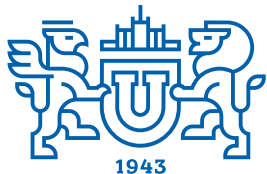


# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2022  
Т. 14, № 3**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

## **«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»**

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

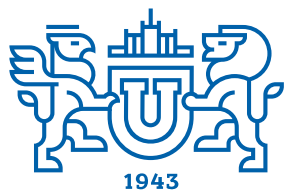
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### **Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

### **Редакционный совет**

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

2022

Vol. 14, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series «Mathematics. Mechanics. Physics» is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

- S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**E.V. Golubev**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.P. Beskachko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.I. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**Yu.M. Kovalev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

- A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation  
**G.L. Brovko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**V.D. Buchelnikov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**D. Guidetti**, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy  
**V.I. Zhukovsky**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**I.V. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Ph. D., Professor, University of Nevada, Reno, United States of America  
**S.V. Zelik**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom  
**A.I. Korotkii**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**Jaewan Kim**, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea  
**Kisik Kim**, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea  
**N.D. Kundikova**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**V.V. Menshikh**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation  
**S.I. Pinchuk**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America  
**Y.S. Puzyrev**, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America  
**N.K. Ravshanov**, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan  
**L.V. Utkin**, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation  
**I. Verpoest**, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium  
**V.A. Strauss**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

АСТАПОВ Н.С. О решении в квадратных радикалах алгебраических уравнений малых степеней .....	5
ГОНЧАРОВ Н.С. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в квадрате и в круге с краевым условием Вентцеля .....	17
ЗАЙЦЕВ М.Л., АККЕРМАН В.Б. К идентификации решений уравнения Риккати и других полиномиальных систем дифференциальных уравнений.....	23
ЗАМЫШЛЯЕВА А.А., ЦЫПЛЕНКОВА О.Н. Восстановление динамически искаженных сигналов на основе теории оптимального управления решениями уравнений соболевского типа в пространствах случайных процессов .....	38
МАТВЕЕВА О.Р., СУКАШЕВА Т.Г. Analysis of the Class of Hydrodynamic Systems .....	45
РОЙТЕНБЕРГ В.Ш. Классификация периодических дифференциальных уравнений по степеням негрубости.....	52

### Механика

ДИЛЬМАН В.Л., УТКИН П.Б. Двухпараметрический метод определения коэффициента интенсивности напряжений $K_I$ трещиноподобных дефектов методом голографической интерферометрии.....	60
--	----

### Физика

АССЕЛЬБОРН С.А., ЗАЦЕПИН Е.С., ИСАКОВ Д.С., ГЕРАСИМОВ А.М., ПИХУЛЯ Д.Г., МИКЛЯЕВ Ю.В. Система освещения объекта для микроскопии с субдифракционным разрешением .....	68
ОСИННИКОВ Е.В., БЛИНОВ И.В., ИСТОМИНА А.Ю., ПОПОВ В.В. Применение сканирующей туннельной микроскопии для оценки степени неравновесности границ зерен в никеле, полученном кручением под высоким давлением .....	79

# CONTENTS

## Mathematics

ASTAPOV N.S. On the Solution of Algebraic Equations of Small Degrees by Square Radicals .....	5
GONCHAROV N.S. Eigenvalues and Eigenfunctions of the Laplace Operator in a Square and in a Circle with a Wentzel Boundary Condition.....	17
ZAYTSEV M.L., AKKERMAN V.B. On the Identification of Solutions to Riccati Equation and the other Polynomial Systems of Differential Equations.....	23
ZAMYSHLYAEVA A.A., TSYPLENKOVA O.N. Reconstruction of Dynamically Distorted Signals Based on the Theory of Optimal Control of Solutions for Sobolev Type Equations in the Spaces of Stochastic Processes .....	38
MATVEEVA O.P., SUKACHEVA T.G. Analysis of the Class of Hydrodynamic Systems.....	45
ROITENBERG V.Sh. Classification of Periodic Differential Equations by Degrees of Non-Roughness .....	52

## Mechanics

DILMAN V.L., UTKIN P.B. Two-Parameter Method of Determining Stress Intensity Factor $K_I$ of Crack-Like Defects Using Holographic Interferometry .....	60
--	----

## Physics

ASSELBORN S.A., ZATSEPIN E.S., ISAKOV D.S., GERASIMOV A.M., PIKHULYA D.G., MIKLYAEV Yu.V. Illumination System for Sub-Diffraction Resolution Microscopy.....	68
OSINNIKOV E.V., BLINOV I.V., ISTOMINA A.Yu., POPOV V.V. Application of Scanning Tunneling Microscopy for Evaluation of the Non-Equilibrium State of Grain Boundaries in Nickel Subjected to High Pressure Torsion.....	79

## О РЕШЕНИИ В КВАДРАТНЫХ РАДИКАЛАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ

**Н.С. Астапов**<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация  
E-mail: nika@hydro.nsc.ru

**Аннотация.** Посвящена поиску конструктивных аналитических выражений корней алгебраических уравнений третьей–шестой степени через коэффициенты уравнений. Получены соотношения для коэффициентов, при которых корни уравнений представляются наиболее просто, например, рационально. Даны рациональные выражения для кратных корней. Найдено условие, при котором полином шестой степени в каноническом виде представим произведением полиномов третьей степени в каноническом виде. Особое внимание уделялось символьному выражению корней уравнений через квадратные радикалы из коэффициентов. Предложен способ решения уравнений с помощью определяющих (порождающих, связанных с исходным) уравнений. Все представленные разложения справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами.

*Ключевые слова:* решение в радикалах; формулы Кардано; корни полиномов; возвратные уравнения; определяющие уравнения.

### Введение

В математических журналах регулярно появляются публикации новых способов символьного решения алгебраических уравнений [1–10]. В [5] с помощью групп Галуа получены примеры уравнений сколь угодно большой степени, разрешимых в радикалах. В [6] дан способ выражения корней произвольного алгебраического уравнения, использующий интегральную формулу Меллина. В [7] представлен способ поиска корней уравнений в поле алгебраических чисел. В [8] приводятся аналитические выражения для представления всех корней произвольного алгебраического уравнения в виде отношения бесконечных определителей. Поэтому в результате значения корней выражаются в конечном виде численно и приближенно. Несмотря на то, что предлагаемые в работах [6–8] способы пригодны для решения уравнений произвольных степеней, однако реализующие их алгоритмы оказываются трудоемкими даже для уравнений невысоких степеней, либо, например, из-за ограничений на коэффициенты уравнений, позволяют получить значения корней не в символьном виде. К проблеме представления полиномов в виде произведения полиномов более низких степеней приводят, например, задачи символьного интегрирования рациональных функций [11], задачи решения характеристических уравнений, связанных с дифференциальными уравнениями. Простые алгоритмы для символьного исследования алгебраических уравнений малых степеней востребованы в задачах механики [12–18]. Так, например, для проверки свойства сильной эллиптичности уравнений равновесия, которое имеет большое значение в теории упругости, необходимо символьное исследование алгебраических уравнений четвертой, шестой и двенадцатой степеней (см. [12, стр. 690–692, 695, 696]). В [12] даны критерии положительности полиномов четвертой и шестой степеней (теоремы 2, 3) и приведены доказанные авторами теоремы 6 и 7 о вещественных нулях полиномов третьей и четвертой степени. В [13, 14] ключевым является символьное исследование характеристического уравнения четвертой степени с комплексными коэффициентами для нахождения неизвестных значений комплексного волнового параметра. В [15] решение кубического уравнения при кубической аппроксимации Эрмита позволило найти точное аналитическое решение эволюционного уравнения. В работах [16–18] рассмотрены некоторые частные случаи алгебраических уравнений третьей–восьмой степеней, для решения которых привлекаются формулы Кардано и отмечаются вычислительные трудности в общем случае.

В частных случаях, когда коэффициенты полиномов связаны дополнительными соотношениями, иногда удается получить достаточно простые разложения на множители, что показывается приведенными ниже разложениями.

Настоящая работа является естественным продолжением работы [19].

### Кубическое уравнение

Формулы Ферро–Тартальи–Эйлера (Кардано) для приведенного уравнения третьей степени  $x^3 + px + q = 0$  с произвольными буквенными коэффициентами не являются конструктивными, так как не существует алгоритма извлечения кубического корня из произвольного комплексного числа. Даже в случае двукратного корня этот корень выражается с помощью кубического корня из комплексного числа, хотя двукратный корень равен одному из двух значений  $\pm\sqrt{-p/3}$  [19]. Однако так как кратный корень полинома является корнем производной полинома, этот корень проще выразить следующим образом.

1. Уравнение  $x^3 + px + q = 0$  при условии  $4p^3 + 27q^2 = 0$  имеет двукратный корень  $x_{1,2} = -3q/(2p)$ . Поэтому имеем разложение на линейные множители

$$x^3 + px + q = \left(x + 3q/(2p)\right)^2 (x - 3q/p). \quad (1)$$

2. Если для комплексных коэффициентов  $p \neq 0$ ,  $q$  выполняется равенство  $2p^3 + 27q^2 = 0$ , то справедливо разложение

$$x^3 + px + q = \left(x + \frac{3q}{p}\right) \left(x - \frac{3q}{2p}(1 + \sqrt{3})\right) \left(x - \frac{3q}{2p}(1 - \sqrt{3})\right). \quad (2)$$

Это решение можно получить из формул Ф. Клейна для «уравнения диэдра» [19].

3. Если для комплексных коэффициентов  $p$  и  $q$  выполняется равенство  $q^2 = -(p/3)^3 (2 \pm \sqrt{2})$ , то справедливо разложение

$$x^3 + px + q = \left(x - 3p^2q/(p^3 + 27q^2)\right) (x - x_2)(x - x_3), \quad (3)$$

где  $x_{2,3} = \pm 6p^2q / (2p^3(\sqrt{3} \mp 2) + 27q^2(\sqrt{3} \mp 1))$ .

Разложения (1)–(3) кубического полинома на линейные множители не используют операции извлечения корней из коэффициентов и справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами. Приведем еще несколько уравнений специального вида, разрешимых в квадратных радикалах.

4. Для произвольных комплексных чисел  $p$  и  $q$  справедливо разложение

$$x^3 + (2p^3 + 27q^2)/(9pq)x^2 + px + q = (x + 3q/p)(x - x_2)(x - x_3), \quad (4)$$

где  $x_{2,3} = \pm \frac{3q}{p} \cdot \frac{\sqrt{k+1} \pm 1}{k}$ ,  $k = -\frac{27q^2}{p^3}$ . Заметим, что при  $k = 2$  из разложения (4) следует

разложение (2). Уравнение  $x^3 + (2p^3 + 27q^2)/(9pq)x^2 + px + q = 0$  при  $p^3 = 27q^2$  имеет трехкратный корень, который равен  $\sqrt{p/3}$  или  $-\sqrt{p/3}$ . Этот трехкратный корень можно записать проще, без операции извлечения корней, воспользовавшись разложением (4): при  $k = -1$  получим  $x_{1,2,3} = -3q/p$ .

5. Кубическое уравнение

$$x^3 + px \pm 5p\sqrt{6p}/9 = 0, \quad (5)$$

где  $p$  – произвольное комплексное число, имеет корни  $x_1 = -2\sqrt{p/6}$ ,  $x_{2,3} = \sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$ , если в уравнении (5) выбран знак «+»; и имеет корни  $x_1 = 2\sqrt{p/6}$ ,  $x_{2,3} = -\sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$ , если в уравнении (5) выбран знак «-».

6. Для любых комплексных  $w$ ,  $p$  и  $n$  уравнение третьей степени  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корень  $x = nw$  при  $q = -nw(n^2w^2 + nw^2 + p)$  и имеет корень  $x = np$  при  $q = -np(n^2p^2 + nwp + p)$ .

7. Для любых комплексных  $a$  и  $b$  справедливо разложение

$$x^3 - 3a^2bx \pm a^3(b^3 + 1) = [x \pm a(b+1)] [x^2 \mp a(b+1)x + a^2(b^2 - b + 1)]. \quad (6)$$

Отсюда при  $b=1$  получим разложение  $x^3 - 3a^2x \pm 2a^3 = (x \pm 2a)(x \mp a)^2$ , а при  $a = \sqrt{-p/\sqrt[3]{54}}$ ,  $b = \sqrt[3]{2}$  получим разложение на множители многочлена  $x^3 + px \pm \sqrt{-p^3/6}$ .

Ещё несколько разрешимых в квадратных радикалах кубических уравнений специального вида можно найти в [19].

В [10] для трёхчленного алгебраического уравнения  $x^n + px^m + q = 0$ ,  $n > m$  с действительными коэффициентами  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$ , имеющего комплексный корень  $x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , найдены соотношения  $p = -r^{n-m} \sin(n\varphi)/\sin(m\varphi)$  и  $q = r^n \sin((n-m)\varphi)/\sin(m\varphi)$ . Следовательно, для кубического уравнения  $x^3 + px + q = 0$  имеем равенства  $p = -r^2 \sin(3\varphi)/\sin \varphi = r^2(4\sin^2 \varphi - 3)$  и  $q = 2r^3 \cos \varphi$ . Пользуясь тождеством  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , получим уравнение  $r^6 - pr^4 - q^2 = 0$ . После подстановок  $y = r^2$ ,  $y = z + p/3$  приходим к сопряженному уравнению  $z^3 - p^2z/3 - 2p^3/27 - q^2 = 0$ , которое иногда удается решить в квадратных радикалах. Так, для уравнения  $x^3 + \sqrt{3}x + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}/9 = 0$  строим сопряженное уравнение  $z^3 - z - 6 = 0$ , которое имеет целый корень  $z = 2$ . Затем последовательно находим  $y = 2 + \sqrt{3}/3$ ,  $r = \sqrt{2 + \sqrt{3}/3}$ ,  $\cos \varphi = q/(2r^3) = \sqrt{(7 - 3\sqrt{3})/22}$ ,  $\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \pm \sqrt{(15 + 3\sqrt{3})/22}$ ,  $x_{2,3} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{(3 - \sqrt{3})/6} \pm i \sqrt{(3 + \sqrt{3})/2}$ ,  $x_1 = -\sqrt{2 - 2\sqrt{3}/3}$ , то есть решение исходного уравнения выражено в квадратных радикалах.

Способ решения исходного уравнения сведением с помощью замен переменных к решению сопряженного (связанного) уравнения широко использован в [10, 19]. Ниже приведены новые теоремы для построения сопряженных уравнений.

**Теорема 1.** Если уравнение  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , то уравнение  $z^3 - pz^2 + qwz - q^2 = 0$  имеет корни  $ab$ ,  $bc$ ,  $ac$ .

Заметим, что в предыдущем абзаце из уравнения  $x^3 + px + q = 0$  получено уравнение  $r^6 - pr^4 - q^2 = 0$  с помощью тригонометрических подстановок. А из теоремы 1 это следует сразу при  $w = 0$ .

**Теорема 2.** Уравнение  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , тогда и только тогда, когда уравнение  $z^3 + 2wz^2 + (p + w^2)z + pw - q = 0$  имеет корни  $a + b$ ,  $b + c$ ,  $a + c$ .

**Теорема 3.** Если уравнение  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , то уравнение  $z^3 + (2p - w^2)z^2 + (p^2 - 2qw)z - q^2 = 0$  имеет корни  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ .

**Теорема 4.** Если уравнение  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , то уравнение  $z^3 + (w^3 - 3pw + 3q)z^2 + (p^3 - 3pqw + 3q^2)z + q^3 = 0$  имеет корни  $a^3$ ,  $b^3$ ,  $c^3$ .

Пользуясь теоремами 1–4 легко построить много других уравнений, связанных с исходным уравнением. Например, последовательно применяя теоремы 2 и 3, получим следующую теорему.

**Теорема 5.** Если  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a, b, c$ , то уравнение  $z^3 + 2(2p - w^2)z^2 + (5p^2 - 4pw^2 - 2qw + w^4)z + 2p^3 - p^2w^2 - 4pqw + q^2 + 2qw^3 = 0$  имеет корни  $a^2 + b^2, b^2 + c^2, a^2 + c^2$ .

Отсюда при  $w = 0$  получим уравнение  $z^3 + 4pz^2 + 5p^2z + 2p^3 + q^2 = 0$ , которое при  $q^2 = -2p^3$  имеет корни  $z_1 = 0, z_{2,3} = -p(2 \pm i)$ . Следовательно, один из корней уравнения  $x^3 + px \pm \sqrt{-2p^3} = 0$  равен  $\pm\sqrt{-2p}$  и это уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Интересно отметить, что пакет прикладных программ *Mathematica* генерирует для корней этого уравнения громоздкие выражения с использованием кубических радикалов.

**Теорема 6.** Если уравнение  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a, b, c$ , то уравнение  $z^3 - 2pz^2 + (p^2 + qw)z + q(q - pw) = 0$  имеет корни  $a(b + c), b(a + c), c(a + b)$ .

**Теорема 7.** Если уравнение  $x^3 + wx^2 + px + q = 0$  имеет корни  $a, b, c$ , то уравнение  $z^3 + (w - p)z^2 + (-pw + p + 3q + qw)z + q(1 - 2p - q + w^2) - p^2 + 2qw = 0$  имеет корни  $ab + c, bc + a, ac + b$ .

