ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1943

2022
Т. 14, № 1

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

BULLETIN

OF THE SOUTH URAL STATE UNIVERSITY

SERIES

“MATHEMATICS. MECHANICS. PHYSICS”

2022

Vol. 14, no. 1

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural’skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Физика

CONTENTS

Mathematics

Physics

Математика

УДК 517.544.8 DOI: 10.14529/mmph220101

УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИОННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Н.В. Адукова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: adukovanv@susu.ru

Аннотация. Рассматривается факторизация Винера–Хопфа двух достаточно близких по норме алгебры Винера матриц-функций $A(t)$ и $B(t)$. Целью работы является изучение вопроса, когда факторизационные множители $A(t)$, $B(t)$ будут достаточно близки друг к другу. Эта задача представляет значительный интерес в связи с разработкой методов приближенной факторизации матриц-функкий. Имеются два основных препятствия при изучении данной проблемы: неустойчивость частных индексов матриц-функций и не единственность их факторизационных множителей. Ранее задача изучалась М.А. Шубиным, который показал, что устойчивость факторизационных множителей имеет место только в случае, когда $A(t)$ и $B(t)$ имеют одинаковые частные индексы. Тогда существует факторизация $B(t)$, для которой факторизационные множители будут достаточно близки к множителям $A(t)$. Теорема М.А. Шубина носит неконструктивный характер, поскольку не известно, когда частные индексы двух близких матриц-функций будут одинаковыми и не указан способ выбора требуемой факторизации Винера–Хопфа матрицы-функции $B(t)$. Для преодоления этих недостатков в настоящей работе изучена проблема нормировки факторизации в устойчивом случае, описаны все возможные типы нормировок и доказана их устойчивость при малом возмущении $A(t)$. Это позволило найти конструктивный способ выбора факторизации возмущенной матрицы-функции, который гарантирует устойчивость факторизационных множителей.

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа; устойчивая система частных индексов; устойчивость факторизационных множителей; нормировка факторизации.

Введение

Задача факторизации Винера–Хопфа матриц-функций (или краевая задача Римана для вектора) является одной из самых востребованных задач комплексного анализа, имеющей многочисленные приложения в различных областях математики, физики и прикладных наук.

Введем основные понятия теории факторизации [1]. Пусть $A(t)$ – обратимая на единичной окружности $\mathbb{T}$ матрица-функция порядка p из матричной алгебры Винера $W^{p\times p}(\mathbb{T})$. Стандартная норма на этой алгебре будет обозначаться $\|\cdot\|_W$.

Правой факторизацией Винера–Хопфа $A(t)$ называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t),\ t\in\mathbb{T}, \tag{1}$$

где $A_\pm(t)\in GW_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$, $D(t)=diag\left[t^{\rho_1},\ldots,t^{\rho_p}\right]$, $\rho_1\le\ldots\le\rho_p$ – правые частные индексы $A(t)$.

Здесь $GW_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$ – группа обратимых элементов подалгебры $W_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$, состоящей из абсолютно сходящихся матричных рядов Фурье с нулевыми коэффициентами Фурье с отрицательными/положительными индексами. Правые частные индексы однозначно (с точностью до порядка) определяются матрицей-функцией $A(t)$, в отличие от факторизационных множителей $A_\pm(t)$.

Два обстоятельства сдерживают применение задачи факторизации. Во-первых, в отличие от скалярного случая, матричная задача, вообще говоря, не решена в конструктивной форме (или, как принято говорить, эффективно).

Разработка приближенных методов факторизации наталкивается на серьезное препятствие в виде неустойчивости задачи в общем случае. Напомним, что понимается под устойчивостью задачи факторизации [1–3].

Частные индексы $\rho_1,\ldots,\rho_p$ матрицы-функции $A(t)$ называются *устойчивыми*, если для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ любая матрица-функция $\tilde{A}(t)$, удовлетворяющая неравенству $\left\|A(t)-\tilde{A}(t)\right\|_W<\varepsilon$, обладает тем же набором правых частных индексов, что и $A(t)$.

В общем случае частные индексы неустойчивы при малом возмущении. Имеется классический критерий Гохберга–Крейна–Боярского устойчивости частных индексов: система правых частных индексов $\rho_1\le\ldots\le\rho_p$ устойчива при малом возмущении матрицы-функции $A(t)$ тогда и только тогда, когда $\rho_p-\rho_1\leqslant 1$. К сожалению, этот критерий не является эффективным, поскольку нет методов вычисления частных индексов. В настоящее время известно мало эффективных критериев устойчивости индексов. Однако для лорановских матричных многочленов такой критерий получен в работе [4].

Для приближенного построения факторизации важно, чтобы факторизационные множители были *непрерывно зависящими от* $A(t)$ или *устойчивыми*. Это означает, что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любой матрицы-функции $\tilde{A}(t)$, удовлетворяющей неравенству $\left\|A(t)-\tilde{A}(t)\right\|_W<\delta$, среди всех возможных факторизаций $\tilde{A}(t)$ найдется факторизация $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)\tilde{D}(t)\tilde{A}_+(t)$, для которой $\left\|A_\pm(t)-\tilde{A}_\pm(t)\right\|_W<\varepsilon$.

Уточнение «среди всех возможных факторизаций» $\tilde{A}(t)$ вызвано тем, что факторизационные множители находятся не единственным образом и потому говорить об их близости для близких матриц-функций $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$ нельзя, не выбрав специальным образом соответствующие факторизации, т. е. как-то не пронормировав их. Необходимым условием устойчивости факторов $\tilde{A}_\pm(t)$ является совпадение частных индексов у исходной $A(t)$ и возмущенной $\tilde{A}(t)$ матриц-функций [2, Теорема 6.14]. Если это условие выполнено, то факторы $A_\pm(t)$ непрерывно зависят от $A(t)$ (теорема М.А. Шубина), см. [2, Теорема 6.15]. Неизвестно, однако, как нужно выбирать факторизацию $\tilde{A}(t)$, чтобы гарантировать устойчивость факторов. В силу этого невозможно получить явные оценки абсолютной погрешности $\left\|A_\pm(t)-\tilde{A}_\pm(t)\right\|_W$ нахождения факторизационных множителей. Данная проблема возникает потому, что неизвестно, как нужно нормировать факторизацию, чтобы добиться ее единственности. Поэтому основная часть работы будет посвящена нормировке факторизации в устойчивом случае.

Устойчивая факторизация Винера–Хопфа подразделяется на два случая. В первом случае все частные индексы равны друг другу, $\rho_1=\ldots=\rho_p$, и факторизация $A(t)$ имеет вид

$$A(t)=t^{\rho_1}A_-(t)A_+(t),$$

т.е. фактически эквивалентна канонической факторизации. Здесь трудностей с нормировкой не возникает, всегда факторизацию можно нормировать условием $A_-(\infty)=I_p$, где I_p – единичная матрица порядка p. В работе [5] этот случай подробно изучен, в ней исследована непрерывность факторизационных множителей и получены явные оценки для абсолютной погрешности этих факторов при малом возмущении исходной матрицы-функции.

В настоящей работе мы изучим второй случай устойчивости, когда $\rho_p-\rho_1=1$, т. е. когда $\rho_1=\ldots=\rho_{p-r}=s,\quad \rho_{p-r+1}=\ldots=\rho_p=s+1$, где числа s, r находятся из соотношения $\varkappa:=ind\det A(t)=sp+r$. Теперь $D(t)$ имеет следующий блочный вид:

$$D(t) = \begin{pmatrix} t^s I_{p-r} & 0 \\ 0 & t^{s+1} I_r \end{pmatrix},$$

где I_{p-r}, I_r – единичные матрицы соответствующих порядков. В первую очередь мы решим проблему нормировки устойчивой факторизации и опишем типы возможных нормировок факторизации заданной матрицы-функции. Далее мы покажем, что тип нормировки устойчив при малом возмущении исходной матрицы-функции. После этого мы сможем изучить непрерывность факторизационных множителей $A_{\pm}(t)$ и получить явные оценки для абсолютной погрешности при приближенном нахождении $A_{\pm}(t)$, аналогичные оценкам, полученным в [5] для канонической факторизации. Таким образом, теперь устойчивый случай будет полностью изучен.

1. P-нормировка факторизации Винера–Хопфа для матриц-функций с устойчивой системы частных индексов

Прежде всего напомним теорему Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей $A_{\pm}(t)$ [1, Гл. VIII, Теорема 1.2]. Сформулируем этот результат только для устойчивого случая.

Пусть $\rho_1 = \ldots = \rho_{p-r} = s$, $\rho_{p-r+1} = \ldots = \rho_p = s+1$, где числа s, r находятся из соотношения $\varkappa := ind \det A(t) = sp + r$. Обозначим $\mathcal{Q}_{-}(\rho_1, \ldots, \rho_p)$ множество всех блочно-треугольных матриц-функций вида

$$Q_{-}(t) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12}(t) \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где Q_{11}, Q_{22} – числовые обратимые матрицы размером $(p-r)\times(p-r)$ и $r\times r$ соответственно, а $Q_{12}(t)$ – матричный многочлен от t^{-1} степени не выше 1 размером $(p-r)\times r$: $Q_{12}(t) = Q_{12}^0 + Q_{12}^1 t^{-1}$.

По теореме Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей в устойчивом случае общий вид факторизационных множителей $A_{-}(t)$, $A_{+}(t)$ задается формулами

$$G_{-}(t) = A_{-}(t) Q_{-}(t), \quad G_{+}(t) = Q_{+}(t) A_{+}(t),$$

где $Q_{+}(t) = D^{-1}(t) Q_{-}^{-1}(t) D(t)$. Таким образом, для любой $Q_{-}(t) \in \mathcal{Q}_{-}(\rho_1, \ldots, \rho_p)$ равенство $A(t) = G\_(t) D(t) G\_+(t)$ задает новую факторизацию Винера–Хопфа $A(t)$ и любая факторизация $A(t)$ может быть получена аналогично при соответствующем выборе $Q_{-}(t)$.

Для определения нормировки факторизации Винера–Хопфа нам потребуется еще один тип факторизации матриц-функций – факторизация Биркгофа [3]. *Правой факторизацией Биркгофа* $A(t)$ называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = D_b(t) B_{-}(t) B_{+}(t), \ t \in \mathbb{T},$$

где $B_{\pm}(t) \in GW_{\pm}^{p\times p}(\mathbb{T})$ и $D_b(t) = diag\left[t^{\beta_1}, \ldots, t^{\beta_p}\right]$, $\beta_1, \ldots, \beta_p$ – правые индексы Биркгофа $A(t)$. Индексы Биркгофа не определяются однозначно матрицей-функцией $A(t)$. Однако среди всевозможных наборов индексов Биркгофа всегда существует набор, полученный некоторой перестановкой правых частных индексов [6]. Таким образом, одна из факторизаций Биркгофа всегда может быть записана в виде

$$A(t) = P D(t) P^{-1} B_{-}(t) B_{+}(t), \ t \in \mathbb{T}, \tag{3}$$

где P – некоторая матрица перестановок.

Следующее определение нормировки было предложено в совместном докладе Н. Адуковой и В. Адукова на 13-м конгрессе ISAAC [7].

Определение 1. Факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции $A(t)$:

$$A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t) \qquad (4)$$

называется P**-нормированной**, если выполняются следующие два условия:

Факторизация (4) задает факторизацию Биркгофа

$$A(t) = P\,D(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t)$$

по формулам $B_-(t) = P\,D^{-1}(t)P^{-1}C_-(t)D(t)$, $B_+(t) = C_+(t)$ для некоторой матрицы перестановок P из группы перестановок порядка n.

$$B_-(\infty) = P.$$

Оказывается, что выполнение этих условий обеспечивает существование нормировки, гарантирующей единственность факторизации.

Числовые матрицы $Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}^{(0)}, Q_{12}^{(1)}$ требуется подобрать так, чтобы привести факторизацию (1) к P-нормированной факторизации (4):

$$C_-(t) = A_-(t)Q_-(t).$$

Прежде всего мы покажем, что требование (1) из определения 1 приводит к так называемой блочной PLU-факторизации обратимой числовой матрицы $A_0 = A_-(\infty)$.

Разобьем числовую матрицу $A_0 = \begin{pmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{pmatrix}$ на такие же блоки, как в $Q_-(t)$. Напомним (см., например, [8]), что если в обратимой матрице A_0 обратим блок A_{11}^0, то она допускает блочно-треугольное разложение

$$A_0 = L_0 U_0 = \begin{pmatrix} L_{11}^0 & 0 \\ L_{21}^0 & L_{22}^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11}^0 & U_{12} \\ 0 & U_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

Если зафиксировать диагональные блоки матрицы L_0 (или U_0), взяв, например, $L_{11}^0 = I_{p-r}$, $L_{22}^0 = I_r$, то данное разложение будет единственным. Оно называется *блочной* LU*-факторизацией* A_0. Если же матрица A_{11}^0 – необратима, то всегда существует матрица перестановок P такая, что $P^{-1}A_0$ допускает блочную LU-факторизацию, т. е. A_0 допускает разложение $A_0 = PL_0U_0$. Оно называется *блочной* PLU*-факторизацией* A_0. Отметим, что матрица перестановок P находится не единственным образом.

Предложение 1. Если матрица-функция $A(t)$ с устойчивыми индексами допускает P-нормированную факторизацию, то для любой факторизации Винера–Хопфа $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$ матрица $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию.

Доказательство. Предположим, что матрица-функция $A(t)$ допускает P-нормированную факторизацию $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$ с матрицей перестановок P. Тогда в силу условия (1) из определения P-нормировки должно выполняться включение $P\,D^{-1}(t)P^{-1}C_-(t)D(t) \in W_-^{p\times p}(\mathbb{T})$.

Это требование равносильно тому, что в разложении блока $\left(P^{-1}C_-(t)\right)_{12}$ в матричный ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки коэффициенты при $1, t^{-1}$ должны быть нулевыми. В частности, матрица $P^{-1}C_-(\infty)$ является нижней блочно-треугольной. По теореме об общем виде факторизационных множителей, для любой факторизации $A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t)$ должно выполняться условие $C_-(t) = A_-(t)Q_-(t)$ для некоторой $Q_-(t)$ вида (2). В частности, $C_-(\infty) = A_-(\infty)Q_-(\infty)$, где $Q_-(\infty)$ – верхняя блочно-треугольная матрица. Отсюда следует, что $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию. □

Как указывалось, любая обратимая матрица $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию. Сейчас мы покажем, что это условие является достаточным условием для существования у матрицы-функции с устойчивой системой частных индексов нормировки P-типа.

Теорема 1. Пусть для матрицы-функции $A(t)$ существует факторизация *Винера–Хопфа* $A(t)=A_-(t)D(t)A_+(t)$ для которой числовая матрица $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию, т. е. для которой блок $\left(P^{-1}A_-(\infty)\right)_{11}$ – обратимая матрица.

Тогда $A(t)$ допускает P-нормируемую факторизацию

$$A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t), \tag{5}$$

где

$$C_-(t)=P\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-2}C_{12}^-(t) \\ C_{21}^-(t) & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}$$

и элементы блоков $C_{ij}^-(t)$ принадлежат алгебре Винера $W_-(\mathbb{T})$. Факторизационные множители $C_-(t)$, $C_+(t)$ находятся единственным образом.

Факторизация Винера–Хопфа (5) порождает факторизацию Биркгофа

$$A(t)=P\,D(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t),$$

где $B_-(t)=P\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-1}C_{12}^-(t) \\ t^{-1}C_{21}^- & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}$, $B_+(t)=C_+(t)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда для исходной факторизации Винера–Хопфа блок $A_0=\left(A_-(\infty)\right)_{11}$ – обратимая матрица, т. е. случай, когда $P=I_p$. Докажем существование I_p-нормированной факторизации. По теореме об общем виде факторизации любые два фактора $A_-(t)$, $C_-(t)$ связаны соотношением

$$C_-(t)=A_-(t)Q_-(t), \tag{6}$$

где $Q_-(t)$ имеет вид (2).

Подберем матрицы Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}^0, Q_{12}^1 так, чтобы фактор $C_-(t)$ имел нужный вид. Для этого разложим аналитические в области D_- матрицы-функции $A_-(t)$, $C_-(t)$ в ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$A_-(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\,t^{-k},\; C_-(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\,t^{-k}.$$

Из равенства (6) следует, что $C_k=\sum_{j=0}^{k}A_{k-j}\,Q_j$, в частности, $C_0=A_0\,Q_0$. Построим блочную LU-факторизацию матрицы $A_0=L_0U_0$, выбрав в качестве диагональных элементов матрицы L_0 единичные матрицы I_{p-r}, I_r. Положим $Q_0=U_0^{-1}$, тогда $C_0=L_0$. Обратимые матрицы Q_{11}, Q_{22} и коэффициент Q_{12}^0 матричного многочлена $Q_{12}(t)=Q_{12}^0+Q_{12}^1\,t^{-1}$ определены единственным образом. Оставшийся матричный коэффициент Q_{12}^1 определим как $Q_{12}^1=-(A_{11}^0)^{-1}\left(A_1U_0^{-1}\right)_{12}$. Тогда легко видеть, что для матричного коэффициента C_1 блок $(C_1)_{12}=0$. Это означает, что матрица-функция $C_-(t)$ имеет требуемый вид. Поскольку матрицы Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}^0, Q_{12}^1, определяющие матричный многочлен $Q_-(t)$, находятся единственным образом, то факторизация Винера–Хопфа (5) определяется однозначно.

Определим матрицу-функцию $B_-(t)=D^{-1}(t)C_-(t)D(t)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$B_-(t)=\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-1}C_{12}^-(t) \\ t^{-1}C_{21}^-(t) & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что матрица-функция $B_-(t)$ вместе с обратной принадлежит алгебре $W_-^{p\times p}(\mathbb{T})$ и $B_-(\infty)=I_p$. Таким образом, факторизация (5) является I_p-нормированной. Поскольку $A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t)=D(t)B_-(t)C_+(t)$, то мы построили для $A(t)$ по факторизации Винера–Хопфа ее факторизацию Биркгофа. Часть теоремы, относящаяся к случаю $P=I_p$, полностью доказана. Случай, когда $A_-(\infty)$, допускает PLU-факторизацию для некоторой матрицы перестановок P, т. е. для случая, когда $(P^{-1}A_-(\infty))_{11}$, легко сводится к уже рассмотренному. □

2. Устойчивость P-нормировки и непрерывность факторизационных множителей

В этом параграфе мы прежде всего изучим устойчивость P-нормировки при малом возмущении. При определении нормы $\|\cdot\|_W$ матрицы-функции из матричной алгебры Винера мы будем использовать максимальную столбцовую норму $\|\cdot\|_1$ для ее матричных коэффициентов Фурье.

Определение 2. P-нормировка факторизации матрицы-функции $A(t)$ называется **устойчивой** при малом возмущении $A(t)$, если для любого достаточно малого $\delta>0$ любая матрица-функция $\tilde{A}(t)$, имеющая тот же набор правых частных индексов $\rho_1,\ldots,\rho_p$, что и $A(t)$, и удовлетворяющая неравенству $\|A(t)-\tilde{A}(t)\|_W<\delta$, имеет тот же тип нормировки, что и $A(t)$.

Очевидно, что при $\rho_p-\rho_1=0$ каноническая нормировка является устойчивой. Рассмотрим теперь случай $\rho_p-\rho_1=1$.

Теорема 2. Нормировка P-типа для матрицы-функции $A(t)$ с устойчивой системой частных индексов является устойчивой при малом возмущении $A(t)$.

Доказательство. Предположим вначале, что матрица-функция $A(t)$ допускает нормированную факторизацию I_p-типа: $A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t)$, где

$$C_-(t)=\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-2}C_{12}^-(t) \\ C_{21}^-(t) & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}.$$

Значит, $C_-(\infty)=\begin{pmatrix} I_{p-r} & 0 \\ C_{21}^-(\infty) & I_r \end{pmatrix}$. Поскольку $A(t)$ имеет устойчивую систему частных индексов, то любая достаточно близкая к $A(t)$ матрица-функция $\tilde{A}(t)$ будет иметь такую же систему частных индексов.

Тогда, по теореме Шубина, для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta>0$ такое, что, если $\|A(t)-\tilde{A}(t)\|_W<\delta$, то существует факторизация $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)D(t)\tilde{A}_+(t)$, для которой $\|C_-(t)-\tilde{A}_-(t)\|_W<\varepsilon$. Поэтому $\|C_-(\infty)-\tilde{A}_-(\infty)\|_1<\varepsilon$, а значит, и $\left\|I_{p-r}-\left(\tilde{A}_-(\infty)\right)_{11}\right\|_1<\varepsilon$. Таким образом, числовая матрица $\left(\tilde{A}_-(\infty)\right)_{11}\neq 0$ достаточно близка к единичной матрице и потому обратима. Это означает, что матрица-функция $\tilde{A}(t)$ допускает нормированную факторизацию I_p-типа.

Пусть теперь $A(t)$ допускает нормированную факторизацию P-типа. Образуем матрицы-функции $F(t)=P^{-1}A(t)$ и $\tilde{F}(t)=P^{-1}\tilde{A}(t)$, где $\tilde{A}(t)$ – любая достаточно близкая к $A(t)$ матрица-функция. Тогда числовая матрица $\left(P^{-1}\tilde{A}(\infty)\right)_{11}$ будет достаточно близка к единичной матрице и потому является обратимой. Это означает, что $\tilde{A}(t)$ допускает нормированную факторизацию P-типа. □

Теперь нетрудно изучить вопрос о непрерывности факторизационных множителей для матрицы-функции $A(t)$ и уточнить теорему Шубина. Оказывается, что если $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$ достаточно близки и имеют одинаковый набор правых частных индексов, то, одинаково нормировав их факторизации, мы получим достаточно близкие факторизационные множители $C_\pm(t)$ и $\tilde{C}_\pm(t)$. При этом использование факторизаций Биркгофа, порожденных P-нормированными факторизациями $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$, позволяет применить для оценки $\left\|C_\pm-\tilde{C}_\pm\right\|_W$ результаты работы [5].

Теорема 3. Пусть матрица-функция $A(t)$ допускает P-нормированную факторизацию $A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t)$ и матрица-функция $\tilde{A}(t)$ удовлетворяет неравенству $\left\|A(t)-\tilde{A}(t)\right\|<\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что $\tilde{A}(t)$ допускает нормированную факторизацию $\tilde{A}(t)=\tilde{C}_-(t)D(t)\tilde{C}_+(t)$ того же типа, что $A(t)$, и

$$\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{4}\|A\|_W, \frac{1}{16\left\|C_+^{-1}\right\|_W\left\|C_-^{-1}\right\|_W}, \frac{1}{128\left\|C_+\right\|_W\left\|C_-^{-1}\right\|_W^2\left\|C_+^{-1}\right\|_W^2}\right\}. \tag{7}$$

Тогда

$$\left\|C_--\tilde{C}_-\right\|_W<8\left(\left\|C_+^{-1}\right\|_W+128\|A\|_W\left\|C_-^{-1}\right\|_W^2\left\|C_+^{-1}\right\|_W^2\right)\cdot\varepsilon, \left\|C_+-\tilde{C}_+\right\|_W<32\left(\left\|C_+\right\|_W^2\left\|C_-^{-1}\right\|_W^2\left\|C_+^{-1}\right\|_W^2\right)\cdot\varepsilon. \ □$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740024.

Литература

1. Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

2. Litvinchuk, G.S. Factorization of measurable matrix functions / G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovsky. – Birkhauser, Basel-Boston, 1987. – 372 p.

3. Clancey, K.F. Factorization of matrix functions and singular integral operators. Operator Theory, Advances and Applications / K.F. Clancey, I. Gohberg. – 1981. – 236 p.

4. Adukova, N.V. On effective criterion of stability of partial indices for matrix polynomials / N.V. Adukova, V.M. Adukov // Proceedings of the Royal Society A. – 2020. – Vol. 476, Iss. 2238. – p. 20200012.

5. Адукова, Н.В. Устойчивость факторизационных множителей канонической факторизации Винера–Хопфа матриц-функций / Н.В. Адукова, В.Л. Дильман // Вестник Южно-Уральского университета, серия Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 5–13.

6. Чеботару, И.С. Сведение систем уравнений Винера–Хопфа с системам с нулевыми индексами / И.С. Чеботару // Изв. АН Молд. ССР, сер. физ.-техн. н. – 1967. – № 8. – С. 54–66.

7. Adukova, N. On a normalization of the Wiener–Hopf factorization for matrix functions / N. Adukova, V. Adukov // 13th International ISAAC Congress, August 2–6, 2021, Ghent, Belgium. – 2021. – P. 45.

8. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

Поступила в редакцию 5 декабря 2021 г.

Сведения об авторе

Адукова Наталия Викторовна, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия, E-mail: adukovanv@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 1, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph220101

STABILITY OF FACTORIZATION FACTORS OF WIENER–HOPF FACTORIZATION OF MATRIX FUNCTIONS

N.V. Adukova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: adukovanv@susu.ru

Abstract. We consider the Wiener–Hopf factorization of two matrix functions A(t) and B(t) that are quite close in the norm of the Wiener algebra. The aim of this work is to study the question when the factorization factors of $A(t)$, $B(t)$ will be close enough to each other. This problem is of considerable interest in connection with the development of methods for approximate factorization of matrix functions. There are two main obstacles in the study of this problem: the instability of the partial indices of matrix functions and the non-uniqueness of their factorization factors. The problem was previously studied by M.A. Shubin, who showed that the stability of factorization factors takes place only in the case when $A(t)$ and $B(t)$ have the same partial indices. Then there is a factorization $B(t)$ for which the factorization factors are sufficiently close to the factors of $A(t)$. Theorem M.A. Shubin is non-constructive since it is not known when the partial indices of two close matrix functions will be the same, and the method for choosing the required Wiener–Hopf factorization of the matrix function $B(t)$ is not indicated. To overcome these shortcomings, in the present paper we study the problem of normalization of the factorization in the stable case, describe all possible types of normalizations, and prove their stability under a small perturbation $A(t)$. Now it is possible to find a constructive way of choosing the factorization of the perturbed matrix function, which guarantees the stability of the factorization factors.

Keywords: Wiener–Hopf factorization; stable system of partial indices; stability of factorization factors; normalization of factorization.

References

1. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* (Convolution Equations and Projection Methods for their Solution). Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russ.)

2. Litvinchuk G.S., Spitkovsky I.M. *Factorization of Measurable Matrix Functions*. Birkhauser, Basel-Boston, 1987, p. 372. DOI: 10.1007/978-3-0348-6266-0

3. Clancey K.F., Gohberg I. Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators. *Operator Theory, Advances and Applications*, 1981, p. 236. DOI:10.1007/978-3-0348-5492-4

4. Adukova N.V., Adukov V.M. On effective Criterion of Stability of Partial Indices for Matrix Polynomials. *Proc. R. Soc. A.*, 2020, Vol. 476, Iss. 2238, 20200012. DOI:10.1098/rspa.2020.0012

5. Adukova N.V., Dilman V.L. Stability of Factorization Factors of the Canonical Factorization of Wiener–Hopf Matrix Functions. *Bulletin of the South Ural State University, Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 5–13. (in Russ.).

6. Chebotaru I.S. Svedenie sistem uravneniy Vinera–Khopfa s sistemam s nulevymi indeksami (Reduction of Systems of Wiener–Hopf Equations to Systems with Zero Indices). *Izv. AN MSSR*, 1967, no. 8, pp. 54–66. (in Russ.).

7. Adukova N., Adukov V. On a Normalization of the Wiener–Hopf Factorization for Matrix Functions. *Proc. 13th ISAAC Congress, August 2–6, Ghent, Belgium,* 2021, pp. 45.

8. Voevodin V.V., Kuznecov U.A. *Matritsy i vychisleniya* (Matrices and Calculations). Moscow, Nauka Publ., 1984, 318 p. (in Russ.).

Received December 5, 2021

Information about the author

Adukova Nataliya Viktorovna, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: adukovanv@susu.ru

УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph220102

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

В.А. Белоногов
Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация
E-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач об определении коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта. В цилиндрической пространственной области рассматривается параболическое уравнение второго порядка. Область делится на две подобласти, на общей части границы которых задается условие сопряжения. Коэффициент теплообмена, входящий в условие сопряжения, ищется в виде конечного отрезка ряда с неизвестными коэффициентами Фурье, зависящими от времени. Уравнение дополняется краевыми условиями общего вида и начальными условиями, а также условиями переопределения. Условия переопределения – значения решения в некотором наборе точек, лежащих в пространственной области. При естественных условия гладкости на данные и расположение точек замеров показана локальная по времени теорема существования и единственности решений. Полученное решение является регулярным, т. е. все обобщенные производные, входящие в уравнение, суммируемы с некоторой степенью и уравнение выполняется почти всюду. Метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

Ключевые слова: обратная задача, задача сопряжения, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

Введение

Мы исследуем обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи, входящего в условие сопряжения. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t),\ (x,t)\in Q = G\times(0,T), \tag{1}$$

где $Lu = a_{nn}u_{x_nx_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u$, $G\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная цилиндрическая область вида $G=\Omega\times(0,l)$ ($\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$, $\partial\Omega\in C^2$). Пусть $\Gamma=\partial\Omega\times(0,l)$, $S=(0,T)\times\Gamma$. Положим $G_1=\Omega\times(0,a)$ ($a\in(0,l)$), $G_2=\Omega\times(a,l)$. Уравнение (1) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_S = g, u(0,x)=u_0(x)(x\in G), R_0u(t,x',0)=g_0, R_1u(t,x',l)=g_1, \tag{2}$$

где $Ru=u$ или $Ru=\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, $R_0u=u$ или $R_0u=-u_{x_n}+\sigma_0u$, соответственно, $R_1u=u$ или $R_1u=u_{x_n}+\sigma_1u$, а также условиями сопряжения:

$$B^+u=\frac{\partial u^+}{\partial N}-\beta(u^+-u^-)=g^+, \frac{\partial u^+}{\partial N}=\frac{\partial u^-}{\partial N}, \tag{3}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t,x')=\lim_{x_n\to a\pm0} a_{nn}u_{x_n}(t,x',x_n), u^\pm=\lim_{x_n\to a\pm0} u(t,x',x_n)$. Пусть $y_i=(y_i',a)$ ($i=1,2,\ldots,r$) – некоторый набор точек. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u(t,y_i',y_n)\big|_{y_n=a+0}=\psi_i(t)\ (i=1,2,\ldots,r_0),\ u(t,y_i',y_n)\big|_{y_n=a-0}=\psi_i(t)\ (i=r_0+1,\ldots,r). \tag{4}$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4) и неизвестной функции β вида $\beta=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(t)\Phi_i(t,x')$, где функции Φ_i заданы, а функции α_i считаются неизвестными. Условия сопряжения (3) совпадают с известными в теории тепломассопереноса условия на границе двух сред, когда контакт не является идеальным (см. [1]) Если $\beta\to\infty$, мы получим стандартную постановку задачи дифракции (см. [2, 16, гл. 3]), когда условия имеют вид $u^+=u^-$, $\left.\frac{\partial u^+}{\partial N}\right|_{S_0}=\left.\frac{\partial u^-}{\partial N}\right|_{S_0}$.

Обратные задачи вида об определении коэффициента теплопередачи возникают при моделировании теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, исследовании композитных материалов и т. п. (см. [3–8]). В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решения задач типа (1)–(4) в различных постановках, возникающих в приложениях, как правило, ищется коэффициент β, зависящими от времени или наоборот от пространственных переменных, точки $\{y_i\}$ в (4) чаще всего являются внутренними точками областей G_1, G_2. В приложениях возникают два случая, в первом из них одна из областей, например, G_2 лежит строго внутри области G и во втором случае рассматривается цилиндрическая область, описанная выше, состоящая из двух или более слоев (см. [7, 8]). Численному решению задачи или близкой к ней посвящены работы [5–12]. В качестве метода почти во всех работах используется сведение обратной задачи к некоторой задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала [5, 6, 9–12]. Иногда возникают и задачи об одновременном определении коэффициента, входящего в параболическое уравнение, и коэффициента теплообмена (см. [6]). В этой работе в качестве условий переопределения используются значения замеров температур в точках на границе раздела слоев (как и в условии (4)). Насколько нам известно, теоретических результатов о разрешимости (или единственности решений) задач вида (1)–(4) в литературе не имеется.

В данной работе мы изучаем вопросы корректности задачи (1)–(4), в частности, мы получим теоремы существования и единственности решений (основной результат – теорема 2).

Определения и вспомогательные результаты

В работе мы используем пространства Соболева и Гельдера $W_p^s(G)$, $W_p^s(Q)$, $C^{\alpha}(\overline{Q})$ а также их анизотропные варианты $W_p^{s,r}(S)$, $W_p^{s,r}(Q)$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$ (см. определения в [2, 13, 14]). По определению $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(0,T;L_p(G))\cap L_p(0,T;W_p^r(G))$. Пусть Γ – гладкая поверхность размерности $n-1$ и $S=(0,T)\times\Gamma$. Тогда, соответственно, $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Определение включения $\partial\Omega\in C^2$ может быть найдено в [2, с. 9]). Пусть $(u,v)=\int_G u(x)\overline{v(x)}dx$. Обозначим через $B_\delta(y_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке y_i. Параметр $\delta>0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(y_i)}\cap\partial G=\varnothing$, $\overline{B_\delta(y_i)}\cap\overline{B_\delta(y_j)}=\varnothing$ для $i\neq j$. Далее во всех условиях на данные считаем такой параметр фиксированным.

Введём обозначения: $Q^\phi=(0,\phi)\times G$, $S_0=(0,T)\times\Omega$, $S_0^\phi=(0,\phi)\times\Omega$, $\Gamma_1=\partial\Omega\times(0,a)$, $\Gamma_2=\partial\Omega\times(a,l)$, $S_i^\phi=(0,\phi)\times\Gamma_i$, $S_i=(0,T)\times\Gamma_i$ $(i=1,2)$, $G^\delta=\cup_i B_\delta(x_i)$, $G_i^\delta=G^\delta\cap G_i$ $(i=1,2)$, $Q_i=(0,T)\times G_i$, $Q_i^\tau=(0,\tau)\times G_i$ $(i=1,2)$. Нам понадобятся весовые пространства $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q)=\{u\in W_p^{s,2s}(Q): ut^{-s}\in L_p(Q)\}$ с нормой

$$\|u\|^p_{W_p^{s,2s}(Q)} = \left(\int\limits_G \int\limits_0^T \frac{|u(x,t)|^p}{t^{sp}} dtdx + \int\limits_G \int\limits_0^T \int\limits_0^T \frac{|u(x,t)-u(x,t)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}} dtd\tau dx + \|u\|^p_{L_p(0,T;\tilde{W}_p^{2s}(G))} \right)^{1/p} \qquad (5)$$

Вообще говоря, при $s<1/p$ это пространство совпадает с $W_p^{s,2s}(Q)$, а при $s>1/p$ с подпространством $\{u\in W_p^{s,2s}(Q): u(0,x)=0\}$ (см. лемму 1 пункта 3.2.6 в [13]). По аналогии определяем пространства $\tilde{W}_p^s(0,T;L_p(\Gamma))$, $\tilde{W}_p^{s,2s}(S_i)$. Положим $s_0=1/2-1/2p$, $s_1=1-1/2p$ и всюду ниже считаем, что $p>n+2$. Доказательство следующей леммы совпадает с приведенным в лемме 2 в [15]). Поэтому мы его опустим.

