



ВЕСТНИК

**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2014
Т. 6, № 1**

ISSN 2075-809X

СЕРИЯ

**«МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий

**Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный
университет» (национальный исследовательский университет)**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., профессор **Мирзоев А.А.** (отв. редактор),
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь),
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.**,
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.**,
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.**,
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.**,
д.ф.-м.н., профессор **Келлер А.В.**

Редакционный совет:

д.ф.-м.н., профессор **Менихес Л.Д.**,
д.ф.-м.н., профессор **Карачик В.В.**,
д.ф.-м.н., профессор **Мирзаев Д.А.**,
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.**,
д.т.н., профессор **Сапожников С.Б.**,
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва),
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, США),
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла),
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНА-Университет, г. Инчон, Корея),
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Корея),
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, Нэшвилл, США)



BULLETIN

**OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY**

SERIES

**“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”**

2014

Vol. 6, no. 1

ISSN 2075-809X

**Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”**

South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

A.A. Mirzoev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.O. Chernyavskii, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
N.D. Kundikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

L.D. Menikhes, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.V. Karachik, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D.A. Mirzaev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
S.B. Sapozhnikov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zhukovsky, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Indiana University, United States of America
V.A. Strauss, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela
Kishik Kim, INHA-University, Incheon, Korea
Jaewan Kim, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, Korea
E.S. Puzyrev, Vanderbilt University, Nashville, USA

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

АДУКОВ В.М., ПАТРУШЕВ А.А. Один из случаев трехэлементной краевой задачи линейного сопряжения на прямой.....	5
АЗОВ Д.Г. Оценка размеров области существования регулярного решения гиперболического уравнения Монжа–Ампера.....	10
БАРДИН А.Е., СОЛДАТОВА Н.Г. Сильно гарантированное равновесие в одной иерархической двухуровневой игре при неопределенности.....	15
ЗАЛЯПИН В.И., ТИМОФЕЕВ Ю.С., ШИШКИНА Е.А. Статистическая реконструкция распределения фоновых доз облучения по результатам ЭПР измерений.....	22
КАТКОВ М.Л. Расширение понятия вогнутого оператора.....	28
КОВАЛЕВ Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея двухфазных математических моделей гетерогенных сред.....	30
СИДИКОВА А.И., БЕЛЬКОВ С.И. Равномерное приближение граничного условия в обратной задаче тепловой диагностики.....	36
УШАКОВ А.Л. Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвертого порядка в прямоугольной области.....	42

Механика

САПОЖНИКОВ С.Б., АБДРАХИМОВ Р.Р., ШАКИРОВ А.А. Конструкционная прочность полимерных композитов на основе коротких стеклянных волокон.....	50
САПОЖНИКОВ С.Б., КУДРЯВЦЕВ О.А., ШАКИРОВ А.А. Рациональный выбор конечно-элементных моделей для модального анализа на примере конструкции сварного металлического каркаса.....	55
ШАБЛОВСКИЙ О.Н. Инвариантная завихренность и тепловое состояние ползущего течения жидкости сквозь пронцаемую мембрану.....	59

Физика

ПРОКУДИНА Л.А. Моделирование нелинейного развития возмущений в тонком жидком слое при волнообразовании.....	67
---	----

CONTENTS

Mathematics

ADUKOV V.M., PATRUSHEV A.A. One Case of the Generalized Three-Element Boundary Problem on the Line.....	5
AZOV D.G. Estimation of the Size of Domain of Regular Solution for a Hyperbolic Monge–Ampere equation.....	10
BARDIN A.E., SOLDATOVA N.G. Strongly Guaranteed Equilibrium in one Hierarchical Two-Level Game Under Uncertainty.....	15
ZALYAPIN V.I., TIMOFEEV Yu.S., SHISHKINA E.A. Statistical Reconstruction of the Distribution of Background Doses Based on the Results of the EPR Measurements.....	22
KATKOV M.L. Concept Extension for Concave Operator.....	28
KOVALEV Yu.M. Analysis of Invariance under Galilean Transformation of Two-Phase Mathematical Models of Heterogeneous Media.....	30
SIDIKOVA A.I., BELKOV S.I. Regular Approximation for Boundary Condition in Inverse Problem of Thermal Diagnostics.....	36
USHAKOV A.L. Iterative Factorization for Numerical Solution of Elliptic Equation of the Fourth Order in Rectangular Area.....	42

Mechanics

SAPOZHNIKOV S.B., ABDRAKHIMOV R.R., SHAKIROV A.A. Structural Strength of Polymer Composites Based on Short Glass Fiber.....	50
SAPOZHNIKOV S.B., KUDRYAVTSEV O.A., SHAKIROV A.A. Rational Choice of Finite Element Models for Modal Analysis on the Basis of the Construction of Welded Metal Frame.....	55
SHABLOVSKY O.N. Invariant Vorticity and Thermal State of the Creeping Flow of a Fluid Through a Permeable Membrane.....	59

Physics

PROKUDINA L.A. Modelling of Nonlinear Development of Perturbations in a Thin Liquid Layer at Waveformation.....	67
---	----

ОДИН ИЗ СЛУЧАЕВ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА ПРЯМОЙ

В.М. Адуков¹, А.А. Патрушев²

Предложен метод явного решения трехэлементной краевой задачи линейного сопряжения в классе кусочно-аналитических функций. Краевое условие задано на прямой. Получено решение в замкнутой форме при некотором ограничении, наложенном на коэффициент $b(t)$ задачи.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, матричная краевая задача Римана, краевая задача Маркушевича.

Рассмотрим трехэлементную задачу линейного сопряжения

$$\psi_+(t) = a(t)\psi_-(t) + \overline{b(t)\psi_-(t)} + f(t) \quad (1)$$

на вещественной прямой $\Gamma: \operatorname{Im} z = 0$. Здесь $a(t), b(t), f(t) \in H(\Gamma)$ – гельдеровские функции, $a(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, бесконечно удаленная точка включается в Γ .

Требуется найти функции $\psi_+(z), \psi_-(z)$, аналитические соответственно в верхней полуплоскости S_+ и нижней полуплоскости S_- , непрерывно продолжимые на прямую Γ , если граничные значения этих функций связаны линейным соотношением (1). Решение будем искать в классе функций, исчезающих в точке $z = -i$.

Пусть $\kappa = \operatorname{Ind}_\Gamma a(t) = \frac{1}{2\pi i} [\ln a(t)]_{-\infty}^{+\infty}$, где под $[\ln a(t)]_{-\infty}^{+\infty}$ следует понимать приращение $\ln a(t)$, когда точка t пробегает прямую Γ от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Для того, чтобы привести рассматриваемую задачу к граничной задаче для единичной окружности, рассмотренной в статье [1], применим следующее дробно-линейное преобразование:

$$z = -i \frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad \zeta = -i \frac{z - i}{z + i}. \quad (2)$$

При этом преобразовании прямая Γ плоскости z переходит в единичную окружность $L: |\tau| = 1$ плоскости ζ .

Дробно-линейное преобразование (2) конформно преобразует область S_+ во внутренность единичного круга D_+ , а область S_- – во внешность D_- ; при этом точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = -i$, а точке $\zeta = \infty$ – точке $z = -i$.

Для упрощения записи мы, следуя [5], будем обозначать функцию

$$\psi(z) = \psi \left(-i \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)$$

просто через $\psi(\zeta)$; аналогичное обозначение используется в дальнейшем для $a(t), b(t), f(t)$ и других функций.

Тогда граничное условие (1) запишется в виде:

$$\psi_+(\tau) = a(\tau)\psi_-(\tau) + \overline{b(\tau)\psi_-(\tau)} + f(\tau), \quad \tau \in L. \quad (3)$$

¹ Адуков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: vicmikhad@mail.ru

² Патрушев Алексей Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: patraleksej@yandex.ru

Математика

Наложим следующее дополнительное ограничение на коэффициент $b(t)$ краевой задачи (1): функция $b(t)$ есть граничное значение функции, мероморфной в верхней полуплоскости S_+ . Очевидно, что в этом случае функция $b(\tau)$ краевой задачи (3) будет являться краевым значением функции, мероморфной в круге D_+ .

Воспользуемся теперь результатами статьи [1]. В этой работе трехэлементная краевая задача линейного сопряжения для единичной окружности на основании аналитического продолжения

по симметрии $\varphi^*(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{-1} \overline{\varphi_-(\overline{\zeta^{-1}})}, & \zeta \in D_+, \\ \zeta^{-1} \varphi_+(\overline{\zeta^{-1}}), & \zeta \in D_-, \end{cases}$ где $\varphi_{\pm}(\tau) = \psi_{\pm}(\tau) a_{\pm}^{-1}(\tau)$, $a(\tau) = a_+(\tau) \tau^{\kappa} a_-(\tau)$,

$a_{\pm}(\zeta) = \exp B_{\pm}(\zeta)$, $B(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\kappa} a(\tau)] d\tau}{\tau - \zeta}$, сводится к матричной задаче Римана:

$$\Phi_+(\tau) = G(\tau) \Phi_-(\tau) + F(\tau), \quad \tau \in L. \quad (4)$$

Здесь

$$\Phi(\zeta) = \begin{pmatrix} \varphi(\zeta) \\ \varphi^*(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \varphi(\zeta) = \begin{cases} \varphi_+(\zeta), & \zeta \in D_+, \\ \varphi_-(\zeta), & \zeta \in D_-, \end{cases}, \quad G(\tau) = \tau^{\kappa} \begin{pmatrix} 1 - |b_1(\tau)|^2 & \tau b_1(\tau) \\ -\overline{\tau b_1(\tau)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$b_1(\tau) = b(\tau) \overline{a_-(\tau)} a_+^{-1}(\tau), \quad F(\tau) = \begin{pmatrix} f_1(\tau) - \tau^{\kappa} b_1(\tau) \overline{f_1(\tau)} \\ -\tau^{\kappa-1} \overline{f_1(\tau)} \end{pmatrix}, \quad f_1(\tau) = f(\tau) a_+^{-1}(\tau).$$

Решение задачи (4) ищется в классе симметричных, исчезающих на бесконечности вектор функций. При факторизации матрицы $G(\tau)$ используется метод существенных многочленов [2–4].

В итоге строится каноническая матрица

$$\chi(\zeta) = \begin{pmatrix} \chi_{11}(\zeta) & \chi_{12}(\zeta) \\ \chi_{21}(\zeta) & \chi_{22}(\zeta) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\chi_{11}(\zeta) = \begin{cases} [v(\zeta) - u(\zeta) \beta_+(\zeta)] R_1(\zeta) + \zeta q(\zeta) b_1(\zeta) [\alpha_+(\zeta) R_1(\zeta) + \beta_1^+(\zeta)], & \zeta \in D_+, \\ \zeta^{-\kappa} q^{-1}(\zeta) R_1(\zeta), & \zeta \in D_-, \end{cases}$$

$$\chi_{12}(\zeta) = \begin{cases} -[v(\zeta) - u(\zeta) \beta_+(\zeta)] R_2(\zeta) - \zeta q(\zeta) b_1(\zeta) [\alpha_+(\zeta) R_2(\zeta) + \beta_2^+(\zeta)], & \zeta \in D_+, \\ \zeta^{-\kappa} q^{-1}(\zeta) R_2(\zeta), & \zeta \in D_-, \end{cases}$$

$$\chi_{21}(\zeta) = \begin{cases} q(\zeta) [\alpha_+(\zeta) R_1(\zeta) + \beta_1^+(\zeta)] - u(\zeta) R_1(\zeta), & \zeta \in D_+, \\ \zeta^{-\kappa} q^{-1}(\zeta) R_1(\zeta) \beta_+(\overline{\zeta^{-1}}) - \zeta^{-\kappa} q(\zeta) [\alpha_-(\zeta) R_1(\zeta) - \beta_1^+(\zeta)], & \zeta \in D_-, \end{cases}$$

$$\chi_{22}(\zeta) = \begin{cases} -q(\zeta) [\alpha_+(\zeta) R_2(\zeta) + \beta_2^+(\zeta)] + u(\zeta) R_2(\zeta), & \zeta \in D_+, \\ -\zeta^{-\kappa} q^{-1}(\zeta) R_2(\zeta) \beta_+(\overline{\zeta^{-1}}) - \zeta^{-\kappa} q(\zeta) [\alpha_-(\zeta) R_2(\zeta) - \beta_2^+(\zeta)], & \zeta \in D_-. \end{cases}$$

Здесь $\beta_{\pm}(\zeta)$, $p(\zeta)$, $q(\zeta)$ определяются из равенства $\zeta b_1(\zeta) = \frac{p(\zeta)}{q(\zeta)} + \beta_+(\zeta)$; функции $u(\zeta)$, $v(\zeta)$

являются решением уравнения Безу $p(\zeta)u(\zeta) + q(\zeta)v(\zeta) = 1$; $R_1(\zeta)$, $R_2(\zeta)$ – существенные многочлены последовательности $\alpha_{2N-1}, \dots, \alpha_1$:

$$P_{2N-1}(\tau) R_j(\tau) = \tau^{\mu_j} \alpha_j^-(\tau) + \tau^{2N} \beta_j^+(\tau), \quad j = 1, 2, \quad P_{2N-1}(\tau) = \sum_{k=1}^{2N-1} \alpha_{2N-k} \tau^k,$$

где $\mu_1, \mu_2 = 2N - r$ – индексы последовательности, $\alpha_j^-(\tau)$ – многочлены от τ^{-1} , $\beta_j^+(\tau)$ – многочлены от τ степени не выше $\mu_j - 1$, N – число полюсов функции $\zeta b(\zeta)$ в области D_+ ,

$r = \text{rank } T_N$, $T_k = \left\| \alpha_{2N-i+j} \right\|_{\substack{i=k, \dots, 2N-1 \\ j=0, \dots, k-1}} \left(\alpha_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^{k-1} \alpha(\tau) d\tau \right)$, $1 \leq k \leq 2N - 1$, – последовательность

теплицевых матриц; $\alpha(\zeta) = \alpha_+(\zeta) + \alpha_-(\zeta) = u(\zeta) q^{-1}(\zeta) - p(\overline{\zeta^{-1}}) \left(\overline{q(\overline{\zeta^{-1}})} \right)^{-1} q^{-2}(\zeta)$.

При нахождении решения неоднородной задачи используются кусочно-аналитические функции

$$\Omega_j(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_j(\tau) d\tau}{\tau - \zeta}, \quad j=1,2,$$

$$\text{где } \omega_1(\tau) = \frac{1}{\sigma_0} \left[\chi_{22}^+(\tau) f_1(\tau) - \tau^{\kappa-1} q^{-1}(\tau) R_2(\tau) \overline{f_1(\tau)} \right], \omega_2(\tau) = -\frac{1}{\sigma_0} \left[\chi_{21}^+(\tau) f_1(\tau) - \tau^{\kappa-1} q^{-1}(\tau) R_1(\tau) \overline{f_1(\tau)} \right].$$

Вернемся теперь к переменной z по формуле $\zeta = -i \frac{z-i}{z+i}$. Результаты статьи [1] позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\kappa \leq r - N$, то однородная трехэлементная задача линейного сопряжения для полуплоскости допускает в классе исчезающих в точке $z = -i$ кусочно-аналитических функций только нулевое решение.

Если $r - N < \kappa \leq N - r$, то размерность над R пространства решений однородной задачи равна $\kappa + N - r$. Любое решение $\psi(z)$ этой задачи имеет вид

$$\psi(z) = a_1(z)\varphi(z),$$

$$a_1(z) = \begin{cases} a_+(z), & z \in S_+, \\ a_-(z), & z \in S_-, \end{cases} \quad a_{\pm}(z) = \exp B_{\pm}(z), \quad B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+i}{t+i} \cdot \frac{\ln a_0(t) dt}{t-z}, \quad a_0(t) = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{\kappa} a(t),$$

$$\varphi(z) = \pi_1(z)\chi_{11}(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z),$$

где $\pi_1(z)$ – произвольный полином относительно $\left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ с комплексными коэффициентами степени не выше $\kappa + N - r - 1$, а $\chi_{11}(z), \chi_{21}(z)$ – элементы канонической матрицы $\chi(z)$, определяемой формулой (5), в которой $\zeta = -i \frac{z-i}{z+i}$.

При $\kappa > N - r$ пространство решений однородной задачи имеет размерность 2κ , и любое решение может быть представлено в виде

$$\psi(z) = a_1(z)\varphi(z),$$

$$\varphi(z) = \pi_1(z)\chi_{11}(z) + \pi_2(z)\chi_{12}(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \pi_2^*(z)\chi_{22}^*(z).$$

Здесь $\pi_1(z), \pi_2(z)$ – произвольные полиномы относительно $\left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ с комплексными коэффициентами степени не выше $\kappa + N - r - 1, \kappa - N + r - 1$ соответственно.

Теорема 2. Неоднородная трехэлементная задача линейного сопряжения для полуплоскости имеет единственное решение при любой правой части тогда и только тогда, когда $\kappa = 0, r = N$. Это решение находится по формуле

$$\psi_0(z) = a_1(z)\varphi_0(z),$$

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} \left[\chi_{11}(z)\Omega_1(z) + \chi_{12}(z)\Omega_2(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \chi_{21}^*(z)\Omega_1^*(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \chi_{22}^*(z)\Omega_2^*(z) \right], \quad (6)$$

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z+i}{t+i} \right) \frac{\omega_j(t) dt}{t-z}, \quad j=1,2.$$

Задача имеет не более одного решения при $\kappa \leq r - N$. При $\kappa < 0$ решение существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие $2|\kappa|$ условия разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{j-1} \frac{\omega_1(t) dt}{(t+i)^2} = 0, \quad j=1,2,\dots, |\kappa + N - r|, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{j-1} \frac{\omega_2(t) dt}{(t+i)^2} = 0, \quad j=1,2,\dots, |\kappa - N + r|.$$

Единственное решение в данном случае строится по формуле (6).

Задача разрешима при любой правой части только при $\kappa \geq N - r$. Общее решение в этом случае имеет вид

$$\psi(z) = \psi_0(z) + a_1(z) \left[\pi_1(z) \chi_{11}(z) + \pi_2(z) \chi_{12}(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \pi_1^*(z) \chi_{21}^*(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \pi_2^*(z) \chi_{22}^*(z) \right],$$

где $\psi_0(z)$ определяется формулой (6), а $\pi_1(z), \pi_2(z)$ – произвольные полиномы относительно $\left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ с комплексными коэффициентами степени не выше $\kappa + N - r - 1, \kappa - N + r - 1$ соответственно.

Наконец, при $r - N < \kappa < N - r$ формула

$$\psi(z) = \psi_0(z) + a_1(z) \left[\pi_1(z) \chi_{11}(z) + \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \pi_1^*(z) \chi_{21}^*(z) \right],$$

где $\pi_1(z)$ – произвольный полином относительно $\left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ с комплексными коэффициентами степени не выше $\kappa + N - r - 1$, дает общее решение неоднородной задачи (1) при выполнении следующих $| \kappa - N + r |$ условий разрешимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{j-1} \frac{\omega_j(t) dt}{(t+i)^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, | \kappa - N + r |.$$

Литература

1. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского университета. Новая серия «Математика. Механика. Информатика». – 2011. – Т. 11. – Вып. 2. – С. 9–20.
2. Адуков, В.М. Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 54–57.
3. Adukov, V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. – 1998. – Vol. 274. – P. 85–124.
4. Адуков, В.М. Факторизация Винера-Хопфа кусочно мероморфных матриц функций / В.М. Адуков // Мат. сб. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 3–24.
5. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 542 с.

Поступила в редакцию 8 декабря 2013 г.

ONE CASE OF THE GENERALIZED THREE-ELEMENT BOUNDARY PROBLEM ON THE LINE

V.M. Adukov¹, A.A. Patrushev²

In the article an explicit method for the solution of generalized three-element boundary value problem in the class of piecewise analytic functions is given. The boundary condition of the problem is given on the straight line. The problem is solved in a closed form under certain constraints on the coefficient $b(t)$ of the problem.

Keywords: boundary problems for analytic functions, Riemann matrix boundary problem, Markushevich boundary problem.

References

1. Adukov V.M., Patrushev A.A. O yavnom i tochnom resheniyakh zadachi Markushevicha na okruzhnosti (On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle). *Izvestiya Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Mathematica. Mechanica. Informatica*. 2011. Vol. 11. Issue 2. pp. 9–20. (in Russ.).
2. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *St. Petersburg Mathematical Journal*. 1993. Vol. 4. Issue 1. pp. 51–69.
3. Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices. *Linear Algebra Appl.* 1998. Vol. 274. pp. 85–124. [http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795\(97\)00304-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(97)00304-2)
4. Adukov V.M. Faktorizatsiya Vinera–Khopfa kusochno meromorfnykh matrits funktsiy (Wiener–Hopf factorization of piecewise meromorphic matrix-valued functions). *Sbornik: Mathematics*. 2009. Vol. 200, no. 8. pp. 1105–1126. (in Russ.).
5. Mucshelischvili N.I. *Singulyarnye integralnye uravneniya* (Singular integral equations). Moscow: Nauka, 1968. 542 p. (in Russ.).

Received 8 December 2013

¹ Adukov Victor Michaylovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.

E-mail: vicmikhad@mail.ru

² Patrushev Alexey Alexeevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Differential Stochastic Equations, South Ural State University.

E-mail: patraleksej@yandex.ru

ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

Д.Г. Азов¹

Рассматривается гиперболическое уравнение Монжа–Ампера, которое имеет C^2 -регулярное решение в круге. Получены достаточные условия, при которых существует оценка для радиуса круга.

Ключевые слова: поверхности отрицательной гауссовой кривизны, уравнение Монжа–Ампера гиперболического типа, оценка области существования регулярного решения.

Пусть поверхность

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

имеет гауссову кривизну $K(x, y)$. Известно, что если

$$K(x, y) \leq -\alpha^2 < 0, \quad (2)$$

то поверхность (1) не может проектироваться на всю плоскость. Имеет место теорема Н.В. Ефимова [1]: существует $a_0 > 0$ такое, что если C^2 -гладкая функция $f(x, y)$ задана на квадрате со стороной a и ее график (1) имеет кривизну (2), то $a \leq a_0 / \alpha$. Е. Хайнц [2] получил оценку для радиуса круга, на который может проектироваться поверхность с улучшением оценки Н.В. Ефимова: существует $r_0 > 0$ такое, что если C^2 -гладкая поверхность (1) с кривизной (2) задана на круге радиуса r , то $r \leq r_0 / \alpha$. В работе [3] Н.В. Ефимов получил оценки для сторон прямоугольника, на который проектируется поверхность (1). Данные результаты были обобщены в работах [4–8].

Учитывая известную формулу

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = K(x, y) \cdot (1 + z_x^2 + z_y^2)^2, \quad (3)$$

результаты Н.В. Ефимова и Е. Хайнца можно сформулировать следующим образом: гиперболическое уравнение Монжа–Ампера (3) не имеет C^2 -гладких решений в круге радиуса $r > r_0 / \alpha$ или на квадрате со стороной $a > a_0 / \alpha$, если $K(x, y)$ удовлетворяет условию (2).

В работе [9] была доказана теорема: пусть поверхность $z = z(x, y) \in C^2$ с отрицательной кривизной $K(x, y) < 0$ определена на круге $x^2 + y^2 \leq R^2$. Если существует постоянная $C > 0$, такая,

что $\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \frac{dx dy}{|K(x, y)|} \leq Cr^m$, $0 < m < 4$, $r > 0$, то существует $R_0 > 0$, такая, что $R < R_0$. В этой тео-

реме не требуется отделенность $K(x, y)$ от нуля константой.

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = F(x, y, z, z_x, z_y). \quad (4)$$

Пусть $F(x, y, z, z_x, z_y) \leq K(x, y) \cdot (1 + z_x^2 + z_y^2)^p$, $p > 1$, $K(x, y) < 0$ – гиперболическое уравнение.

Тогда верна теорема 1. Сформулируем ее.

Теорема 1. Пусть уравнение (4) имеет C^2 -регулярное решение в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$. Если существует постоянная $C > 0$, такая, что

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \frac{dx dy}{|K(x, y)|^{\frac{1}{p-1}}} \leq Cr^m, \quad 0 < m < \frac{2p}{p-1}, \quad r > 0, \quad (5)$$

¹ Азов Дмитрий Георгиевич – доцент, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: azykl@rambler.ru

то

$$R \leq \begin{cases} (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)} + 1\right]^{\frac{2}{2-m(p-1)}}, & \text{при } m \neq \frac{2}{p-1} \\ e^{\frac{1}{p-1}} \sqrt{\frac{C}{\pi}} (p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}, & \text{при } m = \frac{2}{p-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства используем интегральную формулу С.Н. Бернштейна:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (\bar{z}_\varphi(\rho, \varphi))^2 d\varphi \right) = \int_0^{2\pi} (\bar{z}_\rho(\rho, \varphi))^2 d\varphi - 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) dx dy. \quad (7)$$

Здесь $z(x, y) \in C^2$, $\bar{z}(\rho, \varphi) = z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, ρ, φ – полярные координаты.

Введем вспомогательную функцию

$$g(r) = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} (\bar{z}_\varphi(\rho, \varphi))^2 \right) d\varphi.$$

Тогда $g(0) = 0$, $g(r) \geq \pi r^2$ и $g'(r) > 0$ при $0 < r < R$. Пусть $D(r): x^2 + y^2 \leq r^2$. Оценим $g(r)$ сверху, используя неравенство Гельдера:

$$g^p(r) \leq \left(\iint_{D(r)} (1 + z_x^2 + z_y^2) dx dy \right)^p \leq \left(\iint_{D(r)} \frac{dx dy}{|K(x, y)|^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} \iint_{D(r)} |K(x, y)| (1 + z_x^2 + z_y^2)^p dx dy. \quad (8)$$

Используя (5), (7) и (8), получаем неравенство

$$g''(r) \geq \frac{2g^p(r)}{(Cr^m)^{p-1}}. \quad (9)$$

Интегрируя неравенство (9) по $\rho \in (0, r)$, получим

$$g'(\rho) g^{\frac{-p+1}{2}}(\rho) \geq \frac{2}{\sqrt{p+1}} r^{\frac{m(p-1)}{2}} c^{\frac{1-p}{2}}.$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow r$ и интегрируя по r от R_1 до R_2 ($0 < R_1 < R_2 < R$) при

$m \neq \frac{2}{p-1}$, получаем

$$\frac{1}{p-1} (g^{\frac{1-p}{2}}(R_1) - g^{\frac{1-p}{2}}(R_2)) \geq \frac{2}{(2-m(p-1))\sqrt{p+1}} (R_2^{\frac{2-m(p-1)}{2}} - R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}}) c^{\frac{1-p}{2}}.$$

Так как $g(r) \geq \pi r^2$, то

$$\frac{1}{p-1} \pi^{\frac{1-p}{2}} R_1^{1-p} \geq \frac{2C^{\frac{1-p}{2}}}{(2-m(p-1))\sqrt{p+1}} \left(R_2^{\frac{2-m(p-1)}{2}} - R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}} \right). \quad (10)$$

Пусть $0 < m(p-1) < 2$. Устремляя в неравенстве (10) R_2 к R , получим

$$R^{\frac{2-m(p-1)}{2}} \leq \frac{2-m(p-1)}{2(p-1)} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2}} R_1^{1-p} + R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}}. \quad (11)$$

Минимальное значение правой части неравенства (11) достигается при

$$R_1 = (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}} \text{ и равно } (p+1)^{\frac{2-m(p-1)}{2(2p-m(p-1))}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{(p-1)(2-m(p-1))}{2(2p-m(p-1))}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)} + 1\right].$$

Поэтому $R^{\frac{2-m(p-1)}{2}} \leq (p+1)^{\frac{2-m(p-1)}{2(2p-m(p-1))}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{(p-1)(2-m(p-1))}{2(2p-m(p-1))}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}+1\right]$ и, следовательно,

$$R \leq (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}} \left[\frac{2-m(p-1)}{2(p-1)}+1\right]^{\frac{2}{2-m(p-1)}}. \quad (12)$$

При $2-m(p-1) < 0$ в (11) изменится знак неравенства:

$$R^{\frac{2-m(p-1)}{2}} \geq \frac{2-m(p-1)}{2(p-1)} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2}} R_1^{1-p} + R_1^{\frac{2-m(p-1)}{2}}.$$

Если $m(p-1) < 2p$, то правая часть неравенства достигает максимального значения при

$$R_1 = (p+1)^{\frac{1}{2p-m(p-1)}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2p-m(p-1)}}. \text{ Отсюда снова получим неравенство (12).}$$

При $m(p-1) = 2$ неравенство (10) будет иметь вид $\frac{1}{p-1} \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{1-p}{2}} R_1^{1-p} \sqrt{p+1} + \ln R_1 \geq \ln R_2$.

Минимальное значение левой части неравенства достигается при $R_1 = \sqrt{\frac{C}{\pi}} (p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}$ и

$\ln R \leq \frac{1}{p-1} + \ln \sqrt{\frac{C}{\pi}} (p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}$. Но тогда

$$R \leq e^{\frac{1}{p-1}} \sqrt{\frac{C}{\pi}} (p+1)^{\frac{1}{2(p-1)}}. \quad (13)$$

Оценка (13) получается из (12) предельным переходом при $m \rightarrow \frac{2}{p-1}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При $p=2$ теорема была доказана в работе [9]. Она имеет геометрический смысл: если гауссова кривизна $K(x, y)$ поверхности $z = z(x, y)$ удовлетворяет условию (5) при $p=2$, то радиус круга R , на который может однозначно проектироваться поверхность, удовлетворяет (6).