## Уравнение четвертой степени

Решение уравнения четвертой степени  $M_4 = x^4 + px^2 + qx + r = 0$  в общем виде приводит к необходимости решения кубического уравнения (резольвенты). Так, алгоритм Декарта ( $q \neq 0$ ) можно записать в виде

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + kx + (t - q/k)/2\right)\left(x^2 - kx + (t + q/k)/2\right), \quad (7)$$

где  $k = \sqrt{t - p}$ , а  $t$  – любой корень кубического уравнения (резольвенты)

$$t^3 - pt^2 - 4rt + 4pr - q^2 = 0. \quad (8)$$

1. Если  $4pr - q^2 = 0$ , то  $t_1 = 0$  и из равенства (7) получим разложение

$$x^4 + px^2 + qx + \frac{q^2}{4p} = \left(x^2 + \sqrt{-p}x - \frac{q}{2\sqrt{-p}}\right)\left(x^2 - \sqrt{-p}x + \frac{q}{2\sqrt{-p}}\right),$$

где  $p \neq 0$  и  $q$  – произвольные комплексные числа. В этом случае разложение можно записать так:  $x^4 + px^2 \pm 2\sqrt{pr}x + r = (x^2 + \sqrt{-p}x \mp \sqrt{-r})(x^2 - \sqrt{-p}x \pm \sqrt{-r})$ , где  $p$  и  $r$  – произвольные комплексные числа.

2. Если  $r = (2p^3 + 27q^2)/(72p)$ , то при  $p \neq 0$  справедливо разложение

$$M_4 = x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{m}{3}x + \frac{p}{6} - \frac{3q}{2m}\right)\left(x^2 - \frac{m}{3}x + \frac{p}{6} + \frac{3q}{2m}\right), \text{ где } m = \sqrt{-6p}.$$

3. Если  $r = ((p + q)^2 - q)/4$ , то справедливо разложение

$$M_4 = (x^2 + mx + (p + q - m)/2)(x^2 - mx + (p + q + m)/2), \text{ где } m = \sqrt{q}.$$

4. Если  $r = ((p^2 + q)/(2p))^2 - pq/4$ , то справедливо разложение

$$M_4 = (x^2 + mx + (p^2 + q)/(2p) - pm/2)(x^2 - mx + (p^2 + q)/(2p) + pm/2), \text{ где } m = \sqrt{q/p}.$$

5.  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + c(ab - c)/a^2 = (x^2 + c/a)(x^2 + ax + (ab - c)/a)$ .



6.  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + (c/a)^2 = (x^2 - t_1x + c/a)(x^2 - t_2x + c/a)$ , где  $t_1$  и  $t_2$  – корни квадратного уравнения  $t^2 + at + b - 2c/a = 0$ .

7. Если  $r = q^2(1 + 1/(p - q))/4$ , то справедливо разложение

$$M_4 = \left( x^2 + mx + \frac{q}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right) \left( x^2 - mx + \frac{q}{2} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right), \text{ где } m = \sqrt{q - p}.$$

8. Если  $r = (p(q + 1)/(2q))^2 - q^3/(4p)$ , то справедливо разложение

$$M_4 = \left( x^2 + mx - \frac{q^2 m}{2p} + n \right) \left( x^2 - mx + \frac{q^2 m}{2p} + n \right), \text{ где } n = p(q + 1)/(2q), m = \sqrt{p/q}.$$

9. Если  $r = (p(q + 1)/2)^2 - q/(4p)$ , то справедливо разложение

$$M_4 = \left( x^2 + mx - \frac{m}{2p} + n \right) \left( x^2 - mx + \frac{m}{2p} + n \right), \text{ где } n = p(q + 1)/2, m = \sqrt{pq}.$$

10. Если  $r = pq^2/(4(p^2 - q)) + (q/(2p))^2$ , то справедливо разложение

$$M_4 = \left( x^2 + mx + \frac{q}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{m} \right) \right) \left( x^2 - mx + \frac{q}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \right) \right), \text{ где } m = \sqrt{q/p - p}.$$

11. Если  $r = ((p^2 - 3q)/(2p))^2 + pq/12$ , то справедливо разложение

$$M_4 = \left( x^2 + mx + \frac{p}{2} \left( 1 + \frac{m}{3} \right) + \frac{m^2}{2} \right) \left( x^2 - mx + \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{m}{3} \right) + \frac{m^2}{2} \right), \text{ где } m = \sqrt{-3q/p}.$$

Так как в равенстве (7)  $t = p + k^2$ , то разложение (7) можно записать без радикалов следующим образом

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left( x^2 + kx + \left( p + k^2 - q/k \right) / 2 \right) \left( x^2 - kx + \left( p + k^2 + q/k \right) / 2 \right), \quad (9)$$

где  $k$  – любой корень бикубической относительно  $k$  резольвенты (8), которую можно представить в виде

$$r = \left( \left( p + k^2 \right) / 2 \right)^2 - \left( q / (2k) \right)^2. \quad (10)$$

Итак, для представления любого полинома четвертой степени с произвольными комплексными коэффициентами  $p$ ,  $q$  и  $r$  в виде произведения квадратичных множителей (9) достаточно найти один корень  $k$  уравнения (10). И, наоборот, для произвольных комплексных значений параметров  $p$ ,  $q$  и  $k$  получим разложение (9) полинома специального вида  $x^4 + px^2 + qx + r$ , где коэффициенты  $p$ ,  $q$  произвольны, а коэффициент  $r$  определяется равенством (10). Ниже даны примеры разложений частного вида, полученных из (9), (10) для некоторых конкретных значений  $k$ .

12. Полагая  $k = 1$ , находим  $r = ((p + 1)^2 - q^2)/4$  и получим разложение

$$M_4 = \left( x^2 + x + (p - q + 1)/2 \right) \left( x^2 - x + (p + q + 1)/2 \right).$$

13. Полагая  $k = q$ , находим  $r = ((p + q^2)^2 - 1)/4$  и получим разложение

$$M_4 = \left( x^2 + qx + (p + q^2 - 1)/2 \right) \left( x^2 - qx + (p + q^2 + 1)/2 \right).$$

14. Полагая  $k = \sqrt{p}$ , находим  $r = p^2 - q^2/(4p)$  и получим разложение

$$M_4 = \left( x^2 + kx + p - q/(2k) \right) \left( x^2 - kx + p + q/(2k) \right).$$

15. Для любых комплексных  $m$  и  $n$  справедливо разложение

$$x^4 + 2mx^2 + n\sqrt{\pm nx \pm nm} + m^2 = (x^2 \pm \sqrt{\pm nx} + m)(x^2 \mp \sqrt{\pm nx} \pm n + m).$$

16. Уравнение  $z^4 + az^3 + bz^2 + (a^3 - 4ab)z/8 + d = 0$ , где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $d$  произвольные комплексные числа, подстановкой  $z = x - a/4$  приводится к биквадратному уравнению  $x^4 - (3a^2 - 8b)x^2/8 + (5a^4 - 16a^2b + 256d)/256 = 0$  и, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах.

17. Кратные корни. Если полином  $M_4$  имеет корень кратности 2, 3 или 4, то его коэффициенты удовлетворяют условию Ф. Клейна [20, с. 143]

$$\left(\frac{p^2 + 12r}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{2p^3 - 72pr + 27q^2}{216}\right)^2/4 = 0. \quad (11)$$

Если выполняются равенства  $r = p^2/4$  и  $27q^2 = 32p^3$ ,  $p \neq 0$ , то полином  $M_4$  имеет ровно один двукратный корень  $x_{1,2} = q(p^2 + 12r)/(2p^3 - 8pr + 9q^2)$ .

Полином  $x^4 + px^2 + qx + r$  имеет два двукратных корня только в случае, когда  $q = 0$  и  $r = p^2/4$ :  $x^4 + px^2 + p^2/4 = (x^2 + p/2)^2$ . Если выполняются равенства  $p^2 + 12r = 0$  и  $8p^3 + 27q^2 = 0$ , которое следует из условия (11) при  $r = -p^2/12$ , то полином  $x^4 + px^2 + qx + r$  имеет трехкратный корень  $x_{1,2,3} = 2p^2/(9q) = -8r/(3q)$ .

Полином  $x^4 + px^2 + qx + r$  имеет четырехкратный корень только при  $p = q = r = 0$ .

**Теорема 8.** Если уравнение  $x^4 + wx^3 + px^2 + qx + r = 0$  имеет корни  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , то уравнение  $z^4 + qz^3 + prz^2 + wr^2z + r^3 = 0$  имеет корни  $abc$ ,  $abd$ ,  $acd$ ,  $bcd$ .

## Уравнение пятой степени

**О кратных корнях.** Выражение для двукратного корня полинома пятой степени в каноническом виде  $M_5 = x^5 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  слишком громоздко и здесь не приводится, однако если  $b = 0$ , то двукратный корень равен  $x_{1,2} = -(27c^3d + 375ce^2 - 400d^2e)/(2(27c^4 + 300cde - 160d^3))$ , при условии, что такой корень один. Если полином  $M_5$  имеет два двукратных корня, то они являются корнями квадратного уравнения

$$(12b^3 - 40bd + 45c^2)x^2 + 2(4b^2c - 25be + 30cd)x + 4b^2d + 75ce = 0$$

и уравнение  $M_5 = 0$  разрешимо в квадратных радикалах.

Если полином  $M_5$  имеет трехкратный корень, то он так же, как и двукратный корень, выражается через коэффициенты в рациональном виде. Если  $c = 0$  этот корень имеет вид  $k_{1,2,3} = 100e/(21b^2 - 100d)$  и при  $21b^2 - 100d \neq 0$  уравнение  $M_5 = 0$  разрешимо в квадратных радикалах. Если  $21b^2 - 100d = 0$  и  $c = 0$ , то полином  $M_5$  не имеет трехкратных и четырехкратных корней [9, 10].

Разложения на множители полиномов пятой степени специального вида можно получить из разложений полиномов шестой степени, которые даны ниже. Здесь приведем лишь три разложения:

$$x^5 + cx^3 + dx^2 + ex + \frac{d(c \pm w)}{2} = \left(x^2 + \frac{c \pm w}{2}\right) \left(x^3 + \frac{c \mp w}{2}x + d\right), \text{ где } w = \sqrt{c^2 - 4e},$$

$$x^5 + bx^3 + cx^2 + b^2x/4 + bc/2 = (x^2 + b/2)(x^3 + bx/2 + c),$$

$$x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + bdx + cd = (x^3 + d)(x^2 + bx + c).$$

## Уравнение шестой степени

**О кратных корнях.** Необходимым и достаточным условием для того, чтобы полином  $x^6 + cx^4 + ex^2 + g$  имел ровно два двукратных корня, является равенство  $4c^3g - c^2e^2 - 18ceg + 4e^3 + 27g^2 = 0$  при условии, что  $c^2 \neq 3e$ . В этом случае получим разложение  $x^6 + cx^4 + ex^2 + g = (x^2 - k)^2(x^2 - m)$ , где  $k$  и  $m$  можно найти по формулам  $k = (9g - ce) / (2c^2 - 6e)$ ,  $m = g(c^2 - 3e) / (3cg - e^2)$ . Если  $c^2 = 3e$  и  $g = c^3/27$ , то полином  $x^6 + cx^4 + ex^2 + g$  имеет два трехкратных корня равных  $\pm\sqrt{-c/3}$ , которые будут действительными числами лишь для действительных  $c \leq 0$  [9, 10].

Найдем условия, при которых полином шестой степени в каноническом виде можно представить произведением полиномов третьей степени в каноническом виде

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = (x^3 + px + q)(x^3 + rx + k), \quad (12)$$

где коэффициенты  $c, d, e, f, g$  – произвольные комплексные числа.

**Теорема 9.** Для того чтобы выполнялось равенство (12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$g(c^2 - 4e) - cdf + d^2e + f^2 = 0. \quad (13)$$

**Доказательство. Достаточность.** Пусть выполняется равенство (13). Рассмотрим два возможных случая. Если  $c^2 - 4e = 0$ , то из равенства (13) найдем  $f = cd/2$ . В этом случае разложение (12) имеет вид

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + \frac{c^2}{4}x^2 + \frac{cd}{2}x + g = \left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d+v}{2}\right)\left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d-v}{2}\right), \quad (14)$$

где  $v = \sqrt{d^2 - 4g}$ . Если  $c^2 - 4e \neq 0$ , то, выражая  $g$  из равенства (13), получим

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + \frac{cdf - d^2e - f^2}{c^2 - 4e} = \left(x^3 + \frac{c+w}{2}x + \frac{d}{2} + \frac{cd-2f}{2w}\right)\left(x^3 + \frac{c-w}{2}x + \frac{d}{2} - \frac{cd-2f}{2w}\right), \quad (15)$$

где  $w = \sqrt{c^2 - 4e}$ .

**Необходимость.** Пусть выполняется равенство (12). Следовательно, выполняются пять равенств:  $c = p + r$ ,  $e = pr$ ,  $d = q + k$ ,  $g = qk$ ,  $f = pk + qr$ . Из первых двух равенств находим

$$p_{1,2} = \left(c \pm \sqrt{c^2 - 4e}\right) / 2, \quad r_{1,2} = \left(c \mp \sqrt{c^2 - 4e}\right) / 2. \quad \text{Из следующих двух равенств имеем}$$

$$q_{1,2} = \left(d \pm \sqrt{d^2 - 4g}\right) / 2, \quad k_{1,2} = \left(d \mp \sqrt{d^2 - 4g}\right) / 2. \quad \text{Подставляя эти выражения коэффициентов } p,$$

$k, q, r$  в равенство  $f = pk + qr$ , после преобразований получим равенство (13).

**Следствие.** При  $g = d^2/4$  разложение (14) принимает вид

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + c^2x^2/4 + cdx/2 + d^2/4 = \left(x^3 + cx/2 + d/2\right)^2,$$

и полином имеет три двукратных корня. Если  $g = d^2/4$  и  $2c^3 + 27d^2 = 0$ , то полином имеет один двукратный и один четырехкратный корень.

Приведем различные представления полинома шестой степени  $M_6 = x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ , у которого все ненулевые коэффициенты кроме одного свободны (произвольны), в виде произведения двух полиномов третьей степени.

1.  $x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + g = (x^3 + kx^2 + (d-n)/2)(x^3 - kx^2 + (d+n)/2)$ , где один связанный коэффициент  $g = (cd^2 + e^2) / (4c)$ ,  $k = \sqrt{-c}$ ,  $n = e/k$ .

$$2. M_6 = (x^3 \pm mx^2 + fx/d + (n+d)/2)(x^3 \mp mx^2 + fx/d - (n-d)/2),$$

где  $m = \sqrt{2f/d - c}$ ,  $n = \sqrt{d^2 - 4g}$ . Здесь коэффициенты  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $g$  свободны, а связанный коэффициент  $e$  является одним из корней квадратного относительно  $e$  уравнения  $d^4 e^2 - 2d^2 f^2 e + cd^6 - 4cd^4 g - 2d^5 f + 8d^3 fg + f^4 = 0$ .

$$3. M_6 = (x^3 + mx^2 + (n+f)x/(2s) + s)(x^3 - mx^2 - (n-f)x/(2s) + s),$$

$s = \sqrt{g}$ ,  $m = \sqrt{f/s - c}$ ,  $n = \sqrt{f^2 - 4ge}$ . Здесь свободны коэффициенты  $c$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$ , а  $d$  находится из уравнения  $s^3 d^2 - 4s^4 d - 4ces^3 + cf^2 s + 4efs^2 - f^3 + 4s^5 = 0$ .

$$4. x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 \pm fx + g = (x^3 + kx^2 + mx + s)(x^3 - kx^2 + nx + s),$$

где  $m = ((\pm 2g - ds)k - cf + f^2/s)/(2t)$ ,  $n = ((\mp 2g + ds)k - cf + f^2/s)/(2t)$ ,  $s = \sqrt{g}$ ,  $t = f - cs$ ,  $k = \sqrt{t/s}$ . Здесь коэффициенты  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $g$  свободны, а связанный коэффициент  $e$  находится из равенства  $e = (-s(d \mp 2s)^2/t + f^2/g)/4$ .

Рассмотрим теперь разложения полинома шестой степени на полиномы второй и четвертой степеней.

5.  $M_6 = (x^2 + f/d)(x^4 + (cd - f)x^2/d + dx + dg/f)$ , где  $g$  дается равенством  $g = f(f^2 - cdf + d^2 e)/d^3$ , а коэффициенты  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  свободны.

$$6. M_6 = (x^2 - kx + n)(x^4 + kx^3 + (k^2 + c - n)x^2 + (k^3 + ck - 2nk + d)x + k^2 n),$$

где  $k = (f - dn)/(n(c - dn))$ , параметр  $n$  находится из квадратного уравнения  $(d^2 - 4g)n^2 + 2(2cg - df)n + f^2 - c^2 g = 0$ . Коэффициенты  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $g$  свободны, а коэффициент  $e$  находится из равенства  $e = -k^4 + (4n - c)k^2 - dk + cn - n^2$ .

$$7. M_6 = (x^2 - kx + m)(x^4 + kx^3 + (k^2 + 2)x^2 + knx + n^2),$$

где  $k = f/(n(m - n))$ ,  $n = \pm \sqrt{g/m}$ ,  $m = c - 2$ . Коэффициенты  $c$ ,  $f$ ,  $g$  свободны, а связанные коэффициенты  $d$ ,  $e$  находятся из равенств  $d = -k(k^2 - n - c + 4)$ ,  $e = fk/n + n^2 + 2m$ . Так как полином четвертой степени является возвратным, то он раскладывается на квадратичные множители и, следовательно, разложение 7 может быть записано с использованием лишь квадратных радикалов.

$$8. M_6 = (x^2 - kx + n)(x^4 + kx^3 + (k^2 + c - n)x^2 + (ck + d + k^3 - 2n^3)x + m),$$

где  $m = (ckn + dn - f + k^3 n - 2kn^2)/k$ ,  $n$  - любой корень квадратного уравнения  $3kn^2 - (2ck + d + 4k^3)n + k^5 + ck^3 + dk^2 + ek + f = 0$ ,  $k$  произвольно. Коэффициенты  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  свободны, а  $g$  находится из равенства  $g = nm$ .