Лемма 1 *Существует постоянная C, не зависящая от $\phi\in(0,T]$, такая, что*

$$\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_i^\phi)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_i^\phi)} \le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_i^\phi)},$$

$$\left\|v_{x_n}(t,x',c)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\phi)} + \left\|v(t,x',c)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_0^\phi)} \le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_i^\phi)}, i=1,2, \qquad (6)$$

где $c=0$ или $c=a$ при $i=1$ и $c=a$ или $c=l$ при $i=2$, для всех $v\in W_p^{1,2}\left(Q_i^\phi\right)$ таких, что $v(0,x)=0$. Здесь $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ – производная по нормали к S_i^ϕ.

Лемма 2 *Пусть $s\in(1/p,1)$. Произведение $q\cdot v$ функций класса $W_p^{s,2s}\left(Q^\tau\right)$ $(\tau\in(0,T])$ снова принадлежит $W_p^{s,2s}\left(Q^\tau\right)$, а если $q\in\tilde{W}_p^{s,2s}\left(Q^\tau\right)$ и $v\in\tilde{W}_p^{s,2s}\left(Q^\tau\right)$ (или $v\in W_p^{s,2s}(Q)$), то справедливы соответствующие оценки*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)} \le c_0\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)},\ \|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)} \le c_1\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

где постоянные c_i не зависят от τ. Множество Q^τ в этих утверждениях может быть заменено Q_i^τ, S_i^τ. В случае если q зависит только одной переменной t, норма q в $\tilde{W}_p^{s,2s}\left(Q^\tau\right)$ в этих неравенствах заменяется на норму q в $\tilde{W}_p^s(0,\tau)$.

Доказательство. Доказательство основано на определении нормы и оно повторяет доказательство леммы 1 в [16]. Поэтому мы его опустим.

Оператор L считается эллиптическим, т. е. для некоторой постоянной $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \delta_0|\xi|^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \forall(t,x)\in Q,$$

(здесь и далее полагаем, что $a_{ni}=a_{in}=0$ при $i<n$). Приведем условия на данные. Мы предполагаем, что

$$a_i\in L_p(Q)(i=0,\ldots,n),\ a_{ij}\in C\left(\overline{Q_k}\right), \sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}\left(\overline{S_k}\right), \qquad (7)$$

$$a_{ij}\big|_{S_k}\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0+\varepsilon}\left(\overline{S_k}\right), \sigma_k\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}\left(\overline{S_0}\right), i,j=1,\ldots,n, k=1,2, \qquad (8)$$

где $\varepsilon_0\in(0,1/2)$ – положительный параметр (он может быть как угодно мал) и включения $a_{ij}\big|_{S_k}, \sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\bar{S}_k)$ означают, что $a_{ij}\big|_{S_k}, \sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(S_k)$ и эти функции допускают непрерывное продолжение на $\overline{S_k}$ класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\bar{S}_k)$. При переходе через плоскость $x_n=a$ они, вообще говоря, имеют разрывы первого рода.

Дополнительно предположим, что

$$a_i\in L_\infty\left(0,T;W_p^1\left(G_k^\delta\right)\right)(i=0,\ldots,n), a_{ij}\in L_\infty\left(0,T;W_\infty^1\left(G_k^\delta\right)\right), i,j=1,2,\ldots,n, \qquad (9)$$

где $k=1,2$. Построим функции $\varphi_i(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x)=1$ в $B_{\delta/2}(x_i)$ и $\varphi_i(x)=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus B_{3\delta/4}(x_i)$, положим $\varphi(x)=\sum_i \varphi_i(x)$ ($i=1,2,\ldots,r$). Считаем, что

$$u_0(x)\in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_k),g^+\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),g_i\in W_p^{k_1,2k_1}(S_0),g\in W_p^{k_0,2k_0}(S_i)\ (i=1,2), \tag{10}$$

где $k_0=s_0$ (соответственно, $k_1=s_0$) в случае условий третьей краевой задачи и $k_0=s_1$ (соответственно $k_1=s_1$) в случае условий Дирихле. Условия согласования при $t=0$ записываются в виде:

$$g(0,x)=Ru_0|_\Gamma,\frac{\partial u_0^+}{\partial N}=\frac{\partial u_0^-}{\partial N}, \tag{11}$$

$$B^+u_0=\frac{\partial u_0^+}{\partial N}-\beta(u_0^+-u_0^-)=g^+(0,x'), \tag{12}$$

где $\frac{\partial u_0^\pm}{\partial N}(x')=a_{nn}u_{0x_n}(0,x',a\pm 0),u_0^\pm=u_0(x',a\pm 0)$. Пусть также

$$f\in L_p(Q),a_{nn}(t,x',a\pm 0)\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}),\nabla_{x'}\varphi f(t,x)\in L_p(Q), \tag{13}$$

$$\nabla_{x'}\varphi u_0(x)\in W_p^{2-2/p}(G_k)\ \nabla_{x'}\varphi g^+\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),\nabla_{x'}a_{nn}(t,x',a\pm 0)\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta}), \quad (14$$

$$\Phi_i\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),\nabla_{x'}\Phi_i\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta}),i=1,\ldots,r,k=1,2, \tag{15}$$

где $S_{0\delta}=(0,T)\times\cup_{i=1}^r B_\delta(y_i')$, положим $S_{0\delta}^\tau=(0,\tau)\times\cup_{i=1}^r B_\delta(y_i')$. Нам понадобятся дополнительные условия согласования:

А) если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $g_i(t,x')|_{\partial\Omega}=g(t,x',r_i)$ $(r_0=0,r_1=l)$; если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru\neq u$, то $R(t,x',r_i)g_i(t,x')|_{\partial\Omega}=g(t,x',r_i)$; если $R_iu\neq u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $R_ig(t,x',r_i)=g_i(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $Ru=u$, то $B^+g=g^+(t,x')|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial g^+}{\partial N}=\frac{\partial g^-}{\partial N}$, где $\frac{\partial g^\pm}{\partial N}=a_{nn}g_{x_n}(t,x',a\pm 0)$.

Приведем теорему о разрешимости прямой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А), (7)–(14) *и* $\beta\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0)$, $\nabla_{x'}\beta\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta})$. *Тогда для любого* $\tau\in(0,T]$ *существует единственное решение* u *задачи (1)–(3) такое, что* $u,\nabla_{x'}\varphi u(t,x)\in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)\cap W_p^{1,2}(Q_2^\tau)$. *Если* $u_0\equiv 0$, *то справедлива оценка*

$$\|\nabla_{x'}\phi u(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|\nabla_{x'}\phi u(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}$$

$$C_1(\|g\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_1^\tau)}+\|g\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_2^\tau)}+\|f\|_{L_p(Q^\tau)}+\|\nabla_{x'}\varphi f\|_{L_p(Q^\tau)}+\|g^+\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}$$

$$+\|\nabla_{x'}\varphi g^+(t,x')\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\|g_0\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_0^\tau)}+\|g_1\|_{\tilde W_p^{k_2,2k_2}(S_0^\tau)}), \tag{16}$$

где постоянная C_1 не зависит от $\tau\in(0,T)$ и $k_0=s_1$ или $k_1=s_1$ или $k_2=s_1$ если соответствующий оператор R или R_0, или R_1 определяет условие Дирихле. Если оператор R или R_1 или R_2 задает условие типа Робина, то $k_0=s_0$ или, соответственно, $k_1=s_0$ или $k_2=s_0$.

Доказательство теоремы 1. Утверждение о разрешимости задачи (1)–(3) из класса $u\in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)\cap W_p^{1,2}(Q_2^\tau)$ вытекает из теоремы 3 [17]. Наша задача – частный случай задачи рассмотренной в этой теореме. Однако, к сожалению у нас есть отличия в условиях гладкости на коэффициент β. Вообще говоря в [17] требуется, чтобы он принадлежал некоторому классу

Гельдера. Однако само утверждение теоремы 3 сформулировано для любого p. В нашем случае условие $p>n+2$ гарантирует, как и в случае пространств Гельдера, справедливость соответствующей теоремы о точечных мультипликаторах для пространств Соболева (лемма 2) и соответственно справедливость этой теоремы. Утверждение о дополнительной гладкости решения может быть легко доказано с помощью метода конечных разностей. Фактически, доказательство совпадает с доказательством первой половины теоремы 4 [18, гл. 4, §2, п. 3], где вначале устанавливается дополнительная гладкость решений по касательным переменным. Обоснование того факта, что постоянная C_1 в (16) может быть взята не зависящей от τ осуществляется по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 2 в [17].

Основные результаты

Приведем дополнительные условия на исходные данные. Пусть $\Phi(t)$ – матрица с элементами $\phi_{ij}=\Phi_j(t,y_j')$. Мы предполагаем, что

$$u_0^+(y_j')\neq u_0^-(y_j')\ \ (i=1,2,\ldots,r), |\det\Phi|\geq\delta_1>0\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{17}$$

$$u_0^+(y_j')=\psi_i(0),\ \psi_i(t)\in W_p^{s_1}(0,T)\ \ (i=1,2,\ldots,r_0),\ u_0^-(y_j')=\psi_i(0)\ \ (i=r_0+1,\ldots,r), \tag{18}$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Рассмотрим равенство (12) в точке $(0,y_j')$:

$$B^+u_0=\frac{\partial u_0^+(y_j')}{\partial N}-\beta(0,y_j')(u_0^+(y_j')-u_0^-(y_j'))=g^+(0,y_j'),\ \beta(0,y_j')=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(0)\Phi_i(0,y_j'). \tag{19}$$

Положив $\vec{\beta}_0=(\beta_1(0),\ldots,\beta_r(0))$, $\vec{F}=(F_1,\ldots,F_r)$, получим систему

$$\Phi(0)\vec{\beta}_0=\vec{F}_0,\ F_j=\left(\frac{\partial u_0^+(y_j')}{\partial N}-g_j^+(0,y_j')\right)\Big/\left(u_0^+(y_j')-u_0^-(y_j')\right),\ j=1,2,...,r,$$

которая в силу условия (17) имеет единственное решение $\vec{\beta}_0$. Положим $\beta_0=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(0)\Phi_i(t,x')$, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, $\alpha_k=\beta_k-\beta_k(0)$, $\alpha(t,x')=\beta(t,x')-\beta_0(t,x')$. Тогда, чтобы было выполнено (12), необходимо

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N}(x')=\beta_0(0,x')(u_0^+-u_0^-)(x')+g^+(0,x'),\frac{\partial u_0^+}{\partial N}(x')=\frac{\partial u_0^-}{\partial N}(x'),\ x'\in\Omega. \tag{20}$$

Считая, что условия теоремы 1 выполнены, построим решение w_0 задачи сопряжения (1)–(3) на промежутке $[0,T]$, где возьмем функцию β_0 вместо β. Отметим, что в силу условия (15) и леммы 2, $\beta_0\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0)$, $\nabla_{x'}\beta_0\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta})$ и таким образом, условия теоремы 1 на коэффициент β выполнены. Условия (17), (18) и включение $w_0\in W_p^{1,2}(Q_k)\subset C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_k})$ ($\alpha\leq 2-(n+2)/p$, $k=1,2$) гарантируют существование постоянных $\tau^0>0,\delta_2>0$ таких, что

$$|\psi_i(t)-w_0^-(t,y_j')|\geq\delta_2>0\ \ (i\leq r_0),\ |\psi_i(t)-w_0^+(t,y_j')|\geq\delta_2>0,\ \forall t\in[0,\tau^0],\ (i>r_0). \tag{21}$$

Сделаем замену $u=v+w_0$ в (1)–(4). Функция v есть решение обратной задачи

$$Mv=v_t-Lv=0,\ Bv|_S=0,\ v|_{t=0}=0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}-\beta_0(v^+-v^-)=\alpha(v^+-v^-)+\alpha(w_0^+-w_0^-),\ \frac{\partial v^+}{\partial N}=\frac{\partial v^-}{\partial N},\ (t,x')\in S_0, \tag{23}$$

$$v^+(t,y_j')=\tilde{\psi}_i(t)=\psi_i(t)-w_0^+(t,y_j')\ \ (i\leq r_0),\ v^-(t,y_j')=\tilde{\psi}_i(t)=\psi_i(t)-w_0^-(t,y_j')\ \ (i>r_0). \tag{24}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А), (7)–(11), (13)–(15), (17), (18), (20) *. Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение u задачи* (1)–(4) *такое, что* $u\in W_p^{1,2}(Q_i^{\tau_0})$ $(i=1,2)$, $\beta_i(t)\in W_p^{s_0}(0,\tau_0)$ $(i=1,2,\ldots,r)$*, причем* $\nabla_{x'}\varphi u(x)\in W_p^{1,2}(Q_i^{\tau_0})(i=1,2)$.

Доказательство. Достаточно доказать разрешимость вспомогательной задачи (22)–(24). Построим интегральное уравнение для нахождения вектор-функции $\vec{\alpha}$. Фиксируя функцию α и применяя теорему 1 к задаче (22)–(23), мы построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Возьмем точку $y_i' \in \Omega$ и функцию φ_i $(i \le r)$. Умножая уравнение (22) на φ_i, имеем

$$Mw = w_t - Lw = [\varphi_i, L]v = f_0, w = \varphi_i v, w|_{t=0} = 0, \tag{25}$$

где $[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} v_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} v \varphi_{ix_k x_l} - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{ix_k} v$. Равенства (25) можно переписать в виде

$$w_t - a_{nn}(t,x) w_{x_n x_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{x_i} + a_0 w + f_0 = f_1. \tag{26}$$

Отметим, что $a_{nn} > 0$ для всех t,x. Имеем, что $f_1, \nabla_{x'} f_1 \in L_p(Q^\tau)$. В силу теорем вложения, $f_1(t,x',x_n) \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}; L_p((0,\tau)\times(0,l))\right)$ с $\alpha \le 1-(n-1)/p$, после может быть изменения на множестве меры ноль (см. соотношения (3.1)–(3.3), (3.5), (3.6), следствие 4.3 в [19] и включение (5.7′) в [20]). Рассмотрим уравнения

$$w_{it}(t,x_n) - a_{nn}(t,y_i',x_n) w_{ix_n x_n} = f_1(t,y_i',x_n) \ (i = 1,2,\ldots,r_0), \tag{27}$$

$$w_{it}(t,x_n) - a_{nn}(t,y_i',x_n) w_{ix_n x_n} = f_1(t,y_i',x_n) \ (i = r_0+1,\ldots,r). \tag{28}$$

Дополним уравнения (27), (28) начальными и краевыми условиями

$$w_i(0,x_n) = 0, w_i|_{x_n=a+0} = \psi_i(t), w_i|_{x_n=a+\delta} = 0, i \le r_0. \tag{29}$$

$$w_i(0,x_n) = 0, w_i|_{x_n=a-0} = \psi_i(t), w_i|_{x_n=a-\delta} = 0, i > r_0. \tag{30}$$

Решение w_i задачи (27), (29) (или (28), (30) соответственно) существует и единственно [2]. В случае если $v, \vec{\alpha}$ есть решение задачи (22)–(24), имеем, что $w_i(t,x_n) = \varphi_i v(t,y_i',x_n)$. Перепишем условие сопряжения (23) в виде

$$a_{nn}^+ v_{x_n}^+(t,x') - \beta_0(v^+ - v^-)(t,x') = \alpha(v^+ - v^-)(t,x') + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,x'), \tag{31}$$

Рассмотрим это условие в точке (t,y_i') и используя (24), получим

$$\begin{gathered} a_{nn}^+(t,y_i')v_{x_n}^+(t,y_i') - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') = \\ \alpha(v^+ - v^-)(t,y_i')) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')), \ i = 1,2,\ldots,r_0, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} a_{nn}^-(t,y_i')v_{x_n}^-(t,y_i') - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') = \\ \alpha(v^+ - v^-)(t,y_i')) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')), \ i = r_0+1,\ldots,r. \end{gathered} \tag{33}$$

Искомая система для нахождения координат вектора $\vec{\alpha}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha(t,y_i') = (a_{nn}^+(t,y_i')w_{ix_n}(t,a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') + \\ \alpha v^-(t,y_i'))\big/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')) = F_i, \ i = 1,2,...,r_0, \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \alpha(t,y_i') = (a_{nn}^-(t,y_i')w_{ix_n}(t,a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') - \\ \alpha v^+(t,y_i'))\big/(-\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')) = F_i, \ i = r_0+1,...,r. \end{gathered} \tag{35}$$

Отметим, что в силу (21) знаменатели в этих равенствах строго отделены от нуля на промежутке $[0,\tau^0]$. Здесь v – решение задачи сопряжения (22)–(23), а функции w_i – решения задач (27), (29) и (27), (30) соответственно. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \tag{36}$$

где координаты вектора F определены равенствами (34), (35). Отметим, что лемма 2 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1}\vec{F}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\|\vec{F}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{37}$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре $B_{R_0} = \{\vec{\alpha} \in W_p^{s_0}(0,\tau) : \|\vec{\alpha}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)} \le R_0\}$ и переводит его в себя. Возьмем $\vec{\alpha} = 0$. Тогда в силе единственности решений задачи сопряжения (22)–(23) $v = v(\vec{\alpha}) = 0$, в этом случае вектор $\vec{F}(0)$ запишется в виде

$$F_i(0) = a_{nn}^{+}(t, y_i')\omega_{ix_n}(t,a)\big/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^{+} - w_0^{-})(t, y_i')),\ i = 1,2,\dots,r_0,$$

$$F_i(0) = a_{nn}^{-}(t, y_i')\omega_{ix_n}(t,a)\big/(-\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^{+} - w_0^{-})(t, y_i')),\ i = r_0+1,\dots,r,$$

где ω_i решения задач (27), (29) или (28), (30) соответственно, где правые части в (27) и (28) равны нулю. Положим $R_0 = 2\|\Phi^{-1}\vec{F}(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau^0)}$. Получим оценки, считая, что $\vec{\alpha} \in B_{R_0}$ и $\tau \le \tau^0$.

Из теоремы 1 вытекает оценка

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} \le c_0\|\alpha(v^{+} - v^{-})$$

$$+\alpha(w_0^{+} - w_0^{-})\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi(\alpha(v^{+} - v^{-}) + \alpha(w_0^{+} - w_0^{-}))(t,x')\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}), \tag{38}$$

где постоянная c_0 не зависит от τ. Воспользовавшись леммой 2, получим, что первое слагаемое J_0 в правой части здесь оценивается через

$$J_0 \le c_1\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}(\|v^{+} - v^{-}\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|w_0^{+} - w_0^{-}\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \tag{39}$$

Второе слагаемое J_1 оценивается через

$$J_1 \le c_2(\|\nabla_{x'}\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta}^\tau)}(\|(v^{+} - v^{-})\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|(w_0^{+} - w_0^{-})(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}) +$$

$$\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}(\|\nabla_{x'}\varphi(v^{+} - v^{-})\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|\nabla_{x'}\phi(w_0^{+} - w_0^{-})(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \tag{40}$$

В силу леммы 2 имеем оценку

$$\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}\left(S_0^\tau\right)} + \|\nabla_{x'}\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}\left(S_{0\delta}^\tau\right)} \le$$

$$c_3\sum_{i=1}^{r}\|\alpha_i\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\left(\|\Phi_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|\nabla_{x'}\Phi_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta})}\right) \le c_4\|\vec{\alpha}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{41}$$

где постоянная c_4, равно как и постоянные $c_0 - c_3$, не зависит от τ. Далее, у нас имеет место оценка

$$\|(v^{+} - v^{-})\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi(v^{+} - v^{-})\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} \le$$

$$c_5\tau^{1/2}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right), \tag{42}$$

которая была получена в доказательстве теоремы 3 в [17] (см. неравенства (50)–(52)). Приведем краткое доказательство. Оценим первое слагаемое в (42). Второе оценивается точно так же. Имеем

$$\|v^{\pm}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}^p = \int_0^\tau \frac{|v^{\pm}|^p}{t^{s_0 p}}dt + \int_0^\tau\int_0^\tau \frac{|v^{\pm}(t) - v^{\pm}(\xi)|^p}{|t - \xi^{1+s_0}|^p}dtd\tau \le \tau^{(s_1 - s_0)p}\|v^{\pm}\|_{\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)}^p. \tag{43}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|v^{\pm}\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\right)} \le \tau^{1/2}\|v^{\pm}\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)\right)}. \tag{44}$$

По лемме 1 правая часть оценивается через $C\tau^{1/2}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right)$. Таким образом, имеем неравенство:

$$\|v^+\|_{L_p\left(\Omega;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)\right)}+\|v^-\|_{L_p\left(\Omega;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)\right)}\le C\tau^{1/2}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right). \quad (45)$$

Оценим нормы $\|v^\pm\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega)\right)}$. Например, для функции v^+ имеем, что

$$\|v^+\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega)\right)}\le c_6\|v\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^1\left(G_2^\tau\right)\right)}\le c_7\|v\|^{1/2}_{Lp\left(Q_2^\tau\right)}\|v\|^{1/2}_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\le c_8\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}. \quad (46)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о следах [13, теорема 4.7, с. 412] и соответствующей оценкой $\|v^+\|_{W_p^{1-1/p}(\Omega)}\le c_1\|v^+\|_{W_p^1(G_2)}$, интерполяционным неравенством $\|v^+\|_{W_p^1(G_2)}\le C\|v^+\|^{1/2}_{L_p(G_2)}\|v^+\|^{1/2}_{W_p^2(G_2)}$ и неравенством $\|v^+\|_{L_p(0,\tau)}\le\tau\|v_t^+\|_{L_p(0,\tau)}$ $\left(v(0,x)=0\right)$, вытекающим из формулы Ньютона–Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от τ. Аналогично для функции v^- имеем

$$\|v^-\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega)\right)}\le c_9\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)} \quad (47)$$

Таким образом, справедливо неравенство (42). Из (38)–(42) вытекает неравенство

$$\begin{gathered}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\le\\ c_{10}\tau^{1/2}\|\vec\alpha\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\right)\\ +c_{10}\|\vec\alpha\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}(\left\|(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \quad (48)\end{gathered}$$

Выбрав τ_1 такое, что $c_{10}R_0\tau_1^{1/2}=1/2$, из (48) получим, что при $\tau\le\tau_2=\min\left(\tau_1,\tau^0\right)$ имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\le\\ 2c_{10}\|\vec\alpha\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}(\left\|(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \quad (49)\end{gathered}$$

Пусть $\vec\alpha_i=\left(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{ir}\right)\in B_{R_0}$ $(i=1,2)$ и v_i – соответствующие решения задачи (22), (23), с функциями $\alpha_i=\sum_{j=1}^r\alpha_{ij}\Phi_j$ $\left(i=1,2\right)$ вместо α. Имеет место оценка (49), где в правой части стоят соответствующие нормы $\|\vec\alpha_i\|_{\tilde W_p^{s_0}\left(0,\tau\right)}$. Тогда разности $v_1-v_2=\omega$, $\gamma=\alpha_1-\alpha_2$ есть решение задачи

$$Mv=\omega_t-L\omega=0, B\omega|_S=0, \omega|_{t=0}=0, \frac{\partial\omega^+}{\partial N}=\frac{\partial\omega^-}{\partial N}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial\omega^+}{\partial N}-\beta_0(\omega^+-\omega^-)=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}(\omega^+-\omega^-)+\frac{\gamma}{2}(v_1^++v_2^+-v_1^--v_2^-)+\gamma(w_0^+-w_0^-). \quad (51)$$

Пусть $\vec\gamma=\vec\alpha_1-\vec\alpha_2$. Задача (50), (51) имеет тот же вид, что и задача (22), (23), поэтому при $\tau\le\tau_2$ имеет место та же оценка (49), которая запишется в виде

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\|\omega\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\le$$

$$2c_{10}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\left\|\frac{1}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + w_0^+ - w_0^-\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} +$$

$$\left\|\nabla_{x'}\varphi(\frac{1}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + w_0^+ - w_0^-)\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \quad (52)$$

Из оценок (42), записанных для функций v_1, v_2 , и (52) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} \le$$

$$c_{11}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+ - w_0^-)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}), \quad (53)$$

где постоянная c_{11} не зависит от τ . Пусть w_i^j $(j=1,2)$ – решения задач (27), (29) и (27), (30) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_i , и $w^0 = \varphi_i\omega$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ есть решения задач

$$k_{it} - a_{nn}(t, y_i', x_n)k_{ix_n x_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\omega^0_{z_i z_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\omega^0_{z_i} + a_0\omega^0 + [\varphi_i, L]\omega|_{x'=y_i'} = f_i(t, y_i', x_n), \quad (54)$$

$$k_i|_{t=0} = 0, k_i|_{x_n=a} = 0, k_i|_{x_n=a+\delta} = 0 \ (i \le r_0), \quad (55)$$

$$k_i|_{t=0} = 0, k_i|_{x_n=a} = 0, k_i|_{x_n=a-\delta} = 0 \ (i > r_0). \quad (56)$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, [2]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r_0}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a,a+\delta))} + \sum_{i=r_0+1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a-\delta,a))} \le$$

$$c_{13}\left(\sum_{i=1}^{r_0}\|f_i\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))} + \sum_{i=r_0+1}^{r}\|f_i\|_{L_p((0,\tau)\times(a-\delta,a))}\right). \quad (57)$$

Пусть, например, $i \le r_0$. Имеем

$$\|\tilde{f}_i(t, y_i', x_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))} \le c_{14}\|f_i(t,x)\|_{W_p^s(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))} = J, s > (n-1)/p, \quad (58)$$

в силу теорем вложения (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)–(3.12) в [19]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [19]).

$$J \le c_{15}\|\tilde{f}_i(t,x)\|^{\theta}_{W_p^1(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}\|\tilde{f}_i(t,x)\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}, 2\theta - 1 = s. \quad (59)$$

Ввиду замечания 5.3 (c) в [19] норма в последнем пространстве может быть определена как

$$\|f_i\|_{W_p^{-1}(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))} = \sup_{\varphi\in W_q^1(\Omega; L_q((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}\left|(\tilde{f}_i, \varphi)\right|, \ 1/p + 1/q = 1,$$

где скобки обозначают продолжение скалярного произведения в L_2 до отношения двойственности между соответствующими пространствами. Исходя из определения $\tilde{f}_i$ и условий на коэффициенты имеем

$$\|\tilde{f}_i\|_{W_p^{-1}(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))} \le c_{16}\left(\|\omega\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(G_1))} + \|\omega\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(G_2))}\right) \le$$

$$c_{17}\tau^{1/2}\left(\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right), \quad (60)$$

где постоянная c_1 не зависит от τ . Последняя оценка получается, если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|v\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^1(G_i)\right)} \le c_{18}\|v\|^{1/2}_{L_p\left(0,\tau;W_p^2(G_i)\right)}\|v\|^{1/2}_{L_p\left(0,\tau;L_p(G_i)\right)}$$

и оценку $\|v\|_{L_p\left(0,\tau;L_p(G_i)\right)} \le \tau\|v_t\|_{L_p\left(0,\tau;L_p(G_i)\right)}$, вытекающую из формулы Ньютона–Лейбница, а затем оценим полученные нормы через норму в $W_p^{1,2}\left(Q_i^\tau\right)$. Оценки (59), (60) влекут, что

$$\left\|\tilde{f}_i(t,x_i,x_n)\right\|_{L_p\left((0,\tau)\times(a,a+\delta)\right)} \le c_{19}\tau^{(1-\theta)/2}\|\nabla_{x'}\varphi_i\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} +$$

$$\|\nabla_{x'}\varphi_i\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} + (\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})^\theta(\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})^{1-\theta}. \quad (61)$$

где c_{19} – постоянная не зависящая от τ. Как вытекает из неравенства (53), неравенство (61) можно переписать в виде

$$\left\|\tilde{f}_i(t,x_i,x_n)\right\|_{L_p\left((0,\tau)\times(a,a+\delta)\right)} \le c_{20}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\gamma}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)},\ i \le r_0. \quad (62)$$

Очевидно, что такая же оценка имеет место и в случае $i > r_0$. Из (57), (62) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r_0}\|k_i\|_{W_p^{1,2}\left((0,\tau)\times(a,a+\delta)\right)} + \sum_{i=r_0+1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}\left((0,\tau)\times(a-\delta,a)\right)} \le c_{21}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

В частности, отсюда вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{r}\left\|k_{iz_n}(t,a)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{22}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (63)$$

Оценим $\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}$. Из (37) вытекает оценка

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{23}\sum_{i=1}^{r}\|F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (64)$$

Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$. Пусть, например, $i \le r_0$. Оно записывается в виде

$$J_1 = a_{nn}^+(t,y_i')\left(\omega_{ix_n}^1 - \omega_{ix_n}^2\right)(t,a)/\left(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')\right)$$

В силу леммы 2 и неравенства (63) имеем

$$\|J_1\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{24}\left\|\omega_{iz_n}^1 - \omega_{iz_n}^2\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2\tau^{\beta_1}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s}(0,\tau)}, \quad (65)$$

где все постоянные не зависят от τ, β_1 – положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2 = -\beta_0\left(w^+ - w^-\right)(t,y_i')/\left(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')\right).$$

В силу леммы 2 имеем

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{25}\sum_{i=1}^{r}\left\|(\omega^+ - \omega^-)(t,y_i')\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Справедливы очевидные оценки (лемма 1, (53) и теоремы вложения (см. [19]))

$$\left\|w^\pm(t,y_i')\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_1\left\|\varphi w^\pm(t,x')\right\|_{W_p^1\left(\Omega;W_p^{s_0}(0,\tau)\right)} \le$$

$$c_{26}\left(\left\|\nabla_{x'}\varphi w^\pm(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\right)} + \left\|\varphi w^\pm(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\right)}\right) \le$$

$$c_{27}\tau^{1/2}\left(\left\|\nabla_{x'}\varphi w^{\pm}(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)\right)}+\left\|\varphi w^{\pm}(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)\right)}\right)\le$$

$$c_{28}\tau^{1/2}\left(\left\|\nabla_{x'}\varphi w(t,x)\right\|_{\tilde{W}_p^{1,2}\left(Q_k^\tau\right)}+\left\|\varphi w(t,x')\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_k^\tau\right)}\right)\le c_{29}\tau^{1/2}\left\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},$$

где $i>r_0$ и $k=1$ в случае функции ω^+ и $k=2$ и $i\le r_0$ в случае функции ω^-. Таким образом, справедлива оценка

$$\left\|J_2\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_{30}\tau^{1/2}\left\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{66}$$

для некоторой не зависящей от τ постоянной c_{30}. Оценка последней разности

$$J_3=\left(\alpha_1 v_1^-(t,x_i)-\alpha_2 v_2^-(t,x_i)\right)/\left(\tilde{\psi}_i(t)+(w_0^+-w_0^-)(t,x^i(0))\right)$$

получается аналогично, и имеем, что найдутся постоянные $\beta_3>0$ и c_8 такие, что

$$\left\|J_3\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_{31}\tau^{\beta_3}\left\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{67}$$

Окончательная оценка, как вытекает из (65), (66), (67) имеет вид

$$\left\|R\left(\vec{\alpha}_1\right)-R\left(\vec{\alpha}_2\right)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_{31}\tau^{\beta_0}\left\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{68}$$

где показатель β_0 минимальный из полученных в доказательстве и постоянная c_{31} не зависит от τ. Возьмем в качестве τ_0 число со свойством $\tau_0\le\tau_2$, $c_{31}\tau_0^{\beta_0}\le 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Следовательно, уравнение (36) имеет решение $\vec{\alpha}\in\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_0)$. Найдем решение задачи сопряжения v. Покажем, что мы нашли решение нашей обратной задачи. Достаточно показать, что у нас выполнены условия переопределения (24). Мы имеем равенства (32), (33) и равенства (34), (35), откуда вытекает, что

$$a_{nn}^+(t,y_i')w_{ix_n}(t,a)-\beta_0(v^+-v^-)(t,y_i')=\alpha(\tilde{\psi}_i(t)-v^-)(t,y_i'))+\alpha(w_0^+-w_0^-)(t,y_i'), \tag{69}$$

при $i\le r_0$ и при $i>r_0$ имеем

$$a_{nn}^+(t,y_i')w_{ix_n}(t,a)-\beta_0(v^+-v^-)(t,y_i')=\alpha(v^+(t,y_i')-\tilde{\psi}_i(t))+\alpha(w_0^+-w_0^-)(t,y_i') \tag{70}$$

Вычитая (32) и (69), соответственно, (33) и (70), получим

$$a_{nn}^+(t,y_i')(v_{x_n}^+(t,y_i')-w_{ix_n}(t,a))=\alpha(v^+-\tilde{\psi}_i(t))=\alpha(v^+(t,y_i')-w(t,a)),\ i=1,2,\ldots,r_0, \tag{71}$$

$$a_{nn}^-(t,y_i')(v_{x_n}^-(t,y_i')-w_{ix_n}(t,a))=\alpha(\tilde{\psi}_i(t)-v^-)=\alpha(w(t,a)-v^-),\ i=r_0+1,\ldots,M, \tag{72}$$

Функция $w_{0i}=\varphi_i v$ удовлетворяет уравнению (26). Возьмем в этом уравнении $x'=y_i'$ и вычтем его из равенства (27) при $i\le r_0$ и из (28) при $i>r_0$. Получим равенство

$$\left(w_{it}(t,x_n)-w_{0it}(t,y_i',x_n)\right)-a_{nn}(t,y_i',x_n)\left(w_{ix_nx_n}-w_{0ix_nx_n}(t,x_i,x_n)\right)=0, \tag{73}$$

где $i=1,2,\ldots,r$. Функции $w_i=w_i(t,x_n)-w_{0i}(t,x_i,x_n)$ удовлетворяют уравнению (73), начальному условию $\tilde{w}_i\big|_{t=0}=0$ и в силу (71), (72) граничным условиям

$$a_{nn}^+(t,x_i)\tilde{w}_{ix_n}(t,a)=-\alpha\tilde{w}_i(t,a),\ w_i(t,a+\delta)=0,\ i=1,2,\ldots,r_0, \tag{74}$$

$$a_{nn}^-(t,y_i')\tilde{w}_{ix_n}(t,a)=\alpha w_i(t,a),\ \tilde{w}_i(t,a-\delta)=0,\ i=r_0+1,\ldots,r. \tag{75}$$

В силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t,x_n)=w_{0i}(t,y_i',x_n)$. Следовательно, выполнены равенства $w_{0i}(t,y_i',a+0)=\tilde{\psi}_i$ для всех $i\le r_0$ и $w_{0i}(t,y_i',a-0)=\psi_i$ для всех $i>r_0$. Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, то утверждение о единственности решений здесь очевидно.

