила 0,001 %.

В эксперименте информацию о комплексном световом поле, распространяющемся в оптическом волокне, невозможно получить прямыми из-



Рис. 1. Оптическая схема экспериментальной установки

мерениями. Данная информация может быть получена с помощью алгоритма Гершберга–Сэкстона [9], который позволяет восстанавливать поле по двум распределениям интенсивностей в ближнем и дальнем полях. Для получения информации о комплексном световом поле регистрировалось распределение интенсивности на выходе из волокна в ближней и дальней зоне. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.

Излучение He-Ne лазера с длиной волны  $\lambda = 0,633$  мкм, ослабленное фильтром, проходило через экран с диафрагмой и фокусировалось на торце оптического волокна тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием  $f = 2$  см. Для экспериментальных исследований использовалось оптическое волокно с диаметром сердцевины 9 мкм и длиной 50 см. После прохождения через волокно свет попадал на активный элемент ПЗС камеры с размером чувствительной области 5,2x3,9 мм. Таким образом, регистрировалось распределение интенсивности в дальнем поле. Для получения распределения интенсивности в ближнем поле между выходным торцом волокна и активным элементом ПЗС камеры устанавливался 40-кратный объектив с числовой апертурой 0,65. Зарегистрированные распределения интенсивности на выходе из волокна в ближнем и дальнем полях представлены на рис. 2.

Распределения интенсивности в ближнем и дальнем поле использовались для восстановления фазы комплексного светового поля в ближней зоне, т.е. на торце волокна, на основе алгоритма Гершберга–Сэкстона. Моделирование осуществлялось в пакете MATLAB с использованием итерационной процедуры с быстрым преобразованием Фурье, восстановленное фазовое распределение представлено на рис. 3, б. Погрешность метода составила  $6,7 \cdot 10^{-15}$ , погрешность рассчитывалась как среднеквадратичное отклонение между текущим амплитудным распределением и исходным экспериментальным распределением дальнего поля на конечной итерации.

Таким способом была получена информация о комплексном световом поле на выходном торце волокна. Задача определения модового состава излучения решалась разложением комплексного светового поля, распространяющегося в оптическом волокне, на выходном торце волокна по неортогональным модам. В целом экспериментальный метод определения модового состава излучения отличается от теоретического метода только тем, что в теоретическом методе известны заданные коэффициенты, с которыми впоследствии осуществляется сравнение. Для определения модового состава излучения по экспериментальному распределению поля на выходном торце волокна распределение поля раскладывалось по неортогональным модам и составлялась система линейных уравнений (4). В оптическом волокне с данными параметрами и длиной волны света распространяются четыре поляризационные моды  $\mathbf{M}_i$ . Решение системы линейных уравнений (4) позволило получить комплексные коэффициенты  $C_i$  при модах  $\mathbf{M}_i$  (см. таблицу).

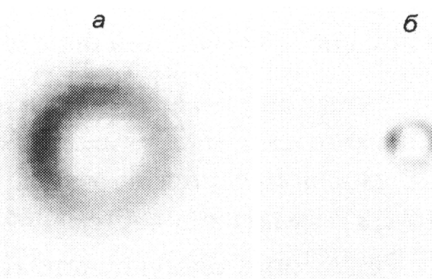


Рис. 2. Распределения интенсивностей в ближнем (а) и дальнем (б) полях

Амплитудные коэффициенты  $C_a^+$ ,  $C_a^-$  и фазовые коэффициенты  $C_\varphi^+$ ,  $C_\varphi^-$  для каждой из пар  $m, N$

| $m$ | $N$ | $C_a^+$ | $C_\varphi^+$ | $C_a^-$ | $C_\varphi^-$ |
|-----|-----|---------|---------------|---------|---------------|
| 0   | 1   | 0,0174  | -2,7155       | 0,0174  | 2,3159        |
| 0   | 2   | 0,0096  | -1,9498       | 0,0096  | 1,5688        |
| 1   | 1   | 0,8848  | -0,4625       | 1,0000  | -0,1677       |
| 2   | 1   | 0,0200  | 0,5680        | 0,0622  | 0,2955        |

Экспериментально измеренное и рассчитанное с вычисленными коэффициентами распределения интенсивности на выходном торце волокна представлены на рис. 3. Из рис. 3 видно, что наблюдается хорошее соответствие между экспериментально зарегистрированным и рассчитанным распределением интенсивности.

Таким образом, предложен и реализован метод, позволяющий определить модовый состав излучения, распространяющегося в многомодовом оптическом волокне, по известному распреде-

лению поля на выходном торце волокна. Получено хорошее соответствие между экспериментально зарегистрированными и рассчитанными распределениями интенсивности и фазы.

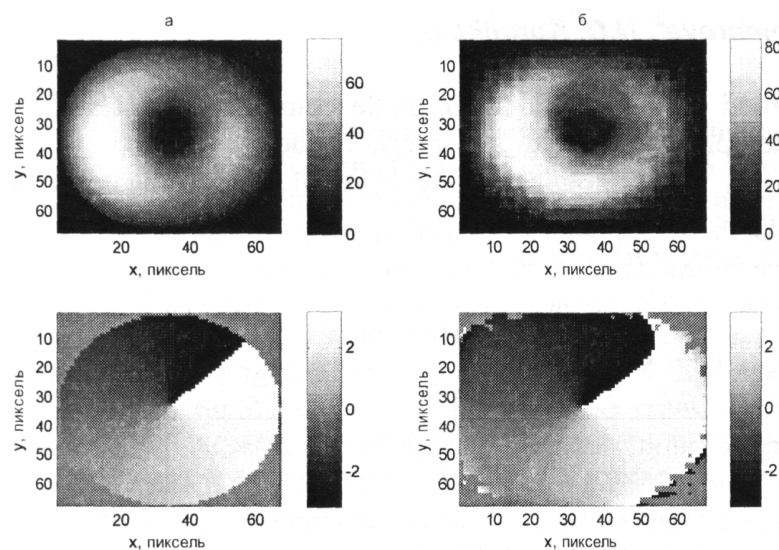


Рис. 3. Распределения интенсивности и фазы: рассчитанное с вычисленными коэффициентами (а), экспериментально измеренное (б)

### Литература

1. Saffman, M. Mode multiplexing and holographic demultiplexing communication channels on a multimode fiber / M. Saffman, D.Z. Anderson // *Optics Letters*. – 1991. – Vol. 16, № 5. – P. 300–302.
2. Stuart, H.R. Dispersive multiplexing in multimode optical fiber / H.R Stuart // *Science*. – 2000. – Vol. 289, № 5477. – P. 281–283.
3. Tai, A.M. Transmission of two-dimensional images through a single fiber by wavelength-time encoding / A.M. Tai, A.A. Friesem // *Optics Letters*. – 1983. – Vol. 8, № 1. – P. 57–59.
4. Complete modal decomposition for optical fibers using CGH-based correlation filters / T. Kaiser, D. Flamm, S. Schroter, M. Duparre // *Optics Express*. – 2009. – Vol. 17, № 11. – P. 9347–9356.
5. Complete modal decomposition for optical waveguides / O. Shapira, A.F. Abouraddy, J.D. Joannopoulos, Y. Fink // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol. 94, № 14. – P. 143902.
6. Большаков, М.В. Определение модового состава излучения, распространяющегося в многомодовом оптическом волокне / М.В. Большаков, М.А. Комарова, Н.Д. Кундикова // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 138-141.
7. Bolshakov, M. Optical effects connected with coherent polarized light propagation through a step-index fiber / M. Bolshakov, A. Ershov, N. Kundikova // *Fiber Optic Sensors: сб. науч. тр.* – In-Tech, 2012. – P. 249–274.
8. Курант, Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. – Т. 1. – 476 с.
9. Fienup, J.R. Phase retrieval algorithms: comparison / J.R. Fienup // *Applied Optics*. – 1982. – Vol. 21, № 15. – P. 2758–2769.

### EXPERIMENTAL DETERMINATION OF MULTIMODE OPTICAL FIBER RADIATION MODE COMPOSITION

M.V. Bolshakov<sup>1</sup>, M.A. Komarova<sup>2</sup>, N.D. Kundikova<sup>3</sup>

We proposed the method of the optical fiber mode composition determination of the radiation propagating in a multimode optical fiber with a stepwise refractive index profile. The method is based on the field decomposition by non-orthogonal modes. Complex coefficients of optical fiber radiation modes were calculated for experimental data.

*Keywords: optical fiber, optical fiber modes.*

#### References

1. Saffman M., Anderson D.Z. Mode multiplexing and holographic demultiplexing communication channels on a multimode fiber. *Optics Letters*. 1991. Vol. 16, no. 5. pp. 300–302.
2. Stuart H.R. Dispersive multiplexing in multimode optical fiber. *Science*. 2000. Vol. 289, no. 5477. pp. 281–283.
3. Tai A.M., Friesem A.A. Transmission of two-dimensional images through a single fiber by wavelength-time encoding. *Optics Letters*. 1983. Vol. 8, no. 1. pp. 57–59.
4. Kaiser T., Flamm D., Schroter S., Duparre M. Complete modal decomposition for optical fibers using CGH-based correlation filters. *Optics Express*. 2009. Vol. 17, no. 11. pp. 9347–9356.
5. Shapira O., Abouraddy A.F., Joannopoulos J.D., Fink Y. Complete modal decomposition for optical waveguides. *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94, no. 14. p. 143902.
6. Bolshakov M.V., Komarova M.A., Kundikova N.D. Opređenje modovogo sastava izluchenia, rasprostraniashegosia v malomodovom opticheskom volokne (Determination of the mode composition propagating in a few-mode optical fiber). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2012. Issue. 7. no. 34(293). pp. 138–141. (in Russ.).
7. Bolshakov M., Ershov A., Kundikova N. Optical effects connected with coherent polarized light propagation through a step-index fiber. In book: *Fiber Optic Sensors*. InTech, 2012. pp. 249–274.
8. Kurant R., Gil'bert D. *Metody matematicheskoy fiziki* (Methods of Mathematical Physics). Moscow, Leningrad: GITTL, 1951. Vol. 1. 476 p. (in Russ.).
9. Fienup J.R. Phase retrieval algorithms: comparison. *Applied Optics*. 1982. Vol. 21, no. 15. pp. 2758–2769.

*Поступила в редакцию 19 июня 2013 г.*

<sup>1</sup> Bolshakov Maxim Vyacheslavovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University.

<sup>2</sup> Komarova Marianna Alekseevna is Post-graduate student, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

<sup>3</sup> Kundikova Nataliya Dmitrievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Dean of Physics Faculty, Joint Nonlinear Optics Laboratory of IEF RAS, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University.

E-mail: knd@susu.ac.ru

# ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА МИКРОТВЕРДОСТЬ КВАРЦЕВЫХ СТЕКОЛ МАРКИ КУ-1

А.Н. Брызгалов<sup>1</sup>, П.В. Волков<sup>2</sup>

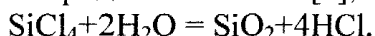
Исследовано влияние термической обработки на микротвердость кварцевых стекол марки КУ-1. Установлено, что в результате термической обработки при 1100 °С происходит увеличение микротвердости и повышается однородность. Данный факт объясняется изменением фазового состава поверхности – появлением рефлексов, относящихся к фазе кристобалита.

*Ключевые слова:* кварцевое стекло КУ-1, микротвердость, термическая обработка, рентгенофазовый анализ, кристобалит.

## Введение

Известно, что кварцевое стекло обладает комплексом уникальных физико-химических свойств и широко применяется в таких отраслях, как светотехника, радиоэлектроника, химическое производство, авиационная, космическая техника и многих других. В настоящее время к характеристикам кварцевых стекол, применяемых для изготовления различных устройств прецизионного приборостроения, предъявляются все более жесткие требования, и одной из основных проблем является повышение прочностных характеристик и улучшение качественных показателей материала [1]. В процессе производства подобных устройств стекло подвергают термической обработке для повышения однородности и снятия внутренних напряжений, возникающих как в процессе стеклования, так и при механической обработке.

Стекло марки КУ-1 в промышленных масштабах синтезируют высокотемпературным гидролизом летучего SiCl<sub>4</sub> в водородно-кислородном пламени [2], получая при 1710 °С расплав:



Такие стекла характеризуются большим (~0,5 мол. %) содержанием гидроксильных групп ОН, ухудшающих как оптические, так и механические свойства [3, 4]. При механической обработке из-за неоднородности, «рыхлости» стекла происходит скалывание и растрескивание обрабатываемой поверхности.

Целью данной работы является изучение влияния термической обработки на микротвердость кварцевого стекла для повышения прочности материала, необходимой при механической обработке.

## Методика эксперимента

Образцы для исследования изготавливались в виде плоскопараллельных пластин размером 40×30×3 мм и порошка, растертого в агатовой ступке до размеров зерна 0,1 мкм.

Термическая обработка проводилась при трех различных температурах: 900 °С, 1000 °С и 1100 °С с изотермической выдержкой 5 ч. Для измерения и регулирования температуры применяли высокоточный регулятор температуры с погрешностью измерения и регулирования ±1 °С.

Измерения микротвердости проводились по стандартной методике ГОСТ 9450-76 на микротвердомере ПМТ-3 с четырехгранной пирамидой Виккерса. Количество измерений для каждого образца составляло не менее 90 раз. Относительная погрешность измерения не превышала 10 %.

Исследование фазового состава проводилось на рентгеновском дифрактометре ДРОН-3М с Co K $\alpha$ -излучением. Съемка осуществлялась в угловом интервале 18°–48° со скоростью 1 град/мин в непрерывном режиме. Перед съемкой образцы вновь растирали в агатовой ступке, так как в результате термической обработки происходило их спекание.

При обработке полученных рентгенограмм применялась программа автоматизированного комплекса «Difwin». Расчет и индексирование рентгенограмм проводили, используя стандартную электронную базу данных порошковой дифрактометрии ICSD.

<sup>1</sup> Брызгалов Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Челябинский Государственный Педагогический Университет

E-mail: bryzgalovan@csru.ru

<sup>2</sup> Волков Петр Вячеславович – аспирант, кафедра общей и теоретической физики, Челябинский Государственный Педагогический Университет

E-mail: peter-007@mail.ru

## Результаты эксперимента и его обсуждение

В таблице представлены результаты изменения микротвердости образцов, обработанных при различных температурах. Измерения проводились от края пластины к центру с интервалом 100 мкм. Исследуемая область составила 9 мм. На рис. 1 представлены зависимости изменений микротвердости по поверхности исследуемых образцов.

Микротвердость образцов, обработанных при различных температурах

| Образец     | $T, ^\circ\text{C}$ | $H, \text{кГс/мм}^2$ |
|-------------|---------------------|----------------------|
| №1          | 900                 | $1017 \pm 95$        |
| №2          | 1000                | $1028 \pm 99$        |
| №3          | 1100                | $1043 \pm 83$        |
| №4 исходный | —                   | $1008 \pm 81$        |

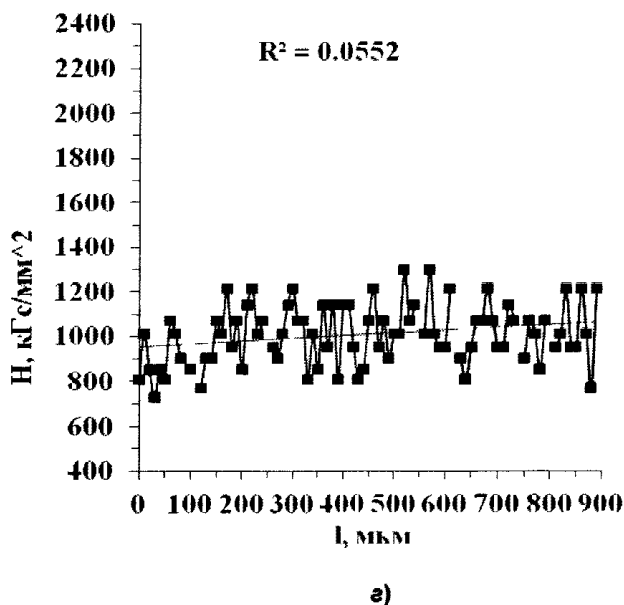
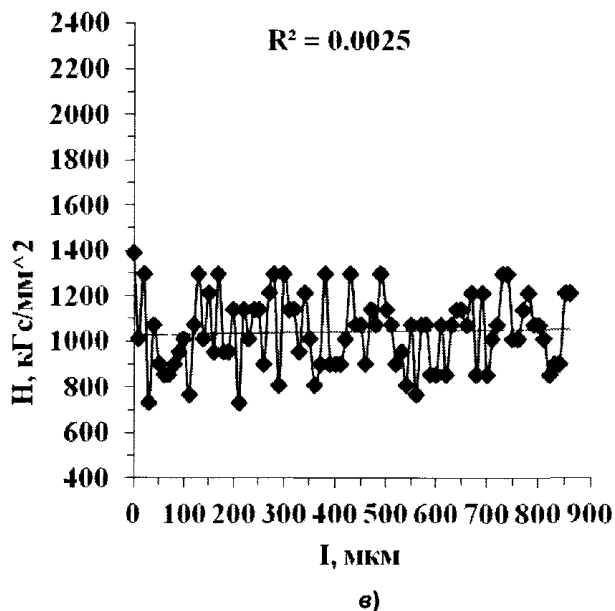
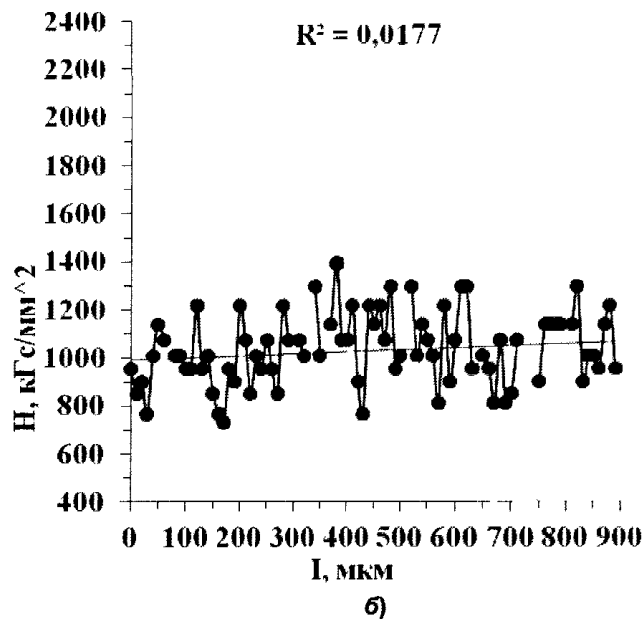
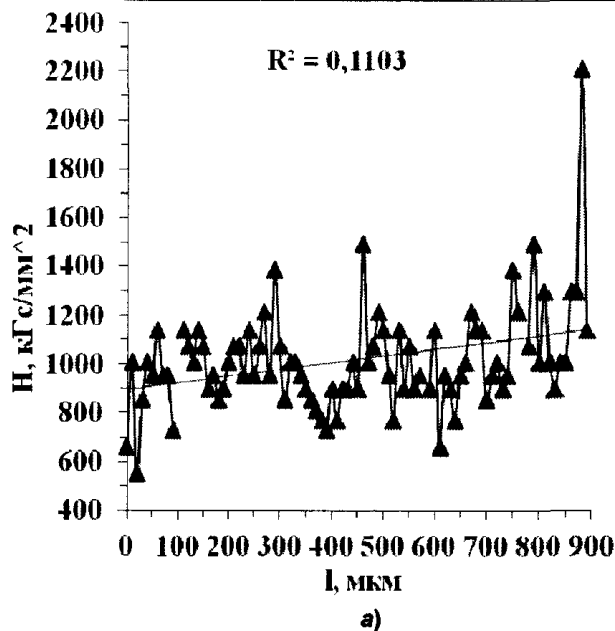


Рис. 1. Распределения микротвердости образцов, обработанных при температурах а) 900 °С, б) 1000 °С, в) 1100 °С, г) исходный

Значение квадрата смешанной корреляции для каждого образца рассчитывалось по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (H_i - \bar{H})^2}{\sum H_i^2 - \frac{H_i^2}{n}}$$



где  $H_i$  – микротвердость,  $\bar{H}_i$  – среднее значение микротвердости,  $n$  – количество итераций.