9. Приведем разложение возвратного полинома шестой степени

$$x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cnx^2 + bn^2 x + n^3 = (x^2 - t_1 x + n)(x^2 - t_2 x + n)(x^2 - t_3 x + n),$$

где коэффициенты  $n$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  произвольны, а  $t_i$  - корни кубической резольвенты  $t^3 + bt^2 + (c - 3n)t + d - 2bn = 0$ .

10. Возвратный полином шестой степени можно представить в виде произведения квадратного трехчлена и возвратного полинома четвертой степени

$$x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ncx^2 + n^2 bx + n^3 = (x^2 + (b - k)x + n)(x^4 + kx^3 + mx^2 + knx + n^2),$$

где  $m = k^2 - kb - n + c$ , коэффициенты  $n, b, c, d$  произвольны. Коэффициент  $k$  – любой корень кубического уравнения  $k^3 - 2bk^2 - (3n - b^2 - c)k + b(n - c) + d = 0$ . Если параметр  $k$  выражается из кубического уравнения через квадратные радикалы из коэффициентов, то и возвратный полином шестой степени также можно выразить лишь через квадратные радикалы.

### Несколько приложений к задачам механики

В работе [12] получен критерий положительности полинома четвертой степени, который для приведенного полинома можно сформулировать следующим образом. Полином четвертой степени  $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$  с действительными коэффициентами  $p, q$  и  $r$  положителен на действительной оси тогда и только тогда, когда выполняется требование

$$\{(\Delta > 0) \wedge [(p > 0) \vee (r > p^2/4)]\} \vee \{(\Delta = 0) \wedge (p > 0) \wedge (r = p^2/4) \wedge (q = 0)\}, \quad (16)$$

где  $\Delta = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3$ . Так как  $\Delta$  является полиномом четвертой степени относительно коэффициента  $p$ , третьей относительно  $r$  и биквадратным относительно  $q$ , то исследование неравенства  $\Delta > 0$  в символьном виде вызывает затруднение. Однако, используя результаты работы [19], здесь предлагается следующий равносильный (16) критерий. Полином четвертой степени  $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$  с действительными коэффициентами  $p, q$  и  $r$  положителен на действительной оси тогда и только тогда, когда выполняется требование

$$q \in (-Q, Q) \wedge \left\{ (r > p^2/4) \vee [(p > 0) \wedge (0 < r \leq p^2/4)] \right\}, \quad (17)$$

где  $Q = \sqrt{6(pS - p^2 + 12r)} / (9\sqrt{S - p})$ ,  $S = \sqrt{p^2 + 12r}$ . Проверка выполнения условия (17) проще, чем проверка условия (16). В частности, из (17) видно, что при  $r \leq 0$  полином  $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$  не может быть положительным на всей действительной оси (например, при  $x = 0$ , очевидно,  $M_4(0) = r \leq 0$ ). Кроме того, для конкретных значений коэффициентов  $p, q$  и  $r$  условие (17) показывает насколько далеко эти значения от границы положительности полинома.

В работе [14] ключевую роль играют корни характеристического уравнения

$$k^4 + (\alpha^2 - R)k^2 + 2i\alpha\omega k - \omega^2 = 0. \quad (18)$$

Условие  $r = (2p^3 + 27q^2)/(72p)$ , при котором справедливо разложение 2 настоящей работы на коэффициенты полинома  $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$  для уравнения (18), запишется в виде  $18\omega^2(\alpha^2 + 2R) - (\alpha^2 - R)^3 = 0$ . При этом условии корни уравнения (18), выражаются через параметры  $\alpha, R$  и  $\omega$  с помощью квадратных (не кубических) радикалов.

Аналогично, разложение 3 выполняется, если выполняются равенства  $R = (2\alpha^2 - 1)/2$  и  $16\omega^2(\alpha^2 - 1) - 1 = 0$ .

Разложение 4 выполняется, если  $R = \alpha^2 - 2$  и  $\omega^2(\alpha^2 - 4) - 4 = 0$ .

Разложение 7 выполняется, если выполняется равенство  $R = \alpha^4/(\alpha^2 - 1) - 2i\alpha\omega$ .

Разложение 11 выполняется, если  $R = \alpha^2 - 18$  и  $\omega^2(\alpha^2 - 36) - 2916 = 0$ .

Разложение 12 выполняется, если  $4\omega^2(\alpha^2 + 1) - (\alpha^2 + 1 - R)^2 = 0$ .

Итак, если параметры  $\alpha, R$  и  $\omega$  связаны любым из приведенных здесь условий, то корни уравнения (18) выражаются через квадратные радикалы.

## Заключение

Предложены разложения на множители полиномов невысоких степеней специального вида. Выражения для кратных корней уравнений третьей и четвертой степени даны в рациональном виде, для уравнений пятой и шестой степени специального вида – через квадратные радикалы. Представлены разложения на множители возвратных полиномов шестой степени. Приведены теоремы, позволяющие конструировать для исходных уравнений связанные (сопряженные) с ними уравнения, корни которых выражаются через квадратные радикалы, а затем по найденным корням находить корни исходного уравнения (см., например, теорему 5). Полученные результаты могут быть полезны при аналитическом исследовании алгебраических уравнений, возникающих в задачах механики, физики.

## Литература

1. Mochimaru, Y. Reciprocal solution of a quartic equation / Y. Mochimaru // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2004. – Vol. 14, no. 2. – P. 207–210.
2. Hebison-Evans, D. Solving Quartics and Cubics for Graphics / D. Hebison-Evans // *Technical Report TR94-487, Basser Dept. Computer Science, Univ. Sydney*, 2004.
3. Schmakov, S.I. A Universal Method of Solving Quartic Equations / S.I. Schmakov // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2011. – Vol. 71, no. 2. – P. 251–259.
4. Переломов, А.М. Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений / А.М. Переломов // *Теоретическая и математическая физика*. – 2004. – Т. 140, № 1. – С. 3–13.
5. Галиева, Л.И. Об одном классе уравнений, разрешимых в радикалах / Л.И. Галиева, И.Г. Галяутдинов // *Известия вузов. Математика*. – 2011. – № 2. – С. 22–30.
6. Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций / Е.Н. Михалкин // *Сиб. мат. журн.* – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 365–371.
7. Зеленова, М.Е. Решение полиномиальных уравнений в поле алгебраических чисел / М.Е. Зеленова // *Вестн. Моск. Ун-та. Серия 1. Математика, механика*. – 2014. – № 1. – С. 25–29.
8. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений методом Рутисхаузера–Никипорца / В.И. Шмойлов, М.В. Хисамутдинов, Г.А. Кириченко // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика*. – 2015. – Т. 15, № 1. – С. 63–79.
9. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // *Математический сборник*. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.
10. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // *Математические структуры и моделирование*. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.
11. Гашков, С.Б. О сложности интегрирования рациональных дробей / С.Б. Гашков // *Труды МИАН*. – 1997. – Т. 218. – С. 122–133.
12. Зубов, Л.М. Критерий сильной эллиптичности уравнений равновесия анизотропного линейно-упругого материала / Л.М. Зубов, А.Н. Рудев // *Прикладная математика и механика*. – 2016. – Т. 80, Вып. 6. – С. 686–721.
13. Акуленко, Л.Д. Изгибные колебания движущегося стержня / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // *Прикладная математика и механика*. – 2008. – Т. 72, Вып. 5. – С. 759–774.
14. Акуленко, Л.Д. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки / Л.Д. Акуленко, Д.В. Георгиевский, С.В. Нестеров // *Изв. РАН. МТТ*. – 2015. – № 2. – С. 139–144.
15. Землянухин, А.И. Нелинейное суммирование степенных рядов и точные решения эволюционных уравнений / А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев // *Известия вузов. Математика*. – 2018. – № 1. – С. 34–41.
16. Ватульян, А.О. О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур / А.О. Ватульян, Е.Л. Коссович, Д.К. Плотников // *МТТ*. – 2017. – № 4. – С. 94–100.
17. Васильев, В.В. К задаче устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии / В.В. Васильев // *Изв. РАН. МТТ*. – 2011. – № 2. – С. 5–15.
18. Ильгамов, М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки / М.А. Ильгамов // *ДАН*. – 2017. – Т. 476, № 4. – С. 402–405.

19. Астапов, Н.С. Сравнительный анализ решений алгебраических уравнений третьей и четвертой степени / Н.С. Астапов, И.С. Астапов // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. – 2016. – Т. 16, № 1. – С. 14–28.

20. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т.: Т. 1: Арифметика, алгебра, анализ / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – 431 с.

21. Клейн, Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени / Ф. Клейн. – М.: УРСС, 2004. – 337 с.

Поступила в редакцию 15 декабря 2021 г.

### Сведения об авторе

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация; доцент кафедры высшей математики, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2022, vol. 14, no. 3, pp. 5–16*

DOI: 10.14529/mmph220301

## ON THE SOLUTION OF ALGEBRAIC EQUATIONS OF SMALL DEGREES BY SQUARE RADICALS

**N.S. Astapov<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

E-mail: nika@hydro.nsc.ru

**Abstract.** The work is devoted to the search for constructive analytical expressions for the roots of algebraic equations of the third-sixth degree by the coefficients of the equations. Relationships are obtained for the coefficients at which the roots of the equations are represented most simply, for example, rationally. Rational expressions for multiple roots are given. A condition is found under which the polynomial of the sixth degree in the canonical form can be represented by the product of polynomials of the third degree in the canonical form. Particular attention is paid to the symbolic expression of the roots of equations by square radicals from the coefficients. A method for solving equations using defining (generating, related to the original) equations is proposed. All the presented expansions are true of polynomials with arbitrary complex coefficients.

**Keywords:** solution by radicals; Cardano formulas; roots of polynomials; recurrent equations; defining equations.

### References

1. Mochimaru Y. Reciprocal Solution of a Quartic Equation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2004, Vol. 14, no. 2, pp. 207–210.
2. Hebison-Evans D. Solving Quartics and Cubics for Graphics. *Technical Report TR94-487*. updated 31 March 2011, 27 May 2017, 13 January 2019, Basser Department of Computer Science (now School of Information Technologies), University of Sydney, Australia. <http://satd.com.au/don/pubs/solving.html>
3. Schmakov S.I. A Universal Method of Solving Quartic Equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2011, Vol. 71, no. 2, pp. 251–259.
4. Perelomov A.M. Hypergeometric Solutions of Some Algebraic Equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, Vol. 140, no. 1, pp. 895–904. (in Russ.). DOI: 10.1023/B:TAMP.0000033027.63336.80
5. Galieva L.I., Galyautdinov I.G. One Class of Equations Solvable in Radicals. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2011, Vol. 55, no. 2, pp. 18–25. DOI: 10.3103/S1066369X11020034

6. Mikhalkin, E.N. On Solving General Algebraic Equations by Integrals of Elementary Functions. *Siberian Mathematical Journal*, 2006, Vol. 47, pp. 301–306. DOI: 10.1007/s11202-006-0043-4
7. Zelenova M.E. Solution of Polynomial Equations in the Field of Algebraic Numbers. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2014, Vol. 69, no. 1, pp. 24–28. DOI: 10.3103/S0027132214010045
8. Shmoylova V.I., Hisamutdinova M.V., Kirichenko G.A. The Solution of Algebraic Equations by the Method of Rutishauser–Nieporte. *Vestnik NGU. Series: Mathematics, mechanics, computer science*, 2015, Vol. 15, no. 1, pp. 63–79. (in Russ.).
9. Antipova I.A., Michalkin E.N. Rational Expressions for Multiple Roots of Algebraic Equations. *Sbornik: Mathematics*, 2018, Vol. 209, no. 10, pp. 1419–1444. DOI: 10.1070/SM8950
10. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. Localization and Finding Solutions of Trinomial Algebraic Equations. *Mathematical Structures and Modeling*, 2020, no. 2(54), pp. 65–85. (in Russ.). DOI: 10.24147/2222-8772.2020.2.65-85
11. Gashkov S.B. On the Complexity of Integration of Rational Fractions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1997, Vol. 218, pp. 117–128.
12. Zubov L.M., Rudev A.N. Criterion For the Strong Ellipticity of the Equations of Motion of An Anisotropic Linear-Elastic Material. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, Vol. 80, no. 6, pp. 485–509. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.06.007
13. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Flexural Vibrations of a Moving Rod. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, Vol. 72, Iss. 5, pp. 550–560. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.11.008
14. Akulenko L.D., Georgievskii D.V., Nesterov S.V. Transverse Vibration Spectrum of a Part of a Moving Rod under a Longitudinal Load. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, no. 2, pp. 227–231. DOI: 10.3103/S0025654415020120
15. Zemlyanukhin, A.I., Bochkarev, A.V. Nonlinear Summation of Power Series and Exact Solutions of Evolution Equations. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2018, Vol. 62, Iss. 1, pp. 29–35. DOI: 10.3103/S1066369X1801005X
16. Vatul'yan A.O., Kossovich E.L., Plotnikov D.K. Some Specific Characteristics of Indentation of Cracked Layered Structures. *Mechanics of Solids*, 2017, Vol. 52, no. 4, pp. 429–434. DOI: 10.3103/S0025654417040094
17. Vasil'ev V.V. To the Problem of Stability of a Cylindrical Shell under Axial Compression. *Mechanics of Solids*, 2011, Vol. 46, no. 2, pp. 161–169. DOI: 10.3103/S0025654411020026
18. Ilgamov M.A. Influence of Pressure of the Surrounding Medium on Thin Plate and Film Bending. *DAN*, 2017, Vol. 476, no. 4, pp. 402–405. (in Russ.). DOI: 10.7868/S086956521728009X
19. Astapov N.S., Astapov I.S. Comparative Analysis of Solutions to 3rd and 4th Order Algebraic Equations. *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, 2016, Vol. 16, Iss. 1, pp. 14–28. (in Russ.). DOI: 10.17377/PAM.2016.16.102
20. Klein F. *Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshey. V 2 t.: T.1: Arifmetika, algebra, analiz* (Elementary Mathematics from the Point of View of Higher Mathematics. In 2 Vols.: Vol. 1: Arithmetic, algebra, analysis), Moscow, Nauka Publ., 1987, 431 p. (in Russ.).
21. Klein F. *Vorlesungen über das ikosaeder und die auflösung der gleichungen vom fünften grade*. Nobel Press, 2020, 280 p. (in German).

*Received December 15, 2021*

### Information about the author

Astapov Nikolay Stepanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Staff Scientist, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation; Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.



# СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В КВАДРАТЕ И В КРУГЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ВЕНТЦЕЛЯ

**Н.С. Гончаров**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: goncharovns@susu.ru

**Аннотация.** В последнее время в математической литературе краевое условие Вентцеля рассматривается с двух точек зрения. В первом случае, назовем его классическим, это условие представляет собой уравнение, содержащее линейную комбинацию значений функции и ее производных на границе области. Причем сама функция удовлетворяет еще уравнению с эллиптическим оператором, заданным в области. Во втором, неклассическом случае условие Вентцеля представляет собой уравнение с оператором Лапласа–Бельтрами, заданным на границе области, понимаемой как гладкое компактное риманово многообразие без края, причем внешнее воздействие представлено нормальной производной функции, заданной в области. Рассматриваются свойства оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля в неклассическом смысле. В частности, построены собственные значения и собственные функции оператора Лапласа для системы уравнений Вентцеля в круге и в квадрате.

*Ключевые слова:* оператор Лапласа; динамическое условие Вентцеля.

## Введение

Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , – связная ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . В дальнейшем в области  $\Omega$  будем искать собственные значения оператора Лапласа

$$(\lambda - \Delta)u(x) = 0, x \in \Omega, \quad (1)$$

с граничным условием Вентцеля

$$\Delta v(x) + lv(x) = 0, x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

подразумевая под  $\partial\Omega$  гладкое риманово многообразие без края, с нулевым условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, x \in \Omega, \quad (3)$$

и условием непрерывности решения

$$\text{Tr } u = v. \quad (4)$$

Отметим, что хотя символом  $\Delta$  в уравнении (1) обозначен оператор Лапласа, а в уравнении (2) – оператор Лапласа–Бельтрами, это в дальнейшем не вызовет путаницы. Более того, уравнение (2) будет рассматриваться исключительно в пространствах 0-форм. Здесь  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $v: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – искомые функции, параметры  $l$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , символом  $\frac{\partial}{\partial n}$  обозначена производная по внешней (относительно области  $\Omega$ ) нормали к границе  $\partial\Omega$ . В целом модель (1), (2) описывает процессы, протекающие в цитоплазме клетки и на ее мембране, и обобщает модель, предложенную в [1].

Исследование условий Коши с граничными условиями Вентцеля вида (2) впервые упоминается в работах [2, 3] при построении генератора полугруппы Феллера для многомерных диффузионных процессов в ограниченной области  $\Omega$ . Спустя столетия список математических моделей, где вместе с рассматриваемой математической моделью (2) описывает процессы на границе области  $\Omega$ , существенно пополнился. В [2] этот результат был использован при решении ряда прикладных задач. Первые итоги исследований в данном направлении были подведены в [4]. Кроме того, в [5] найдены условия аналитичности разрешающих  $C_0$ -непрерывных полугрупп операторов. Наконец, в [6] рассмотрен случай, когда оператор  $\Delta$  заменен на  $\Delta^2$  в области  $\Omega$ , на

границе же по-прежнему оператор Лапласа–Бельтрами  $\Delta$ . Отметим также, что особый интерес с нашей стороны представляется в [7], где была показана неединственность разрешимости задачи с динамическим условием Вентцеля, что в дальнейшем легло в [8] при описании подходящих условий для однозначной разрешимости задачи Вентцеля–Робена для уравнения Дзекера.