Замечание 2. Если $K(x, y) \leq -\alpha^2 < 0$, то $\iint_{D(r)} \frac{dx dy}{|K(x, y)|} \leq Cr^2$, и при $m=2$ из теоремы 1 следует результат работы [5].

Замечание 3. Если выполнено условие (2) и $p=2$, то из (13) следует оценка Е. Хайнца $R \leq \frac{e\sqrt{3}}{\alpha}$.

Замечание 4. Теорема 1 останется верной, если условие (5) выполняется при $r \geq r_0$, где r_0 – некоторая постоянная. В этом случае при доказательстве нужно рассматривать $r > r_0$. При необходимости r_0 можно уменьшить, увеличивая значение постоянной C .

Замечание 5. Если условие теоремы $0 < m(p-1) < 2p$ не выполнено, то теорема перестает быть верной. Покажем, что если $m(p-1) > 2p$, то существуют примеры уравнений, которые имеют решение в круге любого радиуса R .

Рассмотрим уравнение

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n} (1+z_x^2+z_y^2)^p.$$

$$\iint_{D(r)} \frac{dx dy}{|K(x, y)|^{\frac{1}{p-1}}} = \iint_{D(r)} (1+x^2+y^2)^{\frac{n}{p-1}} dx dy \leq Cr^{2\left(\frac{n}{p-1}+1\right)},$$

$$m(p-1) = 2n + 2(p-1), \quad 0 < m(p-1) < 2p, \quad \text{если } n < 1.$$

Следовательно, при $n < 1$ по теореме 1 радиус круга ограничен.

Пусть $n > 1$. Рассмотрим функцию $z = \int_0^r I(t) dt$, где $I(t) = \sqrt{\left(1 + (1+R^2)^{1-n} - (1-t^2)^{1-n}\right)^{\frac{1}{1-p}} - 1}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Эта функция определена в круге радиуса R и удовлетворяет уравнению

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -\frac{n-1}{p-1} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^n} (1+z_x^2+z_y^2)^p.$$

Литература

1. Ефимов, Н.В. Исследование полной поверхности отрицательной кривизны / Н.В. Ефимов. – М.: Докл. АН СССР, 1953. – 640 с.
2. Heinz, E. Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind / E. Heinz // Math. Ann. – 1955. – Vol. 129, № 5. – P. 451–454.
3. Ефимов, Н.В. Оценка размеров области регулярности решений некоторых уравнений Монжа–Ампера / Н.В. Ефимов // Математический сборник. – 1976. – Т. 100(142), № 3(7). – С. 356–363.
4. Азов, Д.Г. Об одном классе гиперболических уравнений Монжа–Ампера / Д.Г. Азов // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38, № 1. – С. 153–154.
5. Брысьев, А.Б. Оценка области регулярности решений некоторых нелинейных дифференциальных неравенств / А.Б. Брысьев // Украинский геометрический сборник. – 1985. – Вып. 28. – С. 19–21.
6. Азов, Д.Г. Изометрическое погружение n -мерных метрик в евклидовы и сферические пространства / Д.Г. Азов // Вестник Челябинского государственного университета. – 1994. – №1(2). – С. 12–17.
7. Азов, Д.Г. Погружение методом Д. Блануши некоторых классов полных n -мерных римановых метрик в евклидовы пространства / Д.Г. Азов // Вестник Московского университета. – 1985. – № 5. – С. 72–74.
8. Азов, Д.Г. Некоторые обобщения одной теоремы Н.В. Ефимова о гиперболических уравнениях Монжа–Ампера / Д.Г. Азов // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. науч. тр. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – С. 60–64.
9. Азов, Д.Г. Оценка области однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны / Д.Г. Азов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 4–7.

Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г.

ESTIMATION OF THE SIZE OF DOMAIN OF REGULAR SOLUTION FOR A HYPERBOLIC MONGE–AMPERE EQUATION

D.G. Azov¹

The article deals with a hyperbolic Monge–Ampere equation which has a C^2 -regular solution in the circle. It provides sufficient conditions for the existence of estimate for the circle radius.

Keywords: surfaces with negative Gaussian curvature, hyperbolic Monge–Ampere equation, estimate of domain of regular solution.

References

1. Efimov N.V. *Issledovanie polnoy poverkhnosti otritsatel'noy krivizny* (Analysis of total surface of negative curvature). Moscow, Dokl. AN SSSR, 1953. 640 p. (in Russ.).
2. Heinz E. Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind. *Math. Ann.* 1955. Vol. 129, no. 5. pp. 451–454.
3. Efimov N.V. *Matematicheskij sbornik*. 1976. Vol. 100(142), no. 3(7). pp. 356–363. (in Russ.).
4. Azov D.G. On a class of hyperbolic Monge–Ampere equations. *Russian Mathematical Surveys*. 1983. Vol. 38, no. 1. pp. 170–171. <http://dx.doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003390>
5. Brys'ev A.B. *Ukrainskiy geometricheskij sbornik*. 1985. Issue 28. pp. 19–21. (in Russ.).
6. Azov D.G. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta*. 1994. no. 1(2). pp. 12–17. (in Russ.).
7. Azov D.G. *Vestnik Moskovskogo universiteta*. 1985. no. 5. pp. 72–74. (in Russ.).
8. Azov D.G. *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya: sb. nauch. tr.* (Differential equations and their applications: collection of scientific papers). Moscow: MGU Publ., 1984. pp. 60–64. (in Russ.).
9. Azov D.G. Estimation of bijective projection area of a surface with negative curvature (Otsenka oblasti odnoznachnoy proektsii poverkhnosti otritsatel'noy krivizny). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 4–7. (in Russ.).

Received 4 September 2013

¹ Azov Dmitry Georgievich is Associate Professor, Department of Differential and Stochastic Equations, South Ural State University.
E-mail: azykl@rambler.ru

СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.Е. Бардин¹, Н.Г. Солдатова²

Рассмотрен новый подход к принятию решений для двухуровневой статической иерархической системы в условиях действия неопределенных факторов. Формализация оптимального решения базируется на понятиях равновесия по Нэшу, ситуационного сожаления по Сэвиджу и векторной гарантии.

Ключевые слова: иерархическая игра, равновесие по Нэшу, принцип минимаксного сожаления Сэвиджа, векторная гарантия, неопределенность.

Постановка задачи

Рассматривается модель конфликта в виде двухуровневой иерархической игры трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{C, 1, 2\}, \{U, X_i\}_{i=1,2}, Y^{U \times X}, \{f_i(u, x, y)\}_{i=C,1,2} \rangle,$$

где C – игрок верхнего уровня иерархии (Центр), числа 1, 2 – порядковые номера игроков нижнего уровня. Управляющее воздействие Центра есть $u \in U$, стратегия i -го игрока нижнего уровня есть $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2\}$. Игроки нижнего уровня независимо друг от друга выбирают свои стратегии, в результате реализуется ситуация игры (на нижнем уровне) $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$. В игре Γ каждый из трех игроков стремится достичь больших значений своей функции выигрыша $f_j(u, x, y)$, $j \in \{C, 1, 2\}$. При этом он должен учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$.

Далее наряду с «чистыми» неопределенностями $y \in Y$ будем использовать «информированные неопределенности» вида

$$y(\cdot): U \times X \rightarrow Y$$

или (в частном случае)

$$y(\cdot): X \rightarrow Y,$$

введенные академиком Н.Н. Красовским при исследовании антагонистической минимаксной позиционной дифференциальной игры [1, с. 353–354].

Перейдем к иерархической «процедуре» принятия решений в игре Γ , которая заключается в определенном порядке ходов.

Первый ход за обоими игроками нижнего уровня и Центром: они передают лицу, принимающему решения (ЛПР) и формирующему неопределенности, свои стратегии $x_i \in X_i$ ($i=1,2$), $u \in U$ (рис. 1).

Второй ход за ЛПР, аналитически конструирующем «ин-

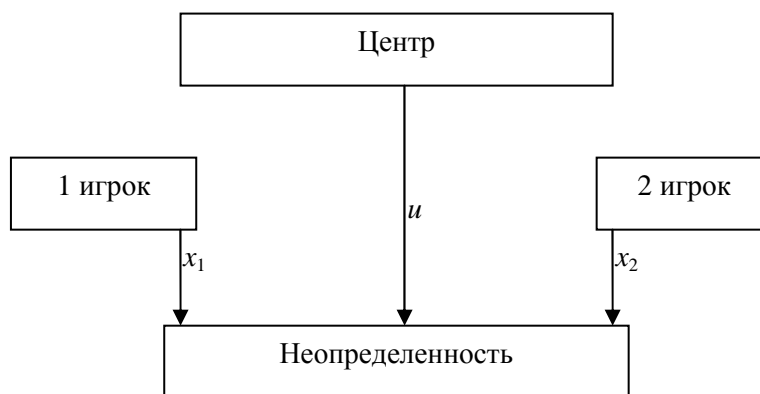


Рис. 1

¹ Бардин Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики, Московский государственный областной гуманитарный институт.

E-mail: intch2006@rambler.ru

² Солдатова Наталья Геннадьевна – старший преподаватель, кафедра математики и физики, Московский государственный областной гуманитарный институт.

E-mail: solnata@pochta.ru

формированную» неопределенность, именно он определяет функцию

$$y(\cdot): U \times X \rightarrow Y$$

согласно

$$\min_{y \in Y} f_c(u, x, y) = f_c(u, x, y(u, x)) = f_c[u, x] \quad \forall u \in U, x \in X \quad (1)$$

и передает эту функцию $y(u, x)$ Центру (рис. 2). Здесь используем подход из работ [2–4]. Далее будем предполагать, что указанная выше функция $y(u, x): U \times X \rightarrow Y$ существует и единственна.

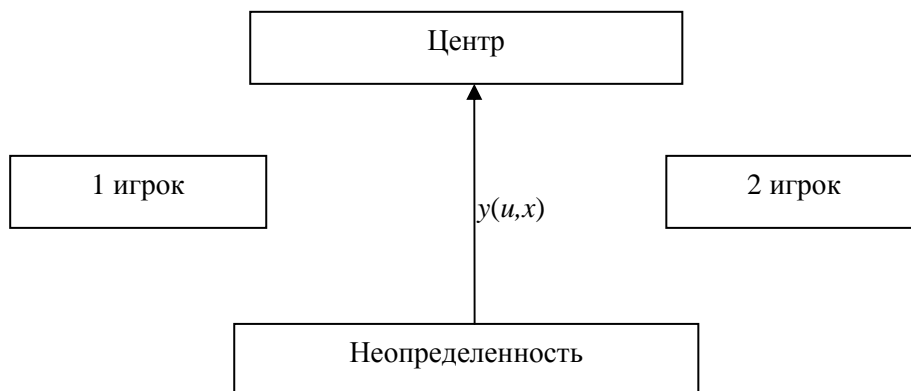


Рис. 2

Отметим, что согласно (1) для любой неопределенности $y \in Y$ имеет место неравенство

$$f_c(u, x, y) \geq f_c[u, x] \quad (2)$$

при всех $(u, x): U \times X$.

Третий ход за Центром: он формирует стратегию

$$u(\cdot): X \rightarrow U, \quad u(\cdot) \in U^X,$$

такую, что

$$\max_{u \in U} f_c(u, x, y(u, x)) = \max_{u \in U} f_c[u, x] = f_c[u(x), x] = \tilde{f}_c[x] \quad \forall x \in X \quad (3)$$

и передает эту стратегию $u(\cdot)$ обоим игрокам нижнего уровня иерархии (рис. 3). Здесь также предполагаем существование и единственность функции $y(x): X \rightarrow Y$.

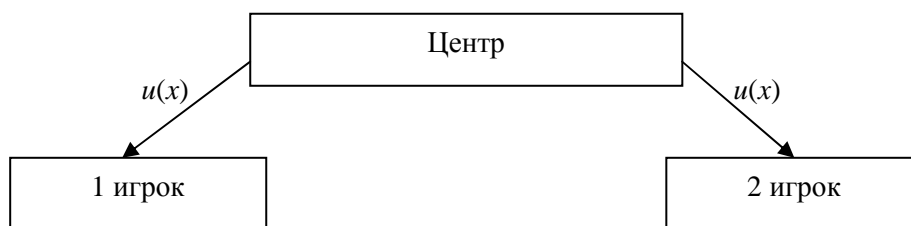


Рис. 3

Четвертый ход за игроками нижнего уровня иерархии:

во-первых, i -ый игрок ($i = 1, 2$) строит свою вспомогательную функцию

$$\tilde{f}_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(u(x), x, y) \quad (i = 1, 2); \quad (4)$$

во-вторых, по определенной в (4) функции $\tilde{f}_i[x]$ каждый игрок нижнего уровня находит так называемую функцию «сожаления» по Сэвиджу [5]

$$\begin{aligned} \Phi_1[x] &= \max_{z \in X_1} \tilde{f}_1[z, x_2] - \tilde{f}_1[x_1, x_2], \\ \Phi_2[x] &= \max_{z \in X_2} \tilde{f}_2[x_1, z] - \tilde{f}_2[x_1, x_2], \end{aligned} \quad (5)$$

значения которых каждому из игроков $i = 1, 2$ желательно получить возможно меньшими;

в-третьих, для вспомогательной бескоалиционной «игры гарантий» (без неопределенности)

$$\Gamma_G = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i \in \{1, 2\}}, \{\varphi_i(x) = \tilde{f}_i[x] - \Phi_i[x]\}_{i \in \{1, 2\}} \rangle$$

игроки нижнего уровня находят ситуацию равновесия по Нэшу [6], которая определяется равенствами

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \in X_1} \varphi_1(x_1, x_2^e) &= \varphi_1(x_1^e, x_2^e), \\ \max_{x_2 \in X_2} \varphi_2(x_1^e, x_2) &= \varphi_2(x_1^e, x_2^e). \end{aligned} \quad (6)$$

При этом снова будем предполагать, что ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ_G единственна.

Отметим, что равновесная стратегия $x_1^e \in X_1$ из (6) является максимальной по Парето в двухкритериальной задаче

$$\langle X_1, \{\tilde{f}_1[x_1, x_2^e], -\Phi_1[x_1, x_2^e]\} \rangle, \quad (7)$$

тогда увеличение исхода $\tilde{f}_1[x_1, x_2^e]$ влечет увеличение «сожаления» $\Phi_1[x_1, x_2^e]$, а уменьшение «сожаления» $\Phi_1[x_1, x_2^e]$ приводит к уменьшению исхода $\tilde{f}_1[x_1, x_2^e]$. При этом значение функции $\Phi_1[x_1, x_2^e]$ в ситуации равновесия (x_1^e, x_2^e) равно нулю, что является оптимальным (наименьшим) значением этой функции на множестве $X = X_1 \times X_2$.

Аналогичное свойство выполняется для стратегии $x_2^e \in X_2$ из равновесной ситуации (x_1^e, x_2^e) в двухкритериальной задаче

$$\langle X_2, \{\tilde{f}_2[x_1^e, x_2], -\Phi_2[x_1^e, x_2]\} \rangle. \quad (8)$$

Раскроем «гарантированный смысл» указанного в (6) равновесия $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в исходной игре Γ , именно:

с одной стороны, при известной игрокам $i \in \{1, 2\}$ функции $u(x_1, x_2)$ и любой неопределенности $y \in Y$ выполняется неравенство

$$f_i(u(x^e), x^e, y) \geq \tilde{f}_i[x^e]; \quad (9)$$

с другой, для «замороженной» Центром $u(x)$ и определенной равенством (1) функции $y(u, x)$ будет

$$f_1(u(x_1, x_2^e), x_1, x_2^e, y(u(x_1, x_2^e), x_1, x_2^e)) \leq \tilde{f}_1[x^e], \quad (10)$$

$$f_2(u(x_1^e, x_2), x_1^e, x_2, y(u(x_1^e, x_2), x_1^e, x_2)) \leq \tilde{f}_2[x^e], \quad (11)$$

для всех $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$.

Еще раз отметим, что

$$\min_{x \in X} \Phi_i[x] = \Phi_i[x^e] = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (12)$$

а нулевые и достигаемые в ситуации равновесия x^e значения функций сожаления являются наилучшими для каждого игрока $i = 1, 2$.

в-четвертых, игроки нижнего уровня «отправляют» Центру найденную равновесную (единственную) ситуацию $x^e \in X$ (рис. 4).

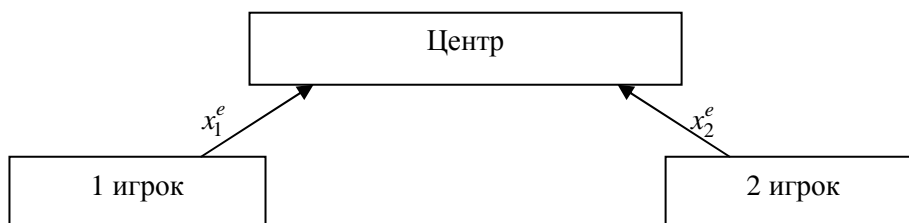


Рис. 4

Последний пятый ход состоит в нахождении Центром своей гарантии

$$\tilde{f}_c[x^e] = f_c(u(x^e), x^e, y(u(x^e), x^e)), \quad (13)$$

для нее выполнено неравенство

$$f_c(u(x^e), x^e, y) \geq \tilde{f}_c[x^e]$$

при любой неопределенности $y \in Y$.

Определение 1. Сильно гарантированным равновесием в иерархической игре при неопределенности Γ (с одним игроком верхнего уровня и двумя игроками нижнего уровня) называется набор

$$(x^e, u(\cdot), f_c^g, f_1^g, f_2^g), \quad (14)$$

где $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ – ситуация равновесия по Нэшу в игре гарантий Γ_G , $u(\cdot): X \rightarrow U$ есть функция, передаваемая Центром игрокам нижнего уровня, величины

$$f_c^g = f_c[u(x^e), x^e], f_1^g = \tilde{f}_1[x^e], f_2^g = \tilde{f}_2[x^e].$$

При этом предполагается,

во-первых, игроки верхнего и нижнего уровней, а также ЛПР, «отвечающий» за построение «информированной» неопределенности $y(\cdot)$, придерживаются процедуры принятия решений, описанной выше (см. ходы 1–5);

во-вторых, обе функции $y(\cdot)$ из равенства (1) и $y(\cdot)$, определенная условием (3), а также равновесие по Нэшу в игре Γ_G единственны.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. Ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ будет равновесной в игре Γ_G тогда и только тогда, когда x^e есть равновесие по Нэшу в игре

$$\tilde{\Gamma} = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i \in \{1, 2\}}, \{f_i[x]\}_{i \in \{1, 2\}} \rangle, \quad (15)$$

где функции выигрыша игроков заданы равенствами (4).

Линейно-квадратичная игра без ограничений (скалярный случай)

Пусть в игре Γ множества $U = X_1 = X_2 = Y = \mathbf{R}$. Скалярные функции выигрыша игроков определены ниже:

$$\begin{aligned} f_c(u, x, y) &= a_{11}u^2 + \sum_{i=1}^2 a_{22}^{(i)}x_i^2 + a_{33}y^2 + 2\sum_{i=1}^2 a_{12}^{(i)}ux_i + 2a_{13}uy + 2\sum_{i=1}^2 a_{23}^{(i)}x_i y, \\ f_i(u, x, y) &= b_{11}^{(i)}u^2 + b_{22}^{(i)}x_1^2 + b_{33}^{(i)}x_2^2 + b_{44}^{(i)}y^2 + 2b_{12}^{(i)}ux_1 + 2b_{13}^{(i)}ux_2 + 2b_{14}^{(i)}uy + \\ &+ 2b_{23}^{(i)}x_1 x_2 + 2b_{24}^{(i)}x_1 y + 2b_{34}^{(i)}x_2 y + 2b_{10}^{(i)}x_1 + 2b_{20}^{(i)}x_2, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial f_c}{\partial y} = 2a_{33}y + 2a_{13}u + 2\sum_{i=1}^2 a_{23}^{(i)}x_i = 0, \\ a_{33} > 0 \end{cases} \quad (17)$$

получаем, что

$$\min_{y \in Y} f_c(u, x, y) = f_c(u, x, y(u, x))$$

достигается при

$$y(u, x) = -a_{33}^{-1} \left(a_{13}u + \sum_{i=1}^2 a_{23}^{(i)}x_i \right).$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_c[u, x] &= f_c(u, x, y(u, x)) = a_{33}^{-1} \left[(a_{33}a_{11} - a_{13}^2)u^2 + \sum_{i=1}^2 \left(a_{33}a_{22}^{(i)} - (a_{23}^{(i)})^2 \right) x_i^2 + \right. \\ &\left. + 2\sum_{i=1}^2 \left(a_{33}a_{12}^{(i)} - a_{13}a_{23}^{(i)} \right) x_i u - 4\sum_{i \neq j} a_{23}^{(i)} a_{23}^{(j)} x_i x_j \right]. \end{aligned}$$

Из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_c}{\partial u} = 2a_{33}^{-1} \left[(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)u + \sum_{i=1}^2 (a_{12}^{(i)}a_{33} - a_{13}a_{23}^{(i)})x_i \right] = 0, \\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0 \end{cases} \quad (18)$$

получаем функцию $u(\cdot) : X \rightarrow U$, именно

$$u(x) = (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 (a_{12}^{(i)}a_{33} - a_{13}a_{23}^{(i)})x_i \right),$$

которую далее пишем в виде

$$u(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2. \quad (19)$$

С учетом последнего равенства получаем функции

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i[x, y] = f_i(u(x), x, y) = & (c_1^2 b_{11}^{(i)} + b_{22}^{(i)} + 2b_{12}^{(i)} c_1) x_1^2 + (c_2^2 b_{11}^{(i)} + b_{33}^{(i)} + 2b_{13}^{(i)} c_2) x_2^2 + 2(c_1 c_2 b_{11}^{(i)} + c_2 b_{12}^{(i)} + \\ & + c_1 b_{13}^{(i)} + b_{23}^{(i)}) x_1 x_2 + b_{44}^{(i)} y^2 + 2(b_{14}^{(i)} c_1 + b_{24}^{(i)}) x_1 y + 2(b_{14}^{(i)} c_2 + b_{34}^{(i)}) x_2 y + 2b_{10}^{(i)} x_1 + 2b_{20}^{(i)} x_2, \end{aligned}$$

которые ниже пишем в виде

$$\tilde{f}_i(x, y) = d_{11}^{(i)} x_1^2 + d_{22}^{(i)} x_2^2 + 2d_{12}^{(i)} x_1 x_2 + d_{33}^{(i)} y^2 + 2d_{13}^{(i)} x_1 y + 2d_{23}^{(i)} x_2 y + 2d_{10}^{(i)} x_1 + 2d_{20}^{(i)} x_2. \quad (20)$$

Из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_i[x, y]}{\partial y} = 2d_{33}^{(i)} y + 2d_{13}^{(i)} x_1 + 2d_{23}^{(i)} x_2 = 0, \\ d_{33}^{(i)} > 0, \quad i \in \{1, 2\} \end{cases} \quad (21)$$

имеем явный вид функций гарантированных исходов для игроков нижнего уровня

$$\tilde{f}_i[x] = \min_{y \in Y} \tilde{f}_i[x, y] = \tilde{f}_i[x, y_i(x)], \quad (22)$$

где $y_i(x) = h_1^{(i)} x_1 + h_2^{(i)} x_2$, $h_1^{(i)} = -(d_{33}^{(i)})^{-1} d_{13}^{(i)}$, $h_2^{(i)} = -(d_{33}^{(i)})^{-1} d_{23}^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$.

Таким образом

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i[x] = & \left(d_{11}^{(i)} + d_{33}^{(i)} (h_1^{(i)})^2 + 2d_{13}^{(i)} h_1^{(i)} \right) x_1^2 + \left(d_{22}^{(i)} + d_{33}^{(i)} (h_2^{(i)})^2 + 2d_{23}^{(i)} h_2^{(i)} \right) x_2^2 + 2(d_{33}^{(i)} h_1^{(i)} h_2^{(i)} + d_{12}^{(i)} + d_{13}^{(i)} h_2^{(i)} + \\ & + d_{23}^{(i)} h_1^{(i)}) x_1 x_2 + 2d_{10}^{(i)} x_1 + 2d_{20}^{(i)} x_2, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Введя новые обозначения, получаем

$$\tilde{f}_i[x] = k_{11}^{(i)} x_1^2 + k_{22}^{(i)} x_2^2 + 2k_{12}^{(i)} x_1 x_2 + 2k_{10}^{(i)} x_1 + 2k_{20}^{(i)} x_2. \quad (23)$$

Используя достаточные условия существования равновесия по Нэшу в игре

$$\tilde{\Gamma} = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i \in \{1, 2\}}, \{f_i[x]\}_{i \in \{1, 2\}} \rangle,$$

решаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1} = 2k_{11}^{(1)} x_1 + 2k_{12}^{(1)} x_2 + 2k_{10}^{(1)} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2} = 2k_{22}^{(2)} x_2 + 2k_{12}^{(2)} x_1 + 2k_{20}^{(2)} = 0, \\ k_{11}^{(1)} < 0, \quad k_{22}^{(2)} < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Равновесная ситуация x^e в игре $\tilde{\Gamma}$ представима в виде $x^e = (x_1^e, x_2^e)$, где

$$\begin{aligned} x_1^e = \Delta^{-1} \Delta_1, \quad x_2^e = \Delta^{-1} \Delta_2 \quad u \\ \Delta = k_{11}^{(1)} k_{22}^{(2)} - k_{12}^{(1)} k_{12}^{(2)} \neq 0, \quad \Delta_1 = k_{10}^{(1)} k_{22}^{(2)} - k_{12}^{(1)} k_{20}^{(2)}, \quad \Delta_2 = k_{11}^{(1)} k_{20}^{(2)} - k_{10}^{(1)} k_{12}^{(2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Как было отмечено выше, равновесная ситуация x^e в игре $\tilde{\Gamma}$ совпадает с равновесной ситуацией в игре Γ_G . Суммируя полученные результаты, получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть в игре Γ заданы множества

$$U = X_1 = X_2 = Y = \mathbf{R}.$$

Скалярные функции выигрыша игроков определены равенствами (16) и выполнены неравенства

$$a_{33} > 0, a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0, d_{33}^{(i)} > 0, k_{ii}^{(i)} < 0, i \in \{1, 2\},$$

а также

$$\Delta = k_{11}^{(1)}k_{22}^{(2)} - k_{12}^{(1)}k_{12}^{(2)} \neq 0,$$

где величины $d_{33}^{(i)}, k_{ii}^{(i)}, i \in \{1, 2\}$ определены условиями (19)–(24).

Тогда в игре Γ существует равновесно-сильно-гарантированное решение, явный вид которого представлен в (25).

Указанная в теореме система условий будет совместной, если, например, $a_{11} = a_{33} = a_{12}^{(i)} = 1$, $a_{13} = \sqrt{2}$, $a_{23}^{(i)} = 0$, $b_{11}^{(i)} = b_{44}^{(i)} = 1$, $b_{22}^{(i)} = b_{33}^{(i)} = -1$, $b_{12}^{(i)} = b_{13}^{(i)} = -\frac{1}{2}$, $b_{14}^{(i)} = b_{24}^{(i)} = b_{34}^{(i)} = \frac{1}{2}$, $b_{23}^{(i)} = 2$.

Заключение

В работе рассмотрен один из подходов к проблеме формализации риска в игровых моделях иерархических структур, который основан на принципе минимаксного сожаления по Сэвиджу. Для иерархической игры в условиях действия неконтролируемых факторов (неопределенностей) можно предложить другие способы моделирования риска игроков верхнего и нижнего уровней, используя модификации различных принципов принятия оптимальных решений из теории задач при неопределенности [2–4].

Литература

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
2. Жуковский, В.И. Риски при конфликтных ситуациях / В.И. Жуковский. – М.: URSS, ЛЕНАНД, 2011. – 328 с.
3. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов и приложения / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев. – М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012. – 304 с.
4. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 3–45.
5. Savage, L.Y. The theory of statistical decision / L.Y. Savage // J. American Statistic Association. – 1951. – № 46. – P. 55–67.
6. Nash, J.F. Non-cooperative games / J.F. Nash // Ann. Math. – 1951. – Vol. 54. – P. 289–295.

Поступила в редакцию 5 ноября 2013 г.

STRONGLY GUARANTEED EQUILIBRIUM IN ONE HIERARCHICAL TWO-LEVEL GAME UNDER UNCERTAINTY

A.E. Bardin¹, N.G. Soldatova²

In the article new approach to decision-making for two-level static hierarchical system under uncertain factors is considered. Formalization of the optimum solution is based on the concepts of Nash equilibrium, situational Savage regret and a vector guarantee.

Keywords: hierarchical game, Nash equilibrium, principle of Savage minimax regret, vector guarantee, uncertainty.

References

1. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games). Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p. (in Russ.).
2. Zhukovskiy V.I. *Riski pri konfliktnykh situatsiyakh* (Risks at conflicts). Moscow, URSS, LENAND Publ., 2011. 328 p.
3. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. *Uravnoveshivanie konfliktov i prilozheniya* (Equilibration of conflicts and application). Moscow, URSS, LENAND Publ., 2012. 304 p. (in Russ.).
4. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya*. 2013. Vol. 5. no. 2. pp. 3–45. (in Russ.).
5. Savage L.Y. The theory of statistical decision. *J. American Statistic Association*. 1951. no. 46. pp. 55–67.
6. Nash J.F. Non-cooperative games. *Ann. Math.* 1951. Vol. 54. pp. 289–295.