Данный параметр позволяет судить о степени рыхлости поверхности и его механических свойствах. Для образца, обработанного при температуре 900 °С (рис. 2, а), наблюдаем достаточно большое отклонение  $R^2 = 0,1103$  от средней линии, что является признаком высокой рыхлости поверхности. При термической обработке образца 1000 °С (рис. 1, б) и исходного образца (рис. 1, в) отклонение составило  $R^2 = 0,0177$  и  $R^2 = 0,0552$  соответственно. Для образца, обработанного при 1100 °С, значение отклонения составило  $R^2 = 0,0025$  (рис. 1, в).

При увеличении температуры отжига повышается микротвердость и уменьшается значение квадрата смешанной корреляции. Отсюда следует, что с увеличением температуры отжига поверхность образцов становится более однородной.

Для выяснения причины повышения микротвердости был проведен рентгенофазовый анализ [5]. На рис. 2 представлен график сравнения полученных рентгенограмм. Образец на рис. 2, в не подвергался термической обработке и являлся исходным. На рентгенограммах рис. 2, б, в, г наблюдается один рефлекс, характеризующийся межплоскостным расстоянием  $d = 3,34 \text{ \AA}$ . Отметим, что с увеличением температуры интенсивность данного рефлекса возрастает. Для образца, отожженного при 1100 °С (рис. 2, а), наблюдается дополнительный рефлекс, принадлежащий одной из модификаций  $\text{SiO}_2$  – кристобалиту. Кристаллизация поверхности происходит за счет разрыва силанольных групп  $\equiv\text{Si}-\text{O}-\text{H}$  [6], образовавшихся преимущественно во время выплавки кварцевого стекла. Поверхностный атом Si, имеющий одну разорванную связь, стремится к законченной тетраэдрической конфигурации, которая под воздействием температуры замыкается в силоксановый мостик  $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$ .

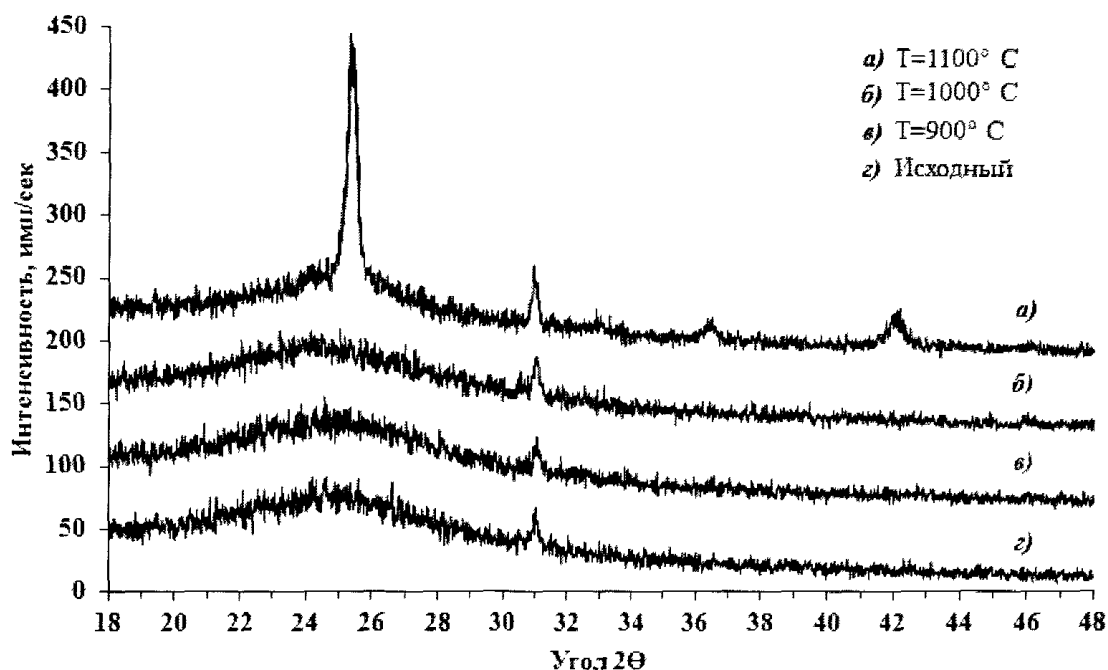


Рис. 2. График сравнения рентгенограмм исходного и термообработанных образцов

Отметим, что появление рефлекса относящегося к фазе кристобалита ярко выражено на образцах, приготовленных в виде порошка, в то время как на пластинах этот эффект проявляется слабо. Это связано с увеличением поверхности образцов при их измельчении. Данный факт свидетельствует о том, что процесс кристаллизации происходит преимущественно на поверхности.

## Выводы

В работе исследовано влияние термической обработки на микротвердость стекла марки КУ-1. Установлено, что в результате отжига при температуре 1100 °С на поверхности происходит изменение фазового состава. В результате данного процесса увеличивается микротвердость и повышается однородность поверхности. Термическая обработка при 1100 °С может служить способом улучшения механических характеристик кварцевого стекла – увеличения его твердости и однородности, необходимого для качественной обработки изделий.

## Литература

1. Brückner, R. Silicon Dioxide / R. Brückner // Encyclopedia of Applied Physics. – 1997. – Vol. 18. – P. 95–131
2. Лeko, В.К. Свойства кварцевого стекла / В.К. Лeko, О.В. Мазурин. – М.: Наука, 1985. – 168 с.
3. Хоник, В.А. Стекла: структура и структурные превращения / В.А. Хоник // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7, № 3. – С. 95–102.
4. Лунин, Б.С. Дегидрокселирование и образование дефектов поверхности кварцевого стекла КУ-1 при отжиге / Б.С. Лунин, А.Н. Харланов, С.Е. Козлов // Вестник Московского университета. Серия 2 «Химия». – 2010. – Т. 51, № 1. – С. 43–47.
5. Миркин, Л.И. Рентгеноструктурный анализ. Справочное пособие / Л.И. Миркин. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
6. Состояние силанольного покрытия мезоструктурированного силикатного материала МСМ-41 в результате постсинтетической активации / С.А. Козлова, В.А. Парфенов, Л.С. Тарасова, С.Д. Кирик // Журнал Сибирского Федерального университета. Серия «Химия». – 2008. – № 4. – С. 376–388.

## INFLUENCE OF HEAT-TREATING ON MICROHARDNESS OF SILICA GLASS KY-1

*A.N. Bryzgalov<sup>1</sup>, P.V. Volkov<sup>2</sup>*

The influence of heat-treating on the microhardness of the silica glass KY-1 is investigated. It is found out that the heat-treatment at 1100 °C increase in microhardness and the uniformity improves. This fact is explained by the change of the phase composition of the surface, namely by the appearance of reflexes, related to the phase of cristobalite.

*Keywords: silica glass KY-1, microhardness, heat-treatment, X-ray analysis, cristobalite.*

### References

1. Brückner R. Silicon Dioxide. *Encyclopedia of Applied Physics*. 1997. Vol. 18. pp. 95–131.
2. Leko V.K., Mazurin O.V. *Svoystva kvartseвого стекла* (Properties of silica glass). Moscow: Nauka, 1985. 168 p. (in Russ.).
3. Khonik V.A. *Sorosovskiy obrazovatel'nyy zhurnal*. 2001. Vol. 7, no. 3. pp. 95–102. (in Russ.).
4. Lunin B.S., Kharlanov A.N., Kozlov S.E. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 2 «Khimiya»*. 2010. Vol. 51, no. 1. pp. 43–47. (in Russ.).
5. Mirkin L.I. *Rentgenostrukturnyy analiz. Spravochnoe posobie*. (X-ray structural analysis. Study guide). Moscow: Nauka, 1976. 328 p. (in Russ.).
6. Kozlova S.A., Parfenov V.A., Tarasova L.S., Kirik S.D. *Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo universiteta. Seriya «Khimiya»*. 2008. no. 4. p. 376–388. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 11 июня 2013 г.*

<sup>1</sup> Bryzgalov Aleksandr Nikolaevich is Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, Chelyabinsk State Pedagogical University.

E-mail: brizgalovan@cspu.ru

<sup>2</sup> Volkov Petr Vyacheslavovich is Post-Graduate Student, General and Theoretical Physics Department, Chelyabinsk State Pedagogical University

E-mail: peter-007@mail.ru

# ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ОДНОМЕРНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА<sup>1</sup>

А.М. Герасимов<sup>2</sup>, Н.Д. Кундикова<sup>3</sup>, Ю.В. Микляев<sup>4</sup>,  
Д.Г. Пихуля<sup>5</sup>, М.В. Терпугов<sup>6</sup>

Проведено исследование генерации второй гармоники в одномерном фотонном кристалле. Выполнен расчет записи  $\chi^{(2)}$ -решетки в периодической системе «воздух-стекло» с последующей генерацией второй гармоники в такой структуре. Рассчитан эффективный коэффициент преобразования излучения во вторую гармонику при различных длинах волн первой гармоники. *Ключевые слова:* фотонный кристалл, генерация второй гармоники (ГВГ), оптическая нелинейность.

## Введение

В настоящее время большой интерес вызывают работы по генерации второй гармоники в изотропных средах. Традиционно используемые для удвоения частоты оптического излучения нелинейные материалы достаточно дороги и сложны в обработке, хотя и позволяют преобразовывать излучение во вторую гармонику с эффективностью порядка 50–60 %, тогда как изотропные среды позволяют создавать структуры и объекты практически любой сложности форм и структуры. Актуальность этой темы обусловлена возможностью изготовления периодических структур из подобных изотропных сред, например, для ГВГ в одномерном фотонном кристалле. ГВГ в одномерном фотонном кристалле достаточно хорошо изучена, но лишь для нелинейных сред. Так, в 2003 году была получена ГВГ в одномерном фотонном кристалле с эффективностью преобразования излучения во вторую гармонику около 1 % [1]. Кроме того, была рассчитана эффективность преобразования излучения во вторую гармонику для нелинейного фотонного кристалла. Эффективность преобразования составила  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  [2].

ГВГ в изотропных средах затруднена из-за отсутствия в таких средах нелинейности второго порядка или  $\chi^{(2)}$ , а также из-за трудности выполнения условия фазового синхронизма, которое в случае одномерного фотонного кристалла выполняется автоматически. Однако в изотропных телах возможна эффективная ГВГ оптического излучения. Впервые ГВГ в изотропной среде наблюдалась в 1981 году, когда случайно обнаружилась ГВГ излучения неодимового лазера в германо-силикатном волокне [3, 4]. При этом эффективность преобразования была невелика и составила около  $10^{-8}$ . Далее, в 1987 году был предложен механизм, объясняющий возникновение квадратичной нелинейности в изотропных средах [5]. Далее, в 1987 году [6] была предложена теория, согласно которой в волокне при распространении излучения первой и второй гармоник происходит упорядоченная пересориентация дефектов, имеющих  $\chi^{(2)} \neq 0$ , что впоследствии вызывает ГВГ при облучении только первой гармоникой. Для проверки этой гипотезы был проведен эксперимент с оптическим волокном, в котором была достигнута эффективность преобразования излучения во вторую гармонику 0,03 %.

## Запись $\chi^{(2)}$ решетки в одномерном фотонном кристалле

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14 В37 21 1633

<sup>2</sup> Герасимов Александр Михайлович – аспирант, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail alexandro.gerasimov@gmail.com

<sup>3</sup> Кундикова Наталья Дмитриевна – доктор физико-математических наук, профессор, зав лабораторией нелинейной оптики Института электрофизики РАН, декан физического факультета, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail kundikovan@susu.ac.ru

<sup>4</sup> Микляев Юрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, с н с лаборатории нелинейной оптики Института электрофизики РАН, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail miklyaev@mail.ru

<sup>5</sup> Пихуля Денис Григорьевич – ассистент, с н с лаборатории нелинейной оптики Института электрофизики РАН, кафедра оптики и спектроскопии, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail denisp@land.ru

<sup>6</sup> Терпугов Михаил Владимирович – магистр, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail mterpugov@gmail.com

Согласно работе [5], нелинейность второго порядка может появиться в изотропной среде в случае воздействия на нее полем с неравным нулю средним кубом поля,  $\langle E^3 \rangle \neq 0$ . Если подвергнуть изотропную среду одновременно излучению первой и второй гармоники, то суммарное поле как раз будет иметь неравный нулю средний куб поля и в такой среде будет записана  $\chi^{(2)}$  решетка:

$$\chi^{(2)}(R) = \alpha E_{2\omega}(R) E_{\omega}^*(R) E_{\omega}^*(R), \quad (1)$$

где коэффициент  $\alpha$ , определяется экспериментально и много меньше единицы.

Был сделан расчет записи такой решетки в одномерном фотонном кристалле с помощью программного пакета МЕЕР [7]. Была задана структура одномерного фотонного кристалла «стекло-воздух» с показателем преломления стекла 1,5. Размер воздушных и стеклянных промежутков соответствовал и для излучения с длиной волны 1,064 мкм (рис. 1). На рис. 1 светлые промежутки соответствуют стеклу с показателем преломления 1,5, черные – воздуху.

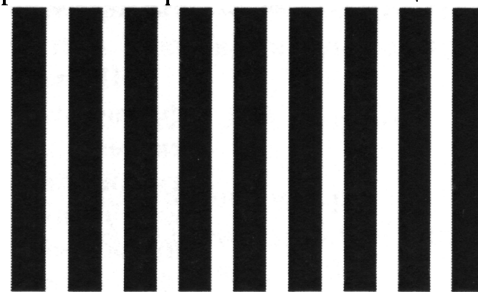


Рис. 1. Одномерный фотонный кристалл стекло-воздух

Для наведения нелинейного коэффициента второго порядка в указанную структуру запускалось излучение двух длин волн – первой и второй гармоники. Пример распространения излучения для разных длин волн представлен на рис. 2.

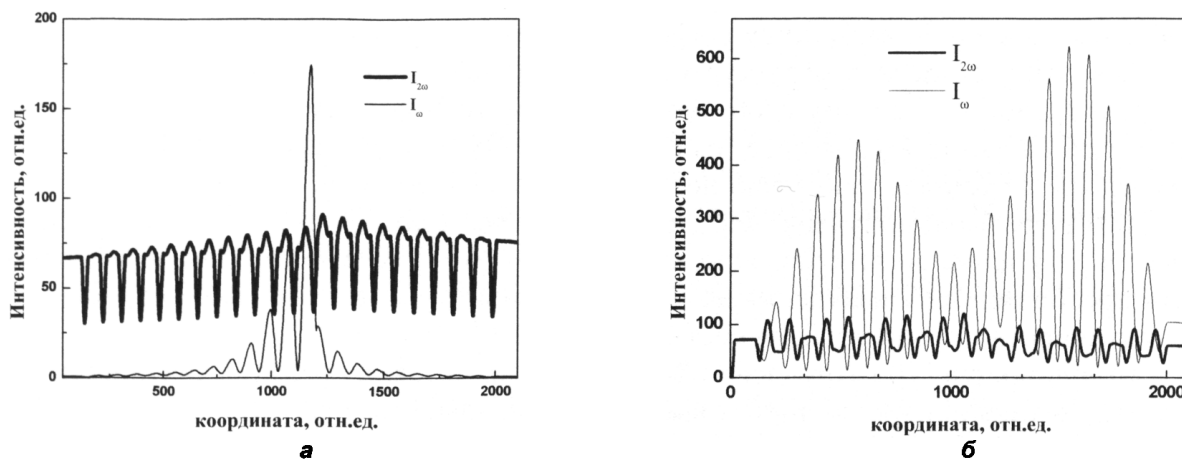


Рис. 2. Распространение излучения первой и второй гармоники в одномерном фотонном кристалле, длина волны источника: а) 1,060 мкм и 0,530 мкм б) 1,266 мкм и 0,633 мкм

Из рис. 2 хорошо видно, как происходит в фотонном кристалле распространение излучения с длинами волн, отличающимися в два раза.

Таким образом, в данной структуре записывается решетка нелинейности второго порядка (1) с коэффициентом  $\alpha = 0,01$  (рис. 3).