Целью нашей работы является описание свойств оператора Лапласа для уравнения Гемгольца с динамическим условием Вентцеля. Статья кроме введения и списка цитируемой литературы содержит два параграфа. В первом параграфе рассматриваются собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля (1)–(4) в круге. Во втором параграфе рассматриваются собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля (1)–(4) в квадрате.

## Собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля в круге

Рассмотрим поставленную задачу (1)–(4), где в качестве области  $\Omega$  рассмотрим круг  $K_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  радиуса  $R$ . Перейдем к нахождению собственных значений  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  и, соответствующих им, собственных функций  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  для оператора Лапласа внутри круга с нулевым граничным условием Неймана, предварительно осуществив переход из декартовой системы координат в полярную. Уравнение (1) и условие (3) в полярных координатах  $(r, \varphi)$  имеют вид

$$u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) - \lambda u(r, \varphi) = 0 \quad (5)$$

$$u_r(R, \varphi) = 0. \quad (6)$$

Используя метод Фурье для данной задачи, представив решения в виде  $u(r, \varphi) = F(r)G(\varphi)$ , получаем следующее соотношение

$$\frac{F_{rr}(r) + \frac{1}{r}F_r(r) - \lambda F(r)}{\frac{1}{r^2}F(r)} = -\frac{G_{\varphi\varphi}(\varphi)}{G(\varphi)} = \gamma,$$

что равносильно решению двух независимых уравнений

$$G_{\varphi\varphi}(\varphi) + \gamma G(\varphi) = 0,$$

$$r^2 F_{rr}(r) + rF_r(r) - \lambda r^2 F(r) = F(r)\gamma. \quad (7)$$

Поскольку собственная функция должна быть периодической по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , то для  $G(\varphi)$  получаем задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} r^2 F_{rr}(r) + rF_r(r) - \lambda r^2 F(r) &= F(r)\gamma, \\ G(\varphi) &= G(\varphi + 2\pi), \end{aligned} \quad (8)$$

решение которой имеет вид

$$G_n(\varphi) = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi, \gamma = \gamma_n = n^2, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что второе уравнение в (7) при каждом  $\gamma = n^2$  сводится к уравнению типа Бесселя путем следующих преобразований и замены  $x = r\sqrt{-\lambda}$ , где  $\lambda < 0$ ,

$$r^2 F_{rr}(r) + rF_r(r) - F(r)(-\lambda r^2 + \gamma) = 0,$$

В силу нашей замены  $x = r\sqrt{-\lambda}$ , и того, что  $\gamma = n^2$ , преобразуем искомое уравнение в следующем виде

$$x^2 F_{xx}(x) + xF_x(x) - F(x)(x^2 - n^2) = 0.$$

Решая полученное уравнение с нулевым граничным условием Неймана, получаем собственные значения в следующем виде

$$\lambda = \lambda_k^{(n)} = \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} \right)^2,$$

где  $\mu_k^{(n)}$  – нули функции Бесселя первого порядка  $J_n(R\sqrt{-\lambda})$ . С другой стороны, имеем на границе области выражение

$$r^2 G_{\varphi\varphi}(\varphi)F(r) + lF(r)G(\varphi) = 0,$$

что равносильно уравнению

$$J(\sqrt{-\lambda}R)(l - R^2 n^2) = 0, \quad (10)$$

в силу того, что  $Tr u = v$  и  $G_{\varphi\varphi}(\varphi) = -n^2 G(\varphi)$ . Решая уравнение (10) в зависимости от ограниченных на  $l$  имеем следующее

**Утверждение 1.1** Собственные значения оператора Лапласа в круге  $K_R$  с краевым условием Вентцеля (3) имеют вид

$$\lambda = \lambda_k^{(n)} = \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} \right)^2,$$

где  $\mu_k^{(n)}$  – нули функции Бесселя первого порядка  $J_n(x)$ , если  $l \neq R^2 n^2$ .

В силу (9) каждая собственная функция

$$u_n(r, \varphi) = F_n(r)G_n(\varphi) = \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} \right) (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2) и (3), а также условию непрерывности решения (4). Таким образом, общее решение задачи (1)–(4) в круге  $K_R$  имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{i,n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} \right) (C_1^i \cos n\varphi + C_2^i \sin n\varphi).$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по  $r$  и  $\varphi$ , то сумма его, очевидно будет решением рассматриваемого уравнения (1). Данное утверждение легко доказывается, например, из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости рассматриваемых рядов.

### Собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля в квадрате

Рассмотрим теперь задачу (1)–(4), где в качестве области  $\Omega$  рассмотрим квадрат  $\Pi_\pi = \{(x, y) : (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]\}$  со стороной  $\pi$ . Перейдем к нахождению собственных значений  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  и соответствующих им, собственных функций  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  для оператора Лапласа внутри квадрата  $\Pi_\pi$  с нулевым граничным условием Неймана. Имеем,

$$(\lambda - \Delta)u(x) = 0, x \in \Omega, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \text{на левой границе квадрата } u'(0, y) = 0, \\ \text{на верхней границе квадрата } u'(x, \pi) = 0, \\ \text{на правой границе квадрата } u'(\pi, y) = 0, \\ \text{на нижней границе квадрата } u'(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Используя метод Фурье для данной задачи, представив решения в виде  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , получаем следующее соотношение

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = \mu,$$

что равносильно решению двух независимых уравнений

$$X_{xx}(x) - \mu X(x) = 0, X'(0) = 0, X'(\pi) = 0,$$

$$Y_{yy}(y) = (\lambda - \mu)Y(y), Y'(0) = 0, Y'(\pi) = 0,$$

Нетрудно заметить, что поскольку рассматриваются решения в виде  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , собственные функции  $u_{nm}(x, y)$  и собственные значения  $\lambda_{nm}$  внутри квадрата имеют вид  $u_{nm}(x, y) = \cos nx \cos my$  и  $\lambda_{nm} = -n^2 - m^2$  соответственно.

С другой стороны, изучая по аналогии собственные значения для оператора Лапласа на границе квадрата  $\partial\Pi_\pi$  в силу условия на непрерывность решения (4) получим следующую систему из собственных значений и собственных функций на соответствующих сторонах  $\Pi_\pi^1, \Pi_\pi^2, \Pi_\pi^3, \Pi_\pi^4$

$$\begin{cases} \lambda_m^{(1)} = -m^2, u_m^1(x, y) = \cos my, (x, y) \in \Pi_\pi^1 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < \pi\}, \\ \lambda_n^{(2)} = -n^2, u_{nm}^1(x, y) = (-1)^m \cos nx, (x, y) \in \Pi_\pi^2 = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y = \pi\}, \\ \lambda_n^{(3)} = -m^2, u_m^3(x, y) = \cos my, (x, y) \in \Pi_\pi^3 = \{(x, y) : x = \pi, 0 < y < \pi\}, \\ \lambda_m^{(4)} = -n^2, u_{nm}^4(x, y) = (-1)^m \cos nx, (x, y) \in \Pi_\pi^4 = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y = 0\}. \end{cases}$$

Имеет место следующее

**Утверждение 2.1** *Собственные значения оператора Лапласа в квадрате  $\Pi_\pi$  с краевым условием Вентцеля (3) имеют вид*

$$\lambda = \lambda_k^{(n)} = -(2n)^2,$$

при условии, что  $m = n$ .

Поскольку собственные числа в квадрате – сумма собственных чисел по осям, нетрудно заметить, что каждая собственная функция

$$u_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \cos ny$$

будет решением (1), удовлетворяющим граничным условиям (2) и (3), а также условию непрерывности решения (4).

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по  $x$  и  $y$ , то сумма его, очевидно, будет решением рассматриваемого уравнения (1). Данное утверждение легко доказывается, например, из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости рассматриваемых рядов.

*Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).*

## Литература

1. Goldstein, G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions / G.R. Goldstein // *Advances in Differential Equations*. – 2006. – Vol. 11, no. 14. – P. 457–480.
2. The heat equation with generalized Wentzell boundary condition / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // *J. Evol. Equ.* – 2002. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 1–19.
3. Classification of general Wentzell boundary conditions for fourth order operators in one space dimension / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2007. – Vol. 333, Iss. 1. – P. 219–235.
4. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis / G.M. Coclite, A. Favini, C.G. Gal *et al.* // *Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. – 2009. – Vol. 3. – P. 279–292.
5. Апушинская, Д.Е. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений / Д.Е. Апушинская, А.И. Назаров // *Алгебра и анализ*. – 1994. – Т. 6, Вып. 6. – С. 1–29.

6. Goncharov, N.S. Non-uniqueness of solutions to boundary value problems with Wentzell condition / N.S. Goncharov, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 102–105.

7. Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2010. – Т. 3, вып. 1. – С. 104–125.

8. Вентцель, А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т. 4, Вып. 2. – С. 172–185.

9. Феллер, В. Одномерные диффузионные процессы / В. Феллер // Математика. – 1958. – Т. 2, Вып. 2. – С. 119–146.

10. Лукьянов, В.В. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов / В.В. Лукьянов, А.И. Назаров // Зап. научн. сем. ПОМИ – 1998. – Т. 250. – С. 203–218.

11.  $C_0$ -Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128, Iss. 7. – P. 1981–1989.

12. Denk, R. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains / R. Denk, M. Kunze, D. Ploss // Integral Equations and Operator Theory. – 2021. – Vol. 93, Iss. 2. – Article number: 13. – 26 p.

Поступила в редакцию 15 июля 2022 г.

#### Сведения об авторе

Гончаров Никита Сергеевич – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2022, vol. 14, no. 3, pp. 17–22*

DOI: 10.14529/mmph220302

## EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF THE LAPLACE OPERATOR IN A SQUARE AND IN A CIRCLE WITH A WENTZEL BOUNDARY CONDITION

**N.S. Goncharov**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: goncharovns@susu.ru*

Abstract. Recently, in the mathematical literature, the Wentzel boundary condition has been considered from two points of view. In the first case, let us call it a classical case, this condition is an equation containing a linear combination of the values of the function and its derivatives at the boundary of the domain. Meanwhile, the function itself also satisfies an equation with an elliptic operator given in the domain. In the second, neoclassical case, the Wentzel condition is an equation with the Laplace–Beltrami operator defined on the boundary of the domain, understood as a smooth compact Riemannian manifold without an edge; and the external effect is represented by the normal derivative of the function specified in the domain. The paper considers the properties of the Laplace operator with the Wentzel boundary condition in the neoclassical sense. In particular, eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace operator are constructed for a system of Wentzel equations in a circle and in a square.

*Keywords: Laplace operator; Wentzel dynamic condition.*

#### References

1. Goldstein G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions. *Advances in Differential Equations*, 2006, Vol. 11, no. 14, pp. 457–480.

2. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. The Heat Equation with Generalized Wentzell Boundary Condition. *J. Evol. Equ.*, 2002, Vol. 2, Iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1007/s00028-002-8077-y
3. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. Classification of General Wentzell Boundary Conditions for Fourth Order Operators in one Space Dimension. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, Vol. 333, no. 1, pp. 219–235.
4. Coclite G.M., Favini A., Gal C.G., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Obrecht E., Romanelli S. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis. *Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, Vol. 3, pp. 279–292.
5. Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. The Initial-Boundary Value Problem for Nondivergent Parabolic Equations with Venttsel' Boundary Condition. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 6, pp. 1127–1149.
6. Goncharov N.S., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Non-Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems with Wentzell Condition. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software*, 2021, Vol. 14, no. 4, pp. 102–105.
7. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).
8. Venttsel' A.D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1959, Vol. 4, Iss. 2, pp. 164–177. DOI: 10.1137/1104014
9. Feller W. Diffusion Processes in One Dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1954, Vol. 77, Iss. 1, pp. 1–31.
10. Lukyanov V.V., Nazarov A.I. Solving the Venttsel Problem for the Laplace and Helmholtz Equations with the Help of Iterated Potentials. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2000, Vol. 102, Iss. 4, pp. 4265–4274. DOI: 10.1007/BF02673857
11. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S.  $C_0$ -Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, Vol. 128, Iss. 7, pp. 1981–1989. DOI: 10.1090/S0002-9939-00-05486-1
12. Denk R., Kunze M., Ploss D. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains. *Integral Equations and Operator Theory*, 2021, Vol. 93, Iss. 2, Article number 13, 26 p. DOI: 10.1007/s00020-021-02624-w

*Received July 15, 2022*

### Information about the author

Goncharov Nikita Sergeevich is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru.

## К ИДЕНТИФИКАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ И ДРУГИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**М.Л. Зайцев<sup>1</sup>, В.Б. Аккерман<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, Соединенные Штаты Америки

E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

**Аннотация.** Авторами был предложен ранее общий способ нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП, где число уравнений больше числа неизвестных функций. Суть метода заключается в сведении УрЧП к системам УрЧП меньшей размерности, в частности, к ОДУ путем их переопределения дополнительными уравнениями связи. При редукции некоторых систем УрЧП возникают переопределенные системы полиномиальных ОДУ, которые исследуются в данной работе. Предлагается способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. Результат интересен с теоретической точки зрения, если эти системы полиномиальных ОДУ будут с постоянными коэффициентами. Решение таких нелинейных систем с помощью нашего метода может быть представлено в виде суммы очень большого, но конечного количества колебаний. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных данных нелинейно. К таким системам можно преобразовать уравнения Навье–Стокса и унифицированные системы УрЧП, полученные авторами ранее. Исследуется также уравнение Риккати. Указываются новые частные случаи, когда можно найти его решение. Приводятся численные оценки о сложности данного метода при его практической реализации.

*Ключевые слова:* переопределенные системы дифференциальных уравнений; редукция; полиномиальные системы ОДУ; размерность дифференциальных уравнений; задача Коши; уравнение Риккати; линейные системы ОДУ; уравнения Навье–Стокса; унификация систем УрЧП, символьные вычисления.

Дифференциальные уравнения в частных производных очень важны для исследований в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и т. д. [1, 2]. В работах [3, 4] предложена унификация внешнего вида систем УрЧП. В работах [5–8] предложено сведение систем УрЧП к системам УрЧП меньшей размерности, в частности, к системам ОДУ путем их переопределения дополнительными уравнениями связи. Были предложены различные способы переопределения как отдельных систем УрЧП, так и УрЧП общего вида [5, 6, 9]. При редукции некоторых систем УрЧП в частности, унифицированных УрЧП или уравнений Навье–Стокса, на основе метода переопределения, изложенного в работе [10], возникают переопределенные параметрические системы полиномиальных ОДУ. Таким образом, исследование и нахождение решений полиномиальных систем ОДУ важно для получения решений УрЧП в явном виде.

Не всякую переопределенную систему ОДУ можно решить в явном виде методом редукции, в частности, если взять первый интеграл в качестве уравнения связи. Требуется найти такой способ решения систем УрЧП на основе метода переопределения, чтобы он мог работать и в случаях неполного их переопределения, т. е. когда прямой алгоритм нахождения решений не работает. Цель данной работы заключается в том, чтобы предложить способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. В частности, если коэффициенты в этих уравнениях будут постоянными, то решение находится в явном виде. На примере частного приема нахождения и исследования решения переопределенной системы из двух полиномиальных уравнений строится общий способ такого преобразования. В качестве дополнения исследуется уравнение Риккати. Указываются новые частные случаи, когда можно найти его решение. Также приводятся численные оценки о сложности данного метода при его практической реализации.

Рассмотрим следующую переопределенную систему ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad (1)$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0, \quad (2)$$

где  $a_1 = a_1(t)$ ,  $a_2 = a_2(t) \neq 0$ ,  $b_1 = b_1(t)$ ,  $b_2 = b_2(t)$ ,  $c_1 = c_1(t)$ ,  $c_2 = c_2(t)$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции от  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Пусть к системе (1), (2) поставлена задача Коши  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Умножим обе части (1) и (2) на  $x$ . Тогда

$$\frac{d}{dt}(x^2) = 2a_1x^3 + 2b_1x^2 + 2c_1x, \quad (3)$$

$$a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x = 0. \quad (4)$$

Обозначим

$$R = x, \quad Q = x^2, \quad S = x^3. \quad (5)$$

Тогда уравнения (1)–(4) можно записать в виде

$$\frac{dR}{dt} = a_1Q + b_1R + c_1, \quad (6)$$

$$a_2Q + b_2R + c_2 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 2a_1S + 2b_1Q + 2c_1R, \quad (8)$$

$$a_2S + b_2Q + c_2R = 0. \quad (9)$$

Поставим к (6)–(9) задачу Коши

$$R|_{t=0} = x_0, \quad Q|_{t=0} = (x_0)^2, \quad S|_{t=0} = (x_0)^3. \quad (10)$$

Пусть  $R$ ,  $Q$ ,  $S$  – решение системы (6)–(9) с задачей Коши (10), определенное на отрезке  $[0, T]$ . Обозначим

$$L_1 = \frac{dR}{dt} - a_1R^2 + b_1R + c_1, \quad L_2 = a_2R^2 + b_2R + c_2, \quad M_2 = Q - R^2, \quad M_3 = S - R^3. \quad (11)$$

Делая очевидные преобразования, из системы (6)–(9) получим следующую систему уравнений относительно  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ :

$$a_2M_2 + L_2 = 0, \quad (12)$$

$$a_2M_3 + b_2M_2 + RL_2 = 0, \quad (13)$$

$$L_1 = a_1M_2, \quad (14)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{dQ}{dt} - 2R\frac{dR}{dt} = 2a_1M_3 + 2b_1M_2 - 2RL_1. \quad (15)$$

Делая очевидные подстановки, из (12)–(15) находим, что

$$L_1 = a_1M_2, \quad L_2 = -a_2M_2, \quad M_3 = \frac{a_2R - b_2}{a_2}M_2, \quad (16)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = 2 \left( \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{a_2} \right) M_2, \quad (17)$$

Таким образом, мы видим, что, если  $R$ ,  $Q$ ,  $S$  – решение системы (6)–(9) с задачей Коши (10), определенное на отрезке  $[0, T]$ , то, исходя из обозначений (11), из (16), (17) следует, что  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $M_3 = 0$  на отрезке  $[0, T]$ . Следовательно,  $R$  является решением (1), (2) с задачей Коши  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Здесь мы учли известный факт из теории линейных ОДУ, что если коэффициенты непрерывны на некотором отрезке, то решение задачи Коши существует и



единственно на этом же отрезке [11]. Уравнение (17) относительно  $M_2$  имеет только одно нулевое решение на отрезке  $[0, T]$  с нулевыми начальными данными.