Замечание. Все результаты справедливы и в случае более сложной задачи когда вместо одного условия сопряжения мы рассматриваем несколько условий, скажем в точках $x_n = l_1, l_2, \ldots, l_m$ и неизвестными являются несколько коэффициентов теплопередачи. На каждом из сечений $x_n = l_i$ в некотором наборе точек у нас, как и ранее, заданы значения решения в качестве условий переопределения. Соответствующие условия на данные легко формулируются.

Литература

1. Baehr, H.D. Heat and Mass Transfer / H.D. Baehr, K. Stephan. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 688 p.

2. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, В.А. Солонников. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

3. Алифанов, О.М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, А.В. Ненарокомов. – Москва: Янус-К, 2009. – 299 с.

4. Ткаченко, В.Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов / В.Н. Ткаченко. – Киев: Наукова думка, 2008. – 243 с.

5. Huang, C. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat / C. Huang, T. Ju // International journal for numerical methods in engineering. – 1995. – Vol. 38, Iss. 5. – P. 735–754.

6. Loulou, T., An inverse heat conduction problem with heat flux measurements / T. Loulou, E. Scott // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2006. – Vol. 67, Iss. 11. – C. 1587–1616.

7. Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites / L.A. Abreu, H.R.B. Orlande, C.P. Naveira-Cotta *et al*. Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Vol. 2: 31st Computers and Information in Engineering Conference, Parts A and B. Washington, DC, USA. August 28–31, 2011. – P. 479–487.

8. A Comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites / L.A.S. Abreu, M.J. Colaco, C.J.S. Alves *et al.* // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), November 3–7, 2013, Ribeirão Preto, SP, Brazil. – C. 5422–5432.

9. Artyukhin, E.A. Reconstruction of thermal contact resistance from the solution of the inverse heat conduction problem / E.A. Artyukhin, A.V. Nenarokomov // Journal of Engineering Physics. – 1984. – T. 46, № 4. – C. 677–681.

10. Drenchev, L.B. Inverse heat conduction problems and application to estimate of heat parameters in 2-D experiments / L.B. Drenchev, J. Sobczak // Proc. Int. Conf. High Temperature Capillarity, Cracow, Poland, 29 June – 2 July 1997. – Krakow: Foundry Research Institute, 1998. – C. 355–361.

11. Zhuo, L. Reconstruction of the Heat Transfer Coefficient at the Interface of a Bi-Material / L. Zhuo, D. Lesnic, S. Meng // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – Vol. 28, Iss. 3. – C. 374–401.

12. К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности / Ю.М. Мацевитый, А.О. Костиков, Н.А. Сафонов, В.В. Ганчин // Проблемы машиностроения. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 15–23.

13. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

14. Denk, R. Optimal L^p–L^q-Estimates for Parabolic Boundary Value Problems with Inhomogeneous Data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Mathematische Zeitschrift. – 2007. – Vol. 257, Iss. 1. – P. 193–224.

15. Belonogov, V.A. On Solvability of Some Classes of Transmission Problems in a Cylindrical Space Domain / V.A. Belonogov, S.G. Pyatkov // Сибирские электронные математические известия. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 176–206.

16. Вержбицкий, М.А. О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов / М.А. Вержбицкий, С.Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23, вып. 2. – С. 3–18.

17. Белоногов, В.А. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта / В.А. Белоногов, С.Г. Пятков // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 7. – С. 18–32.

18. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

19. Amann, H. Compact Embeddings of Vector-Valued Sobolev and Besov Spaces / H. Amann // Glasnik matematicki. – 2000. – Vol. 35(55). – p. 161–177.

20. Grisvard, P. Équations différentielles abstraites / P. Grisvard // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4. – 1969. – Vol. 2, no. 3. – P. 311–395.

Поступила в редакцию 4 января 2022 г.

Сведения об авторе

Белоногов Владимир Андреевич, аспирант, Институт цифровой экономики, Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, e-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics" 2022, vol. 14, no. 1, pp. 13–26

DOI: 10.14529/mmph220102

ON DETERMINING THE COEFFICIENT OF HEAT EXCHANGE IN STRATIFIED MEDIUM

V.A. Belonogov
Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation
E-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

Abstract. In the article we consider the well-posedness in Sobolev spaces of the inverse problems of determining the heat exchange coefficient at the interface which is included in the transmission condition of the imperfect contact type. In a cylindrical spatial domain, a second-order parabolic equation is considered. The domain is divided into two sub-domains, on the common part of the boundary of which the transmission condition is set. The heat exchange coefficient included in the transmission condition is sought as end segment in series with time-dependent unknown Fourier coefficients. The equation is supplemented with general boundary conditions and initial conditions, as well as overdetermination conditions. The ovedetermination conditions are the values of a solution at some points lying in the spatial domain. Under natural smoothness conditions for the data and the location of the measurement points, the existence and uniqueness theorem local in time is demonstrated. The obtained solution to the problem is regular, i. e., all generalized derivatives included in the equation are summable to some power, and the equation holds almost everywhere. The method is constructive, and the approach allows to develop numerical methods for solving the problem. The proof is based on a priori estimates obtained and the fixed-point theorem.

Keywords: inverse problem; transmission problem; heat transfer coefficient; parabolic equation; heat and mass transfer.

References

1. Baehr H.D., Stephan K. *Heat and Mass Transfer*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, 688 p.

2. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N., Solonnikov V.A. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type). Moskow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).

3. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena* (Inverse problems in complex heat transfer research). Moscow, Yanus-K, 2009, 299 p. (in Russ.).

4. Tkachenko V.N. *Matematicheskoe modelirovanie, identifikatsiya i upravlenie tekhnologicheskimi protsessami teplovoy obrabotki materialov* (Mathematical Modeling, Identification and Control over Technological). Kiev, Naukova dumka Publ., 2008, 243 p. (in Russ.).

5. Huang C., Ju T. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat. *International journal for numerical methods in engineering*, 1995, Vol. 38, Iss. 5, pp. 735–754.

6. Loulou T., Scott E. An inverse heat conduction problem with heat flux measurements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, Vol. 67, Iss. 11, pp. 1587–1616. DOI: 10.1002/nme.1674

7. Abreu L.A., Orlande H.R.B., Naveira-Cotta C.P., Quaresma J.N.N., Cotta R.M., Kaipio J., Kolehmainen V. Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites. *Proc. ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 2: 31st Computers and Information in Engineering Conference, Parts A and B. Washington, DC, USA. August 28–31, 2011*. pp. 479-487. ASME. DOI: 10.1115/DETC2011-47511

8. Abreu L.A.S., Colaco M.J., Alves C.J.S., Orlande H.R.B., Kolehmainen V., Kaipio J. A Comparison of Two Inverse Problem Techniques for the Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites. *Proc. 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), November 3–7, 2013, Ribeirão Preto, SP, Brazil*. C. 5422–5432.

9. Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. Reconstruction of thermal contact resistance from the solution of the inverse heat conduction problem. *Journal of Engineering Physics*, 1984, Vol. 46, no. 4, pp. 677–681.

10. Drenchev L.B., Sobczak J. Inverse Heat Conduction Problems and Application to Estimate of Heat Parameters in 2-D Experiments. *Proc. Int. Conf. High Temperature Capillarity, Cracow, Poland, 29 June – 2 July 1997, Krakow: Foundry Research Institute*, 1998, pp. 355–361.

11. Zhuo L., Lesnic D., Meng S. Reconstruction of the Heat Transfer Coefficient at the Interface of a Bi-Material. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020. Vol. 28, Iss. 3, C. 374–401. DOI: 10.1080/17415977.2019.1574781

12. Matsevityy Yu.M., Kostikov A.O., Safonov N.A., Ganchin V.V. K resheniyu nestatsionarnykh nelineynykh granichnykh obratnykh zadach teploprovodnosti (To the solution of nonstationary nonlinear reverse problems of thermal conductivity). *Problemy mashinostroeniya*, 2017, Vol. 20, no. 4, pp. 15–23. (in Russ.).

13. Tribel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Deutscher Verlag Wiss, Berlin, 1978. DOI:10.1016/s0924-6509(09)x7004-2

14. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L^p–L^q-Estimates for Parabolic Boundary Value Problems with Inhomogeneous Data. *Mathematische Zeitschrift*, 2007, Vol. 257, Iss. 1, pp. 193–224. DOI: 10.1007/s00209-007-0120-9

15. Belonogov V.A., Pyatkov S.G. On Solvability of Some Classes of Transmission Problems in a Cylindrical Space Domain. *Sib. Èlektron. Mat. Izv*., 2021, Vol. 18, Iss. 1, pp. 176–206.

16. Verzhbitskii M.A., Pyatkov S.G. On Some Inverse Problems of Determining Boundary Regimes. *Mathematical notes of NEFU*, 2016, Vol. 23, Iss. 2, pp. 3–18. (in Russ.).

17. Belonogov V.A., Pyatkov S.G. On solvability of Conjugation Problems with Non-Ideal Contact Conditions. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2020, Vol. 64, Iss. 7, pp. 13–26. DOI: 10.3103/S1066369X20070038

18. Mikhaylov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Partial Differential Equations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 391 p.

19. Amann H. Compact Embeddings of Vector-Valued Sobolev and Besov Spaces. *Glasnik matematicki*, 2000, Vol. 35(55), p. 161–177.

20. Grisvard P. *Équations Différentielles Abstraites, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4*, 1969, Vol. 2, no. 3, pp. 311–395. DOI: 10.24033/asens.1178

Received January 4, 2022

Information about the author

Belonogov Vladimir Andreevich is Post-Graduate Student, Institute of Digital Economics, Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation, e-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

УДК 517.955.8 DOI: 10.14529/mmph220103

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.Г. Кожобеков, А.А. Шооруков, Д.А. Турсунов
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика
E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Аннотация. Строится полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи. Первая краевая задача ставится для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа. Задача исследуется на прямоугольнике. Особенности задачи – присутствие малого параметра перед оператором теплопроводности, существование угловых пограничных слоев на нижних углах прямоугольника. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения первой краевой задачи на прямоугольнике, с любой степенью точности, при стремлении малого параметра к нулю. Асимптотическое разложение решения по малому параметру строится методом Вишика–Люстерника. При решении поставленной задачи нами используются: методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, классический метод малого параметра, метод пограничных функций Вишика–Люстерника и принцип максимума. Как обычно, задача решается в двух этапах: в первом этапе строится формальное разложение решения первой краевой задачи, а во втором этапе оценивается остаточный член полученного разложения и этим доказывается, что полученное разложение действительно является асимптотическим на всем прямоугольнике. В первом этапе формальное асимптотическое решение ищется в виде суммы шести функций (решений): внешнее решение, определенное на всем прямоугольнике, погранслойное решение в малой окрестности нижней стороны прямоугольника, два боковых погранслойных решения в малой окрестности боковых сторон прямоугольника и два угловых погранслойных решения в окрестностях нижних вершин прямоугольника. Все эти погранслойные решения экспоненциально убывают вне пограничных слоев.

Ключевые слова: асимптотическое решение; малый параметр; сингулярно возмущенная задача; первая краевая задача; уравнение теплопроводности; погранслойное решение.

Постановка задачи. В прямоугольнике рассмотрим первую краевую задачу [1, 2]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+q(t,x)z(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{1}$$

$$z(0,x)=\varphi(x),\quad x\in[0,1], \tag{2}$$

$$z(t,0)=\mu_1(t),\ z(t,1)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

где ε – малый положительный параметр, $0<a$ – const, $\Omega=\{(t,x)\,|\,0<t\le T, 0<x<1\}$, $q,p,f\in C^\infty(\bar\Omega)$, $\varphi\in C^\infty[0,1]$, $\mu_1,\mu_2\in C^\infty[0,T]$, $q(t,x)>0:(t,x)\in\bar\Omega$, $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(1)=\mu_2(0)$.

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение первой краевой задачи (1)–(3), при $\varepsilon\to 0$.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра [3–5]:

$$z(t,x)=U(t,x)+V(\tau,x)+\Pi_1(t,\eta_1)+\Pi_2(t,\eta_2)+W_1(\tau,\eta_1)+W_2(\tau,\eta_2) \tag{4}$$

где $\tau=t/\varepsilon$, $\eta_1=x/\lambda$, $\eta_2=(1-x)/\lambda$, $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$.

Подставляя соотношение (4) в задачу (1)–(3), получаем следующие задачи:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 \mathrm{U}(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial \mathrm{U}(t,x)}{\partial x}+q(t,x)U(t,x)=f(\mathrm{t},\mathrm{x}),\ \ (\mathrm{t},x)\in\Omega; \tag{5}$$

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau}-\varepsilon a^2\frac{\partial^2 V(\tau,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2 p(\tau,x)\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial x}+q(\tau,x)V(\tau,x)=0,\ \ (\tau,x)\in\Omega_1; \tag{6}$$

$$a^2\frac{\partial^2 \Pi_j(t,\eta_j)}{\partial \eta_j^2}-q(t,\eta_j)\Pi_j(t,\eta_j)=\lambda^2\frac{\partial \Pi_j(t,\eta_j)}{\partial t}+\lambda^3 p(t,\eta_j)\frac{\partial \Pi_j(t,\eta_j)}{\partial \eta_j},\ (t,\eta_j)\in\Omega_{2j}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial W_j(\tau,\eta_j)}{\partial \tau}-a^2\frac{\partial^2 W_j(\tau,\eta_j)}{\partial \eta_j^2}+q(\tau,\eta_j)W_j(\tau,\eta_j)=-\lambda^4 p(\tau,\eta_j)\frac{\partial W_j(\tau,\eta_j)}{\partial \eta_j},\ (\tau,\eta_j)\in\Omega_{3j}, \tag{8}$$

где $\Omega_1=\{(\tau,x)\,|\,0<\tau\le\mu^{-1}T,\ 0\le x\le 1\}$, $\Omega_{2j}=\{(\mathrm{t},\eta_j)\,|\,0\le t\le T,\ 0<\eta_j\le\lambda^{-1}\}$, $\Omega_{3j}=\{(\tau,\eta_j)\,|\,0<\tau\le T\varepsilon^{-1},\ 0<\eta_j\le\lambda^{-1}\},\ j=1,2.$

Подставляя соотношение (4) в начальное условие (2), получаем:

$$\varphi(x)=U(0,x)+V(0,x)+\Pi_1(0,\eta_1)+\Pi_2(0,\eta_2)+W_1(0,\eta_1)+W_2(0,\eta_2)\Rightarrow$$

$$V(0,x)=\varphi(x)-U(0,x), \tag{9}$$

$$W_j(0,\eta_j)=-\Pi_j(0,\eta_j),\ \ j=1,2. \tag{10}$$

Теперь подставляя соотношение (4) в граничные условия (3), имеем:

$$\mu_1(t)=U(t,0)+V(t\varepsilon^{-1},0)+\Pi_1(t,0)+\Pi_2(t,\lambda^{-1})+W_1(t\varepsilon^{-1},0)+W_2(t\varepsilon^{-1},\lambda^{-1}),$$

учитывая, что $\Pi_2(t,\lambda^{-1})=0,\ W_2(t\varepsilon^{-1},\lambda^{-1})=0$ – условие для погранслойных функций, получаем:

$$\Pi_1(t,0)=\mu_1(t)-U(t,0), \tag{11}$$

$$W_1(\tau,0)=-V(\tau,0), \tag{12}$$

аналогично

$$\mu_2(t)=U(t,1)+V(t\varepsilon^{-1},1)+\Pi_2(t,0)+W_2(t\varepsilon^{-1},0)\Rightarrow$$

$$\Pi_2(t,0)=\mu_2(t)-U(t,0), \tag{13}$$

$$W_2(\tau,0)=-V(\tau,1). \tag{14}$$

В результате мы получили шесть задач:

– из уравнения (5) методом малого параметра однозначно определяем $U(t,x)$;

– из (6) и (9) определяем $V(\tau,x)$;

– из (7), (11) и (13) определяем $\Pi_j(t,\eta_j)$, j = 1, 2;

– из (8), (10), (12) и (14) определяем $W_j(\tau,\eta_j)$, j = 1, 2.

Начнем с уравнения (5).

Лемма 1. Для решения $U(t,x)$ уравнения (5) справедливо формальное асимптотическое разложение

$$U(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t,x), \tag{15}$$

где $u_k\in C^\infty(\bar\Omega),\ k=0,1,2,...$ – конкретизируются при доказательстве леммы 1.

Доказательство. Формально подставляя (15) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем:

$$u_0(t,x)=\frac{f(t,x)}{q(t,x)}, \tag{16}$$

$$u_k(t,x)=-\frac{1}{q(t,x)}\left(\frac{\partial u_{k-1}(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u_{k-1}(t,x)}{\partial x^2}\right)-\frac{p(t,x)}{q(t,x)}\frac{\partial u_{k-2}(t,x)}{\partial x},\ k\in N,\ u_{-1}(t,x)\equiv 0, \tag{17}$$

заметим, что $u_k\in C^\infty(\bar\Omega),\ k=0,1,2,...$. Лемма 1 доказана.

Перейдем к задаче (6), (9). Пусть

$$V(\tau,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\tau,x), \tag{18}$$

где $v_k(\tau,x)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя (18) в (6) и (9), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\frac{\partial v_k(\tau,x)}{\partial\tau}-\varepsilon a^2\frac{\partial^2 v_k(\tau,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2\sum_{j=0}^{k}\tau^j p_j(x)\frac{\partial v_{k-j}(\tau,x)}{\partial x}+\sum_{j=0}^{k}\tau^j q_j(x)v_{k-j}(\tau,x)\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(0,x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(0,x),$$

где $q_j(x)=\partial^j q(0,x)/\partial\tau^j$, $q_0(x)=q(0,x)$, $p_j(x)=\partial^j p(0,x)/\partial\tau^j$.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial v_0(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_0(\tau,x)=0,\ v_0(0,x)=\varphi(x)-u_0(0,x); \tag{19}$$

$$\frac{\partial v_k(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_k(\tau,x)=$$
$$=a^2\frac{\partial^2 v_{k-1}(\tau,x)}{\partial x^2}+\sum_{j=0}^{k}\tau^j p_j(x)\frac{\partial v_{k-j-2}(\tau,x)}{\partial x}+\sum_{j=1}^{k}\tau^j q_j(x)v_{k-j}(\tau,x),\ v_k(0,x)=-u_k(0,x),\ k\in N. \tag{20}$$

Решение задачи (19) существует, единственно и представимо в виде:

$$v_0(\tau,x)=(\varphi(x)-u_0(0,x))e^{-q(x)\tau}.$$

Для $v_1(\tau,x)$ имеем:

$$\frac{\partial v_1(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_1(\tau,x)=a^2\frac{\partial^2 v_0(\tau,x)}{\partial x^2}+\tau q_1(x)v_0(\tau,x),\ v_1(0,x)=-u_1(0,x).$$

Справедлива

Лемма 2. Решение задачи

$$\frac{\partial\tilde v(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),\ (\tau,x)\in\Omega_1,\ \tilde v(0,x)=\tilde v^0(x),\ x\in[0,1]$$

существует, единственно и представимо в виде

$$\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\tilde v^0(x)+e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)\tau+p_1(x)\frac{\tau^2}{2}+\ldots+p_n(x)\frac{\tau^{n+1}}{n+1}\right),$$

где $q_0(x)>0\ \ x\in[0,1],\ q_0,p_j,\tilde v^0\in C^\infty[0,1]$.

Доказательство. Уравнение

$$\frac{\partial\tilde v(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)+p_1(x)\tau+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),\ (\tau,x)\in\Omega_1,$$

запишем в виде

$$\left(\tilde v(\tau,x)e^{q_0(x)\tau}\right)'_\tau=\left(p_0(x)+p_1(x)\tau+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),$$

полученное выражение интегрируем по τ, учитывая начальное условие:

$$\tilde v(\tau,x)e^{q_0(x)\tau}-\tilde v^0(x)=\int_0^\tau(p_0(x)+\ldots+p_n(x)s^n)ds\quad\Rightarrow\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\tilde v^0(x)+P_{n+1,\tau}(\tau,x)e^{-q_0(x)\tau},$$

где $P_{n+1,\tau}(\tau,x)=p_0(x)\tau+p_1(x)\dfrac{\tau^2}{2}+\ldots+p_n(x)\tau^{n+1}/n+1$. Лемма 2 доказана.

С помощью леммы 2 доказывается существование и единственность решений задач (20). Кроме этого, из леммы 2 следует, что эти решения экспоненциально стремятся к нулю при стремлении τ к бесконечности, т. е.:

$$v_k(\tau,x)=O\left(e^{-q_0(x)\tau}\right),\ \tau\to\infty,\ q_0(x)>0:\ x\in[0,1],\ k=0,1,2,...$$

Перейдем к задачам (7), (11) и (13). Здесь две задачи относительно функций $\Pi_1(t,\eta_1)$ и $\Pi_2(t,\eta_2)$ – аналогичные, поэтому достаточно рассмотреть одну. Мы рассмотрим задачу относительно функций $\Pi_1(t,\eta_1)$:

$$a^2\frac{\partial^2\Pi_1(t,\eta_j)}{\partial\eta_1^2}-q(t,\eta_1)\Pi_1(t,\eta_1)=\lambda^2\frac{\partial\Pi_1(t,\eta_1)}{\partial t}+\lambda^4 p(t,\eta_1)\frac{\partial\Pi_1(t,\eta_1)}{\partial x},\quad (t,\eta_1)\in\Omega_{21}, \tag{21}$$

$$\Pi_1(t,0)=\mu_1(t)-U(t,0),\ t\in[0,T]. \tag{22}$$

Пусть

$$\Pi_1(t,\eta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_{1,k}(t,\eta_1), \tag{23}$$

где $\pi_{1,k}(t,\eta_1)$ – пока неизвестные функций, причем $\lim\limits_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,k}(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T]$.

Подставляя (23) в (21) и (22), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(a^2\frac{\partial^2\pi_{1,k}(t,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}-\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j q_j(t)\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+2}\left(\frac{\partial\pi_{1,k}(t,\eta_1)}{\partial t}+\lambda^2\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j p_j(t)\frac{\partial\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)}{\partial x}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_{1,k}(t,0)=\mu_1(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}u_k(t,0),\ t\in[0,T],$$

где $q_j(t)=\dfrac{\partial^j q(t,0)}{\partial\eta_1^j}$, $p_j(t)=\dfrac{\partial^j p(t,0)}{\partial\eta_1^j}$, $q_0(t)=q(t,0)$.

Отсюда для $\pi_{1,0}(t,\eta_1)$ имеем:

$$a^2\frac{\partial^2\pi_{1,0}}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi_{1,0}=0,\ \ (t,\eta_1)\in\Omega_{21},\ \pi_{1,0}(t,0)=\mu_1(t)-u_0(t,0),\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,0}(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T].$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$\pi_{1,0}(t,\eta_1)=\left(\mu_1(t)-u_0(t,0)\right)e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}.$$

Для $\pi_{1,k}(t,\eta_1),\ k\in N$ имеем:

$$a^2\frac{\partial^2\pi_{1,k}}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi_{1,k}=\sum_{j=1}^{k}\eta_1^j q_j(t)\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)+\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j p_j(t)\frac{\partial\pi_{1,k-j-2}(t,\eta_1)}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{1,k-2}(t,\eta_1)}{\partial t},(t,\eta_1)\in\Omega_{21},$$

$$\pi_{1,2k}(t,0)=-u_k(t,0),\ \pi_{1,2k-1}(t,0)=0,\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,k}(t,\eta_1)=0,\ \ t\in[0,T]. \tag{24}$$

Справедлива

Лемма 3. Решение задачи

$$a^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi=e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\left(p_1(t)\eta_1+...+p_n(t)\eta_1^n\right),\ \ (t,\eta_1)\in\Omega_{21},$$

$$\pi(t,0)=\pi^0(t),\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi(t,\eta_1)=0,\ \ t\in[0,T],$$

существует, единственно и представимо в виде

$$\pi(t,\eta_1)=e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\pi^0(t)+e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\eta_1\left(\tilde{p}_1(t)\eta_1+...+\tilde{p}_n(t)\eta_1^n\right),$$

где $q_0(t)>0\ \ t\in[0,T],\ q_0,\tilde{p}_j,\pi^0\in C^{\infty}[0,T]$.

Лемма 3 доказывается прямым интегрированием, как и лемма 2.

С помощью леммы 3 доказывается существование, единственность решений задач (24). Для решений задач (24) справедливы оценки:

$$\pi(t,\eta_1)=O\left(e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\right),\ \eta_1\to\infty,\ t\in[0,T],\ 0<a,\ 0<q_0(t).$$

Перейдем к задачам (8), (10), (12) и (14) для определения угловых погранслойных функций $W_j(\tau,\eta_j)$, $j=1,2$.

Здесь тоже достаточно рассмотреть одну из них, либо задачу для $W_1(\tau,\eta_1)$, либо для $W_2(\tau,\eta_2)$, второе исследуется аналогично. Рассмотрим задачу для $W_1(\tau,\eta_1)$:

$$\frac{\partial W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}+q(\tau,\eta_1)W_1(\tau,\eta_1)+\lambda^3 p(\tau,\eta_1)\frac{\partial W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1}=0,\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\tag{25}$$

$$W_1(0,\eta_1)=-\Pi_1(0,\eta_1),\quad W_1(\tau,0)=-V(\tau,0).\tag{26}$$

Пусть

$$W_1(\tau,\eta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_{1,k}(\tau,\eta_1),\tag{27}$$

где $w_{1,k}(\tau,\eta_1)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя (27) в (25) и (26), получаем:

$$\frac{\partial w_{1,j}}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 w_{1,j}}{\partial\eta_1^2}+q_0w_{1,j}=0,\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\ j=0,1;$$

$$\frac{\partial w_{1,k}}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 w_{1,k}}{\partial\eta_1^2}+q_0w_{1,k}=\Phi_k(w_{1,k-1},w_{1,k-2},...,w_{1,0},\tau,\eta_1),\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\ k=2,3,...$$

$$w_{1,k}(0,\eta_1)=-\pi_{1,k}(0,\eta_1), w_{1,2k}(\tau,0)=-v_k(\tau,0),\ w_{1,2k+1}(\tau,0)=0,\ k=0,1,...,$$

где $q_{n,m}=\dfrac{\partial^{n+m}q(0,0)}{\partial\tau^n\partial\eta_1^m}$, $0<q_0=q(0,0)$, Φ_k – линейно зависят от предыдущих $w_{1,j}$ ($j<k$) и их производных от η_1, полиномиально зависят от τ, и η_1.

Если ввести обозначение $w_{1,k}(\tau,\eta_1)=e^{-q_0\tau}y_k(\tau,\eta_1)$, то

$$\frac{\partial w_{1,k}(\tau,\eta_1)}{\partial\tau}=-q_0e^{-q_0\tau}y_k(\tau,\eta_1)+e^{-q_0\tau}\frac{\partial y_k(\tau,\eta_1)}{\partial\tau};\ \frac{\partial^2 w_{1,k}(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}=e^{-q_0\tau}\frac{\partial^2 y_k(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2},$$

и рассматриваемая задача примет вид:

$$\frac{\partial y_k}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 y_k}{\partial\eta_1^2}=\Phi_k(y_{1,k-1},y_{1,k-2},...,y_{1,0},\tau,\eta_1),\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\ k=0,1,...\tag{28}$$

$$y_k(0,\eta_1)=-\pi_{1,k}(0,\eta_1), y_{2k}(\tau,0)=-e^{q_0\tau}v_k(\tau,0),\ y_{2k+1}(\tau,0)=0,\ k=0,1,...\tag{29}$$

где $\Phi_j\equiv0,\ j=0,1.$

Решения задач (28), (29) существуют, единственны и представимы в виде [6]:

$$y_k(\tau,\eta_1)=-\int_0^\infty\pi_{1,k}(0,\xi)G(\tau,\xi,\eta_1)d\xi+\int_0^\tau\psi_k(t)H(\eta_1,\tau-t)dt+\int_0^\tau\int_0^\infty\Phi_k(t,x)G(\eta_1,x,\tau-t)dxdt,$$

где

$$H(\eta_1,\tau)=\frac{\eta_1}{2a\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}e^{-\frac{\eta_1^2}{4a\tau}},\quad G(\tau,x,\eta_1)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\left(\exp\left(-\frac{(\eta_1-x)^2}{4a^2\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta_1+x)^2}{4a^2\tau}\right)\right),$$

$$\psi_{2k}(\tau)=-e^{q_0\tau}v_k(\tau,0),\psi_{2k-1}(\tau)\equiv0,\ \ \Phi_k(\tau,\eta_1)=\Phi_k(y_{1,k-1},y_{1,k-2},...,y_{1,0},\tau,\eta_1).$$

Отсюда следует, что функции $w_{1,k}(\tau,\eta_1)$ экспоненциально убывают при $\tau+\eta_1\to\infty$.

Таким образом, нами построены все функции, входящие в правую часть равенства (4).

Обоснование. Оценим остаточный член разложения (4).

Пусть $z(t,x)=z_n(t,x)+R(t,x)$, где $R(t,x)$ – остаточный член разложения,

$$z_n(t,x)=U_n(t,x)+V_n(\tau,x)+\Pi_{1,2n+1}(t,\eta_1)+\Pi_{2,2n+1}(t,\eta_2)+W_{1,2n+1}(\xi,\eta_1)+W_{2,2n+1}(\xi,\eta_2),$$

$$U_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t,x), V_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\tau,x),\ \Pi_{j,2n+1}(t,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k\pi_{j,k}(t,\eta_j),$$

$$W_{j,2n+1}(\tau,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k w_{\mathrm{j},k}(\tau,\eta_j).$$

Тогда для остаточного члена получим следующую задачу:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 R(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial R(t,x)}{\partial x}+q(t,x)R(t,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{31}$$

$$R(0,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad x\in[0,1],\ z(t,0)=z(t,1)=O(\varepsilon^{n+1}),\ t\in[0,T],\ \varepsilon\to 0. \tag{32}$$

Применяя принцип максимума [7], получаем:

$$|R(t,x)|\le\max_{\substack{(t,x)\in\bar\Omega\\ 0<\varepsilon<<1}}\left\{q^{-1}(t,x)O(\varepsilon^{n+1}),\ O(\varepsilon^{n+1})\right\}.$$

Отсюда имеем:

$$R(t,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (t,x)\in\bar\Omega,\ \ \varepsilon\to 0.$$

Теорема. Для решения задачи (1)–(3) при стремлении малого параметра к нулю в области $\bar\Omega$ справедливо асимптотическое разложение

$$z(t,x)=U_n(t,x)+V_n(\tau,x)+\Pi_{1,2n+1}(t,\eta_1)+\Pi_{2,2n+1}(t,\eta_2)+W_{1,2n+1}(\xi,\eta_1)+W_{2,2n+1}(\xi,\eta_2)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где функции $U_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t,x), V_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\tau,x),\ \Pi_{j,2n+1}(t,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k\pi_{j,k}(t,\eta_j),$ $W_{j,2n+1}(\tau,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k w_{j,k}(\tau,\eta_j)$ определены выше.

Заключение. Нами построено полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа. Доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим решением поставленной задачи на всем прямоугольнике. Данная работа для нас является началом исследования бисингулярно возмущенных задач параболического типа, в следующих работах, ссылаясь на эту статью, мы будем исследовать только бисингулярные случаи.

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

2. Zauderer, E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics / E. Zauderer. – New York etc.: John Wiley & Sons, Inc. – 891 p.

3. Алымкулов, К. Об одном методе построения асимптотических разложений бисингулярно возмущенных задач / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 12. – С. 3–11.

4. Вишик, М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. – Т. 12, вып. 5(77). – С. 3–122.

5. Треногин, В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика / В.А. Треногин // УМН. – 1970, Т. 25, вып. 4(154). – С. 123–156.

6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физ.-мат. лит., 2001. – 575 с.

7. Protter, M.H. Maximum Principles in Differential Equations / M.H. Protter, H.F. Weinberger. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967, 261 p.

Поступила в редакцию 27 декабря 2021 г.

Сведения об авторах

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич – доктор физико-математических наук, ректор Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызская Республика, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0856-5113

Шооруков Асылбек Абдибахапович – аспирант, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика, ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0002-9550-090X

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, директор ВШМОП, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика, e-mail: dtursunov@oshsu.kg, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6990-1742

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 27–34

DOI: 10.14529/mmph220103

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE SECOND ORDER OF PARABOLIC TYPE

K.G. Kozhobekov, A.A. Shoorukov, D.A. Tursunov
Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: dtursunov@oshu.kg

Abstract. The article constructs a complete uniform asymptotic expansion in a small parameter of the solution of the first boundary value problem. The first boundary value problem is posed for a singularly perturbed linear inhomogeneous second-order partial differential equation with two independent variables of parabolic type. The problem is investigated on a rectangle. The peculiarities of the problem are the presence of a small parameter in front of the heat conduction operator, the existence of corner boundary layers at the lower corners of the rectangle. It is required to construct a uniform asymptotic expansion of the solution of the first boundary value problem on a rectangle, with any degree of accuracy, as the small parameter tends to zero. The asymptotic expansion of the solution in terms of a small parameter is constructed by the Vishik–Lyusternik method. When solving the problem, we use: methods of integration of ordinary differential equations, the classical method of a small parameter, the Vishik–Lyusternik boundary function method, and the maximum principle. As usual, the problem is solved in two stages: in the first stage, a formal expansion of the solution of the first boundary value problem is constructed; and in the second stage, the remainder of the resulting expansion is estimated and this proves that the resulting expansion is indeed asymptotic over the entire rectangle. In the first stage, a formal asymptotic solution is sought in the form of a sum of six functions (solutions): an external solution defined on the entire rectangle; boundary layer solution in a small neighborhood of the lower side of the rectangle; two lateral boundary layer solutions in a small neighborhood of the lateral sides of the rectangle and two corner boundary layer solutions in the neighborhood of the lower vertices of the rectangle. All these boundary layer solutions exponentially decrease outside the boundary layers.

Keywords: asymptotic solution; small parameter; singularly perturbed problem; first boundary value problem; heat equation; boundary layer solution.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of mathematical physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).

2. Zauderer E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York etc.: John Wiley & Sons, Inc., 891 p.

3. Alymkulov K., Tursunov D.A. On a method of construction of asymptotic decompositions of bisingular perturbed problems. *Russian Mathematics*, 2016, Vol. 60, no. 12, pp. 1–8. DOI: 10.3103/S1066369X1612001X

4. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, Vol. 12, Iss. 5(77), pp. 3–122. (in Russ.).

5. Trenogin V.A. The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik. *Russian Mathematical Surveys*, 1970, Vol. 25, Iss. 4, pp. 119–156. DOI: 10.1070/RM1970v025n04ABEH001262

6. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* (A Handbook of Linear Equations in Mathematical Physics), Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 2001, 575 p. (in Russ.).