На этом рисунке видно, что  $\chi^{(2)}$  решетка формируется неравномерно по всей протяженности фотонного кристалла и равна нулю в воздушных промежутках, так как там возникновение  $\chi^{(2)}$  при больших мощностях входного излучения возможно, но кратковременно и носит флуктуационный характер.

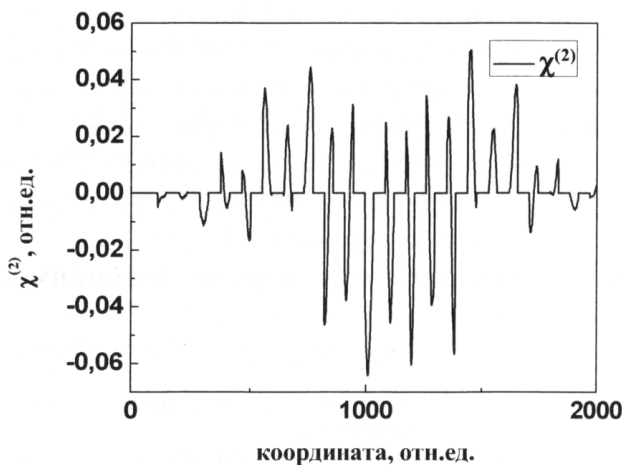


Рис. 3.  $\chi^{(2)}$  решетка в одномерном фотонном кристалле при записи длинами волн 1,226 мкм и 0,613 мкм

## Генерация второй гармоники в одномерном фотонном кристалле

После того, как в фотонном кристалле сформирована  $\chi^{(2)}$  решетка, в данную структуру запускается излучение первой гармоники единичной интенсивности и на выходе из структуры имеет место ГВГ, эффективность которой можно оценить по величине пика, соответствующего второй

гармоники. На рис. 4, а–г показана картина такой генерации для различных длин волн, указанных на графиках.

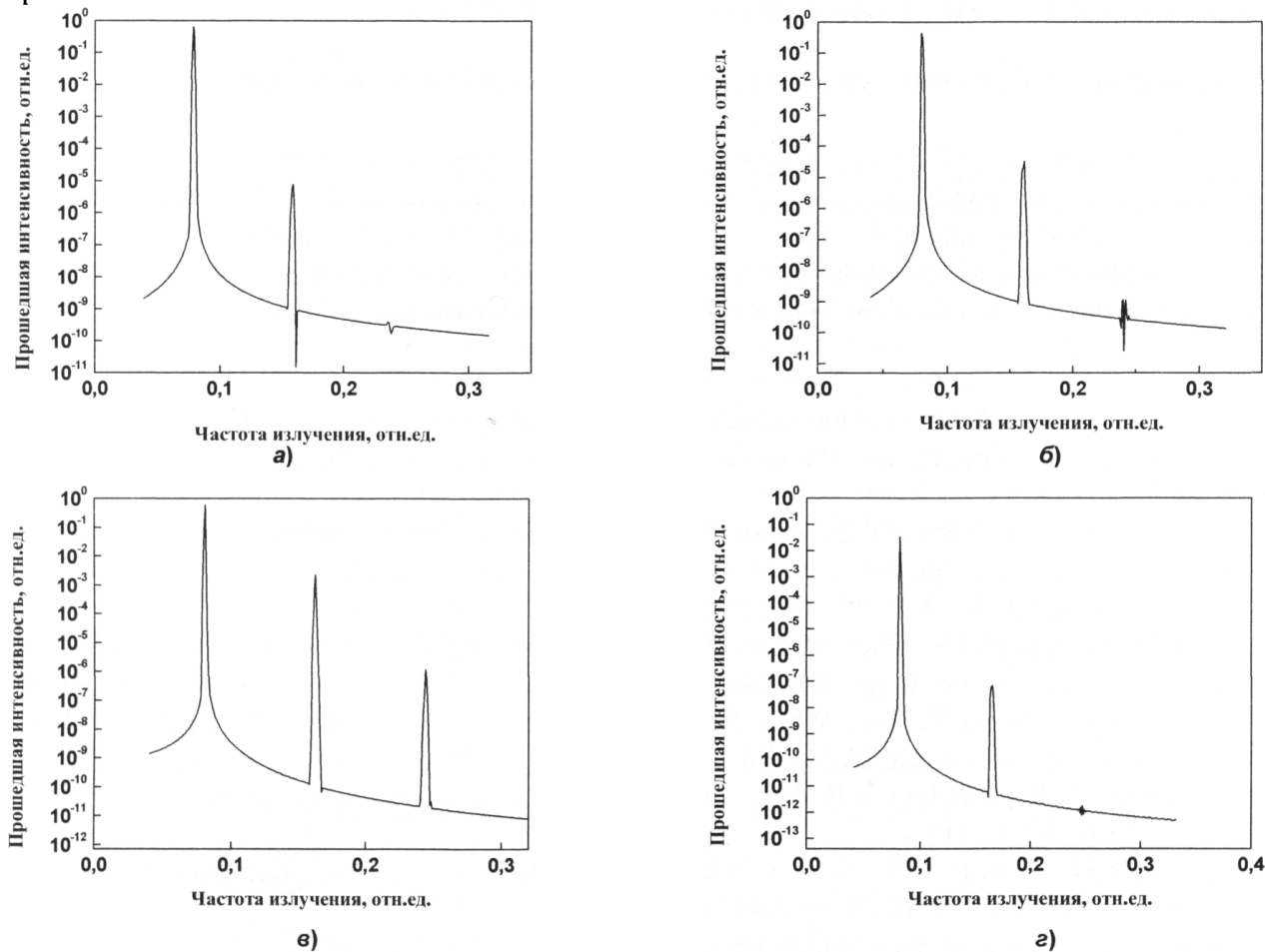


Рис. 4. ГВГ в одномерном фотонном кристалле при длине волны: а) 1266 нм, б) 1246 нм, в) 1226 нм г) 1206 нм

Как видно из рис. 4, эффективность ГВГ получается различной при различных длинах волн падающего излучения первой гармоники. При длине волны излучения первой гармоники 1,226 мкм мы видим генерацию не только второй, но и третьей гармоники, которая возникла из-за суммирования частот первой и второй гармоники. В этом случае эффективность ГВГ составила 0,2 %.

Таким образом, проведено моделирование процесса записи  $\chi(2)$  решеток в одномерном фотонном кристалле с последующей ГВГ при облучении излучением с различными длинами волн. Получена ГВГ для длины волны 1,226 мкм с эффективностью преобразования 0,2 %.

### Литература

1. Zaporozhchenko, R.G. Relation between Efficiency of Second Harmonic Generation and Spectral Properties of a One-Dimensional Photonic Crystal / R.G. Zaporozhchenko // Optics and Spectroscopy. – 2003. – Vol. 95, № 6. – P. 976–982.
2. Multiple wavelength second-harmonic generation in one-dimensional nonlinear photonic crystals / L.M. Zhao, C. Li, Y.S. Zhou, F.H. Wang // J. Opt. Soc. Am. B. – 2008. – Vol. 25, № 12. – P. 2010–2014.
3. Sasaki, Y. Phase-matched sum-frequency light generation in optical fibers / Y. Sasaki, Y. Ohmori // Appl. Phys. Lett. – 1981. – Vol. 39, № 6. – P. 466–468.
4. Ohmori, Y. Two-Wave Sum-Frequency Light Generation in Optical Fibers / Y. Ohmori, Y. Sasaki // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1982. – Vol. 18, № 4. – P. 758–762.
5. Баранова, Н.Б. Расширение голографии на многочастотные поля / Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович // Письма в ЖЭТФ. – 1987. – Т. 45, № 12. – С. 562–565.
6. Stolen, R.H. Self-organized phase-matched harmonic generation in optical fibers / R.H. Stolen, H.W.K. Tom // Optics Letters. – 1987. – Vol. 12, № 8. – С. 585–587.
7. <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Meep>

# EFFICIENCY OF SECOND HARMONIC GENERATION IN ONE-DIMENSIONAL PHOTONIC CRYSTAL FROM ISOTROPIC MATERIAL

A.M. Gerasimov<sup>1</sup>, N.D. Kundikova<sup>2</sup>, Yu.V. Miklyaev<sup>3</sup>, D.G. Pikhulya<sup>4</sup>, M.V. Terpugov<sup>5</sup>

Investigation of second-harmonic generation in one-dimensional photonic crystal was carried out. The calculation of the recording of the grating  $\chi(2)$  in a periodic system consisted of layers of air and glass and is followed by second-harmonic generation was performed. The effective factor of transformation of radiation into the second harmonic at different wavelengths of the first harmonic was estimated.

*Keywords:* photonic crystal, second harmonic generation (SHG), optical nonlinearity.

### References

1. Zaporozhchenko R.G. Relation between Efficiency of Second Harmonic Generation and Spectral Properties of a One-Dimensional Photonic Crystal. *Optics and Spectroscopy*. 2003. Vol. 95, no. 6. pp. 976–982.
2. Zhao L.M., Li C., Zhou Y.S., Wang F.H.. Multiple wavelength second-harmonic generation in one-dimensional nonlinear photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2008. Vol. 25. Issue 12, pp. 2010–2014. [<http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.25.002010>]
3. Sasaki Y., Ohmori Y. Phase-matched sum-frequency light generation in optical fibers. *Appl. Phys. Lett.* 1981. Vol. 39, no. 6. pp. 466–468.
4. Ohmori Y., Sasaki Y. Two-Wave Sum-Frequency Light Generation in Optical Fibers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 1982. Vol. 18, no. 4. pp. 758–762.
5. Baranova N.B., Zel'dovich B.Ya. Extension of holography to multifrequency fields. *JETP Letters*. Vol. 45. Issue 12. p. 717.
6. Stolen R.H., Tom H.W.K. Self-organized phase-matched harmonic generation in optical fibers. *Optics Letters*. 1987. Vol. 12, no. 8. pp. 585–587.
7. <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Meep>

Поступила в редакцию 21 июня 2013 г.

<sup>1</sup> Gerasimov Alexander Michaylovich is Post-graduate Student, Optics and Spectroscopy Department, School of Physics, South Ural State University

E-mail Alexandro.gerasimov@gmail.com

<sup>2</sup> Kundikova Nataliya Dmitrievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Nonlinear Optics Laboratory of IFF RAS, Dean of Physics Faculty, South Ural State University

E-mail kundikovand@susu.ac.ru

<sup>3</sup> Miklyaev Yuriy Vladimirovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Staff Scientist of the Nonlinear Optics Laboratory of IEF RAS, Optics and Spectroscopy Department, South Ural State University

E-mail miklyaev@mail.ru

<sup>4</sup> Pikhulya Denis Grigorievich is Assistant Junior Research Fellow of the Nonlinear Optics Laboratory of IEF RAS Department of Optics and Spectroscopy, South Ural State University

E-mail denisp@land.ru

<sup>5</sup> Terpugov Mikhail Vladimirovich is Master Student, South Ural State University

E-mail mterpugov@gmail.com

# УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ РЕКУРСИВНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ<sup>1</sup>

С.А. Иванов<sup>2</sup>

Получены численные критерии устойчивости двухслойных дискретных нейронных сетей. Построены области устойчивости в пространстве параметров для таких сетей. Задача сводится к проблеме устойчивости матричных разностных уравнений высоких порядков с запаздыванием. Основным средством решения проблемы являются конусы устойчивости.

*Ключевые слова:* нейронные сети, разностные матричные уравнения, устойчивость разностных уравнений, двухслойные сети.

## Введение

В статье рассмотрены двухслойные нейронные сети с одинаковыми запаздываниями во взаимодействии между нейронами в сети. Такие модели имеют широкое применение в различных областях знаний.

Связи двухслойной сети с тремя нейронами в каждом слое изображены на рис. 1.

В результате линеаризации вокруг стационарного решения уравнений двухслойной нейронной сети получится линейное матричное разностное уравнение

$$x_s = \gamma I x_{s-1} + B x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $x_s$  – вектор сигналов нейронов в момент  $s$ . Вектор  $x_s$  размерности  $2n$  характеризует отклонения сигналов нейронов от стационарных,  $I$  – единичная  $2n \times 2n$  матрица,  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma < 1$ ) – коэффициент затухания колебаний нейронов,  $B$  – матрица размера  $2n \times 2n$ , характеризующая взаимодействия между нейронами в сети,  $k$  – запаздывание во взаимодействии между нейронами,  $n$  – число нейронов в каждом слое.

Уравнение (1) принадлежит классу матричных разностных уравнений вида:

$$x_s = A x_{s-1} + B x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2)$$

которые обладают важным для нас свойством: матрицы  $A, B$  могут быть приведены к треугольному виду одним преобразованием. Поэтому мы имеем возможность применить метод конуса устойчивости [4] для устойчивости этих уравнений. На основе этого метода были изучены другие нейронные сети стандартных конфигураций [1, 2, 5]. Непрерывные модели исследованы в [3].

Матрица  $B$ , например, двухслойной сети, состоящей из шести нейронов, имеет следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $a$  – сила воздействия нейронов первого слоя на второй,  $b$  – сила обратного воздействия.

Мы ставим задачу изучить область устойчивости системы (1) в пространстве параметров  $a, b$  при разных значениях  $\gamma, n$  и  $k$ .

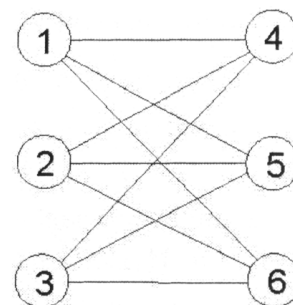


Рис. 1: Двухслойная нейронная сеть

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом Министерства образования и науки 1.1711.2011 и грантом для аспирантов Челябинского государственного педагогического университета.

<sup>2</sup> Иванов Сергей Александрович – аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный педагогический университет.

E-mail: ivanovlord@yandex.ru

## Конус устойчивости для диагностирования устойчивости нейронных сетей

В работах [4, 6] введены конусы устойчивости для диагностирования устойчивости систем вида (2) с матрицами  $A, B$ , одновременно приводимыми к треугольному виду. Аналогичные конусы устойчивости для дифференциальных уравнений введены в [7]. Для решения задачи устойчивости двухслойных нейронных сетей нам понадобится техника конусов устойчивости, которую мы здесь изложим.

*Определение 1.* Конусом устойчивости для уравнения вида (2) для данного  $k$  мы называем множество точек  $M = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ , такое, что

$$u_1 + iu_2 = \exp(ik\omega) - h \exp(i(k-1)\omega), u_3 = h, \quad (4)$$

где параметры  $h, \omega$  связаны соотношениями

$$0 \leq h \leq \frac{\sin k\omega}{\sin(k-1)\omega}, -\frac{\pi}{k} \leq \omega \leq \frac{\pi}{k}. \quad (5)$$

**Теорема 1** [4]. Пусть  $A, B, S \in R^{2n \times 2n}$  и  $S^{-1}AS = A_j, S^{-1}BS = B_j$ , где  $A_j, B_j$  – треугольные матрицы с диагональными элементами  $\lambda_j, \mu_j$  соответственно ( $1 \leq j \leq 2n$ ). Построим точки  $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}) \in R^3$  ( $1 \leq j \leq 2n$ ), так что

$$u_{1j} + iu_{2j} = \mu_j \exp(-ik \arg \lambda_j), u_{3j} = |\lambda_j|. \quad (6)$$

Тогда уравнение (2) асимптотически устойчиво, если и только если все точки  $M_j$  лежат внутри конуса устойчивости (4), (6) для данного  $k$ . Если некоторая точка  $M_j$  лежит вне конуса устойчивости, то уравнение (2) неустойчиво.

Теорема 1 сводит задачу диагностирования устойчивости системы (2) порядка  $(2n \times 2n)$  к геометрической задаче в  $R^3$ : асимптотическая устойчивость системы равносильна условию, что все точки  $M_j$  ( $1 \leq j \leq 2n$ ) лежат внутри конуса устойчивости (4), (6) для данного  $k$ .

Для применения теории конусов устойчивости необходимо знать собственные числа матрицы  $B$ . Для матрицы  $B$  порядка  $2n$  собственные числа равны  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0$ ;  $\mu_{2n-1} = -n\sqrt{ab}$ ,  $\mu_{2n} = n\sqrt{ab}$ .

## Диагностирование устойчивости двухслойной сети

*Определение 2.* Овалом устойчивости для уравнений вида (2) для запаздывания  $k > 1$  и параметра  $\gamma$  мы называем кривую  $M(\omega) = (u_1(\omega), u_2(\omega))$ , такую, что

$$u_1(\omega) + iu_2(\omega) = \exp(ik\omega) - |\gamma| \exp(i(k-1)\omega),$$

где  $\omega \in (-\omega_1, \omega_1)$ , где  $\omega_1$  есть наименьший положительный корень уравнения

$$|\gamma| = \frac{\sin k\omega}{\sin(k-1)\omega}.$$

Овал устойчивости для данного запаздывания  $k$  и данного  $\gamma$  – это сечение конуса устойчивости (см. Определение 1) плоскостью  $u_3 = |\gamma|$ . На основании Теоремы 1 и свойств матрицы  $B$  для диагностирования устойчивости уравнения (1) достаточно проверить две точки  $M(u_{1j}, u_{2j}) = u_{1j} + iu_{2j} = \pm n\sqrt{ab}$  ( $1 \leq j \leq 2$ ). Поэтому имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.** Пусть даны произвольные  $n, k \in Z_+, k > 1$ . Пусть  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Построим в  $R^2$  овал устойчивости (см. Определение 2) для данных  $k, \gamma$ . Построим точки  $M_j = (u_{1j}, u_{2j}) \in R^2$  ( $1 \leq j \leq 2$ ) так, что

$$u_{1j} + iu_{2j} = \pm n\sqrt{ab}.$$

Если обе точки  $M_j$  ( $1 \leq j \leq 2$ ) лежат внутри овала устойчивости, то система (1) асимптотически устойчива. В противном случае система (1) неустойчива.