Решим теперь систему уравнений (6)–(9). Из (7) и (9) следует, что

$$Q = AR + B, \quad S = CR + D, \quad (18)$$

где

$$A = -\frac{b_2}{a_2}, \quad B = -\frac{c_2}{a_2}, \quad C = \frac{((b_2)^2 - a_2 c_2)}{(a_2)^2}, \quad D = \frac{b_2 c_2}{(a_2)^2}. \quad (19)$$

Подставим (18) в уравнения (6) и (8). Имеем

$$\frac{dR}{dt} = (a_1 A + b_1)R + a_1 B + c_1, \quad (20)$$

$$A \frac{dR}{dt} = \left( -\frac{dA}{dt} + 2a_1 C + 2b_1 A + 2c_1 \right) R + \left( -\frac{dB}{dt} + 2a_1 D + 2b_1 B \right). \quad (21)$$

Из (20), (21) находим решение

$$R = \frac{\frac{dB}{dt} + a_1 AB + c_1 A - 2a_1 D - 2b_1 B}{-\frac{dA}{dt} - a_1 A^2 - b_1 A + 2a_1 C + 2b_1 A + 2c_1}. \quad (22)$$

Решение (22) должно удовлетворять (20) или (21), а также  $R, Q, S$  из (18) должны быть согласованы при  $t=0$  по формулам (10), т. к. мы решаем (6)–(9) с задачей Коши (10). Тогда по формулам (5) определяется решение исходной системы (1), (2) с задачей Коши  $x|_{t=0} = x_0$ , которая не может быть произвольной для переопределённой системы ОДУ. Фактически решение **нелинейной** переопределённой системы уравнений (1), (2) мы свели к решению переопределённой системы **линейных** уравнений (20), (21). Если подобрать  $a_2, b_2, c_2$  таким образом, чтобы знаменатель в формуле (22) равен нулю, то  $R$  находится из решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, которое может быть **Уравнение в (1) можно записать** уравнением Риккати. Если известно одно из его частных решений, то находится общее решение этого уравнения в явном виде [12]. Зафиксируем коэффициенты  $a_1, b_1, c_1$  в уравнении (1). Если мы затем подберем коэффициенты  $a_2, b_2, c_2$  в уравнении (2), чтобы выражение (22) было частным решением (1), то мы найдем общее решение уравнения Риккати. Однако выкладки показывают, что коэффициенты можно подобрать не для произвольных  $a_1, b_1, c_1$ . Доказано, что общее уравнение Риккати нельзя получить в виде конечной формулы для любых коэффициентов  $a_1, b_1, c_1$  [12]. Однако его можно найти в многих частных случаях, если особым образом выбрать параметры  $a_1, b_1, c_1$ . В уравнении (2) вместо квадратного многочлена можно взять многочлен любой другой степени и получить новые случаи, когда можно найти частные решения (1), (2).

На основе приема, использованного в данном примере, предложим следующий метод нахождения решений полиномиальных систем ОДУ. Рассмотрим общий случай системы ОДУ из  $m \geq 1$  уравнений от  $m$  неизвестных вида

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_m)^{i_m}, \quad (23)$$

где  $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l = a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i_1 = 0..n_1, \dots, i_m = 0..n_m$ ,  $l = 1..m$ . Пусть на интересующих нас решениях системы ОДУ (23) выполняются еще  $n$  уравнений связи вида

$$P_l(x_1, \dots, x_m, t) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_m)^{i_m} = 0, \quad l = (m+1)..n. \quad (24)$$

## Математика

Дополнительными уравнениями связи (24) могут быть, например, первые интегралы системы (23), которые можно получить методом преобразования к каноническим уравнениям Гамильтона, изложенным в [8] (см. Приложение С). Умножим обе части уравнений (24) на выражения  $(x_1)^{j_1} \cdot (x_2)^{j_2} \cdots (x_m)^{j_m}$ ,  $j_1 = 0 \dots N_1, \dots, j_m = 0 \dots N_m$ . Получим уравнения вида

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m, t) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1+j_1} \cdot (x_2)^{i_2+j_2} \cdots (x_m)^{i_m+j_m} = 0, \quad (25)$$

где  $\alpha = \alpha(l, j_1, \dots, j_m)$ ,  $l = (m+1) \dots n$ . Эти уравнения можно записать в виде

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m, t) = H_\alpha(Q_\beta) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l Q_{\beta((i_1+j_1), \dots, (i_m+j_m))} = 0, \quad (26)$$

где  $Q_\beta = (x_1)^{q_1} \cdot (x_2)^{q_2} \cdots (x_m)^{q_m}$ ,  $\beta = \beta(q_1, \dots, q_m)$ ,  $q_1 = 0 \dots (N_1 + n_1), \dots, q_m = 0 \dots (N_m + n_m)$ ,  $Q_{\beta(0 \dots 0)} = 1$ . Учитывая (23), имеем также

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{\beta(j_1, \dots, j_m)}}{dt} &= j_1 \cdot (x_1)^{j_1-1} \cdot \frac{dx_1}{dt} \cdot (x_2)^{j_2} \cdots (x_m)^{j_m} + \dots + (x_1)^{j_1} \cdot (x_2)^{j_2} \cdots j_m \cdot (x_m)^{j_m-1} \cdot \frac{dx_m}{dt} = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} j_l a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1+j_1} \cdots (x_l)^{i_l+j_l-1} \cdots (x_m)^{i_m+j_m} = \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} j_l a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l Q_{\beta((i_1+j_1), \dots, (i_l+j_l-1), \dots, (i_m+j_m))}, \quad j_1 = 0 \dots N_1, \dots, j_m = 0 \dots N_m. \end{aligned} \quad (27)$$

Количество мульти-индексов  $\beta = \beta(q_1, \dots, q_m)$  (количество неизвестных в уравнениях (26), (27)) равно  $N_S = (N_1 + n_1 + 1) \cdots (N_m + n_m + 1)$ . Количество **линейных обыкновенных** дифференциальных уравнений (26), (27) равно  $N_H = (1+n)(N_1+1) \cdots (N_m+1)$ . Выберем  $N_k$ ,  $k = 1 \dots m$  так, чтобы  $N_H \geq N_S$ , например, следуя работе [10],  $\frac{(N_1+1)}{n_1} \approx \dots \approx \frac{(N_m+1)}{n_m} \approx N \approx \frac{m}{n}$ . Тогда

$N_H \geq (n+1)n_1 \cdots n_m \left[ \frac{m}{n} \right]^m$  [10]. При  $m=10$ ,  $n=1$ ,  $n_1 = \dots = n_{10} = 2$  имеем  $N_H \geq 2 \cdot 10^{13}$ ,  $N \approx 10$ .

Достаточные условия (но не необходимые) для того, чтобы системы (26), (27) и (23), (24) были эквивалентные, могут быть найдены аналогично примеру из части 2.

Таким образом, мы имеем **линейную** переопределенную систему ОДУ (26), (27), решить которую гораздо легче, чем исходную систему (23), (24) (см. пример из части 2). Причем, если коэффициенты в (23), (24) постоянные, т. е. не зависят от  $t \in \mathbb{R}$ , то решение может быть найдено в явном виде [11]. Значимый пример использования данного метода приведен в работе [13].

Рассмотрим общий случай системы ОДУ из  $p \geq 2$  уравнений от  $m$  неизвестных вида:

$$\begin{aligned} P_l \left( x_1, \dots, x_m, \frac{dx_1}{dt} \cdots \frac{dx_m}{dt}, t \right) = \\ = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{j_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{j_m=0}^{k_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^{i_1} \cdots \left( \frac{dx_m}{dt} \right)^{i_m} \cdot (x_1)^{j_1} \cdots (x_m)^{j_m} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l = a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i_1 = 0 \dots n_1$ ,  $\dots, i_m = 0 \dots n_m$ ,  $j_1 = 0 \dots k_1$ ,  $\dots, j_m = 0 \dots k_m$ ,  $l = 1 \dots p$ . К таким системам с помощью метода редукции [7, 8] можно преобразовать уравнения Навье–Стокса [10] или унифицированные уравнения из статей [3, 4], причем они будут с коэффициентами, не зависящими от  $t \in \mathbb{R}$ . Кроме того, систему полиномиальных уравнений (28) можно переопределить с помощью метода, изложенного в статье [10]. Обозначим

$$\frac{dx_s}{dt} = U_s, \quad \frac{dU_s}{dt} = L_s, \quad s = 1 \dots m, \quad L_0 = 1. \quad (29)$$

Тогда в новых обозначениях

$$P_l(x_1, \dots, x_m, U_1 \dots U_m, t) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{j_1=0}^{k_1} \dots \sum_{j_m=0}^{k_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l (U_1)^{i_1} \dots (U_m)^{i_m} \cdot (x_1)^{j_1} \dots (x_m)^{j_m} = 0, \quad (30)$$

Умножим обе части уравнений (30) на выражения  $L_s (U_1)^{a_1} \dots (U_m)^{a_m} \cdot (x_1)^{b_1} \dots (x_m)^{b_m}$ ,  $s = 0 \dots m$ ,  $a_1 = 0 \dots N_1, \dots, a_m = 0 \dots N_m$ ,  $b_1 = 0 \dots K_1, \dots, b_m = 0 \dots K_m$ . Получим уравнения вида

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m, U_1 \dots U_m, L_0, \dots, L_m, t) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{j_1=0}^{k_1} \dots \sum_{j_m=0}^{k_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l (U_1)^{i_1+a_1} \dots (U_m)^{i_m+a_m} \cdot (x_1)^{j_1+b_1} \dots (x_m)^{j_m+b_m} L_s = 0, \quad (31)$$

где  $\alpha = \alpha(l, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, s)$ ,  $l = 1 \dots p$ ,  $s = 0 \dots m$ . Эти уравнения можно записать в виде

$$H_\alpha(Q_\beta) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{j_1=0}^{k_1} \dots \sum_{j_m=0}^{k_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l Q_{\beta(s, (i_1+a_1), \dots, (i_m+a_m), (j_1+b_1), \dots, (j_m+b_m))} = 0, \quad (32)$$

где  $Q_\beta = L_s (U_1)^{q_1} \dots (U_m)^{q_m} \cdot (x_1)^{r_1} \dots (x_m)^{r_m}$ ,  $\beta = \beta(s, q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_m)$ ,  $s = 0 \dots m$ ,  $q_1 = 0 \dots (N_1 + n_1), \dots, q_m = 0 \dots (N_m + n_m)$ ,  $r_1 = 0 \dots (K_1 + k_1), \dots, r_m = 0 \dots (K_m + k_m)$ ,  $Q_{\beta(0,0, \dots, 0)} = 1$ . Учитывая обозначения (29), имеем также

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{\beta(0, c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ (U_1)^{c_1} \dots (U_m)^{c_m} \cdot (x_1)^{d_1} \dots (x_m)^{d_m} \right] = \\ &= c_1 (U_1)^{c_1-1} \frac{dU_1}{dt} \dots (U_m)^{c_m} (x_1)^{d_1} \dots (x_m)^{d_m} + \dots + (U_1)^{c_1} \dots c_m (U_m)^{c_m-1} \frac{dU_m}{dt} (x_1)^{d_1} \dots (x_m)^{d_m} + \\ &+ (U_1)^{c_1} \dots (U_m)^{c_m} d_1 \cdot (x_1)^{d_1-1} \cdot \frac{dx_1}{dt} \dots (x_m)^{d_m} + \dots + (U_1)^{c_1} \dots (U_m)^{c_m} (x_1)^{d_1} \dots d_m \cdot (x_m)^{d_m-1} \cdot \frac{dx_m}{dt} = \\ &= c_1 L_1 (U_1)^{c_1-1} \dots (U_m)^{c_m} (x_1)^{d_1} \dots (x_m)^{d_m} + \dots + (U_1)^{c_1} \dots c_m (U_m)^{c_m-1} \cdot L_m \cdot (x_1)^{d_1} \dots (x_m)^{d_m} + \\ &+ (U_1)^{c_1+1} \dots (U_m)^{c_m} \cdot d_1 \cdot (x_1)^{d_1-1} \dots (x_m)^{d_m} + \dots + (U_1)^{c_1} \dots (U_m)^{c_m+1} (x_1)^{d_1} \dots d_m \cdot (x_m)^{d_m-1} = \\ &= c_1 Q_{\beta(1, (c_1-1), \dots, c_m, d_1, \dots, d_m)} + \dots + c_m Q_{\beta(m, c_1, \dots, (c_m-1), d_1, \dots, d_m)} + \\ &+ d_1 Q_{\beta(0, (c_1+1), \dots, c_m, (d_1-1), \dots, d_m)} + \dots + d_m Q_{\beta(0, c_1, \dots, (c_m+1), d_1, \dots, (d_m-1))}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $c_1 = 0 \dots (N_1 + n_1 - 1), \dots, c_m = 0 \dots (N_m + n_m - 1)$ ,  $d_1 = 0 \dots (K_1 + k_1), \dots, d_m = 0 \dots (K_m + k_m)$ .

Количество мульти-индексов  $\beta = \beta(s, q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_m)$  (количество неизвестных в уравнениях (32), (33)) равно

$$N_S = (m+1)(N_1 + n_1 + 1) \dots (N_m + n_m + 1)(K_1 + k_1 + 1) \dots (K_m + k_m + 1). \quad (34)$$

Количество **линейных обыкновенных** дифференциальных уравнений (32), (33) равно

$$N_H = p(m+1)(N_1 + 1) \dots (N_m + 1)(K_1 + 1) \dots (K_m + 1) + (N_1 + n_1) \dots (N_m + n_m)(K_1 + k_1 + 1) \dots (K_m + k_m + 1). \quad (35)$$

Выберем  $N_s, K_s$   $s = 1 \dots m$  так, чтобы  $N_H \geq N_S$ , например, [10]

$$\frac{(N_1 + 1)}{n_1} \approx \dots \approx \frac{(N_m + 1)}{n_m} \approx \frac{(K_1 + 1)}{k_1} \approx \dots \approx \frac{(K_m + 1)}{k_m} \approx N, \quad N \approx 2m / \left[ \left( \frac{m+1}{m} \right)^p - 1 \right].$$

Тогда  $N_H \geq \left(\frac{m+1}{m}\right) p n_1 \cdots n_m k_1 \cdots k_m \left[ 2m / \left[ \left(\frac{m+1}{m}\right) p - 1 \right] \right]^{2m}$ . При  $p=11, m=10,$

$n_1 = \dots = n_{10} = 2, k_1 = \dots = k_{10} = 2$  имеем  $N_H \geq 4 \cdot 10^{11}, N \approx 1,7$ .

Таким образом, мы имеем **линейную переопределенную** систему ОДУ (32), (33), решать которую гораздо легче, чем исходную систему (28). Причем если коэффициенты в (28) не зависят от  $t \in \mathbb{R}$ , то решение может быть найдено в явном виде [11]. Чтобы получить еще уравнения, можно продифференцировать (30) по  $t$  и использовать обозначения (29). Достаточные условия (но не необходимые) для того, чтобы системы (28) и (32), (33) были эквивалентные, могут быть найдены аналогично примеру из части 2.

Заметим, что помимо уравнений (32), (33) должны выполняться еще  $N_S$  (34) уравнений вида:

$$Q_\beta = L_s (U_1)^{q_1} \cdots (U_m)^{q_m} \cdot (x_1)^{r_1} \cdots (x_m)^{r_m}, \quad (36)$$

где  $Q_{\beta(s,0,\dots,0)} = L_s, Q_{\beta(0,0,\dots,j,\dots,0,0,\dots,0)} = U_j, Q_{\beta(0,0,\dots,0,0,\dots,j,\dots,0)} = x_j, j=1\dots m, \beta = \beta(s, q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_m), s=0\dots m, q_1=0\dots(N_1+n_1), \dots, q_m=0\dots(N_m+n_m), r_1=0\dots(K_1+k_1), \dots, r_m=0\dots(K_m+k_m), Q_{\beta(0,0,\dots,0)}=1$ . В случае, если общее решение линейной системы ОДУ (32), (33) содержит некоторый произвол [11], например, если число независимых уравнений в (32), (33) меньше числа неизвестных  $N_S$ , то **предположительно** его можно определить с помощью дополнительных соотношений (36) обычным методом редукции переопределенных систем ОДУ [7, 8]. Аналогично можно поступить, если общее решение линейной переопределенной системы ОДУ (26), (27) также содержит некоторый произвол.