Received 5 November 2013

¹ Bardin Aleksandr Evgenievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Informatics, Moscow State Regional Institute of Humanities.

E-mail: intch2006@rambler.ru

² Soldatova Natalya Gennadevna is Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities.

E-mail: solnata@pochta.ru

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОНОВЫХ ДОЗ ОБЛУЧЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭПР ИЗМЕРЕНИЙ¹

В.И. Заляпин², Ю.С. Тимофеев³, Е.А. Шишкина⁴

Предложен и реализован алгоритм извлечения характеристик распределения фоновых доз из «зашумленных» результатов измерений для различных методов ЭПР с помощью статистического метода моментов. Получены оценки основных параметров распределения фоновых доз, изучена их точность и надежность.

Ключевые слова: ЭПР измерения, радиационный фон, реконструкция.

Введение

Метод электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) дозиметрии позволяет оценить суммарную поглощенную дозу радиации в эмали зубов, накопленную за время жизни донора (до момента экстракции зуба), включая воздействие как антропогенных, так и естественных источников излучения.

С точки зрения радиобиологических и эпидемиологических исследований последствий техногенных инцидентов, интерес представляет *надфоновая* компонента суммарной накопленной дозы индивидов, оценка которой требует корректного удаления фона⁵ из суммарной дозы.

Однако уровни фоновых ЭПР-доз в разных популяциях могут сильно различаться, так как они зависят от радиационного фона конкретной местности, стиля жизни, типичного для населения региона, а также от индивидуальной вариабельности радиационной чувствительности эмали зубов в популяции [1].

Задача идентификации фона осложняется еще и тем, что фоновые уровни близки к пределу детектирования ЭПР дозиметрии, поэтому неопределенность каждого отдельного измерения может быть сопоставима с индивидуальной вариабельностью доз в популяции. В результате распределение *результатов* измерений отличается от распределения *фоновых доз*. Дополнительную трудность создают различия в точности ЭПР измерений, обусловленные различными измерительными методиками, применяемыми для экспериментальных наблюдений. На сегодняшний день для метода ЭПР дозиметрии не существует единого метрологического стандарта и, таким образом, результаты измерений могут включать не только стохастическую погрешность, но и неизвестную систематическую ошибку.

Исходные данные

В результате многолетних исследований [2] в разные годы были выполнены измерения фоновых доз сельских жителей Южного Урала, не подвергавшихся радиоактивному загрязнению (помимо глобальных выпадений) и не проживавших в радиационно загрязненных районах. Измерения проводились тремя лабораториями: ИФМ (Екатеринбург, Россия), НМГУ (Мюнхен, Германия) и ISS (Рим, Италия) с использованием различных методик обработки наблюдений. В результате тщательного анализа было выделено шесть модификаций метода ЭПР дозиметрии: три из них соответствуют комбинациям метода приготовления и калибровки в ИФМ, два – вариантам

¹ Работа выполнена в рамках Проекта 1.1 Российско-Американского объединенного координационного комитета по изучению последствий радиационных воздействий «Дальнейшее изучение неопределенности и валидация доз в дозиметрической системе реки Теча». А также частично при финансовой поддержке Федерального Медико-Биологического Агентства РФ и Европейского Союза (Проект SOLO Fission-2009-3.1.2 "Эпидемиологические исследования населения Южного Урала, подвергнувшегося радиационному облучению").

² Заляпин Владимир Ильич – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: vzal@susu.ac.ru

³ Тимофеев Юрий Сергеевич – научный сотрудник, ООО «Прикладные технологии».

⁴ Шишкина Елена Анатольевна – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник, Уральский научно-практический центр радиационной медицины.

⁵ Под фоновой компонентой в этой работе понимается доза, сформированная в основном естественными источниками излучения, такими, как, например, естественное излучение окружающей среды, космическое излучение, излучение медицинского оборудования и пр.

калибровки в НМГУ и один – методу ISS. Возрастные, этнические и гендерные характеристики каждой из 6 групп образцов, измеренных каждым из методов, практически не отличаются. Средний возраст доноров составляет 62 года.

Постановка задачи

Пусть, $\hat{D}_1^j, \hat{D}_2^j, \dots, \hat{D}_{n_j}^j$ – измерения, полученные j -ым методом, $j=1, 2, \dots, k$, в аддитивной относительно ошибки измерений модели

$$\hat{D} = D + E \quad (1)$$

Здесь: \hat{D} – измеренное значение фоновой дозы, D – измеряемое значение фоновой дозы, E – ошибка измерений. В дальнейшем предполагается, что распределение фоновых доз логнормально [3] с параметрами m, s : $D = \log N[m; s]$, ошибка измерений E имеет нормальное распределение со средним, зависящим от смещения C_j метода, и дисперсией, определяемой измеряемым фоном, так, что:

$$\hat{D}^j = \text{Log}N[m, s] + N[C_j, g_j(D)], \quad j=1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Функции $g_j(D)$ определяются принятой методикой измерений и находятся для разных методов с помощью алгоритма «Performance of EPR dosimetry», разработанного авторами.

Как легко усмотреть из принятой модели (1)–(2), в рамках каждого из методов измерений модель полностью определяется совокупностью трех параметров m, s, C_j .

Требуется по имеющимся измерениям идентифицировать параметры m, s, C_j модели (2) и оценить точность и надежность идентификации.

Идентификация параметров модели

Идентификация параметров модели (1)–(2) в рамках каждой из методик измерений осуществлялась методом моментов. Идея этого метода, предложенного К. Пирсоном в начале XX века, заключается в замене истинных моментов распределения правой части соотношения (2) их выборочными аналогами, полученными с использованием экспериментальных данных \hat{D}_i^j , что приводит к следующей системе уравнений относительно неизвестных параметров m, s, C_j :

$$\{M_i(m, s, C_j) = \hat{M}_i, i=1, 2, 3, j=1, 2, \dots, k.\}$$

Здесь M_i – теоретический начальный момент случайной величины \hat{D}^j порядка i , \hat{M}_i – его эмпирический аналог.

Несложные выкладки дают:

$$M_1 = MD + C_j, \quad M_2 = MD^2 + 2C_j MD + C_j^2 + \int_0^\infty g_j^2(t) f_\eta(t) dt,$$

$$M_3 = MD^3 + 3C_j MD^2 + 3C_j^2 MD + C_j^3 + 3C_j \int_0^\infty g_j^2(t) f_\eta(t) dt + 3 \int_0^\infty t g_j^2(t) f_\eta(t) dt.$$

Учитывая, что

$$M[D^p] = e^{pm + \frac{p^2 s^2}{2}}, \quad p=1, 2, 3,$$

и полагая

$$d_i^2(m, \sigma) = \int_0^\infty g_j^2(t) f_D(t) dt \quad d_{1j}^2(m, \sigma) = \int_0^\infty t g_j^2(t) f_D(t) dt,$$

где

$$f_D(t) = \frac{1}{ts\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2s^2}}, \quad t > 0,$$

окончательно приходим к системе (3) трех уравнений относительно параметров m, s, C .

Система (3) решалась численно модифицированным итерационным методом Ньютона [4].

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{m+s^2}{2}} + C_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \hat{D}_i^j \\ e^{2m+2s^2} + C_j^2 + d_j^2(m, \sigma) + 2C_j e^{m+\frac{s^2}{2}} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (\hat{D}_i^j)^2 \\ e^{3m+\frac{9s^2}{2}} + C_j^3 + 3C_j^2 e^{m+\frac{s^2}{2}} + 3C_j e^{2m+2s^2} + 3C_j d_j^2(m, \sigma) + 3d_{1j}^2(m, \sigma) = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (\hat{D}_i^j)^3 \end{array} \right. \quad (3)$$

Усреднение параметров модели

Пусть решение системы (3) при фиксированном значении j дается величинами $\hat{m}_j, \hat{s}_j, \hat{C}_j, j=1, 2, \dots, k$. Заметим, что в силу принятых допущений параметры m, s не зависят от метода обработки, используемого той или иной лабораторией, и должны быть одними и теми же для любых значений $j=1, 2, \dots, k$.

Будем искать оценку этих параметров в классе линейных оценок с наименьшим рассеянием, т.е. положим¹

$$\left\{ \begin{array}{l} m \approx \hat{m} = \sum_j w_j \hat{m}_j, \quad s^2 \approx \hat{s}^2 = \sum_j v_j \hat{s}_j^2, \\ \sum_j w_j = \sum_j v_j = 1, \quad V(\hat{m}) \rightarrow \min, \quad V(\hat{s}^2) \rightarrow \min \end{array} \right. \quad (4)$$

Задача (4) имеет единственное решение, даваемое соотношениями

$$\hat{m} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{V(\hat{m}_i)}} \sum_j \frac{\hat{m}_j}{V(\hat{m}_j)}, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{V(\hat{s}_i^2)}} \sum_j \frac{\hat{s}_j^2}{V(\hat{s}_j^2)} \quad (5)$$

которое и было нами принято в качестве оценок параметров распределения фоновых доз.

Точность и надежность оценивания параметров модели.

Отметим, что вариабельность оценок найденных параметров складывается из вариабельности, порожденной численными процедурами решения системы (3), с одной стороны, и вариабельности, вносимой в оценки случайным характером правых частей системы (3), с другой.

Пусть m_j^0, s_j^0, C_j^0 – некоторое начальное приближение² к отыскиваемому решению. Подставляя эти значения в левые части системы (3), найдем точные значения правых частей, отвечающие этому приближению, и, таким образом, получим эталонную систему уравнений, точное решение которой (m_j^0, s_j^0, C_j^0) нам известно. Применяя к эталонной системе численный метод решения системы, получим численное решение $m_j^{num}, s_j^{num}, C_j^{num}$, сравнение которого с известным точным дает нам информацию о точности метода.

Например, можно полагать, что

$$\Delta_M m_j \leq |m_j^{num} - m_j^0|, \quad \Delta_M s_j \leq |s_j^{num} - s_j^0|, \quad \Delta_M C_j \leq |C_j^{num} - C_j^0|.$$

Далее, возмутим правую часть эталонной системы некоторым возмущением $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ и обозначим её численное решение $m_{j,\varepsilon}^{num}, s_{j,\varepsilon}^{num}, C_{j,\varepsilon}^{num}$. Точность численного решения возмущенной системы можно оценить сравнением численных решений эталонной и возмущенной систем. Например, можно считать, что:

¹ В соотношениях (4)–(5) $V(\xi)$ – дисперсия величины ξ .

² В качестве такого приближения было взято решение системы (3), полученное численно.

$$\Delta_{\varepsilon} m_j \leq |m_j^{num} - m_{j,\varepsilon}^{num}|, \quad \Delta_{\varepsilon} s_j \leq |s_j^{num} - s_{j,\varepsilon}^{num}|, \quad \Delta_{\varepsilon} C_j \leq |C_j^{num} - C_{j,\varepsilon}^{num}|.$$

Выше уже было отмечено, что этих соображений недостаточно для изучения вариабельности параметров модели (1)–(2), поскольку они не учитывают изменчивости, порожденной случайностью результатов эксперимента \hat{D}_i^j , и, соответственно, сопутствующим этой случайности рассеянием $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ правых частей системы (3).

В силу центральной предельной теоремы (например [5]), в первом приближении можно считать, что компоненты правых частей системы (3) совместно нормальны со средними $\{M_1, M_2, M_3\}$ и ковариационной матрицей

$$K = \|k_{ij}\|_{i,j=1,2,3}, \quad k_{ij} = M(\hat{M}_i - M_i)(\hat{M}_j - M_j) = M\varepsilon_i\varepsilon_j,$$

элементы которой можно оценить по экспериментальным данным \hat{D}_i^j :

$$k_{ij} = M \left(\frac{1}{n} \sum_s (\hat{D}_s^i - M_i) \cdot \frac{1}{n} \sum_l (\hat{D}_l^j - M_j) \right) = \frac{1}{n} (M_{i+j} - M_i \cdot M_j).$$

Величины M_q естественно оцениваются как \hat{M}_q .

Пусть $E_R^\varepsilon = \{\varepsilon^T K^{-1} \varepsilon \leq R^2\}$ – эллипсоид рассеяния возмущений ε радиуса R , отвечающий надежности $0 \ll p < 1$.

Надежность и радиус эллипсоида связаны соотношением

$$P\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in E_R^\varepsilon\} \geq p, \quad (6)$$

$$P\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in E_R^\varepsilon\} = 2 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^R r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr \geq p,$$

которое позволяет отыскивать радиус R эллипсоида, в котором с надежностью p заключено рассеяние правых частей системы:

$$\sqrt{2\pi} \cdot \Phi(R) = \frac{p}{4\pi} + R \cdot e^{-\frac{R^2}{2}}, \quad \Phi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} dr. \quad (7)$$

Изменчивость параметров модели

Известно (например [5]), что решения системы метода моментов, являясь статистиками первого типа, состоятельны и асимптотически совместно нормальны. Обозначим для сокращения записи эти решения через¹ U_j :

$$U_j = (\hat{m}_j, \hat{s}_j, \hat{C}_j)^T, \quad \Delta U_j = (\hat{m}_j - m_j, \hat{s}_j - s_j, \hat{C}_j - C_j)^T.$$

Тогда, в первом приближении, имеет место равенство

$$\frac{\partial M}{\partial U} \cdot \Delta U_j = \Delta \hat{M} = \varepsilon.$$

Здесь $\frac{\partial M}{\partial U}$ – матрица производных левых частей системы (3).

Если ε – вектор возмущений правых частей системы – лежит в эллипсоиде рассеяния E_R^ε , то в первом приближении вектор погрешностей решения этой системы – в эллипсоиде E_R^U , который дается соотношением

$$E_R^U = \{\Delta U_j : \Delta U_j^T \cdot K_U^{-1} \cdot \Delta U_j \leq R^2\},$$

где матрица

¹ В дальнейшем все векторы – матрицы-столбцы, а операция умножения – обычное матричное умножение, значок Т в показателе – знак транспонирования. Таким образом $(a_1, a_2, a_3)^T$ – столбец.

$$K_U = \left(\frac{\partial M}{\partial U} \right)^{-1} \cdot K \cdot \left(\left(\frac{\partial M}{\partial U} \right)^T \right)^{-1} \quad (8)$$

– ковариационная матрица вектора погрешностей решений системы (3). При этом, очевидно, имеет место тождество $P\{\varepsilon \in E_R^\varepsilon\} = P\{\Delta U_j \in E_R^U\}$. Из этого тождества заключаем, что рассеяние правых частей системы (3) в эллипсоиде $E_R^\varepsilon = \{\varepsilon^T K^{-1} \varepsilon \leq R^2\}$ с надежностью p обеспечивает рассеяние погрешностей решения этой системы в эллипсоиде

$$E_R^U = \{\Delta U_j : \Delta U_j^T \cdot K_U^{-1} \cdot \Delta U_j \leq R^2\}.$$

Одновременно, соотношение (8) дает возможность найти веса $V(m_j)$ и $V(s_j^2)$ для формулы усреднения (5) и оценить точность определения смещения C_j метода измерений.

Результаты

В таблице приведены результаты расчетов индивидуальных значений параметров $\hat{m}_j, \hat{s}_j, \hat{C}_j$ и усредняющие веса. Взвешенное решение при этом оказывается равным $m = 4,44, s = 0,5$, откуда средняя фоновая доза для жителей Челябинской области, накапливаемая за 62 года жизни, оценивается величиной $M(D) = 96,073$ мГр.

Индивидуальные решения системы

Метод	m	s	C	w	v
IMP (2001-2002)	4,68	0,53	32	0,159	0,036
IMP (2003)	5,36	0,18	-160	0,022	0,011
GSF (after 2003)	4,94	0,39	-38	0,587	0,728
GSF (before 2003)	2,93	0,87	20	0,232	0,225

Иными словами, мощность фоновой дозы в эмали зубов для сельских жителей Южного Урала составляет 1.5 мГр/год.

Полученная модель фоновых доз будет использована в качестве референтного образца для оценки систематических ошибок для разных методик ЭПР дозиметрии с целью гармонизации экспериментальных данных и их совместного анализа.

Литература

1. Вариабельность радиационной чувствительности эмали зубов / Е.А. Шишкина, Е.И. Толстых, М.О. Дегтева и др. // Аппаратура и новости радиационных измерений. – 2012. – № 2(69). – С. 41–50.
2. Harmonization of dosimetric information obtained by different EPR methods: Experience of the Techa river study / A. Volchkova, E.A. Shishkina, D. Ivanov *et al.* // Radiation Measurements. – 2011. – Vol. 46. – Issue 9. – P. 801–807.
3. Shishkina, E.A. EPR dosimetry of radiation background in the Urals region / E.A. Shishkina, P. Fattibene, A. Wieser *et al.* // In Proceedings of Second European IRPA congress on radiation protection - Radiation protection: from knowledge to action. – 2006. – CD, № TA-33. – P. 12.
4. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. Боровков, А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков – М.: Наука, 1984. – 472 с.

Поступила в редакцию 12 января 2014 г.

STATISTICAL RECONSTRUCTION OF THE DISTRIBUTION OF BACKGROUND DOSES BASED ON THE RESULTS OF THE EPR MEASUREMENTS

V.I. Zalyapin¹, Yu.S. Timofeev², E.A. Shishkina³

Proposed and implemented algorithm to extract the characteristics of the distribution of background doses of "noisy" measurements for different EPR methods using the statistical method of moments. There were obtained estimates of the main parameters of the distribution of background doses. Studied the accuracy and reliability of the estimates.

Keywords: EPR measurements, the background radiation, reconstruction.

References

1. Shishkina E.A., Tolstykh E.I., Degteva M.O., Ivanov D.V., Aladova E.E. Variabel'nost' radiatsionnoy chuvstvitel'nosti emali zubov (Variability of the Radiation Sensitivity for Tooth Enamel of the Ural Residents). *Apparatura i novosti radiatsionnykh izmereniy* (Radiation control equipment and news). 2012. no. 2(69). pp. 41–50. (in Russ.).
2. Volchkova A., Shishkina E.A., Ivanov D., Timofeev Yu., Fattibene P., Della Monaca S., Wieser A., Degteva M.O. Harmonization of dosimetric information obtained by different EPR methods: Experience of the Techa river study. *Radiation Measurements*. 2011. Vol. 46. Issue 9. pp. 801–807. <http://dx.doi.org/10.1016/j.radmeas.2011.03.036>
3. Shishkina E.A., Fattibene P., Wieser A., Degteva M.O., Onori S., Ivanov D.V., Shved V.A., Bayankin S.N., Knyazev V.A., Vasilenko E.K., Gorelov M. EPR dosimetry of radiation background in the Urals region. *Proceedings of Second European IRPA congress on radiation protection – Radiation protection: from knowledge to action*. 2006. CD, № TA-33. p. 12.
4. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* (Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1977. 744 p. (in Russ.).
5. Borovkov A.A. *Matematicheskaya statistika* (Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1984. 472 p. (in Russ.).

Received 12 January 2014

¹ Zalyapin Vladimir Illich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical and Functional analysis Department, South Ural State University.

E-mail: vzal@susu.ac.ru

² Timofeev Yuriy Sergeevich is Researcher, Applied Technologies, Ltd.

³ Shishkina Elena Anatol'evna is Cand. Sc. (Biology), Senior Staff Scientist, Ural Research Center for Radiation Medicine.

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВОГНУТОГО ОПЕРАТОРА

*М.Л. Катков*¹

М.А. Красносельским был рассмотрен класс монотонных вогнутых операторов. Существенным развитием этой теории явилось определение В.И. Опойцевым понятия гетеротонности. В настоящей работе доказывается сходимость к неподвижной точке итераций для положительного оператора без предположения монотонности при существенном расширении понятия вогнутости.

Ключевые слова: положительный оператор, монотонный оператор, вогнутый оператор, гетеротонный оператор.

Введение

Пусть X – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K , $K(u_0)$ – компонента, порожденная элементом $u_0 \in K$ (см. [1]).

Определение метрики Биркгофа

$$\rho(x; y) = \min \left\{ \alpha : e^{-\alpha} x \leq y \leq e^{\alpha} x; \quad x, y \in K(u_0); \quad \alpha \geq 0 \right\}.$$

Определение u_0 -сжатия. Положительный оператор T , действующий в X , будем называть u_0 -сжатием, если он удовлетворяет двум условиям:

1. Для любого $x \in K(u_0)$ $Tx \in K(u_0)$;

2. Для любого $x \in K(u_0)$ существует $q = q(x, t)$, такое, что $0 < q(x, t) < 1$, при котором из неравенств $e^{-t} x \leq y \leq e^t x$ следуют неравенства $e^{-qt} Tx \leq Ty \leq e^{qt} Tx$.

Отметим, что u_0 -вогнутый монотонный оператор является u_0 -сжатием.

Теорема. Пусть оператор является T u_0 -сжатием и имеет неподвижную точку $x_* \in K(u_0)$. Тогда для любого $y_0 \in K(u_0)$ последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = Ty_{n-1}$, сходится к x_* по метрике ρ .

Доказательство. Пусть $t_n = \rho(y_n, x_*)$. Последовательность $\{t_n\}$ не возрастает.

Предположим, что

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \neq 0.$$

Рассмотрим шар с центром в точке x_* радиуса t . Оператором T этот шар отображается в шар с центром в точке x_* радиуса $q(x_*, t)t$, так как для любого y из неравенств $e^{-t} x_* \leq y \leq e^t x_*$ следуют неравенства $e^{-qt} x_* \leq Ty \leq e^{qt} x_*$.

Пусть $\varepsilon = t - qt$. Положим $z = \alpha x_* + \beta y_n$, где $\alpha + \beta = 1$; $\alpha > 0$; $\beta > 0$. Очевидно, что n и β можно выбрать таким образом, чтобы $\rho(x_*, z) \leq t$ и $\rho(z, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Для этого достаточно, чтобы n

удовлетворяло неравенству $e^m < e^t + e^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1$, а β принадлежало интервалу

$$\left(\frac{e^m - e^{\frac{\varepsilon}{2}}}{e^m - 1}; \frac{e^t - 1}{e^m - 1} \right).$$

Получаем противоречие

¹ Катков Михаил Львович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: katkovml@yandex.ru

$$t \leq \rho(x_*, y_{n+1}) \leq \rho(x_*, Tx) + \rho(Tz; Ty_n) \leq qt + \frac{\varepsilon}{2};$$

или

$$t \leq t - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.

Утверждение доказано.

Литература

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

2. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов / В.И. Опойцев // Труды Московского математического общества. – 1978. – Т. 36. – С. 237–380.

Поступила в редакцию 24 декабря 2013 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 28–29*

CONCEPT EXTENSION FOR CONCAVE OPERATOR

M.L. Katkov¹

The class of monotone concave operators is considered by M.A. Krasnosel'sky. Significant development of this theory starts with V.I. Opoytsev's definition of heterotone. In this paper we prove the convergence to the fixed point for a positive operator's iterations without hypothesis about monotonicity with a significant extension of the idea of concavity.

Keywords: positive operator, monotone operator, concave operator, heterotone operator.

References

1. Krasnosel'skiy M.A., Zabreyko P.P. *Geometricheskie metody nelineynogo analiza* (Geometrical methods of nonlinear analysis). Moscow, Nauka Publ., 1975. 512 p. (in Russ.).

2. Opoytsev V.I. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. 1978. Vol. 36. pp. 237–380. (in Russ.).

Received 24 December 2013

¹ Katkov Mikhail Lvovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics) Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.

E-mail: katkovml@yandex.ru

АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ ДВУХФАЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД¹

Ю.М. Ковалев²

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели, описывающей переход горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ - твердые частицы. Было показано, что уравнение сохранения полной энергии смеси не является инвариантным относительно преобразования Галилея. Следовательно, данная модель не может быть использована при анализе перехода конвективного горения твердого унитарного топлива во взрыв.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь.

Введение

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов.

В настоящее время на практике ослабление УВ в газе осуществляется путем применения различных экранирующих систем в виде сплошных, перфорированных и разрушающихся перемычек. Один из основных недостатков сплошных и перфорированных перемычек состоит в их весьма большой материалоемкости и, соответственно, большой величине объемного содержания α твердого конденсированного вещества ($\alpha \approx 1 \div 0,1$). Указанный недостаток в меньшей степени относится к перемычкам, разрушающимся при взаимодействии с УВ и образующим экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей [1]. Поэтому с особой остротой встает проблема разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], адекватных тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [3, 4]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу [5, 6].

В настоящей статье на примере анализа инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели аэровзвеси [7], применяемой для математического моделирования перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, покажем, к чему может привести ситуация, когда расчеты и эксперимент проведены в разных системах координат.

Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим математическую модель течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [7], и проведем оценку ее на инвариантности относительно преобразования Галилея.

Система уравнений сохранения двухфазной аэровзвеси [7] имеет следующий вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = J, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = -J, \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13-01-00072.

² Ковалёв Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: yum_kov@mail.ru

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -f + J v_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = f - J v_2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = \begin{cases} q, T_2 < T_S \\ J e_2, T_2 \geq T_S \end{cases}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) p]}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$e_1 = c_p (T_1 - T_0) - \frac{p}{\rho_1^\circ}, \quad p = \frac{\rho_1^\circ R_1 T_1}{1 - \beta \rho_1^\circ}, \quad (8)$$

$$e_2 = c_2 (T_2 - T_0) + Q^\circ - \frac{p}{\rho_2^\circ}, \quad E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2}, \quad (9)$$

$$\rho_1 = \rho_1^\circ \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ \alpha_2, \quad \rho_2^\circ = \text{const}, \quad (10)$$

$$q = \pi n d \lambda_1 Nu (T_1 - T_2), \quad (11)$$

$$f = \pi n d^2 \rho_1^\circ C_d (v_1 - v_2) |v_1 - v_2| / 8, \quad (12)$$

$$J = \pi n d^2 \rho_2^\circ u_s \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\varphi. \quad (13)$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; ρ_i°, α_i ($i=1, 2$) – истинные плотности и объемные содержания фаз; $\rho_i, v_i, T_i, e_i, E_i$ – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i -ой фазы; Q° – теплота химической реакции при $T_2 = T_0, p = p_0$; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси; β – коволюм; c_p и c_2 – теплоемкости фаз; λ_1 – теплопроводность газовой фазы; R_1 – универсальная газовая постоянная; C_d и Nu – коэффициент трения и число Нуссельта, определяемые числами Рейнольдса (Re) и Прандтля (Pr) относительного движения фаз; d – диаметр частиц, u_s и φ – эмпирические константы, характеризующие скорость горения топлива. Уравнения (1)–(3) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (4)–(5) – уравнения импульса газа и частиц; (6)–(9) – уравнения энергии частиц и смеси в целом; (8)–(10) – уравнения состояния; (11)–(13) – уравнения, определяющие члены теплового (q), силового (f) и массового (J) взаимодействия между фазами соответственно. Запишем исходную систему уравнений в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D . Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1n} = v_1 + D, \quad (14)$$

$$v_{2n} = v_2 + D, \quad (15)$$

Координата будет определяться из уравнения:

$$x_n = x + D t, \quad (16)$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) D. \quad (18)$$

Таким образом, уравнение (1) с учетом (14)–(18) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_H} D + \frac{\partial \rho_1 (v_{1H} - D)}{\partial x_H} = J,$$

или

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_H} D + \frac{\partial \rho_1 v_{1H}}{\partial x_H} - \frac{\partial \rho_1 D}{\partial x_H} = J.$$

Получаем:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H}}{\partial x_H} = J. \quad (19)$$

Аналогично, уравнения (2) и (3) с учетом (14)–(18) принимают вид:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2H}}{\partial x_H} = -J, \quad (20)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_{2H}}{\partial x_H} = 0. \quad (21)$$

Запишем уравнение (4) в новой системе координат:

$$\frac{\partial \rho_1 (v_{1H} - D)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 (v_{1H} - D)}{\partial x_H} D + \frac{\partial \rho_1 (v_{1H} - D)^2}{\partial x_H} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_H} = -f + J(v_{2H} - D),$$

или

$$\frac{\partial \rho_1 v_{1H}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_1 D}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H} D}{\partial x_H} - \frac{\partial \rho_1 D^2}{\partial x_H} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H}^2}{\partial x_H} - 2 \frac{\partial \rho_1 v_{1H} D}{\partial x_H} + \frac{\partial \rho_1 D^2}{\partial x_H} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_H} = -f + J(v_{2H} - D).$$

Используя (19) получаем:

$$\frac{\partial \rho_1 v_{1H}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H}^2}{\partial x_H} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_H} = -f + J v_{2H}. \quad (22)$$

Аналогично, получается уравнение (5) с учетом (20):

$$\frac{\partial \rho_1 v_{2H}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2H}^2}{\partial x_H} + \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_H} = f - J v_{2H}. \quad (23)$$

Рассмотрим уравнение (6):

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial x_H} D + \frac{\partial \rho_2 e_2 (v_{2H} - D)}{\partial x_H} = \begin{cases} q, T_2 < T_S \\ J e_2, T_2 \geq T_S \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial x_H} D + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2H}}{\partial x_H} - \frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_H} = \begin{cases} q, T_2 < T_S \\ J e_2, T_2 \geq T_S \end{cases}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2H}}{\partial x_H} = \begin{cases} q, T_2 < T_S \\ J e_2, T_2 \geq T_S \end{cases}. \quad (24)$$

Рассмотрим уравнение энергии (7), учитывая (14)–(21):

$$\frac{\partial \left(\rho_1 \left(e_1 + \frac{(v_{1H} - D)^2}{2} \right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{(v_{2H} - D)^2}{2} \right) \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho_1 \left(e_1 + \frac{(v_{1H} - D)^2}{2} \right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{(v_{2H} - D)^2}{2} \right) \right)}{\partial x_H} D + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_1 (v_{1H} - D) \left(e_1 + \frac{(v_{1H} - D)^2}{2} \right) + \rho_2 (v_{2H} - D) \left(e_2 + \frac{(v_{2H} - D)^2}{2} \right) + (\alpha_1 (v_{1H} - D) + \alpha_2 (v_{2H} - D)) p \right] = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1 (v_{1H} - D)^2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_2 (v_{2H} - D)^2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 D}{\partial x_H} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1 D (v_{1H} - D)^2}{\partial x_H} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_H} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_2 (v_{2H} - D)^2}{\partial x_H} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_{1H}}{\partial x_H} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1 v_{1H} (v_{1H} - D)^2}{\partial x_H} - \frac{\partial \rho_1 e_1 D}{\partial x_H} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1 D (v_{1H} - D)^2}{\partial x_H} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_{2H}}{\partial x_H} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_2 v_{2H} (v_{2H} - D)^2}{\partial x_H} - \frac{\partial \rho_2 e_2 D}{\partial x_H} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_2 D (v_{2H} - D)^2}{\partial x_H} + \frac{\partial \alpha_1 p (v_{1H} - D)}{\partial x_H} + \frac{\partial \alpha_2 p (v_{2H} - D)}{\partial x_H} = 0.
\end{aligned}$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_1 \left(e_1 + \frac{v_{1H}^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 \left(e_2 + \frac{v_{2H}^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{D^2}{2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H}}{\partial x_H} \right) + \frac{D^2}{2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2H}}{\partial x_H} \right) - \\
& - D \left(\frac{\partial \rho_1 v_{1H}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H}^2}{\partial x_H} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_H} \right) - D \left(\frac{\partial \rho_2 v_{2H}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_{2H}^2}{\partial x_H} + \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_H} \right) + \\
& + \frac{D}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_H} + \frac{\partial \rho_1 v_{1H} \left(e_1 + \frac{v_{1H}^2}{2} \right)}{\partial x_H} + \frac{\partial \rho_2 v_{2H} \left(e_2 + \frac{v_{2H}^2}{2} \right)}{\partial x_H} + \frac{\partial}{\partial x_H} \left[(\alpha_1 v_{1H} + \alpha_2 v_{2H}) p \right] = 0.
\end{aligned}$$

Согласно (19) и (20) сумма третьего и четвертого слагаемых обращается в ноль, а пятое и шестое слагаемые согласно (22) и (23) будут равны $(Df - DJv_{2H})$ и $-(Df + DJv_{2H})$. В результате получим:

$$\frac{\partial (\rho_1 E_{1H} + \rho_2 E_{2H})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_1 v_{1H} E_{1H} + \rho_2 v_{2H} E_{2H} + (\alpha_1 v_{1H} + \alpha_2 v_{2H}) p] + \frac{D}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_H} = 0. \quad (25)$$

В новой системе координат в уравнении полной энергии смеси (25) появился дополнительный член

$$\frac{D}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x_H},$$

который приводит к неинвариантности относительно преобразования Галилея уравнение полной энергии смеси.