7. Protter M.H., Weinberger H.F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967, 261 p. DOI:10.1007/978-1-4612-5282-5

Received December 27, 2021

Information about the authors

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Rector of Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0856-5113

Shoorukov Asylbek Abdibahapovich is Post-graduate Student, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9550-090X

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Director of the HSIEP, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: dtursunov@oshsu.kg, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6990-1742

УДК 517.977.57 DOI: 10.14529/mmph220104

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА УПРАВЛЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ш.И. Магеррамли
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика
E-mail: semedli.shehla@gmail.com

Аннотация. Рассматривается одна обратная задача типа управления об определении старшего коэффициента одномерного параболического уравнения. Рассматриваемая задача является вариационной постановкой коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения. Искомый коэффициент параболического уравнения зависит от пространственной переменной. Для параболического уравнения задано интегральное граничное условие. Роль управляющей функции играет искомый старший коэффициент параболического уравнения, являющийся элементом пространства Соболева. Множество допустимых управляющих функций принадлежит пространству Соболева. Целевой функционал для задачи управления составлен на основе интегрального условия переопределения заданной в обратной задаче. Это условие может быть интерпретировано как задания средневзвешенного значения решения рассматриваемого уравнения по временной переменной. Решение краевой задачи для параболического уравнения, при каждом заданном управляющей функции, определяется как обобщенное решение из пространства Соболева. Доказано существование решения рассматриваемой обратной задачи типа управления. Введена сопряженная краевая задача для рассматриваемой задачи управления. Доказана дифференцируемость по Фреше целевого функционала на множестве допустимых управляющих функций. Кроме того, введена вспомогательная краевая задача и с использованием решения этой задачи найдена формула для градиента целевого функционала. Получено необходимое условие оптимальности допустимой управляющий функции.

Ключевые слова: параболическое уравнение; коэффициентная обратная задача; интегральные условия; вариационная постановка.

Введение

В работах [1–5] и др. изучены обратные задачи типа управления для параболических уравнений при классических граничных условиях и локальных условиях переопределения. Такие задачи при нелокальных условиях менее исследованы [6].

В данной работе рассматривается обратная задача типа управления об определении старшего коэффициента одномерного параболического уравнения при интегральных условиях. Доказано существование решения задачи. Найдена формула для градиента целевого функционала на множестве допустимых управлений из пространства Соболева и получено необходимое условие оптимальности для допустимого управления.

Постановка обратной задачи типа управления

В работе для функциональных пространств и их норм используем обозначения из [7, с. 12–15]. Через $W_{2,0}^1(0,l)$ (соответственно $V_{2,0}^{1,0}(Q), W_{2,0}^1(Q)$) будем обозначать подпространство функций из $W_2^1(0,l)$ (соответственно $V_2^{1,0}(Q), W_2^1(Q)$), равных нулю при $x=0$. Через $M_1, M_2, \ldots$ обозначаем положительные постоянные входящие в получаемые оценки.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для линейного параболического уравнения: пусть требуется найти пару функций $\{u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon), \upsilon=\upsilon(x)\}$, минимизирующих функционал

$$J(\upsilon)=\int_0^l \left| \int_0^T \omega(t) u(x,t;\upsilon)\,dt-\alpha(x) \right|^2 dx, \tag{1}$$

при условиях

$$u_t-\left(\upsilon(x)u_x\right)_x+a(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in Q=\left\{(x,t):0<x<l,0<t\le T\right\},\tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l,\tag{3}$$

$$u(0,t)=0,\quad \upsilon(l)u_x(l,t)=\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx,\quad 0<t\le T\ ,\tag{4}$$

$$\upsilon=\upsilon(x)\in V=\left\{\upsilon=\upsilon(x)\in W_2^1(0,l):0<\nu\le\upsilon(x)\le\mu,\left|\upsilon'(x)\right|\le d\quad п.в.на\quad (0,l)\right\}.\tag{5}$$

Здесь $\mu>\nu>0,l,T,d>0$ – некоторые постоянные, $a(x,t),f(x,t),\varphi(x),H(x,t),\omega(t),\alpha(x)$ – известные измеримые функции, удовлетворяющие следующие условия:

$$\left|a(x,t)\right|\le\mu,\ \left|H(x,t)\right|\le\mu_1\ ,\quad \left|H_t(x,t)\right|\le\mu_2 \text{ п.в.на } Q,\ f(x,t)\in L_2(Q),\varphi(x)\in W_{2,0}^1(0,l),$$
$$\omega(t)\in L_2(0,T),\alpha(x)\in L_2(0,l),\quad \mu_1,\mu_2=\text{const}>0\ ,\tag{6}$$

$\upsilon=\upsilon(x)$ – управление, V – множество допустимых управлений.

Отметим, что задача (1)–(5) является вариационной постановкой обратной задачи для параболического уравнения (2) об определении функций $\left\{u(x,t;\upsilon),\upsilon(x)\right\}$, удовлетворяющих условиям (3)–(5) и условию переопределения интегрального вида

$$\int_0^T\omega(t)u(x,t;\upsilon)dt=\alpha(x),\quad 0<x<l\,.\tag{7}$$

В работе [8] изучена обратная задача об определении старшего коэффициента параболического уравнения с интегральным условием переопределения в традиционной постановке.

Функция $u(x,t)=u(x,t;\upsilon)\in V_{2,0}^{1,0}(Q)$ называется обобщенным решением из $V_2^{1,0}(Q)$ краевой задачи (2)–(4), если

$$\int_Q\left[-u\eta_t+\upsilon(x)u_x\eta_x+a(x,t)u\eta\right]dxdt-\int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt=$$
$$=\int_0^l\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int_Q f(x,t)\eta dxdt\,,\tag{8}$$

для всех $\eta=\eta(x,t)\in\hat{W}_{2,0}^1(Q)=\left\{\eta:\eta\in W_{2,0}^1(Q),\ \eta(x,T)=0\right\}$.

Из результатов работы [9] следует что, для каждого $\upsilon=\upsilon(x)\in V$, краевая задача (2)–(4) имеет единственное обобщенное решение из пространства $V_2^{1,0}(Q)$. Кроме того, его обобщенное решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^1(Q)$ и верна оценка

$$\|u\|_{2,Q}^{(1)}\le M_1\left[\|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)}+\|f\|_{2,Q}\right].\tag{9}$$

Существование решения обратной задачи типа управления

Теорема 1. Пусть выполнены условия (6). Тогда для задачи (1)-(5) существует хотя бы одно оптимальное управление.

Доказательство. Возьмем какую-либо точку $\upsilon\in V$. Пусть последовательность $\left\{\upsilon_k\right\}\subset V$ такова, что

$$\upsilon_k\to\upsilon\ \text{ слабо в } W_2^1(0,l).\tag{10}$$

Тогда из компактности вложения $W_2^1(0,l)\to C[0,l]$ [7, с. 78] следует, что

$$\upsilon_k\to\upsilon\ \text{ сильно в } C[0,l].\tag{11}$$

Положим $u_k=u_k(x,t)=u(x,t;\upsilon_k)$. Тогда полагая $u=u_k,\upsilon=\upsilon_k$ в (1)-(3) и учитывая оценку (9) для функции $u=u_k$, получим

$$\|u_k\|_{2,Q}^{(1)} \le M_2 \quad (k=1,2,\ldots). \tag{12}$$

Тогда из (12) в силу теоремы вложения [7, с. 78] существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ такая, что

$$u_{k_m} \to u \ \text{ слабо в } W_2^1(Q) \text{ и сильно в } L_2(Q), \tag{13}$$

где $u = u(x,t) \in W_{2,0}^1(Q)$ – некоторая функция.

Для функций $u_{k_m} = u_{k_m}(x,t)$ справедливы тождества

$$\int_Q \left[-u_{k_m}\eta_t + \upsilon_{k_m}(x) u_{k_m x}\eta_x + a(x,t)u_{k_m}\eta \right] dxdt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u_{k_m}(x,t)dx \right] \eta(l,t)dt =$$

$$= \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_Q f(x,t)\eta dxdt \quad (k=1,2,\ldots), \ \forall \eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_{2,0}^1(Q). \tag{14}$$

Используя (10)–(13), доказываем, что

$$\int_Q \upsilon_{k_m}(x) u_{k_m x}\eta_x dxdt \to \int_Q \upsilon(x) u_x \eta_x dxdt, \tag{15}$$

$$\int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u_{k_m}(x,t)dx \right] \eta(l,t)dt \to \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx \right] \eta(l,t)dt. \tag{16}$$

Из (14) при $k_m \to \infty$ с помощью (13), (15), (16) получаем (8). Следовательно, $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$. Тогда согласно (13), справедливо соотношение

$$u(x,t;\upsilon_{k_m}) \to u(x,t;\upsilon) \ \text{ сильно в } L_2(Q). \tag{17}$$

Тогда из единственности решение задачи (2)–(4) следует, что соотношение (17) справедливо для всей последовательности $\{u_k\}$, т. е.

$$u(x,t;\upsilon_k) \to u(x,t;\upsilon) \ \text{ сильно в } L_2(Q). \tag{18}$$

Из (18) следует, что $J(\upsilon_k) \to J(\upsilon)$ при $k \to \infty$, т. е. функционал $J(\upsilon)$ слабо непрерывен на V. Тогда из результатов работы [10, с. 49, 51] следует, что справедлива теорема 1.

Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности

Введем сопряженную краевую задачу для задачи (1)–(5):

$$\psi_t + (\upsilon(x)\psi_x)_x - a(x,t)\psi + H(x,t)\psi(l,t) = 2\left[\int_0^T \omega(\tau)u(x,\tau;\upsilon)d\tau - \alpha(x) \right]\omega(t), \quad (x,t) \in Q, \tag{19}$$

$$\psi(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{20}$$

$$\psi(0,t) = 0, \quad \psi_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t < T. \tag{21}$$

Пусть $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon)$ есть обобщенное решение краевой задачи (19)–(21) из $V_2^{1,0}(Q)$, т. е. эта функция принадлежит пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left[\psi\eta_t + \upsilon(x)\psi_x\eta_x + a(x,t)\psi\eta - H(x,t)\psi(l,t)\eta \right] dxdt = -2\int_Q \left\{ \left[\int_0^T \omega(\tau)u(x,\tau;\upsilon)d\tau - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\} \eta dxdt$$

$$\forall \eta = \eta(x,t) \in \breve{W}_{2,0}^1(Q) = \left\{ \eta : \eta \in W_{2,0}^1(Q), \eta(x,0) = 0 \right\}. \tag{22}$$

Можно показать, что задача (19)–(21) однозначно разрешима в пространстве $V_2^{1,0}(Q)$. Кроме того, $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon) \in W_{2,0}^1(Q)$ и

$$\|\psi\|_{2,Q}^{(1)} \le M_3 \left\| \left[\int_0^T \omega(\tau) u(x,\tau;\upsilon) d\tau - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\|_{2,Q} . \qquad (23)$$

Для оценки нормы в правой части (23) используем неравенство Коши–Буняковского и, учитывая (9), имеем

$$\|\psi\|_{2,Q}^{(1)} \le M_4 \left[\|\omega\|_{2,(0,T)} \left(\|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q} \right) + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \right]. \qquad (24)$$

Пусть функция $\theta = \theta(x;\upsilon) \in W_2^1(0,l)$ является обобщенным решением из $W_2^1(0,l)$ следующей вспомогательной краевой задачи:

$$-\theta'' + \theta = \int_0^T u_x(x,t;\upsilon) \psi_x(x,t;\upsilon) dt, \quad 0 < x < l , \qquad (25)$$

$$\theta'(0) = \theta'(l) = 0 . \qquad (26)$$

Для решения краевой задачи (25), (26) справедливо тождество

$$\int_0^l (\theta'\eta' + \theta\eta) dx = \int_0^l \left(\int_0^T u_x(x,t;\upsilon) \psi_x(x,t;\upsilon) dt \right) \eta dx, \quad \forall \eta = \eta(x) \in W_2^1(0,l) . \qquad (27)$$

Задача (25), (26), при каждом заданном $\upsilon = \upsilon(x) \in V$, имеет единственное обобщенное решение $\theta = \theta(x;\upsilon) \in W_2^1(0,l)$ [11, с. 39, теорема 4]. Кроме того, полагая в (27) $\eta = \theta,$ используя ограниченность вложения $W_2^1(0,l) \to C[0,l]$ и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\int_0^l \left[(\theta')^2 + \theta^2 \right] dx \le \|\theta\|_{C[0,l]} \int_Q |u_x \psi_x| dx dt \le M_5 \|\theta\|_{2,(0,l)}^{(1)} \|u_x\|_{2,Q} \|\psi_x\|_{2,Q} .$$

Отсюда следует оценка

$$\|\theta\|_{2,(0,l)}^{(1)} \le M_5 \|u_x\|_{2,Q} \|\psi_x\|_{2,Q} . \qquad (28)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (6). Тогда функционал $J(\upsilon)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на множестве V и справедлива формула

$$J'(\upsilon) = \theta(x;\upsilon), \quad 0 < x < l . \qquad (29)$$

Доказательство. Пусть $\upsilon \in V$ – некоторый элемент, $\Delta\upsilon \in W_2^1(0,l)$-приращение этого элемента и $\upsilon + \Delta\upsilon \in V$. Через $\Delta u(x,t) = u(x,t;\upsilon+\Delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$ обозначим приращение решение краевой задачи (2)–(4). Тогда ясно, что Δu является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\Delta u_t - \left((\upsilon + \Delta\upsilon) \Delta u_x \right)_x + a\Delta u = (\Delta\upsilon u_x)_x , \quad (x,t) \in Q , \qquad (30)$$

$$\Delta u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l , \qquad (31)$$

$$\Delta u(0,t) = 0, \quad (\upsilon(l) + \Delta\upsilon(l)) \Delta u_x(l,t) = \int_0^l H(x,t) \Delta u(x,t) dx - \Delta\upsilon(l) u_x(l,t), \ 0 < t \le T . \qquad (32)$$

Решение краевой задачи (30)–(32) удовлетворяет тождеству

$$\int_Q \left(\Delta u_t \eta + (\upsilon + \Delta\upsilon) \Delta u_x \eta_x + a\Delta u \eta - H \Delta u \eta(l,t) \right) dx dt = -\int_Q \Delta\upsilon u_x \eta_x dx dt, \quad \forall \eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_{2,0}^1(Q) , \qquad (33)$$

и можно показать, что для него верна оценка

$$|\Delta u|_Q \equiv \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q)} \le M_6 \|\Delta\upsilon u_x\|_{2,Q} .$$

Отсюда, учитывая ограниченность вложения $W_2^1(0,l) \to C[0,l]$ и оценки (9), имеем

$$|\Delta u|_Q \le M_6 \|\Delta\upsilon u_x\|_{2,Q} \le M_6 \|\Delta\upsilon\|_{C[0,l]} \|u_x\|_{2,Q} \le M_7 \|\Delta\upsilon\|_{2,(0,l)}^{(1)} . \qquad (34)$$

Приращение $\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon + \Delta\upsilon) - J(\upsilon)$ функционала (1) представим в виде

$$\Delta J(\upsilon) = 2\int_0^l \left\{ \left[\int_0^T \omega(\tau) u(x,\tau;\upsilon) d\tau - \alpha(x) \right] \int_0^T \omega(\tau) \Delta u(x,\tau) d\tau \right\} dx + \int_0^l \left| \int_0^T \omega(\tau) \Delta u(x,\tau) d\tau \right|^2 dx . \quad (35)$$

Используя (22) при $\eta = \Delta u$ и (33) при $\eta = \psi$, получаем равенство

$$2\int_0^l \left\{ \left[\int_0^T \omega(\tau) u(x,\tau;\upsilon) d\tau - \alpha(x) \right] \int_0^T \omega(\tau) \Delta u(x,\tau) d\tau \right\} dx = \int_Q (u_x + \Delta u_x) \psi_x \Delta\upsilon dxdt .$$

Учитывая это равенство в (35), получим

$$\Delta J(\upsilon) = \int_Q u_x \psi_x \Delta\upsilon dxdt + R , \quad (36)$$

где

$$R = \int_0^l \left| \int_0^T \omega(\tau) \Delta u(x,\tau) d\tau \right|^2 dx + \int_Q \Delta u_x \psi_x \Delta\upsilon dxdt . \quad (37)$$

В равенстве (27) положим $\eta = \Delta\upsilon$. Тогда учитывая полученное равенство в (36), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \int_0^l (\theta' \Delta\upsilon' + \theta \Delta\upsilon) dx + R , \quad (38)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, ограниченность вложения $W_2^1(0,l) \to C[0,l]$ и оценки (22), (34), имеем

$$|R| \le \int_0^l \left| \int_0^T \omega(\tau) \Delta u(x,\tau) d\tau \right|^2 dx + \int_Q |\Delta u_x \psi_x \Delta\upsilon| dxdt \le \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \|\Delta u\|_{2,Q}^2 + \|\Delta\upsilon\|_{C[0,l]} \|\Delta u_x\|_{2,Q} \|\psi_x\|_{2,Q} \le$$

$$\le M_7^2 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \left(\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 + M_7 \|\psi_x\|_{2,Q} \left(\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 \le M_8 \left(\|\Delta\upsilon\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2$$

Тогда из (38) следует, что функционал (1) дифференцируем по Фреше на V и верна формула (29). Рассуждая аналогично работе [12], нетрудно показать, что отображение $J' : V \to W_2^1(0,l)$ непрерывно. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (6) и $\upsilon_* = \upsilon_*(x) \in V$ – оптимальное управление в задаче (1)–(5). Тогда для любого $\upsilon = \upsilon(x) \in V$ выполняется неравенство

$$\int_0^l \left[\theta'(x;\upsilon_*) \left(\upsilon'(x) - \upsilon_*'(x) \right) + \theta(x;\upsilon_*) \left(\upsilon(x) - \upsilon_*(x) \right) \right] dx \ge 0 . \quad (39)$$

Справедливость этой теоремы следует из [10, с. 28, теорема 5].

Литература

1. Искендеров, А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики / А.Д. Искендеров // ДАН СССР. – 1984.– Т. 274, № 3. – С. 531–533.

2. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 285 с.

3. Кабанихин, С.И. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности / С.И. Кабанихин., Г. Даирбаева // Международная конференция «Обратные некорректные задачи математической физики», посвященная 75-летию академика М. М. Лаврентьева, 20–25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия. – С. 1–5.

4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009.– 457 с.

5. Iskenderov, A.D. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem / A.D. Iskenderov, R.K. Tagiyev // The 7th International Conference «In-

verse Problems: Modelling and SIMULATION» (IMPS-2014), May 26–31, 2014, Turkey. – 2014. – P. 31.

6. Габибов, В.М. Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / В.М. Габибов // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-матем. наук. – 2017. – № 2. – С. 80–91.

7. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

8. Камынин, В.Л. Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении / В.Л. Камынин // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, № 1. – С. 48–58.

9. Тагиев, Р.К. О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли // Вестник Бакинского университета. Серия: Физико-математических наук. – 2019. – № 2. – С. 17–26.

10. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

11. Самарский, А.А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров. – М.: Высш. шк., 1987. – 296 с.

12. Тагиев, Р.К. Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах / Р.К. Тагиев // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 1492–1501.

Поступила в редакцию 14 марта 2021 г.

Сведения об авторе

Магеррамли Шахла Илхам кызы – диссертант, кафедра оптимизация и управления, факультет прикладной математики и кибернетики, Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика, e-mail: semedli.shehla@gmail.com, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0394-6654

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 35–41

DOI: 10.14529/mmph220104

INVERSE CONTROL-TYPE PROBLEM OF DETERMINING HIGHEST COEFFICIENT FOR A ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Sh.I. Maharramli
Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan
E-mail: semedli.shehla@gmail.com

Abstract. In this paper, we consider one inverse control-type problem of determining the leading coefficient of a one-dimensional parabolic equation. The problem under consideration is a variational statement of a coefficient inverse problem for a parabolic equation. The sought for coefficient of the parabolic equation depends on the spatial variable. An integral boundary condition is set for the parabolic equation. The desired highest coefficient of the parabolic equation plays role of the control function, which is an element of the Sobolev space. The set of admissible control functions belong to the Sobolev space. The objective functional for the control problem is compiled based on the integral overdetermination condition set in the inverse problem. This condition may be interpreted as tasks of a weighted mean of the solution of the equation under consideration as per time variable. The solution of the boundary value problem for a parabolic equation, for each given control function, is defined as a generalized solution from the Sobolev space. The existence of a solution of the considered inverse control-type problem is proved. An adjoint boundary value problem for the control problem under study is introduced. The Frechet differentiability of the objective functional in a set of admissible control functions is proved. In addition, an auxiliary boundary value problem is introduced; and using the solution of this problem, an expression for the gradient of the objective functional is found. The necessary optimality condition for the admissible control function is obtained.

Keywords: parabolic equation; coefficient inverse problem; integral conditions; variational statement.

References

1. Iskenderov A.D. O variatsionnykh postanovkakh mnogomernykh obratnykh zadach matematicheskoy fiziki (Variational formulations of multidimensional inverse problems of mathematical physics). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, Vol. 274, no. 3, pp. 531–533.

2. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* (Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems and their Applications to Inverse Heat Transfer Problems). Moscow, Nauka Publ., 1988, 285 p. (in Russ.).

3. Kabanikhin S.I., Dairbaeva G. Obratnaya zadacha nakhozhdeniya koeffitsienta uravneniya teploprovodnosti (The Inverse Problem of Finding the Coefficient of the Heat Equation). *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Obratnye nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki", posvyashchennaya 75-letiyu akademika M.M. Lavrent'eva, 20-25 avgusta 2007 g., Novosibirsk, Rossiya* (Proc. International Conference "Inverse Ill-posed problems of Mathematical physics, dedicated to the 75th anniversary of Academician M.M. Lavrentiev", Russia, Novosibirsk. August 20–25, 2007), pp. 1–5. (in Russ.).

4. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).

5. Iskenderov A.D., Tagiyev R.K. Variational Method Solving the Problem of Identification of the Coefficients of Quasilinear Parabolic Problem. *Proc. 7th International Conference "Inverse Problems: modelling and Simulation" (IPMS–2014)*, May 26–31, 2014, Turkey, P. 31.

6. Gabibov V.M. Koeffitsientnaya obratnaya zadacha tipa upravleniya dlya parabolicheskogo uravneniya s dopolnitel'nym integral'nym usloviem (Coefficient Inverse Problem of Control Type for a Parabolic Equation with an Additional Integral Condition). *Vestnik Bakinskogo Universiteta. Ser. fiz.-matem. nauk*, 2017, no. 2, pp. 80–91.

7. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Parabolic Linear and Quasilinear Equations). Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).

8. Kamynin V.L. On the Inverse Problem of Determining the Leading Coefficient in Parabolic Equations. *Mathematical Notes*, 2008, Vol. 84, no. 1, pp. 45–54. DOI: 10.1134/S0001434608070043

9. Tagiev R.K., Magerramli Sh.I. O razreshimosti nachal'no-kraevoy zadachi dlya odnomernogo lineynogo parabolicheskogo uravneniya s integral'nym granichnym usloviem (On the solvability of the initial boundary value problem for a one-dimensional linear parabolic equation with an integral boundary condition). *Vestnik Bakinskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskikh nauk* (News of Baku University: Series of Physico-Mathematical Sciences), 2019, no. 2, pp. 17–26.

10. Vasil'ev, F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* (Methods for solving extreme problems). Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p.

11. Samarskiy A.A., Lazarov R.D., Makarov V.L. *Raznostnye skhemy dlya differentsial'nykh uravneniy s obobshchennymi resheniyami* (Difference schemes for differential equations with generalized solutions). Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 1987, 296 p. (in Russ.).

12. Tagiev R.K. Optimal'noe upravlenie koeffitsientami v parabolicheskikh sistemakh (Optimal control of coefficients in parabolic systems). *Differentsial'nye uravneniya*, 2009, Vol. 45, no. 10, pp. 1492–1501.

Received March 14, 2021

Information about the author

Maharramli Shakhla Ilkham kizi is Dissertation Student, The Department of Optimization and Optimal Control, Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics, Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan, e-mail: semedli.shehla@gmail.com, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0394-6654

УДК 517.54 DOI: 10.14529/mmph220105

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ И РАДИУСЫ ВЫПУКЛОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф.Ф. Майер[1], М.Г. Тастанов[1], А.А. Утемисова[1], С.А. Козловский[2]
[1] Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан
[2] АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», г. Костанай, Республика Казахстан
E-mail: maiyer@mail.ru

Аннотация. Исследование геометрических свойств аналитических функций является одной из классических задач теории функций комплексного переменного и уже более полувека как представляет устойчивый интерес у многих математиков. При этом отдельным направлением является построение достаточных признаков однолистности, в том числе нахождение условий, обеспечивающих их простые геометрические свойства (выпуклость, звездообразность, почти выпуклость и др.).

Решение указанных задач во многих случаях связано с нахождением оценок в различных классах функций, что само по себе также является актуальной проблематикой.

Настоящая статья посвящена нахождению точных оценок аналитических функций и их производных в достаточно широких классах функций, выделяемых в виде некоторых ограничений на области, получаемых из областей значений данных функций с помощью круговой симметризации или симметризации относительно прямой. На основе данных результатов найдены точные радиусы выпуклости в некоторых классах функций.

Ключевые слова: геометрическая теория функций комплексного переменного, симметризация области, оценки аналитических функций, однолистные функции, радиусы выпуклости аналитических функций.

Введение

Методы подчиненности [1] и симметризации [2, 3] широко используются в геометрической теории комплексных функций для нахождения их точных оценок. К данному направлению тесно примыкают вопросы построения достаточных признаков однолистности по областям значений некоторых функционалов. В систематизированном виде эта проблематика и наиболее важные результаты впервые были изложены в работе [4].

Исследованию геометрических свойств функций, аналитических в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$, в том числе нахождению их радиусов выпуклости, звездообразности и почти выпуклости, посвящено достаточно большое количество работ [5–8].

В нашем исследовании используется понятие внутреннего радиуса области – одного из наиболее общих характеристик области, введенного Г. Сеге [9]. В дальнейшем его свойства изучались в работах Г. Полиа и Г. Сегё [2], В.К. Хеймана [10]. Для случая односвязных областей он хорошо известей под название радиуса конформности области [1].

Метод подчиненности в сочетании с методом симметризации и внутренним радиусом области позволяют [11] при построении достаточных признаков однолистности в качестве множества значений функционалов использовать области, существенно отличные от канонических.

Далее, говоря о функциях комплексного переменного z, мы будем считать, что они являются регулярными (аналитическими) в круге E.

Пусть функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ заданы в круге E и функция $\varphi_0(z)$ является однолистна в E.

Функцию $\varphi(z)$ называют подчиненной функции $\varphi_0(z)$ (и обозначают $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)$), если $\varphi(z)=\varphi_0\left[w(z)\right]$, где $w(z)$ аналитична в E, $|w(z)|\le 1$ для всех z из E и $w(0)=0$.

Геометрически условие подчиненности означает, что $\varphi(E)\subset\varphi_0(E)$ и $\varphi(0)=\varphi_0(0)$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма 1 [12]. *Пусть функция* $\varphi(z)$ *в круге* E *разлагается в ряд вида*

$$\varphi(z)=c_0+c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots,n\geq 1,$$

и пусть $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)$. *Тогда справедлива оценка*

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}}R\big(D_0,\varphi(z)\big),$$

где $R-$ *внутренний радиус области* D *относительно точки w и* $D_0=\varphi_0(E)$. *Оценка точная и достигается для функции* $\varphi(z)=\varphi_0\left(\varepsilon z^n\right)$, *где* $|\varepsilon|=1$

1. Оценки модуля функции и модуля производной в некоторых классах функций

Пусть $G(\alpha,n),0<\alpha\leq 2$ – класс функций

$$w=\varphi(z)=c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots,n\geq 1,\ z\in E, \tag{1}$$

удовлетворяющих условию

$$\max_{0\leq R\leq\infty} mes\left\{\varphi(E)\cap|w-w_0|=\rho\right\}\leq\alpha\pi, \tag{2}$$

где w_0- некоторое фиксированное комплексное число.

Данное условие означает, что радианная мера пересечения области $\varphi(E)$ с каждой окружностью $|w-w_0|=\rho$ не превосходит $\alpha\pi$. Поэтому после осуществления круговой симметризации [2–3] области $\varphi(E)$ относительно луча, исходящего из точки w_0 и проходящего через начало координат, получится область D^*, содержащаяся внутри угла D^0 с вершиной в точке w_0 раствора $\alpha\pi$.

Теорема 1. *Если* $\varphi(z)\in G(\alpha,n)$ *при некотором* $w_0\in\mathbb{C}$, *то в круге* $|z|\leq r$ *имеют место следующие оценки*

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{2A\alpha nr^{n-1}}{1-r^{2n}}\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}, \tag{3}$$

$$|\varphi(z)|\leq A\left[\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}-1\right], \tag{4}$$

где $A=|w_0|$. Оценки точные и достигаются для функции

$$\varphi_0(z)=A\left[\left(\frac{1+z^n}{1-z^n}\right)^{\alpha}-1\right].$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что вершиной угла D^0 раствора $\alpha\pi$ является точка $w_0=-A,\ A>0$, и биссектриса угла проходит через точку $w=0$ в положительном направлении действительной оси. Легко определить, что отображение круга E на угол D^0 имеет вид

$$\varphi_0(z)=A\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right],$$

при этом $\varphi_0(0)=0$ и $\varphi_0(-1)=-A$.

Найдем внутренний радиус области D_0 в точках w: $\Im w=0$. Так как $R\big(D,\varphi_0(z)\big)=|\varphi_0'(z)|\left|1-|z|^2\right|$, то

$$R\left(D,\varphi_0\left(z\right)\right)=\frac{2A\alpha\left(1+z\right)^{\alpha-1}}{\left(1-z\right)^{\alpha+1}}\left(1-z\right)\left(1+z\right),$$

или окончательно,

$$R\left(D,\varphi_0\left(z\right)\right)=2A\alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$$

Так как $z=\pm r$, где $0<r<1$, то

$$\frac{1-r}{1+r}\leq\frac{1+r}{1-r},$$

поэтому

$$R\left(D,\phi_0\left(z\right)\right)\leq 2A\alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}.$$

Очевидно, что

$$R\left(D,\varphi\left(z\right)\right)\leq R\left(D,\varphi_0\left(z^n\right)\right)\leq 2A\alpha\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}.$$

Поэтому, применяя лемму 1, окончательно получаем

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{2A\alpha nr^{n-1}}{1-r^{2n}}\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}.$$

Оценка (4) получается из оценки (3) интегрированием по r. Точность оценок (3)–(4) проверяется легко. Теорема доказана.

Конкретизация условия (2) позволяет получить целую серию результатов.

Следствие 1. *Пусть функция* $\varphi\left(z\right)$ *разлагается в ряд вида* (1) *и пусть после круговой симметризации области* $\varphi\left(E\right)$ *относительно луча* $\left[-A;+\infty\right), A>0$, *получается область* D^*, *содержащаяся в области* $D_0=\mathbb{C}\setminus(-\infty;-A]$. *Тогда в круге* $|z|\leq r$ *справедливы точные оценки*

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{4Anr^{n-1}\left(1+r^n\right)}{\left(1-r^n\right)^3},$$

$$|\varphi(z)|\leq A\left[\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^2-1\right].$$

Следствие 1 вытекает из теоремы 1 при $\alpha=2$, когда область D^0 – всю плоскость комплексного переменного z с удаленным лучом $(-\infty;-A]$.

Пусть $\alpha=1$. В данном случае областью D_0 является полуплоскость с граничной прямой, удаленной от начала системы координат на расстояние $A=|w_0|$.

Следствие 2. *Пусть функция* $\varphi\left(z\right)$ *имеет разложение в ряд вида* (1) *и пусть радианная мера пересечения области* $\varphi\left(E\right)$ *с каждой окружностью* $|w-w_0|=\rho, 0<\rho<+\infty$, *где* w_0 – *некоторая фиксированная комплексная точка, не превосходит* π.

Если $A=|w_0|$, *то для всех* z, $|z|\leq r$ *верны точные оценки*

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{2Anr^{n-1}}{\left(1-r^n\right)^2},$$

$$|\varphi(z)|\leq\frac{2Ar^n}{1-r^n}.$$

Следствие 3. *Пусть функция* $\varphi(z)$ *разлагается в ряд вида* (1) *и пусть линейная мера пересечения области* $\varphi(E)$ *с любой прямой* $\Re w = u, -\infty < u < +\infty$ *не превосходит* $2l$.

Тогда для всех z, $|z| \le r$ *выполняются точные оценки*

$$|\varphi'(z)| \le \frac{4\ln}{\pi} \frac{r^{n-1}}{1-r^{2n}},$$

$$|\varphi(z)| \le \frac{2l}{\pi} \ln \frac{1+r^n}{1-r^n}.$$

Следствие 3 получается из теоремы 1 с помощью предельного перехода при $\alpha \to 0$. В этом случае круговая симметризация преобразуется в симметризацию относительно прямой.

2. Радиусы выпуклости в некоторых классах функций

Пусть $H = \{f(z)\}$ – произвольный класс функций $f(z)$, регулярных в круге E.

Радиусом выпуклости класса H называют число r_0 такое, что любая функция $f(z)$ из H является выпуклой в круге $E_{r_0} = \{z : |z| < r_0\}$. Наибольшее из таких чисел r_0 *называют точными радиусом выпуклости.*

Нахождению радиусов выпуклости (почти выпуклости, однолистности и т. д.) посвящен целый ряд работ (например, [5–7]). При этом основную трудность представляет построение оценок в заданном классе H, подходящих под достаточное условие, обеспечивающее необходимые свойства функции $f(z)$.

Теорема 2. *Пусть функция*

$$f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots, n \ge 1, \; z \in E \tag{5}$$

регулярна в круге E, $\ln f'(z) \in G(\alpha, n)$ *при некотором* $w_0 \in \mathbb{C}$ *и пусть* $A = |w_0|$.

Тогда функция $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| \le r_A$, *где* r_A *является корнем уравнения*

$$2A\alpha n r^n \left(1+r^n\right)^{\alpha-1} - \left(1-r^n\right)^{\alpha+1} = 0. \tag{6}$$

Данный радиус выпуклости является точным.

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = \ln f'(z)$. Поскольку $\varphi(z) \in G(\alpha, n)$, то в силу теоремы 1 справедлива точная оценка (3). Учитывая, что $\varphi'(z) = f''(z)/f'(z)$, из (3) получаем

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le \frac{2A\alpha n r^n}{1-r^{2n}} \left(\frac{1+r^n}{1-r^n} \right)^{\alpha}.$$

Если

$$\frac{2A\alpha n r^n}{1-r^{2n}} \left(\frac{1+r^n}{1-r^n} \right)^{\alpha} \le 1,$$

то

$$\Re\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \ge -1$$

в круге $|z| \le r_A$, где r_A находится из уравнения (6). Последнее неравенство означает (например, [2]), что функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \le r_A$.

Радиус выпуклости r_A является точным, так как достигается для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left\{ -A\left[\left(\frac{1-t^n}{1+t^n} \right)^{\alpha} - 1 \right] \right\} dt.$$

Теорема доказана.