Заметим, что систему уравнений (28) можно записать в виде

$$P_l \left( x_1, \dots, x_m, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_m}{dt}, t \right) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{j_1=0}^{k_1} \dots \sum_{j_m=0}^{k_m} \beta_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^{i_1} \dots \left( \frac{dx_m}{dt} \right)^{i_m} \cdot (x_1)^{j_1} \dots (x_m)^{j_m} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \beta_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l}{\partial t} = \frac{\partial a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l(t)}{\partial t}, \quad (38)$$

где  $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l = a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l(t), t \in \mathbb{R}, i_1=0\dots n_1, \dots, i_m=0\dots n_m, j_1=0\dots k_1, \dots, j_m=0\dots k_m, l=1\dots p$ . Систему уравнений (37), (38) можно рассмотреть как систему из  $p + p(n_1+1) \cdots (n_m+1)(k_1+1) \cdots (k_m+1)$  уравнений и  $m + p(n_1+1) \cdots (n_m+1)(k_1+1) \cdots (k_m+1)$  неизвестных  $x_1, \dots, x_m, \beta_{(i_1, i_2, \dots, i_m)(j_1, j_2, \dots, j_m)}^l, i_1=0\dots n_1, \dots, i_m=0\dots n_m, j_1=0\dots k_1, \dots, j_m=0\dots k_m, l=1\dots p$ .

Заметим также, что для системы ОДУ (28) не предполагается изначально, что  $p \geq m$ . В частности, можно взять  $p < m$ . Систему уравнений (37) можно рассмотреть как недоопределенную систему полиномиальных уравнений с постоянными единичными коэффициентами. Как показано выше, эту систему уравнений можно преобразовать к переопределенной линейной системе ОДУ с постоянными коэффициентами вида (32), (33). Допустим, что решение этой линейной системы содержит некоторый произвол [11], например, если число независимых уравнений меньше числа неизвестных. Тогда **предположительно** его можно определить с помощью дополнительных уравнений (38), а также с помощью уравнений, аналогичных уравнениям (36), обычным методом редукции переопределенных систем ОДУ [7, 8].

В данной статье мы предложили способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. Но на практике этот способ довольно сложно реализовать. Количество линейных уравнений, которые необходимо решить, быстро растет с увеличением количества уравнений в исходной системе полиномиальных уравнений. Численные оценки дают цифру в более чем миллиард уравнений. Однако наш результат может быть интересен с теоретической

точки зрения. Как было указано выше, уравнения Навье–Стокса [10] и унифицированные уравнения из статей [3, 4] с помощью метода редукции преобразовываются к переопределенным системам полиномиальных ОДУ с постоянными коэффициентами. Решение таких нелинейных систем с помощью нашего метода может быть представлено в виде суммы очень большого, но конечного количества нарастающих и затухающих колебаний во времени с разными частотами, которые теоретически можно вычислить. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных данных нелинейно. Однако представить даже это решение в явном виде крайне затруднительно, и тем более его посчитать даже на ЭВМ. Возможно, из-за этой особенности до сих пор возникают сложности при моделировании уравнений Навье–Стокса. Известно, что численное решение уравнений Навье–Стокса начиная с некоторого момента времени становится нестабильным и переходит в очень сложное беспорядочное колебательное движение, которое невозможно отследить. Предположительно в этот момент начинают играть роль все колебания, сумма которых составляет общее решение, которое мы предлагаем в данной статье. Аналогичное можно утверждать и в отношении унифицированных систем УрЧП, полученных авторами ранее в работах [3, 4].

### Приложение А. Гипотеза о преобразовании некоторых систем УрЧП к переопределенным линейным системам УрЧП

Рассмотрим общие уравнения в виде [3, 4]

$$H_k(U_1^1, \dots, U_v^i, \dots, U_p^m, S_1, \dots, S_v, \dots, S_p, x) = 0, \quad i=1 \dots m, \quad v=1 \dots p, \quad k=1 \dots Z, \quad Z \geq 2. \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_\mu} = \frac{\partial U_v^\mu}{\partial x_i}, \quad i=1 \dots m, \quad \mu=1 \dots m, \quad v=1 \dots p, \quad i > \mu, \quad (\text{A.2})$$

$$U_v^i = \frac{\partial S_v}{\partial x_i}, \quad v=1 \dots p, \quad i=1 \dots m. \quad (\text{A.3})$$

где  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Пусть

$$H_k = \sum_{\substack{k_1^1, \dots, k_s^l, \dots, k_p^m \\ j_1, \dots, j_p}} A_{(k_1^1, \dots, k_s^l, \dots, k_p^m)}^{k, (j_1, \dots, j_p)}(x) (U_1^1)^{k_1^1} \dots (U_s^l)^{k_s^l} \dots (U_p^m)^{k_p^m} (S_1)^{j_1} \dots (S_p)^{j_p} = 0, \quad (\text{A.4})$$

где  $k=1 \dots Z, \quad l=1 \dots m, \quad s=1 \dots p, \quad k_s^l = 0 \dots r_s^l, \quad j_1 = 0 \dots w_1, \dots, \quad j_p = 0 \dots w_p$ . Обозначим

$$L_h^{i,j} = \frac{\partial U_j^i}{\partial x_h}, \quad j=1 \dots p, \quad i=1 \dots m, \quad h=0 \dots m, \quad L_0^{i,j} = 1. \quad (\text{A.5})$$

Умножим обе части уравнений (A.4) на выражения

$$L_h^{i,j} (U_1^1)^{a_1^l} \dots (U_s^l)^{a_s^l} \dots (U_p^m)^{a_p^m} \cdot (S_1)^{b_1} \dots (S_p)^{b_p}, \quad j=1 \dots p, \quad i=1 \dots m, \quad h=0 \dots m, \quad l=1 \dots m, \quad s=1 \dots p, \quad a_s^l = 0 \dots N_s^l, \quad b_1 = 0 \dots K_1, \dots, \quad b_p = 0 \dots K_p. \quad \text{Получим уравнения вида}$$

$$\begin{aligned} & H_\alpha(L_h^{i,j}, U_1^1, \dots, U_s^l, \dots, U_p^m, S_1, \dots, S_p, x) = \\ & = \sum_{\substack{k_1^1, \dots, k_s^l, \dots, k_p^m \\ j_1, \dots, j_p}} A_{(k_1^1, \dots, k_s^l, \dots, k_p^m)}^{k, (j_1, \dots, j_p)}(x) L_h^{i,j} (U_1^1)^{k_1^1 + a_1^l} \dots (U_s^l)^{k_s^l + a_s^l} \dots (U_p^m)^{k_p^m + a_p^m} (S_1)^{j_1 + b_1} \dots (S_p)^{j_p + b_p} = 0, \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

где  $\alpha = \alpha(k, i, j, h, a_1^l, \dots, a_s^l, \dots, a_p^m, b_1, \dots, b_p)$ ,  $k=1 \dots Z, \quad j=1 \dots p, \quad i=1 \dots m, \quad h=0 \dots m, \quad l=1 \dots m, \quad s=1 \dots p$ .

Эти уравнения можно записать в виде

$$H_\alpha(Q_\beta) = \sum_{\substack{k_1^1, \dots, k_s^l, \dots, k_p^m \\ j_1, \dots, j_p}} A_{(k_1^1, \dots, k_s^l, \dots, k_p^m)}^{k, (j_1, \dots, j_p)}(x) Q_\beta(i, j, h, (k_1^1 + a_1^l), \dots, (k_s^l + a_s^l), \dots, (k_p^m + a_p^m), (j_1 + b_1), \dots, (j_p + b_p)) = 0, \quad (\text{A.7})$$

где

$$Q_{\beta} = L_h^{i,j} (U_1^1)^{q_1^1} \dots (U_s^l)^{q_s^l} \dots (U_p^m)^{q_p^m} \cdot (S_1)^{r_1} \dots (S_p)^{r_p}, \quad (A.8)$$

$\beta = \beta(i, j, h, q_1^1, \dots, q_p^m, r_1, \dots, r_p)$ ,  $j = 1 \dots p$ ,  $i = 1 \dots m$ ,  $h = 0 \dots m$ ,  $l = 1 \dots m$ ,  $s = 1 \dots p$ ,  $q_s^l = 0 \dots (N_s^l + r_s^l)$ ,  $r_1 = 0 \dots (K_1 + w_1), \dots, r_p = 0 \dots (K_p + w_p)$ ,  $Q_{\beta(i,j,0,\dots,0)} = 1$ . Учитывая обозначения (A.3), (A.5) и (A.8), имеем также

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{\beta(1,1,0,c_1^1,\dots,c_p^m,d_1,\dots,d_p)}}{\partial x_{\lambda}} &= \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \left[ (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot (S_1)^{d_1} \dots (S_p)^{d_p} \right] = \\ &= c_1^1 \frac{\partial U_1^1}{\partial x_{\lambda}} (U_1^1)^{c_1^1-1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot (S_1)^{d_1} \dots (S_p)^{d_p} + \dots \\ &\dots + (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots c_p^m (U_p^m)^{c_p^m-1} \frac{\partial U_p^m}{\partial x_{\lambda}} \cdot (S_1)^{d_1} \dots (S_p)^{d_p} + \\ &+ (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot d_1 (S_1)^{d_1-1} \frac{\partial S_1}{\partial x_{\lambda}} \dots (S_p)^{d_p} + \dots \\ &\dots + (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot (S_1)^{d_1} \dots d_p (S_p)^{d_p-1} \frac{\partial S_p}{\partial x_{\lambda}} = \\ &= c_1^1 L_{\lambda}^{1,1} (U_1^1)^{c_1^1-1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot (S_1)^{d_1} \dots (S_p)^{d_p} + \dots \\ &\dots + (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots c_p^m (U_p^m)^{c_p^m-1} L_{\lambda}^{m,p} \cdot (S_1)^{d_1} \dots (S_p)^{d_p} + \\ &+ (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot d_1 (S_1)^{d_1-1} U_1^{\lambda} \dots (S_p)^{d_p} + \dots \\ &\dots + (U_1^1)^{c_1^1} \dots (U_s^l)^{c_s^l} \dots (U_p^m)^{c_p^m} \cdot (S_1)^{d_1} \dots d_p (S_p)^{d_p-1} U_p^{\lambda} = \\ &= c_1^1 Q_{\beta(1,1,\lambda,(c_1^1-1),\dots,c_p^m,d_1,\dots,d_p)} + \dots + c_p^m Q_{\beta(m,p,\lambda,c_1^1,\dots,(c_p^m-1),d_1,\dots,d_p)} + \\ &+ d_1 Q_{\beta(1,1,0,c_1^1,\dots,(c_1^1+1),\dots,c_p^m,(d_1-1),\dots,d_p)} + \dots + d_p Q_{\beta(1,1,0,c_1^1,\dots,(c_p^1+1),\dots,c_p^m,d_1,\dots,(d_p-1))}, \end{aligned} \quad (A.9)$$

где  $\lambda = 1 \dots m$ ,  $l = 1 \dots m$ ,  $s = 1 \dots p$ ,  $c_s^l = 0 \dots (N_s^l + r_s^l - 1)$ ,  $d_1 = 0 \dots (K_1 + w_1), \dots, d_p = 0 \dots (K_p + w_p)$ .

Уравнения (A.2), (A.3) в обозначениях (A.8) можно записать в виде

$$Q_{\beta(i,v,\mu,0,\dots,0,0,\dots,0)} = Q_{\beta(\mu,v,i,0,\dots,0,0,\dots,0)}, \quad i = 1 \dots m, \mu = 1 \dots m, i > \mu, v = 1 \dots p, \quad (A.10)$$

$$Q_{\beta(1,1,0,0,\dots,q_v^i=1,\dots,0,0,\dots,0)} = \frac{\partial Q_{\beta(1,1,0,0,\dots,0,\dots,r_v=1,\dots,0)}}{\partial x_i}, \quad v = 1 \dots p, i = 1 \dots m. \quad (A.11)$$

Количество мульти-индексов  $\beta = \beta(i, j, h, q_1^1, \dots, q_p^m, r_1, \dots, r_p)$  (количество неизвестных в уравнениях (A.7), (A.9) – (A.11)) равно

$$N_S = (m^2 p + 1) (N_1^1 + r_1^1 + 1) \dots (N_p^m + r_p^m + 1) (K_1 + w_1 + 1) \dots (K_p + w_p + 1). \quad (A.12)$$

Количество **линейных** дифференциальных уравнений в частных производных (A.7), (A.9) – (A.11) равно

$$\begin{aligned} N_H &= Z (m^2 p + 1) (N_1^1 + 1) \dots (N_p^m + 1) (K_1 + 1) \dots (K_p + 1) + \\ &+ m (N_1^1 + r_1^1) \dots (N_p^m + r_p^m) (K_1 + w_1 + 1) \dots (K_m + w_m + 1) + \frac{m(m+1)p}{2}. \end{aligned} \quad (A.13)$$

Выберем  $l = 1 \dots m$ ,  $s = 1 \dots p$ ,  $N_s^l$ ,  $K_1, \dots, K_p$  так, чтобы  $N_H \geq N_S$ , например, [10]

$$\frac{(N_1^1 + 1)}{r_1^1} \approx \dots \approx \frac{(N_p^m + 1)}{r_p^m} \approx \frac{(K_1 + 1)}{w_1} \approx \dots \approx \frac{(K_p + 1)}{w_p} \approx N, \quad (\text{A.14})$$

$$N \approx \frac{p(m+1)(m^2 p - m + 1)}{(Zm^2 p - m^2 p + Z + m - 1)}. \quad (\text{A.15})$$

Тогда

$$N_H \geq r_1^1 \cdots r_p^m w_1 \cdots w_p \left[ Z(m^2 p + 1)N^{(m+1)p} + m(N+1)^{(m+1)p} \right] + \frac{m(m+1)p}{2}. \quad (\text{A.16})$$

При  $Z = p = 2$ ,  $m = 2$ ,  $w_1 = \dots = w_p = 1$ ,  $r_1^1 = \dots = r_p^m = 1$  имеем  $N_H \geq 1,05 \cdot 10^5$ ,  $N \approx 4$ .

Таким образом, мы имеем **линейную переопределенную** систему УрЧП (A.7), (A.9)–(A.11), решать и исследовать которую гораздо легче, чем исходную систему (A.1)–(A.3). Причем, если коэффициенты в (A.4) не зависят от  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , например, уравнения Навье–Стокса, то решение некоторых поставленных для них задач может быть найдено в явном виде [1, 2, 11]. Чтобы получить еще уравнения, можно продифференцировать (A.4) по  $x_i$ ,  $i = 1 \dots m$  и использовать обозначения (A.3) и (A.5).

Учитывая соотношение (A.2), можно, исходя из определения (A.2), (A.5), (A.8), выписать еще уравнения:

$$Q_{\beta(i,j,h,q_1^1 \dots q_p^m, r_1 \dots r_p)} = Q_{\beta(h,j,i,q_1^1 \dots q_p^m, r_1 \dots r_p)}, \quad (\text{A.17})$$

где  $j = 1 \dots p$ ,  $i = 1 \dots m$ ,  $h = 1 \dots m$ ,  $i > h$ ,  $l = 1 \dots m$ ,  $s = 1 \dots p$ ,  $q_s^l = 0 \dots (N_s^l + r_s^l)$ ,  $r_1 = 0 \dots (K_1 + w_1)$ ,  $\dots$   
 $r_p = 0 \dots (K_p + w_p)$ . Их количество равно

$$\frac{1}{2} m(m-1)p (N_1^1 + r_1^1 + 1) \cdots (N_p^m + r_p^m + 1) (K_1 + w_1 + 1) \cdots (K_p + w_p + 1). \quad (\text{A.18})$$

Система линейных УрЧП (A.7), (A.9)–(A.11), (A.17) содержит все решения исходной системы УрЧП (A.1)–(A.3). Кроме того, мы имеем еще  $N_S$  **нелинейных** соотношений, следующих из определения неизвестных  $Q_{\beta}$  (A.8). Их можно использовать в том случае, если решения системы уравнений (A.7), (A.9)–(A.11), (A.17) будут содержать некоторый произвол. Например, применить метод редукции переопределенных систем УрЧП. Фактически здесь мы предложили способ переопределения системы УрЧП (A.1)–(A.3), если выполняется (A.4). Продифференцируем (A.1) по  $x_m$ . Имеем,

$$\sum_{l,s} A_{l,s}^k \frac{\partial U_s^l}{\partial x_m} + \sum_i B_i^k \frac{\partial S_i}{\partial x_m} + C^k = 0, \quad (\text{A.19})$$

где  $k = 1 \dots Z$ ,  $l = 1 \dots m$ ,  $s = 1 \dots p$ ,  $i = 1 \dots p$  и

$$A_{l,s}^k = \frac{\partial H_k}{\partial U_s^l}, \quad B_i^k = \frac{\partial H_k}{\partial S_i}, \quad C^k = \frac{\partial H_k}{\partial x_m}. \quad (\text{A.20})$$

Систему уравнений (A.2), (A.3), (A.19) от неизвестных функций  $U_s^l$ ,  $S_i$ ,  $A_{l,s}^k$ ,  $B_i^k$ ,  $C^k$  можно преобразовать к недоопределенной системе УрЧП вида (A.1) – (A.4), которую все равно указанным выше способом можно переопределить. Кроме того, мы имеем также дополнительные в общем случае нелинейные уравнения (A.20). Данный способ переопределения можно комбинировать со способом переопределения, изложенным в статье [10].

## Приложение В. Гипотеза о нахождении решений у параметрических систем неявных уравнений в явном виде

Рассмотрим произвольную параметрическую систему из  $n$  уравнений от  $n$  неизвестных  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  и  $m$  параметров  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  вида

$$H(u, \alpha) = 0, \quad (B.1)$$

где  $H(u, \alpha) = (H_1(u, \alpha), \dots, H_n(u, \alpha))$  – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Будем искать решение системы (B.1), которое записывается в виде

$$u = u(\alpha), \quad (B.2)$$

где  $u(\alpha) = (u_1(\alpha), u_2(\alpha), \dots, u_n(\alpha))$  – некоторые достаточно гладкие функции от  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ .

Представим параметры  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  в виде

$$\alpha = \beta + Bt, \quad (B.3)$$

где  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B = (B_1, B_2, \dots, B_m) \in \mathbb{R}^m$ . Поставим (B.3) в (B.2). Имеем,

$$u = u(\beta + Bt). \quad (B.4)$$

Зафиксируем  $B = (B_1, B_2, \dots, B_m)$  в формуле (B.4) как параметры и рассмотрим  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  как функции от  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  и  $t$ . Очевидно, что тогда функции  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  удовлетворяют следующим  $n$  уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \quad (B.5)$$

Подставим (B.3) в (B.1). Тогда

$$H(u, \beta + Bt) = 0. \quad (B.6)$$

Таким образом, формально мы имеем переопределенную систему (B.5), (B.6) из  $2n$  дифференциальных уравнений и  $n$  неизвестных  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Согласно гипотезе об универсализации решения задачи Коши для переопределенных систем дифференциальных уравнений, изложенной в работе [4], решение системы (B.5), (B.6) может быть представлено в виде:

$$u = G \left( t, \beta, B, u \Big|_{t=0}, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{t=0}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \beta} \Big|_{t=0}, \dots \right), \quad (B.7)$$

где  $G(\dots) = (G_1(\dots), \dots, G_n(\dots))$  – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Количество аргументов в функциях (B.7) ограничено.

Пусть нам известны значения функций (B.4), при некотором  $\beta = \beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_m^0)$  и  $t = 0$ . Пусть при  $\beta = \beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_m^0)$  и  $t = 0$  выполняется

$$\left| \frac{\partial H}{\partial u} \right| \neq 0. \quad (B.8)$$

Тогда при  $\beta = \beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_m^0)$  и  $t = 0$  из (B.6) можно найти в явном виде значения всех частных производных от функций  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  по  $\beta$  и  $t$ . Например,

$$\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0, \beta=\beta^0} = - \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0, \beta=\beta^0}, \quad (B.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{t=0, \beta=\beta^0} = - \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \beta} \Big|_{t=0, \beta=\beta^0}. \quad (B.10)$$

Таким образом, по формуле (B.7) в явном виде может быть определено значение функций  $u = u(\beta_0 + Bt)$ . Параметры  $B = (B_1, B_2, \dots, B_m)$  и переменную  $t$  можно варьировать. Мы видим, что если известно частное решение уравнений (B.1) при  $\alpha = \beta^0$ , то будет известно в явном виде решение (B.2) в некоторой окрестности точки  $\beta^0$  значений параметра  $\alpha$ .



Рассмотрим общий случай переопределенной системы из  $(m + p)$  алгебраических уравнений от  $m$  переменных

$$P_l(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_m)^{i_m} = 0, \quad (\text{B.11})$$

где  $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l \in \mathbb{R}$  – параметры,  $l = 1 \dots (m + p)$ . Соответствующая система (B.5), (B.6), построенная для уравнений (B.11), будет иметь вид (A.1) – (A.4). С помощью введения дополнительных функций можно даже «сделать» коэффициенты в (A.4) постоянными целыми числами (см. (37), (38)). Тогда **предположительно**, решив эту систему в явном виде один раз, можно получить формулу для решения системы (B.11) в общем виде.

Если в уравнениях (B.11)  $a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l = a_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^l(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , то, продифференцировав по  $t$  уравнения (B.11), получим систему уравнений вида (28). Для системы уравнений (28) мы привели гипотезу о нахождении её решений в явном виде (см. (37), (38)). Достаточно только знать решения системы уравнений (B.11) при  $t = 0$ .

Аналогичную теорию можно применить для следующей системы уравнений:

$$\sum_{\substack{k_1 \dots k_p, \\ i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}} A_{(k_1 \dots k_p)}^{k, (i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p)}(t) (x_1)^{i_1} \cdot (x_2)^{i_2} \dots (x_p)^{i_p} (u_1)^{j_1} \dots (u_p)^{j_p} (S_1)^{k_1} \dots (S_p)^{k_p} = 0, \quad (\text{B.12})$$

где  $k = 1 \dots p$ ,  $k_1 = 0 \dots r_1, \dots, k_p = 0 \dots r_p$ ,  $i_1 = 0 \dots n_1, \dots, i_p = 0 \dots n_p$ ,  $j_1 = 0 \dots w_1, \dots, j_p = 0 \dots w_p$ ,  $u_l = \sin(x_l)$ ,  $S_l = \text{sh}(x_l)$ ,  $l = 1 \dots p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Для этого достаточно заметить, что

$$\left(\frac{du_l}{dt}\right)^2 = \cos^2(x_l) \left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2 = (1 - \sin^2(x_l)) \left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2 = (1 - (u_l)^2) \left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2, \quad l = 1 \dots p, \quad (\text{B.13})$$

$$\left(\frac{dS_l}{dt}\right)^2 = \text{ch}^2(x_l) \left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2 = (1 + \text{sh}^2(x_l)) \left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2 = (1 + (S_l)^2) \left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2, \quad l = 1 \dots p. \quad (\text{B.14})$$

Система уравнений (B.12)–(B.14) от неизвестных  $x_l$ ,  $u_l$ ,  $S_l$ ,  $l = 1 \dots p$ . имеет вид системы уравнений (28).

### Приложение С. Переопределение систем УрЧП с помощью канонических уравнений Гамильтона

Рассмотрим систему ОДУ следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, g(t, \alpha), \alpha), \quad (\text{C.1})$$

где  $F(x, g(t, \alpha), \alpha) = (F_1(x, g(t, \alpha), \alpha), \dots, F_n(x, g(t, \alpha), \alpha))$  – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – искомые функции,  $g(t, \alpha) = (g_1(t, \alpha), \dots, g_m(t, \alpha))$  – дополнительные достаточно гладкие функции своих аргументов,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  – параметры. Пусть

$$x|_{t=0} = x_0(\alpha), \quad (\text{C.2})$$

где  $x_0(\alpha) = (x_{01}(\alpha), \dots, x_{0n}(\alpha))$  – достаточно гладкие функции от параметров  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ .

Рассмотрим автономную систему ОДУ вида

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, g(t, \alpha), \alpha), \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \quad (\text{C.4})$$

с задачей Коши

$$x|_{\tau=0} = x_0(\alpha), \quad t|_{\tau=0} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Рассмотрим функцию

$$H(x, t, p, p_t, \alpha) = \sum_{i=1}^n F_i(x, g(t, \alpha), \alpha) p_i + p_t \quad (C.6)$$

от переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $t$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_t$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ . Уравнения (C.3), (C.4) можно представить в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_t}. \quad (C.7)$$

Определим функции  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_t$  из следующих уравнений:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_t}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (C.8)$$

где поставим задачу Коши

$$p_j|_{\tau=0} = 1, \quad p_t|_{\tau=0} = 0, \quad j = 1 \dots n. \quad (C.9)$$

Как известно, система (C.7), (C.8) является гамильтоновой. Функция (C.6) является ее первым интегралом. Следовательно, с учетом начальных данных (C.5) и (C.9) имеем

$$\sum_{i=1}^n F_i(x, g(t, \alpha), \alpha) p_i + p_t = \sum_{i=1}^n F_i(x_0(\alpha), g(0, \alpha), \alpha). \quad (C.10)$$

Из уравнения (C.4) с учетом начальных данных (C.5) следует  $t = \tau$ . Следовательно, сделав обратную замену переменных, уравнения (C.7) преобразовываются к виду (C.1) с задачей Коши (C.2), а уравнения (C.8) записываются в виде

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_t}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (C.11)$$

где поставим задачу Коши

$$p_j|_{t=0} = 1, \quad p_t|_{t=0} = 0, \quad j = 1 \dots n. \quad (C.12)$$

В итоге мы имеем систему уравнений (C.1), (C.11) с задачей Коши (C.2) и (C.12), для которой выполняется дополнительное соотношение (C.10).

Рассмотрим систему из  $n$  дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных  $S_v = S_v(x)$ ,  $v = 1 \dots n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_x^m$  вида

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = F_v^m \left( S_1, \dots, S_k \dots S_n, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \dots \frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}}, x_1, \dots, x_m \right), \quad (C.13)$$

$$i = 1 \dots m-1, \quad v = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots n.$$

Здесь  $F_k^m(S_1, \dots, S_v, \dots, S_n, \partial S_1/\partial x_1, \dots, \partial S_v/\partial x_i, \dots, \partial S_n/\partial x_{m-1}, x_1, \dots, x_m)$ ,  $k = 1 \dots n$  – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Если  $S_v = S_v(x)$ ,  $v = 1 \dots n$  является решением системы (C.13), то оно является решением параметрической системы ОДУ вида (C.1)

$$\frac{\partial Y_v}{\partial x_m} = F_v^m \left( Y_1, \dots, Y_k \dots Y_n, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \dots \frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}}, x_1, \dots, x_m \right), \quad (C.14)$$

$$i = 1 \dots m-1, \quad v = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots n,$$

где  $(x_1, \dots, x_{m-1})$  – параметры,  $\partial S_v/\partial x_i$ ,  $i = 1 \dots m-1$ ,  $v = 1 \dots n$  – фиксированные функции. Следовательно, для системы (C.14) можно применить изложенную выше теорию: дополнить дополнительными неизвестными и построить дополнительное соотношение вида (C.10). В сущности, мы получаем переопределение системы УрЧП (C.13) с учетом начальных данных. Если система УрЧП (C.13) имеет вид (A.1)–(A.4), то переопределенная система будет такого же вида.

Фактически, данный прием является частным случаем следующего подхода. Введем следующую неизвестную функцию:

$$W = G \left( S_1, \dots, S_k \dots S_n, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \dots \frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}}, x_1, \dots, x_m \right). \quad (C.15)$$

Продифференцируем (С.15) по  $x_m$  и подставим выражения для производных от неизвестных  $S_v = S_v(x)$ ,  $v=1..n$  по  $x_m$  из (С.13). В результате получим некоторое уравнение вида

$$\frac{\partial W}{\partial x_{m-1}} = Q \left( S_1, \dots, S_k, \dots, S_n, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_k}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 S_n}{\partial x_{m-1}^2}, x_1, \dots, x_m \right). \quad (\text{С.16})$$

Если рассмотреть систему УрЧП (С.13), (С.16), то она, очевидно, имеет дополнительное соотношение в виде интеграла

$$W - G \left( S_1, \dots, S_k, \dots, S_n, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S_k}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}}, x_1, \dots, x_m \right) = \text{Const}. \quad (\text{С.17})$$

### Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – 1964. – 830 с.
3. Зайцев, М.Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 18–33.
4. Zaytsev, M.L. Unification of Solution of the Cauchy Problem for Overdetermined Systems of Differential Equations. Version 3 / M.L. Zaytsev, V.B. Akkerman // Research Gate. March. – 2019.
5. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.
6. Зайцев, М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.
7. Зайцев, М.Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВолГУ. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.
8. Зайцев, М.Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 43–67.
9. Зайцев, М.Л. Задача обтекания и сокращение размерности в уравнениях Навье–Стокса / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман. // Труды МФТИ. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 18–30.
10. Zaytsev, M.L. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде / M.L. Zaytsev, V.B. Akkerman // Research Gate. July. – 2020.
11. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – СПб.: Лань, 2003. – 447 с.
12. Егоров, А.И. Уравнения Риккати / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2001. – 318 с.
13. Зайцев, М.Л. Преобразование уравнения Риккати и других полиномиальных ОДУ к системам линейных ОДУ в явном виде / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2021. – № 72. – С. 5–14.

Поступила в редакцию 25 августа 2020 г.

### Сведения об авторах

Зайцев Максим Леонидович – индивидуальный предприниматель, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: mlzaytsev@gmail.com.

Аккерман Вячеслав Борисович – кандидат физико-математических наук, профессор, PhD, Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, Соединенные Штаты Америки, e-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu.

**ON THE IDENTIFICATION OF SOLUTIONS TO RICCATI EQUATION  
AND THE OTHER POLYNOMIAL SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS****M.L. Zaytsev<sup>1</sup>, V.B. Akkerman<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Moscow, Russian Federation<sup>2</sup> West Virginia University, Morgantown, USA

E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Abstract. The authors previously proposed a general method for finding particular solutions for overdetermined PDE systems, where the number of equations is greater than the number of unknown functions. The essence of the method is to reduce the PDE to systems of PDE of a lower dimension, in particular, to ODEs by overdetermining them by additional constraint equations. Reduction of some PDE systems generates overdetermined systems of polynomial ODEs, which are studied in this paper. A method for transforming polynomial ODE systems to linear ODE systems is proposed. The result is interesting from a theoretical point of view if these systems of polynomial ODEs are with constant coefficients. The solution of such nonlinear systems using our method can be represented as a sum of a very large but finite number of oscillations. The amplitudes of these oscillations depend on the initial data nonlinearly. The Navier–Stokes equations and unified PDE systems obtained by the authors earlier can be transformed to such systems. The Riccati equation is also investigated. New special cases are indicated when it is possible to find its solution. Numerical estimates of the complexity of this method for practical implementation are presented.

*Keywords: overdetermined systems of differential equations; reduction; polynomial ODE systems; dimension of differential equations; Cauchy problem; Riccati equation; linear ODE systems; Navier–Stokes equations; unification of PDE systems, symbolic calculations.*

**References**

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).
2. Courant R. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2, New York, London, 1962, 830 p.
3. Zaytseva M.L., Akkerman V.B. Transformation of systems of partial differential equations to systems of quasilinear and linear differential equations. Their reduction and unification. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, Vol. 21, Iss. 1, pp. 18–33. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3
4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Unification of Solution of the Cauchy Problem for Overdetermined Systems of Differential Equations. Version 3. *Research Gate*, March, 2019. (in Russ.).
5. Akkerman, V.B., Zaytsev, M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 8, pp. 1418–1430. DOI: 10.1134/S0965542511080021
6. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy i ee primeneniye k uravneniyam gidrodinamiki (Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and its Application to Equations of Hydrodynamics). *Proc. Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27. (in Russ.).
7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Eshche odin sposob nakhozhdeniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki (Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics). *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Mathematica. Physica*, 2016, Iss. 6(37), pp. 119–127. (in Russ.). DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11
8. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy matematicheskoy fiziki (Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathematical

Physics). *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, Vol. 20, no. 4, pp. 43–67. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5

9. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Zadacha obtekaniya i sokrashchenie razmernosti v uravneniyakh Nav'e–Stoksa (Flow Problem and Dimension Reduction in the Navier–Stokes Equations). *Trudy MFTI*, 2015, Vol. 7, no. 3, pp. 18–30. (in Russ.).

10. Zaytsev M. L., Akkerman V. B. Algoritm nakhozhdeniya resheniy pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy v yavnom vide (Algorithm for Finding Explicit Solutions of Overdetermined Systems of Differential Equations). *Research Gate*, July, 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.26523.69922 (in Russ.)

11. Fedoryuk, M.V. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations). St. Petersburg, Lan' Publ., 2003, 447 p. (in Russ.).

12. Egorov, A.I. *Uravneniya Rikkati* (Riccati Equations). Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 318 p. (in Russ.).

13. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Preobrazovanie uravneniya Rikkati i drugikh polinomial'nykh ODU k sistemam lineynykh ODU v yavnom vide (Explicit transformation of the Riccati equation and other polynomial ODEs to systems of linear ODEs). *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, no. 72, pp. 5–14. (in Russ.). DOI: 10.17223/19988621/72/1

*Received August 25, 2020*

### **Information about the authors**

Zaytsev Maksim Leonidovich is Individual Entrepreneur, Moscow, Russian Federation, e-mail: mlzaytsev@gmail.com.

Akkerman Vyacheslav Borisovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, PhD, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, West Virginia University, Morgantown, United States of America, e-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu.

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zamyshliaeva@susu.ru, tsypchenkovaon@susu.ru

**Аннотация.** Исследована разрешимость задачи оптимального управления решениями стохастических уравнений соболевского типа. Показано, что задачу оптимального динамического измерения можно рассматривать как задачу оптимального управления. Для этого математическая модель динамических измерений редуцируется к стохастическому уравнению соболевского типа первого порядка в пространствах случайных процессов. В статье приведены теоремы о существовании единственного классического и сильного решений уравнения соболевского типа с начальным условием Шоултера–Сидорова в пространствах стохастических процессов. Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи оптимального управления для такого уравнения. Полученные абстрактные результаты для уравнения соболевского типа применены для задачи восстановления динамически искаженного сигнала как оптимального динамического измерения.

*Ключевые слова:* динамические измерения; аддитивный «шум»; уравнения соболевского типа; сильные решения; задача оптимального управления.

## Введение

В статье рассматривается задача восстановления входного сигнала по известному выходному или наблюдаемому сигналу и известной передаточной функции измерительного устройства (ИУ) [1]. В данной работе применяются методы теории оптимального управления для решения задач динамического измерения.

Рассмотрим стохастическую систему леонтьевского типа, которой определяются динамические свойства измерительного устройства

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\xi, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

а в начале работы состояние измерительного устройства задается начальным условием Шоултера–Сидорова [2]

$$\left[ (\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \quad (3)$$

для некоторых  $x_0 \in R^n$  и  $\alpha \in \rho^L(A) = \{\alpha \in C : \det(\alpha L - A) \neq 0\}$ .