**Теорема 3.**

1. Если  $\gamma > 1$ , то система (1) неустойчива.
2. Если  $\gamma \leq 1$  и  $0 \leq ab < \left(\frac{1-\gamma}{n}\right)^2$ , то система (1) асимптотически устойчива при любом запаздывании  $k$ . Если  $\gamma \leq 1$  и  $ab > \left(\frac{1-\gamma}{n}\right)^2$ , то система (1) неустойчива при любом запаздывании  $k$ .
3. Если  $\gamma \leq 1$  и  $ab < 0$  и  $|ab| < \left(\frac{F(\gamma, k)}{n}\right)^2$ , то система (1) асимптотически устойчива при данном значении  $k$ . Если  $\gamma \leq 1$  и  $ab < 0$  и  $|ab| > \left(\frac{F(\gamma, k)}{n}\right)^2$ , то система неустойчива при данном запаздывании  $k$ . Здесь  $F(\gamma, k) = \frac{\sin \omega(\gamma)}{\cos(k-1)\omega(\gamma)}$ , где  $\omega(\gamma)$  есть наименьший неотрицательный корень уравнения  $\gamma = \frac{\cos k\omega}{\cos(k-1)\omega}$ .

Области устойчивости системы (1) отражены на рис. 2, 3.

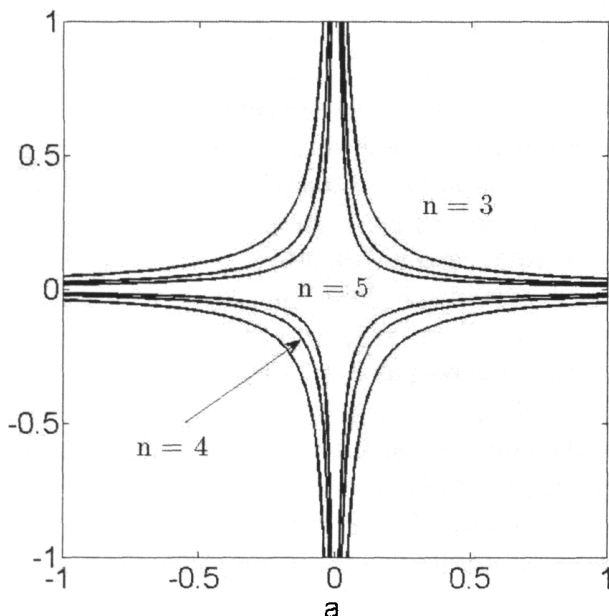


Рис. 2. Область устойчивости системы (1) в плоскости  $(a, b)$  при фиксированных  $\gamma=0,4, k=3$  и переменном числе нейронов  $n$

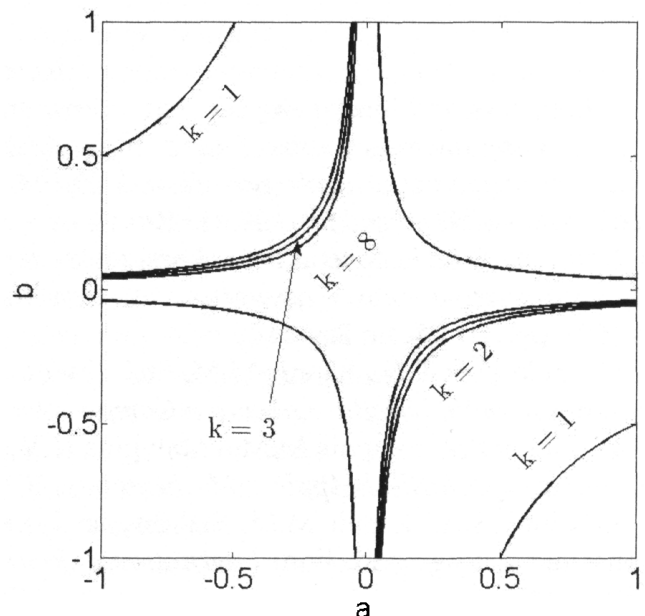


Рис. 3. Область устойчивости системы (1) в плоскости  $(a, b)$  при фиксированных  $\gamma=0,4, n=3$  и переменном запаздывании  $k$

Вывод о динамике областей устойчивости в пространстве параметров таков. С ростом числа нейронов в сети область устойчивости стягивается в крест. Но при фиксированном количестве нейронов  $2n$  имеется область в пространстве параметров, в которой гарантируется устойчивость независимо от запаздывания (delay-independent stability).

**Литература**

1. Иванов, С.А. Область устойчивости в пространстве параметров рекурсивных нейронных сетей с топологией многомерного куба / С.А. Иванов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 7. – №34(293). – С. 157–160.
2. Иванов, С.А. Устойчивость рекурсивных нейронных сетей со звездной топологией связей / С.А. Иванов // Естественные и технические науки. – 2012. – №6(62). – С. 21–25.
3. Khokhlova, T.N. Stability of a ring and linear neural networks with a large number of neurons / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – P. 1–14.
4. Ivanov, S.A. The stability cone for a difference matrix equation with two delays / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // ISRN J. Applied Mathematics. – 2011. – P. 1–19. ID 910936.

5. Ivanov, S.A. Stability analysis of discrete-time neural networks with delayed interactions: torus, ring, grid, line / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis // *International Journal of Pure and Applied Math.* – 2012. – Vol. 78, № 5. – P. 691–709.

6. Kipnis, M.M. The stability cone for a matrix delay difference equation / M.M. Kipnis, V.V. Malygina // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.* – 2011. – P. 1–15. ID 860326.

7. Khokhlova, T.N. The stability cone for a delay differential matrix equation / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // *Applied Math. Lett.* – 2011. – Vol. 24. – P. 742–745.

## STABILITY OF TWO-LAYER RECURSIVE NEURAL NETWORKS

**S.A. Ivanov<sup>1</sup>**

The stability conditions are described for the discrete neural networks. Stability regions are constructed in the parameter space for these networks. The problem reduces to the stability problem for the matrix difference equations of higher order with delay. The main tool is the stability cone.

*Keywords: neural networks, difference matrix equations, stability of difference equations, two-layer network.*

### References

1. Ivanov S.A. Oblast' ustoychivosti v prostranstve parametrov rekursivnykh neyronnykh setey s topologiyey mnogomernogo kuba (The stability domain in the parameters space of recursive neural networks with hypercube topology). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*. 2012. Issue 7. no. 34(293). pp. 157–160. (in Russ.).

2. Ivanov S.A. Ustoychivost' rekursivnykh neyronnykh setey so zvezdnoy topologiyey svyazey (Stability of recursive neural networks with star topology). *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*. 2012. no. 6(62). pp. 21–25. (in Russ.).

3. Khokhlova T.N., Kipnis M.M. Stability of a ring and linear neural networks with a large number of neurons. *Applied Mathematics and Computation*. 2012. pp. 1–14.

4. Ivanov S.A., Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a difference matrix equation with two delays. *ISRN J. Applied Mathematics*. 2011. pp. 1–19. ID 910936.

5. Ivanov S.A., Kipnis M.M. Stability analysis of discrete-time neural networks with delayed interactions: torus, ring, grid, line. *International Journal of Pure and Applied Math.* 2012. Vol. 78, no. 5. pp. 691–709.

6. Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a matrix delay difference equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2011. pp. 1–15. ID 860326

7. Khokhlova T.N., Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a delay differential matrix equation. *Applied Math. Lett.* 2011. Vol. 24. pp. 742–745.

*Поступила в редакцию 4 июня 2013 г.*

<sup>1</sup> Ivanov Sergey Alexandrovich is Post-graduate Student, Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State Pedagogical University  
E-mail ivanovlord@yandex.ru

# ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ ПРИМЕСНЫЕ ЦЕНТРЫ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ФИЗИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛИМЕРОВ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СТРУКТУРИРОВАНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК

С.Г. Карицкая<sup>1</sup>, Я.Д. Карицкий<sup>2</sup>

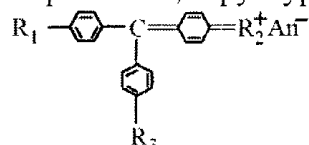
Исследовано влияние температуры и изменения структуры полимерной матрицы на флуоресценцию примесных центров свечения. Полученные данные открывают перспективы применения трифенилметановых красителей в качестве датчиков, позволяющих анализировать физические состояния полимеров. Проведено компьютерное моделирование процессов структурирования полимерных матриц. Результаты расчетов методами MM+ и ZINDO/S подтверждают механизм появления гистерезиса как изменение геометрии окружения центров свечения.

*Ключевые слова:* температурный гистерезис люминесценции, трифенилметановые красители, структурные модификации полимера.

Исследованию влияния температуры на оптические характеристики различных соединений посвящено значительное количество работ (см., например, обзоры в [1–5]). Однако благодаря широким перспективам применения оптических методов детектирования температуры интерес к данной теме не угасает. В частности, к числу перспективных датчиков температуры относятся сенсоры, принцип работы которых основан на температурном тушении люминесценции.

В результате предварительных исследований в поиске оптических чувствительных элементов на основе органических соединений было обнаружено, что у ряда трифенилметановых красителей, не люминесцирующих в жидких растворах, при внедрении их в полимерную матрицу появляется люминесценция, интенсивность которой зависит от температуры. При этом интенсивность свечения изменяется в несколько раз при изменении температуры на несколько десятков градусов в области температур 20–100 °С. Это обстоятельство представляет интерес для целей детектирования полей температур, поскольку именно этот интервал температур характерен для значительного числа аэрогидродинамических задач. В этой связи было предпринято исследование влияния температуры на интенсивность люминесценции ряда трифенилметановых красителей в полимерной матрице и выяснение механизма этого влияния.

Известно, что трифенилметановые красители, структурная формула которых имеет вид



не люминесцируют в жидкости из-за потери электронного возбуждения молекулы в результате относительного термодиффузионного движения бензольных колец, связанных гибкой цепью -C-C- [1] (где R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub> – заместители, An<sup>-</sup> – анион).

Было обнаружено, что при внедрении молекул этих красителей в твердую матрицу полиметакриловой кислоты появляется люминесценция [6]. Как показали наши исследования, описанные ниже, люминесценция трифенилметановых красителей появляется при внедрении их молекул и в матрицы других полимеров, которые образуют истинные растворы красителей, как например, поливиниловый спирт, полиметилметакрилат и поливинилбутираль (ПВБ).

ПВБ относится к аморфным полимерам, термодинамическое состояние которых меняется в относительно небольшом интервале температур. Уже при 60–80 °С он переходит из стеклообразного в высокоэластичное состояние, а при температуре выше 100 °С – в вязкотекучее. Известно

<sup>1</sup> Карицкая Светлана Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, филиал в г. Первоуральске  
E-mail: sv.karitskaya@rambler.ru

<sup>2</sup> Карицкий Ярослав Дмитриевич – студент, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

[7], что свойства аморфных полимеров сильно зависят от их предыстории: термической, механической, предыстории растворения в растворителях разного термодинамического качества и т.п. Связано это с тем, что аморфное состояние является неравновесным, и в пределах его могут быть зафиксированы различные структурные формы, обладающие разными свойствами. Нами было предположено, что в такой среде, подобной ПВБ, температура будет влиять на люминесценцию трифенилметановых красителей из-за изменения структуры и подвижности звеньев и цепей полимера, так как это будет приводить к изменению подвижности колец молекулы красителя и к перераспределению вероятностей безызлучательного и излучательного процессов дезактивации энергии ее электронного возбуждения.

Экспериментально спектральные характеристики трифенилметановых красителей, таких как кристаллический фиолетовый (КФ), бромфеноловый синий, бромфеноловый красный, метиловый фиолетовый, внедренных в ПВБ, изучались на стандартных установках для снятия спектров поглощения (СПЕКОЛ-220) и люминесценции (высокочувствительный спектрофлуориметр, построенный по стандартной схеме). Результаты исследований для кристаллического фиолетового (КФ) приведены на рис. 1.

При исследовании красителей трифенилметанового ряда, внедренных в полимерную матрицу ПВБ, была обнаружена температурная зависимость их спектральных свойств. А именно:

- появление температурного гистерезиса интенсивности люминесценции красителя в пределах одного цикла (нагрев полимерных образцов от 20 °С до 100 °С с последующим охлаждением их до комнатной температуры). Значение интенсивности флуоресценции красителя при температуре 20 °С после прохождения одного цикла уменьшалась на 12 % (рис. 2), т.е. наблюдался температурный гистерезис;
- исчезновение люминесценции красителей при температуре 100 °С и выше.

Известно, что интенсивность люминесценции красителя чувствительна к стерическому фактору, то есть расположению молекул окружения относительно молекул красителя. Вследствие того, что при последующих циклах «нагрев-охлаждение» молекулы звеньев полимерной цепи не возвращаются в исходное положение, в каждом цикле геометрия окружения молекул красителя меняется. Это приводит к тому, что к концу каждого цикла значение интенсивности люминесценции в данной температурной точке отличается от предыдущего (наблюдается температурный гистерезис).

Учитывая, что температурное тушение люминесценции обусловлено, прежде всего, увеличивающейся с ростом температуры структурной неоднородностью полимерной среды, нами целенаправленно изменялась структура полимера.

Нами были применены различные методы структурной модификации ПВБ, позволяющие перевести полимер, находящийся при комнатной температуре, из стеклообразного состояния в высокоэластичное, характеризующееся температурной стойкостью. Структурные модификации ПВБ производились путем введения различных добавок, термической обработки и отжига. Можно ожидать, что при облучении молекул красителя, находящихся в такой матрице, будут наблюдаться стабильные значения интенсивности люминесценции для каждого фиксированного значения температуры в ходе неоднократного нагрева и охлаждения пленки.

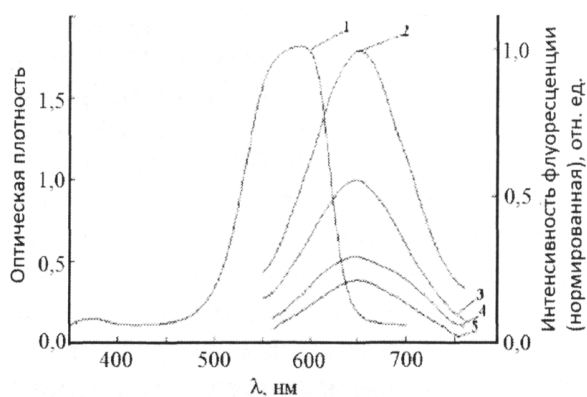


Рис. 1. Спектры поглощения (1) и люминесценции (2–5) красителя кристаллического фиолетового (концентрация молекул красителя  $C = 10^{-2}$  моль/л) в пластифицированной пленке поливинилбутирала. Спектральные линии 2–5 соответствуют температурам пленки 20 °С, 40 °С, 60 °С и 70 °С. Толщина пленки  $\approx 8$  мкм

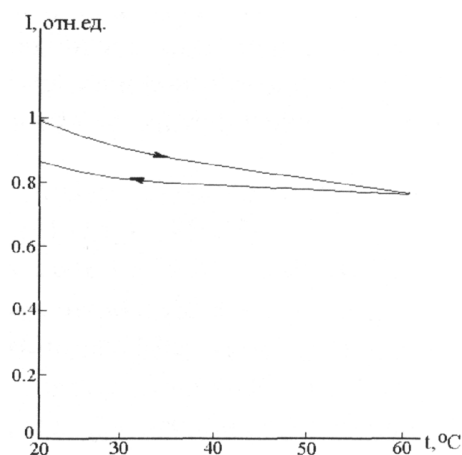


Рис. 2. Зависимость интенсивности флуоресценции красителя кристаллического фиолетового на длине волны максимума излучения в пленке поливинилбутирала от температуры пленки в течение одного цикла «20 °С → 60 °С → 20 °С»

В качестве добавок использовались различные стабилизаторы, наполнители, поверхностно-активные вещества и пластификатор.

Стабилизаторы – низкомолекулярные органические и неорганические соединения, которые замедляют процессы старения полимеров, протекающие в них под влиянием повышенных температур, разного вида облучения, механических напряжений как в присутствии кислорода, так и в вакууме [8]. В зависимости от назначения добавок их содержание в полимерном материале колеблется от долей процента (стабилизаторы) до десятков процентов (наполнители).

Введение в полимерную матрицу различных наполнителей, содержание которых достигало десятков процентов относительно массы полимера, не привело к исчезновению температурного гистерезиса. При введении в образец различных стабилизаторов в количестве 0,1; 0,3; 0,5; 1 % от объема раствора полимера с красителем заметных изменений в наблюдениях температурного гистерезиса также не обнаружено. При этом для различного процентного содержания добавок получены практически одинаковые результаты. Введение же в образцы в качестве поверхностно-активного вещества стеариновой кислоты увеличило гистерезис (с 12 до 20 %). При этом наблюдалось одновременное уширение спектров люминесценции.

Как уже было сказано выше, на структуру полимера влияет также введение пластификатора. Введением пластифицирующих добавок достигается пластичность полимерного материала, эластичность, увеличивается его температурная стойкость. При этом по мере увеличения содержания пластификатора температура стеклования закономерно снижается. Как показали исследования, при добавлении в образцы пластификатора дигексиладипината температурный гистерезис, наблюдавшийся в не пластифицированных образцах, имеет значение не более 1–2 % либо не обнаруживается. Но спустя некоторое время (2–3 суток) гистерезис появляется вновь. Это может быть связано с миграцией пластификатора к поверхности полимера ввиду его относительно большого процентного содержания (38 %), то есть концентрация пластификатора превышает равновесный предел совместимости с полимерной матрицей.

Известно, что дополнительное структурирование ПВБ может вызвать также нагревание. То есть образование пространственной сетки путем возникновения мостиковой химической связи между атомами углерода соседних мономерных звеньев полимерной цепи возможно и без введения специальных добавок, а под действием кислорода из воздуха. В связи с этим целенаправленное изменение структуры аморфного поливинилбутираля проводилось также с помощью термической обработки и отжига.

Термическая обработка не пластифицированных образцов проводилась следующим образом: жидкий полимер с внедренными в него молекулами красителя (до напыления его на подложку) нагревался до 40÷70 °С. Наилучшим результатом среди пленок, приготовленных таким способом, обладал образец, подвергшийся термической обработке при температуре 65 °С. Температурный гистерезис интенсивности флуоресценции красителя кристаллического фиолетового в этом случае составлял 2÷3 %. Для остальных образцов температурный гистерезис был равен 8÷10 % для пленок, обработанных при 40 °С, и 5÷6 % для пленок, подвергавшихся термической обработке при температуре 70 °С.