Заметим, что частным случаем условия $\ln f'(z) \in G(\alpha, n)$ является выполнение неравенства

$$\left|\arg\left(\ln f'(z) - A\right) + \gamma\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, A > 0,\ 0 < \alpha \le 2,\ \forall z \in E. \qquad (7)$$

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий.

Следствие 4 [13]. *Пусть функция* $f(z)$ *разлагается в ряд вида* (5) *и* $\left|f'(z)\right| \le M, M > 1, \forall z \in E$. *Тогда точный радиус выпуклости равен*

$$r_M = \sqrt[n]{1 + n\ln M - \sqrt{n\ln M\left(n\ln M + 2\right)}}. \qquad (8)$$

Доказательство. Перейдём от плоскости значений $f'(z)$ к плоскости значений $\ln f'(z)$. Если $\left|f'(z)\right| \le M$, то $\Re\ln f'(z) \le \ln M$. Поэтому получаем частный случай теоремы 2 в форме условия (7), где $\alpha = 1$ и $A = \ln M$.

Из уравнения (6) получаем $2\ln M \cdot n \cdot r^n - \left(1 - r^n\right)^2 = 0$ или

$$r^{2n} - \left(2 + 2n\ln M\right)r^n + 1 = 0.$$

Отсюда находим значение точного радиуса выпуклости (8). Экстремальная функция имеет вид

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left\{\frac{2\ln M\, t^n}{1 + t^n}\right\} dt.$$

Следствие 4 дополняет результат Ф.Г. Авхадиева [5], в котором при этих же условиях найден точный радиус однолистности класса функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left|f'(z)\right| \le M, M > 1, \forall z \in E$.

Следствие 5. *Если* $\left|f'(z)\right| \ge M$, *где* $0 < M < 1, \forall z \in E$ *и* $f(z)$ *имеет разложение вида* (5), *то функция* $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| < r_M$, *где*

$$r_M = \sqrt[n]{1 + n\left(\ln M\left(- \sqrt{n\left(\ln M\left(\left(n\left(\ln M\left(+ 2\right)\right.\right.\right.\right.\right.}\right.\right.}.$$

Аналогично теореме 2, опираясь на следствие 3, доказывается

Теорема 3. *Пусть для функции* $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots, n \ge 1, z \in E$, *линейная мера пересечения области* $\ln f'(E)$ *с каждой прямой* $\Re w = u, -\infty < u < +\infty$, *не превосходит* $2l\,(l > 0)$. *Тогда точный радиус выпуклости этого класса функций равен*

$$r_l = \sqrt[n]{\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{4l^2n^2 + \pi^2} - 2nl\right)}.$$

Введем в рассмотрение класс $L(\gamma)$ функций $f(z)$ с разложением (5) таких, что $f'(z) - 1 \in G(\gamma, n)$ с $w_0 = 0$. То есть наибольшее значение сумм радианных мер дуг пересечения любой окружности $|w| = \rho$ с областью $f'(E)$ не превосходит $\gamma\pi$. Это означает, что после осуществления круговой симметризации области $f'(E)$ относительно положительной действительной полуоси получится область, содержащаяся внутри угла с вершиной в точке $w = 0$ раствора $\gamma\pi$, симметричного относительно данной полуоси.

Частным случаем класса $L(\gamma)$ является класс $K(\gamma)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg f'(z)\right| \le \gamma\frac{\pi}{2}, 0 < \gamma \le 1, z \in E, \qquad (9)$$

который в более широкой формулировке изучался в работе Рида [14] и других авторов. Известно, что все функции данного класса являются почти выпуклыми порядка γ.

Нетрудно заметить, что из условия $f(z) \in L(\gamma)$ вытекает, что линейная мера пересечения области $\ln f'(E)$ с каждой прямой $\Re w = u, -\infty < u < +\infty$, не превосходит $\gamma\pi$. Поэтому из теоремы 3 вытекает

Следствие 6. *Если функция $f(z) \in L(\gamma)$ и имеет разложение вида (5), то $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \le r_\gamma$, где $r_\gamma = \sqrt[n]{\sqrt{\gamma^2 n^2 + 1} - \gamma n}$.*

Радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left\{-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^\alpha - 1\right\} dt .$$

При $\gamma = n = 1$ следствие 6 дает известный результат [15] о радиусе выпуклости $r = \sqrt{2} - 1$ функций $f(z)$ с положительной действительной частью производной $\Re f'(z) > 0, z \in E.$

Литература

1. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М: Наука, 1966. – 628 с.

2. Полиа, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Сеге. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

3. Митюк, И.П. Применение симметризационных методов в геометрической теории функций / И.П. Митюк. – Краснодар: КубГУ, 1985. – 94 с.

4. Авхадиев, Ф.Г. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций / Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев // УМН. – 1975. – Т. 30, вып. 4(184). – С. 3–60.

5. Авхадиев, Ф.Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений / Ф.Г. Авхадиев // Мат.заметки. – 1970. – Т. 7, вып. 5. – С. 581–592.

6. Engel, O. About the Radius of Convexity of some Analytic Functions / O. Engel, P.A. Kupán, Á.O. Páll-Szabo // Creat. Math. Inform. – 2015. – Vol. 24, no. 2. – pp. 155–161.

7. Кадиева, М.Р. Условие выпуклости обобщенного интеграла Бернацкого для одного подкласса звездообразных функций / М.Р. Кадиева, Ф.Ф. Майер // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2021. – Т. 69, № 1. – С. 111–118. https://bulletin-phmath.kaznpu.kz/index.php/ped/article/view/214

8. Майер, Ф.Ф. Точные оценки гармонических и периодических функций и некоторые их применения / Ф.Ф. Майер, А.А. Шалагина // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2019. – Т. 68, № 4. – С. 71–76.

9. Szegö, G. On the capacity of a condenser / G. Szegö // Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – Vol. 51. – P. 325–350.

10. Хейман, В.К. Многолистные функции / В.К. Хейман. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

11. Аксентьев, Л.А. Применение методов подчиненности и симметризации к достаточным признакам однолистности аналитических функций / Л.А. Аксентьев, Ф.Ф. Майер // Труды семинара по краевым задачам. – 1983. – Вып. 19. – С. 14–28.

12. Митюк, И.П. Оценки в некоторых классах аналитических функций / И.П. Митюк // Метрические вопросы теории функций. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 90–99.

13. Арсланов, Ф.Х. К геометрическим свойствам некоторых классов аналитических в единичном круге функций / Ф.Х. Арсланов, Ф.Ф. Майер // деп. ВИНИТИ № 5059-В88 24.06.88, 1988. – 10 с.

14. Reade, M.O. The Coefficients of Close-to-Convex Functions / M.O. Reade // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23, no. 3. – P. 459–462.

15. Mac-Gregor, T. Functions whosed Derivative has a Positive Real Part / T. Mac-Gregor // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 104. – P. 532–537.

Поступила в редакцию 2 ноября 2021 г.

Сведения об авторах

Майер Федор Федорович – профессор, кандидат физико-математических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, e-mail: maiyer@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Тастанов Мейрамбек Габдулиевич – профессор, кандидат физико-математических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Утемисова Анар Алтаевна – доцент, кандидат педагогических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, e-mail: anar_utemisova@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Козловский Станислав Александрович – магистр естественных наук, АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», г. Костанай, Республика Казахстан, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3410-0088

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 42–49

DOI: 10.14529/mmph220105

EXACT ESTIMATES AND RADII OF CONVEXITY OF SOME CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

***F.F. Maiyer*[1]*, M.G. Tastanov*[1]*, A.A. Utemissova*[1]*, S.A. Kozlovskiy*[2]**
[1] *Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan*
[2] *AOO "Nazarbayev Intellectual Schools", Kostanay, Republic of Kazakhstan*
e-mail: maiyer@mail.ru

Abstract. The study of the geometric properties of analytic functions is one of the classical problems of the theory of functions of a complex variable and has been of steady interest to many mathematicians for more than half a century now. At the same time, a separate area is the building of sufficient conditions of one-leaf analytic functions, including finding the conditions for simple geometric properties of analytic functions (convex or star-shaped, almost starshaped, etc.).

The solution of these problems in many cases is associated with finding estimates in different classes of analytical functions, which in itself is also a relevant problem.

This article is devoted to finding exact estimates of analytic functions and their derivatives in fairly broad classes of functions, which are distinguished in the form of some restrictions on the domains obtained from the domains of values of these functions by circular symmetrization or symmetrization with respect to a straight line. Based on these results, the exact radii of convexity in some classes of functions are found.

Keywords: geometric theory of functions of a complex variable; domain symmetrization; estimates of analytic functions; one-leaf functions; radii of convexity of analytic functions.

References

1. Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka Publ., 1966, 628 p.

2. Polya G., Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical phisics (AM-27)*, Vol. 27. Princeton, Univ. press, 1951, 279 p.

3. Mityuk I.P. *Primenenie simmetrizatsionnykh metodov v geometricheskoy teorii funktsiy* (Application of Symmetrization Methods in Geometric Function Theory). Krasnodar, KubGU Publ., 1985, 94 p.

4. Avkhadiev F.G., Aksent'ev L.A. The Main Results on Sufficient Conditions for an Analytic Function to be Schlicht. *Russian Mathematical Surveys*, 1975, Vol. 30, no. 4, pp. 1–63. DOI: 10.1070/RM1975v030n04ABEH001511

5. Avkhadiev F.G. Radii of Convexity and Close-to-Convexity of Certain Integral Representations. *Mathematical Notes*, 1970, Vol. 7, Iss. 5, pp. 350–357. DOI: 10.1007/BF01123846

6. Engel O., Kupán P.A., Páll-Szabo Á.O. About the Radius of Convexity of some Analytic Functions. *Creat. Math. Inform.*, 2015, Vol. 24, no. 2, pp. 155–161.

7. Kadiyeva M.R., Maiyer F.F. Convexity Condition of the Generalized Bernatsky Integral for One Subclass of Star-Like Functions (Uslovie vypuklosti obobshchennogo integrala Bernatskogo dlya odnogo podklassa zvezdoobraznykh funktsiy). *Bulletin of the Abai KazNPU, the series of "Physical and Mathematical Sciences"*, 2021, Vol. 69, no. 1, pp. 111–118.

8. Maiyer F.F., Shalagina A.A. Tochnye otsenki garmonicheskikh i periodicheskikh funktsiy i nekotorye ikh primeneniya (Accurate Estimates of Harmonic and Periodic Functions and some of their Applications). *Bulletin of the Abai KazNPU, the series of "Physical and Mathematical Sciences"*, 2019, Vol. 68, no. 4, pp. 71–76.

9. Szegö G. On the Capacity of a Condenser. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, Vol. 51, pp. 325–350. DOI: 10.1090/S0002-9904-1945-08336-0

10. Hayman W.K. *Multivalent functions*. Cambridge, Univ. press, 1958, 168 p.

11. Aksent'ev L.A., Maiyer F.F. Primenenie metodov podchinennosti i simmetrizatsii k dostatochnym priznakam odnolistnosti analiticheskikh funktsiy (Application of Methods of Subordination and Symmetrization to Sufficient Tests of Univalence of Analytic Functions). *Trudy Sem. Kraev. Zadacham*, 1983, Iss. 19, pp. 14–28. (in Russ.).

12. Mityuk I.P. *Otsenki v nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy* (Estimates in some Classes of Analytical Functions). Metricheskie voprosy teorii funktsiy (Metric Problems of the Theory of Functions), Kiev, Naukova dumka Publ., 1980, pp. 90–99. (in Russ.).

13. Arslanov F.Kh., Maiyer F.F. K geometricheskim svoystvam nekotorykh klassov analiticheskikh v edinichnom kruge funktsiy (On the Geometric Properties of some Classes of Analytic Functions in the Unit Circle). *VINITI № 5059-V88 24.06.88*, 1988, 10 p. (in Russ.).

14. Reade M.O. The Coefficients of Close-to-Convex Functions. *Duke Math. J.*, 1956, Vol. 23, no. 3, pp. 459–462. DOI: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0

15. Mac-Gregor T. Functions whosed Derivative has a Positive Real Part. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, Vol. 104, pp. 532–537. DOI: 10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7

Received November 2, 2021

Information about the authors

Maiyer Fedor Fedorovich, Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, e-mail: maiyer@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Tastanov Meyrambek Gabdulievich, Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Utemissova Anar Altayevna, Associate Professor, Cand. Sc. (Pedagogical), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, e-mail: anar_utemisova@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Kozlovsky Stanislav Aleksandrovich, Master of Natural Sciences, AOO "Nazarbayev Intellectual Schools", Kostanay, Republic of Kazakhstan, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3410-0088

УДК 517.9, 519.216.2 DOI: 10.14529/mmph220106

ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА–СИДОРОВА И КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДЗЕКЦЕРА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ВЕНТЦЕЛЯ И РОБЕНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Г.А. Свиридюк, Н.С. Гончаров, С.А. Загребина
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: goncharovns@susu.ru

Аннотация. Рассмотрены детерминированная и стохастическая начально-краевые задачи для уравнения Дзекцера, описывающего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости, в ограниченной области и гладкой границей. На границе области заданы условия Вентцеля и Робена, в качестве начального условия берется либо условие Шоуолтера–Сидорова, либо условие Коши. Отметим, что для изучаемой модели фильтрации рассматривается условие Вентцеля, которое не является классическим. За последние годы в математической литературе краевое условие рассматривается с двух точек зрения (классическом и неоклассическом). Поскольку начальные условия Коши и Шоуолтера–Сидорова изучались ранее в различных ситуациях, в работе, в частном случае классических условий Вентцеля и Робена методами теории вырожденных голоморфных полугрупп построены точные решения, которые позволяют определять количественные прогнозы изменения геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации. В стохастическом случае использована теория производной Нельсона–Гликлиха. В частности, исследования поставленных задач в контексте краевых условий Вентцеля позволило определить процессы, протекающие на границе двух сред (в области и на ее границе).

Ключевые слова: уравнение Дзекцера; детерминированные и стохастические уравнения соболевского типа; производная Нельсона–Гликлиха; условие Вентцеля; условие Шоуолтер–Сидорова; условие Коши.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – ограниченная связная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T \in \mathbb{R}_+$, рассмотрим линейное уравнение Дзекцера

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha_0 \Delta u(x,t) - \beta_0 \Delta^2 u(x,t) - \gamma u(x,t) + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [1], решения которого должны удовлетворять краевым условиям Вентцеля

$$\Delta u(x,t) + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_1 u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{2}$$

и Робена

$$\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_2 u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

а также либо начальному условию Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t \to 0+} (\lambda - \Delta)\big(u(x,t) - u_0(x)\big) = 0, x \in \Omega, \tag{4}$$

или начальному условию Коши

$$\lim_{t \to 0+} \big(u(x,t) - u_0(x)\big) = 0, x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, α_k, β_k, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $k = 0,1$ характеризуют среду; функция $f(x,t)$ – источник жидкости, а $\nu = \nu(x)$ – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Краевое условие (3), начальные условия (4) и (5) изучались ранее в различных ситуациях [2], поэтому приведем лишь краткую историю условия (2). Впервые оно возникло в [3] при построении генератора полугруппы Феллера [4] для многомерных диффузионных процессов в ограниченной области Ω. В [5] впервые было показано, что (2) естественным образом возникает в биофизике для описания диффузии внутри клетки и на ее мембране. Позже в [6] список математических моделей, где (2) описывает процессы на границе области Ω, существенно пополнился. Такой подход к изучению задач, где краевые условия трактуются не как предельные значения искомой функции и ее производных, а как описание неких процессов на границе, возможно лишь частично зависящих от процессов внутри области, привел к построению нового направления в теории потенциала [7, 8], где получены решения однофазной и двухфазной задач Вентцеля с использованием повторных потенциалов двойного и простого слоя.

Другой подход основан на идеях и методах теории полугрупп операторов. В [9] впервые показано, что оператор, включающий в себя оператор Лапласа Δ внутри области Ω и оператор Лапласа–Бельтрами Δ на ее границе $\partial\Omega$, является генератором C_0-полугруппы. В [10] этот результат был использован при решении ряда прикладных задач. Первые итоги исследований в данном направлении были подведены в [11]. Кроме того, в [12] найдены условия аналитичности разрешающих C_0-непрерывных полугрупп операторов. Наконец, в [13] рассмотрен случай, когда оператор Δ заменен на Δ^2 в области Ω, на границе же по-прежнему оператор Лапласа–Бельтрами Δ.

Наш подход к исследованию задачи (1)–(3) традиционен. Во-первых, используя классическую теорию эллиптических операторов [14, гл. 5] мы редуцируем ее к линейному уравнению соболевского типа

$$Lu = Mu + f \tag{6}$$

и показываем, что оператор M сильно $(L,0)$-секториален. Во-вторых, используя теорию вырожденных голоморфных полугрупп операторов [15, гл. 3], мы строим решение как задачи Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} P\big(u(t)-u_0\big)=0, \tag{7}$$

так и задачи Коши

$$\lim_{t\to 0+} \big(u(t)-u_0\big)=0 \tag{8}$$

для уравнения (6). Подчеркнем, что во всех этих построениях (2) понимается как краевое условие. Наконец, в-третьих, мы рассматриваем стохастическую версию задач (6), (7) и (6), (8), где вместо «обычной» производной $\dot{u}$ понимается производная Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{u}$. Заметим, что исследования в данном направлении начаты сравнительно недавно [16–19]. Статья кроме вводной части и списка литературы содержит два параграфа: в первом рассмотрен детерминированный, а во втором – стохастический случай.

2. Детерминированный случай

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные банаховы пространства, операторы $L\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ (т. е. оператор L линеен и непрерывен, причем $\operatorname{dom}L=\mathfrak{U}$), $M\in Cl(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ (т.е. оператор M линеен, замкнут и плотно определен). Напомним [15, гл. 1], что множество $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})\}$ называется *L-резольвентным множеством оператора M*, а множество $\sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ его *L-спектром*. Операторы $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, называются *правой* и *левой* *L-резольвентой оператора M* соответственно. Пусть $\rho^L(M)\neq\varnothing$, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, тогда можно построить *правую и левую*

$$R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}R^L_{\mu_k}(M) \text{ и } L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L^L_{\mu_k}(M)$$

(L,p)-резольвенты оператора M соответственно.

Определение 2.1 [15]. Оператор M называется (L,p)-*секториальным*, если

(i) существует константа $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ такая, что сектор

$$S_\theta^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg\mu|<\theta\}\subset\rho^L(M);$$

(ii) существуют константы $K\in\mathbb{R}_+$ и $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ такие, что

$$\max\left\{\left\|R_{(\mu,p)}^L(M)\right\|_{L(\mathfrak{U})},\left\|L_{(\mu,p)}^L(M)\right\|_{L(\mathfrak{F})}\right\}\le\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k|}$$

при любых $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p\in\rho^L(M)$.

Лемма 2.1 [15, гл. 3]. Пусть оператор M (L,p)-секториален, тогда

(i) $\mathfrak{U}^0\cap\mathfrak{U}^1=\{0\}$, $\mathfrak{F}^0\cap\mathfrak{F}^1=\{0\}$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1}\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0\right)$, причем операторы $M_0^{-1}L_0\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{U}^0\right)$ и $L_0M_0^{-1}\in\mathfrak{L}\left(\mathfrak{F}^0\right)$ нильпотентны степени не больше p.

Здесь $\mathfrak{U}^0=\ker R_{(\mu,p)}^L(M),\mathfrak{F}^0=\ker L_{(\mu,p)}^L(M),\mathfrak{U}^1\left(\mathfrak{F}^1\right)$ – замыкание $\operatorname{im}R_{(\mu,p)}^L(M)$ $\left(\operatorname{im}L_{(\mu,p)}^L(M)\right)$. (Заметим, что все эти подпространства не зависят от выбора $\mu=(\mu_0,\mu_1,...\mu_p)\in(\rho^L(M))^{p+1}$). Оператор L_k (M_k) – сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\operatorname{dom}M\cap\mathfrak{U}^k$), $k=0,1$.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{V}$ – вещественное банахово пространство. Оператор-функция $V^{\cdot}:\mathbb{R}_+\to\mathfrak{L}(\mathfrak{V})$ называется *вырожденной голоморфной полугруппой операторов*, если

(i) $V^sV^t=V^{s+t}$ при всех s, $t\in\mathbb{R}_+$;

(ii) $V^{\cdot}$ голоморфно продолжима в сектор, содержащий полуось $\mathbb{R}_+$;

(iii) $\ker V^t\ne\{0\}$ при некотором $t\in\mathbb{R}_+$.

Лемма 2.2 [15, гл. 3]. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существует вырожденная голоморфная полугруппа операторов $U^{\cdot}:\mathbb{R}_+\to\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ ($F^{\cdot}:\mathbb{R}_+\to\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$), имеющая вид

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\left(F^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\right),$$

где контур $\Gamma\subset S_\theta^L(M)$ такой, что $|\arg\mu|\to\theta$ при $\mu\to\infty$ и $\mu\in\gamma$.

Обе полугруппы $U^{\cdot}$ и $F^{\cdot}$ голоморфны в секторе $|\arg\mu|<\theta-\frac{\pi}{2}$, причем $\ker U^t=\mathfrak{U}^0$ и $\ker F^t=\mathfrak{F}^0$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$. Кроме того, $\operatorname{im}U^t\subset\mathfrak{U}^1$ и $\operatorname{im}F^t\subset\mathfrak{F}^1$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$.

Определение 2.3. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*секториальным справа (слева)*, если он (L,p)-секториален и

$$\left\|R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L-M)^{-1}Mu\right\|_{\mathfrak{U}}\le\frac{K}{|\lambda|\prod_{k=0}^p|\mu_k|},\ \lambda,\mu_k\in S_\theta^L(M),k\in\{0,1,...,p\},$$

при любом $u\in\operatorname{dom}M$ и некоторой константе $K\in\mathbb{R}_+$, зависящей от u.

(Существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что $(\lambda L-M)^{-1}f\in\operatorname{dom}M$ при всех $f\in\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, причем

$$\left\|M(\lambda L-M)^{-1}L_{(\mu,p)}^L(M)f\right\|_{\mathfrak{F}}\le\frac{K}{|\lambda|\prod_{k=0}^p|\mu_k|},\lambda,\mu_k\in S_\theta^L(M),k\in\{0,1,...,p\},$$

при любом $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ и некоторой константе $K \in \mathbb{R}_+$, зависящей от f.)

Лемма 2.3 [15, гл. 3]. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева), тогда существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ ($Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$), имеющий вид $P = s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t$ ($Q = s - \lim\limits_{t \to 0+} F^t$).

Значит, если оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева, то существуют расщепления пространств

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1. \tag{9}$$

Определение 2.4 [15]. Оператор M называется *сильно (L,p)-секториальным*, если он сильно (L,p)-секториален справа и

$$\left\| R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le \frac{K}{|\lambda| \prod_{k=0}^{p} |\mu_k|}$$

при некоторой константе $K \in \mathbb{R}_+$ и любых, $\lambda, \mu_k \in S^L_\theta(M)$, $k \in \{0,1,...,p\}$.

Заметим, что если в определении 2.4 мы заменим слово «справа» словом «слева», то мы получим эквивалентное исходному определение.

Теорема 2.1 [15, гл. 3]. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда

(i) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(ii) оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in Cl\left(\mathfrak{U}^1\right)$ секториален.

Полученные в леммах 2.1–2.3 и теореме 2.1 необходимые условия сильной (L,p)-секториальности оператора M являются достаточными, т. е. справедлива

Теорема 2.2 [15, гл. 3]. *Пусть существует расщепление (9) пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Пусть существуют операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^k;\mathfrak{U}^k)$ и $M_k \in Cl(\mathfrak{F}^k;\mathfrak{U}^k)$, $k = 0,1$, причем существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$. Пусть оператор $M_0^{-1} L_0$ (или $L_0 M_0^{-1}$, что эквивалентно) нильпотентен степени p, а оператор $L_1^{-1} M_1$ секториален. Тогда оператор $M_0(\mathbb{I} - P) + M_1 P$ сильно $(L_0(\mathbb{I} - P) + L_1 P, p)$-секториален.*

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$Lu = Mu + f. \tag{10}$$

Пусть $\tau \in \mathbb{R}_+$, вектор-функцию $u : (0,\tau) \to \operatorname{dom} M$ назовем *решением уравнения* (10), если $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ и $u = u(t)$ удовлетворяет уравнению (10). В дальнейшем вектор-функцию $f : (0,\tau) \to \mathfrak{F}$ удобно представить в виде $f = f^0 + f^1$, где $f^0 = (\mathbb{I} - Q) f$ и $f^1 = Qf$.

Теорема 2.3 [15, гл. 5]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*

(i) для любой вектор-функции $f : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$ такой, что $f^0 \in C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, $f^1 \in C^0\left([0,\tau];\mathfrak{F}^1\right)$, и любого вектора $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0\left([0,\tau];\mathfrak{U}\right)$ задачи Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t \to 0+} P\left(u(t) - u_0\right) = 0, \tag{11}$$

для уравнения (10);

(ii) для любой вектор-функции $f : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$ такой, что $f^0 \in C^p\left([0,\tau];\mathfrak{F}^0\right) \cap C^{p+1}\left((0,\tau);\mathfrak{F}^0\right)$, $f^1 \in C^0\left([0,\tau];\mathfrak{F}^1\right)$, и любого вектора $u_0 \in \mathfrak{U}$ такого, что

$$(\mathbb{I} - P) u_0 = \sum_{k=0}^{p} (M_0^{-1} L)^k M_0^{-1} f^{0(k)}(0),$$

существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0\left(\left[0,\tau\right];\mathfrak{U}\right)$ задачи Коши

$$\lim_{t\to 0+}\left(u\left(t\right)-u_0\right)=0 \tag{12}$$

для уравнения (10);

(iii) решение $u=u\left(t\right)$ задач (10), (11) и (10), (12) имеет вид

$$u\left(t\right)=U^t u_0-\sum_{k=0}^{p}(M_0^{-1}L)^k M_0^{-1} f^{0(k)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_0^t ds\int_\gamma (\mu L_1-M_1)^{-1}e^{\mu(s-t)}f^1(s)d\mu\,.$$

Приступим к редукции задачи (1)–(3) к уравнению (10). Поскольку в дальнейшем рассматривается стохастический случай, то мы ограничимся гильбертовыми пространствами. Именно, в качестве пространства $\mathfrak{F}$ возьмем пространство Соболева $W_2^l\left(\Omega\right)$ при некотором $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, а в качестве пространства $\mathfrak{U}$ = $\{u\in W_2^{l+2}\left(\Omega\right):\alpha_2\frac{\partial u}{\partial\nu}\left(x\right)+\beta_2 u\left(x\right)=0, x\in\partial\Omega\}$. Вложение $\mathfrak{U}\hookrightarrow\mathfrak{F}$ плотно и компактно, а лапласиан $\Delta:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ – топлинейный изоморфизм, если $|\alpha_2|+|\beta_2|>0$ [14, гл. 4 и 5]. Далее в пространстве $\mathfrak{F}$ рассмотрим билапласиан Δ^2 с областью определения $\operatorname{dom}\Delta^2=\{u\in W_2^{l+4}\left(\Omega\right):\Delta u\left(x\right)+\alpha_1\frac{\partial u}{\partial\nu}\left(x\right)+\beta_1 u\left(x\right)=0\}\cap\mathfrak{U}$. Вложение $\operatorname{dom}\Delta^2\hookrightarrow\mathfrak{F}$ плотно и компактно, а билапласиан $\Delta^2:\operatorname{dom}\Delta^2\to\mathfrak{F}$ – топлинейный изоморфизм при тех же условиях на пространство $\mathfrak{U}$, что и выше. Причем оба спектра $\sigma\left(\Delta\right)$ и $\sigma\left(\Delta^2\right)$ дискретны, конечнократны и сгущаются только к ∞.

Заметим, что в рассматриваемом случае собственные функции лапласиана Δ, вообще говоря, не являются собственными функциями билапласиана Δ^2. Это существенно усложняет наше исследование, но только технически. Ради технической простоты и идейной ясности мы упростим условия (2) и (3), заменив их на условия

$$\Delta u\left(x,t\right)=0,\ \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left(0,T\right) \tag{13}$$

и

$$u\left(x,t\right)=0,\ \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left(0,T\right) \tag{14}$$

соответственно.

Пространство $\mathfrak{F}$ остается тем же, что и выше, а области определения лапласиана Δ и билапласиана Δ^2 ($\mathfrak{U}$ и $\operatorname{dom}\Delta^2$ соответственно) мы будем обозначать теми же символами, но полагать, что $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=0$ и $\beta_2=1$. Теперь пусть $\varphi\in\mathfrak{U}$ – собственная функция лапласиана Δ, тогда $\Delta\varphi=\lambda\varphi$, откуда в силу (13), (14) $\varphi\in\operatorname{dom}\Delta^2$ и $\Delta^2\varphi=\lambda^2\varphi$, т. е. φ – собственная функция билапласиана Δ^2. Итак, $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U};(\cdot,\cdot)\}$ и $\mathfrak{F}=\{\mathfrak{F};\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ соответственно, причем линейная оболочка собственных функций лапласиана Δ плотна как в $\mathfrak{U}$, так и в $\mathfrak{F}$. Лапласиан $\Delta:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ и билапласиан $\Delta^2:\operatorname{dom}\Delta^2\to\mathfrak{F}$ – самосопряженные операторы.

Положим, $\sigma\left(\Delta\right)=\left\{\lambda_k\right\}$, где собственные значения $\{\lambda_k\}$ занумерованы по невозрастанию с учетом их кратности. Через $\{\varphi_k\}\subset C^\infty(\Omega)$ обозначим семейство собственных функций лапласиана Δ, ортонормированных в смысле пространства $\mathfrak{F}$. Положим, $L=\lambda-\Delta$ и $M=\alpha_0\Delta-\beta_0\Delta^2-\gamma$. Тогда

$$(\mu L-M)^{-1}=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta_0\lambda_k^2-\alpha_0\lambda_k+\mu(\lambda-\lambda_k)+\gamma}\,. \tag{15}$$

Ряд в (15) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем точек L-спектра $\sigma^L\left(M\right)$ оператора M

$$\mu_k = \frac{\beta_0\lambda_k^2 - \alpha_0\lambda_k + \gamma}{\lambda_k - \lambda}, k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Если $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда из (15) получим

$$(\mu L - M)^{-1} = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(\lambda-\lambda_k)(\mu-\mu_k)} + \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta_0\lambda^2 - \alpha_0\lambda + \gamma}, \tag{17}$$

$$R_\mu^L(M) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(\mu-\mu_k)} = L_\mu^L(M), \tag{18}$$

$$(\nu L - M)^{-1} L_\mu^L(M) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(\lambda-\lambda_k)(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)}, \tag{19}$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то второе слагаемое в (17) и штрих у знака суммы в (17)–(19) следует убрать. Введем условие

$$\left.\begin{array}{l}\text{коэффициенты}\,(\alpha_0,\gamma)\in\mathbb{R}^2\ \text{и}\ \beta_0\in\mathbb{R}_+\ \text{таковы, что ни одно собственное}\\ \text{значение}\,\lambda_k\in\sigma(\Delta)\ \text{не является корнем уравнения}\ \beta_0\xi^2-\alpha_0\xi+\gamma=0.\end{array}\right\} \tag{*}$$

(Понятно, что корни этого уравнения могут быть комплексными, в то время как спектр $\sigma(\Delta) \subset \mathbb{R}_-$ в силу самосопряженности лапласиана $\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$).

Лемма 2.4 [15, гл. 7]. *Пусть выполнено условие (*), тогда оператор M сильно $(L,0)$-секториален.*

Доказательство заключается в тривиальной проверке определений 2.1–2.4.

Теорема 2.4. *Пусть $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и выполнено условие (*). Тогда для любых $f \in C([0,\tau];\mathfrak{F})$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau];\mathfrak{U})$, $u = u(t)$ задач (1), (4), (13), (14) и (1), (5), (13), (14), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(t\mu_k)\langle u_0,\varphi_k\rangle\varphi_k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}\int_0^t ds \int_\gamma \frac{\exp(\mu(t-s))\langle f(s),\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu-\mu_k} d\mu .$$

Для доказательства заметим, что если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то условия (4) и (5) совпадают. Затем сошлемся на лемму 1.4 и теорему 2.3. Заметим еще, что теорема 2.4 остается верной, если условие (*) заменить на его частный случай $\beta_0 \in \mathbb{R}_-$. Далее, пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, введем в рассмотрение расщепление $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, где $\mathfrak{F}^0 = \operatorname{span}_{\lambda=\lambda_k}\{\varphi_k\}$, а $\mathfrak{F}^1 = (\mathfrak{F}^0)^\perp$. В силу теоремы 2.3 справедлива

Теорема 2.5. *Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$ и выполнено условие (*). Тогда*

(i) для любых $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (1), (4), (13), (14);

(ii) для любых $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ такого, что

$$\sum_{\lambda_k=\lambda} \langle u_0,\varphi_k\rangle\varphi_k = \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(0),\varphi_k\rangle\varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma},$$

существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (1), (5), (13), (14);

(iii) решение $u = u(t)$ обеих задач имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \exp(t\mu_k)\langle u_0,\varphi_k\rangle\varphi_k + \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(t),\varphi_k\rangle\varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}{}'(\lambda-\lambda_k)^{-1}\int_0^t ds \int_\gamma \frac{\exp(\mu(t-s))\langle f(s),\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu-\mu_k} d\mu ,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$.

3. Стохастический случай

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ – полное вероятностное пространство с вероятностной мерой $\boldsymbol{P}$, ассоциированной с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин, математическое ожидание $\mathbf{E}$ которых равно нулю, а дисперсия $\mathbf{D}$ конечна, образует гильбертово пространство $\mathbf{L}_2 = \{\xi : \mathbf{E}\xi = 0, \mathbf{D}\xi < +\infty\}$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$ и нормой $\|\xi\|_{L_2}^2 = \mathbf{D}\xi$. Заметим, что в $\mathbf{L}_2$ ортогональность векторов ξ и η (т. е. $(\xi,\eta) = 0$) эквивалентна некоррелированности случайных величин ξ и η. Действительно, $0 = \operatorname{cov}(\xi,\eta) = \boldsymbol{E}\xi\eta = (\xi,\eta) = 0$.

Возьмем множество $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}$ и рассмотрим два отображения: $f : \boldsymbol{T} \to \mathbf{L}_2$, которое каждому $t \in \boldsymbol{T}$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathbf{L}_2$, и $g : \mathbf{L}_2 \times \Omega \to \mathbb{R}$, которое каждой паре (ξ,ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$. Отображение $\eta : \boldsymbol{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$, имеющее вид $\eta = \eta(t,\omega) = g(f(t),\omega)$, назовем *(одномерным) стохастическим процессом*. При каждом фиксированном $t \in \boldsymbol{T}$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(t,\cdot)$ является случайной величиной, т. е. $\eta(t,\cdot) \in \mathbf{L}_2$, которую назовем *сечением* стохастического процесса в точке $t \in \boldsymbol{T}$. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\eta = \eta(\cdot,\omega)$ называется *(выборочной) траекторией* случайного процесса, соответствующей элементарному исходу $\omega \in \Omega$. Траектории называются также *реализациями* или *выборочными функциями* случайного процесса. Обычно, когда это не приводит к неясности, зависимость $\eta(t,\omega)$ от ω не указывается и случайный процесс обозначается просто $\eta(t)$.