Для понимания причины неинвариантности относительно преобразования Галилея уравнения полной энергии смеси разобьем уравнение (7) на элементы. С этой целью получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно в случае $T_2 \leq T_S$ и проверим их на инвариантность относительно преобразования Галилея.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы (4) на v_1 , а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы (5) на v_2 , получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно

$$v_1 \left[\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = -fv_1, \quad v_2 \left[\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = fv_2,$$

которые после простых преобразований принимают следующий вид

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} + \alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -fv_1, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha_2 v_2 \frac{\partial p}{\partial x} = fv_2, \quad (27)$$

Проведем анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения кинетической энергии газа и частиц (26) и (27) соответственно. С этой целью переходим в

новую систему координат в соответствии с соотношениями (14)–(18). В новой системе координат уравнение сохранения кинетической энергии газа имеет следующий вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1 (v_{1n} - D)^2}{\partial t} + \frac{1}{2} D \frac{\partial \rho_1 (v_{1n} - D)^2}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1 (v_{1n} - D)(v_{1n} - D)^2}{\partial x_n} + \alpha_1 (v_{1n} - D) \frac{\partial p}{\partial x_n} = -f (v_{1n} - D).$$

После проведения необходимых преобразований получим

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_{1n}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1n} \frac{v_{1n}^2}{2}}{\partial x_n} - D \left(\frac{\partial \rho_1 v_{1n}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1n} v_{1n}}{\partial x_n} \right) + \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1n}}{\partial x_n} \right) + \alpha_1 v_{1n} \frac{\partial p}{\partial x_n} - \alpha_1 D \frac{\partial p}{\partial x_n} = -f v_{1n} + f D.$$

Здесь четвертый член в левой части уравнения равен нулю в соответствии с уравнением (1), а третий в соответствии с уравнением (4) равен

$$\alpha_1 D \frac{\partial p}{\partial x_n} + f D.$$

Таким образом, в новой системе координат уравнение сохранения кинетической энергии газа записывается в виде

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_{1n}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_{1n} \frac{v_{1n}^2}{2}}{\partial x_n} + \alpha_1 v_{1n} \frac{\partial p}{\partial x_n} = -f v_{1n}. \quad (28)$$

Уравнение (28) полностью совпадает с уравнением (26), следовательно, уравнение сохранения кинетической энергии газа (26) инвариантно относительно преобразования Галилея. Аналогично показывается инвариантность относительно преобразования Галилея уравнения сохранения кинетической энергии частиц (27).

Таким образом, из четырех составляющих, входящих в уравнение сохранения полной энергии смеси (7), три являются инвариантными относительно преобразования Галилея: уравнение сохранения внутренней энергии частиц (6), уравнение сохранения кинетической энергии газа (26) и уравнение сохранения кинетической энергии частиц (27). Следовательно, неинвариантным относительно преобразования Галилея является уравнение сохранения внутренней энергии газа. А это значит, что математическая модель, представленная уравнениями (1)–(13), не может правильно описывать условия зажигания твердого топлива.

Заключение

По результатам проведенного в работе анализа инвариантности относительно преобразования Галилея законов сохранения математической модели перехода конвективного горения твердого унитарного топлива во взрыв можно сделать следующие выводы:

1. Уравнения сохранения массы (1), (2), импульса (4), (5), внутренней энергии конденсированной фазы (6), кинетической энергии фаз (26) и (27) являются инвариантными относительно преобразования Галилея;
2. Уравнения сохранения внутренней энергии газовой фазы и уравнение сохранение полной энергии смеси (7) не являются инвариантными относительно преобразования Галилея;
3. Данная математическая модель не может правильно прогнозировать переход конвективного горения твердого унитарного топлива во взрыв.

Автор выражает свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.
2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.
3. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.

4. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.

5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 4–7.

6. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 13. – № 27(286). – С. 69–73.

7. Нестационарные задачи горения аэрозвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматуллин // Известия АН СССР. Серия «Механика жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

Поступила в редакцию 16 января 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 30–35

ANALYSIS OF INVARIANCE UNDER GALILEAN TRANSFORMATION OF TWO-PHASE MATHEMATICAL MODELS OF HETEROGENEOUS MEDIA

Yu.M. Kovalev¹

The article analyzes the invariance under Galilean transformation of mathematical model describing the transition of combustion into an explosion of solid monopropellant in a two-phase heterogeneous medium: gas is solid. It has been shown that the equation of total energy conservation of the mixture is not invariant under Galilean transformation. Consequently, this model can not be used in the analysis of the transition of convective combustion of solid unitary fuel into explosion.

Keywords: mathematical model, invariance, multi-component mixture.

References

1. Kovalev Yu.M., Cheremokhov A.Yu. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov"*. 1997. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).
2. Kuropatenko V.F. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*. 2011. Vol. 84, no. 1. pp. 74–92. (in Russ.).
3. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Doklady Akademii nauk*. 1989. Vol. 308, no. 5. pp. 1074–1078. (in Russ.).
4. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. *Fizika goreniiya i vzryva*. 1989. Vol. 25, no. 6. pp. 72–79. (in Russ.).
5. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analiz invariantnosti nekotorykh matematicheskikh modeley mnogokomponentnykh sred (Analysis of the invariance some mathematical models of multicomponent media). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2012. Issue 6. no. 11(270). pp. 4–7. (in Russ.).
6. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analiz invariantnosti otnositel'no preobrazovaniya Galileya nekotorykh modeley matematicheskikh mnogokomponentnykh sred (Analysis of the Invariance Under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multicomponent Media). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*. 2012. Issue 13. no. 27(286). pp. 69–73. (in Russ.).
7. Vaynshteyn P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatullin Kh.A. *Izvestiya AN SSSR. Seriya "Mekhanika zhidkosti i gaza"*. 1981. Issue 3. pp. 39–43. (in Russ.).

Received 16 January 2014

¹ Kovalev Yury Mikhailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Computational Continuum Mechanics Department, South Ural State University.
E-mail: yum_kov@mail.ru

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

А.И. Сидикова¹, С.И. Бельков²

До последнего времени при решении данной задачи повышали точность среднеквадратичного приближения за счет разработки оптимальных методов. Недостатком среднеквадратичного приближения является не гарантированность достаточной точности приближений при конкретных значениях t . Потому, в настоящей работе предлагается алгоритм определения равномерного приближения. При этом дается равномерная оценка этого приближения.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

Постановка задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

решение $u(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}((0,1) \times (0,\infty))$, удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0,t) = h(t); \quad t \geq 0, \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + ku(1,t) = 0, \quad k > 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где

$$h(t) \in C^2[0,\infty), \quad h(0) = h'(0) = 0 \quad (5)$$

и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \geq t_0$

$$h(t) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим множество $M_r \subset L_2[0,\infty)$ и, определяемое формулой

$$M_r = \left\{ h(t) : h(t) \in L_2[0,\infty); \int_0^\infty h^2(t) dt + \int_0^\infty [h'(t)]^2 dt \leq r^2 \right\}.$$

Искомая функция

$$h(t) \in M_r. \quad (7)$$

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует функция $h_0(t)$, удовлетворяющая условиям (5)–(7) и такая, что при $h(t) = h_0(t)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (1)–(6), удовлетворяющее условию

$$u(x_1,t) = f_0(t); \quad t \geq 0, \quad (8)$$

но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо неё даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty) \cap L_1[0,\infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta. \quad (9)$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_r , определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1)–(4), (8) и оценить отклонение $\|h_\delta - h_0\|_{L_2}$ приближенного решения h_δ от точного h_0 .

¹ Сидикова Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.

² Бельков Сергей Игоревич – магистрант, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: sergey_belkov@mail.ru

Пусть $H = L_2(-\infty, \infty) + iL_2(-\infty, \infty)$, а F – оператор, отображающий $L_2[0, \infty)$ в H . Из теоремы Планшереля [1] следует изометричность оператора F .

Применяя преобразование

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} h(t) e^{-it\tau} dt, \quad \tau \geq 0,$$

сведем задачу (1)–(4), (8) к задаче вычисления значений неограниченного оператора T , $T: H \rightarrow H$,

$$T\hat{f}(\tau) = \hat{h}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$, $\hat{h}(\tau) = F[h(t)]$, а

$$T\hat{f}(\tau) = \frac{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} k \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}}{\operatorname{ch} \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} k \operatorname{sh} \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau).$$

Из (9) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\| \leq \delta \quad (11)$$

и при $\hat{f}(\tau) = \hat{f}_0(\tau)$ существует точное решение $\hat{h}_0(\tau)$ задачи (10), которое принадлежит множеству \widehat{M}_r , определяемому формулой

$$\widehat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in H, \int_0^{\infty} (1+\tau^2) |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq r^2 \right\}. \quad (12)$$

Требуется, используя $\hat{f}_\delta(\tau)$, δ и \widehat{M}_r , определить приближенное решение $\hat{h}_\delta(\tau)$ задачи (10), (11) и оценить уклонение $\|\hat{h}_\delta - \hat{h}_0\|$. Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\}$, $\alpha > 0$

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau); & \tau \leq \alpha, \\ 0; & \tau > \alpha. \end{cases} \quad (13)$$

В качестве приближенного решения задачи (10), (11) возьмем элемент $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau)$, в котором параметр регуляризации $\alpha(\delta, r)$ определим из уравнения

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = e^{x_1 \sqrt{\alpha/2}} \delta. \quad (14)$$

Заметим, что метод $\{T_{\alpha(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_0\}$, определяемый формулами (13) и (14), является методом проекционной регуляризации, предложенным в [2].

В [3] доказаны теоремы.

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\frac{\sqrt{2}(1-\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta, r)}} \leq \Delta_\delta [T_{\alpha(\delta, r)}] \leq \frac{\sqrt{2}(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta, r)}},$$

где метод $\{T_{\alpha(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon\}$ определен формулой (13), (14).

Теорема 2. Метод $\{T_{\alpha(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon\}$, решение задачи (10), (11) и, определяемый формулами (13), (14) оптимален по порядку на классе \widehat{M}_r и для него справедлива оценка погрешности

$$\Delta_\delta [T_{\alpha(\delta, r)}] \leq \sqrt{2}(1+\varepsilon) \Delta_\delta^{opt}.$$

Получены асимптотические оценки [3].

Теорема 3. Для любого $r > 0$ существуют числа $c_1(r)$, $c_2(r)$ и $\delta_1 < 1$ такие, что для любого $\delta \in (0, \delta_1)$ справедливы оценки

$$c_1(r) \ln^2 \delta \leq \sqrt{1 + \alpha^2(\delta, r)} \leq c_2(r) \ln^2 \delta.$$

Рассмотрим пространство $\overline{H}_0 = F[L_2[0, \infty)]$, где F преобразование Фурье и через $\overline{h}_\delta(\tau)$ обозначим элемент, определяемый формулой

$$\overline{h}_\delta(\tau) = pr[\hat{h}_\delta(\tau); \overline{H}_0].$$

Окончательно, решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(4), (8) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)]; & t \in [0, t_0], \\ 0; & 0 < t, \quad t > t_0. \end{cases} \quad (15)$$

При достаточно малом значении δ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq \sqrt{2}(1 + \varepsilon) \frac{r}{\sqrt{1 + \alpha^2(\delta, r)}}. \quad (16)$$

Решение задачи восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью

Обозначим через M_r множество функций $u(t) \in C[a, b]$ таких, что

$$\int_a^b u^2(t) dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt \leq r^2, \quad (17)$$

где $u'(t)$ – обобщенная производная Соболева от функции $u(t)$.

Предположим, что функция $u_0(t)$, принадлежащая множеству M_r , нам не известна. Вместо нее даны некоторое приближение $u_\varepsilon(t) \in L_2[a, b]$ и уровень погрешности $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Требуется, используя априорную информацию $(u_\varepsilon(t), \varepsilon)$, определить приближенное значение $\overline{u}_\varepsilon(t) \in C[a, b]$ и оценить величину

$$\max \left\{ \left| \overline{u}_\varepsilon(t) - u_0(t) \right| : t \in [a, b] \right\}.$$

Эта задача называется задачей восстановления непрерывной функции, заданной с погрешностью. Для ее решения используем метод усредняющих функций, предложенный в [4].

Рассмотрим усредняющую функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{1-t^2}}; & |t| < 1, \\ 0; & |t| \geq 1, \end{cases} \quad (19)$$

где $\gamma = \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt$.

Тогда для любого значения $h > 0$ определим

$$\omega_h(t) = \frac{1}{h} \omega\left(\frac{|t|}{h}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Из [5, с. 111–112] и формул (19), (20) следует, что для любого $h > 0$ $\omega_h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\omega_h(t) = 0$ при $|t| \geq h$ и $\int_{|t| \leq h} \omega_h(t) dt = 1$.

Теперь определим регуляризующее семейство $\{P_h : h > 0\}$ линейных ограниченных операторов P_h , отображающих пространство $L_2[a, b]$ в $C[a, b]$, использующих формулу

Лемма 1. Пусть линейный ограниченный оператор P_h определен формулой (21). Тогда

$$\|P_h\| \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{h}}.$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in L_2[a, b]$ и $\|u(t)\| \leq 1$, тогда из (19)–(21) следует, что для любого $t \in [a, b]$

$$|P_h u(t)| \leq \frac{1}{\gamma h} \|u\|_{L_2} \left[\int_{|z| \leq h} e^{-\frac{2}{1-\frac{z^2}{h^2}}} dz \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Так как $\|u\|_{L_2} \leq 1$, и

$$\int_{-h}^h \left[e^{-1/\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)} \right]^2 dz \leq h \cdot \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt \leq h\gamma,$$

то из (22) следует, что для любого $t \in [a, b]$ $|P_h u(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{h}}$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть множество M_r определено соотношением (17), а $u_0^h(t) = P_h u_0(t)$. Тогда

$$\sup_{u_0 \in M_r} \|u_0 - u_0^h\|_{C[a, b]} \leq r\sqrt{h}.$$

Доказательство. Предположим, что $u_0 \in M_r$, тогда для любого $t \in [a, b]$

$$|u_0(t) - u_0^h(t)| = \left| \int_{|t-\tau| \leq h} \omega_h(t-\tau) u_0(t) d\tau - \int_{|t-\tau| \leq h} \omega_h(t-\tau) u_0(\tau) d\tau \right|. \quad (23)$$

Из (23) следует, что

$$|u_0(t) - u_0^h(t)| = \int_{|t-\tau| \leq h} \omega_h(t-\tau) |u_0(t) - u_0(\tau)| d\tau. \quad (24)$$

Так как из теоремы, доказанной в [5] на стр. 126, следует, что для любого $t \in [a, b]$ выполняется соотношение

$$|u_0(t) - u_0^h(t)| \leq r\sqrt{h},$$

что и доказывает лемму.

Окончательно, в качестве приближенного значения восстанавливаемой функции $u_0(t)$ возьмем функцию

$$\bar{u}_\varepsilon = u_\varepsilon^{h(\varepsilon)}(t) = P_{h(\varepsilon)} u_\varepsilon(t),$$

в которой ε определено формулой (18), а $h(\varepsilon)$ формулой

$$h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma} r}. \quad (25)$$

Учитывая, что

$$\|u_0(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\|_{C[a, b]} \leq \sup_{t \in [a, b]} |u_0(t) - u_0^{h(\varepsilon)}(t)| + \|P_{h(\varepsilon)}\| \varepsilon,$$

где h_ε определена формулой (25).

Из лемм 1 и 2 получим, что

$$\|u_0(t) - \bar{u}_\varepsilon(t)\|_{C[a, b]} \leq \frac{2\sqrt{r\varepsilon}}{\sqrt[4]{\gamma}}. \quad (26)$$

Теперь докажем, что оценка (26) является точной по порядку, а метод усредняющих функций $\{P_{h(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, используемый в настоящем параграфе, оптимален по порядку. Из работы [6] следует, что

$$\omega_1(2\varepsilon, r) \sim \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (27)$$

где модуль непрерывности $\omega_1(2\varepsilon, r)$ определен формулой

$$\omega_1(2\varepsilon, r) = \sup \left\{ \|u_1(t) - u_2(t)\|_{C[a,b]} : u_1, u_2 \in M_r; \|u_1 - u_2\|_{L_2} \leq 2\varepsilon \right\}.$$

Из работы [7] и формул (26), (27) следует, что метод $\{P_{h(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ оптимален по порядку на классе M_r , а оценка погрешности (26) этого метода является точной по порядку.

Равномерное приближения решения $h_0(t)$ обратной граничной задачи (1)–(4), (8)

Используя методику, изложенную выше, задачу равномерного приближения граничного условия $h_0(t)$ в задаче (1)–(4), (8) сведем к задаче восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью.

Таким образом, из условия (17) следует, что нам необходимо определить функцию $h_0(t) \in W_2^1[0, t_0]$, и удовлетворяющую условию

$$\int_0^{t_0} h_0^2(t) dt + \int_0^{t_0} [h_0'(t)]^2 dt \leq r^2. \quad (28)$$

Из (15) и (16) следует, что нам известна функция $h_\delta(t) \in L_2[0, t_0]$ такая, что

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \leq \varepsilon(\delta), \quad (29)$$

где $\varepsilon(\delta) = \frac{\sqrt{2}(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1+\bar{\alpha}^2(\delta, r)}}$, $\bar{\alpha}(\delta, r)$ – решение уравнения (14).

Требуется, используя априорную информацию $h_\delta(t), \varepsilon(\delta), r$ задачи (28), (29) определить функцию $z_\delta(t) \in C[0, t_0]$ такую, что

$$\max \{|z_\delta(t) - h_0(t)| : t \in [0, t_0]\} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0$$

и оценить скорость этой сходимости.

Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов $\{P_\beta : \beta > 0\}$, определяемое формулой (21)

$$P_\beta h(t) = \int_0^{t_0} h(\tau) \omega_\beta(t - \tau) d\tau, \quad h(t) \in L_2[0, t_0],$$

$$\omega_\beta(t) = \frac{1}{\beta} \omega\left(\frac{|t|}{\beta}\right), \quad t \in [0, t_0], \text{ а } \omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

где $\gamma = \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt$.

Окончательно, в качестве приближенного решения возьмем функцию

$$z_\delta(t) = P_{\beta(\delta)} h_\delta(t); \quad t \in [0, t_0],$$

где

$$\beta(\delta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma} r}.$$

Из формулы (26) следует, что

$$\|z_\delta(t) - z_0(t)\|_{C[0, t_0]} \leq \frac{2\sqrt{r\varepsilon}}{\sqrt[4]{\gamma}}.$$

Литература

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
3. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 1–15.
4. Васин, В.В. Регуляризация задачи численного дифференцирования / В.В. Васин // Математические записки. – 1969. – Т. 7, № 2. – С. 29–33.
5. Осипов Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. М.: МГУ, 1972. – 238 с.
6. Хромова, Г.В. О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью / Г.В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1977. – Т. 17, № 5. – С. 1161–1171.
7. Танана, В.П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения / В.П. Танана // Изв. Вузов. Математика. – 1977. – № 11. – С. 106–112.

Поступила в редакцию 27 сентября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 36–41

REGULAR APPROXIMATION FOR BOUNDARY CONDITION IN INVERSE PROBLEM OF THERMAL DIAGNOSTICS

A.I. Sidikova¹, S.I. Belkov²

Until recently at the solution of the problem the accuracy of the root-mean-square approximation has been increased through the development of optimum methods. The drawback of the root-mean-square approximation is unreliability of sufficient accuracy for concrete values of t . Thus, the algorithm of definition of regular approximation is considered in the article. Regular estimator of this approximation is given.

Keywords: inverse problem, regularization, estimation error, ill-posed problem, Fourier transformation.

References

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (in Russ.).
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* (Theory of linear ill-posed problems and its application). Moscow, Nauka Publ., 1978. 208 p. (in Russ.).
3. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 1–15. (in Russ.).
4. Vasin V.V. *Matematicheskie zapiski*. 1969. Vol. 7, no. 2. pp. 29–33. (in Russ.).
5. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoy regulyaryzatsii* (Basics of dynamic regularization method). Moscow, MGU Publ., 1972. 238 p.
6. Khromova G.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1977. Vol. 17, no. 5. pp. 1161–1171. (in Russ.).
7. Tanana V.P. *Izvestiya Vuzov. Matematika*. 1977. no. 11. pp. 106–112. (in Russ.).

Received 27 September 2013

¹ Sidikova Anna Ivanovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.

² Belkov Sergey Igorevich is Undergraduate Student, Calculating Mathematics Department, South Ural State University.

E-mail: sergey_belkov@mail.ru

ИТЕРАЦИОННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.Л. Ушаков¹

Рассматривается эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях. Его решение строится на итерационной факторизации оператора, энергетически эквивалентного оператору решаемой задачи. Дискретизация исходной задачи производится по методу конечных элементов, а предобуславливатель выбирается на основе метода конечных разностей, при этом скорость сходимости итерационного процесса не зависит от параметров дискретизации.

Ключевые слова: итерационная факторизация, предобуславливатель.

Введение

Рассматривается эллиптическое уравнение четвёртого порядка в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат; на правой и верхней сторонах прямоугольника заданы условия шарнирного опирания, а на остальной части границы условия симметрии. Задача, получающаяся при дискретизации уравнения Пуассона по методу конечных разностей, решаемая в [1], дважды возникает на каждом шаге предлагаемого итерационного процесса. Система линейных алгебраических уравнений получается при дискретизации исходной задачи по методу конечных элементов, в отличие от [2], где применялся метод конечных разностей. Исходная задача может быть получена в методах типа фиктивных компонент при решении эллиптических уравнений четвёртого порядка в плоских областях достаточно произвольного вида при однородных, например, главных или естественных краевых условиях.

Непрерывная задача в вариационной и классической постановках

Рассматривается задача

$$u \in V : \Lambda(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \quad l \in V', \quad (1)$$

где соболевское пространство функций

$$V = V(\Omega) = \left\{ v \in W_2^2(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$$

на области $\Omega = (0; b_1) \times (0; b_2)$, с границами $\Gamma_1 = \{b_1\} \times [0; b_2] \cup [0; b_1] \times \{b_2\}$, $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$, $\Gamma = \partial\Omega$, билинейная форма

$$\Lambda(u, v) = \int_{\Omega} (\sigma \Delta u \Delta v + (1 - \sigma)(u_{xx} v_{xx} + 2u_{xy} v_{xy} + u_{yy} v_{yy}) + auv) d\Omega,$$

при этом $a = a_1$ на области Ω_1 , $a = a_2$ на $\Omega \setminus \Omega_1$, области $\Omega_1, \Omega_2 : \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \emptyset$, заданы константы $\sigma \in (0; 1)$, $b_1, b_2 \in (0; +\infty)$, $a_1, a_2 \in [0; +\infty)$, $a_1 \leq a_2$.

Можно отметить, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty) : c_1 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \Lambda(v, v) \leq c_2 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V,$$

а, следовательно, решение задачи (1) существует и единственно. Если f – заданная достаточно гладкая функция и

$$l(v) = (f, v), \quad \text{где } (f, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega,$$

то из задачи (1) получается неоднородное бигармоническое уравнение со свободным членом при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2 u + au = f, \quad u|_{\Gamma_1} = \Delta u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad (2)$$

¹ Ушаков Андрей Леонидович – старший преподаватель, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: ushakov_al@inbox.ru

Итерационное решение непрерывной задачи в вариационной постановке

Утверждение 1. Для следующей спектральной задачи, имеющей у нас вспомогательное значение

$$\lambda: -\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \varphi \neq 0$$

находятся методом разделения переменных собственные числа и функции соответственно:

$$\lambda_{i,j} = \frac{(2i-1)^2\pi^2}{4b_1^2} + \frac{(2j-1)^2\pi^2}{4b_2^2}, \quad \varphi_{i,j} = C_{i,j} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2b_1} \cos \frac{(2j-1)\pi y}{2b_2}, \quad C_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

при этом $0 < \min_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda_{i,j} = \lambda_{1,1} = \frac{\pi^2}{4b_1^2} + \frac{\pi^2}{4b_2^2}$, $\sup_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda_{i,j} = +\infty$.

Введём билинейную форму

$$M(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\Omega = \int_{\Omega} (u_{xx}v_{xx} + 2u_{xy}v_{xy} + u_{yy}v_{yy}) d\Omega, \quad u, v \in V.$$

Второе равенство имеется при рассматриваемых краевых условиях на прямоугольной области.

Утверждение 2. Имеют место неравенства

$$\gamma_1 M(v, v) \leq \Lambda(v, v) \leq \gamma_2 M(v, v) \quad \forall v \in V, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = (\lambda_{1,1}^2 + a_2) / \lambda_{1,1}^2.$$

Доказательство. Выполняется, что

$$1 = \inf_{\lambda_{i,j}} \frac{\lambda_{i,j}^2 + a_1}{\lambda_{i,j}^2} = \gamma_1 \leq \frac{\Lambda(v, v)}{M(v, v)} \leq \gamma_2 = \sup_{\lambda_{i,j}} \frac{\lambda_{i,j}^2 + a_2}{\lambda_{i,j}^2} = \frac{\lambda_{1,1}^2 + a_2}{\lambda_{1,1}^2} \quad \forall v \in V$$

Введём нормы

$$\|v\|_M = \sqrt{M(v, v)}, \quad \|v\|_V = \sqrt{\Lambda(v, v)}.$$

Рассматривается итерационный процесс:

$$u^k \in V: M(u^k - u^{k-1}, v) = -\tau_k (\Lambda(u^{k-1}, v) - l(v)) \quad \forall v \in V, \quad (3)$$

$$\tau_k = \tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2) = 2\lambda_{1,1}^2 / (2\lambda_{1,1}^2 + a_2), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \forall u^0 \in V.$$

Теорема 1. Для итерационного процесса (3) имеют место оценки:

1. $\|u^k - u\|_V \leq \varepsilon \|u^0 - u\|_V$,
2. $\|u^k - u\|_M \leq \varepsilon \|u^0 - u\|_M$,

где относительная ошибка сходимости u^k к решению u следующая

$$\varepsilon \leq q^k = ((\gamma_2 - \gamma_1) / (\gamma_2 + \gamma_1))^k = (a_2 / (2\lambda_{1,1}^2 + a_2))^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Введём оператор R из V в V : $M(Ru, v) = \Lambda(u, v)$, $\forall u, v \in V$.