При отжиге образца (нагревание пленки без добавления других веществ в течение 30 минут до 60 °С и охлаждение естественным путем в течение 60 минут до комнатной температуры) температурный гистерезис не обнаруживается. Однако по истечении 10÷12 часов, то есть времени объемной релаксации полимера в исходное состояние, гистерезис флуоресценции красителя появляется вновь.

Поскольку при изменении температуры цепи полимера частично изменяют свое расположение относительно молекул красителя, внедренных в полимерную матрицу, и именно это, на наш взгляд, обуславливает появление гистерезиса, можно, задавая различное расположение молекулы красителя КФ относительно цепочки поливинилбутираля, посчитать его спектр флуоресценции для различных модификаций и сравнить интенсивности длин волн разрешенных переходов. На основании этого предположения нами было проведено компьютерное моделирование процессов структурирования матриц ПВБ под действием кислорода из воздуха, полученных при отжиге пленки или термической обработке жидкого полимера.

Размеры цепи поливинилбутираля, состоящей из 6 мономеров, гораздо больше, чем размер одной молекулы красителя кристаллического фиолетового, поэтому спектроскопический эффект, рассчитанный теоретически, связанный с изменением интенсивности люминесценции красителя,

должен проявляться при различном расположении красителя относительно даже одной цепи полимера.

На рис. 3 приведено различное расположение молекулы красителя относительно одной цепочки, моделирующей полимер. Расстояние от молекулы КФ до полимера составляло 3–4 Å, но не более 5 Å.

Расчет длин волн спектральных линий КФ при оптимизации геометрии системы краситель-полимер производился методом молекулярной механики Мм+, а затем полуэмпирическим методом ZINDO/S. В расчете проявляется одна линия, лежащая в интервале 400–600 нм, которую можно соотнести и сопоставить с экспериментальным спектром. Результаты даже таких простых расчетов позволяют подтвердить механизм появления гистерезиса как изменение геометрии окружения для красителя. Действительно, для второй и третьей модификаций (рис. 3 б, в) интенсивность линии спектра 0-0-перехода ( $\lambda = 569$  нм), полученной в расчете, различна.

Подробный спектр поглощения кристаллического фиолетового, как совокупность частот переходов  $S_0-S_1$  на различные колебательные уровни возбужденного состояния  $S_1$ , не рассчитан, поэтому неизвестно, какой колебательный уровень состояния  $S_1$  связан с максимумом полосы поглощения. Однако в расчете проявляется всего одна линия, которую можно соотнести и сопоставить с экспериментальным спектром.

По-видимому, при моделировании полимера в виде нескольких цепочек поливинилбутираля качественная картина не изменится.

Поскольку поиск отжига пленок должен приводить к устойчивым структурным модификациям полимерных цепей относительно молекул красителя, то гистерезис должен исчезать (молекула полимера не изменит своего положения относительно молекулы красителя при повышении температуры пленок от 20 до 90 °С), что и наблюдается в эксперименте.

### Литература

1. Паркер, С. Фотолуминесценция растворов / С. Паркер. – М.: Мир, 1972. – 510 с.
2. Головина, А.П. Химический люминесцентный анализ неорганических веществ / А.П. Головина, Л.В. Левшин. – М.: Химия, 1978. – 246 с.
3. Волоконно-оптические датчики / Т. Окоси, К. Окамото, М. Оцу и др.; под ред. Т. Окоси; пер. с япон. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
4. Развитие методов и средств измерения температуры / М.А. Ураксеев, Р.Г. Фаррахов, М.Г. Киреев, Д.А. Дмитриев // История науки и техники. – 2007. – Т. 6. – С. 131–133.
5. Ларин, Ю.Т. Полимерные оптические волокна / Ю.Т. Ларин, В.А. Нестерко // ИНФОРМОСТ «Радиоэлектроника и Телекоммуникации»\_22. URL: <http://www.rit.informost.ru/rit/4-2002/28.pdf> (дата обращения: 01.03.2013)
6. Кричевский, Г.Е. Фотохимическое превращение красителей и светостабилизация окрашенных материалов / Г.Е. Кричевский. – М.: Химия, 1986. – 248 с.
7. Тагер, А.А. Физико-химия полимеров / А.А. Тагер. – М.: Химия, 1978. – 544 с.
8. Тарутина, Л.И. Спектральный анализ полимеров / Л.И. Тарутина, Ф.О. Позднякова. – Л.: Химия, 1986. – 248 с.

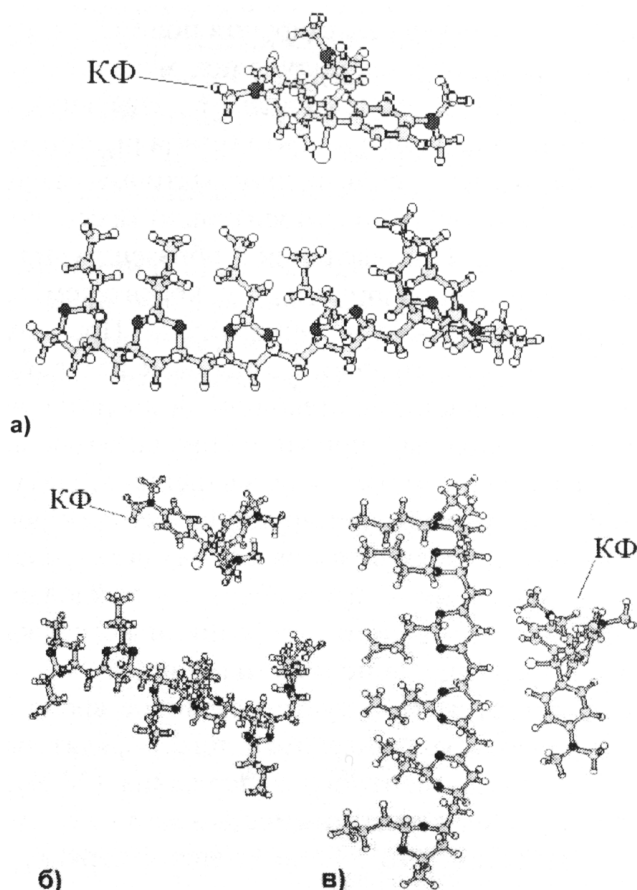


Рис. 3. Различные модификации расположения молекулы красителя кристаллического фиолетового относительно цепочки полимера

## FLUORESCENT IMPURITY CENTERS FOR MONITORING THE PHYSICAL STATE OF POLYMERS AND A COMPUTER SIMULATION OF PROCESSES OF STRUCTURING OF THE POLYMER MATRICES

S.G. Karitskaya<sup>1</sup>, Ya.D. Karitskiy<sup>2</sup>

The temperature influence and the structure changes of polymer matrix on fluorescence of impurity luminescence centers were investigated. The obtained data broadens the perspectives of using triphenylmethane dye as a detector that helps to analyse physical conditions of polymers. Computer simulation of polymer matrices structuring process was carried out. The results of the calculations by the methods of MM+ and ZINDO/S prove the mechanism of appearance of hysteresis as a change of environmenting geometry of luminescent centers.

*Keywords: thermal hysteresis of the luminescence, triphenylmethane dyes, structural modification of the polymer.*

### References

1. Parker C.A. *Photoluminescence of Solutions*. Elsevier Publishing Company. Amsterdam-London-New York, 1968. 544 p.
2. Golovina A.P., Levshin L.V. *Khimicheskiy lyuminescentnyy analiz neorganicheskikh veshchestv* (Chemical luminescent analysis of non-organic substances). Moscow: Khimiya, 1978. 246 p. (in Russ.).
3. Okosi T., Okamoto K., Otsu M., Nisikhara Kh., Kyuma K., Khatate K. *Volokonno-opticheskie datchiki* (Fiberoptic detectors). Leningrad: Energoatomizdat, 1990. 256 p.
4. Urakseev M.A., Farrakhov R.G., Kireev M.G., Dmitriev D.A. *Istoriya nauki i tekhniki*. 2007. Vol. 6. pp. 131–133. (in Russ.).
5. Larin Yu.T., Nesterko V.A. *Polimernye opticheskie volokna* (Polymeric optical fibers). *INFORMOST «Radio-elektronika i Telekommunikatsii»\_22*. [ URL: <http://www.rit.informost.ru/rit/4-2002/28.pdf> (accessed 01.03.2013)].
6. Krichevskiy G.E. *Fotokhimicheskoe prevrashchenie krasiteley i svetostabilizatsiya okrashennykh materialov* (Photochemical transformation of dyes and light stabilization of dyed materials). M.: Khimiya, 1986. 248 p.
7. Tager A.A. *Fiziko-khimiya polimerov* (Physics and chemistry of polymers). Moscow: Khimiya, 1978. 544 p. (in Russ.).
8. Tarutina L.I., Pozdnyakova F.O. *Spektral'nyy analiz polimerov* (Spectral analysis of polymers). Leningrad: Khimiya, 1986. 248 p. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 24 февраля 2013 г.*

<sup>1</sup> Karitskaya Svetlana Gennadievna is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, University Branch in the town of Pervouralsk.

E-mail. sv.karitskaya@rambler.ru

<sup>2</sup> Karitskiy Yaroslav Dmitrievich is Student, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ У РАВНОМЕРНО СЖИМАЮЩЕГО МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА

М.Л. Катков<sup>1</sup>

Доказывается существование неподвижной точки у монотонного сжимающего отображения в банаховом  $K$  пространстве. Доказывается сходимость итераций к неподвижной точке в метрике равномерной сходимости. Компактность инвариантного множества, полная непрерывность оператора не предполагаются.

Ключевые слова. положительный оператор, монотонный вогнутый оператор, гетеротонный оператор.

## Введение

М.А. Красносельским был рассмотрен класс монотонных вогнутых операторов [1]. Рамки построенной теории были расширены В.И. Опойцевым [2]. Им был рассмотрен класс гетеротонных операторов. Операторы из рассмотренных классов являются сжатиями в метрике Биркгофа. Центральными вопросами построенных теорий являются вопросы существования неподвижной точки и сходимости итераций. При этом существование неподвижной точки устанавливается из каких-либо дополнительных соображений (компактность множества, полная непрерывность оператора), а сходимость итераций обеспечивает условие вогнутости.

Автором рассматривались сжимающие отображения в метрике равномерной сходимости. Сжатия в этой метрике обладают такими же свойствами, что и вогнутые и гетеротонные. В настоящей работе приводится признак существования неподвижной точки у монотонного сжимающего отображения в метрике равномерной сходимости.

Пусть  $X$  – банахово пространство, полуупорядоченное конусом  $K$ .

**Определение компоненты.** Пусть  $x_0 \in K$ ;  $u_0 \in K$  ( $u_0 \neq 0$ ). Компонентой  $K(x_0; u_0)$  называется множество элементов  $y \in X$ , для которых при некотором  $\alpha \geq 0$  выполняются неравенства

$$x_0 \leq y + \alpha u_0; \quad y_0 \leq x_0 + \alpha u_0. \quad (1)$$

**Определение метрики равномерной сходимости.** Пусть  $x, y \in K(x_0; u_0)$ . Метрика  $d(x, y)$  определяется как минимальное  $\alpha$ , при котором выполняются неравенства (1).

**Определение равномерного  $u_0$ -сжатия.** Монотонный оператор  $T$ , действующий в  $X$ , будем называть оператором равномерного  $u_0$ -сжатия, если для любого конусного отрезка  $\langle u; v \rangle$  ( $\langle u; v \rangle \subset K(x_0; u_0)$ ), для любого положительного  $t$  найдётся такое положительное  $q = q(t; u; v)$  ( $q(t; u; v) < 1$ ), что для любого  $x \in \langle u; v \rangle$  выполняется неравенство

$$T(x + tu_0) \leq Tx + qt. \quad (2)$$

Будем говорить, что оператор  $T$  оставляет инвариантным конусный отрезок  $\langle v, v \rangle$ , если  $T\langle u; v \rangle \subset \langle u; v \rangle$ .

**Теорема.** Пусть оператор  $T$  является оператором равномерного  $u_0$ -сжатия и оставляет инвариантным конусный отрезок  $\langle u_0; v_0 \rangle \subset K(x_0; u_0)$

Тогда у оператора  $T$  есть неподвижная точка  $x_* \in K(x_0; u_0)$  и для любого начального приближения  $z_0 \in K(x_0; u_0)$  последовательность итераций сходится к  $x_*$ .

*Доказательство.* Рассмотрим две последовательности  $\{u_n\}$ ;  $\{v_n\}$  такие, что

<sup>1</sup> Катков Михаил Львович – доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: katkovml@yandex.ru



$$u_n = T^n u_0; \quad v_n = T^n v_0.$$

Очевидно, что

$$v_n \leq u_n + t_{mn} u_0,$$

где  $t_{mn} = d(u_n, v_m)$ . Последовательность  $\{t_{mn}\}$  не возрастает. Предположим, что

$$t = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} t_{mn} \neq 0.$$

Тогда

$$v_{m+1} \leq T(u_n + t u_0) + (t_{mn} - t) u_0;$$

и, следовательно,

$$v_{m+1} \leq u_{n+1} + q t u_0 + (t_{mn} - t) u_0.$$

Таким образом,

$$d(u_{n+1}, v_{n+1}) \leq q t + (t_{mn} - t),$$

получаем противоречие.

Последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  фундаментальные. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = x_1.$$

Так как  $T$  – сжатие,  $x_1$  – единственная неподвижная точка.

Теорема доказана.

### Литература

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
2. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов / В.И. Опойцев // Труды Московского математического общества. – 1978. – Т. 36. – С. 237–380.

## EXISTENCE OF THE FIXED POINT IN THE CASE OF EVENLY CONTRACTIVE MONOTONIC OPERATOR

*M.L. Katkov*<sup>1</sup>

The article proves the existence of the fixed point in the case of evenly contractive monotonic operator in the Banach  $K$ -space. It proved to be right that the iterations converge to the fixed point in the metric of the even convergence. Compactness of the invariant set and the total continuity of the operator are not assumed.

*Keywords:* positive operator, monotonic concave operator, heterotonic operator.

### References

1. Krasnoselskiy M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskie metody nelineynogo analiza (Geometrical methods of nonlinear analysis). Moscow: Nauka, 1975. 512 p. (in Russ.).
2. Opoitsev V.I. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. 1978. Vol. 36. pp. 237–380. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 28 мая 2013 г.*

<sup>1</sup> Katkov Mikhail Lvovich is Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University  
E-mail: katkovml@yandex.ru

# АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ОБРАБОТКЕ МОЩНЫМИ ПЛАЗМЕННЫМИ ПОТОКАМИ<sup>1</sup>

А.Я. Лейви<sup>2</sup>

Проводится анализ механизмов формирования рельефа поверхности мишени при обработке мощными плазменными потоками. Показано, что в случае плазменной обработки материала динамика поверхности определяется не только силами поверхностного натяжения и вязкости, но и силами, связанными с давлением плазменного потока на вещество. За счет действия этих сил шероховатость поверхности увеличивается даже при обработке в докритическом режиме.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, радиационная обработка, массоперенос, неустойчивость Релея-Тейлора, модификация материала

## Введение

В последние годы, с целью модификации свойств конструкционных материалов широко используются мощные плазменные потоки (с плотностью мощности более  $10^6$  Вт/см<sup>2</sup>). В результате плазменной обработки можно увеличить адгезию материала пленки с материалом подложки, увеличить микротвердость материала, модифицировать рельеф поверхности (сглаживание или увеличение рельефа поверхности).

В работах [1, 2] исследуется формирование рельефа поверхности материала при обработке компрессионными плазменными потоками (КПП) [3]. В данных работах показано, что после обработки КПП на поверхности мишени образуются две качественно отличающиеся области (центральная область и область радиального разлета). Центральная область – та часть поверхности образца, на которую плазменный поток падает нормально, и единице поверхности данной области передана максимальная энергия. Область радиального разлета – та часть поверхности образца, на которой происходит радиальный разлет плазменного потока. Из работ [1, 2] следует, что формирование волнообразного рельефа поверхности в области радиального разлета обусловлено развитием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Также показано, что при обработке КПП в случае, когда плотность поглощенной энергии составляет  $W = 10\text{--}20$  Дж/см<sup>2</sup>, наблюдается докритический режим обработки (режим обработки без абляции). Тогда согласно работе [4] в центральной области в докритическом режиме должно наблюдаться сглаживание рельефа поверхности, в то время как шероховатость поверхности увеличивается [1, 2].

Данная работа посвящена исследованию механизмов формирования рельефа поверхности центральной области мишени при обработке мощными плазменными.

## Анализ механизмов формирования рельефа поверхности мишени

В работах [4–6] показано, что динамика поверхности при обработке интенсивными потоками заряженных частиц определяется балансом сил поверхностного натяжения, вязкости, а также сил инерций, возникающих в результате теплового расширения вещества при его нагреве. В случае, когда обработка ведется мощными плазменными потоками, необходимо также учитывать давление плазменного потока на поверхность мишени.

Будем рассматривать ту область мишени, на которую плазменный поток падает нормально. Большинство технологических режимов обработки соответствуют случаю, когда приповерхностные слои обрабатываемой мишени переходят из твердого состояния в жидкое. В этом случае давление плазменного потока на поверхность материала может достигать 10 МПа [7], а ускорение свободной границы мишени составляет  $10^2\text{--}10^5$  м/с<sup>2</sup>. Также поскольку приповерхностные

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке научно-исследовательской работы ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ), проводимой в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 2012043-1/304)

<sup>2</sup> Лейви Артём Ячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: leyvu@mail.ru

слои переходят в жидкое состояние, го для определения влияния давления плазменного потока на вещество воспользуемся гидродинамическим подходом. Будем рассматривать систему «пленка–подложка».

В рамках потенциального течения несжимаемой жидкости рассмотрим систему двух жидкостей в двумерной декартовой геометрии. Пусть свободная поверхность пленки задается функцией  $H(x,t)$ . А граница раздела двух жидкостей задается функцией  $Z(x,t)$ . Функции  $Z(x,t)$  и  $H(x,t)$  – периодические по  $x$ . Жидкость, ограниченную функциями  $Z(x,t)$  и  $H(x,t)$ , будем называть первой жидкостью (пленка) – область  $\Omega_1$ . Полубесконечную область, ограниченную функцией  $Z(x,t)$  будем называть второй жидкостью (материал основы) – область  $\Omega_2$ . Индексы «1», «2» соответствуют первой и второй жидкости,  $\rho_1, \rho_2$  – плотности жидкостей.