Считая $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}$ интервалом, назовем стохастический процесс $\eta = \eta(t),\ t \in \boldsymbol{T}$, *непрерывным,* если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны (т. е. при п. в. (почти всех) $\omega \in \mathcal{A}$ траектории $\eta(\cdot,\omega)$ являются непрерывными функциями). Множество непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство, которое мы обозначим символом $\mathbf{C}(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ с нормой

$$\|\eta\|_{\mathbf{CL}_2} = \sup_{t\in I}(\mathbf{D}\eta(t,\omega))^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{A}_0$ – σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}_0$. Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2^0$ – ортопроектор. Пусть $\xi \in \mathbf{L}_2$, тогда $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается символом $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{A}_0)$. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{C}(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ и $t \in \boldsymbol{T}$, через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим *σ-алгебру, порожденную случайной величиной* $\eta(t)$, и обозначим $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot \mid \mathcal{N}_t^\eta)$.

Пример 3.1. Винеровский процесс, описывающий броуновское движение в модели Энштейна–Смолуховского [18]

$$\beta(t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\omega) \sin\frac{\pi}{2}(2k+1)t,\ t \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+,$$

является непрерывным стохастическим процессом. Здесь коэффициенты $\{\xi_k = \xi_k(\omega)\} \subset \mathbf{L}_2$ – попарно некоррелированные гауссовы случайные величины, такие, что $\mathbf{D}\xi_k^2 = \left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^{-2}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Определение 3.1 [20, 21]. *Пусть* $\eta \in \mathbf{C}(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$. *Производной Нельсона–Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* η *в точке* $t \in \boldsymbol{T}$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^{\eta}\left(\frac{\eta(t+\Delta t,\cdot)-\eta(t,\cdot)}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^{\eta}\left(\frac{\eta(t,\cdot)-\eta(t-\Delta t,\cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$.

Если производные $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$ Нельсона–Гликлиха стохастического процесса $\eta(t,\cdot)$ существуют во всех (или п. в.) точках интервала $\boldsymbol{T}$, то мы говорим о существовании производной Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$ на $\boldsymbol{T}$ (п. н. на $\boldsymbol{T}$). Множество непрерывных стохастических процессов, имеющих непрерывные производные Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}$, образуют банахово $\mathbf{C}^1(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ пространство с нормой

$$\| \eta \|_{\mathbf{C}^1\mathbf{L}_2} = \sup_{t\in T}\left(\mathbf{D}\eta(t,\omega) + \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}(t,\omega)\right)^{1/2}.$$

Определим далее по индукции банаховы пространства $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l \in \mathbb{N}$, стохастических процессов, чьи траектории п. н. дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху на T до порядка $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ включительно [22]. Нормы в них задаются формулами

$$\| \eta \|_{\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2} = \sup_{t\in T}\left(\sum_{k=0}^{l} \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t,\omega)\right)^{1/2}.$$

Здесь будем считать производную Нельсона–Гликлиха нулевого порядка исходным случайным процессом, т. е. $\overset{\circ}{\eta}{}^{(0)} \equiv \eta$. Отметим еще, что пространства $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, для краткости будем называть *пространствами «шумов»* [17–19].

Пример 3.2. В [20, 22] показано, что $\beta \in \mathbf{C}^l(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем $\overset{\circ}{\beta}(t) = \beta(t)/2t$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Итак, построены пространства случайных величин $\mathbf{L}_2$ и пространства «шумов» $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Перейдем к построению пространства *случайных* $\boldsymbol{K}$*-величин.* Возьмем $\mathfrak{H}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$, монотонную последовательность $\boldsymbol{K} = \{\lambda_k\} \in \mathbb{R}_+$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$, а также последовательность $\{\xi_k\} = \xi_k(\omega) \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин такую, что $\| \xi_k \|_{\mathbf{L}_2} \le C$, при некоторой константе $C \in \mathbb{R}_+$ и при всех $k \in \mathbb{N}$. Построим $\mathfrak{H}$*-значную случайную* $\boldsymbol{K}$*-величину*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(\omega)\varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \xi_k \varphi_k\}$ по норме

$$\| \eta \|_{\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k\right)^{1/2}$$

называется *пространством (*$\mathfrak{H}$*-значных) случайных* $\boldsymbol{K}$*-величин* и обозначается символом $\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$. Как нетрудно видеть, пространство $\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ – гильбертово, причем построенная выше случайная $\boldsymbol{K}$-величина $\xi = \xi(\omega) \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$. Аналогично банахово пространство ($\mathfrak{H}$*-значных*) $\boldsymbol{K}$*-«шумов»* $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ определим как пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \eta_k \varphi_k\}$ по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}^l\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2} = \sup_{t\in I}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\sum_{m=1}^{l}\mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}_k^{(m)}\right)^{1/2},$$

где последовательность «шумов» $\{\eta_k\}\subset\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ Как нетрудно видеть, вектор

$$\eta(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\eta_k(t,\omega)\varphi_k$$

лежит в пространстве $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, если последовательность векторов $\{\eta_k\}\subset\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ и все их производные Нельсона–Гликлиха до порядка $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ включительно равномерно ограничены по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2}$.

Пример 3.3. Вектор, лежащий во всех пространствах $\mathbf{C}^l(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$,

$$W_{\boldsymbol{K}}(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\beta_k(t,\omega)\varphi_k,$$

где $\{\beta_k\}\subset\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ – последовательность броуновских движений, называется ($\mathfrak{H}$ *-значным*) *винеровским* $\boldsymbol{K}$ *-процессом.*

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$ ($\{\psi_k\}$). Введем в рассмотрение монотонную последовательность $\boldsymbol{K}=\{\lambda_k\}\subset\{0\}\cup\mathbb{R}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2<+\infty$. Символом $\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ ($\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$) обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки *случайных* $\boldsymbol{K}$ *-величин*

$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k,\ \xi_k\in\mathbf{L}_2,\left(\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\zeta_k\psi_k,\ \zeta_k\in\mathbf{L}_2\right)$$

по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{U}}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\mathbf{D}\xi_k\left(\|\omega\|_{\mathbf{F}}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2\mathbf{D}\zeta_k\right).$$

Заметим, что в разных пространствах ($\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$) последовательность $\boldsymbol{K}$ может быть разной ($\boldsymbol{K}=\{\lambda_k\}$ в $\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ и $\boldsymbol{K}=\{\mu_k\}$ в $\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$), однако все последовательности, отмеченные символом $\boldsymbol{K}$, должны быть монотонными и суммируемыми с квадратом. Все результаты, вообще говоря, будут верны при разных последовательностях $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, однако простоты ради мы ограничимся случаем $\lambda_k=\mu_k$.

Пусть $A:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ – линейный оператор. Формулой

$$A\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k A\varphi_k \tag{20}$$

зададим линейный оператор A:$\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2\to\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$, причем если ряд в правой части (20) сходится (в метрике $\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$) то $\xi\in\operatorname{dom}A$, а если расходится, то $\xi\notin\operatorname{dom}A$. Традиционно определяются пространства линейных непрерывных операторов $\mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$ и линейных замкнутых плотно определенных операторов (подробности см. в [16–19]). Справедливы

Лемма 3.1. (i) *Оператор* $A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $A\in\mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$.

(ii) *Оператор* $A\in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $A\in Cl(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$.

Лемма 3.2. *Оператор* $M\in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *сильно* p*-секториален относительно оператора* $L\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $M\in Cl(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$ *сильно* p*-секториален относительно оператора* $L\in\mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$. *Причем относительный спектр в обоих случаях один и тот же.*

Итак, пусть операторы $L, N \in \mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, а оператор $M \in Cl(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, причем оператор M сильно (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное эволюционное стохастическое уравнение

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + N\delta, \tag{21}$$

где $\eta = \eta(t)$ – искомый, а $\delta = \delta(t)$ – заданный стохастический $\boldsymbol{K}$-процесс, $t \in \mathbb{R}_+$. Процесс $\eta = \eta(t)$ назовем *решением уравнения (21)*, если при подстановке его в (21) он обращает уравнение (21) в тождество. Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (21) назовем *решением задачи Коши*

$$\lim_{t \to 0+} \left(\eta(t) - \eta_0\right) = 0, \tag{22}$$

если равенство (22) выполняется для некоторой случайной $\boldsymbol{K}$-величины $\eta_0 \in \mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$. Аналогично определяется *решение задачи Шоуолтера–Сидорова*

$$\lim_{t \to 0+} P\left(\eta(t) - \eta_0\right) = 0. \tag{23}$$

Ясности и простоты ради мы не будем исследовать задачи (21), (22) и (21), (23) столь же детально, как их детерминированные прототипы (см. теорему 2.3). Тех читателей, которые интересуются подробностями, отсылаем к [16, 19]. Мы же перейдем сразу к интерпретации задач (1)–(4) и (1)–(3), (5) в виде задач (21), (22) и (21), (23) в нашей упрощенной постановке. Итак, положим $\mathfrak{F} = L_2(\Omega), \mathfrak{U} = \{W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, а оператор $L = \lambda - \Delta$, $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Оператор $M = \alpha_0\Delta - \beta_0\Delta^2 - \gamma$, $\operatorname{dom} M = \{W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \cap \mathfrak{U}$, $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Оператор N – это оператор вложения $N : \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$. Далее по рецептам, изложенным выше, построим пространства случайных $\boldsymbol{K}$-величин $\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ и $\boldsymbol{F}_K\boldsymbol{L}_2$. Случайная $\boldsymbol{K}$-величина $\xi \in \mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ имеет вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k,$$

где $\{\varphi_k\}$ – семейство собственных функций оператора Лапласа $\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ из $L_2(\Omega)$. (Напомним, что $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$). Рассмотрим линейное эволюционное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + \overset{\circ}{W}_k. \tag{24}$$

Здесь операторы L и M определены выше, а $\overset{\circ}{W}_k = \overset{\circ}{W}_k(t)$ – производная Нельсона–Гликлиха винеровского $\boldsymbol{K}$-процесса, которая называется «белым $\boldsymbol{K}$-шумом». Отметим, что «белый $\boldsymbol{K}$-шум» $\overset{\circ}{W}_k$ более соответствует теории Эйнштейна–Смолуховского, нежели традиционный белый шум (см. детали в [23]).

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (*) и

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. *Тогда для любого* $\eta_0 \in \mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ *существует стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, *каждая траектория которого является единственным решением задач (23), (24) и (22), (24). Причем стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta = \eta(t)$ *имеет вид*

$$\eta(t) = U^t\eta_0 + \int_0^t U^{t-s}\overset{\circ}{W}_k(s)\,ds;$$

(ii) $\lambda \in \sigma(\Delta)$. *Тогда для любого* $\eta_0 \in \mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ *существует стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, *каждая траектория которого является единственным решением задач (23), (24). Причем стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta = \eta(t)$ *имеет вид*

$$\eta(t) = -\sum_{\lambda=\nu_k} \lambda_k \overset{\circ}{\beta}_k(t) + U^t \eta_0 + \int_0^t U^{t-s} \overset{\circ}{W}_k(s) ds.$$

Для доказательства отметим эквивалентность $\overset{\circ}{\beta}_k(t) \sim t^{-1/2}$. Кстати сказать, по этой же причине ни одна траектория стохастического $\boldsymbol{K}$-процесса не может быть решением задачи Коши (22).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в Челябинской области (код проекта 20-41-740010).

Литература

1. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.

2. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

3. Вентцель, А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т. 4, Вып. 2. – С. 172–185.

4. Феллер, В. Одномерные диффузионные процессы / В. Феллер // Математика. – 1958. – Т. 2, Вып. 2. – С. 119–146.

5. Luo, Y. Linear Second Order Elliptic Equations with Venttsel Boundary Conditions / Y. Luo, N.S. Trudinger // Proc. Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. – 1991. – Vol. 118, Iss. 3 – 4. – P. 193–207.

6. Goldstein, G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions / G.R. Goldstein // Advances in Differential Equations. – 2006. – Vol. 11, no. 14. – P. 457–480.

7. Апушинская, Д.Е. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений / Д.Е. Апушинская, А.И. Назаров // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, Вып. 6. – С. 1–29.

8. Лукьянов, В.В. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов / В.В. Лукьянов, А.И. Назаров // Зап. научн. сем. ПОМИ – 1998. – Т. 250. – С. 203–218.

9. C_0-Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128, Iss. 7. – P. 1981–1989.

10. Favini, A. The heat equation with generalized Wentzell boundary condition / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // J. Evol. Equ. – 2002. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 1–19.

11. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis / G.M. Coclite, A. Favini, C.G. Gal *et al.* // Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2009. – Vol. 3. – P. 279–292.

12. Engel, K.-J. Analyticity of Semigroups Generated by Operators with Generalized Wentzell Boundary Conditions / K.-J. Engel, G. Fragnelli // Advances in Differential Equations. – 2005. – Vol. 10, Iss. 11. – P. 1301–1320.

13. Denk, R. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains / R. Denk, M. Kunze, D. Ploss // Integral Equations and Operator Theory. – 2021. – Vol. 93, Iss. 2. – Article number: 13. – 26 p.

14. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир. – 1980. – 664 с.

15. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

16. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "noises" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

17. Favini, A. One class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196.

18. Vasyuchkova, K.V. Some Mathematical Models with a Relatively Bounded Operator and Additive “White Noise” in Spaces of Sequences / K.V. Vasyuchkova, N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2017. – Т. 10, Вып. 4. – С. 5–14.

19. Zagrebina, S. The Multipoint Initial-Final Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively P-sectorial Operator and Additive “Noise” / S. Zagrebina, T. Sukacheva, G. Sviridyuk // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, Iss. 2. – P. 129–143.

20. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y. – 2011. – 436 p.

21. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.

22. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, Вып. 2. – С. 25–39.

Поступила в редакцию 9 января 2022 г.

Сведения об авторах

Свиридюк Георгий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, научно-исследовательская лаборатория неклассических уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0795-2277

Гончаров Никита Сергеевич – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru

Загребина Софья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zagrebinasa@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2882-9032

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 1, pp. 50–63

DOI: 10.14529/mmph220106

THE SHOWALTER-SIDOROV AND CAUCHY PROBLEMS FOR THE LINEAR DZEKZER EQUATION WITH WENTZELL AND ROBIN BOUNDARY CONDITIONS IN A BOUNDED DOMAIN

G.A. Sviridyuk, N.S. Goncharov, S.A. Zagrebina
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: goncharovns@susu.ru

Abstract. Deterministic and stochastic initial boundary value problems for the Dzekzer equation describing the evolution of the free surface of a filtering fluid in a bounded region with a smooth boundary are considered. Wentzell and Robin conditions are set on the boundary of the domain, and either the Showalter-Sidorov condition or the Cauchy condition is taken as the initial condition. Note that for the filtration model under study, the Wentzell condition is considered, which is not a classical condition. In recent years, the boundary condition has been considered in the mathematical literature from two points of view (classical and neoclassical). Since Cauchy and Showalter–Sidorov initial conditions have been studied earlier in various situations, in this work, in the particular case of classical Wentzell and Robin conditions, by methods of the theory of degenerate holomorphic semigroups, exact solutions have been constructed, which allow to determine quantitative predictions of changes in geochemical regime of groundwater under unpressurized filtration. Nelson–Glicklich derivative theory was used in stochastic case. In particular, the investigation of the set problems in the context of Wentzell boundary conditions allowed to determine the processes occurring at the boundary of two media (in the region and at its boundary).

Keywords: Dzekzer equation; deterministic and stochastic Sobolev–type equations; Nelson–Gliklikh derivative; Wentzell condition; Showalter–Sidorov condition; Cauchy condition.

References

1. Dzektser E.S. Obobshchenie uravneniya dvizheniya gruntovykh vod so svobodnoy poverkhnost'yu (Generalization of the Equation of Motion of Ground Waters with free Surface). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, Vol. 202, no. 5, pp. 1031–1033. (in Russ.).

2. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

3. Venttsel' A.D. On Boundary Conditions For Multidimensional Diffusion Processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1959, Vol. 4, Iss. 2, pp. 164–177. DOI: 10.1137/1104014

4. Feller W. Diffusion Processes in One Dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1954, Vol. 77, Iss. 1, pp. 1–31.

5. Luo Y., Trudinger N.S. Linear Second Order Elliptic Equations with Venttsel Boundary Conditions. *Proc. Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 1991, Vol. 118, Iss. 3–4, pp. 193–207. DOI: 10.1017/S0308210500029048

6. Goldstein G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions. *Advances in Differential Equations*, 2006, Vol. 11, no. 14, pp. 457–480.

7. Apushkinskaya D.E.; Nazarov A.I. The Initial-Boundary Value Problem for Nondivergent Parabolic Equations with Venttsel' Boundary Condition. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 6, pp. 1127–1149.

8. Lukyanov V.V., Nazarov A.I. Solving the Venttsel Problem for the Laplace and Helmholtz Equations with the Help of Iterated Potentials. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2000, Vol. 102, Iss. 4, pp. 4265–4274. DOI: 10.1007/BF02673857

9. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. C_0-Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, Vol. 128, Iss. 7, pp. 1981–1989. DOI: 10.1090/S0002-9939-00-05486-1

10. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. The Heat Equation with Generalized Wentzell Boundary Condition. *J. Evol. Equ.*, 2002, Vol. 2, Iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1007/s00028-002-8077-y

11. Coclite G.M., Favini A., Gal C.G., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Obrecht E., Romanelli S. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis. *Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, Vol. 3, pp. 279–292.

12. Engel K.-J., Fragnelli G. Analyticity of Semigroups Generated by Operators with Generalized Wentzell Boundary Conditions. *Advances in Differential Equations*, 2005, Vol. 10, Iss. 11, pp. 1301–1320.

13. Denk R., Kunze M., Ploss D. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains. *Integral Equations and Operator Theory*, 2021, Vol. 93, Iss. 2, Article number 13, 26 p. DOI: 10.1007/s00020-021-02624-w

14. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978, 528 p.

15. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

16. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "noises". *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410

17. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “white noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI:10.3934/cpaa.2016.15.185

18. Vasyuchkova K.V., Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Some Mathematical Models with a Relatively Bounded Operator and Additive “White Noise” in Spaces of Sequences. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 5–14. DOI: 10.14529/mmp170401

19. Zagrebina S., Sukacheva T., Sviridyuk G. Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively P-sectorial Operator and Additive “Noise”. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, Vol. 5, Iss. 2, pp. 129–143.

20. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

21. Nelson, E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967, 142 p.

22. Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff Type Equations and Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2013, Vol. 6, Iss. 2, pp. 25–39.

Received January 9, 2022

Information about the authors

Sviridyuk Georgiy Anatol'evich is Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of Mathematical Physics Non-Classical Equations Research Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0795-2277

Goncharov Nikita Sergeevich is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru

Zagrebina Sophiya Alexandrovna is Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zagrebinasa@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2882-9032

MSC 65N85 DOI: 10.14529/mmph220107

ANALYSIS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION

A.L. Ushakov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ushakoval@susu.ru

Abstract. The mixed boundary value problem for the Poisson equation is considered in a bounded flat domain. The continuation of this problem through the boundary with the Dirichlet condition to a rectangular domain is carried out. Consideration of the continued problem in the operator form is proposed. To solve the continued problem, a method of iterative extensions is formulated in an operator form. The extended problem in operator form is considered on a finite-dimensional subspace. To solve the previous problem, an iterative extension method is formulated in operator form on a finite-dimensional subspace. The continued problem is presented in matrix form. To solve the continued problem in matrix form, the method of iterative extensions in matrix form is formulated. It is shown that in the proposed versions of the method of iterative extensions, the relative errors converge in a rate that is stronger than the energy norm of the extended problem with the rate of geometric progression. The iterative parameters in these methods are selected using the minimum residual method. Conditions are indicated that are sufficient for the convergence of the applied iterative processes. An algorithm is written that implements the method of iterative extensions in matrix form. In this algorithm, the iterative parameters are automatically selected and the stopping criterion is indicated when the estimate of the required accuracy is reached. Examples of application of the method of iterative extensions for solving problems on a computer are given.

Keywords: Poisson's equation; method of iterative extensions.

Introduction

Consider a mixed boundary value problem with homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions for the Poisson equation in a bounded domain. The main problems in solving elliptic problems are usually associated with the complexity of the geometry of the domain, the height of the order of the differential equation, and the presence of Dirichlet boundary conditions [1–5]. We will proceed from the desired provisions that the proposed numerical methods should be stable to computational rounding errors, be asymptotically optimal in terms of computational costs, be sufficiently universal and have an easy implementation when calculating on a computer. To fulfill the indicated provisions when solving the problem under consideration, we will apply the method of iterative extensions as a generalization of the method of fictitious components [4–7]. Note that to solve the problem in a rectangular area, to the solution of which the solution of the original problem will be reduced, it is possible to use marching methods that are optimal in terms of costs [8–10].

1. Boundary problem

Let the first bounded flat area be given and the second bounded flat area selected.

$$\omega \in \{1, \mathrm{II}\},\ \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2.$$

It is required that the intersection of these regions is empty, and the union of their closures is a closure of the rectangular region.

$$\Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}.$$

For each of these three areas, the boundary consists of a closure of the union of two open non-intersecting parts.

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing,$$
$$\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2},\ \Gamma_{\omega,1} \cap \Gamma_{\omega,2} = \varnothing.$$

We assume that the intersection of the boundaries of the first and second areas is the closure of the non-empty intersection of the first part of the boundary of the first area with the second part of the boundary of the second area.

$$\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_{\text{II}} = \overline{S},\ S = \Gamma_{1,1} \bigcap \Gamma_{\text{II},2} \neq \varnothing.$$

All the considered parts of the boundaries for all domains are the union of a finite number of disjoint open arcs of sufficiently smooth curves. Areas of the boundary that do not have self-intersections and self-tangencies are considered.

In the first domain, we consider a mixed boundary value problem for the Poisson equation. In the second domain, we introduce a mixed boundary value problem for the homogeneous screened Poisson equation. On the first parts of the boundaries of the regions, we set the homogeneous Diri-Khleb condition. On the second parts of the boundaries of the regions, we consider the homogeneous Neumann condition. The problem in the first area is a solvable problem. We use the problem on the second domain as a zero fictitious continuation of the problem being solved. Here is the problem to be solved and the fictitious problem.

$$\Delta\breve{u}_\omega + \kappa_\omega \breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,\ \kappa_1 = 0,\ \kappa_{\text{II}} \geq 0,\ \breve{f}_{\text{II}} = 0,$$

$$\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0,\ \frac{\partial \breve{u}_\omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}} = 0. \tag{1}$$

Consider the problem to be solved and the fictitious problem in variational form as the problem of representing linear functionals in the form of scalar products in functional spaces.

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega:\ \mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega. \tag{2}$$

The spaces of solutions for such problems will be the following spaces of Sobolev functions.

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \breve{v}_\omega \in W_2^1(\Omega_\omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0 \right\}.$$

The right-hand sides of these problems are linear functionals.

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = (\breve{f}_\omega, \breve{v}_\omega),\ (\breve{f}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

The left-hand sides of these problems have bilinear forms.

$$\mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega x}\breve{v}_{\omega y} + \breve{u}_{\omega y}\breve{v}_{\omega y} + \kappa_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega) d\Omega_\omega.$$

We assume that bilinear forms define in the spaces of solutions of the problems under consideration normalizations equivalent to those of the corresponding Sobolev spaces.

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^1(\Omega_\omega)} \leq \mathrm{A}_\omega(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \leq c_2 \|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^1(\Omega_\omega)}\ \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

These assumptions ensure the existence and uniqueness of the solution for each of the problems under consideration [1]. Note that the solution to the fictitious problem is zero.

2. Continued problem in operator form

It is possible to jointly consider the solved and fictitious problems in a variational form and an operator form. This problem will be called the continued problem.

$$\breve{u} \in \breve{V}:\ \mathrm{A}_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\text{II}}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\breve{u} \in \breve{V}:\ \breve{B}\breve{u} = \breve{f}, \tag{3}$$

if you define the operator and the right side in the previous problem as follows

$$(\breve{B}\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\text{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \tilde{V},\ (\breve{f}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \tilde{V}.$$

$$F(\breve{v}) = (\breve{f}, \breve{v}),\ (\breve{f}, \breve{v}) = \int_{\Pi} \breve{f}\breve{v} d\Pi.$$

The extended space of solutions for such a problem will be the following space of Sobolev functions

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^1(\Pi) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}.$$

In the extended solution space, there is a subspace that is the solution space of the continued problem. This is the space of solutions to the original problem in the first region, padded by zero to the rest of the rectangular region.

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

In the formulation of the continued problem, we use the projection operator from the extended solution space of the continued problem to the space of its solutions.

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1,\ \breve{V}_1 = im\, I_1,\ I_1 = I_1^2.$$

Additionally, we introduce subspaces in the extended solution space.

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \breve{v}_3\big|_{\Pi \setminus \Omega_{\mathrm{II}}} = 0 \right\},$$

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \left\{ \breve{v}_2 \in \breve{V} : \mathrm{A}(\breve{v}_2, \breve{v}_1) = 0\ \forall \breve{v}_1 \in \breve{V}_1,\ \mathrm{A}(\breve{v}_2, \breve{v}_3) = 0\ \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}_3 \right\},\ \breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{\mathrm{II}},\ \breve{V}_{\mathrm{II}} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3.$$

We used a bilinear form, which is the sum of bilinear forms.

$$\mathrm{A}(\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, \breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

We assume that the bilinear form defines in the extended solution space a normalization equivalent to the normalization of the corresponding Sobolev space.

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^1(\Pi)} \le \mathrm{A}(\breve{v}, \breve{v}) \le c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^1(\Pi)}\ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

We assume that the Sobolev spaces used are such that the continuation of functions with preservation of the norm is possible in them. We will use this provision, which is usual in such cases, in the indicated form.

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1] : \breve{\beta}_1 \mathrm{A}(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \le \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2 \mathrm{A}(\breve{v}_2, \breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0;1],\ \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1] : \breve{\beta}_1 (\breve{\mathrm{A}} \breve{v}_2, \breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}} \breve{v}_2, \breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2 (\breve{\mathrm{A}} \breve{v}_2, \breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

where the operators under consideration are defined as follows

$$\breve{\mathrm{A}} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\breve{\mathrm{A}} \breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}(\breve{u}, \breve{v}),\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} \breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, \breve{v}),\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}} \breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

In this case, the continued problem has a unique solution. The solution to the continued problem is the solution to the original problem in the first area, continued by zero to the rest of the rectangular area. Note that the solution to the original problem and the solution to the original problem continued by zero, that is, the solution to the continued problem can be denoted in the same way as a function and its continuation.

3. Method of iterative extensions in operator form

Let us present a modified method of fictitious components in a variational form and an operator form. Consider the iterative process at each step, which we solve the extended problem with a bilinear form from the continued problem, but without the projection operator. We seek the solution to this problem in the extended solution space of the continued problem, in the solution space of the extended problem.

$$\breve{u}^k \in \breve{V} :\ \mathrm{A}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\breve{u}^{k-1}, I_1 \breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1 \breve{v})),\ k \in \mathbb{N}\ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\breve{u}^k \in \breve{V} :\ \breve{\mathrm{A}}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\breve{B} \breve{u}^{k-1} - \breve{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$\forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1,\ \tau_0 = 1.\ \tau_{k-1} = 2 \big/ (\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Let us propose the method of iterative extensions as a generalization of the method of fictitious components. Consider an iterative process at each step of which we solve an extended problem with a bilinear form, this operator generated by a bilinear form.

$$C(\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, \breve{v}) + \breve{\gamma} \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V},\ \breve{\gamma} \in (0; +\infty),$$

$$(\breve{C} \breve{u}, \breve{v}) = C(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

We seek the solution to this problem in the extended solution space of the continued problem, in the solution space of the extended problem.

$$\breve{u}^k \in \breve{V} :\ C(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\breve{u}^{k-1}, I_1 \breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1 \breve{v})),\ k \in \mathbb{N}\ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$

$$\breve{u}^k \in \breve{V}:\ \breve{C}(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1,\ \breve{\gamma} > \breve{\alpha},\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = (\breve{r}^{k-1}, \breve{\eta}^{k-1}) / (\breve{\eta}^{k-1}, \breve{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

To calculate the iterative parameters, it is necessary to calculate the residuals, corrections and equivalent residuals, respectively.

$$\breve{r}^{k-1} = \breve{B}\breve{u}^{k-1} - \breve{f},\ \breve{w}^{k-1} = \breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1},\ \breve{\eta}^{k-1} = \breve{B}\breve{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

We will assume that the assumptions about the continuation of functions are fulfilled, which we now write in the following form

$$\exists \breve{\delta}_1 \in (0;+\infty),\ \breve{\delta}_2 \in [\breve{\delta}_1;+\infty): \breve{\delta}_1^2(\breve{C}\breve{v}_2, \breve{C}\breve{v}_2) \le (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2) \le \breve{\delta}_2^2(\breve{C}\breve{v}_2, \breve{C}\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

$$\exists \breve{\alpha} \in (0;+\infty): (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}_2) \le \breve{\alpha}^2(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}_2)\ \forall \breve{v}_2 \in \breve{V}_2,$$

if the operators under consideration are defined in this way

$$\breve{C} = \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \breve{\gamma}\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\breve{C}\breve{u}, \breve{v}) = C(\breve{u}, \breve{v}),\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_1(\breve{u}, \breve{v}),\ (\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{u}, \breve{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v})\ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

4. Continued problem in operator form on a finite-dimensional subspace

Let us introduce a finite-dimensional approximating subspace. Let's set the previously introduced rectangular area and parts of its border in a rectangular coordinate system.

$$\Pi = (0;b_1) \times (0;b_2),\ \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \{b_2\},\ \Gamma_2 = \{0\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \{0\},\ b_1, b_2 \in (0;+\infty).$$

In this rectangular area, on the second part of its border and at the origin, we will introduce a grid.

$$(x_i; y_j) = \big((i-1)h_1; (j-1)h_2\big),\ h_1 = b_1/m,\ h_2 = b_2/n,\ i = 1,2...,m,\ j = 1,2...,n,\ m,n \in \mathbb{N}.$$

Consider grid functions with values at the nodes of the introduced grid.

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2...,m,\ j = 1,2...,n,\ m,n \in \mathbb{N}.$$

To complete the grid functions, we use bilinear basis functions.

$$\Phi^{i,j}(x;y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 1,2...,m,\ j = 1,2...,n,\ m,n \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = \Psi(x/h_1 - i + 1),\ \Psi^{2,i}(y) = \Psi(y/h_2 - j + 1),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} z, & z \in [0;1], \\ 2 - z, & z \in [1;2], \\ 0, & z \notin [0;2]. \end{cases}$$

We assume that the values of the basis functions outside the given rectangular area are equal to zero.

$$\Phi^{i,j}(x;y) = 0,\ (x;y) \notin \Pi,\ i = 1,2...,m,\ j = 1,2...,n,\ m,n \in \mathbb{N}.$$

Linear combinations of basis functions form a finite-dimensional subspace in the solution space of the extended problem.

$$\tilde{V} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) \right\} \subset \breve{V}.$$

Consider the continued problem in variational form and in operator form when the space of its solutions is replaced by its previously introduced finite-dimensional space.

$$\tilde{u} \in \tilde{V}:\ \mathrm{A}_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tilde{u} \in \tilde{V}:\ \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f}, \tag{6}$$

where we define the operator and the right-hand side in the previous problem as follows

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V},\ (\tilde{f}, \tilde{v}) = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

In the now used finite-dimensional space, there is a finite-dimensional subspace of solutions for the continued problem. This is a finite-dimensional space of solutions to the original problem in the first region, padded by zero to the rest of the rectangular region.

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V} : \tilde{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

We assume that the projection operator acts similarly on the corresponding finite-dimensional subspaces. In this case, we assume that the operator of projection onto the solution space of the continued problem zeroes out all the coefficients of the basis functions of the supports, which do not lie completely in the first domain.

$$I_1 : \tilde{V} \mapsto \tilde{V}_1,\ \tilde{V}_1 = imI_1,\ I_1 = I_1^2.$$

In addition, we introduce the corresponding finite-dimensional subspaces.

$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_3(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_3 \in \tilde{V} : \tilde{v}_3|_{\Pi \setminus \Omega_{\mathrm{II}}} = 0 \right\},$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{V}_2(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_2 \in \tilde{V} : \mathrm{A}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) = 0\ \forall \tilde{v}_1 \in \tilde{V}_1,\ \mathrm{A}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = 0\ \forall \tilde{v}_3 \in \tilde{V}_3 \right\},\ \tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3.$$

We will assume that for finite-dimensional subspaces approximating the corresponding spaces, the assumptions about the continuation of functions in the same form are fulfilled.

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1],\ \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1] : \tilde{\beta}_1 \mathrm{A}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le \tilde{\beta}_2 \mathrm{A}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1],\ \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1] : \tilde{\beta}_1 (\tilde{\mathrm{A}} \tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}} \tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \le \tilde{\beta}_2 (\tilde{\mathrm{A}} \tilde{v}_2, \tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

where the operators under consideration are defined as follows

$$\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}, (\tilde{\mathrm{A}}\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}(\tilde{u}, \tilde{v}),\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} \tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, \tilde{v}),\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}} \tilde{v}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Piecewise linear basis functions can be taken instead of bilinear basis functions.

5. The method of iterative extensions in operator form on a finite-dimensional subspace

Consider a modified method of fictitious components in variational form and operator form on a finite-dimensional subspace.

$$\begin{gathered} \tilde{u}^k \in \tilde{V} :\ \mathrm{A}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - F_1(I_1\tilde{v})),\ k \in \mathbb{N}\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}, \\ \tilde{u}^k \in \tilde{V} :\ \tilde{\mathrm{A}}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}),\ k \in \mathbb{N}, \\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1,\ \tau_0 = 1.\ \tau_{k-1} = 2 / (\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{gathered} \tag{7}$$

We propose the method of iterative extensions as a generalization of the method of fictitious components on a finite-dimensional subspace. Consider an iterative process at each step of which we solve an extended problem with a bilinear form, with an operator generated by this bilinear form on a finite-dimensional subspace.

$$C(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{\gamma} \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \breve{V},\ \tilde{\gamma} \in (0; +\infty),$$

$$(\tilde{C}\tilde{u}, \tilde{v}) = C(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

We seek a solution to this problem in the extended solution space of the continued problem, in the solution space of the extended problem, but on a finite-dimensional subspace.

$$\begin{gathered} \tilde{u}^k \in \tilde{V} :\ C(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - F_1(I_1\tilde{v})),\ k \in \mathbb{N}\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}, \\ \tilde{u}^k \in \tilde{V} :\ \tilde{C}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}),\ k \in \mathbb{N}, \\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1,\ \tilde{\gamma} > \tilde{\alpha},\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = (\tilde{r}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}) / (\tilde{\eta}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{gathered} \tag{8}$$

To calculate the iterative parameters, it is necessary to calculate the residuals, corrections and equivalent residuals, respectively.

$$\tilde{r}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f},\ \tilde{w}^{k-1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{r}^{k-1},\ \tilde{\eta}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

We will now assume that the assumptions about the continuation of functions are fulfilled, which we will write in the form.

$$\exists \tilde{\delta}_1 \in (0; +\infty),\ \tilde{\delta}_2 \in [\delta_1; +\infty) : \tilde{\delta}_1^2 (\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2) \le (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2, \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\delta}_2^2 (\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\alpha} \in (0; +\infty) : (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v}_2, \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v}_2) \le \tilde{\alpha}^2 (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2, \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v}_2)\ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

where the operators under consideration are defined as follows.

$$\tilde{C} = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}} + \tilde{\gamma}\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}},\ (\tilde{C}\tilde{u}, \tilde{v}) = C(\tilde{u}, \tilde{v}),\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, \tilde{v}),\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v})\ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

6. The method of iterative extensions in matrix form

Consider the continued problem in matrix form. Approximating the continued problem using a finite-dimensional subspace, we obtain a linear system of algebraic equations.