Так как $\gamma_1 M(v, v) \leq \Lambda(v, v) \leq \gamma_2 M(v, v)$, то $\gamma_1 M(v, v) \leq M(Rv, v) \leq \gamma_2 M(v, v)$, т.е. $\gamma_1 I \leq R \leq \gamma_2 I$.

R – ограниченный и самосопряжённый оператор. Заметим, что $\Lambda(R^{-1}u, v) = M(u, v)$. Пусть $u^k = u + \psi^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тогда из итерационного процесса имеем

$$M(\psi^k - \psi^{k-1}, v) = -\tau_k \Lambda(\psi^{k-1}, v) \quad \text{и} \quad \Lambda(R^{-1}(\psi^k - \psi^{k-1}), v) = -\tau_k \Lambda(\psi^{k-1}, v),$$

отсюда

$$R^{-1}(\psi^k - \psi^{k-1}) = -\tau_k \psi^{k-1}, \quad \psi^k = (I - \tau_k R) \psi^{k-1}.$$

Пусть $T_k = I - \tau_k R$, тогда можно перейти к доказательству первого неравенства.

$$\Lambda(\psi^k, \psi^k) = \Lambda(T_k \psi^{k-1}, T_k \psi^{k-1}) \leq \sup_{\psi \in V} (\Lambda(T_k \psi, T_k \psi) / \Lambda(\psi, \psi)) \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) =$$

так как оператор T_k самосопряжённый

$$= \left(\sup_{\psi \in V} \left(\frac{\Lambda(T_k \psi, \psi)}{\Lambda(\psi, \psi)} \right) \right)^2 \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) = \left(\sup_{\psi \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(R\psi, \psi)}{\Lambda(\psi, \psi)} \right) \right)^2 \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) =$$

полагаем $v = R^{1/2}\psi$

$$\begin{aligned} &= \left(\sup_{v \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(v, v)}{\Lambda(R^{-1}v, v)} \right) \right)^2 \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) = \left(\sup_{v \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(v, v)}{M(v, v)} \right) \right)^2 \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) \leq \\ &\leq \max \left\{ (1 - \gamma_1 \tau_k)^2, (1 - \gamma_2 \tau_k)^2 \right\} \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}), \end{aligned}$$

отсюда

$$\Lambda(\psi^k, \psi^k) \leq q^2 \Lambda(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}), \quad \|u^k - u\|_V \leq q \|u^{k-1} - u\|_V, \quad \|u^k - u\|_V \leq q^k \|u^0 - u\|_V.$$

Теперь можно рассмотреть получение второго неравенства.

$$\begin{aligned} M(\psi^k, \psi^k) &= M(T_k \psi^{k-1}, T_k \psi^{k-1}) \leq \sup_{\psi \in V} (M(T_k \psi, T_k \psi) / M(\psi, \psi)) M(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) = \\ &= \left(\sup_{\psi \in V} \left(\frac{M(T_k \psi, \psi)}{M(\psi, \psi)} \right) \right)^2 M(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) = \left(\sup_{\psi \in V} \left(1 - \tau_k \frac{\Lambda(\psi, \psi)}{M(\psi, \psi)} \right) \right)^2 M(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}) \leq \\ &\leq \max \left\{ (1 - \gamma_1 \tau_k)^2, (1 - \gamma_2 \tau_k)^2 \right\} M(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}), \end{aligned}$$

отсюда

$$M(\psi^k, \psi^k) \leq q^2 M(\psi^{k-1}, \psi^{k-1}), \quad \|u^k - u\|_M \leq q \|u^{k-1} - u\|_M, \quad \|u^k - u\|_M \leq q^k \|u^0 - u\|_M.$$

На каждом шаге итерационного процесса (3) возникает задача вида

$$u \in V : M(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \quad l \in V'. \quad (4)$$

Заметим, основываясь на утверждении 2, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty) : c_1 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq M(v, v) \leq c_2 \|v\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V,$$

а, следовательно, решение задачи (4) существует и единственно. Если f – заданная достаточно гладкая функция, как и в задаче(1) $l(v) = (f, v)$, то из задачи (4) получается неоднородное бигармоническое уравнение при смешанных и однородных краевых условиях

$$\Delta^2 u = f, \quad u|_{\Gamma_1} = \Delta u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (5)$$

Видно, что задача (5) имеет факторизованный оператор и может быть записана как система эллиптических уравнений второго порядка при смешанных и однородных краевых условиях

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f, \quad w|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \\ -\Delta u &= w, \quad u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Замечание 1. Для собственных функций краевой задачи (1), когда $a_1 = a_2$, следующего вида

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{b_1 b_2 (\lambda_{i,j}^2 + a_2)}} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2b_1} \cos \frac{(2j-1)\pi y}{2b_2}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

устанавливается непосредственной проверкой первое и известно второе

1. $\|\varphi_{i,j}\|_V = 1, \quad \Lambda(\varphi_{i,j}, \varphi_{k,l}) = 0, \quad (i, j) \neq (k, l), \quad k, l \in \mathbb{N},$
2. $\forall \psi^k \in V \exists c_{i,j}^k \in \mathbb{R} : \psi^k = \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{i,j}^k \varphi_{i,j}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

При равенстве $a_1 = a_2$ в итерационном процессе (3) будет $\lambda_{i,j}^2 c_{i,j}^k = \lambda_{i,j}^2 c_{i,j}^{k-1} - \tau(\lambda_{i,j}^2 + a_2) c_{i,j}^{k-1},$
 $c_{i,j}^k = \rho_{i,j} c_{i,j}^{k-1},$ где $\rho_{i,j} = 1 - \tau(\lambda_{i,j}^2 + a_2) \lambda_{i,j}^{-2}.$ Таким образом $\psi^k = \sum_{i,j=1}^{\infty} \rho_{i,j}^k c_{i,j}^0 \varphi_{i,j},$ т.к. $c_{i,j}^k = \rho_{i,j}^k c_{i,j}^0.$

Учитывая, что $\max_{i,j \in \mathbb{N}} |\rho_{i,j}| = \max_{i,j \in \mathbb{N}} |1 - \tau(\lambda_{i,j}^2 + a_2)\lambda_{i,j}^{-2}| \leq a_2(2\lambda_{1,1}^2 + a_2)^{-2}$, имеет место следующая оценка

$$\|u^k - u\|_V / \|u^0 - u\|_V = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty} \rho_{i,j}^{2k} (c_{i,j}^0)^2} / \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{i,j}^0)^2} \leq \left(\max_{i,j \in \mathbb{N}} |\rho_{i,j}| \right)^k \leq \left(a_2 / (2\lambda_{1,1}^2 + a_2) \right)^k.$$

Дискретная задача в виде системы линейных алгебраических уравнений

Производится дискретизация задачи (1) по методу конечных элементов на параболических восполнениях:

$$\tilde{u} \in \tilde{V} \subset V : \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \subset V. \quad (7)$$

Рассматриваются система линейных алгебраических уравнений соответствующая задаче (7):

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : \Lambda \bar{u} = \bar{l}, \quad \bar{l} \in \mathbb{R}^N, \quad (8)$$

где $\bar{v} \in \mathbb{R}^N : \bar{v} = (v_1, \dots, v_N)'$, $N = m \cdot n$, $m, n \in \mathbb{N}$, а $v_{n(i-1)+j} = v_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, и $v_{i,j}$ являются значениями функции дискретного аргумента соответствующего узлам сетки $(x_i, y_j) = ((i-0,5)h_1, (j-0,5)h_2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, шаги сетки $h_1 = b_1 / (m+0,5)$, $h_2 = b_2 / (n+0,5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрицы Λ размерности $N \times N$ определяются следующим образом:

$$\langle \Lambda \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset V,$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов такого вида $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{k=1}^N u_k v_k h_1 h_2 \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^N$,

а подпространство $\tilde{V} \subset V$ определяется так, что

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{i,j} \Phi^{i,j}(x, y), v_{i,j} \in \mathbb{R} \right\},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x, y) = \Psi_{1,i}(x) \Psi_{2,j}(y), \quad \Psi_{1,i}(x) = E(1/i) \Psi(x/h_1 - i + 3) + \Psi(x/h_1 - i + 2) - E(i/m) \Psi(x/h_1 - i),$$

$$\Psi_{2,j}(y) = E(1/j) \Psi(y/h_2 - j + 3) + \Psi(y/h_2 - i + 2) - E(j/n) \Psi(y/h_2 - j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0,5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1,5, & z \in [1;2], \\ 0,5z^2 - 3z + 4,5, & z \in [2;3], \end{cases}$$

$\Psi(z) = 0$, $z \notin [0;3]$, $E(\cdot)$ – функция целая часть числа, компоненты вектора \bar{l} определяются следующим образом

$$l_{n(i-1)+j} = l_{i,j} = h_1^{-1} h_2^{-1} l(\Phi^{i,j}(x, y)), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{т.е.} \quad \langle \bar{l}, \bar{v} \rangle = l(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Отметим, что решение задачи (8), как и (7) существует, единственно и известны оценки типа

1. $\|u - \tilde{u}\|_{W_2^k(\Omega)} \leq c |h|^{s-k} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}$,
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - \tilde{u}\|_{W_2^2(\Omega)} = 0$, $h = (h_1, h_2)$, $|h| = \max\{h_1, h_2\}$.

Решение дискретной задачи при итерационной факторизации преобуславливателя

Определим матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N \times N$

$$\langle \nabla_x \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-(u_{i+1,j} - u_{i,j}) h_1^{-1}) v_{i,j} h_1 h_2, \quad u_{m+1,j} = v_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\langle \nabla_y \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-(u_{i,j+1} - u_{i,j}) h_2^{-1}) v_{i,j} h_1 h_2, \quad u_{i,n+1} = v_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Математика

Дополнительно введём матрицы ∇_1 и ∇_2 размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно

$$(\nabla_1 \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^m (-(u_{i+1} - u_i) h_1^{-1}) v_i, \quad u_{m+1} = v_{m+1} = 0, \quad (\nabla_2 \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{j=1}^n (-(u_{j+1} - u_j) h_2^{-1}) v_j, \quad u_{n+1} = v_{n+1} = 0.$$

Они связаны с предыдущими матрицами следующим образом $\nabla_x = \nabla_1 \otimes E_n$, $\nabla_y = E_m \otimes \nabla_2$.

Здесь E_m и E_n – единичные матрицы размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, а (\cdot, \cdot) обычное скалярное произведение векторов. Определим матрицу

$$\langle A \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ((u_{i+1,j} - u_{i,j})(v_{i+1,j} - v_{i,j}) h_1^{-2} + (u_{i,j+1} - u_{i,j})(v_{i,j+1} - v_{i,j}) h_2^{-2}) h_1 h_2, \\ u_{i,n+1} = v_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad u_{m+1,j} = v_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Заметим, что

$$A = \nabla_x' \nabla_x + \nabla_y' \nabla_y = (\nabla_1 \otimes E_n)' (\nabla_1 \otimes E_n) + (E_m \otimes \nabla_2)' (E_m \otimes \nabla_2) = (\nabla_1' \nabla_1) \otimes E_n + E_m \otimes (\nabla_2' \nabla_2).$$

Дополнительно введём матрицы $\Delta_1 = \nabla_1' \nabla_1$ и $\Delta_2 = \nabla_2' \nabla_2$ размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, тогда $A = \Delta_1 \otimes E_n + E_m \otimes \Delta_2$. Определим матрицу $M = A^2$. Отметим, что

$$M = (\Delta_1 \otimes E_n + E_m \otimes \Delta_2)^2 = \Delta_1^2 \otimes E_n + 2\Delta_1 \otimes \Delta_2 + E_m \otimes \Delta_2^2.$$

Матрица Λ представляется в виде $\Lambda = \Lambda^{2,0} + 2\Lambda^{1,1} + \Lambda^{0,2} + a\Lambda^{0,0}$, где матрицы $\Lambda^{p,q}$:

$$\langle \Lambda^{p,q} \bar{u}, \bar{v} \rangle = \int_{\Omega} \tilde{u}_{x^p x^q} \tilde{v}_{x^p x^q} d\Omega \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \quad (p, q) \in \{(2,0), (1,1), (0,2), (0,0)\}.$$

Дополнительно введём матрицы $\Lambda^{x,p}$, $\Lambda^{y,q}$, $p, q = 0, 1, 2$ размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, элементы которых следующие

$$\Lambda_{k,i}^{x,p} = h_1^{-1} \int_0^{b_1} \Psi_{1,k}^{(p)}(x) \Psi_{1,i}^{(p)}(x) dx, \quad k, i = 1, \dots, m, \quad \Lambda_{l,j}^{y,q} = h_2^{-1} \int_0^{b_2} \Psi_{2,l}^{(q)}(y) \Psi_{2,j}^{(q)}(y) dy, \quad l, j = 1, \dots, n.$$

Утверждение 3. Имеют место формулы $\Lambda^{p,q} = \Lambda^{x,p} \otimes \Lambda^{y,q}$, $p, q = 0, 1, 2$.

Доказательство. Заметим, что т.к.

$$\Lambda_{n(k-1)+l, n(i-1)+j}^{p,q} = h_1^{-1} h_2^{-1} \int_{\Omega} \Phi_{x^p, y^q}^{k,l}(x, y) \Phi_{x^p, y^q}^{i,j}(x, y) d\Omega = \\ = h_1^{-1} \int_0^{b_1} \Psi_{1,k}^{(p)}(x) \Psi_{1,i}^{(p)}(x) dx h_2^{-1} \int_0^{b_2} \Psi_{2,l}^{(q)}(y) \Psi_{2,j}^{(q)}(y) dy = \Lambda_{k,i}^{x,p} \Lambda_{l,j}^{y,q}.$$

Замечание 2. Имеет место $\Lambda = \Lambda^{x,2} \otimes \Lambda^{y,0} + 2\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1} + \Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,2} + a\Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,0}$ и $\Lambda^{x,2} = \Delta_1^2$, $\Lambda^{y,2} = \Delta_2^2$, т.е. $\Lambda = \Delta_1^2 \otimes \Lambda^{y,0} + 2\Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1} + \Lambda^{x,0} \otimes \Delta_2^2 + a\Lambda^{x,0} \otimes \Lambda^{y,0}$.

Замечание 3. Для любых $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$(\Lambda^{x,0} \bar{u}, \bar{v}) = (\Lambda_1^{x,0} (u_1, u_2)', (v_1, v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1} (\Lambda_i^{x,0} (u_{i-1}, u_i, u_{i+1})', (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})') + (\Lambda_m^{x,0} (u_{m-1}, u_m)', (v_{m-1}, v_m)'),$$

где используемые выше матрицы следующие

$$\Lambda_1^{x,0} = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 86 & 14 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_m^{x,0} = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 13 & 59 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i^{x,0} = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad i = 2, \dots, m-1.$$

Утверждение 4. Видно $\lambda_1 = 1/16$, $\lambda_2 = 1/6$, $\lambda_3 = 1$, если

$$\lambda: \Lambda_i^{x,0} (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})' = \lambda E_i^x (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})', \quad (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})' \neq 0, \quad i = 2, \dots, m-1,$$

E_i^x – диагональные матрицы, где на диагонали первый и последний элементы $1/6$, а средний $2/3$.

Утверждение 5. Для спектральной задачи $\lambda: \Lambda_1^{x,0}(v_1, v_2)' = \lambda E_1^x(v_1, v_2)'$, $(v_1, v_2)' \neq 0$ собственные числа $\lambda_1 = 4/25$, $\lambda_2 = 1$, здесь E_1^x диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент $5/6$, а второй элемент, он же и последний $1/6$.

Утверждение 6. Для спектральной задачи $\lambda: \Lambda_m^{x,0}(v_{m-1}, v_m)' = \lambda E_m(v_{m-1}, v_m)'$, $(v_{m-1}, v_m)' \neq 0$ собственные числа $0 < \lambda_{1,2} = (89 \pm 3\sqrt{469})/200 < 1$, здесь E_1^x диагональная матрица, у которой на диагонали первый элемент $1/6$, а второй элемент, он же и последний $5/6$.

Введём вспомогательные матрицы ∇_1^+ , Δ_1^+ размерности $m \times m$: $\Delta_1^+ = (\nabla_1^+)'\nabla_1^+ > 0$,

$$(\nabla_1^+\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^m (u_{i+1} + u_i)v_i, \quad (\Delta_1^+\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^m (u_{i+1} + u_i)(v_{i+1} + v_i), \quad u_{m+1} = v_{m+1} = 0$$

и матрицу δ^1 размерности $m \times m$ с элементами $\delta_{i,j}^1 = E(2/(i+j))$, $i, j = 1, \dots, m$.

Утверждение 7. Имеют место неравенства $2/15 E_m \leq \Lambda^{x,0} \leq E_m$ ($2/15 E_n \leq \Lambda^{x,0} \leq E_n$).

Доказательство. Правое неравенство следует из замечания 3 и утверждений 4,5,6, т.к.

$$(E_m \bar{u}, \bar{v}) = (E_1^x(u_1, u_2)', (v_1, v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1} (E_i^x(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})', (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})') + (E_m^x(u_{m-1}, u_m)', (v_{m-1}, v_m)').$$

Используя известный приём, имеем, что $120\Lambda^{x,0} \geq 120M^{x,0} - (\Delta_1^+ + 2\delta^1)^2 - 22(\Delta_1^+ + 2\delta^1) = 16E_m$.

Замечание 4. Для любых $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$(\Lambda^{x,1}\bar{u}, \bar{v}) = (\Lambda_1^{x,1}(u_1, u_2)', (v_1, v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1} (\Lambda_i^{x,1}(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})', (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})') + (\Lambda_m^{x,1}(u_{m-1}, u_m)', (v_{m-1}, v_m)'),$$

где используемые выше матрицы следующие:

$$\Lambda_1^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_m^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i^{x,1} = \frac{h_1^{-2}}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 2, \dots, m-1.$$

Утверждение 8. Имеют место неравенства

$$\frac{1}{3}\Delta_i^x \leq \Lambda_i^{x,1} \leq \Delta_i^x, \quad \text{где } \Delta_i^x = \frac{h_1^{-2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 2, \dots, m-1.$$

Доказательство. Имеем $6h_1^2(\Lambda_i^{x,1} - 1/3\Delta_i^x) \geq 0$, т.к. $(v_{i-1}^2 - 2v_{i-1}v_{i+1} + v_{i+1}^2) = (v_{i-1} - v_{i+1})^2 \geq 0$.

Видно, что $6h_1^2(\Delta_i^x - \Lambda_i^{x,1}) \geq 0$, т.к.

$$v_{i-1}^2 - 4v_{i-1}v_i + 4v_i^2 - 4v_iv_{i+1} + 2v_{i-1}v_{i+1} + v_{i+1}^2 = (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})^2 \geq 0.$$

Замечание 5. Имеет место равенство $\frac{2}{3}\Delta_1^x = \Lambda_1^{x,1}$, где $\Delta_1^x = \frac{h_1^{-2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Утверждение 9. Имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\Delta_m^x \leq \Lambda_m^{x,1} \leq \Delta_m^x, \quad \text{где } \Delta_m^x = \frac{h_1^{-2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Имеем $12h_1^2(\Lambda_m^{x,1} - 1/2\Delta_m^x) \geq 0$, т.к. $(v_{m-1}^2 - 2v_{m-1}v_m + v_m^2) = (v_{m-1} - v_m)^2 \geq 0$.

Видно, что $6h_1^2(\Delta_m^x - \Lambda_m^{x,1}) \geq 0$, т.к. $(v_{m-1}^2 - 4v_{m-1}v_m + 4v_m^2) = (v_{m-1} - 2v_m)^2 \geq 0$.

Следствие 1. Имеют место неравенства $3^{-1}\Delta_1 \leq \Lambda^{x,1} \leq \Delta_1$ ($3^{-1}\Delta_2 \leq \Lambda^{y,1} \leq \Delta_2$).

Доказательство. Следует из замечаний 4, 5 и утверждений 8, 9, т.к.

$$(\Delta_1\bar{u}, \bar{v}) = (\Delta_1^x(u_1, u_2)', (v_1, v_2)') + \sum_{i=2}^{m-1} (\Delta_i^x(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})', (v_{i-1}, v_i, v_{i+1})') + (\Delta_m^x(u_{m-1}, u_m)', (v_{m-1}, v_m)').$$

Утверждение 10. Имеют место следующие неравенства

1. $9^{-1}\Delta_1 \otimes \Delta_2 \leq \Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{x,1} \leq \Delta_1 \otimes \Delta_2$,
2. $2/15\Delta_1^2 \otimes E_n \leq \Delta_1^2 \otimes \Lambda^{y,0} \leq \Delta_1^2 \otimes E_n$,
3. $2/15E_m \otimes \Delta_2^2 \leq \Lambda^{x,0} \otimes \Delta_2^2 \leq E_m \otimes \Delta_2^2$.

Доказательство. Если $\mu \in \mathbb{R} : \Lambda^{x,1}\bar{v} = \mu\Delta_1\bar{v}$, $\bar{v} \neq 0$, $\eta \in \mathbb{R} : \Lambda^{y,1}\bar{w} = \eta\Delta_2\bar{w}$, $\bar{w} \neq 0$, то, учитывая следствие 1, $\mu, \eta \in [3^{-1}; 1]$. Если $\lambda \in \mathbb{R} : \Lambda^{x,1} \otimes \Lambda^{y,1}\bar{u} = \lambda\Delta_1 \otimes \Delta_2\bar{u}$, $\bar{u} \neq 0$, то $\bar{u} = \bar{v} \otimes \bar{w}$ и $\lambda = \mu\eta \in [9^{-1}; 1]$, а, следовательно, имеет место 1., т.к. все рассматриваемые матрицы симметричны и положительно определены. Аналогично доказываются остальные неравенства.

Следствие 2. Имеет место $k_1A^2 \leq \Lambda \leq k_2A^2$, если $k_1 = 9^{-1}\gamma_1 = 9^{-1}$, $k_2 = \gamma_2 = (\lambda_{1,1}^2 + a_2)/\lambda_{1,1}^2$.

Доказательство. Из утверждений 2, 10 и замечания 2 получаются требуемые неравенства

$$k_1 \langle A^2\bar{v}, \bar{v} \rangle = k_1 \langle M\bar{v}, \bar{v} \rangle \leq \langle \Lambda\bar{v}, \bar{v} \rangle = \Lambda(\bar{v}, \bar{v}) \leq k_2 M(\bar{v}, \bar{v}) = k_2 \langle M\bar{v}, \bar{v} \rangle = k_2 \langle A^2\bar{v}, \bar{v} \rangle.$$

Введём нормы $\|\bar{v}\|_{A^2} = \sqrt{\langle A^2\bar{v}, \bar{v} \rangle}$, $\|\bar{v}\|_{\Lambda} = \sqrt{\langle \Lambda\bar{v}, \bar{v} \rangle}$, $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N$.

Рассматривается итерационный процесс:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : A^2(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_k(\Lambda\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), \quad \tau_k = \tau = 2/(k_1 + k_2) > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \forall \bar{u}^0 \in \mathbb{R}^N. \quad (9)$$

Теорема 2. Для итерационного процесса (9) имеют место оценки:

1. $\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{\Lambda} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{\Lambda}$,
2. $\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{A^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{A^2}$,

где относительная ошибка сходимости \bar{u}^k к решению \bar{u} следующая

$$\varepsilon \leq q^k = ((k_2 - k_1)/(k_2 + k_1))^k = ((8\lambda_{1,1}^2 + 9a_2)/(10\lambda_{1,1}^2 + 9a_2))^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{u}^k = \bar{u} + \bar{\psi}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тогда из итерационного процесса

$$A^2(\bar{\psi}^k - \bar{\psi}^{k-1}) = -\tau_k \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \quad \bar{\psi}^k - \bar{\psi}^{k-1} = -\tau_k A^{-2} \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \quad \bar{\psi}^k = (E - \tau_k A^{-2} \Lambda) \bar{\psi}^{k-1}.$$

Пусть $T_k = E - \tau_k A^{-2} \Lambda$, тогда $\bar{\psi}^k = T_k \bar{\psi}^{k-1}$, где $T_k = T_k' > 0$ и можно доказать первое неравенство.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \rangle &= \langle \Lambda T_k \bar{\psi}^{k-1}, T_k \bar{\psi}^{k-1} \rangle \leq \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} (\langle \Lambda T_k \bar{\psi}, T_k \bar{\psi} \rangle / \langle \Lambda \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle) \langle \Lambda \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle = \\ &= \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{\langle \Lambda T_k \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle \Lambda \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_k \frac{\langle \Lambda A^{-2} \Lambda \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle \Lambda \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \end{aligned}$$

полагаем $\bar{v} = A^{-1} \Lambda^{1/2} \bar{\psi}$,

$$= \sup_{\bar{v} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_k \frac{\langle \Lambda \bar{v}, \bar{v} \rangle}{\langle A^2 \bar{v}, \bar{v} \rangle} \right)^2 \langle \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle \leq \max \left\{ (1 - k_1 \tau_k)^2, (1 - k_2 \tau_k)^2 \right\} \langle \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle$$

отсюда

$$\langle \Lambda \bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \rangle = q^2 \langle \Lambda \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle, \quad \|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{\Lambda} \leq q \|\bar{u}^{k-1} - \bar{u}\|_{\Lambda}, \quad \|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{A^2} \leq q^k \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{A^2}.$$

Далее можно привести вывод второго неравенства.

$$\begin{aligned} \langle A^2 \bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \rangle &= \langle A^2 T_k \bar{\psi}^{k-1}, T_k \bar{\psi}^{k-1} \rangle \leq \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} (\langle A^2 T_k \bar{\psi}, T_k \bar{\psi} \rangle / \langle A^2 \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle) \langle A^2 \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \\ &= \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{\langle A^2 T_k \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle A^2 \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle A^2 \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle = \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_k \frac{\langle \Lambda \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle A^2 \bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle A^2 \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle \leq \\ &\leq \max \left\{ (1 - k_1 \tau_k)^2, (1 - k_2 \tau_k)^2 \right\} \langle A^2 \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle \end{aligned}$$

тогда

$$\langle A^2 \bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k \rangle = q^2 \langle A^2 \bar{\psi}^{k-1}, \bar{\psi}^{k-1} \rangle, \|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{A^2} \leq q \|\bar{u}^{k-1} - \bar{u}\|_{A^2}, \|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{A^2} \leq q^k \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{A^2}.$$

На каждом шаге итерационного процесса (9) возникает задача вида:

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : A^2 \bar{u} = \bar{l}, \bar{l} \in \mathbb{R}^N, \quad (10)$$

для которой возможно расщепление на две однотипные задачи

$$\begin{aligned} \bar{w} \in \mathbb{R}^N : A \bar{u} &= \bar{l}, \bar{l} \in \mathbb{R}^N, \\ \bar{u} \in \mathbb{R}^N : A \bar{u} &= \bar{w}, \bar{w} \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (11)$$

Для решения (11) можно применять варианты эффективного по количеству арифметических операций метода предложенного и изучаемого в работе [1]. В этом случае предполагается использование двухступенчатых итерационных процессов, где итерационные параметры могут выбираться с помощью наиболее подходящих в каждом случае вариационных методов для достижения необходимой точности в решениях вспомогательных и рассматриваемой задач.

Вывод. Учитывая всё ранее изложенное, можно отметить, что для решения рассматриваемой задачи (8) с N неизвестными на основании теоремы 2 предложенным итерационным процессом (9) с относительной погрешностью ε , требуется не более чем $O(N \ln^2 \varepsilon^{-1})$ арифметических операций.

Литература

1. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 88–93.
2. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Известия челябинского научного центра. – 2007. – Вып. 1 (35). – С. 33–36.

Поступила в редакцию 13 ноября 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 42–49

ITERATIVE FACTORIZATION FOR NUMERICAL SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER IN RECTANGULAR AREA

A.L. Ushakov¹

The elliptic equation of the fourth order in rectangular area is considered under mixed boundary conditions. The solution is based on iterative factorization of the operator that is energetically equivalent to the operator of the solved solution. Discretization of initial task is made on the basis of method of final elements, and the precondition is selected on the basis of final differences method, thus the speed of convergence of iterative process doesn't depend on discretization parameters.

Keywords: iterative factorization, precondition.

References

1. Ushakov A.L. Modifikatsiya iteratsionnoy faktorizatsii dlya chislennogo resheniya dvukh ellipticheskikh uravneniy vtoogo poryadka v pryamougol'noy oblasti (Updating iterative factorization for the numerical solution of two elliptic equations of the second order in rectangular area). *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*. 2013. Vol. 5, no. 2, pp. 88–93. (in Russ.).
2. Ushakov A.L. *Izvestiya chelyabinskogo nauchnogo tsentra*. 2007. Issue 1 (35), pp. 33–36. (in Russ.).

Received 13 November 2013

¹ Ushakov Andrei Leonidovich is Senior Lecturer, Differential and Stochastic Equations Department, South Ural State University.
E-mail: ushakov_al@inbox.ru

Механика

УДК 691.175.3

КОНСТРУКЦИОННАЯ ПРОЧНОСТЬ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ КОРОТКИХ СТЕКЛЯННЫХ ВОЛОКОН¹

С.Б. Сапожников², Р.Р. Абдрахимов³, А.А. Шакиров⁴

Приведены результаты экспериментальных исследований прочности хаотически армированного стеклопластика, получены данные по чувствительности материала к концентратору напряжений в виде отверстия. Определено значение эффективного предела прочности для данного материала с помощью нелокального экспресс-критерия и эффективный размер конечного элемента для оценки прочности элементов конструкций с концентраторами напряжений.