Поскольку течение в слое жидкости потенциально, то вектор скорости может быть записан как градиент потенциала скорости  $\vec{v} = \nabla \varphi$ , с другой стороны, для несжимаемой жидкости поле скоростей может быть представлено как ротор векторного потенциала  $\vec{v} = [\nabla, \vec{e}_y, \psi]$ . Рассмотрим задачу в линейном приближении, полагая  $ka \ll 1$  ( $k$  – волновое число,  $a$  – амплитуда возмущения). Тогда нелинейными членами в системе уравнений (1)–(4) вследствие малости пренебрегаем. Представим гравитационный потенциал в виде  $G(x, Z, t) = -g_2(t)Z(x, t)$ ,  $G(x, H, t) = -g_1(t)H(x, t)$ , где  $g_1(t), g_2(t)$  – ускорение соответствующих границ, и получим систему уравнений, описывающую динамику двух границ в линейном приближении. Введем число Атвуда  $A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ . Пусть ускорение свободного падения направлено из первой жидкости во вторую. Система уравнений, описывающая движение жидкостей, в рамках нашей модели имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi_1(x, z, t) = 0, \nabla^2 \varphi_2(x, z, t) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x, Z, t)}{\partial t} = Ag_2(t)Z(x, t) - \frac{P(x, Z, t)}{\rho_1},$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x, H, t)}{\partial t} = g_1(t)H(x, t), \quad \frac{\partial \varphi_2(x, Z, t)}{\partial t} = g_2(t)Z(x, t) - \frac{P(x, Z, t)}{\rho_2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = v_{1z}(x, Z, t) = \frac{\partial \varphi_1(x, Z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = v_{1z}(x, H, t) = \frac{\partial \varphi_1(x, H, t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = v_{2z}(x, Z, t) = \frac{\partial \varphi_2(x, Z, t)}{\partial z}. \tag{3}$$

Поскольку нормальные компоненты скоростей на контактной границе равны, то в линейном приближении имеем:  $\varphi_1 = -\varphi_2$  (4). Пусть на контактной и свободной границе возмущение задается в виде:

$$Z(x, t) = Z_0(t) \cos(kx), \quad H(x, t) = H_0(t) \cos(kx),$$

где  $Z_0(t)$  – амплитуда начального возмущения контактной границе,  $H_0(t)$  – амплитуда начального возмущения свободной поверхности.

Не трудно убедиться, что в первой области потенциал скорости, имеющий вид

$$\varphi_1(x, z, t) = \frac{\varphi(z, t) \operatorname{sh}(k(H - z)) + \varphi(H, t) \operatorname{sh}(kz)}{\operatorname{sh}(kH)} \cos(kx), \tag{5}$$

удовлетворяет решению уравнения Лапласа (1). Потенциал (5) справедлив для системы с плоскими границами.

Подставляя решение уравнения Лапласа (5) в систему (1)–(3), можно получить систему уравнений, описывающую изменение амплитуды начального возмущения со временем в линейном приближении.

$$\begin{cases} \ddot{Z}_0(t) = \frac{-Ag_2 k Z_0(t) \operatorname{ch}(kH) + kg_1 H_0}{\operatorname{sh}(kH)} \\ \ddot{H}_0(t) \operatorname{ch}(kH) - \ddot{Z}_0(t) = g_1 k H_0 \operatorname{sh}(kH) \end{cases} \tag{6}$$

Проведем предельный переход:  $kH \rightarrow -\infty$ , означающий большую ( $H \gg \lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны) толщину слоя. Тогда система (6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{Z}_0(t) = Ag_2 k Z_0(t) \\ \ddot{H}_0(t) = -g_1 k H_0(t) \end{cases}$$

Из данной системы уравнений видно, что при  $H \gg \lambda$ , в зависимости от знака числа Атвуда и ускорения, контактная и свободная границы могут быть неустойчивы (в соответствии с классической неустойчивостью Релся–Тейлора), либо устойчивы, что соответствует случаю гравитационных волн (устойчивая поверхность).

Рассмотрим неустойчивость Рихтмайера–Мешкова. В этом случае ускорение носит импульсный характер и имеет вид:  $g(t) = U\delta(t)$ , где  $U$  – скорость соответствующей среды после прохождения ударной волны. Тогда система (6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{Z}_0(t) = \frac{-AkU_2 Z_0(t) \operatorname{ch}(kH) + kU_1 H_0}{\operatorname{sh}(kH)} \\ \dot{H}_0(t) \operatorname{ch}(kH) - \dot{Z}_0(t) = kU_1 H_0 \operatorname{sh}(kH) \end{cases} \quad (7)$$

Будем искать решение уравнений (6) и (7) в виде разложения в ряд Тейлора. Амплитуды соответствующих границ представим в виде:

$$Z_0(t) = \sum_n a_n t^n, \quad H_0(t) = \sum_n b_n t^n.$$

Подставим эти амплитуды в (6), (7) и найдем  $a_n, b_n$ .

Для неустойчивости Рихтмайера–Мешкова

$$a_{n+1} = \frac{Ba_n + Db_n}{n+1}, \quad a_0 = Z_0(t=0), \quad b_{n+1} = \frac{Ba_n + (C+D)b_n}{(n+1)\operatorname{ch}(kH)}, \quad b_0 = H_0(t=0),$$

где  $B = -AUk \operatorname{ch}(kH)/\operatorname{sh}(kH)$ ,  $D = kU/\operatorname{sh}(kH)$ ,  $C = kU \operatorname{sh}(kH)$ .

Для неустойчивости Релся–Тейлора

$$a_{n+2} = \frac{Ba_n + Db_n}{(n+1)(n+2)}, \quad a_0 = Z_0(t=0), \quad b_{n+2} = \frac{Ba_n + (C+D)b_n}{(n+1)(n+2)\operatorname{ch}(kH)}, \quad b_0 = H_0(t=0),$$

где  $B = -Agk \operatorname{ch}(kH)/\operatorname{sh}(kH)$ ,  $D = kg/\operatorname{sh}(kH)$ ,  $C = kg \operatorname{sh}(kH)$ .

Ряд будем суммировать численно, в качестве критерия для окончания суммирования используем  $|a_i/\sum a_i| < \varepsilon$ ,  $|b_i/\sum b_i| < \varepsilon$ , где параметр малости  $\varepsilon \sim 10^{-4}$ .

В качестве исследуемого вещества было выбрано Fe. Параметры обработки выбирались аналогично [3, 4]. Исследовалась центральная область в докритическом и докритическом режиме. Глубина расплава составляла 10 мкм. Амплитуда возмущений на контактной границе (граница раздела «расплав–твёрдое тело») равнялась нулю. Начальная амплитуда свободной поверхности бралась равной 1 мкм (в соответствии с экспериментальными данными). Численное решение уравнений (7) описанным выше методом показало, что на временах порядка 20 мкс при плотности поглощенной энергии 15 Дж/см<sup>2</sup> (докритический режим обработки) шероховатость поверхности составляет порядка 7,8 мкм, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [3].

Таким образом, для описания формирования рельефа поверхности материала в центральной области необходимо учитывать давление плазменного потока помимо сил поверхностного натяжения и диссипации энергии за счет вязкости.

## Заключение

Проведен анализ механизмов формирования рельефа поверхности материала при плазменной обработке в центральной области (та часть поверхности, на которую плазменный поток падает нормально). Показано, что для описания формирования рельефа поверхности материала в центральной области необходимо учитывать давление плазменного потока помимо сил поверхностного натяжения и диссипации энергии за счет вязкости.

Численные исследования показали, что учет давления плазменного потока на мишень при рассмотрении модификации поверхности при плазменной обработке позволяет объяснить рост шероховатости рельефа в докритическом режиме.

## Литература

1. Изменение рельефа поверхности мишени при обработке компрессионными плазменными потоками / В.М. Асташинский, А.Я. Лейви, К.А. Талала и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2013. – № 10. – С. 1–8.
2. Mechanisms of Metal Surface Modification under Processing by Compression Plasma Flows / A.Ya. Leyvi, V.M. Astashynski, M.Yu. Zotova *et al.* // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – Т. 55. – Вып. 12-2. – С. 202–205.
3. Формирование субмикронных цилиндрических структур при воздействии на поверхность кремния компрессионным плазменным потоком / В.В. Углов, В.М. Анищик, В.В. Асташинский и др. // Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 74, № 4. – С. 234–236.
4. О механизмах сглаживания микрорельефа поверхности мишени при облучении интенсивным потоком заряженных частиц / В.С. Красников, А.Я. Лейви, А.Е. Майер, А.П. Яловец // ЖТФ. – 2007. – Т. 77. – Вып. 4. – С. 41–49.
5. О механизме образования микрократеров на поверхности мишени, облучаемой мощным электронным пучком / Н.Б. Волков, А.Е. Майер, А.П. Яловец и др. // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32, № 10. – С. 20–29.
6. Волков Н.Б. Нелинейная динамика контактной границы сплошных сред с различной плотностью / Н.Б. Волков, А.Е. Майер, А.П. Яловец // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, № 3. – С. 1–9.
7. Leyvi A.Ya. The dynamics of metal target surface at irradiation by intense plasma streams. // A.Ya. Leyvi, K.A. Talala, A.P. Yalovets // Proceedings of 10-th International Conference on Modification of Materials with Particle Beams and Plasma Flows. – Tomsk, 2010. – P. 173–176.

## ANALYSIS OF MECHANISMS OF SURFACE PATTERN FORMATION DURING THE HIGH-POWER PLASMA STREAM PROCESSING

A.Ya. Leyvi<sup>1</sup>

The analysis of mechanisms of surface pattern formation during the high-power plasma stream processing is carried out. It is showed that in the case of plasma processing the surface dynamics is determined not only by the surface tension forces and viscosity but also by the forces connected with the plasma stream pressure on the substance. By means of these forces the roughness of the surface increases even during the processing in the precritical mode.

*Keywords: non-linear dynamics, radiation processing, mass transfer, Rayleigh–Taylor instability, material modification.*

### References

1. Astashinskiy V.M., Leyvi A.Ya., Talala K.A., Uglov V.V., Cherenda N.N., Yalovets A.P. *Poverkhnost'. Rentgenovskie, sinkhrotronnye i neytronnye issledovaniya*. 2013. no. 10. p. 1–8. (in Russ.).
2. Leyvi A.Ya., Astashynski V.M., Zotova M.Yu., Cherenda N.N., Uglov V.V., Yalovets A.P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*. 2012. Vol. 55. Issue 12-2. P. 202–205. (in Russ.).
3. Uglov V.V., Anishchik V.M., Astashinskiy V.V., Astashinskiy V.M., Ananin S.I., Askerko V.V., Kostyukevich E.A., Kuz'mitskiy A.M., Kvasov A.M., Danilyuk A.L. *JETP Letters*. 2001. Vol. 74, no. 4. pp. 234–236.
4. Krasnikov V.S., Leyvi A.Ya., Mayer A.E., Yalovets A.P. *ZhTF*. 2007. Vol. 77. Issue 4. pp.41–49.
5. Volkov N.B., Mayer A.E., Talala K.A., Yalovets A.P. *Pis'ma v ZhTF*. 2006. Vol. 32, no. 10. pp. 20–29.
6. Volkov N.B., Mayer A.E., Yalovets A.P. *ZhTF*. 2003. Vol. 73, no. 3. pp.1–9.
7. Leyvi A.Ya., Talala K.A., Yalovets A.P. The dynamics of metal target surface at irradiation by intense plasma streams. *Proceedings of 10-th International Conference on Modification of Materials with Particle Beams and Plasma Flows*. Tomsk, 2010. pp. 173–176.

*Поступила в редакцию 20 сентября 2013 г.*

<sup>1</sup> Leyvi Artem Yacheslavovich is Cand Sc (Physics and Mathematics), General and Experimental Physics Department, South Ural State University

E-mail leyvi@mail.ru

# ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ГРОНУОЛЛА ВНЕ ОБЛАСТИ СУММИРУЕМОСТИ

Л.В. Матвеева<sup>1</sup>

Продолжается исследование полиномов Гронуолла, начатое в работе автора «Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла» и продолженное в других работах автора.

*Ключевые слова:* методы суммирования, полиномы Гронуолла, скорость сходимости.

Пусть однозначная функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности начала координат. Тогда функция  $f(z)$  раскладывается в степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ . Обозначим  $m$ -ую частичную сумму этого ряда через  $s_m^f = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ , через  $S_f$  множество особых точек функции  $f(z)$  и через  $A_f$  – максимальную область, в которую продолжается  $f(z)$ . Частичную сумму ряда функции  $\frac{1}{1-z}$  обозначим через  $\sigma_n(z)$ .

*Определение.* Линейный метод  $B$ , определяемый бесконечной матрицей  $(b_{m,n})$ , суммирует ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  к  $f(z)$  равномерно внутри области  $D \subset \mathbb{C}$  если существует такой номер  $m_0$ , что для любого компакта  $Q \subset D$  и для всех  $m \geq m_0$  ряды  $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)$  равномерно сходятся к функции  $f(z)$  на компакте  $Q$ .

*Определение.* Область  $U \subset A_f$  назовем  $C$ -областью функции  $f(z)$ , аналитичной в некоторой окрестности начала координат, если существует линейный метод, суммирующий последовательность  $\{s_m^f(z)\}$  к  $f(z)$  равномерно внутри  $U$ . Естественно рассматривать такие линейные методы, максимальные  $C$ -области которых включают в себя круг сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

В работах [1,2] показано, что если метод  $(b_{m,n})$  суммирует  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  к  $1/(1-z)$  в некоторой области  $D$ , то можно описать область  $D_f$ , в которой этот метод, будет суммировать  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  к  $f(z)$ . Поэтому изучение  $C$ -областей метода суммирования достаточно провести для геометрического ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ .

<sup>1</sup> Матвеева Любовь Васильевна – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: lvmatveeva@gmail.com

Гронуолл в работе [3] описал широкий класс методов суммирования расходящихся рядов. Метод Гронуолла  $\left[ F(w); \frac{1}{1-w} \right]$  задается отображающей функцией  $F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k (c_1 \neq 0)$  и весовой функцией  $\frac{1}{1-w}$ , и элементы его матрицы определяются по формулам

$$c_{m,n}^F = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{(1-F(w))F^n(w)}{(1-w)w^{m+1}} dw \quad (m, n \geq 0),$$

где интегрирование ведется по  $\gamma$  – простому достаточно малому контуру вокруг начала координат. На отображающую функцию  $F(w)$  в работе [1] накладываются три условия: 1)  $F(w)$  аналитична в замкнутом единичном круге  $\bar{K}$ , исключая, может быть, точку  $w=1$ , и однолистка в  $K$ ; 2)  $F(w)$  непрерывна в  $\bar{K}$ ,  $F(0)=0$ ,  $F(1)=1$ ,  $F(K) \subseteq K$ ; 3) ряд Тейлора  $F(w)$  абсолютно сходится при  $w=1$ .

*Определение.* Полином  $P_m^F(z) = \sum_{n=0}^m c_{m,n}^F \left( \sum_{k=0}^n z^k \right)$  будем называть  $m$ -м полиномом Гронуолла метода  $[F(w); 1/(1-w)]$ .

Из условия  $F(0)=0$  следует, что  $c_{m,n}^F = 0$  при  $n > m$ , поэтому степень  $m$ -го полинома Гронуолла не превосходит  $m$ . Область  $T(F)$ , ограниченную кусочно-гладкой кривой  $\tau(F) = \{z : z = [F(e^{ix})]^{-1}, x \in [0; 2\pi]\}$ , назовем областью суммируемости метода  $[F(w); 1/(1-w)]$ .

Как доказано в работах [3] и [4], метод  $[F(w); 1/(1-w)]$  суммирует ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  к  $1/(1-z)$  в области  $T(F)$ . Вне этой области последовательность  $P_m^F(z)$  расходится. Условие  $F(K) \subseteq K$  означает, что область суммируемости метода  $[F(w); 1/(1-w)]$  включает область сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ .

В работе [5] оценивалась скорость сходимости полиномов Гронуолла в случае аналитической отображающей функции внутри области  $T(F)$ . В работе [6] показано, что последовательность  $P_m^F(z)$  на границе области  $T(F)$  ограничена для каждого  $z \neq 1$ . В настоящей работе показано, что вне области суммируемости последовательность полиномов Гронуолла  $P_m^F(z)$  расходится достаточно быстро со скоростью порядка  $\frac{1}{\rho^{m+1}}$ , где  $0 < \rho < 1$ .

*Теорема.* Для любой точки  $z$ , лежащей вне замыкания области суммируемости  $T(F)$ , найдутся такие точка  $w_0 \in K$  и постоянная  $C \neq 0$ , что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m^F(z) w_0^{m+1} = C.$$

*Доказательство.* Так как точка  $z \notin T(F)$ , то  $z \in (F(K))^{-1}$  по определению области  $T(F)$ . Так как функция  $F(w)$  инъективна на  $K$ , то точка  $w_0 \in K$ , определяемая равенством  $z = \frac{1}{F(w_0)}$ , является простым полюсом функции  $\Phi(w, z) = \frac{1-F(w)}{1-zF(w)}$ .

Обозначим через  $\gamma$  – простой достаточно малый контур вокруг точки  $w_0$ . Так как  $w_0$  – простой полюс функции  $\Phi(w, z)$ , то

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}} = -\frac{1-F(w_0)}{zF'(w_0)w_0^{k+1}} = \frac{C_1}{w_0^{k+1}},$$

где  $C_1 = -\frac{1-F(w_0)}{zF'(w_0)} \neq 0$ .