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N :\ B\overline{u} = \overline{f},\ \overline{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{9}$$

We also assume that the operator of projection onto the solution space of the continued problem zeroes out all the coefficients of the basis functions of the supports, which do not lie completely in the first domain. We get the continued problem in matrix form by defining the continued matrix and the continued right-hand side of the system.

$$\left\langle B\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}_1(\tilde{u},I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V},\ \left\langle \bar{f},\bar{v}\right\rangle = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f},\bar{v}\right\rangle = (\bar{f},\bar{v})h_1h_2 = \bar{f}\bar{v}h_1h_2,\ \bar{v}=(v_1,v_2,...,v_N)'\in\mathbb{R}^N,\ N=mn.$$

As an example, consider the numbering of grid nodes, coefficients of basis functions and corresponding basis functions.

$$v_{n(i-1)+j} = v_{i,j},\ \Phi_{n(i-1)+j} = \Phi^{i,j}(x_i;y_j),\ i=1,2...,m,\ j=1,2...,n,$$

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y) = \sum_{l=1}^{N} v_l\Phi_l.$$

But we number from the beginning the basis functions of the carriers, which are completely contained in the first area. Further, we continue to number the basis functions of the carriers, which cross the border of the first region and the second region simultaneously. We complete the numbering on the basis of the support functions, which are completely contained in the second area. With this numbering, the arising vectors have the following form.

$$\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')',\ \bar{u} = (\bar{u}_1{}',\bar{0}'\,\bar{0}')',\ \ \bar{f} = (\bar{f}_1{}',\bar{0}'\,\bar{0}')'.$$

We calculate the elements of the matrix, the components of the vector on the right side of the reduced system.

$$b_{ij} = h_1^{-1}h_2^{-1}(\mathrm{A}_1(\Phi_i,I_1\Phi_j) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\Phi_i,\Phi_j)),\ f_i = h_1^{-1}h_2^{-1}F_1(I_1\Phi_i),\ i,j=1,2,...,N.$$

Consider the modified method of fictitious components in matrix form. By approximating the modified method of fictitious components in a variational form using a finite-dimensional subspace with the previously indicated projection operator, we obtain the well-known method of fictitious components in matrix form.

$$\bar{u}^k\in\mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}(\bar{u}^k-\bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1}-\bar{f}),\ k\in\mathbb{N},$$

$$\forall\bar{u}^0\in\bar{V}_1,\ \tau_0=1.\ \tau_{k-1} = 2/(\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{10}$$

At each step of this iterative process, we obtain an extended matrix problem with an extended matrix.

$$\left\langle \mathrm{A}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}.$$

We calculate the elements of this matrix.

$$a_{ij} = h_1^{-1}h_2^{-1}\mathrm{A}(\Phi_i,\Phi_j),\ i,j=1,2,...,N.$$

The resulting matrices have a well-known structure.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

We use a subspace of vectors.

$$\bar{V}_1 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N : \bar{v}_2=\bar{0},\ \bar{v}_3=\bar{0}\right\}.$$

Additionally, we introduce vector subspaces as the corresponding finite-dimensional subspaces introduced earlier.

$$\bar{V}_3 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N : \bar{v}_1=\bar{0},\ \bar{v}_2=\bar{0}\right\},$$

$$\bar{V}_2 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N : \mathrm{A}_{11}\bar{v}_1+\mathrm{A}_{12}\bar{v}_2=\bar{0},\ \mathrm{A}_{23}\bar{v}_2+\mathrm{A}_{33}\bar{v}_3=\bar{0}\right\},\ \mathbb{R}^N = \bar{V}_1\oplus\bar{V}_2\oplus\bar{V}_3.$$

Note that the fictitious component method solves the continued problem in matrix form.

$$B\bar{u}=\bar{f},\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{f}_1\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix},$$

By solving the continued problem in matrix form, solutions are obtained, respectively, of the original problem in matrix form and the zero solution of the fictitious problem in matrix form.

$$\mathrm{A}_{11}\bar{u}_1=\bar{f}_1,\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_2\\ \bar{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{u}_2\\ \bar{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix}.$$

Let us introduce the norms generated by the identity matrix, the extended matrix, and its square.

$$\|\bar{v}\|=\sqrt{\langle\bar{v},\bar{v}\rangle},\ \|\bar{v}\|_{\mathrm{A}}=\sqrt{\langle\mathrm{A}\bar{v},\bar{v}\rangle},\ \|\bar{v}\|_{\mathrm{A}^2}=\sqrt{\langle\mathrm{A}^2\bar{v},\bar{v}\rangle}\ \forall\bar{v}\in\mathbb{R}^N.$$

Lemma 1. *In the method of fictitious components (10), an estimate is performed.*

$$\left\|\bar{u}^1-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}\le 2\left\|\bar{u}^0-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Proof. Let us introduce the notation for the error in the iterative process (10).

$$\bar{\psi}^k=\bar{u}^k-\bar{u},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

From the iterative process, we obtain equalities.

$$\left(\mathrm{A}(\bar{\psi}^1-\bar{\psi}^0)\right)^2=\left(-\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0\right)^2,\ \mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^1-2\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^0+\mathrm{A}\bar{\psi}^0\mathrm{A}\bar{\psi}^0=\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0.$$

Note that the inequality holds.

$$\mathrm{A}\bar{\psi}^0\mathrm{A}\bar{\psi}^0\ge\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0.$$

We get inequalities.

$$\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^1-2\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^0\le 0,\ (\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^1)^2\le(2\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^0)^2\le 4(\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^1)(\mathrm{A}\bar{\psi}^0\mathrm{A}\bar{\psi}^0).$$

After cancellation, we obtain the following inequalities.

$$\mathrm{A}\bar{\psi}^1\mathrm{A}\bar{\psi}^1\le 4\mathrm{A}\bar{\psi}^0\mathrm{A}\bar{\psi}^0,\ \left\|\bar{\psi}^1\right\|_{\mathrm{A}^2}\le 2\left\|\bar{\psi}^0\right\|_{\mathrm{A}^2},\ \left\|\bar{u}^1-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}\le 2\left\|\bar{u}^0-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Lemma 2. *In the iterative process (10), the estimate holds.*

$$\left\|\bar{u}^1-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}}\le d\left\|\bar{u}^1-\bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2}$$

A positive value in the inequality is estimated as an asymptotic equality.

$$d\approx(\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}})^{1/2}\lambda_{1,1}^{-1},\ h_1,h_2\to 0,\ \lambda_{1,1}=\pi^2(b_1^{-2}+b_2^{-2})/4.$$

Proof. Note that there is an inequality with a positive value.

$$\exists d>0:(\mathrm{A}\bar{\psi}^1,\bar{\psi}^1)\le d^2(\mathrm{A}\bar{\psi}^1,\mathrm{A}\bar{\psi}^1).$$

Let us obtain an upper bound for the indicated quantity in the inequality in the form of an asymptotic equality.

$$(\breve{\mathrm{A}}\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)\le((-\Delta+\kappa_{\mathrm{II}})\breve{\psi}^1,\breve{\psi}^1)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}(\lambda_{i,j}+\kappa_{\mathrm{II}})c_{i,j}^2=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}c_{i,j}^2+\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\kappa_{\mathrm{II}}c_{i,j}^2\le$$

$$\le\frac{1}{\lambda_{1,1}}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{II}}}{\lambda_{1,1}^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2=\frac{\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}}}{\lambda_{1,1}^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2=\frac{\lambda_{1,1}+\kappa_{\mathrm{II}}}{\lambda_{1,1}^2}(\Delta\breve{\psi}^1,\Delta\breve{\psi}^1)\le(\breve{\mathrm{A}}\breve{\psi}^1,\breve{\mathrm{A}}\breve{\psi}^1).$$

Here we used the properties of solutions to the spectral problem.

$$\breve{\psi}^1=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}c_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{i,j})=1,\ (\breve{\varphi}_{i,j},\breve{\varphi}_{p,l})=0,\ (i;j)\ne(p;l),\ i,j,p,l\in\mathbb{N},$$

where

$$\breve{\varphi}_{i,j}\in V\left((0;b_1)\times(0;b_2)\right):-\Delta\breve{\varphi}_{i,j}=\lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j}\ne 0,\ \lambda_{i,j}=0{,}25\pi^2\left((2i-1)b_1^{-2}+(2j-1)b_2^{-2}\right),\ i,j\in\mathbb{N}.$$

Theorem 1. *In the method of fictitious components (10), convergence estimates are satisfied.*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{\mathrm{A}} \le \varepsilon \left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2} = \varepsilon \left\|\bar{f}^0 - \bar{f}\right\|,$$
$$\varepsilon = cq^{k-1},\ c = 2d \in (0+\infty),\ k \in \mathbb{N},\ \bar{f}^0 = \mathrm{A}\bar{u}^0,\ 0 \le q = (\beta_2 - \beta_1)/(\beta_1 + \beta_2) < 1,$$
$$d \approx (\lambda_{1,1} + \kappa_{\mathrm{II}})^{1/2} \lambda_{1,1}^{-1},\ h_1, h_2 \to 0,\ \lambda_{1,1} = \pi^2 (b_1^{-2} + b_2^{-2})/4.$$

In the method of fictitious components, the absolute error in the energy norm converges with the speed of a geometric progression.

Let us propose the method of iterative extensions as a generalization of the method of fictitious components in a matrix form. To solve the old problem (9), we will apply a new method. Let us define the matrices that we will use in what follows.

$$\left\langle \mathrm{A_I}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A_1}(\tilde{u},\tilde{v}),\ \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A_{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

The introduced two matrices have a definite structure.

$$\mathrm{A_I} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Let us now define in a different way the extended matrix as the sum of the first matrix with the second matrix multiplied by an additional positive parameter.

$$C = \mathrm{A_I} + \gamma \mathrm{A_{II}},\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

We will assume that for finite-dimensional spaces that approximate the corresponding spaces, the previous assumptions about the continuation of functions are fulfilled, which we now write in matrix form.

$$\exists \delta_1 \in (0;+\infty),\ \delta_2 \in [\delta_1;+\infty) : \delta_1^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \delta_2^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$
$$\exists \alpha \in (0;+\infty) : \left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_I}\bar{v}_2 \right\rangle \le \alpha^2 \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Now we apply the method of iterative extensions to solve problem (9), as a generalization of the method of fictitious components, using the introduction of an additional parameter in the extended matrix. Note that the method of fictitious components with a single value of this additional parameter is obtained from the method of iterative extensions, but without taking into account the choice of iterative parameters.

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N},$$
$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (11)$$

To calculate the iterative parameters, it is necessary to calculate the residuals, corrections and equivalent residuals, respectively.

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \eta^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Let us introduce the norm generated by the square of the extended matrix.

$$\left\|\bar{v}\right\|_{C^2} = \sqrt{\left\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \right\rangle}\ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Lemma 3. In the method of iterative extensions (11), the estimate is satisfied.

$$\left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{C^2} \le 2\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2}.$$

Proof. Let us introduce the notation for the error in the iterative process (11).

$$\bar{\psi}^k = \bar{u}^k - \bar{u},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

From the iterative process, we obtain equalities.

$$\left\langle C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0), C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) \right\rangle = \left\langle -\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, -\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle,$$
$$\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle - 2\left\langle C\bar{\psi}^1, \mathrm{A}\bar{\psi}^0 \right\rangle + \left\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle.$$

Note that the inequality holds.

$$\left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle \geq \left\langle \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0, \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0 \right\rangle.$$

We get inequalities.

$$\left\langle C\overline{\psi},^1 C\overline{\psi}^1 \right\rangle - 2\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^0 \right\rangle \leq 0, \left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle^2 \leq 4\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^0 \right\rangle^2 \leq 4\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle \left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle.$$

After cancellation, we obtain the following inequalities.

$$\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1 \right\rangle \leq 4\left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0 \right\rangle, \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{C^2} \leq 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{C^2}, \left\|\overline{u}^1 - \overline{u}\right\|_{C^2} \leq 2\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Theorem 2. *In the method of iterative extensions (5), convergence estimates are satisfied.*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2} \leq \varepsilon \left\|\breve{u}^0 - \breve{u}\right\|_{\breve{C}^2}, \ \varepsilon = 2(\breve{\delta}_2/\breve{\delta}_1)(\breve{\alpha}/\breve{\gamma})^{k-1}, \ k \in \mathbb{N},$$

where the relative errors converge with a geometric progression rate in the norm stronger than the energy norm generated by the operator of the extended problem

$$\|\breve{v}\|_{\breve{C}^2} = \sqrt{(\breve{C}\breve{v}, \breve{C}\breve{v})} \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Proof. From the iterative process, we obtain equalities for errors and residuals.

$$\breve{\psi}^k = \breve{\psi}^{k-1} - \tau_k \breve{C}^{-1}\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^{k-1}, \ \breve{r}^k = \breve{r}^{k-1} - \tau_k \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N} \setminus 1.$$

We will minimize the residuals.

$$0 \leq \left(\breve{r}^k, \breve{r}^k\right) = \tau_k^2 \left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}\right) - 2\tau_k \left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right) + \left(\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right).$$

We select the iterative parameters from the condition for minimizing the residuals.

$$\tau_{k-1} = \frac{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right)}{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}\right)} = \frac{\left(\breve{r}^{k-1}, \breve{\eta}^{k-1}\right)}{\left(\breve{\eta}^{k-1}, \breve{\eta}^{k-1}\right)}.$$

Note the existence of equality.

$$\tau_{k-1} = \frac{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right)}{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}\right)} = \frac{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}, \breve{C}\breve{w}^{k-1}\right)}{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}\right)}.$$

Let us introduce the notation

$$\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{w}^{k-1} = \breve{a}, \ \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1} = \breve{b}.$$

We establish the positivity of the selected iterative parameters.

$$\tau_k = \frac{\left(\breve{b}, \breve{a} + \breve{\gamma}\breve{b}\right)}{\left(\breve{b}, \breve{b}\right)} = \breve{\gamma} - \frac{\left(\breve{a}, \breve{b}\right)}{\left(\breve{b}, \breve{b}\right)} \geq \breve{\gamma} - \frac{\left(\breve{a}, \breve{a}\right)^{1/2}\left(\breve{b}, \breve{b}\right)^{1/2}}{\left(\breve{b}, \breve{b}\right)} \geq \breve{\gamma} - \frac{\left(\breve{a}, \breve{a}\right)^{1/2}}{\left(\breve{b}, \breve{b}\right)^{1/2}} \geq \breve{\gamma} - \breve{\alpha} > 0.$$

We present the scalar products of the residuals for the selected iterative parameters.

$$\left(\breve{r}^k, \breve{r}^k\right) = \left(\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right) - \frac{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right)^2}{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}\right)}.$$

Write out the ratio of the squared residual norms at adjacent iterations.

$$q_k^2 = \frac{\left(\breve{r}^k, \breve{r}^k\right)}{\left(\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right)} = 1 - \frac{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right)^2}{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{C}^{-1}\breve{r}^{k-1}\right)\left(\breve{r}^{k-1}, \breve{r}^{k-1}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}\right)\left(\breve{C}\breve{w}^{k-1}, \breve{C}\breve{w}^{k-1}\right) - \left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}, \breve{C}\breve{w}^{k-1}\right)^2}{\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}, \breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{w}^{k-1}\right)\left(\breve{C}\breve{w}^{k-1}, \breve{C}\breve{w}^{k-1}\right)} = \frac{\left(\breve{b}, \breve{b}\right)\left(\breve{a} + \breve{\gamma}\breve{b}, \breve{a} + \breve{\gamma}\breve{b}\right) - \left(\breve{b}, \breve{a} + \breve{\gamma}\breve{b}\right)^2}{\left(\breve{b}, \breve{b}\right)\left(\breve{a} + \breve{\gamma}\breve{b}, \breve{a} + \breve{\gamma}\breve{b}\right)}.$$

We introduce the notation.

$$\left(\breve{a}, \breve{a}\right) = a, \left(\breve{b}, \breve{b}\right) = b, \left(\breve{a}, \breve{b}\right) = z,$$

then

$$q_k^2=\frac{ab-z^2}{b(a+\breve{\gamma}^2b+2\breve{\gamma}z)}\le\max_{|z|\le\sqrt{ab}}q_k^2(z)=q_k^2\left(\frac{-a}{\breve{\gamma}}\right)=\frac{a}{\breve{\gamma}^2b}\le\frac{\breve{\alpha}^2}{\breve{\gamma}^2}=q^2,$$

considering that

$$q_k^2\ge 0,\left(q_k^2(z)\right)_z'=\frac{-2\breve{\gamma}(z+a/\breve{\gamma})(z+\breve{\gamma}b)}{b(a+\breve{\gamma}^2b+2\breve{\gamma}z)^2},\ -\breve{\gamma}b<\frac{a+\breve{\gamma}^2b}{2\breve{\gamma}}<-\sqrt{ab}<-\frac{a}{\breve{\gamma}}<\sqrt{ab}.$$

This is how we establish inequalities.

$$\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^k,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^k\right)\le q^2\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^{k-1},\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^{k-1}\right),\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^k,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^k\right)\le q^{2(k-1)}\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^1,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^1\right),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Considering that

$$\left\langle C\breve{\psi}^k,\ C\breve{\psi}^k\right\rangle\le\breve{\delta}_1^{-2}\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^k,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^k\right),\left(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^1,\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{\psi}^1\right)\le\breve{\delta}_2^2\left(\breve{C}\breve{\psi}^1,\ \breve{C}\breve{\psi}^1\right)\le 4\breve{\delta}_2^2\left(\breve{C}\breve{\psi}^0,\ \breve{C}\breve{\psi}^0\right),$$

$$\breve{\delta}_2^2\left(\breve{C}\breve{\psi}^1,\ \breve{C}\breve{\psi}^1\right)\le 4\breve{\delta}_2^2\left(\breve{C}\breve{\psi}^0,\ \breve{C}\breve{\psi}^0\right),$$

we obtain an inequality from which the convergence estimate in the method of iterative extensions follows. Here we take into account the passage to the limit in the inequality.

$$\left(\breve{C}\breve{\psi}^1,\breve{C}\breve{\psi}^1\right)\approx\left\langle C\overline{\psi}^1,\ C\overline{\psi}^1\right\rangle\le 4\left\langle C\overline{\psi}^0,\ C\overline{\psi}^0\right\rangle\approx 4\left(\breve{C}\breve{\psi}^0,\breve{C}\breve{\psi}^0\right),\ h_1,h_2\to 0.$$

Theorem 3. *In the method of iterative extensions on a finite-dimensional subspace (8), convergence estimates are satisfied.*

$$\left\|\tilde{u}^k-\tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2}\le\varepsilon\left\|\tilde{u}^0-\tilde{u}\right\|_{\tilde{C}^2},\ \varepsilon=2(\tilde{\delta}_2/\tilde{\delta}_1)(\tilde{\alpha}/\tilde{\gamma})^{k-1},\ k\in\mathbb{N},$$

where the relative errors converge with a geometric progression rate in the norm stronger than the energy norm generated by the operator of the extended problem on the finite-dimensional and approximating subspace

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2}=\sqrt{(\tilde{C}\tilde{v},\tilde{C}\tilde{v})}\ \ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}.$$

We assume that the properties are fulfilled in the approximation.

$$(\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v},\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\tilde{v})\approx(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v},\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\breve{v}),\ (\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v},\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\tilde{v})\approx(\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v},\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}\breve{v}),\ h_1,h_2\to 0.$$

In this case, the previous theorem is obtained from this theorem under the passage to the limit.

Theorem 4. *There are estimates in the method of iterative extensions in matrix form (11).*

$$\left\|\overline{u}^k-\overline{u}\right\|_{C^2}\le\varepsilon\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon=2(\delta_2/\delta_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k\in\mathbb{N},$$

where the relative errors converge with a geometric progression rate in the norm stronger than the energy norm generated by the operator of the extended problem

$$\|\overline{v}\|_{C^2}=\sqrt{(C\overline{v},C\overline{v})}\ \ \forall\overline{v}\in\mathbb{R}^N.$$

Remark 1. *Passing to the limit from Theorems 3 and 4, Theorem 2 follows. Theorem 3 and Theorem 4 coincide up to notation. The proof of Theorem 4 is similar to the proof of Theorem 2 and does not use the passage to the limit in the inequality obtained at the first iteration.*

7. Algorithm that implements the method of iterative extensions in matrix form

We use the method of minimum residuals with a zero initial approximation.

I. Calculate the square of the norm of the initial absolute error.

$$\mathrm{E}_0=\left\langle\overline{f},\overline{f}\right\rangle.$$

II. Find the first approximation.

$$\overline{u}^1=C^{-1}\overline{f}.$$

III. We calculate the residual.

$$\overline{r}^{k-1}=B\overline{u}^{k-1}-\overline{f}=A_{\mathrm{II}}\overline{u}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

IV. Calculate the square of the absolute error rate.

$$\mathrm{E}_{k-1}=\left\langle\overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

V. Finding an amendment.

$$\overline{w}^{k-1}=C^{-1}\overline{r}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

VI. We calculate the equivalent residual.

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1} = A_{\mathrm{II}}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

VII. We calculate the iteration parameter.

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

VIII. We calculate the next approximation.

$$\bar{u}^{k} = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

IX. Checking the condition for stopping iterations.

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}_0\mathrm{E},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},\ \mathrm{E} = 0{,}0001 \in (0;\,1).$$

If the condition for stopping iterations is not met, then everything is repeated from point III.

8. Examples of application of the method of iterative extensions in matrix form

Consider tasks using the following areas.

$$\Pi = (0;6)\times(0;6),\ \Omega_{\mathrm{I}} = (0;6)\times(1;4), \Omega_{\mathrm{II}} = (0;6)\times(0;1)\cup(0;6)\times(4;6).$$

We assume that the areas have boundaries.

$$\Gamma_1 = (0;6)\times\{6\},\ \Gamma_2 = \{0,\ 6\}\times(0;6)\cup(0;6)\times\{0\},\ \Gamma_{1,1} = (0;6)\times\{1,\ 4\},\ \Gamma_{1,2} = \{0,\ 6\}\times(1;4),$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1} = (0;6)\times\{6\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2} = (0;6)\times\{0,\ 1,\ 4\}\cup\{0,\ 6\}\times(0;1)\cup\{0,\ 6\}\times(4;6).$$

We select the right sides and the coefficient in the equations.

$$\breve{f}_1(x;y) = \begin{cases} 2,\ (x;y)\in(0;6)\times(1;1+h), \\ 0,\ (x;y)\in(0;6)\times(1+h;4), \end{cases}$$

$$\kappa_{\mathrm{II}}(x;y) = 2,\ (x;y)\in(0;6)\times(0;1),\ \kappa_{\mathrm{II}}(x;y) = 0,\ (x;y)\in(0;6)\times(4;6).$$

Here are the solutions to the problems.

$$\breve{u}_1(x;y) = \begin{cases} -y^2 - (h^2/3 - 2h - 2)y + h^2/3 - 2h - 1,\ (x;y)\in(0;6)\times(1;1+h], \\ \qquad (-h^2/3)y + 4h^2/3, \qquad\qquad (x;y)\in(0;6)\times[1+h;4). \end{cases}$$

When sampling, we select the grid steps. $h = h_1 = h_2 = 6/n$, $n = 6,12,...,102.$ In calculations by the method of iterative extensions with a zero initial approximation, the number of iterations is set at a predetermined estimate of the relative error.

$$k(\mathrm{E};n) = 8,\ n = 6,12,\ k(\mathrm{E};n) = 6,\ n = 18,...,102,\ \mathrm{E} = 0{,}0001.$$

Note that at the last iteration, on the finest grid, inequalities are satisfied.

$$\max_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left(\left|u_{i,j}^2 - u_{i,j}\right| \Big/ \left|u_{i,j}\right|\right) \le 0{,}0022,\ \ \max_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left|u_{i,j}^2 - u_{i,j}\right| \Big/ \max_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left|u_{i,j}\right| \le 0{,}00043$$

References

1. Aubin J.-P. *Approximation of elliptic boundary-value problems*. New York: Wiley-Interscience, 1972, 360 p.

2. Sorokin S.B. An economical algorithm for numerical solution of the problem of identifying the right-hand side of the Poisson equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, Vol. 12, no. 2, pp. 362–368. DOI: 10.1134/S1990478918020163

3. Sorokin S.B. An efficient direct method for the numerical solution to the Cauchy problem for the Laplace equation. *Numerical Analysis and Applications*, 2019, Vol. 12, no. 12, pp. 87–103. DOI: 10.1134/S1995423919010075

4. Ushakov A.L. Investigation of a mixed boundary value problem for the Poisson equation. *Proc. 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia, 2020*. pp. 273–278. DOI: 10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208198

5. Ushakov A.L. Research of the Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equationinin in a Cyber-Physical System. *Studies in Systems, Decision and Control*. Springer, 2021, Vol. 338, pp. 51–63. DOI: 10.1007/978-3-030-66077-2_5

6. Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V. The Fictitious-Domain Method and Explicit Continuation operators. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1993, Vol. 33, no. 1, pp. 52–68. (in Russ.).

7. Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A., A.M. Matsokin A.M. Fictitious Domain and Domain Decomposition Methods. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1986, Vol. 1, Iss. 1, pp. 3–35. DOI:10.1515/rnam.1986.1.1.3

8. Bank R.E., Rose D.J. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 1977, Vol. 14, no. 5, pp. 792–829. DOI: 10.1137/0714055

9. Manteuffel T. An Incomlete Factorization Technigue for Positive Definite Linear Systems. *Math. Comput.*, 1980, Vol. 38, no. 1, pp. 114–123.

10. Swarztrauber P.N. The Method of Cyclic Reduction, Fourier Analysis and FACR Algorithms for the Discrete Solution of Poisson's Equations on a Rectangle. *SIAM Review*, 1977, Vol. 19, no. 3, pp. 490–501. DOI: 10.1137/1019071.

Received December 16, 2021

Information about the author

Ushakov Andrey Leonidovich, Associate Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Research Officer at the Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University,Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: ushakoval@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 64–76

УДК 519.63 **DOI: 10.14529/mmph220107**

АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А.Л. Ушаков
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ushakoval@susu.ru

Аннотация. Смешанная краевая задача для уравнения Пуассона рассматривается в ограниченной плоской области. Проводится продолжение этой задачи через границу с условием Дирихле до прямоугольной области. Предлагается рассмотрение продолженной задачи в операторном виде. Для решения продолженной задачи формулируется метод итерационных расширений в операторном виде. Продолженная задача в операторном виде рассматривается на конечномерном подпространстве. Для решения предыдущей задачи формулируется метод итерационных расширений в операторном виде на конечномерном подпространстве. Продолженная задача приводится в матричном виде. Для решения продолженной задачи в матричном виде формулируется метод итерационных расширений в матричном виде. Показывается, что в предложенных вариантах метода итерационных расширений относительные ошибки сходится в норме более сильной, чем энергетическая норма расширенной задачи со скоростью геометрической прогрессии. Итерационные параметры в указанных методах выбираются с помощью метода минимальных невязок. Указываются условия, достаточные для сходимости применяемых итерационных процессов. Выписан алгоритм, реализующий метод итерационных расширений в матричном виде. В данном алгоритме производится автоматический выбор итерационных параметров и указывается критерий остановки при достижении оценки требуемой точности. Приводятся примеры применения метода итерационных расширений для решения задач на ЭВМ.

Ключевые слова: уравнение Пуассона; метод итерационных расширений.

Литература

1. Aubin, J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems / J.-P. Aubin // New York: Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.

2. Sorokin, S.B. An economical algorithm for numerical solution of the problem of identifying the right-hand side of the Poisson equation / S.B. Sorokin // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2018. – Vol. 12, no. 2. – P. 362–368.

3. Sorokin S.B. An efficient direct method for the numerical solution to the Cauchy problem for the Laplace equation / S.B. Sorokin // Numerical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 12, no. 12. – P. 87–103.

4. Ushakov, A.L. Investigation of a mixed boundary value problem for the Poisson equation / A.L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273–278.

5. Ushakov, A.L. Research of the Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equationinin in a Cyber-Physical System / A.L. Ushakov // Studies in Systems, Decision and Control. Springer. – 2021. – Vol. 338. – P. 51–63.

6. Мацокин, А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.

7. Marchuk, G.I. Fictitious Domain and Domain Decomposion Methods / G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1986. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 3–35.

8. Bank, R.E. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems / R.E. Bank, D.J. Rose // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, no. 5. – P. 792–829.

9. Manteuffel, T. An Incomlete Factorization Technigue for Positive Definite Linear Systems / T. Manteuffel // Math. Comput. – 1980. – Vol. 38, no. 1. – P. 114–123.

10. Swarztrauber, P.N. The Method of Cyclic Reduction, Fourier analysis and FACR Algorithms for the Discrete Solution of Poisson’s Equations on a Rectangle / P.N. Swarztrauber // SIAM Review. – 1977. – Vol. 19, no. 3. – P. 490–501.

Поступила в редакцию 16 декабря 2021 г.

Сведения об авторе

Ушаков Андрей Леонидович – доцент, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: ushakoval@susu.ru

Физика

DOI: 10.14529/mmph220108

PROMISING QUANTUM ENGINEERING OF OPTICAL EVEN/ODD SCHRÖDINGER CAT STATES

M.S. Podoshvedov[1], S.A. Podoshvedov[2], A.P. Alodjants[3], S.P. Kulik[4]
[1] *Institute of Physics, Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation*
[2] *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
[3] *National Research University for Information Technology, St. Petersburg, Russian Federation*
[4] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
E-mail: sapodo68@gmail.com

Abstract. We propose an efficient way to implement new family of continuous variable (CV) states of definite parity. Measurement induced CV states of definite parity states are realized after subtraction of an arbitrary number of photons from the initial single-mode squeezed vacuum (SMSV) state using a photon number resolving (PNR) detector. Optical design requires irreducible number of optical elements for implementation of the CV states of definite parity. The potential of using the CV states in optical quantum information processing can be high. As an example, we show the possibility of using a family of the CV states of definite parity for quantum engineering of optical even/odd Schrödinger cat states (SCSs). In particular, we report the possibility of implementing the CV states of definite parity that approximate even/odd SCSs of amplitude slightly greater than 4 with fidelity prevailing 0,99 after subtraction of 50,51 photons from original SMSV. The success probability being the third key parameter of the optical design, decreases with an increase in the number of photons, but generally remains at an acceptable level for further use in quantum information processing in the case of a small number of subtracted photons.

Keywords: even/odd Schrödinger cat states; single-mode squeezed vacuum state; measurement induced CV states of definite parity; beam splitter; photon number resolving detector.

It is a well-known fact that the generation of two-mode entangled light state can be realized by interference of single-mode non-classical states at the beam splitter [1]. The canonical example of the interference is known to be Hong-Ou-Mandel (HOM) effect [2], which is a two-photon interference effect with two single photons emerging together at one of the outputs of the balanced beam splitter with half chance of success. The process of mixing of the non-classical states serves as a critical element in such an application as quantum state engineering using technique of photon subtraction [3–6], photon addition [7], and photon catalysis [8, 9]. The interference of two non-classical states at a beam splitter can become resource for a conditional quantum engineering of desired optical states.

In optics, implementation of superposition of coherent states $|+\beta\rangle$ and $|-\beta\rangle$ with complex amplitudes $\pm\beta$ is of considerable interest. Realization of the non-classical Schrödinger cat states (SCSs) is expected to resolve the puzzle, at what degree of macroscopicity, if it exists, the object goes on to be quantum [10]? The squared absolute value of amplitude of the component coherent state $|\beta|^2$, which is approximately equal to its mean photon number, can be to some extent treated as a qualitative measure of SCS macroscopicity. It must be at least much larger than the quantum uncertainty $1/\sqrt{2}$ of the position observable in the coherent state in order to recognize an optical SCS macroscopic object [11]. In addition to their fundamental importance, the SCSs have high application potentials in teleportation [12–15], quantum metrology [16], quantum computation [17, 18]. Here we propose a new theory for the generation of a family of CV states of definite parity whose practical potential is as yet unknown. The generation is based on the use of a photon number resolving detector, which implements the new measurement-induced CV states of definite parity. Nevertheless, we consider one important practical application of the family under study, namely the possibility of using the CV states of definite parity in the quantum engineering of even/odd SCSs. The approach uses irreducible number of optical elements and can be implemented in practice.

For quantum engineering of optical even/odd SCSs, we consider the optical design in Fig. 1 containing irreducible number of optical elements. It consists of a lossless beam splitter $BS=\begin{bmatrix} t & -r \\ r & t \end{bmatrix}$, with real transmittance $t>0$ and reflectance $r>0$ coefficients satisfying the physical condition $t^2+r^2=1$. The beam splitter (BS) is considered to be no longer necessarily balanced and its parameter can be arbitrary. In Fig. 1, single-mode squeezed vacuum state in first mode

$$|SMSV\rangle=\frac{1}{\sqrt{coshs}}\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n}|2n\rangle=\frac{1}{\sqrt{coshs}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{\sqrt{(2n)!}}\frac{(2n)!}{n!}|2n\rangle, \quad (1)$$

with amplitudes

$$b_{2n}=\frac{y^n}{\sqrt{(2n)!}}\frac{(2n)!}{n!} \quad (2)$$

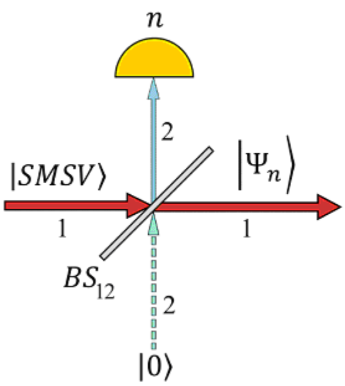

Fig. 1. An optical scheme used to generate CV states of definite parity either even or odd. It consists of the beam splitter with arbitrary BS parameter t through which the original SMSV with squeezing amplitude s passes. Second measurement mode is used to measure number of photons and implement new measurement induced CV states $|\Psi_n\rangle$, where either $n=2m$ or $n=2m+1$

enters to the beam splitter. Here, amount $s>0$ is the squeezing amplitude of the SMSV state the parameter $0\le y=tanhs/2\le 0{,}5$ of the SMSV is introduced. The absence of input SMSV (vacuum) is determined by the value $y=0$, while the value of $y=0{,}5$ corresponds to the non-physical case of an infinitely large squeezing amplitude $s\to\infty$ of the original SMSV that goes behind physical consideration. No other state (vacuum) is applied to the second input BS. As can be seen from Fig. 1, part of the initial photons is diverted to the second mode of the BS, where they are detected PNR detector. In the case of detecting a photon state in the second auxiliary mode with the PNR detector, the original SMSV can be transformed into a new CV state, which we are going to call $2m/2m+1$-heralded CV state by the number of extracted photons. Success in the development of photon-resolving detection [19] allows one to hope for the successful implementation of scheme in practice.