Ключевые слова: хаотически армированный стеклопластик, концентратор напряжения, метод конечных элементов, Экспресс-критерий.

Введение

Использование высокопрочных стеклопластиков во многих отраслях промышленности связано с определенными сложностями, вытекающими из анизотропии и особенностей способа крепления элементов конструкции – клеевых, болтовых и заклепочных соединений [1].

В случае использования болтовых или заклепочных соединений в материале просверливают отверстие, вызывающее местное повышение напряжений, что, как правило, способствует преждевременному разрушению конструкции. В этом аспекте исследование и прогнозирование прочности стеклопластика при наличии концентратора представляет интерес [2–4].

При изучении поведения элементов конструкций, изготовленных из композитов, наиболее распространенным подходом является сведение рассматриваемых материалов к однородным, в общем случае анизотропным, с некоторыми эффективными характеристиками [5]. Этот подход позволяет достаточно точно описывать статическое поведение композитных конструкций, все размеры которых существенно превышают характерный размер структурной неоднородности исследуемого композита. Однако он не дает возможности рассматривать задачи исследования концентраций напряжений, возникающих вблизи трещин, вырезов, различных технологических отверстий. Рассматривая композит как однородное тело невозможно предсказать изменению упругих и прочностных характеристик материала вблизи концентраторов напряжений.

Для оценки прочности композитных материалов с концентратором напряжений возможно использование экспресс-критерия [6], в котором учтена нелинейность диаграмм деформирования композита с использованием энергетических соображений Г. Нейбера.

В данной работе экспериментальным путем определено влияние концентраторов напряжений на прочностные свойства и проведен расчет методом конечных элементов с использованием экспресс-критерия на примере хаотически армированного стеклопластика (ХАСП).

Экспериментальное определение упругих и прочностных свойств образцов из ХАСП

Образцы изготовлены методом контактного формования, со схемой армирования:

- Стекломат 300 – 1 слой;
- Стекломат 600 – 2 слоя;
- Смола полиэфирная – PolyLite 440-M850 [8];
- Катализатор – Бутанокс М50.

¹ Работа выполнялась при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта «Создание высокотехнологичного производства модельного ряда энергосберегающих низкопольных трамвайных вагонов модульной конструкции» по договору № 02.G36.31.0002 от 12.02.2013 г.

² Сапожников Сергей Борисович – доктор технических наук, профессор, кафедра Прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: ssb@susu.ac.ru

³ Абдрахимов Руслан Рамильевич – аспирант, кафедра Прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

⁴ Шакиров Александр Александрович – аспирант, кафедра Прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральского государственного университета.

Было изготовлено 3 образца в виде полосок с размерами $L \times b \times t = 200 \times 25 \times 2$ мм. Испытания образцов проводили в условиях монотонного растяжения со скоростью движения захвата 5 мм/мин и длиной рабочей части 100 мм. Разрушающей считали максимальное значение нагрузки при растяжении образца, зафиксированное испытательной машиной.

Усредненный предел прочности по трем испытаниям оказался равным 220 МПа, модуль упругости – 8,7 ГПа. В экспериментах диапазон разброса значений пределов прочности составил $\pm 7\%$, а разброс значений модуля упругости $\pm 4\%$.

Экспериментальное исследование прочностных свойств образцов из ХАСП с концентраторами напряжений в виде отверстий

Определение прочности ХАСП с концентратором напряжений было выполнено на образцах в виде полосы прямоугольного сечения, шириной 25 и 40 мм.

Напряжение разрушения σ_c было рассчитано по формуле

$$\sigma_c = \frac{P_{\max}}{b \cdot t},$$

где b и t – ширина и толщина образца в неослабленном сечении.

Было изготовлено по три образца с диаметрами отверстий 2, 5 и 8 мм. В табл. 1 приведены значения разрушающего напряжения для каждого образца. На рис. 1 показан характер разрушения образцов с размерами концентраторов $d = 8, 5, 2, 1$ мм.

Таблица 1

№ образца	Значения разрушающего напряжения			Без концентратора σ_c , МПа
	$d = 2$ мм σ_c , МПа	$d = 5$ мм σ_c , МПа	$d = 8$ мм σ_c , МПа	
1	207	162	110	220
2	189	169	80	
3	215	157	129	
Среднее	203,7	162,7	106,3	

Важно отметить, что образцы с диаметром отверстия 1 мм разрушались не по ослабленному сечению, следовательно, исследуемый материал не чувствителен к данному размеру концентратора.

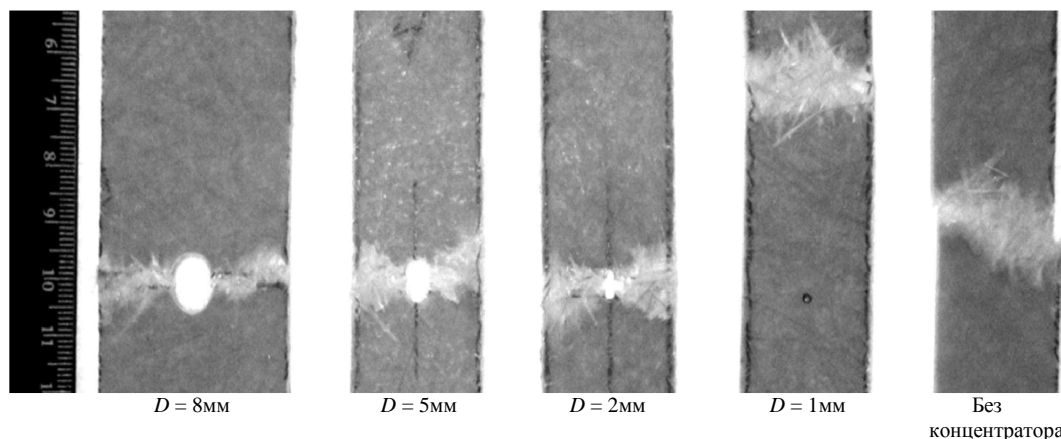


Рис. 1. Характер разрушения образцов

Оценка прочности пластин с концентратором напряжений методом конечных элементов

Оценка прочности пластин с отверстиями при растяжении проводилась по экспресс – критерию, предложенному в работах [6, 7]:

$$\max \bar{\sigma} \leq F_{xt}^*$$

Здесь в левой части стоит максимальное из всех усредненных на заданной базе напряжений в направлении нагружения, в предположении упругого поведения материала. В правой части находится эффективный предел прочности, учитывающий нелинейность диаграммы деформирования композита в верхней своей части с использованием энергетических соображений типа гиперболы Нейбера (о поиске напряжений и деформаций на нелинейном участке диаграммы « σ – ε » по из-

Механика

вестному упругому решению с использованием гиперболы $\sigma \cdot \varepsilon = \text{const}$, см. рис. 3). На гиперболе все точки имеют одинаковую удельную энергию деформирования $\sigma \varepsilon$.

Анализ рис. 2 показывает, что конечной точке нелинейной диаграммы A соответствует на условной линейной диаграмме « $\sigma_x - \varepsilon_x$ » точка B , которая характеризуется напряжениями

$$F_{xt}^* = \sqrt{E_x E_{xt} \varepsilon_{xt}}.$$

Эффективный предел прочности для данного материала оказался равным $F_{xt}^* = 336$ МПа.

Поскольку расчет $\max \bar{\sigma}$ для данного материала достаточно сложно провести аналитически, для этих целей следует использовать метод конечных элементов (МКЭ). Концепция микрооднородных напряженно-деформированных состояний (НДС) позволяет ввести естественным образом понятие коэффициента концентрации осредненных напряжений α_S , равного отношению $\max \bar{\sigma}$ к приложенным на удалении номинальным напряжениям σ

$$\alpha_S = \max \bar{\sigma} / \sigma.$$

Для растягиваемой вдоль оси X пластины (рис. 4) шириной $b = 25$ мм и $b = 40$ мм с отверстиями ($d = 2, 5$ мм для пластины с $b = 25$; $d = 8$ мм для пластины с $b = 40$ мм) получены расчетом с помощью МКЭ (пакет ANSYS/Workbench) значения коэффициентов концентрации осредненных напряжений α_S (табл. 2).

Таблица 2

Значения коэффициентов концентрации			
Размер КЭ A , мм	$d = 2$ мм	$d = 5$ мм	$d = 8$ мм
	α_S	α_S	α_S
0,2	2,36	2,80	2,93
0,5	2,03	2,53	2,73
1,0	1,74	2,17	2,51
2,0	1,62	2,0	2,23
5,0	1,38	1,66	1,80

На рис. 3 изображены результаты расчета напряжений в пакете ANSYS Workbench с диаметром отверстия $D = 2$ мм и размером конечного элемента $A = 1$ мм. В расчете использовалась модель идеально упругого материала с модулем упругости 8,7 ГПа. Тип элементов – 3D Solid 95.

Напряжения разрушения пластин можно определить по формуле

$$\sigma_{cr} = F_{xt}^* / \alpha_S.$$

В табл. 3 приведены значения напряжений разрушения σ_{cr} в зависимости от размера КЭ для пластин с размером концентратора напряжений $d = 2, 5, 8$ мм.

Таблица 3

Значения напряжений разрушения пластин			
Размер КЭ A , мм	$d = 2$ мм	$d = 5$ мм	$d = 8$ мм
	σ_{cr} , МПа	σ_{cr} , МПа	σ_{cr} , МПа
0,2	114,7	120,0	142,4
0,5	123,1	132,8	165,5
1,0	133,9	154,8	193,1
2,0	150,7	168,0	207,4
5,0	186,8	202,4	243,5

На рис. 4 приведены зависимости напряжений разрушения пластин σ_{cr} от размера конечного элемента A (сплошная красная линия). Также на графиках нанесены значения средних разрушающих напряжений (усреднялись разрушающие напряжения для трех одинаковых образцов)

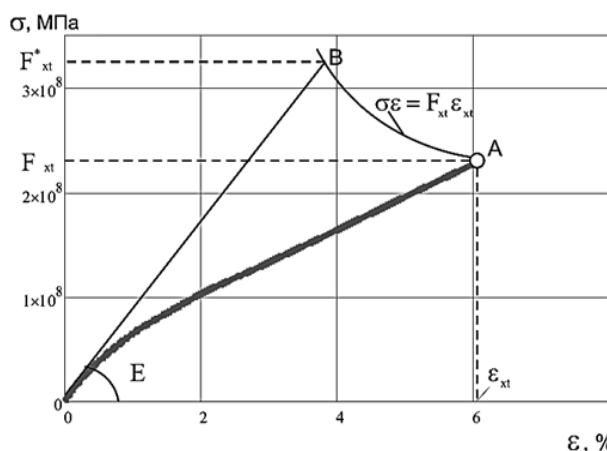


Рис. 2 Расчет «эффективного» предела прочности по диаграмме растяжения с помощью подхода Г. Нейбера

полученных экспериментальным путем σ_{cr} (сплошная синяя линия), а также максимальные и минимальные разрушающие напряжения, полученные в эксперименте (черная штриховая линия).

По графикам несложно определить эффективный размер конечного элемента, а также интервал, в пределах которого можно изменять размер КЭ, не снижая при этом точность расчетов более чем на 10 %. Обработка всех экспериментов показывает, что среднее значение размера КЭ для осреднения напряжений при оценке прочности конструкций из ХАСП должно быть $1,5^{+0,5}$ мм.

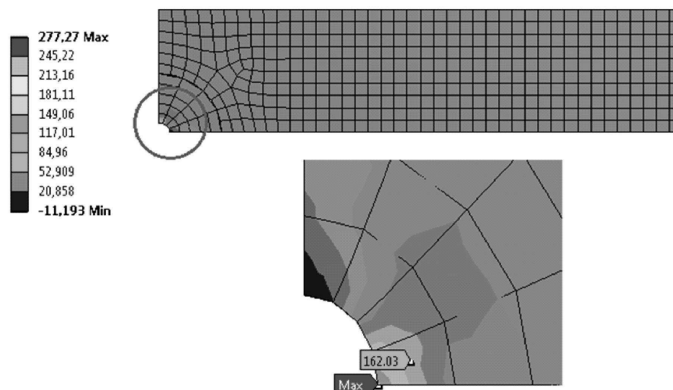


Рис. 3. Расчет пластины с диаметром отверстия 2 мм с размером КЭ $A = 1$ мм

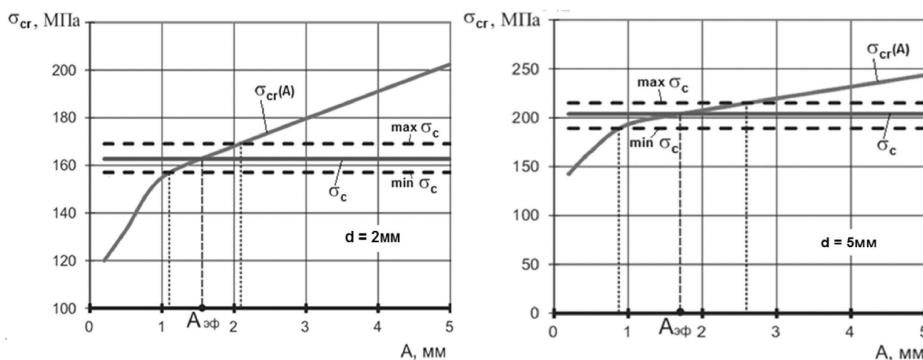


Рис. 4. Зависимости разрушающего напряжения от размера КЭ

Выводы

В работе были проведены механические испытания на растяжение образцов из полиэфирного стеклопластика, армированного короткими волокнами, определены его упругие и прочностные характеристики. Проведены механические испытания изготовленных образцов с различным диаметром отверстий (концентратором напряжений). Определено значение эффективного предела прочности для данного материала с помощью нелокального экспресс-критерия. С помощью пакета прикладных программ анализа НДС методом конечных элементов – *ANSYS Workbench* – определен эффективный размер конечного элемента для оценки прочности конструкций из данного материала. Показано, что среднее значение размера конечного элемента для осреднения напряжений при оценке прочности конструкций должно быть $1,5^{+0,5}$ мм.

Литература

1. Киркач, А.Б. Проблема прочности болтовых соединений на основе слоистых композиционных пластиков / А.Б. Киркач // Вестник ХПИ. Серия «Динамика и прочность машин». – 2011. – № 63. – С. 45–54.
2. Серенсен, С.В. Определение расчетных характеристик прочности стеклопластиков в зонах концентрации напряжений / С.В. Серенсен, В.С. Стреляев, Б.И. Болотников // Проблемы прочност. – 1972. – № 10. – С. 3–9.
3. Зайцев, Г.П. Расчет на прочность конструктивных элементов из стеклопластиков / Г.П. Зайцев, В.С. Стреляев. – М., Машиностроение, 1970. – 144 с.
4. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов / Я.С. Карпов. – Харьков: Национальный аэрокосмический университет «Харьковский авиационный институт», 2006. – 359 с.

5. Бохоева, Л.А. Особенности расчета на прочность элементов конструкции из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами: Монография / Л.А. Бохоева. – Улан-Удэ: ВСГТУ, 2007. – 192 с.

6. Сапожников, С.Б. Дефекты и прочность армированных пластиков: Монография / С.Б. Сапожников; под ред. О.Ф. Чернявского. – Челябинск: ЧГПТУ, 1994. – 162 с.

7. Сапожников, С.Б. Оценка прочности композитных материалов при наличии концентраторов напряжений: Учебное пособие / С.Б. Сапожников, О.С. Бушлаева – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 1999. – 53 с.

8. Альтаир Руспол – Стандартная ортофталевая полиэфирная смола Reichhold Polylyte 440-M850. – http://www.ruspol.spb.ru/reich_ds_pdf/440-m850.pdf

Поступила в редакцию 18 июля 2013 г.

**Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 50–54**

STRUCTURAL STRENGTH OF POLYMER COMPOSITES BASED ON SHORT GLASS FIBER

S.B. Sapozhnikov¹, R.R. Abdrakhimov², A.A. Shakirov³

The results of experimental research of randomly reinforced fiberglass are given, data on sensitivity of the material strength to the stress point in the form of a hole are obtained. The effective tensile strength for the material with non-local express criterion is defined. The finite element method is used to estimate the effective size of finite element.

Keywords: randomly reinforced fiberglass, stress point, finite element method, Express-criteria.

References

1. Kirkach A.B. *Vestnik KhPI. Seriya «Dinamika i prochnost' mashin»*. 2011. no. 63. pp. 45–54. (in Russ.).

2. Serensen S.V., Strelyaev V.S., Bolotnikov B.I. *Problemy prochnosti*. 1972. no. 10. pp. 3–9. (in Russ.).

3. Zaytsev G.P., Strelyaev B.C. *Raschet na prochnost' konstruktivnykh elementov iz stekloplastikov* (Calculation of the strength of fiberglass structural components). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 144 p. (in Russ.).

4. Karpov Ya.S. *Soedineniya detaley i agregatov iz kompozitsionnykh materialov* (Assembly of components and aggregates of composite materials). Khar'kov: Natsional'nyy aerokosmicheskiy universitet «Khar'kovskiy aviatsionnyy institut» Publ., 2006. 359 p. (in Russ.).

5. Bokhоеva L.A. *Osobennosti rascheta na prochnost' elementov konstruktssii iz izotropnykh i kompozitsionnykh materialov s dopustimymi defektami* (Features of calculation of the strength for structural components made of isotropic and composite materials with minor defects). Ulan-Ude: VSGTU, 2007. 192 p. (in Russ.).

6. Sapozhnikov S.B. *Defekty i prochnost' armirovannykh plastikov* (Defects and strength of reinforced plastics). Chelyabinsk: ChGPTU Publ, 1994. 162 p. (in Russ.).

7. Sapozhnikov S.B., Buslaeva O.S. *Otsenka prochnosti kompozitnykh materialov pri nalichii kontsentratorov napryazheniy* (Estimation of the strength of composite materials with stress points). Chelyabinsk: YuUrGU Publ., 1999. 53 p. (in Russ.).

8. *Altair Ruspol – Standartnaya ortoftalievaya poliefirnaya smola Reichhold Polylyte 440-M850* (Altair Ruspol – Standard ortho-phthalic polyester resin Reichhold Polylyte 440-M850). http://www.ruspol.spb.ru/reich_ds_pdf/440-m850.pdf

Received 18 July 2013

¹ Sapozhnikov Sergei Borisovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University. E-mail: ssb@susu.ac.ru

² Abdrakhimov Ruslan Ramilievich is Post-graduate Student, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University.

³ Shakirov Aleksandr Aleksandrovich is Post-graduate Student, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University.

РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА НА ПРИМЕРЕ КОНСТРУКЦИИ СВАРНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КАРКАСА¹

С.Б. Сапожников², О.А. Кудрявцев³, А.А. Шакиров⁴

Представлен анализ эффективности использования различных типов конечных элементов при модальном анализе сварных металлоконструкций, исследовано влияние пунктирных сварных швов на спектр собственных частот конструкции и отработаны способы их моделирования, позволяющие существенно снизить время на подготовку расчётных моделей.

Ключевые слова: модальный анализ, сварные металлоконструкции, конечно-элементные методики расчета.

Введение

В настоящее время все чаще при создании динамически нагруженных конструкций как на этапе проектирования и разработки, так и при изготовлении опытных образцов проводят расчет собственных частот и форм конструкций [1]. Это необходимо для того, чтобы в случае близости одной из собственных частот к рабочей внести требуемые конструктивные изменения и избежать резонанса. Еще один вариант применения модального анализа – проверка динамического поведения конструкции при появлении в ней различных дефектов [2] (дефекты приводят к сдвигу собственных частот, появлению дополнительных форм колебаний, что позволяет их идентифицировать).

На сегодняшний день программные пакеты, реализующие метод конечных элементов (МКЭ), позволяют проводить модальный анализ достаточно больших конструкций сложной формы, не прибегая к помощи распределенных вычислений. В этом случае выбор рационального типа элементов («Shell», «Solid», «Beam») позволяет значительно сократить время расчета.

Несмотря на очевидные преимущества конечно-элементных методик модального анализа конструкций, они требуют упрощения расчетных моделей, в частности, использования контактных алгоритмов в местах сварных соединений. Габаритные сварные металлоконструкции могут иметь несколько видов сварных швов в своем составе, в частности, иметь пунктирные сварные швы, точное моделирование которых существенно затрудняет процесс расчета.

В данной работе на примере расчета подборки каркаса нижней части крыши трамвайного вагона 71-631 производства Усть-Катавского вагоностроительного завода проведено сравнение эффективности применения Shell- и Solid-элементов для расчета собственных частот сварных металлоконструкций, методы моделирования пунктирных сварных швов, позволяющие существенно упростить расчетные модели, без потерь в точности результатов.

Расчетные модели

В рамках проекта «Создание высокотехнологичного производства модельного ряда энергосберегающих низкопольных трамвайных вагонов модульной конструкции» потребовалось проведение расчета собственных частот и форм колебаний крыши каркаса модуля средней секции трамвая 71-631 (рис. 1, а). Конструкция содержала около 150 элементов и несколько сотен сварных швов различной протяженности. Для выбора рациональной расчетной модели в пакете ANSYS Workbench 14.5.1, реализующем МКЭ, были сделаны 2 расчета подборки крыши (рис. 2, б):

¹ Работа выполнялась при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта «Создание высокотехнологичного производства модельного ряда энергосберегающих низкопольных трамвайных вагонов модульной конструкции» по договору № 02.G36.31.0002 от 12.02.2013 г.

² Сапожников Сергей Борисович – доктор технических наук, профессор, кафедра Прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: ssb@susu.ac.ru

³ Кудрявцев Олег Александрович – аспирант, кафедра Прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральский государственный университет.

⁴ Шакиров Александр Александрович – аспирант, кафедра Прикладной механики, динамики и прочности машин, Южно-Уральского государственного университета.

Механика

б): с использованием твердотельных элементов типа SOLID186 и оболочечных элементов SHELL63.

Достоинством твердотельных элементов является отсутствие необходимости модификации 3D-модели. Для использования оболочечных элементов было необходимо либо изначально создавать модель, выполненную поверхностями, либо с помощью модуля ANSYS DesignModeler преобразовать исходную 3D-модель в срединные поверхности с дальнейшей доработкой. При импортировании в ANSYS для оболочечной модели также необходимо задание толщин всех деталей.

В обоих случаях конструкция принималась свободно подвешенной, дополнительных закреплений не задавалось. Для моделирования сварных швов в пакете ANSYS Workbench использовались контакты между элементами конструкции типа «Bonded» (склейка), запрещающие любые взаимные перемещения в месте контакта.

В твердотельной модели по толщине профиля задавалось по два конечных элемента для учета влияния изгибающих моментов.

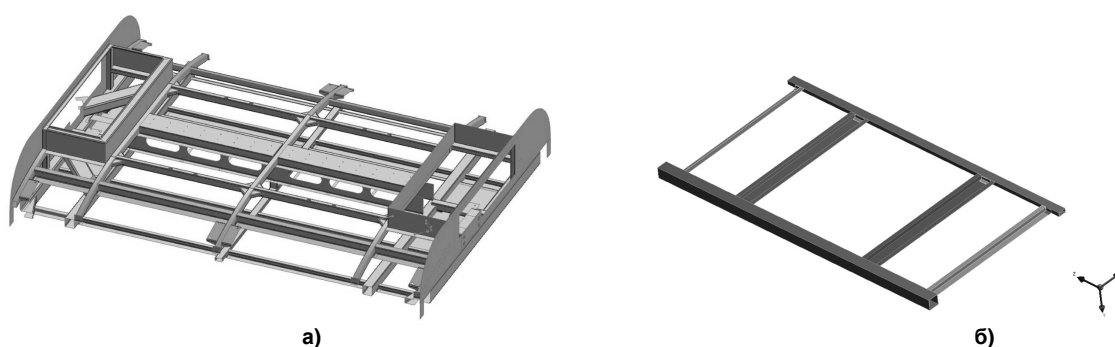


Рис. 1. а) Крыша каркаса модуля средней секции трамвайного вагона 71-631; б) Подборка крыши каркаса модуля средней секции трамвайного вагона 71-631

Результаты расчетов

В результате расчета определялись все собственные частоты конструкции в диапазоне от 0 до 50 Гц (табл. 1). Первые шесть нулевых частот, соответствующих перемещениям и поворотам конструкции как жесткого целого, в табл. 1 не приводятся.

Таблица 1

Собственные частоты конструкции, полученные на твердотельной и оболочечной модели

№	Собственная частота, полученная на твердотельной модели, Гц	Собственная частота, полученная на оболочечной модели, Гц
1	6,5	3,5
2	32,6	24,1
3	49,0	26,7
4	–	31,2
5	–	45,1
6	–	47,8

Из табл. 1 видно, что даже на такой несложной модели твердотельные элементы не позволяют определить все собственные частоты и формы конструкции в заданном диапазоне. Оболочечная модель позволила определить помимо найденных твердотельной моделью частот (1, 4, 6) еще три дополнительных. Кроме того, твердотельная модель значительно проигрывает оболочечной как по количеству конечных элементов, так и по времени расчета (табл. 2).

Таблица 2

Сравнение ресурсоемкости твердотельной и оболочечной моделей

Параметр	Твердотельная модель	Оболочечная модель
Количество конечных элементов	382436	201386
Количество узлов	2146160	202722
Время решения, с	2172	74

Для получения более адекватных результатов с применением твердотельных элементов необходимо увеличивать их количество по толщине профиля до 6–8, что исключает возможность использования обычной рабочей станции для подобных расчетов даже таких простых конструк-

ций. Расчет собственных частот и форм колебаний всей конструкции крыши, проведенный с использованием оболочечной модели, показал хорошее соответствие с экспериментальными данными, полученными в ходе испытаний на заводе-изготовителе.

Моделирование сварных швов при модальном анализе

Рассматриваемая конструкция крыши трамвайного вагона содержала несколько прерывистых сварных швов значительной протяженности. Точное моделирование таких швов требует трудоемкого изменения геометрических параметров конструкции (создание новых линий или поверхностей). Поэтому актуальным является расчетное исследование влияния конфигурации сварного шва на собственные частоты сварной конструкции. В качестве представительной конструкции при расчетном исследовании рассматривались пластина и профиль толщиной 6 мм, соединенные между собой по грани профиля пунктирным сварочным швом (рис. 2).

Были рассмотрены три варианта моделирования пунктирного сварного шва: простая склейка по линии контакта, склейка по пунктирной линии, повторяющей прерывистый шов, создание промежуточной поверхности (ширина 0,8 мм) меньшей толщины между профилем и пластиной. Утонение переходной поверхности в два раза до 3 мм должно было моделировать предполагаемое снижение жесткости по сравнению с непрерывным швом.

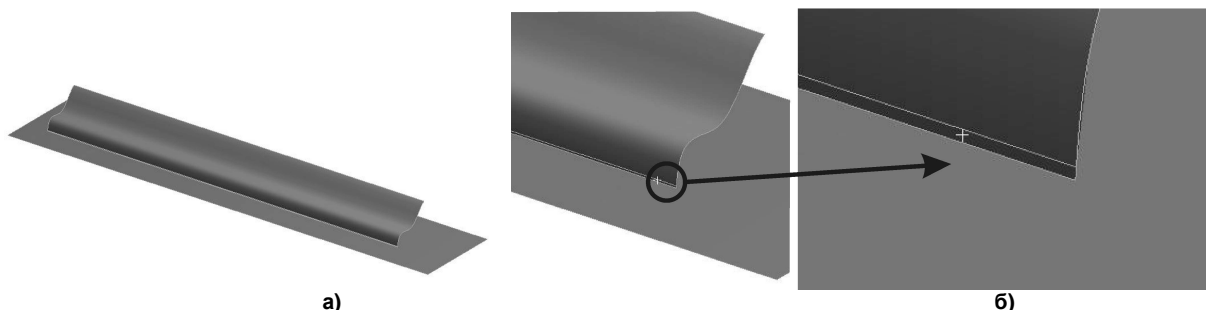


Рис. 2. а) Модель, рассматриваемая в тестовом примере б) Переходная поверхность для моделирования возможного понижения жесткости пунктирного сварного шва

Считалось, что в пунктирном шве протяженность сварки составляла половину от всей длины линии контакта (соотношение общей длины проваренных и неваренных отрезков составляло 1/1).

Модальный анализ показал, что влияние конфигурации контакта наблюдается только на собственные частоты колебаний выше 150 Гц (табл. 3). Следует отметить, что рассматривался неблагоприятный случай: единственный сварной шов, оказывающий значительное влияние на жесткость, малое количество отрезков со сваркой и без нее и их большая протяженность (по 90 мм).

Повышение частоты мест сварки, как в реальных конструкциях, будет приводить к повышению частоты, на которой становится заметным влияние способа моделирования пунктирного шва. Для большинства конструкций транспортных средств наибольший интерес представляют частоты до 150 Гц, поэтому непосредственное моделирование пунктирных сварных швов прерывистыми линиями было нецелесообразно, контакт задавался аналогично с непрерывным швом. Данный результат позволяет существенно снизить время на подготовку расчетных моделей для модального анализа. При анализе прочности конструкции такой подход недопустим.