Возьмем простой достаточно малый контур  $\mu$  вокруг начала координат, не пересекающий контур  $\gamma$ . По теореме о вычетах получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}} + \frac{C_1}{w_0^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}}.$$

Просуммируем полученные равенства и перенесем  $C_2 = \frac{C_1}{w_0 - 1}$  в правую часть:

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}} - \frac{C_2}{w_0^{m+1}} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}} - C_2.$$

Обозначим через  $M$  максимум функции  $|\Phi(w, z)|$  на окружности  $\{w: |w|=1\}$ . Тогда

$$\left| w_0^{m+1} \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}} - C_2 \right) \right| \leq |w_0^{m+1} (mM + |C_2|)|,$$

Последнее выражение стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ , так как  $|w_0| < 1$ . Отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w_0^{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}} = C_2.$$

Так как в работе [1] показано, что для  $z \neq 1$

$$P_m^F(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(1-F(w))dw}{(1-zF(w))(1-w)w^{m+1}}.$$

И так как

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu} \Phi(w, z) \frac{dw}{(1-w)w^{m+1}} = \sum_{k=0}^m \oint_{\mu} \Phi(w, z) \frac{dw}{w^{k+1}},$$

то  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m^F(z)w_0^{m+1} = -\frac{zC_2}{1-z} = C$ , где  $C = -\frac{zC_2}{1-z}$ . Теорема доказана.

*Следствие.* Для любой точки  $z$ , лежащей вне области суммируемости  $T(F)$ , найдутся такие точка  $w_0 \in K$ , номер  $m_0$  и положительные постоянные  $C_1, C_2$ , что для всех  $m \geq m_0$  справедливы неравенства

$$\frac{C_1}{|w_0|^{m+1}} < |P_m^F(z)| < \frac{C_2}{|w_0|^{m+1}}.$$

*Доказательство.* По предыдущей теореме найдутся такие точка  $w_0 \in K$  и постоянная  $C \neq 0$ , что  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m^F(z)w_0^{m+1} = C$ . В качестве  $C_1, C_2$  можно по определению предела взять такие положительные постоянные, что  $C_1 < |C| < C_2$ .

Теоремы о скорости сходимости полиномов в зависимости от точки  $z$  [1, 2, 4] позволяют по поведению последовательности полиномов Гронуолла определить принадлежность точки к области суммируемости.

Кроме того, полиномы Гронуолла позволяют построить метод суммируемости с областью, захватывающей часть луча за особой точкой функции  $f(z)$  [1, 7].

### Литература

1. Матвеева, Л.В. Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла. / Л.В. Матвеева // Исследования по функциональному анализу: сб. науч. тр. – Свердловск, Ур. гос. ун-т, 1978. – С. 49–64.
2. Матвеева, Л.В. Области равномерной сходимости и теорема Окада / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ: сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2011. – Т. 3. – С. 149–152.



3. Gronwall, T.H. Summation of series and conformal mapping / T.H. Gronwall // *Ann. Math.* – 1932. – Vol. 33, № 2. – P. 101–117.
4. Birindelli, C. Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall / C. Birindelli // *Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo.* – 1937. – Vol. 61. – P. 157–176.
5. Матвеева, Л.В. Полиномы Гронуолла с аналитической отображающей функцией / Л.В. Матвеева // *Наука ЮУрГУ: сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – Т. 2. – С. 153–156.*
6. Матвеева, Л.В. Поведение полиномов Гронуолла на границе области суммируемости / Л.В. Матвеева // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика».* – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 165–168.
7. Матвеева, Л.В. Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла II. / Л.В. Матвеева // *Исслед. по матем. анализу: сб. науч. тр. – Свердловск, Ур. гос. ун-т. – 1979. – С. 30–37.*

## BEHAVIOR OF GRONWALL POLYNOMIALS OUTSIDE THE BOUNDARY OF SUMMABILITY REGION

L.V. Matveeva<sup>1</sup>

In this paper we continue the study of Gronwall's polynomials which was started by the author in "The evaluation of convergence rate of the sequence of Gronwall's polynomials" and continued in other works.

*Keywords: methods of summation, Gronwall polynomials, convergence rate.*

### References

1. Matveeva L.V. Otsenka skorosti skhodimosti posledovatel'nosti polinomov Gronuolla (Estimates of the rate of convergence of the sequence of polynomials Gronwall). *Issledovaniya po funktsional'nomu analizu: sb. nauch. tr.* (Research on functional analysis: a collection of scientific works). Sverdlovsk, Ur. gos. un-t, 1978. pp. 49–64. (in Russ.).
2. Matveeva L.V. Oblasti ravnomernoy skhodimosti i teorema Okada (Areas of uniform convergence theorem and Okada). *Nauka YuUrGU: sb. nauch. tr.* (Science of SUSU: a collection of scientific works). Chelyabinsk: Izd-vo YuUrGU, 2011. Vol. 3. pp. 149–152. (in Russ.).
3. Gronwall T.H. Summation of series and conformal mapping. *Ann. Math.* 1932. Vol. 33, no. 2. p. 101–117.
4. Birindelli C. Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall. *Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo.* 1937. Vol. 61. pp. 157–176.
5. Matveeva L.V. Polinomy Gronuolla s analiticheskoy otobrazhayushchey funktsiey (Gronwall polynomials with analytic mapping function). *Nauka YuUrGU: sb. nauch. tr.* (Science of SUSU: a collection of scientific works). Chelyabinsk: Izd-vo YuUrGU, 2009. Vol. 2. pp. 153–156. (in Russ.).
6. Matveeva L.V. Povedenie polinomov Gronuolla na granitse oblasti summiruemosti (Behavior of Gronwall polynomials on the boundary of summability domain). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, mekhanika, fizika"*. 2012. Issue 7. no. 34(293). pp. 165–168. (in Russ.).
7. Matveeva L.V. Otsenka skorosti skhodimosti posledovatel'nosti polinomov Gronuolla II (Estimates of the rate of convergence of the sequence of polynomials Gronwall II). *Issledovaniya po funktsional'nomu analizu: sb. nauch. tr.* (Research on functional analysis: a collection of scientific works). Sverdlovsk, Ur. gos. un-t, 1979. pp. 30–37. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.*

<sup>1</sup> Matveeva Lyubov Vasilievna is Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Department of mathematical and functional analysis, South Ural State University.

E-mail: lvmatveeva@gmail.com

# ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

К.З. Хайрисламов<sup>1</sup>

Рассматривается течение Пуазейля в трубе для неньютоновской жидкости, динамическая вязкость которой зависит от скорости сдвига по степенному закону. Интегрированием уравнений Навье-Стокса получено аналитическое выражение для профиля скорости в сечении трубы, а также выражение для потока жидкости через сечение трубы, которые обобщают закон Пуазейля для ньютоновской жидкости.

*Ключевые слова:* течение Пуазейля, неньютоновская жидкость, вязкая жидкость.

## 1. Уравнения движения.

Уравнения движения вязкой жидкости в инвариантном виде (т. е. независимо от выбора системы координат) записываются следующим образом [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) = \rho F + \operatorname{div} T, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  и  $v$  – соответственно плотность и скорость жидкости,  $F$  – плотность массовых сил (далее полагаем  $F = 0$ ),  $T$  – тензор напряжений (запись  $v \otimes v$  обозначает тензорное произведение).

Тензор напряжений выражается следующим образом:

$$T = (-p + \mu' \operatorname{div} v) G + 2\mu e, \quad (2)$$

где  $p$  – давление,  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $\mu'$  – 2-й коэффициент вязкости,  $G$  – метрический тензор (определяемый системой координат),  $e$  – тензор скоростей деформаций, который определяется как

$$e = \frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^T), \quad (3)$$

где  $\nabla$  – оператор набла, а символ  $T$  обозначает транспонирование.

Несложно показать, что в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  для ковариантных компонент имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_z) \right), \quad (4)$$

$$\operatorname{div}(\rho v) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\rho}{r} v_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho v_z) \right). \quad (5)$$

$$(\operatorname{div}(\rho v \otimes v))_i = \operatorname{div}(\rho v_i v) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_i v_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\rho v_i v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho v_i v_z) \right), \quad i \in \{r, \varphi, z\} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad e_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{v_\varphi}{r}, \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ e_{\varphi\varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + r v_r, \quad e_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (7)$$

<sup>1</sup> Хайрисламов Кирилл Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail haigh1510@gmail.com

$$\operatorname{div} T = -\nabla p + \nabla(\mu' \operatorname{div} v) + 2 \operatorname{div}(\mu e), \quad (8)$$

где компоненты  $\operatorname{div}(\mu e)$  равны:

$$\begin{cases} (\operatorname{div}(\mu e))_r = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \mu e_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\mu}{r} e_{\varphi r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r \mu e_{rz}) \right) - \frac{\mu}{r^3} e_{\varphi\varphi}, \\ (\operatorname{div}(\mu e))_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \mu e_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\mu}{r} e_{\varphi\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r \mu e_{z\varphi}) \right), \\ (\operatorname{div}(\mu e))_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \mu e_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\mu}{r} e_{\varphi z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (r \mu e_{zz}) \right). \end{cases} \quad (9)$$

Для случая осевой симметрии, т. е. когда  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ,  $v_\varphi = 0$ , формулы (4)–(9) упрощаются и принимают вид:

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_z) \right), \quad \operatorname{div}(\rho v) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho v_z) \right); \quad (10)$$

$$(\operatorname{div}(\rho v \otimes v))_i = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_i v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho v_i v_z) \right), \quad i \in \{r, z\}; \quad (11)$$

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, & e_{r\varphi} = 0, & e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ & e_{\varphi\varphi} = r v_r, & e_{\varphi z} = 0, \\ & & e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{cases} \quad (12)$$

$$(\operatorname{div}(\mu e))_r = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \mu e_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \mu e_{rz}) \right) - \frac{\mu}{r^3} e_{\varphi\varphi}, \quad (13)$$

$$(\operatorname{div}(\mu e))_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \mu e_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \mu e_{zz}) \right). \quad (14)$$

## 2. Течение Пуазейля

Предположим, что в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  течение вязкой несжимаемой жидкости плотности  $\rho_0$  записывается в виде

$$v_\varphi = v_r = 0, \quad v_z = u(r), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (15)$$

причем  $u(R) = 0$ , а течение стационарно. Т. е. рассматривается установившееся течение жидкости в прямой цилиндрической трубе радиуса  $R$  с условием прилипания на стенке.

Условие несжимаемости означает, что  $\operatorname{div}(v) = 0$ . Тогда тензор скоростей деформаций  $e$  согласно (12) определяется следующим образом:

$$e_{rz} = e_{zr} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r},$$

остальные компоненты равны нулю.

Далее предположим, что динамическая вязкость  $\mu$  есть функция тензора  $e$ , т. е.

$$\mu = \mu(\Pi_e),$$

где  $\Pi_e = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2$  – 2-й главный инвариант тензора  $e$  [1, 2], а жидкость подчиняется степенному закону, а именно справедливо соотношение

$$\mu = \mu_0 \left( -4 \lambda^2 \Pi_e \right)^{n-1} = \mu_0 \left( \lambda^2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right)^{n-1}, \quad (16)$$

где  $\mu_0, \lambda, n$  – постоянные,  $n > 1$  (дилатантная жидкость [3]).

Для записи уравнений движения несжимаемой жидкости в безразмерном виде отнесем величины  $r$  и  $z$  к  $R$ , скорость к средней скорости в трубе  $V$ , плотность к  $\rho_0$ , время к  $R/V$ , вязкость к  $\mu_0$ , давление к  $P$ , а компоненты тензора скоростей деформаций к  $P/\mu_0$ , где  $P = \mu_0 V/R$ . Тогда второе уравнение в (1) принимает вид

$$\text{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(v \otimes v) \right) = -\nabla p + \text{div}(2\mu e), \quad (17)$$

где  $\text{Re} = \frac{\rho_0 R V}{\mu_0}$  – параметр, называемый числом Рейнольдса. Выражение в скобках в левой части

уравнения (17) обнуляется согласно формулам (10)-(11) и принятым допущениям о стационарности течения и несжимаемости среды. Правая часть (17) преобразуется с помощью формул (12-14), и в безразмерном виде течение Пуазейля описывается соотношениями

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r}, \quad (19)$$

где  $u = u(r)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $u(1) = 0$ ,  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\mu = \left( k \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right)^{n-1}$ ,  $k = \frac{\lambda V}{R}$ .

Решением последних уравнений является функция

$$u(r) = \frac{n \text{sign}(p_z)}{k(n+1)} \left( \frac{k|p_z|}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \left( r^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right), \quad (20)$$

где  $p_z = \Delta p/L$ ,  $\Delta p$  – разность давлений на концах рассматриваемого участка трубы длины  $L$ , а давление  $p$  есть линейная функция координаты  $z$ .

Подстановка в (20)  $n = 1$  дает известный профиль Пуазейля  $u(r) = \frac{p_z}{4}(r^2 - 1)$  для жидкости с постоянной вязкостью.

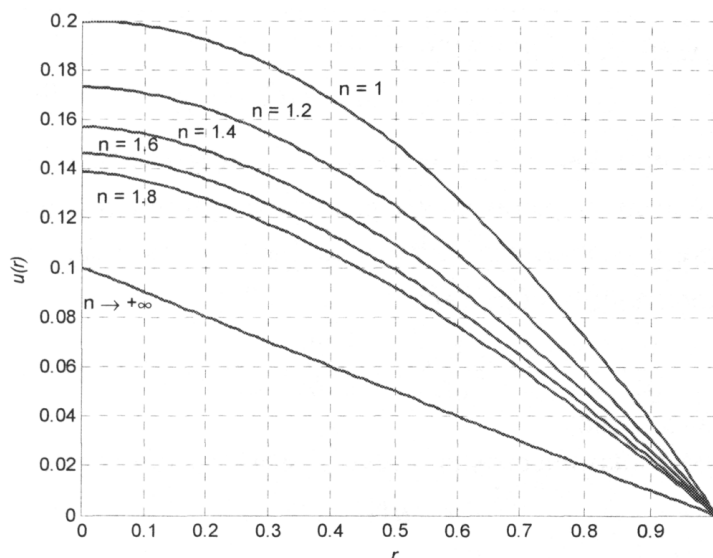


График скорости  $u(r)$  при различных значениях  $n$  ( $k=10, p_z=-0.8$ )

На рисунке показаны графики скорости  $u(r)$  в зависимости от значения  $n$ , включая  $n \rightarrow +\infty$  – в этом случае, как следует из (20),  $u(r) = \frac{\text{sign}(p_z)}{k}(r-1)$ .

Поток, численно равный объему жидкости, протекающему через сечение трубы в единицу времени, определяется как

$$Q = 2\pi \int_0^R ru(r) dr,$$

или

$$Q = \pi \int_0^R u(r) dr^2.$$

Проинтегрировав по частям и воспользовавшись условием  $u(R) = 0$ , получим

$$Q = -\pi \int_0^R r^2 \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

Переходя в (20) обратно к размерным величинам, получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\text{sign}(p_z)}{\lambda} \left( \frac{\lambda |p_z| r}{2\mu_0} \right)^1,$$

откуда

$$Q = -\frac{n\pi R^3}{3n+1} \frac{\text{sign}(p_z)}{\lambda} \left( \frac{\lambda |p_z| R}{2\mu_0} \right)^1. \quad (21)$$

Для жидкости с постоянной вязкостью ( $n = 1$ ) получаем закон Пуазейля  $Q = -\frac{\pi R^4 p_z}{8\mu_0}$ .

### Литература

1. Серрин, Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж. Серрин; под ред. Л.В. Овсянникова. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 256 с.
2. Georgiou G.C. The time-dependent, compressible Poiseuille and extrudate-swell flows of a Carreau fluid with slip at the wall / G.C. Georgiou // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 2003. – Vol. 109, № 2. – P. 93–114.
3. Уилкинсон, У. Неньютоновские жидкости / У. Уилкинсон, под ред. А.В. Лыкова. – М.: Мир, 1964. – 216 с.

## POISEUILLE FLOW OF A FLUID WITH VARIABLE VISCOSITY

**K.Z. Khayrislamov<sup>1</sup>**

The Poiseuille flow in a pipe for non-Newtonian fluid was examined. It is assumed that fluid viscosity is dependent on shear rate by power law. By solving Navier-Stokes equations we obtained velocity and volumetric flow rate solutions which summarize Poiseuille law for a Newtonian fluid.

*Keywords: Poiseuille flow, non-Newtonian fluid, viscous fluid.*

### References

1. Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti* (Mathematical fundamentals of classical mechanics of fluids). Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1963. 256 p. (in Russ.). [Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959. 148 p.]
2. Georgiou G.C. The time-dependent, compressible Poiseuille and extrudate-swell flows of a Carreau fluid with slip at the wall. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2003. Vol. 109, no. 2. pp. 93–114.
3. Uilkinson U. *Nen'yutonovskie zhidkosti* (Non-Newtonian Fluids). Moscow: Mir, 1964. 216 p. (in Russ.). [Wilkinson W.L. Non-Newtonian fluids; fluid mechanics, mixing and heat transfer. Pergamon Press, New York, 1960. 138 p.]

*Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.*

<sup>1</sup> Khayrislamov Kirill Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University  
E-mail haigh1510@gmail.com

# ЯВНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*М.З. Хайрисламов<sup>1</sup>, А.В. Геренштейн<sup>2</sup>*

Предлагается численный метод решения третьей смешанной задачи для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности параболического типа, основанный на использовании явной разностной схемы. Зависимость коэффициентов уравнения от температуры преодолевается введением новой искомой функции – первообразной теплопроводности. Предлагается тестовая задача с известным точным решением для численных расчетов.

*Ключевые слова:* теплопроводность, квазилинейное уравнение теплопроводности, явные разностные схемы, аппроксимация.

В настоящей работе используются идеи, изложенные в работах [1, 2], в которых была предложена и обоснована явная устойчивая схема для линейного уравнения теплопроводности.