The analytical derivation of the $2m/2m+1$-heralded states starts with transformations of the creation operators imposed by the beam splitter: $a_1^+\to ta_1^+-ra_2^+$, $a_2^+\to ra_1^++ta_2^+$ that, due to linearity of the BS operator, realize the following unitary transformation over input SMSV state

$$BS_{12}\left(|SMSV\rangle_1|0\rangle_2\right)=\frac{1}{\sqrt{coshs}}\sum_{n=0}^{\infty}C_n|\Psi_n\rangle_1|n\rangle_2, \quad (3)$$

where the amplitudes C_n are determined as

$$C_n=\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{y_1^{n/2}}{\sqrt{n!}}\begin{cases}\sqrt{Z^{(2m)}(y_1)}, \text{ if } n=2m,\\ \sqrt{Z^{(2m+1)}(y_1)}, \text{ if } n=2m+1,\end{cases} \quad (4)$$

where, by definition, the following function $Z\equiv Z(y_1)=Z^{(0)}=1/\sqrt{1-4y_1^2}$ and its derivative $Z^{(n)}=d^nZ/dy_1^n$ with respect to the parameter $y_1=t^2tanhs/2$ determined through the experimental parameters (t,s) are introduced. The parameter y_1 differs from the parameter y by the value t_1^2 i.e. $y_1=t^2y$. By definition, the parameter y_1 can also take values in the range $0\le y_1\le 0{,}5$ in the case of

$s > 0$, where the case $y_1 = 0$ is realized either in the absence of the SMSV at the input to the BS $(s = 0)$ or in the case of reflection of all photons into the second auxiliary mode $t = 0, r = 1$, while the case of $y_1 = 0{,}5$ can be done in the non-physical case $s \to \infty$ and $t = 1$. The CV states $|\Psi_n\rangle$ are given below.

Consider the possibility of using entangled state in Eq. (3) for quantum engineering of new non-classical CV states. The projection of the state in Eq. (3) onto Fock states by the registration of n photons in auxiliary second mode leads to heralded generation of new CV states. So, measurement of an even number of photons $n = 2m$ in the second auxiliary mode realizes $2m$-heralded CV state

$$|\Psi_{2m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z^{(2m)}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_1^n}{\sqrt{(2n)!}} \frac{\left(2(n+m)\right)!}{(n+m)!} |2n\rangle, \tag{5}$$

while if the observer registers an odd number of photons $n = 2m+1$, then $2m+1$-heralded CV state becomes

$$|\Psi_{2m+1}\rangle = \sqrt{\frac{y_1}{Z^{(2m+1)}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_1^n}{\sqrt{(2n+1)!}} \frac{\left(2(n+m+1)\right)!}{(n+m+1)!} |2n+1\rangle. \tag{6}$$

Thus, the subtraction of either even $n = 2m$ or odd $n = 2m+1$ number of photons from original SMSV in an indistinguishable manner with loss of all information from which Fock states of the original superposition the photons are subtracted generates the heralded CV states of definite parity in Eqs. (5), (6). The output states have a well-defined parity either even (superposition involves only even number states) or odd (the measurement induced state consists exclusively of odd number states) in dependency on the parity of the measurement outcomes. It is interesting to note the state in Eq. (5) becomes SMSV in Eqs. (1), (2) in the case of $m = 0$ and $y_1 = y$. It is worth noting the family of the CV states in Eqs. (5), (6) depends on one parameter y_1 as well as the initial SMSV state from which they stem. For this reason, they can also be called SMSV-like states whose non-classical properties may be of interest for optical quantum metrology. The success probabilities to realize the $2m/2m+1$-heralded states follow from definition of the amplitudes of the entangled state in Eq. (4)

$$P_{2m} = \frac{1}{coshs} \left(\frac{1-t^2}{t^2} \right)^{2m} \frac{y^{2m}}{(2m)!} Z^{(2m)}, \tag{7}$$

$$P_{2m+1} = \frac{1}{coshs} \left(\frac{1-t^2}{t^2} \right)^{2m+1} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} Z^{(2m+1)}, \tag{8}$$

with the normalization condition $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ which is directly checked.

Now, we are interested in the possibility of approximating even/odd SCSs, being the superposition of coherent states with real amplitude $\beta > 0$ equal in absolute value but opposite in sign $(|SCS_\pm\rangle = N_\pm(\beta)(|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle))$, by the heralded CV states of definite parity in Eqs. (5), (6). Indeed, such a task makes sense since the $2m/2m+1$-heralded CV states of definite parity may have photon distributions similar to even/odd SCSs ones

$$|SCS_+\rangle = 2N_+(\beta)\exp(-\beta^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle, \tag{9}$$

$$|SCS_-\rangle = 2N_-(\beta)\exp(-\beta^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle, \tag{10}$$

where $N_\pm = [2(1 \pm \exp(-2\beta^2))]^{-1/2}$ are the corresponding normalization factors. Difference between the states in Eqs. (5), (6) and (9), (10) is that the amplitude β is raised to a power of $2n$ $\left(\beta^{2n}\right)$ in Eq. (9) and $2n+1$ $\left(\beta^{2n+1}\right)$ in Eq. (10), unlike the parameter y_1 to the power of n in Eq. (5), (6). But instead, the CV states of definite parity in Eqs. (5), (6) have an additional factor either $\left(2(n+m_N)\right)!/(n+m_N)!$

in Eq. (5) or $\left(2\left(n+m_N+1\right)\right)!/\left(n+m_N+1\right)!$ in Eq. (6) associated with the number of extracted photons from SMSV which may compensate for the difference between β^{2n}, β^{2n+1} and y_1^n .

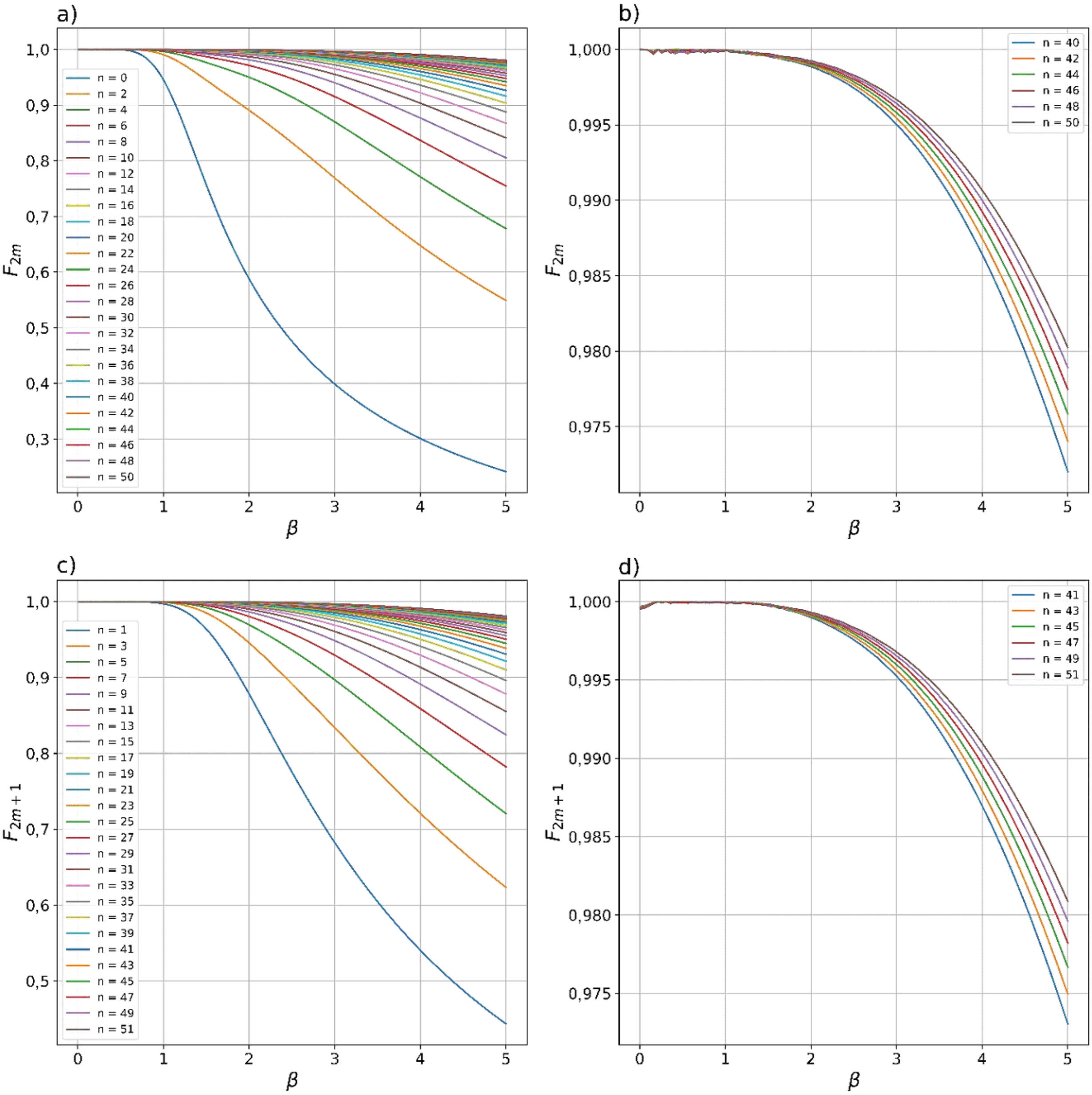

Fig. 2. Dependence of the even (a), (b) F_{2m} and odd (c), (d) F_{2m+1} fidelities between $2m, 2m+1$-heralded CV states of definite parity and even/odd SCSs on the SCS's amplitude β. The more photons n are subtracted in auxiliary modes, the higher fidelities F_n of the generated states can be observed. Dependences of the fidelities of higher-order CV states with n from 40 up to 51 depending on β are separately shown in subfigures (b) и (d). The dependences on subfigures (b) и (d) allow for one to observe generation of even/odd SCSs with an amplitude greater than 4 with fidelity exceeding 0,99

To assess how well the $2m/2m+1$-heralded CV states can well approximate even/odd SCSs, we use the fidelity either $F_{2m} = |\langle SCS_+ | \Psi_{2m}\rangle|^2$ or $F_{2m+1} = |\langle SCS_- | \Psi_{2m+1}\rangle|^2$, which is a measure of the proximity of two pure states. The value $F_{2m} = F_{2m+1} = 1$ corresponds to the complete identity of two pure states. In Fig. 2, we show the dependence of the fidelities F_{2m} (Figs. 2, *a*, *b*) and F_{2m+1} (Figs. 2, *c*, *d*) on the SCS's amplitude β. The dependences are obtained by searching for the global maximum of the fidelities by parameter y_1 at some constant value β. As can be seen from the plots, the more photons are extracted from the original SMSV, the greater the fidelity of the generated SMSV-like states with the even/odd SCSs with greater amplitude. We limited ourselves to 51 subtracted photons, but in general, an increase in the number of extracted photons can only lead to an increase in the fidelity between the generated states and even/odd SCSs of larger amplitude β. So, if for the measure of the required fidelity one chooses the value $F_{2m} = F_{2m+1} \geq 0{,}99$, then the extreme values of the SCSs amplitudes at which such fidelity is still observed are $\beta = 4{,}04$ (in the case of subtraction of 50 photons in Fig. 2(b)) and $\beta = 4{,}093$ (in the case of subtraction of 51 photons in Fig. 2, *d*). The plots in figure 3 show the dependency of y_{2m} and y_{2m+1} (for convenience, in Fig. 3 when designating the vertical axis, we do not use the subscript 1 for the parameter y_1) which provide the maximum fidelities F_{2m} and F_{2m+1} in Fig. 2 on β. It is interesting that the more photons are subtracted from the original SMSC, the smaller the value of the parameter y_1 can acquire. For example, subtraction of large number of photons (say 50 or 51) from input SMSV leaves the parameter y_1 in the range $y_1 < 0{,}2$ what could have practical potential when choosing parameter values s and t.

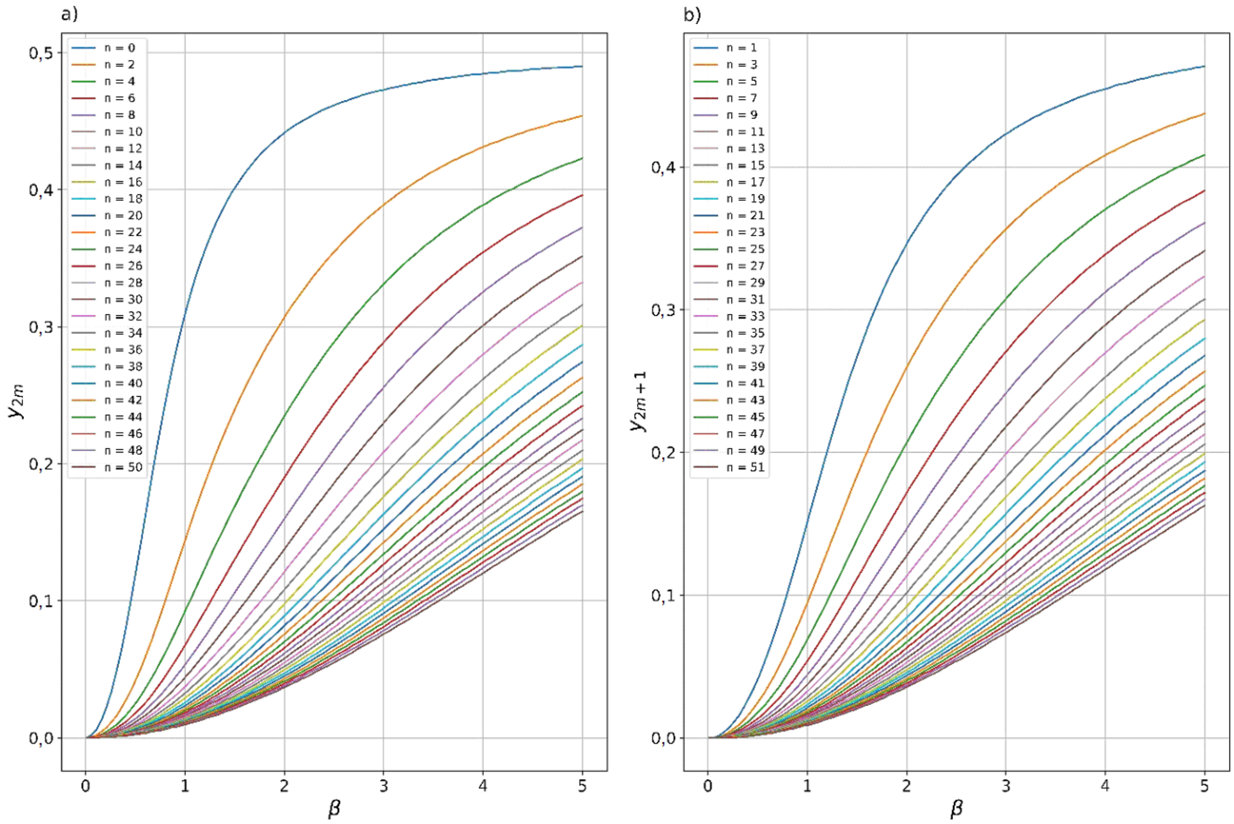

Fig. 3. $2m, 2m+1$**-heralded states in Eqs. (4,5) depend solely on one parameter** $0 \leq y_k \leq 0{,}5$**. The plots demonstrate the dependencies of the parameter** y_k **that provide the fidelities in Fig. 2 on the SCS amplitude** β**. The larger the number** n **of the extracted photons, the smaller the value of the parameter** y_k**, moreover accompanied by an increase in the fidelity of the conditional states**

As for generation rate of the even/odd SCSs, which is proportional to the success probability in Eqs. (9), (10), it already depends on two parameters y_1 and t, in contrast to the fidelity. As an example, we present plots of the success probabilities in Eqs. (7), (8) versus β starting with $n = 6$ up to $n = 16$ for even and $n = 7$ up to $n = 17$ for odd SCSs. In general, increasing the number of extracted photons can only decrease the success probability in realizing the required CV states.

In conclusion, we have introduced a family of CV states of a certain parity which in their statistical properties may be similar to original SMSV state from which the CV states of definite parity stem. The key point in their implementation is the extraction of an arbitrary number of photons in an indistinguishable manner by means of PNR detection while preserving the superposition properties of the new CV states. The imperfection of optical elements, e.g. non-ideal quantum efficiency of the PNR detector, can impose certain restrictions on the generated states, which is the subject of further study. As an example of the application of the CV states of a certain parity, we have considered the possibility of creating a generator of even/odd SCSs states. For the first time, we reported the possibility of realizing even/odd SCSs of amplitude a little over 4 with fidelity $\geq 0{,}99$ on a given type of optical design in Fig. 1. The optical design used can be upgraded to generate new states more efficiently. For the experimental implementation of the proposed scheme, one can use the technique described in references [20, 21].

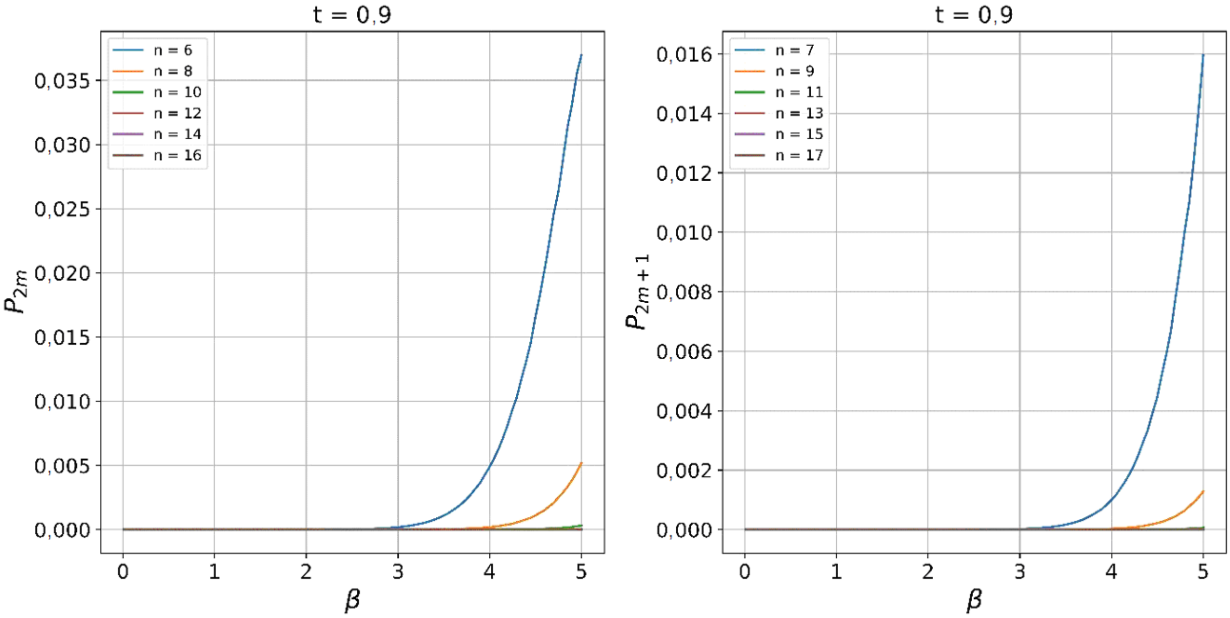

Fig. 4. Dependencies of (a) P_{2m} (Eq. (7)) and (b) P_{2m+1} (Eq. (8)) on the SCS amplitude β for some $n = 6-17$. In general, the dependences indicate that the extraction of a larger number of photons leads to a decrease in the success probability of generated CV states of definite parity approximating even/odd SCSs with the highest possible fidelity for a given β

References

1. Kim M.S., Son W., Bužek V., Knight P.L. Entanglement by a Beam Splitter: Nonclassicality as a Prerequisite for Entanglement. *Phys. Rev. A*, 2002, Vol. 65, Iss. 3, p. 032323. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.032323

2. Hong C.K., Ou Z.Y., Mandel L. Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, Vol. 59, Iss. 18, pp. 2044–2046. DOI: 10.1103/PhysRevLett.59.2044

3. Dakna M., Anhut T., Opatrny T., Knöll L., Welsch D.-G. Generating Schrödinger Cat-Like States by means of Conditional Measurement of a Beam Splitter. *Phys. Rev. A*, 1997, Vol. 55, Iss. 4, pp. 3184–3194. DOI: 10.1103/PhysRevA.55.3184

4. Podoshvedov S.A. Schemes for Performance od Displacing Hadamard Gate with Coherent States. *Optics Communications*, 2012, Vol. 285, Iss. 18, pp. 3896–3905. DOI: 10.1016/j.optcom.2012.04.029

5. Carranza R., Gerry C.C. Photon-Subtracted Two-Mode Squeezed Vacuum States and Applications to Quantum Optical Interferometry. *Journal of the Optical Society of America B*, 2012, Vol. 29, Iss. 9, pp. 2581–2587. DOI: 10.1364/JOSAB.29.002581

6. Podoshvedov S.A. Elementary Quantum Gates in Different Bases. *Quantum Information Processing*, 2016, Vol. 15, Iss. 10, pp. 3967–3993. DOI: 10.1007/s11128-016-1375-z

7. Dakna M., Knöll L., Welsch D.G. Photon-Added State Preparation via Conditional Measurement on a beam Splitter. *Optics Communications*, 1998, Vol. 145, Iss. 1–6, pp. 309–321. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00463-X

8. Lvovsky A.I., Mlynek J. Quantum-Optical Catalysis: Generating Nonclassical States of Light by means of Linear Optics. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, Vol. 88, Iss. 25, p. 250401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.250401

9. Bartley T.J., Donati G., Spring J.B., Min X.-J., Barbieri M., Datta A., Smith B.J., Walmsley I.A. Multiphoton State Engineering by Heralded Interference Between Single Photons and Coherent States. *Phys. Rev. A*, 2012, Vol. 86, Iss. 4, p. 043820. DOI: 10.1103/PhysRevA.86.043820

10. Wineland D.J. Nobel Lecture: Superposition, Entanglement, and Raising Schrödinger's Cat, *Rev. Mod. Phys.*, 2013, Vol. 85, Iss. 3, pp. 1103–1114. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.1103

11. Leggett A.J. Testing the Limits of Quantum Mechanics: Motivation, State of Play, Prospects, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2002, Vol. 14, no. 15, pp. R415–R451. DOI: 10.1088/0953-8984/14/15/201

12. van Enk S.J., Hirota O. Entangled Coherent States: Teleportation and Decoherence. *Phys. Rev. A*, 2001, Vol. 64, Iss. 2, p. 022313. DOI: 10.1103/PhysRevA.64.022313

13. Jeong H., Kim M.S. Efficient Quantum Computation Using Coherent States. *Phys Rev. A*, 2002, Vol. 65, Iss. 4, p. 042305. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.042305

14. An N.B. Teleportation of Coherent-State Superpositions within a Network. *Phys. Rev.*, 2003, Vol. 68, Iss. 2, p. 022321. DOI: 10.1103/PhysRevA.68.022321

15. Podoshvedov S.A. Efficient Quantum Teleportation of Unknown Qubit Based on DV-CV Interaction Mechanism, *Entropy*, 2019, Vol. 21, Iss. 2, Article no. 150. DOI: 10.3390/e21020150

16. Joo J., Munro W.J., Spiller T.P. Quantum Metrology with Entangled Coherent States. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, Vol. 107, Iss. 8, p. 083601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.083601

17. Ralph T.C., Gilchrist A., Milburn G.J., Munro W.J., Glancy S. Quantum Computation with Optical Coherent States. *Phys. Rev. A*, 2003, Vol. 68, Iss. 4, p. 042319. DOI: 10.1103/PhysRevA.68.042319

18. Lund A.P., Ralph T.C., Haselgrove H.L. Fault-tolerant linear optical quantum computing with small-amplitude coherent states. *Phys. Rev. Lett*, 2007, Vol. 100, Iss. 3, p. 030503. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.030503

19. Fukuda D., Fujii G., Numata T., Amemiya K., Yoshizawa A., Tsuchida H., Fujino H., Ishii H., Itatani T., Inoue S., Zama T. Titanium-Based Transition-Edge Photon Number Resolving Detector with 98% Detection Efficiency with Index-Matched Small-Gap Fiber Coupling. *Optics Express*, 2011, Vol. 19, Iss. 2, pp. 870–875. DOI: 10.1364/OE.19.000870

20. Bogdanov Yu.I., Katamadze K.G., Avosopiants G.V., Belinsky L.V., Bogdanova N.A., Kalinkin A.A., Kulik S.P. *Multiphoton subtracted thermal states: Description, preparation, and reconstruction*. Phys. Rev. A, 2017, Vol. 96, Iss. 6, p. 063803. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063803

21. Katamadze K.G., Avosopiants G.V., Bogdanova N.A., Bogdanov Yu.I., Kulik S.P. Multimode Thermal States with Multiphoton Subtraction: Study of the Photon-Number Distribution in the Selected Subsystem. *Physical Review A*, 2020, Vol. 101, Iss. 1, p. 013811. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.013811

Received January 22, 2022

Information about the authors

Podoshvedov Mikhail Sergeevich is student, Institute of Physics, Kazan Federal University (KFU), Kazan, Russian Federation, e-mail: mikepodo6@gmail.com

Podoshvedov Sergey Anatol'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of Physics of Nanoscale System Department, Senior Staff Scientist of Laboratory of Quantum Information Processing and Quantum Computing, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sapodo68@gmail.com

Alodzhants Aleksandr Pavlovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Mechanics and Optics Department, National Research University for Information Technology, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: alexander_ap@list.ru

Kulik Sergey Pavlovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of Quantum Technology Center, Professor of Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, e-mail: sergei.kulik@physics.msu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 77–85

УДК 530.145 **DOI: 10.14529/mmph220108**

ПЕРСПЕКТИВНЫЙ КВАНТОВЫЙ ИНЖЕНИРИНГ ОПТИЧЕСКИХ ЧЕТНЫХ/НЕЧЕТНЫХ СОСТОЯНИЙ КОТА ШРЕДИНГЕРА

М.С. Подошведов[1], С.А. Подошведов[2], А.П. Алоджанц[3], С.П. Кулик[4]
[1] *Институт физики Казанского федерального университета, г. Казань, Российская Федерация*
[2] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
[3] *Национальный исследовательский университет информационных технологий, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация*
[4] *Московский государственный университет, г. Москва, Российская Федерация*

Аннотация. Мы предлагаем эффективный способ реализации нового семейства состояний непрерывной переменной (CV) определенной четности. Индуцированные измерением CV-состояния определенной четности реализуются после извлечения произвольного числа фотонов из начального состояния одномодового сжатого вакуума (SMSV) с использованием детектора с разрешением числа фотонов (PNR). Оптическая схема требует минимального количества оптических элементов для реализации состояний CV определенной четности. Потенциал использования состояний CV в оптической квантовой обработке информации может быть высоким. В качестве примера показана возможность использования семейства CV-состояний определенной четности для квантовой инженерии оптических четно/нечетных состояний кота Шредингера (SCS). В частности, мы сообщаем о возможности реализации CV состояний определенной четности, которые аппроксимируют четные/нечетные SCS состояния с амплитудой чуть больше 4 с точностью $> 0,99$ после извлечения 50,51 фотонов из исходного SMSV состояния. Вероятность успеха, являющаяся третьим ключевым параметром оптической схемы, уменьшается с увеличением числа извлекаемых фотонов, но в целом остается на приемлемом уровне для дальнейшего использования в квантовой обработке информации в случае небольшого числа извлекаемых фотонов.

Ключевые слова: четные/нечетные состояния кота Шредингера (SCS); одномодовое сжатое вакуумное состояние; CV-состояния определенной четности, индуцированные измерением; светоделитель; фотон разрешающий детектор.

Литература

1. Kim, M.S. Entanglement by a Beam Splitter: Nonclassicality as a Prerequisite for Entanglement / M.S. Kim, W. Son, V. Bužek, P.L. Knight // Phys. Rev. A. – 2002. – Vol. 65, Iss. 3. – P. 032323.
2. Hong, C.K. Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference / C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 59, Iss. 18. – P. 2044–2046.
3. Generating Schrödinger Cat-Like States by means of Conditional Measurement of a Beam Splitter / M. Dakna, T. Anhut, T. Opatrny *et al.* // Phys. Rev. A. – 1997. – Vol. 55, Iss. 4. – P. 3184–3194.
4. Podoshvedov, S.A. Schemes for Performance od Displacing Hadamard Gate with Coherent States / S.A. Podoshvedov // Optics Communications. – 2012. – Vol. 285, Iss. 18. – P. 3896–3905.
5. Carranza, R. Photon-Subtracted Two-Mode Squeezed Vacuum States and Applications to Quantum Optical Interferometry / R. Carranza, C.C. Gerry // Journal of the Optical Society of America B. – 2012. – Vol. 29, Iss. 9. – P. 2581–2587.
6. Podoshvedov, S.A. Elementary Quantum Gates in Different Bases / S.A. Podoshvedov // Quantum Information Processing. – 2016. – Vol. 15, Iss. 10. – P. 3967–3993.
7. Dakna, M. Photon-Added State Preparation via Conditional Measurement on a beam Splitter / M. Dakna, L. Knöll, D.G. Welsch // Optics Communications. – 1998. – Vol. 145, Iss. 1–6. – P. 309–321.
8. Lvovsky, A.I. Quantum-Optical Catalysis: Generating Nonclassical States of Light by means of Linear Optics / A.I. Lvovsky, J. Mlynek // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88, Iss. 25. – P. 250401.
9. Multiphoton State Engineering by Heralded Interference Between Single Photons and Coherent States / T.J. Bartley, G. Donati, J.B. Spring *et al.* // Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 86, Iss. 4. – P. 043820.

10. Wineland, D.J. Nobel Lecture: Superposition, Entanglement, and Raising Schrödinger's Cat / D.J. Wineland // Rev. Mod. Phys. – 2013. – Vol. 85, Iss. 3. – P. 1103–1114.

11. Leggett, A.J. Testing the Limits of Quantum Mechanics: Motivation, State of Play, Prospects / A.J. Leggett // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14, no. 15. – P. R415–R451.

12. van Enk, S.J. Entangled Coherent States: Teleportation and Decoherence / S.J. van Enk, O. Hirota // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 64, Iss. 2. – P. 022313.

13. Jeong, H. Efficient Quantum Computation Using Coherent States / H. Jeong, M.S. Kim // Phys Rev. A. – 2002. – Vol. 65, Iss. 4. – P. 042305.

14. An, N.B. Teleportation of Coherent-State Superpositions within a Network / N.B. An // Phys. Rev. – 2003. – Vol. 68, Iss. 2. – P. 022321.

15. Podoshvedov, S.A. Efficient Quantum Teleportation of Unknown Qubit Based on DV-CV Interaction Mechanism / S.A. Podoshvedov // Entropy. – 2019. – Vol. 21, Iss. 2. – Article no. 150.

16. Joo, J. Quantum Metrology with Entangled Coherent States / J. Joo, W.J. Munro, T.P. Spiller // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107, Iss. 8. – P. 083601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.083601

17. Ralph, T.C. Quantum Computation with Optical Coherent States / T.C. Ralph, A. Gilchrist, G.J. Milburn *et al.* // Phys. Rev. A. – 2003. – Vol. 68, Iss. 4. – P. 042319.

18. Lund, A.P. Fault-tolerant linear optical quantum computing with small-amplitude coherent states / A.P. Lund, T.C. Ralph, H.L. Haselgrove // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 100, Iss. 3. – P. 030503.

19. Titanium-Based Transition-Edge Photon Number Resolving Detector with 98% Detection Efficiency with Index-Matched Small-Gap Fiber Coupling / D. Fukuda, G. Fujii, T. Numata *et al.* // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, Iss. 2. – pp. 870–875.

20. Multiphoton subtracted thermal states: Description, preparation, and reconstruction / Yu.I. Bogdanov, K.G. Katamadze, G.V. Avosopiants // Phys. Rev. A. – 2017. – Vol. 96, Iss. 6. – p. 063803.

21. Multimode Thermal States with Multiphoton Subtraction: Study of the Photon-Number Distribution in the Selected Subsystem / K.G. Katamadze, G.V. Avosopiants, N.A. Bogdanova // Physical Review A. – 2020. – Vol. 101, Iss. 1. – P. 013811.

Поступила в редакцию 22 января 2022 г.

Сведения об авторах

Подошведов Михаил Сергеевич – студент, Институт физики Казанского федерального университета (КФУ), г. Казань, Российская Федерация, e-mail: mikepodo6@gmail.com

Подошведов Сергей Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики наноразмерных систем, старший научный сотрудник лаборатории квантовой обработки информации и квантовых вычислений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sapodo68@gmail.com

Алоджанц Александр Павлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и оптики, Национальный исследовательский университет информационных технологий (ИТМО), г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: alexander_ap@list.ru

Кулик Сергей Павлович – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета, руководитель центра квантовых технологий, Московский государственный университет, г. Москва, Российская Федерация, e-mail:sergei.kulik@physics.msu.ru

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, факультет математики, механики и компьютерных технологий, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. http://vestnik.susu.ru/mmph.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, http://vestnik.susu.ru/mmph, http://вестник.юургу.рф/mmph.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редакционный коллектив журнала Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» сердечно поздравляет с 70-летним юбилеем своего коллегу, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего научно-исследовательской лабораторией «Неклассические уравнения математической физики» Южно-Уральского государственного (национального исследовательского) университета Георгия Анатольевича Свиридюка.

Его работы в области теории уравнений соболевского типа, заслужившие признание ученых не только в нашей стране, но и за рубежом, наряду с его неустанной педагогической, наставнической деятельностью и искренней заботой о сохранении и развитии лучших традиций отечественной науки ставят его в первый ряд ярких представителей математического сообщества России.

Редакционный коллектив нашего журнала, поздравляя Георгия Анатольевича с этой знаменательной датой, желает ему здоровья, долголетия, процветания, творческого вдохновения и новых результатов!

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», Е29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 14, № 1
2022

16+

Редакторы: *С.И. Уварова, А.В. Шуватова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 28.01.2022. Дата выхода в свет 03.02.2022.
Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23.
Тираж 500 экз. Заказ 13/38. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.