Таблица 3

Сравнение величин первых десяти собственных частот тестовой модели при разных подходах к заданию сварного шва

№	Частота колебаний, Гц		
	При задании контакта по пунктирной линии	При задании контакта по линии	При использовании переходной поверхности меньшей жесткости
1	66,10	66,28	66,08
2	98,35	98,89	98,28
3	150,94	152,40	151,37
4	186,84	198,00	183,90
5	203,86	208,06	203,07

Выводы

При проведении модального анализа сложных конструкций более эффективными являются оболочечные модели, несмотря на необходимость доработки геометрической модели конструкции. В интервале частот, представляющих наибольший интерес для кузовов железнодорожных транспортных средств (до 150 Гц), пунктирные сварные швы могут моделироваться как сплошные без существенных потерь в точности расчетов.

Литература

1. Вагоны: проектирование, устройство и методы испытаний / под ред. Л.Д. Кузьмича. – М.: Машиностроение, 1978. – 376 с.
2. http://www.zetlab.ru/doc/articles/Modal_analysis.pdf

Поступила в редакцию 18 июля 2013 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 55–58*

RATIONAL CHOICE OF FINITE ELEMENT MODELS FOR MODAL ANALYSIS ON THE BASIS OF THE CONSTRUCTION OF WELDED METAL FRAME

S.B. Sapozhnikov¹, O.A. Kudryavtsev², A.A. Shakirov³

The paper presents the analysis of effectiveness of various types of finite elements in the modal analysis of welded metal frames, the effect of dashed welds on the spectrum of the natural frequency of metal frames is analyzed; and methods of their modeling are worked out to reduce the time of preparing finite element models significantly.

Keywords: modal analysis, welded metal frames, final element methods of calculation.

References

1. Kuz'mich L.D (Ed.). *Vagony: proektirovanie, ustroystvo i metody ispytaniy* (Cars: design, structure and methods of testing). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 376 p. (in Russ.).
2. http://www.zetlab.ru/doc/articles/Modal_analysis.pdf

Received 18 July 2013

¹ Sapozhnikov Sergei Borisovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University.

E-mail: ssb@susu.ac.ru

² Kudryavtsev Oleg Aleksandrovich is Post-graduate Student, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University.

³ Shakirov Aleksandr Aleksandrovich is Post-graduate Student, Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, South Ural State University.

ИНВАРИАНТНАЯ ЗАВИХРЕННОСТЬ И ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЗУЩЕГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ПРОНИЦАЕМУЮ МЕМБРАНУ

О.Н. Шабловский¹

Представлен новый класс стационарных ползущих движений вязкой жидкости с учетом внешней силы сопротивления. Дан пример инвариантной завихренности течения жидкости сквозь проницаемую мембранно-капсульную систему. Изучено влияние морфологических свойств капсул на закономерности производства энтропии. Обнаружена важная роль корреляции «вихрь скорости – вязкая диссипация энергии» в формировании теплового поля жидкости.

Ключевые слова: ползущее течение; завихренность; вязкая диссипация энергии; производство энтропии; устойчивость.

Введение. Гидродинамика медленных («ползущих») течений вязкой жидкости имеет широкую область практических приложений [1]: химическая и мембранная технологии, фильтрация воды и нефти в грунтах, дисперсные системы и др. В теоретическом отношении наиболее полно изучены процессы медленного обтекания тел вращения, задачи о движении в жидкости групп из нескольких частиц, а также течение жидкости в пористой среде и вопросы гидродинамической теории смазки. Анализ современного состояния теории ползущих течений [2–5] показывает, что являются актуальными следующие вопросы: вихревые свойства течений при малых числах Рейнольдса, роль вязкой диссипации энергии в формировании структуры теплового поля жидкости, закономерности производства энтропии. Известно, что число Рейнольдса $Re = \rho u_b l / \mu$ представляет отношение сил инерции к силам вязкого трения и определяет интенсивность вынужденной конвекции. Здесь ρ – плотность жидкости; u_b – масштаб скорости; l – характерный линейный размер; μ – коэффициент динамической вязкости. Ползущее течение происходит при $Re \ll 1$, и это означает, что вязкость жидкости большая, а конвективное ускорение – малое. Следовательно, в уравнениях движения доминируют силы, зависящие от вязкости, и можно пренебречь инерционными членами. Движение жидкости мы рассматриваем с учетом внешней силы трения $\vec{F} = -\zeta \vec{V}$, которая моделирует сопротивление потоку на границах области течения (стенки трубы, дно кюветы, подстилающая поверхность и др.) [6]. Здесь ζ – коэффициент сопротивления; \vec{V} – вектор скорости жидкости. Следует отметить, что принятый в теории фильтрации закон Дарси можно интерпретировать как линейную зависимость силы сопротивления от скорости фильтрации [7]. Особенности влияния \vec{F} на структуру вязкого потока изложены в [8].

В настоящей статье изучаются гидродинамические и тепловые аспекты задачи о ползущем течении вязкой ньютоновской жидкости сквозь проницаемую мембрану. Цель работы: 1) получить новый класс двумерных стационарных ползущих течений вязкой жидкости с учетом внешней силы сопротивления; 2) построить в виде сильного гидродинамического разрыва математическую модель проницаемой мембранно-капсульной системы; 3) изучить вихревые, диссипативные и энтропийные свойства этого течения.

Точное решение. Стационарное ползущее течение жидкости определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \zeta u, \quad (2)$$

¹ Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра технической механики, Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \zeta v, \quad (3)$$

$$c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi, \quad (4)$$

$$\Phi = \mu \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где x, y – прямоугольные декартовы координаты; p – давление жидкости; u, v – компоненты вектора скорости $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; $c = \rho c_p$ – объемная теплоемкость; Φ – диссипативная функция. Рассматриваем процессы, для которых $\rho, \mu, \zeta, \lambda, c = \text{const}$, и динамическую задачу решаем отдельно от тепловой. Производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов подсчитывается по формуле [9]:

$$\sigma = [(\vec{q} \cdot \vec{q}) / (\lambda T^2)] + (\Phi / T), \quad (6)$$

где \vec{q} – вектор удельного теплового потока, имеющий компоненты, $q_x = -\lambda \partial T / \partial x$, $q_y = -\lambda \partial T / \partial y$. Принцип минимума производства энтропии в стационарных состояниях (принцип Пригожина) выражается неравенством [10]:

$$\sigma_{stab} \leq \sigma_{instab}, \quad (7)$$

где левая/правая части неравенства соответствуют производству энтропии в устойчивом/неустойчивом состояниях. Для неравновесного перехода термодинамической системы из старого в новое состояние принцип (7) означает следующее: новому устойчивому состоянию отвечает меньшее значение производства энтропии, чем производство энтропии старого, но продолженного в неустойчивую область состояния системы. Подробное изложение этого вопроса и библиография проблемы даны в [10].

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнения гидродинамики (1)–(3) имеют следующее точное решение:

$$u = \psi \delta \eta, \quad v = -\psi \delta \xi, \quad (8)$$

$$\xi = E \sin \delta y, \quad \eta = E \cos \delta y, \quad E = \exp \delta x, \quad (9)$$

$$\psi \equiv d\psi / d\xi = \psi_1 + 3\psi_3 \xi^2, \quad \psi_1, \psi_3 = \text{const},$$

где $\psi = \psi(\xi)$ – функция тока. Параметр решения δ удовлетворяет связи $\zeta = 8\delta^2 \nu$, $\nu = \mu / \rho$. Давление жидкости подсчитывается по формуле

$$\Pi \equiv p - p_0 = 2\mu \delta^2 E^2 \eta \psi_3 - \rho \zeta (\psi_1 \eta + \psi_3 \xi^2 \eta), \quad p_0 \equiv \text{const}. \quad (10)$$

Завихренность течения равна

$$\omega \equiv (1/2)[(\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)] = -\psi \delta^2 E^2 / 2, \quad \psi = 6\psi_3 \xi, \quad (11)$$

где ψ_3 – свободный параметр. Компоненты девиатора тензора напряжений такие: $\tau_{xx} = -\tau_{yy} = 2\mu \delta u / \partial x$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu[(\partial v / \partial x) + (\partial u / \partial y)]$. Диссипативная функция (5) имеет вид:

$$\Phi = 4\mu \delta^4 E^2 [9\psi_3^2 E^4 \sin^2 \delta y \cos^2 \delta y + (\psi_1 + 6\psi_3 E^2 \sin^2 \delta y)^2]. \quad (12)$$

Плоскость течения разделена на две области. Область 1 – это правая полуплоскость $x \geq 0$, $\delta^{(1)} = \delta < 0$. Область 2 – это левая полуплоскость $x \leq 0$, $\delta^{(2)} = -\delta^{(1)} = -\delta > 0$. Верхний индекс в скобках указывает номер области. Принимая во внимание структуру формул (8)–(10), берем $\psi_1^{(1)} = -\psi_1^{(2)} = \psi_1$, $\psi_3^{(1)} = -\psi_3^{(2)} = \psi_3$, $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho$, $\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$, $p_0^{(1)} = p_0^{(2)} = p_0$, и тогда при одних и тех же значениях $|x|$ получаем:

$$\begin{aligned} u(x \leq 0, y) &= u(x \geq 0, y); \quad v(x \leq 0, y) = -v(x \geq 0, y); \\ \Pi(x \leq 0, y) &= -\Pi(x \geq 0, y); \quad \tau_{xx}(x \leq 0, y) = -\tau_{xx}(x \geq 0, y); \\ \tau_{xy}(x \leq 0, y) &= \tau_{xy}(x \geq 0, y); \quad \omega(x \leq 0, y) = \omega(x \geq 0, y), \end{aligned} \quad (13)$$

где $y \in (-\infty, \infty)$. Из дальнейшего решения тепловой задачи будет ясно, что надо также взять $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda$, $c^{(1)} = c^{(2)} = c$.

Гидродинамическая интерпретация решения заключается в том, что проникаемую мембрану [линию $x = 0$] мы принимаем за неподвижный вдоль нормали \vec{n} сильный разрыв. На таком разрыве должны быть выполнены динамические условия совместности [11], являющиеся следствием интегральных законов сохранения массы, импульсов и энергии. В данном случае имеем при $x = 0$ следующие условия:

$$\rho^{(1)}u_1 = \rho^{(2)}u_2 = \rho u; \quad (14)$$

$$\vec{R} + \vec{p}_n^{(1)} - \rho^{(1)}\vec{V}_1 u_1 = \vec{p}_n^{(2)} - \rho^{(2)}\vec{V}_2 u_2; \quad (15)$$

$$W + \vec{p}_n^{(1)} \cdot \vec{V}_1 - q_x^{(1)} - \rho^{(1)}u_1[(\vec{V}_1^2/2) + U_1] = \vec{p}_n^{(2)} \cdot \vec{V}_2 - q_x^{(2)} - \rho^{(2)}u_2[(\vec{V}_2^2/2) + U_2], \quad (16)$$

где \vec{p}_n – вектор поверхностных напряжений с компонентами $p_{nx} = -p + \tau_{xx}$, $p_{ny} = \tau_{xy}$; $\vec{R}(R_x, R_y)$ и W – поверхностные плотности распределения на разрыве внешних для жидкости возбуждающей силы и притока энергии. Индексами 1, 2 отмечены параметры течения справа ($x = +0$) и слева ($x = -0$) от разрыва. Далее все формулы записаны в терминах и обозначениях правой полуплоскости, $x \geq 0$.

Физические и физико-химические процессы на поверхности мембраны могут быть весьма разнообразными [12]. Источники импульсов \vec{R} и энергии W моделируют возбуждающее динамическое и тепловое воздействие мембраны $x = 0$ на жидкость. Из выражений (8)–(10) [см. также группу формул (13)] ясно, что при $x = 0$ u -компонента скорости непрерывна, а v -компонента меняет знак. Таким образом, при протекании через разрыв вектор скорости \vec{V} сохраняет свой модуль, но изменяет направление, т.к. поворачивается на некоторый угол. Вязкое касательное напряжение τ_{xy} и диссипативная функция Φ непрерывны при $x = 0$. Отклонение давления $\Pi = p - p_0$ от его отсчетного значения p_0 имеет разные знаки по обе стороны ($x = \pm 0$) разрыва. Вся плоскость течения разделена на полосы линиями $\delta y = \pi n_0 [n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots - \text{любое целое число}]$, вдоль которых $v = 0$, $u = \delta E \psi_1(-1)^{n_0}$. Значит, $\delta y = \pi n_0$ – это линии растекания потока (spread line), которые обладают еще и тем свойством, что вдоль них $\omega = 0$, см. (11). При переходе через линию растекания v -компонента скорости и завихренность ω меняют знаки. Характерные точки гидродинамического поля – это точки пересечения линии разрыва и линий растекания:

$$x = 0, \delta y = \pi n_0, v = 0, u = \psi_1 \delta(-1)^{n_0}, \Pi = (-1)^{n_0} \rho \zeta [(\psi_3/4) - \psi_1].$$

Для краткости называем каждую такую точку s -точкой. В s -точке скорость непрерывна, а скачок давления [$\Pi^{(1)} = -\Pi^{(2)}$] обусловлен действием возбуждающей силы \vec{R} . Группа линий поворота

$$\delta y = 2\pi n_0 \pm (\pi/2), u = 0, v = -(\psi_1 + 3\psi_3 E^2) \delta(\pm E), p = p_0$$

представляет собой семейство изобар, и на каждой p_0 -изобаре происходит поворот вектора скорости, потому что u -компонента меняет знак при переходе через p_0 -изобару. Данное течение является периодическим по координате y , и наблюдается перемежаемость p_0 -изобар (линий поворота) и линий растекания потока. Обсудим два режима движения жидкости: безвихревое течение по обе стороны проникаемой мембраны и вихревое течение, содержащее мембранно-капсульную систему.

Безвихревое течение. При $\psi_3 = 0$ имеем нулевую завихренность $\omega \equiv 0$, см. (11). Схема расположения векторов скорости жидкости дана на рис. 1. В каждой полосе между линиями растекания доминирующее направление движения показано дуговыми стрелками. В центральной части рис. 1 (вблизи оси ординат δy) тонкими стрелками указано изменение направления вектора скорости, являющееся результатом натекания жидкости на сильный разрыв. Отдельный отрезок на разрыве, например $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ и т.д. является звеном всей цепочки $x = 0$.

Механика

Из рис. 1 ясно, что каждое звено обтекается потоком жидкости и на краях звена, т.е. в s -точках, векторы скорости параллельны и противоположны друг другу. Из (15) находим:

$$x=0, R_x=(9/4)\Pi, R_y=2\rho uv, \quad (17)$$

где $\Pi(x=0, y)=-8\delta\mu u(x=0, y)$. Для случая $\psi_3=0$ гидродинамическое поле (8)–(10) есть результат действия двумерного источника импульсов (17). На разрыве скорость и давление жидкости выражаются через компоненты возбуждающей силы следующим образом: $\Pi=(4/9)R_x$, $u^2v^2=R_y^2/(4\rho^2)$, $u^2+v^2=\delta^2\psi_1^2$. Давление Π пропорционально поперечной к разрыву R_x -компоненте. Продольная по отношению к разрыву R_y -компонента силы нелинейным образом проявляет себя при формировании двумерного гидродинамического поля, а именно: R_y мультипликативно связана со скоростями u, v .

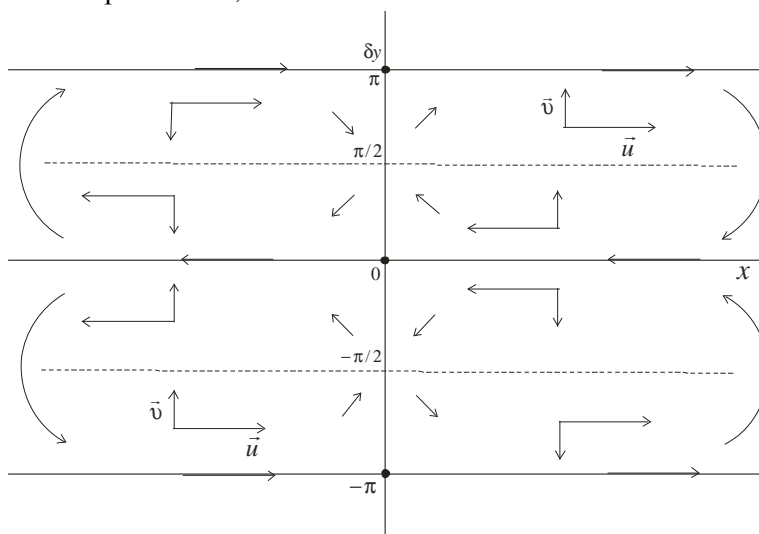


Рис. 1. Схема течения жидкости по обе стороны сильного разрыва. Толстые стрелки – компоненты вектора скорости; тонкие стрелки – направление вектора скорости вблизи разрыва. Линия растекания – сплошная; линия поворота – пунктирная. Дуговая стрелка указывает направление движения жидкости в полосе между линиями растекания. Темные кружки – s -точки

Уравнение энергии (4) имеет точное решение:

$$T-T_0=\theta_1\xi-(\mu_1^2\xi^2/2), \mu_1^2=(4\mu/\lambda)\delta^2\psi_1^2, \psi_3=0, \quad (18)$$

где θ_1 – произвольная постоянная; T_0 – отсчетное значение температуры. Безразмерный критерий $\mu_1^2/T_0=4\text{Pr}(u^2+v^2)/(c_pT_0)$, $x=0$ несет информацию о числе Прандтля $\text{Pr}=c_p\mu/\lambda$ и об отношении двух характерных плотностей энергии: кинетической $\rho(u^2+v^2)/2$ и тепловой $\rho c_p T_0$. Своеобразие решения (18) в том, что для него сумма конвективных членов в уравнении (4) обращается в нуль тождественно. Взяв $T_0^{(1)}=T_0^{(2)}=T_0$, $\theta_1^{(1)}=-\theta_1^{(2)}=\theta_1>0$, получаем, что при $x=0$ непрерывны температура и касательная к разрыву составляющая теплового потока $q_y^{(1)}=q_y^{(2)}$; см. также (13). Нормальный к разрыву тепловой поток меняет знак при переходе через границу $x=0$: $q_x^{(1)}=-q_x^{(2)}$. На основе соотношения (16) получаем:

$$W=-2\lambda\delta(T-T_0)-[5u^2/(u^2+v^2)](\Phi/\delta), x=0. \quad (19)$$

Это значит, что возбуждающий источник энергии W расщепляется аддитивно на два тепловых потока: первое слагаемое в правой части (19) ассоциируется с переносом энергии за счет теплопроводности, второе слагаемое относится к вязкой диссипации энергии. В s -точке имеем постоянную температуру $T=T_0$ и источник энергии $W=-5\lambda\delta\mu_1^2>0$; тепловой поток направлен вдоль линии разрыва: $q_x=0$, $q_y=-\lambda\delta\theta_1(\pm 1)$; производство энтропии $\sigma=[\lambda\delta^2\theta_1^2/T_0^2]+(4\mu\delta^2u^2/T_0)$ экстремумов не имеет.

Точку пересечения линии разрыва $x=0$ и изобары $p=p_0$ назовем p_0 -точкой. Здесь имеем два варианта: p_0^+ и p_0^- различаются знаками $\sin \delta y = \pm 1$. Тепловое состояние этих точек определяется выражениями:

$$T - T_0 = \pm \theta_1 - (\mu_1^2 / 2), \quad W = -2\lambda \delta(T - T_0),$$

и так же, как в s -точке, производство энтропии обладает свойствами монотонности $\partial \sigma / \partial (\mu_1^2) > 0$, $\partial \sigma / \partial (\delta^2) > 0$. Для $\theta_1 > 0$ и $\theta_1 < 0$ решение имеет одно и то же физическое содержание. При $T = T_0 + \mu_1^2 + (\mu_1^4 / 4T_0)$ производство энтропии $\sigma = \sigma(\theta_1)$ достигает минимального значения $\sigma_{\min}(\theta_1)$. При положительном/отрицательном θ_1 этот минимум наблюдается в p_0^+ / p_0^- точке. Режим функционирования p_0^\pm -точки, соответствующий $\sigma_{\min}(\theta_1)$, осуществляется при $\varphi \equiv \lambda(T - T_0)\delta^2 / \Phi = 1 + (\mu_1^2 / 4T_0)$, т.е. в значительной степени зависит от числа Pr . Согласно (7), это значение φ определяет нижнюю границу производства энтропии для устойчивых течений.

Мембранно-капсульная система. Рассмотрим решение (8) – (10) при $\psi_3 > 0$, $\psi_1 < 0$ [напомним, что в левой полуплоскости нужно брать $\psi_3 < 0$, $\psi_1 > 0$]. В этом случае существует неподвижная непроницаемая граница $\xi_w^2 = -\psi_1 / (3\psi_3) > 0$; $\xi_w^{(1)} = -\xi_w^{(2)} = \xi_w$. Линия $\xi = \xi_w$ определяет плоский двумерный контур капсулы $\exp \delta x = \xi_w / \sin \delta y$, причем в каждой полосе, ограниченной линиями растекания $\xi = 0$, следует брать ξ_w с тем же знаком, что и $\sin \delta y$. Будем различать «большие» [$\xi_w^2 = \varepsilon \in (0, 1)$] и «малые» [$\xi_w^2 = 1 - \varepsilon > 0$] капсулы, где ε – малый положительный параметр. На линии поворота $\delta y = 2\pi n_0 \pm (\pi / 2)$ имеем $\exp \delta x = |\xi_w|$, и поэтому малым, но конечным значениям ξ_w^2 соответствует «большая» капсула, вершина которой находится на большом, но конечном расстоянии от мембраны $x=0$. Вместе с тем, чем меньше ξ_w^2 , тем ближе основание капсулы ($x=0$) к линиям растекания. Если $\xi_w^2 = 1 - \varepsilon$, то непроницаемая граница «малой» капсулы локализована в конечной окрестности p_0 -точки. Стыковка при $x=0$ решений для левой и правой полуплоскостей дает излом линии контура капсулы (рис. 2). Точки излома – это точки соединения основания капсулы с мембраной. В итоге имеем мембранно-капсульную систему ($0 < \xi_w^2 < 1$), в которой отдельные проникаемые участки мембраны соединены неподвижными непроницаемыми капсулами. Решение (8)–(10) имеет физический смысл во внешней для капсул плоской двумерной области: $0 \leq \xi^2 \leq \xi_w^2$. Схема течения показана на рис. 2. На стенках капсулы выполнены условия прилипания и непротекания.

Завихренность течения определяется формулой (11) и не зависит от константы ψ_1 , являющейся параметром формы капсулы. Значит, конечные возмущения скорости и давления, которые характеризуются слагаемыми, содержащими ψ_1 [см. (8)–(10)], оставляют без изменения вихрь скорости. Таким образом, в данном классе решений для данного типа конечных возмущений наблюдается инвариантная завихренность ползущего течения вязкой жидкости. Кривизна вершины капсулы равна $K = |\delta|$, т.е. коэффициент сопротивления можно записать в виде $\zeta = 8K^2 \nu$. На вершине капсулы [$\sin \delta y = 1$, $E = \xi_w$] имеем зависимости

$$\omega^2 = 9K^4 \psi_3^2 \xi_w^6, \quad \Phi = 4\mu \omega^2, \quad (20)$$

которые указывают на важную роль кривизны K в формировании вихревого поля.

При решении тепловой задачи учитываем вязкую диссипацию энергии, а конвективными членами в левой части уравнения энергии (4) пренебрегаем, полагая, что $Pe = Re Pr \ll 1$, где $Pe = lu_b / (\lambda / c)$ – число Пекле. Тепловое состояние жидкости определяется следующим выражением:

$$T - T_0 = \theta_0(\xi) + E^2 \theta_2(\xi), \\ \theta_0(\xi) = (\xi / \xi_w)(\theta_w + \mu_4^2) - (\mu_1^2 \xi^2 / 2) + \mu_{13} \xi^4 - \mu_3^2 \xi^3 [\xi_w^3 + (2\xi^3 / 5)],$$

$$\theta_2(\xi) = (3\mu_3^2\xi/4)(\xi_w^3 - \xi^3), \quad \mu_1^2 = 4\mu\delta^2\psi_1^2/\lambda, \quad \mu_3^2 = 4\mu\delta^2\psi_3^2/\lambda, \\ \mu_{13} = -4\mu\delta^2\psi_1\psi_3/\lambda, \quad \mu_4^2 = -58\mu\delta^2\psi_1^3/(135\lambda\psi_3).$$

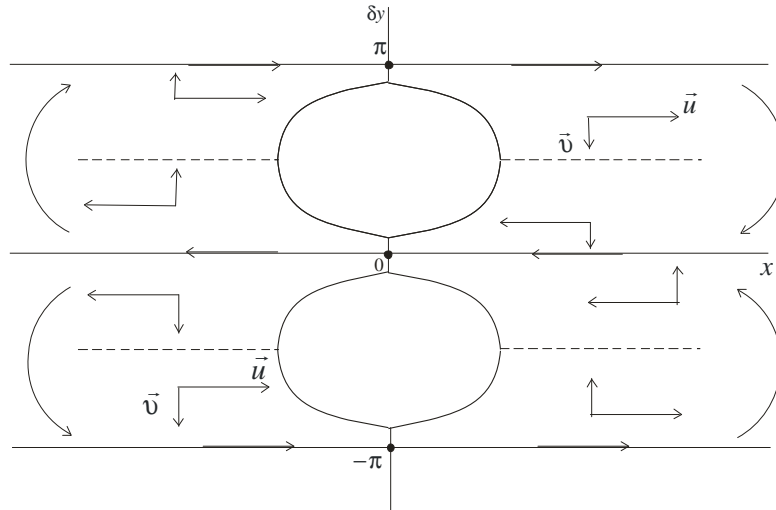


Рис. 2. Схема течения жидкости сквозь мембранно-капсульную систему. Обозначения такие же, как на рис. 1

Линия растекания $\xi = 0$ имеет температуру $T = T_0 > 0$. Стенки капсул тоже изотермические: $\xi = \xi_w, T_w = T_0 + \theta_w > 0$. Выбор произвольной постоянной θ_w определяет температуру капсулы. Если $\theta_w > 0$, то $T_w > T_0$, и называем капсулу «горячей». Если $\theta_w < 0$, то $0 < T_w < T_0$, и называем капсулу «холодной». При протекании через мембрану температура жидкости непрерывна, а вектор теплового потока сохраняет свой модуль и поворачивается на некоторый угол, потому что меняет знак компонента $q_x = q_x^{(1)} = -q_x^{(2)}$. Вдоль линии растекания $q_x = 0$, и вектор \vec{q} ортогонален этой линии. На вершине капсулы тепловой поток ортогонален мембране: $q_y = 0$. На мембране возбуждающие источники импульсов и энергии имеют вид:

$$x = 0, \quad R_x = D\Pi, \quad R_y = 2\rho uv, \\ D = (2 + 27\xi_w^2 - 26\sin^2 \delta y)/(1 + 12\xi_w^2 - 4\sin^2 \delta y), \\ W = 2(\Pi u - \tau_{xx}u - \tau_{xy}v + q_x). \quad (21)$$

Для «большой» капсулы получаем простую формулу $D \cong 2$, т.е. нормальной к разрыву компоненте $R_x \cong 2\Pi$ соответствует удвоенный перепад давления $\Pi = p - p_0$. Для «малой» капсулы вблизи ее основания $D \cong 1/3$, а в s -точках $D \cong 29/13 > 2$. Развернутая запись выражения $W(y)$ не приводится. Отметим только, что у основания «большой» капсулы, т.е. вблизи s -точки, источник энергии генерирует завихренность: $W = [-\mu\omega^2/(3\delta)] + O(\varepsilon)$. Для системы «малых» капсул источник энергии в s -точке генерирует кинетическую энергию на линии растекания: $W = (-64/3)\mu\delta^2u^2 + O(\varepsilon)$. Стенки «малой» капсулы располагаются в ε -окрестности p_0 -точки, и здесь источник энергии $W \cong 2q_x$ определяет нормальный к разрыву тепловой поток, а остальные слагаемые в (21) имеют по отношению к ε порядок малости не ниже первого.

Обсудим экстремальные свойства производства энтропии. Сначала рассмотрим σ_s -режим, который характеризуется тем, что в s -точке зависимость $\sigma(\xi_w^2)$ имеет минимум при условии, что

$$\varphi_w \cong \frac{\lambda(T_w - T_0)\delta^2}{\Phi} = \frac{1}{12} + \frac{29\xi_w^2}{45} \mp \left[\frac{1}{36} \left(1 + \frac{29\xi_w^2}{5} \right)^2 + 2z\varphi_0 \right]^{1/2}, \quad (22)$$

где $\Phi = 9\lambda\delta^2\xi_w^4\mu_3^2$, $\varphi_0 = \lambda T_0\delta^2/\Phi$, $T_w - T_0 = \theta_w$. Здесь учтено, что в s -точке

$$\vec{q} \cdot \vec{q} = \lambda^2\delta^2(A_1 + B_1)^2, \quad A_1\xi_w = \theta_w + \mu_4^2, \quad B_1 = 3\mu_3^2\xi_w^3/4. \quad (23)$$

Знаки $-/+$ в (22) относятся к «холодной»/«горячей» капсулам. Для «горячей» капсулы σ_s -режим существует при всех $T_0 > 0$, а для «холодной» стенки имеем ограничение $\varphi_0 > (12/5)$, $\xi_w^2 \in (0, 1)$. Если капсула «большая», то допустимы меньшие значения φ_0 . Например, при $\xi_w^2 = 1/100$ достаточно взять $\varphi_0 > 1/10$. Связь (22) определяет нижнюю границу производства энтропии в σ_s -режиме для устойчивых течений сквозь мембранно-капсульную систему.