## 1. Численный метод

Рассмотрим следующую постановку третьей смешанной задачи для одномерного однородного квазилинейного уравнения [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ - \left( q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t)) (\theta_l - u(0, t)) + Q_l, \\ \left( q(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = \lambda_r(u(L, t)) (\theta_r - u(L, t)) + Q_r, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  – температура стержня;  $0 \leq x \leq L$  – координата;  $0 \leq t \leq T$  – время;  $L$  – длина стержня;  $T$  – конечный момент времени;  $c(u)$  – объемная теплосмкость материала стержня;  $q(u)$  – теплопроводность материала стержня;  $\varphi(x)$  – функция начального распределения температуры стержня;  $\lambda_l(u)$  – коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня;  $\lambda_r(u)$  – коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня;  $\theta_l$  – температура внешней среды на левом конце стержня;  $\theta_r$  – температура внешней среды на правом конце стержня;  $Q_l = Q_l(t)$  – мощность потока тепла на левом конце стержня;  $Q_r = Q_r(t)$  – мощность потока тепла на правом конце стержня. Функции  $c = c(u)$ ,  $q = q(u)$ ,  $\lambda_l = \lambda_l(u)$  и  $\lambda_r = \lambda_r(u)$  предполагаются непрерывными функциями температуры, заданными для всех значений температуры.

### Замена искомой функции

Поскольку в уравнении присутствует член  $q(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ , то удобно сделать замену

$$G(u) = \int_0^u q(\xi) d\xi. \quad \text{Тогда для функции } G \text{ получим уравнение } \frac{\partial G}{\partial t} = a^2(u) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \text{где } a(u) = \sqrt{\frac{q(u)}{c(u)}} -$$

<sup>1</sup> Хайрисламов Михаил Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: zinatmk@gmail.com

<sup>2</sup> Геренштейн Аркадий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет

коэффициент температуропроводности. Функция  $G(u)$  является строго монотонной функцией температуры, поэтому обратная функция  $G^{-1}$  существует и может быть вычислена в конкретной точке, например, методом дихотомии.

### Шаблон схемы. Расчетные формулы

На плоскости  $(x, t)$  используется равномерная сетка [2]

$$\omega_{ht} = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_h = \left\{ x_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) h, \quad i = 1, 2, \dots, N \right\}, \quad \omega_\tau = \{ t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots \},$$

где  $h = L/N$  – шаг по переменной  $x$ ,  $\tau$  – шаг по переменной  $t$ . Шаблон предлагаемой схемы представлен на рис. 1. Для обозначения значений сеточной аппроксимации функции  $G$  на следующем временном слое используется верхний индекс  $(+1)$ , на следующем полуцелом временном слое –  $\left( +\frac{1}{2} \right)$ , а на предыдущем полуцелом временном слое –  $\left( -\frac{1}{2} \right)$ .

Используемая расчетная формула имеет вид

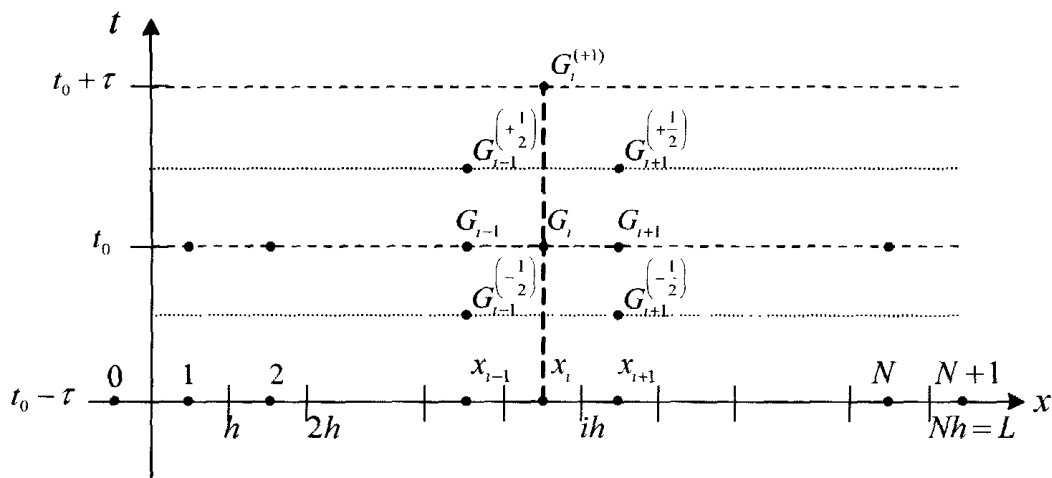


Рис. 1. Шаблон разностной схемы

$$G_i^{(+1)} = (G_i - B) e^{-\frac{2a^2(u_i)\tau}{h^2}} + A\tau + B, \quad (2)$$

где  $A = \frac{1}{2\tau} \left( G_{i-1}^{(+\frac{1}{2})} - G_{i-1}^{(-\frac{1}{2})} + G_{i+1}^{(+\frac{1}{2})} - G_{i+1}^{(-\frac{1}{2})} \right)$ ,  $B = \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2} - A \cdot \frac{h^2}{2a^2(u_i)}$ .

Для расчета значений функции  $G$  на временном слое  $t = \tau$ , а также для вычисления значений функции в полуцелых слоях по времени используются формулы:

$$G_i(\tau) = G_i e^{-\frac{2a^2(u_i)\tau}{h^2}} + \left( 1 - e^{-\frac{2a^2(u_i)\tau}{h^2}} \right) \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}, \quad G_i^{(+\frac{1}{2})} = G_i e^{-\frac{a^2(u_i)\tau}{h^2}} + \left( 1 - e^{-\frac{a^2(u_i)\tau}{h^2}} \right) \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2}. \quad (3)$$

Для выполнения краевых условий введены фиктивные узлы с номерами 0 и  $N+1$  (см. рис. 1): сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних точках, после чего, исходя из краевых условий, задаются ее значения в фиктивных узлах.

Используя следующие аппроксимации второго порядка точности

$$\lambda_l(u(0, t)) = \frac{3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2}{2}, \quad q(u(0, t)) = \frac{3q_1 - q_2}{2}, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{u_1 - u_0}{h}, \quad u(0, t) = \frac{u_0 + u_1}{2},$$

нетрудно получить формулу определения температуры в фиктивном узле 0:

$$u_0 = \frac{u_1 \left( \frac{3q_1 - q_2}{h} - \frac{3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2}{2} \right) + (3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2)\theta_l + 2Q_l}{\frac{3q_1 - q_2}{h} + \frac{3(\lambda_l)_1 - (\lambda_l)_2}{2}}. \quad (4)$$

Аналогичные рассуждения для правого конца приводят к расчетной формуле для узла  $N + 1$

$$u_{N+1} = \frac{u_N \left( \frac{3q_N - q_{N-1}}{h} - \frac{3(\lambda_r)_N - (\lambda_r)_{N-1}}{2} \right) + (3(\lambda_r)_N - (\lambda_r)_{N-1})\theta_r + 2Q_r}{\frac{3q_N - q_{N-1}}{h} + \frac{3(\lambda_r)_N - (\lambda_r)_{N-1}}{2}}. \quad (5)$$

## 2. Тестовая задача

С учетом конечности скорости распространения тепла в [4] были получены приближенные решения одномерной задачи нелинейной теплопроводности на полубесконечной прямой при заданном потоке в начале координат в виде степенной зависимости. В данной работе с использованием идей, изложенных в [4, 5], получено аналитическое решение следующей третьей смешанной задачи на полубесконечной прямой для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad t > 0, x > 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

$$\left( u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda u|_{x=0} - Q t^n, \quad t > 0, \quad (8)$$

где  $n > 0$  – показатель степени, характеризующий лучистую теплопроводность,  $\lambda > 0$  – коэффициент теплоотдачи,  $Q > 0$  – коэффициент, характеризующий мощность теплового потока в начале координат.

В частности, при  $n = 2$  точное решение задачи (6)–(8) будет таким:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sqrt{2\alpha(\alpha t - x)}, & x < \alpha t, \\ 0, & x \geq \alpha t, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\alpha = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\sqrt{2}Q}}{2}$ .

## 3. Результаты численных расчетов

Решалась задача (6)–(8) при  $n = 2$ ,  $\lambda = 1$  Дж/(м<sup>2</sup>×с×°С),  $Q = 5$  Дж/(м<sup>2</sup>×с). Шаг по координате  $h$  брался равным 1, шаг по времени  $\tau$  брался равным 0,05. Сравнение численного и точного решений в моменты времени  $t = 10, 20, 30$  с приведено на рис. 2. Сплошная кривая представляет точное решение.

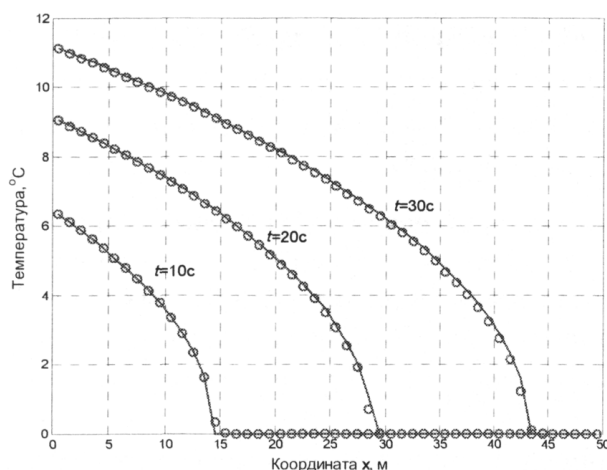


Рис. 2. Численное и точное решения задачи в разные моменты времени

Полученные результаты позволяют говорить о хороших свойствах предложенного численного метода.



### Литература

1. Геренштейн, А.В. Нагревание круга движущимся теплоисточником / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, № 5. – С. 870–871.
2. Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – Вып. 1. – № 15(115). – С. 9–11.
3. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
4. Кудряшов, Н.А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке / Н.А. Кудряшов, М.А. Чмыхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 110–120.
5. Зельдович, Я.Б. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры / Я.Б. Зельдович, А.С. Компанец // К 70-летию А.Ф. Иоффе: сб. науч. тр. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.

## EXPLICIT SCHEME FOR THE SOLUTION OF THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASI-LINEAR HEAT EQUATION

M.Z. Khayrislamov<sup>1</sup>, A.W. Herreinstein<sup>2</sup>

In produced paper numerical method for the solution of third boundary value problem for one-dimensional quasi-linear heat equation grounded on the use of explicit finite-difference scheme is offered. The coefficients' dependence on temperature is overcome by introducing the new unknown function – a primitive integral of conduction. Test problem with known exact solution for numerical calculations is proposed.

*Keywords: thermal conductivity, quasi-linear heat equation, explicit finite-difference schemes, approximation.*

### References

1. Gerenshteyn A.V., Mashrabov N. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 2008. Vol. 15, no. 5. pp. 870–871.
2. Herreinstein A.W., Herreinstein E.A., Mashrabov N. *Ustoychivye yavnye skhemy dlya uravneniya teploprovodnosti* (Steady Obvious Schemes for Equation of Heat Conductivity). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*. 2008. Issue 1. no. 15(115). pp. 9–11. (in Russ.).
3. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (The theory of difference schemes). Moscow: Nauka, 1989. 616 p. (in Russ.).
4. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A. Approximate solutions to one-dimensional nonlinear heat conduction problems with a given flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2007. Vol. 47, no. 1. pp. 107–117
5. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. *K 70-letiyu A.F. Ioffe: sb. nauch. tr.* (On the 70th anniversary of the A.F. Ioffe: collection of scientific papers). Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1950. pp. 61–71. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.*

<sup>1</sup> Khayrislamov Mikhail Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University  
E-mail: zinatmk@gmail.com

<sup>2</sup> Herreinstein Arcady Wasilevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University

# МНОГОЧЛЕН КАК СУММА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Эвнин<sup>1</sup>

Доказано, что произвольный многочлен  $n$ -й степени представим в виде суммы периодических функций, причём минимальное число слагаемых в этой сумме равно  $n+1$ .

Ключевые слова: периодические функции, контрпримеры в анализе.

Данная заметка продолжает тему построения примеров функций, обладающих неожиданными свойствами [1, 2].

**Теорема 1.** Любой многочлен степени  $n$  представим в виде суммы  $n+1$  периодических функций.

**Доказательство.** Нам понадобится следующий факт.

**Лемма.** Многочлен  $P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  степени  $n$  представим в виде суммы  $n+1$  многочленов

$P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ , таких, что для каждого  $i$  многочлен  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  не зависит от переменной  $x_i$ .

**Доказательство леммы.** Индукцией по степени многочлена докажем, что для любого  $k \leq n$  многочлен  $P_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  степени не выше  $k$  можно представить в виде суммы  $k+1$  многочленов, не зависящих, соответственно, от переменных  $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_{n+1}$ .

База индукции ( $k=0$ ) очевидна (многочлен  $P_0$  – это просто константа).

Индукционный шаг. Пусть многочлен  $T(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  получается из многочлена  $P_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  в результате подстановки вместо переменной  $x_{n-k+1}$  числа 0. Тогда

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = T(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) + x_{n-k+1} P_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

при этом многочлен  $T(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  не зависит от переменной  $x_{n-k+1}$ , а многочлен  $P_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  имеет степень не выше  $k-1$  и к нему применимо предположение индукции.

Доказанное утверждение при  $k=n$  даёт формулировку леммы.  $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1.

Пусть  $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$  – несоизмеримые действительные числа (т.е.  $k_1 T_1 + k_2 T_2 + \dots + k_{n+1} T_{n+1} \neq 0$  для произвольных целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ , хотя бы одно из которых не нуль).

На множестве  $\mathbb{R}$  введём отношение эквивалентности:  $x_1 \sim x_2$ , если для некоторых целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$  выполняется равенство

$$x_1 - x_2 = k_1 T_1 + k_2 T_2 + \dots + k_{n+1} T_{n+1}.$$

Возьмём произвольный класс эквивалентности  $K$  и зафиксируем в нём какое-нибудь число  $z$ . Любое число  $x \in K$  имеет вид

$$x = z + m_1 T_1 + m_2 T_2 + \dots + m_{n+1} T_{n+1},$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$  – некоторые целые числа. Пусть  $Q(x)$  – многочлен степени  $n$ . Будем теперь рассматривать значение многочлена  $Q(z + m_1 T_1 + m_2 T_2 + \dots + m_{n+1} T_{n+1})$  как многочлен от целочисленных переменных  $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$ . В соответствии с утверждением леммы имеем

$$Q(z + m_1 T_1 + m_2 T_2 + \dots + m_{n+1} T_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(m_1, m_2, \dots, m_{n+1}),$$

<sup>1</sup> Эвнин Александр Юрьевич – доцент, кандидат педагогических наук, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail graph98@yandex.ru

где для каждого  $i$  многочлен  $f_i(m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$  не зависит от  $m_i$ . Это означает, что функция  $f_i(m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$  как функция от переменной  $x$  (поскольку числа  $m_i$  однозначно определены значением  $x$ ) имеет период  $T_i$ .  $\square$

**Теорема 2.** Многочлен  $n$ -й степени не представим в виде суммы  $n$  периодических функций.

**Доказательство.** Пусть  $P_n(x)$  – многочлен степени  $n$  и  $P_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , где для каждого  $k$  функция  $f_k(x)$  имеет период  $T_k$ . Рассмотрим многочлен

$$Q_{n-1}(x) = P_n(x + T_n) - P_n(x).$$

Это многочлен степени  $n-1$ , и он представим в виде суммы  $n-1$  периодических функций:

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (f_k(x + T_n) - f_k(x)).$$

Последовательно уменьшая степень многочлена, в конце концов придём к линейной функции (отличной от константы), являющейся периодической – противоречие!  $\square$

**Замечание.** В статье [3] доказан следующий интересный факт: никакая рациональная функция, не являющаяся многочленом, не представима в виде суммы конечного числа периодических функций.

### Литература

1. Эвнин, А.Ю. Период суммы двух периодических функций / А.Ю. Эвнин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 56–61.
2. Эвнин, А.Ю. Пример всюду разрывного биективного отображения  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обратное к которому непрерывно в счётном множестве точек / А.Ю. Эвнин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 38–39.
3. Эвнин, А.Ю. Представимость функций в виде суммы конечного числа периодических функций / А.Ю. Эвнин, Д.А. Швед // Математика в школе. – 2013. – № 5. – С. 72–74.

*Поступила в редакцию 30 мая 2013 г.*

## POLYNOMIAL AS A SUM OF PERIODIC FUNCTIONS

A.Yu. Evnin<sup>1</sup>

It is proved that an arbitrary polynomial of degree  $n$  representatives as a sum of periodic functions, the minimum number of terms in this sum is  $n+1$ .

*Keywords: periodic functions, counterexamples in the analysis.*

### References

1. Evnin A.Yu. Period summy dvukh periodicheskikh funktsiy (The period of the sum of two periodic functions). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika, fizika, khimiya"*. 2005. Issue 5. no. 2(42). pp. 56–61. (in Russ.).
2. Evnin A.Yu. Primer vsyudu razryvnogo biektivnogo otobrazheniy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , obratnoe k kotomu nepreryvno v schyethom mnozhestve toчек (The example of the bijective mapping  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $f$  is everywhere discontinuous, but an inverse of the  $f$  is continuous at a countable set of points). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 38–39. (in Russ.).
3. Evnin A.Yu., Shved D.A. Predstavimost' funktsiy v vide summy konechnogo chisla periodicheskikh funktsiy (Functions' representability as a sum of a finite number of periodic functions). *Matematika v shkole*. 2013. no. 5. pp. 72–74. (in Russ.).

<sup>1</sup> Evnin Alexander Yurievich is Cand. Sc. (Pedagogical), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University  
E-mail: graph98@yandex.ru

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (не более 500 знаков с пробелами), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, аннотация (или реферат статьи объемом до 1800 знаков с пробелами), список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стилль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:  
Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, физический факультет, кафедра ОиТФ, ответственному редактору профессору Мирзоеву Александру Аминулаевичу [Prof. Mirzoev Aleksander Aminulaevich, General and Theoretical Physics Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [vestnik@physics.susu.ac.ru](mailto:vestnik@physics.susu.ac.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>) следуя ссылкам: «Информация о научных исследованиях», «Издагательская деятельность», «Вестник ЮУрГУ», «Серии».

10. Журнал распространяется по подписке. Подписной индекс журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Математика. Механика. Физика»: 29211, каталог «Пресса России». Интернет-каталог агентства «Книга-Сервис», подписной индекс: E29211. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru).

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

2013, том 5, № 2

Редактор А.Ю. Федерякин

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 25.10.2013. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 20,92. Тираж 500 экз. Заказ 422/734.

Отпечатано в типографии Издагательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.