Теплоизолированная s -точка ($\bar{q} = 0$) существует в режиме «холодной» стенки $\theta_w < 0$ (23) и при этом на вершине капсулы получаем $\partial(\omega^2)/\partial(\xi_w^2) > 0$. Значит, с ростом размера «холодной» капсулы [$\partial(\xi_w^2) < 0$] модуль завихренности на вершине убывает. Чем больше кривизна вершины, тем больше вязкая диссипация энергии $\Phi \sim \omega^2 \sim K^4$ (20).

Далее рассмотрим σ_K -режим, для которого на вершине «горячей» капсулы зависимость $\sigma = \sigma(K)$ имеет экстремум при условии, что

$$(\chi - 7)(21 - \chi) = 72\chi(T_w / \theta_w), \quad 7 < \chi < 21. \quad (24)$$

Безразмерный критерий $\chi = \lambda\theta_w / (\mu\psi_3^2 \xi_w^6 K^2)$ содержит параметр завихренности ψ_3^2 , а также параметры ξ_w^2 и K , определяющие морфологические свойства капсулы (размер и кривизну). Ясно, что $\chi = 36\varphi_w$, где $\varphi_w = \lambda(T_w - T_0)\delta^2 / \Phi$ вычисляется на вершине капсулы. Расчеты показывают, что существует пороговое значение $\chi_* = \sqrt{147}$, разделяющее интервал (7, 21) на две части, для которых σ_K -режим (24) обладает двумя типами экстремумов производства энтропии. Если $7 < \chi < \chi_*$, то существует нижняя граница $\sigma_{\min}(K)$. Если $\chi_* < \chi < 21$, то существует максимум $\sigma_{\max}(K)$ – верхняя граница производства энтропии для устойчивых течений. Нетрудно видеть, что в пороговом состоянии $\chi_* = \chi$ при заострении вершины капсулы нужно повышать температуру стенки T_w .

Заключение. Установлено, что существует класс стационарных ползущих течений, обладающих инвариантной завихренностью. А именно: указан определенный тип конечных возмущений скорости и давления, которые оставляют без изменения вихрь скорости. Обнаружена важная роль вязкой диссипации энергии при течении жидкости сквозь проникаемую мембранно-капсульную систему. Изучение σ_s и σ_K режимов [см. (22) и (24)] показало, что морфологические свойства капсулы оказывают значительное влияние на условия существования экстремумов производства энтропии.

Литература

1. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
2. Аристов, С.Н. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С.Н. Аристов, Д.В. Князев, А.Д. Полянин // Теоретические основы химической технологии. – 2009. – № 5. – С. 547–566.
3. Чернявский, В.М. Течение Стокса поршневого типа в прямоугольной области / В.М. Чернявский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 425, № 3. – С. 334–337.
4. Любимова, Т.П. Течения, индуцируемые колебаниями нагретой сферы / Т.П. Любимова, А.А. Черепанова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 74–82.
5. Пономарева, М.А. Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую плоскость / М.А. Пономарева, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенко // Механика жидкости и газа. – 2011. – Т. 46, № 1. – С. 53–61.
6. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
7. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
8. Шабловский, О.Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О.Н. Шабловский // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5. – № 32(249). – С. 77–82.

9. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.

10. Климонтович, Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса / Ю.Л. Климонтович. – М.: КомКнига, 2007. – 328 с.

11. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.

12. Baker, R.W. Membrane Technology and Applications / R.W. Baker. – Wiley, 2004. – 538 p.

Поступила в редакцию 21 января 2013 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 1, pp. 59–66*

INVARIANT VORTICITY AND THERMAL STATE OF THE CREEPING FLOW OF A FLUID THROUGH A PERMEABLE MEMBRANE

O.N. Shablovsky¹

A new class of stationary creeping flows of a viscous fluid is presented in compliance of external resistance force. An example of an invariant vorticity of a fluid flow is studied through the permeable membrane and capsular system. The influence of capsular morphology on the entropy production is mastered. An important role of the correlation “velocity vortex – viscous dissipation of energy” in forming the thermal field of a fluid is discovered.

Keywords: creeping flow, vorticity, viscosity dissipation of energy, entropy production, stability.

References

1. Khappel' Dzh., Brenner G. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reynol'dsa* (Hydrodynamics at Reynolds small numbers). Moscow: Mir, 1976. 630 p. (in Russ.). [Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. New Jersey: Prentice Hall, 1965. 553 p.]

2. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*. 2009. no. 5. pp. 547–566. (in Russ.).

3. Chernyavskiy V.M. *Doklady RAN*. 2009. Vol. 425, no. 3. pp. 334–337. (in Russ.).

4. Lyubimova T.P., Cherepanova A.A. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*. 2011. Vol. 4, no. 3. pp. 74–82. (in Russ.).

5. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2011. Vol. 46, no. 1. pp. 53–61. (in Russ.).

6. Gledzer E.B., Dolzhanskiy F.V., Obukhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ikh primeneniye* (Systems of hydrodynamic type and their application). Moscow: Nauka, 1981. 368 p. (in Russ.).

7. Polubarinova-Kochina P.Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* (Theory of ground water movement). Moscow: Nauka, 1977. 664 p. (in Russ.).

8. Shablovskiy O.N. Trigonometricheskii profil' skorosti sdvigovogo techeniya vyzkoy zhidkosti (Trigonometrical profile of the velocity of the shear flow of the viscous fluid). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»*. 2011. Issue 5. no. 32(249). pp. 77–82. (in Russ.).

9. Zhou D., Casas-Baskes Kh., Lebon Dzh. *Rasshirennaya neobratimaya termodinamika* (Extended irreversible thermodynamics). Moskva–Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2006. 528 p. (in Russ.). [Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer Verlag, 2012. 478 p.]

10. Klimontovich Yu.L. *Turbulentnoe dvizhenie i struktura khaosa* (Turbulent motion and the structure of chaos). Moscow: KomKniga, 2007. 328 p. (in Russ.).

11. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* (Continuum Mechanics). Moscow: Nauka, 1973. Vol. 1. 536 p. (in Russ.).

12. Baker R.W. *Membrane Technology and Applications*. Wiley, 2004. 538 p.

Received 21 January 2013

¹ Shablovsky Oleg Nikiphorovich is Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Technical Mechanics Department, Machine Building Faculty, Gomel State Technical University.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТОНКОМ ЖИДКОМ СЛОЕ ПРИ ВОЛНООБРАЗОВАНИИ

Л.А. Прокудина¹

Представлена математическая модель волнового течения неизоэнтальной жидкой пленки. Рассчитаны волновые характеристики течения: частота, инкремент, фазовая скорость при неоднородности поверхностного натяжения. Определены области существования волновых режимов вертикальной жидкой пленки. В рамках нелинейного параболического уравнения исследовано нелинейное развитие возмущений на свободной поверхности пленки. Показано, что в окрестности кривой нейтральной устойчивости проявляется эффект направленного переноса энергии к волнам в окрестности гармоники максимального инкремента.

Ключевые слова: жидкая пленка, неустойчивость, формы волн, нелинейное параболическое уравнение.

Изучение систем физико-химической гидродинамики с поверхностью раздела между жидкой и газовой фазами обусловлено, прежде всего, их прикладным значением [1, 2]. Технологические процессы, связанные с переносом тепла и массы через поверхность раздела, широко распространены в химической, нефтехимической, энергетической, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности. Тепломассообменные аппараты, в которых реализуется течение тонких жидких пленок под действием силы тяжести, весьма перспективны в химической, нефтехимической технологии. В жидких пленках обеспечиваются высокие скорости переноса тепла и массы в сочетании с малой толщиной пленки, но то же время приходится решать сложнейшие вопросы, связанные с межфазной неустойчивостью, влиянием на нее разнообразных физико-химических факторов, обусловленных, например, наличием градиентов температуры, концентрации вещества на межфазной поверхности, фазовыми переходами. Процессы течения жидких пленок, обдуваемых газовым потоком, также представляют значительный интерес для науки и проектирования современной пленочной аппаратуры.

Рассмотрим течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости (жидкой пленки) толщиной δ под действием силы тяжести по твердой наклонной плоскости, сопровождающееся обдувом ее свободной поверхности парогазовым потоком. Введем прямоугольную систему координат $OXYZ$, плоскость OXZ связана с поверхностью, по которой движется пленка, ось OX направлена по течению пленки, ось OY – по нормали в пленку жидкости (рис. 1).

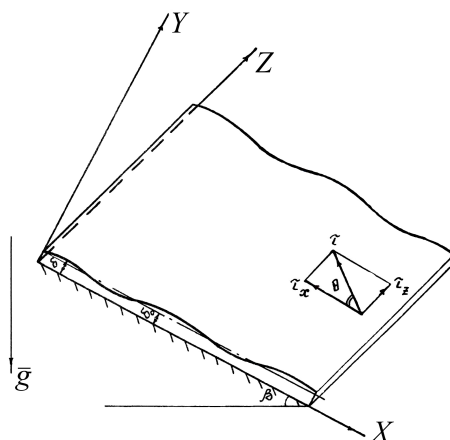


Рис. 1. Схема течения жидкой пленки

¹ Прокудина Людмила Александровна – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра прикладной математики, Механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: prokudina-la@mail.ru

Математическая модель течения трехмерной жидкой пленки толщиной δ по твердой наклонной поверхности под действием силы тяжести, сопровождающаяся обтеканием ее свободной поверхности парогазовым потоком произвольного направления, представляет собой систему уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями, учитывающими влияние процессов тепломассопереноса, имеет вид [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial u_+}{\partial z_+} = -\frac{\partial P_+}{\partial x_+} + F_x + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial v_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial v_+}{\partial z_+} = -\frac{\partial P_+}{\partial y_+} + F_y + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 v_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial w_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial w_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial w_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial w_+}{\partial z_+} = -\frac{\partial P_+}{\partial z_+} + F_z + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + \frac{\partial w_+}{\partial z_+} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$y = 0: \quad u_+ = w_+ = 0, \quad v_+ = V_0; \quad (2)$$

$$y = \delta: \quad \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u_+}{\partial x_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - 2 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - \left(\frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+} \right) \right] + \\ + M \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} + N \left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+ \partial z_+} \right) + \tau_x = 0; \quad (3)$$

$$\frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial w_+}{\partial z_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - 2 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - \left(\frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+} \right) \right] + \\ + M \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} + N \left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+ \partial z_+} \right) + \tau_z = 0; \quad (4)$$

$$P_+ = \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial v_+}{\partial y_+} - \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial x_+} \right) - \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} \left(\frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \right) \right] - \sigma_+ \left(\frac{\partial^2 \delta_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 \delta_+}{\partial z_+^2} \right) + \\ + P_0 - \text{sign } \Delta T \frac{\rho_1 - 1}{\rho_2} \frac{1}{(Re \cdot Pr \cdot Ku)^2 \delta^2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t_+} = v_+ - u_+ \frac{\partial \delta}{\partial x_+} - w_+ \frac{\partial \delta}{\partial z_+} + \frac{1}{Re \cdot Pr \cdot Ku} \frac{1}{\delta}. \quad (6)$$

Безразмерные величины в (1–6): $u_+ = \frac{u}{u_0}$, $v_+ = \frac{v}{u_0}$, $w_+ = \frac{w}{u_0}$ – проекции скорости на соответствующие оси координат; $t_+ = \frac{t \cdot u_0}{\delta_0}$ – время; $x_+ = \frac{x}{\delta_0}$, $y_+ = \frac{y}{\delta_0}$, $z_+ = \frac{z}{\delta_0}$ – переменные; $\delta_+ = \frac{\delta}{\delta_0}$ –

толщина жидкой пленки; $Re = \frac{u_0 \delta_0 \rho}{\mu}$ – число Рейнольдса; $F_x = \frac{g_x \delta_0}{u_0^2}$, $F_y = -\frac{g_y \delta_0}{u_0^2}$, $F_z = \frac{g_z \delta_0}{u_0^2}$ –

проекция числа Фруда на соответствующие оси координат; $P_+ = \frac{P}{\rho u_0^2}$ – давление; $N = \frac{k + e}{\rho \delta_0^2 u_0}$ –

параметр поверхностной вязкости; $\bar{\tau}_x = \frac{\tau_x}{\rho u_0^2}$, $\bar{\tau}_z = \frac{\tau_z}{\rho u_0^2}$ – проекции касательного напряжения;

$M = M_T + M_K$ – параметр Марангони: $M_T = \frac{\partial \sigma}{\partial T^0} \left(\frac{\partial T^0}{\partial y} \right)_{y=\delta} \frac{1}{\rho u_0^2}$, $M_K = \frac{\partial \sigma}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \delta} \frac{1}{\rho u_0^2}$; $Pr = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda}$ –

число Прандтля; $Ku = \frac{r'}{c_p \Delta T}$ – число фазового перехода; $\sigma_+ = \frac{\sigma}{\rho u_0^2 \delta_0}$ – параметр поверхностного

натяжения. Здесь u_0 – средняя скорость основного течения жидкой пленки, δ_0 – толщина пленки в невозмущенном состоянии. В процессе конденсации $\text{sign } \Delta T = 1$, а в процессе испарения $\text{sign } \Delta T = -1$.

Рассмотрим развитие на поверхности жидкой пленки возмущений, принадлежащих непрерывной полосе волновых чисел:

$$\psi = \int_{k_{0x}-\Delta k_x}^{k_{0x}+\Delta k_x} \int_{k_{0z}-\Delta k_z}^{k_{0z}+\Delta k_z} F(k_\Sigma) \exp\{i(k_x x + k_z z - \omega t)\} dk_x dk_z = A \exp\{i(k_{0x} x + k_{0z} z - \omega(k_0) t)\}, \quad (7)$$

где k_0 – центр волнового пакета; $\omega = \omega_r + i\omega_i$;

$$A = \int_{-\Delta k_x}^{\Delta k_x} \int_{-\Delta k_z}^{\Delta k_z} F(k_{0\Sigma} + \delta k_\Sigma) \exp\left\{i\left(\delta k_x x + \delta k_z z - \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k_x}\right)_{k_0} \delta k_x t - \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k_z}\right)_{k_0} \delta k_z t - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2}\right)_{k_0} (\delta k_x)^2 t - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_z^2}\right)_{k_0} (\delta k_z)^2 t - \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x \partial k_z}\right)_{k_0} \delta k_x \delta k_z t - \varepsilon^2 \bar{\omega}_i t\right)\right\} d\delta k_x d\delta k_z + o(\varepsilon^3)$$

при следующих допущениях: Δk_Σ – ширина полосы волновых чисел $\Delta k_\Sigma = o(\varepsilon)$; инкремент $\omega_i = \varepsilon^2 \bar{\omega}_i = o(\varepsilon^2)$.

Здесь $F(k_\Sigma)$ – Фурье-компонента разложения, k_Σ – волновой вектор возмущений, k_x и k_z – его проекции на оси OX и OZ соответственно, ε – малый параметр.

Для амплитуды A огибающей волнового пакета получено нелинейное параболическое уравнения, коэффициенты которого в явном виде выражаются через параметры волнового течения трехмерной жидкой пленки: инкремент, частоту и их производные первого и второго порядков, –

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_z} \frac{\partial A}{\partial z_1} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_z^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_z^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial z_1^2} - i \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x \partial k_z} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x \partial k_z} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial z_1} = \bar{\omega}_i A - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A. \quad (8)$$

Нелинейное параболическое уравнение (8) для амплитуды A огибающей волнового пакета, развивающегося по времени на поверхности неизотермической жидкой пленки, относится к одной из базовых моделей нелинейных сред (типа модели Гинзбурга–Ландау). Коэффициенты уравнения учитывают фазовые переходы (конденсация, испарение) на поверхности трехмерной жидкой пленки и включают такие физико-химические факторы, как поверхностную вязкость, неоднородность поверхностного натяжения, силу тяжести, касательное напряжение на поверхности раздела газ-жидкость.

Вычислительные эксперименты, связанные с неустойчивостью жидкой пленки по отношению к возмущениям, волновой вектор которых k_Σ направлен под углом α к оси OX :

$$k_\Sigma = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{k_z}{k_x},$$

проведены для диапазона чисел Рейнольдса $Re \leq 20$. Необходимость таких исследований связана с интенсификацией процессов тепло- и массообмена в жидких пленках, повышения эффективности, экологической безопасности и надежности пленочных аппаратов.

Дисперсионное уравнение

$$\omega(a_7 k_x + a_9 k_z + i) + a_1 k_x^4 + a_2 k_x^2 k_z^2 + a_3 k_z^4 - a_4 i k_x^3 - a_5 i k_z^3 - a_6 k_x^2 - a_8 k_x k_z - a_{10} k_z^2 + a_{11} i k_x + a_{12} i k_z - \frac{1}{Re \cdot Pr \cdot Ku} = 0, \quad (9)$$

где $\omega = \omega_r + i\omega_i$, позволяет рассчитать волновые характеристики: ω_r – частоту, ω_i – инкремент, фазовую скорость $c_r = \frac{\omega_r}{k}$, а также производные, входящие в уравнение (8).

Коэффициенты дисперсионного уравнения (9) имеют вид:

$$a_1 = -\frac{Re \cdot \sigma}{3}, a_2 = 2a_1, a_3 = a_1, a_4 = -\frac{Re^2 F_x N}{2}, a_5 = -\frac{Re^2 F_z N}{2}, a_6 = a_6^* + a_6^1,$$

$$a_6^* = -\frac{Re \cdot F_y}{3} - \frac{Re \cdot M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau_x + F_x), a_6^1 = \frac{2}{3} Re \cdot \text{sign } \Delta T \frac{C}{(Re \cdot Pr \cdot Ku)^2}, a_7 = \frac{5}{24} Re^2 F_x,$$

$$a_8 = \frac{3}{20} Re^3 F_x F_z + \frac{3}{40} Re^3 (F_z \tau_x + F_x \tau_z), a_9 = \frac{5}{24} Re^2 F_z, a_{10} = a_{10}^* + a_{10}^1,$$

$$a_{10}^* = -\frac{Re \cdot F_y}{3} - \frac{Re \cdot M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_z (\tau_z + F_z), a_{10}^1 = \frac{2}{3} Re \cdot \text{sign } \Delta T \frac{C}{(Re \cdot Pr \cdot Ku)^2}, a_{11} = -Re \cdot (F_x + \tau_x),$$

$$a_{12} = -Re \cdot (F_z + \tau_z).$$

Волновые характеристики (инкремент ω_i и фазовая скорость c_r) возмущений изображены на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

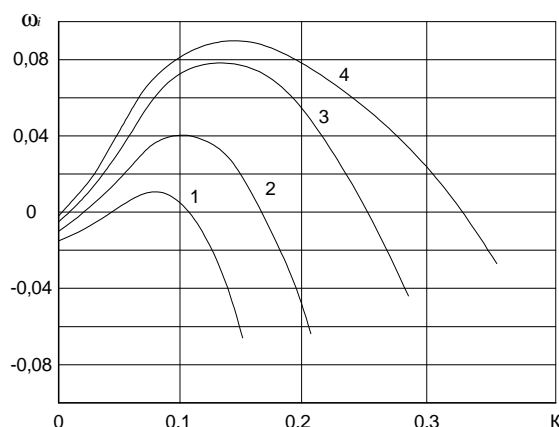


Рис. 2. Зависимость инкремента от волнового числа:
1 – $Re = 7$; 2 – $Re = 10$; 3 – $Re = 15$; 4 – $Re = 20$

На каждой кривой инкремента (рис. 2) можно отметить наличие характерных точек:

- перегиба, которому соответствует значение волнового числа k_n ;
- максимального значения инкремента, который обозначим $k_{\omega_i \max}$;
- соответствующих нейтральной устойчивости ($\omega_i = 0$), волновые числа которых обозначим $k_{\omega_i=0}$.

Совокупность точек $k_{\omega_i=0}$ для исследуемого диапазона чисел Рейнольдса образует кривую нейтральной устойчивости (рис. 4, кривая $\omega_i = 0$), а точек $k_{\omega_i \max}$ – образует кривую максимального роста возмущений (рис. 4, кривая $\omega_i \max$).

Фазовая скорость (рис. 3) в области неустойчивости жидкой пленки для каждого числа Рейнольдса имеет минимальное значение ($c_{r \min}$), которое соответствует волновому числу $k_{\omega_i \max}$. Фазовая скорость $c_{r \min}$ падает с ростом числа Рейнольдса.

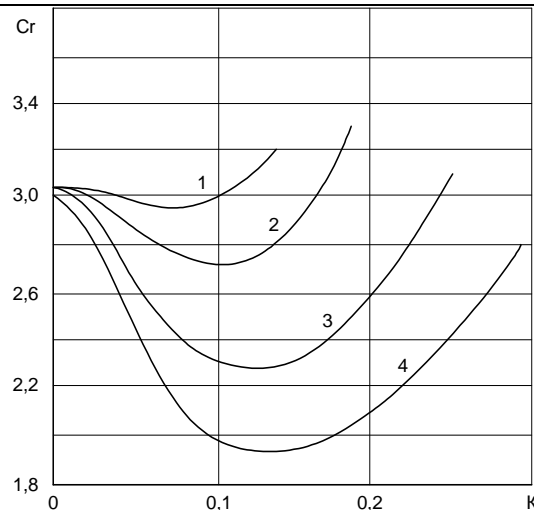


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от волнового числа:
1 – $Re = 7$; 2 – $Re = 10$; 3 – $Re = 15$; 4 – $Re = 20$

В ходе вычислительных экспериментов найдены области существования волновых режимов жидкой пленки при свободном стекании, конденсации, испарении, а также при воздействии физико-химических факторов модели (1)–(6). На рис. 4 представлена область существования волновых режимов вертикальной жидкой пленки в процессе испарения. Для чисел Рейнольдса $Re > 10$ вблизи нейтральной кривой существует область, в которой проявляется эффект направленного переноса энергии по спектру волнового пакета и его смещение в направлении гармоника максимального инкремента. В окрестности $\omega_i \max$ существуют стационарные монохроматические режимы волновых течений жидких пленок, что также отмечалось и в экспериментах [1, 2].

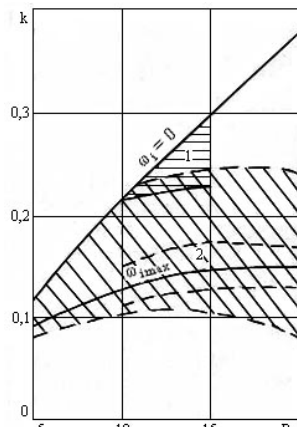


Рис. 4. Области существования волновых режимов вертикальной пленки

Расчет коэффициентов β_1 и β_2 при нелинейном члене уравнения (8), характеризующих нелинейное затухание возмущений (β_1) и зависимость фазы от амплитуды (β_2), позволил определить:

- нелинейное взаимодействие возмущений в окрестности $\omega_i \max$ (рис. 4, область 2) таково, что наблюдаются незначительные изменения коэффициентов β_1 , β_2 , они практически сохраняют свое значение в области 2;
- линейную зависимость фазы от амплитуды для чисел Рейнольдса $Re < 8$ и нелинейную для $Re \geq 8$.

Для волновых пакетов в окрестности гармоники максимального инкремента свойственна самая высокая степень неустойчивости системы. В рассматриваемой окрестности повышена интенсивность формирования структуры течения в приповерхностных слоях, степень ее развитости. Формы волн вертикальной жидкой пленки воды при неоднородности поверхностного натяжения представлены на рис. 5, кривая 1.

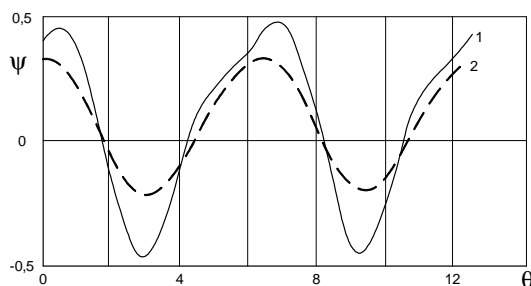


Рис. 5. Форма волны при $Re=15$:
1 – $M=1, N=0$; 2 – $M=1, N=1$

Наличие в жидкой пленке нерастворимых поверхностно-активных веществ, таких как масла, жиры (параметр N), вязкость которых больше вязкости воды и возрастает с увеличением их молекулярной массы, при движении жидкого слоя приводит к возникновению сил поверхностной вязкости, качественно влияющих на волновые характеристики течения трехмерной жидкой пленки, границу устойчивости. Пленки нерастворимых поверхностно-активных веществ, обладая большим внутренним трением, при движении тонкого слоя вязкой жидкости забирают значительную часть его энергии, что ведет к уменьшению скорости возмущенного течения и сглаживанию профиля волн (рис. 5, кривая 2).

Представим комплексную амплитуду A в виде суммы амплитуд мод

$$A = a_0 \exp i\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n1} \exp i\theta_{n1} \exp ink_1 x + a_{n2} \exp i\theta_{n2} \exp(-ink_1 x)). \quad (10)$$

Амплитуды гармоник (10) для исследуемой диспергирующей системы с зависимостью фазы от амплитуды в условиях формирования монохроматической волны изображены на рис. 6.

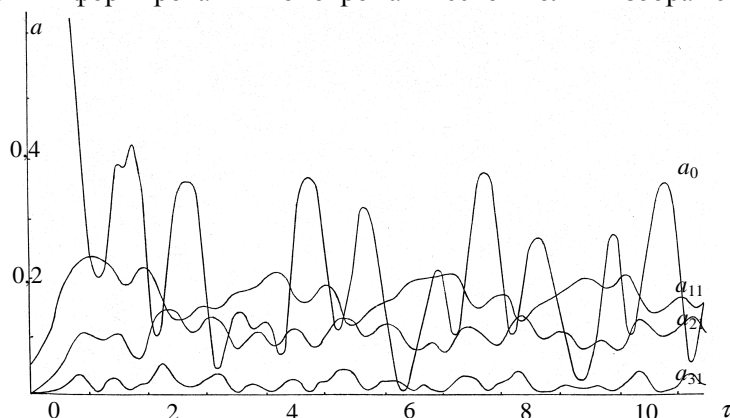


Рис. 6. Амплитуды мод (10)

Представленная нелинейная теория волнового течения жидкой пленки позволяет исследовать характер нелинейного взаимодействия возмущений, учитывая различные условия: изменение угла наклона поверхности стекания, неоднородность поверхностного натяжения.

Литература

1. Холпанов, Л.П. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. – М.: Наука, 1990. – 271 с.
2. Алексеенко, С.В. Волновое течение пленок жидкости / С.В. Алексеенко, В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев. – М.: Наука, 1992. – 256 с.
3. Прокудина, Л.А. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки / Л.А. Прокудина, Г.П. Вяткин // Доклады РАН, 1998. – Т. 362, № 6. – С. 770–772.

Поступила в редакцию 7 июня 2013 г.

**MODELLING OF NONLINEAR DEVELOPMENT OF PERTURBATIONS
IN A THIN LIQUID LAYER AT WAVEFORMATION****L.A. Prokudina¹**

The mathematical model of the wave flow of a non-isothermal liquid film is shown. Wave characteristics (frequency, increment, phase velocity) are calculated under inhomogeneity of surface tension. The areas of wave modes of liquid film are determined. Within nonlinear parabolic equation nonlinear development of perturbances is analyzed. It is shown that there is a phenomenon of directed transfer of energy to the wave in the region of maximum increment.

Keywords: liquid film, instability, wave shapes, nonlinear parabolic equation.

References

1. Kholpanov L.P., Shkadov V.Ya. *Gidrodinamika i teplomassoobmen s poverkhnost'yu razdela* (Hydrodynamics and heat and mass exchange with the surface of the part). Moscow, Nauka Publ., 1990. 271 p. (in Russ.).
2. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G. *Volnovoe techenie plenok zhidkosti* (Wave flow of liquid films). Moscow, Nauka Publ., 1992. 256 p. (in Russ.).
3. Prokudina L.A., Vyatkin G.P. *Doklady RAN*. 1998. Vol. 362, no. 6. pp. 770–772. (in Russ.).

Received 7 June 2013

¹ Prokudina Lyudmila Alexandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University.

E-mail: prokudina-la@mail.ru

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Серия основана в 2009 году.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редакцию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (не более 500 знаков с пробелами), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, аннотация (или реферат статьи объемом до 1800 знаков с пробелами), список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации, 11 pt. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Если рисунок создан не средствами MS Office, то желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакции журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, физический факультет, кафедра ОиТФ, ответственному редактору профессору Мирзоеву Александру Аминулаевичу [Prof. Mirzoev Aleksander Aminulaevich, General and Theoretical Physics Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: vestnik@physics.susu.ac.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта ЮУрГУ (<http://www.susu.ac.ru>), следуя ссылкам: «Наука», «Вестник ЮУрГУ», «Серии».

10. Журнал распространяется по подписке. Подписной индекс журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Математика. Механика. Физика»: 29211, каталог «Пресса России». Интернет-каталог агентства «Книга-Сервис», подписной индекс: E29211. Электронная версия: см. www.elibrary.ru.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

Редактор А.Ю. Федерякин

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 07.04.2014. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 8,83. Тираж 500 экз. Заказ 101/254.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.