Будем рассматривать математическую модель измерительного устройства (1), (2), в которую входят функции:  $x(t)$ , описывающая состояния ИУ;  $\dot{x}(t)$ , представляющая скорость изменения состояния ИУ;  $y(t)$  и  $u(t)$ , описывающие наблюдения и измерения, соответственно;  $\xi(t)$  задает помехи на выходе ИУ, а  $\eta(t)$  – в цепях ИУ. Также здесь  $A$  и  $L$  – квадратные матрицы состояний и взаимного влияния скоростей изменения состояния измерительного устройства, соответственно;  $C$  и  $D$  – матрицы, которые характеризуют связи между состоянием измерительного устройства и наблюдением [3].

Задачу (1), (3) удается редуцировать к уравнению соболевского типа [4]

$$L\dot{x} = Ax + Bu + G\xi, \quad (4)$$

с условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} P(x(t) - x_0) = 0, \quad (5)$$

где  $L, A$  – линейные непрерывные операторы, определенные на гильбертовом пространстве  $V$ , действующие в гильбертово пространство  $G$ .

Сигнал на входе ИУ будем искать как решение задачи оптимального управления [5]. Для этого будет найдена пара функций  $(\hat{x}, \hat{u})$ , первая из которых является решением задачи (1), (3), а функция  $\hat{u}$  из  $U_{ad} \subset U$ , удовлетворяющая соотношению

$$J(y(\hat{x}), \hat{u}) = \min_{(x,u)} J(y(x), u), \quad (6)$$

является оптимальным динамическим измерением. Здесь  $U$  является сепарабельным гильбертовым пространством управлений, а  $U_{ad}$  – замкнутое выпуклое множество в нем.

### 1. Пространства «шумов». Стохастические $\mathbf{K}$ -процессы. Стохастические уравнения соболевского типа

Пусть  $\Omega \equiv (\Omega, A, P)$  – полное вероятностное пространство,  $R$  – множество вещественных чисел, наделенное борелевской  $\sigma$ -алгеброй. Измеримое отображение  $\zeta: \Omega \rightarrow R$  называется *случайной величиной*. Набор случайных величин с нулевым математическим ожиданием ( $E\zeta = 0$ ) и конечной дисперсией образует гильбертово пространство  $L_2$  со скалярным произведением  $(\zeta_1, \zeta_2) = E\zeta_1\zeta_2$ .

Рассмотрим множество  $I \subset R$  и следующие отображения. Первое отображение  $f: I \rightarrow L_2$  сопоставляет каждому  $t \in I$  случайную величину  $\xi \in L_2$ . Второе отображение  $g: L_2 \times \Omega \rightarrow R$  сопоставляет каждой паре  $(\xi, \omega)$  точку  $\xi(\omega) \in R$ . Отображение  $\eta: R \times \Omega \rightarrow R$ , которое имеет вид  $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$ , называется *стохастическим процессом*. Обозначим множество непрерывных случайных процессов через  $C(I, L_2)$ , оно образует банахово пространство. Пусть  $\{\varphi_k\}$  определяет ортонормированный базис в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве  $V$ . Обозначим через  $V_{\mathbf{K}}L_2$  гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки случайных величин

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k$$

с нормой

$$\|\eta\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D\xi_k.$$

Причем последовательность  $K = \{\lambda_k\} \subset R_+$  такая, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$ ,  $\{\xi_k\} \subset L_2$  – последовательность случайных величин. Элементы  $V_{\mathbf{K}}L_2$  назовем  $V$ -значными  $\mathbf{K}$ -случайными величинами. Заметим, что для существования  $\mathbf{K}$ -случайной величины  $\zeta \in V_{\mathbf{K}}L_2$  нужно рассмотреть последовательность случайных величин  $\{\xi_k\} \subset L_2$  с равномерно ограниченными дисперсиями, т.е.  $D\xi_k \leq \text{const}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Отображение  $\eta: I \rightarrow V_{\mathbf{K}}L_2$ , заданное формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \eta_k(t) \varphi_k, \text{ где } \{\eta_k\} \subset C(I, L_2),$$

называется непрерывным  $V$ -значным стохастическим  $\mathbf{K}$ -процессом, если ряд с правой стороны сходится равномерно на любом компакте в  $I$  по норме  $\|\cdot\|_{V_{\mathbf{K}}L_2}$ , и траектории процесса  $\eta = \eta(t)$  почти наверное непрерывны. Случайный  $\mathbf{K}$ -процесс  $\eta = \eta(t)$  имеет непрерывную производную по Нельсону–Гликлиху [6], если ряд

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \overset{\circ}{\eta}_k(t) \varphi_k$$

сходится равномерно на любом компакте в  $I$  по норме  $\|\cdot\|_{V_K \mathbf{L}_2}$ , и траектории процесса  $\overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{\eta}(t)$  почти наверное непрерывны. Здесь через  $\overset{\circ}{\eta}_k(t)$  обозначена производная Нельсона–Гликлиха стохастического процесса  $\eta_k : I \rightarrow \mathbf{L}_2$ . Обозначим через  $C(I, V_K \mathbf{L}_2)$  – пространство непрерывных  $V$ -значных стохастических  $\mathbf{K}$ -процессов, и через  $C^l(I, V_K \mathbf{L}_2)$  – пространство непрерывно дифференцируемых по Нельсону–Гликлиху до порядка  $l \in \mathbb{N}$   $V$ -значных стохастических  $\mathbf{K}$ -процессов.

Аналогично, если  $G$  – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом  $\{\varphi_k\}$ , строятся пространства  $C(I, G_K \mathbf{L}_2)$  и  $C^l(I, G_K \mathbf{L}_2)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ .

Пусть операторы  $L, A \in \mathcal{L}(V_K \mathbf{L}_2, G_K \mathbf{L}_2)$ . Введем  $L$ -резольвентное множество  $\rho^L(A) = \{\mu \in C : (\mu L - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V_K \mathbf{L}_2, G_K \mathbf{L}_2)\}$  и  $L$ -спектр  $\sigma^L(A) = C \setminus \rho^L(A)$  оператора  $A$ . Пусть  $A$  является  $(L, p)$ -ограниченным,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  [7].

Построим проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(A) d\mu \in \mathcal{L}(V_K \mathbf{L}_2), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(A) d\mu \in \mathcal{L}(G_K \mathbf{L}_2).$$

Здесь  $R_{\mu}^L(A) = (\mu L - A)^{-1} L$  и  $L_{\mu}^L(A) = L(\mu L - A)^{-1}$ . Положим  $V_K^0 \mathbf{L}_2 (V_K^1 \mathbf{L}_2) = \ker P (\operatorname{im} P)$ ,  $G_K^0 \mathbf{L}_2 (G_K^1 \mathbf{L}_2) = \ker Q (\operatorname{im} Q)$ . Пространства  $V_K \mathbf{L}_2$  и  $G_K \mathbf{L}_2$  могут быть представлены как  $V_K \mathbf{L}_2 = V_K^0 \mathbf{L}_2 \oplus V_K^1 \mathbf{L}_2$  и  $G_K \mathbf{L}_2 = G_K^0 \mathbf{L}_2 \oplus G_K^1 \mathbf{L}_2$ , причем  $V_K^0 \mathbf{L}_2 \supset \ker L$ . Через  $L_k(A_k)$  обозначим сужение оператора  $L(A)$  на  $V_K^k \mathbf{L}_2$ ,  $k = 0, 1$ .

**Лемма 1.** Операторы  $L_k, A_k \in \mathcal{L}(V_K^k \mathbf{L}_2; G_K^k \mathbf{L}_2)$ ,  $k = 0, 1$ ; кроме того, существуют операторы  $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(G_K^0 \mathbf{L}_2; V_K^0 \mathbf{L}_2)$  и  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(G_K^1 \mathbf{L}_2; V_K^1 \mathbf{L}_2)$ .

Рассмотрим уравнение соболевского типа (4) в пространствах стохастических процессов. Обозначим для удобства  $Bu(t) + G\xi(t) = \omega(t)$ ,  $t \in I$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  является  $(L, p)$ -ограниченным оператором,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Пусть функция случайных помех  $\xi = \xi(t)$  удовлетворяет условиям

$$(I - Q)\xi \in C^{p+1}(I, G_K \mathbf{L}_2) \text{ и } Q\xi \in C(I, G_K \mathbf{L}_2). \quad (7)$$

Тогда для любой вектор-функции  $u$  такой, что

$$(I - Q)u \in C^{p+1}(I, U) \text{ и } Qu \in C(I, U), \quad (8)$$

и для любой случайной величины  $x_0 \in V_K \mathbf{L}_2$ , не зависящей от  $\xi$ , существует п.н. единственное решение  $x \in C^1(I, V_K \mathbf{L}_2)$  задачи (4), (5), имеющее вид

$$x(t) = V(t)x_0 - \sum_{q=0}^p H^q A_0^{-1} (I - Q) \overset{\circ}{\omega}^{(q)}(t) + \int_0^t V(t-s) L_1^{-1} Q \omega(s) ds, \quad (9)$$

где  $V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(A) e^{\mu t} d\mu$ ,  $t \in R$  – голоморфная группа разрешающих операторов однородного уравнения (4).

## 2. Сильные решения. Оптимальное управление

Пусть  $L_2(I; V_K \mathbf{L}_2)$  – пространства случайных процессов, чьи траектории интегрируемы с квадратом на  $I$ .

**Определение.** Вектор-функция

$$x \in H^1(V_K \mathbf{L}_2) = \{x \in L_2(I; V_K \mathbf{L}_2) : \overset{\circ}{x} \in L_2(I; V_K \mathbf{L}_2)\}$$



называется *сильным решением* (4), если она п.в. обращает уравнение в тождество на  $I$ . Сильное решение  $x = x(t)$  уравнения (4) называется *сильным решением задачи* (4), (5), если оно удовлетворяет (5).

Пусть  $U$  – действительное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом  $\varphi_k$ . Построим гильбертовы пространства

$$H^{p+1}(G_k \mathbf{L}_2) = \{v \in L_2(I; G_k \mathbf{L}_2) : v^{(p+1)} \in L_2(I; G_k \mathbf{L}_2), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

со скалярным произведением

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_{G_k \mathbf{L}_2} dt,$$

и пространство управлений

$$\overset{\circ}{H}^{p+1}(U) = \{u \in L_2(I; U) : u^{(p+1)} \in L_2(I; U)\}, p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

со скалярным произведением

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_U dt.$$

Пусть  $\xi \in H^{p+1}(G_k \mathbf{L}_2)$ . Введем в рассмотрение операторы

$$A_1 \xi(t) = -\sum_{q=0}^p H^q A_0^{-1} G (I - Q) \overset{\circ}{\xi}^{(q+1)}(t), \quad \tilde{A}_1 u(t) = -\sum_{q=0}^p H^q A_0^{-1} B (I - Q) u^{(q+1)}(t),$$

$$A_2 \xi(t) = \int_0^t V(t-s) L_1^{-1} Q \xi(s) ds, \quad \tilde{A}_2 u(t) = \int_0^t V(t-s) L_1^{-1} Q u(s) ds, t \in I$$

и вектор-функцию

$$k(t) = V(t)x_0.$$

**Лемма 2.** Пусть  $A$  является  $(L, p)$ -ограниченным оператором,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Тогда

- (i)  $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(G_k \mathbf{L}_2); H^1(V_k \mathbf{L}_2)), \tilde{A}_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(U); H^1(V));$
- (ii)  $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(G_k \mathbf{L}_2); H^1(V_k \mathbf{L}_2)), \tilde{A}_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(U); H^1(V));$
- (iii) для  $x_0 \in V_k \mathbf{L}_2$  функция  $k \in C^1(I; V_k \mathbf{L}_2)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  является  $(L, p)$ -ограниченным оператором,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Пусть функция случайных помех  $\xi = \xi(t)$  удовлетворяет условию (7). Тогда для любой вектор-функции  $u$ , удовлетворяющей условиям (8), и для любой случайной величины  $x_0 \in V_k \mathbf{L}_2$ , не зависящей от  $\xi$ , существует п.н. единственное сильное решение задачи (1), (2).

Рассмотрим задачу (5) для уравнения соболевского типа с аддитивным «шумом» (4). В пространстве управлений  $\overset{\circ}{H}^{p+1}(U)$  выделим замкнутое и выпуклое множество. Обозначим его  $\overset{\circ}{H}_\partial^{p+1}(U)$  – множество допустимых управлений. Вектор-функция  $\hat{u} \in \overset{\circ}{H}_\partial^{p+1}(U)$  – оптимальное управление решениями задачи (4), (2), (5), если она минимизирует функционал  $J(y(x), u)$ , т.е. выполнено (6).

Покажем однозначную разрешимость задачи оптимального управления. Нам нужно найти  $\hat{u} \in \overset{\circ}{H}_\partial^{p+1}(U)$ , которая будет удовлетворять соотношению (6), причем

$$J(y(x), u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \| \overset{\circ}{y}^{(q)}(x(t, u), t) - \tilde{y}^{(q)}(t) \|^2 dt, \quad (10)$$

где  $x(t, u)$  – сильное решение задачи (4), (5),  $\tilde{y}(t)$  – заданное наблюдение,  $y(x(t, u), t)$  определяется соотношением (2).

**Теорема 3.** Пусть  $A$  является  $(L, p)$ -ограниченным оператором,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Пусть функция случайных помех  $\xi = \xi(t) \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L}_2)$  удовлетворяет условию (7). Тогда для любой  $\eta \in H^1(G_K \mathbf{L}_2)$  существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2), (4)–(6).

**Доказательство.** Для любых  $\xi \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L}_2)$ ,  $x_0 \in V_K \mathbf{L}_2$ ,  $u \in H^{p+1}(U)$  существует единственное сильное решение  $x \in H^1(G_K \mathbf{L}_2)$  задачи (4), (5):

$$x(t) = (A_1 + A_2)\xi(t) + (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)u(t) + k(t), \quad (11)$$

где операторы  $A_1, A_2, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  и функция  $k(t)$  из леммы 2.

Зафиксируем  $\xi \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L}_2)$  и  $x_0 \in V_K \mathbf{L}_2$ , и рассмотрим (11) как отображение  $D: u \rightarrow x(u)$ . Тогда  $D: H^{p+1}(U) \rightarrow H^1(V_K \mathbf{L}_2)$  будет непрерывным. Так как  $y(x)$  определяется соотношением (2), то функционал  $J$  зависит только от  $u: J(y(x(t, u))) = J(u)$ .

Перепишем его следующим образом

$$J(y(x(t, u))) = \|y(x(t, u)) - \tilde{y}(t)\|_{H^1(G_K \mathbf{L}_2)}^2.$$

И представим

$$J(u) = \pi(u, u) - 2\lambda(u) + \|\tilde{y}(t) - y(x(t, 0))\|^2,$$

обозначив

$$\pi(u, u) = \|y(x(t, u)) - y(x(t, 0))\|_{H^1(G_K \mathbf{L}_2)}^2,$$

являющейся билинейной непрерывной коэрцитивной формой на  $H^{p+1}(U)$ , и

$$\lambda(u) = \langle \tilde{y}(t) - y(x(t, 0)), y(x(u), t) - y(x(t, 0)) \rangle_{H^1(G_K \mathbf{L}_2)}$$

– линейная непрерывная форма на  $H^{p+1}(U)$ . Следовательно, выполняется теорема 1.1 [8, стр. 13]. Доказательство завершено.

### 3. Восстановление динамически искаженного сигнала как оптимального динамического измерения

Для исследования математической модели оптимальных динамических измерений введем в рассмотрение пространства  $V = G = R^n$ , последовательность  $K = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$  и рассмотрим пространство состояний

$$X = \{x \in L_2(I, R^n \mathbf{L}_2) : \dot{x} \in L_2(I, R^n \mathbf{L}_2)\},$$

пространство измерений

$$U = \{u \in L_2(I, R^n) : u^{(p+1)} \in L_2(I, R^n)\}$$

и пространство наблюдений  $Y = C[X]$ , где  $Y$  изоморфно некоторому подпространству в  $X$ , хотя и не всегда  $Y = X$ .

Таким образом, была проведена редукция задачи (1)–(3), (6) к (2), (4)–(6).

**Теорема 4.** Пусть  $L$  и  $A$  – матрицы порядка  $n \times n$ , причем матрица  $A$  является  $(L, p)$ -регулярной и  $\det A \neq 0$ . Тогда для любых  $\xi \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L}_2)$ , удовлетворяющих (7),  $x_0 \in R^n \mathbf{L}_2$ ,  $\eta \in H^1(R^n \mathbf{L}_2)$  существует единственное оптимальное управление решениями задачи (1)–(3), (6).

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

### Литература

1. Shestakov, A.L. On the measurement of the «white noise» / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Т. 27 (286), Вып. 13. – С. 99–108.

2. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоултера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.

3. Восстановление динамически искаженного сигнала на основе теории оптимальных динамических измерений / А.Л. Шестаков, А.А. Замышляева, Н.А. Манакова и др. // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 12. – С. 125–137.

4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

5. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models / A.A. Zamyshlyayeva, N.A. Manakova, O.N. Tsyplenkova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2020. – Т. 13, № 1. – С. 5–27.

6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.

7. Sviridyuk, G.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive «white noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyayeva, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103–117.

8. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

*Поступила в редакцию 18 июля 2022 г.*

#### **Сведения об авторах**

Замышляева Алена Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zamyshlyayeva@susu.ru.

Цыпленкова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: tcyplenkovaon@susu.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2022, vol. 14, no. 3, pp. 38–44*

---

DOI: 10.14529/mmph220304

## **RECONSTRUCTION OF DYNAMICALLY DISTORTED SIGNALS BASED ON THE THEORY OF OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS FOR SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN THE SPACES OF STOCHASTIC PROCESSES**

**A.A. Zamyshlyayeva, O.N. Tsyplenkova**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*E-mail: zamyshlyayeva@susu.ru, tcyplenkovaon@susuru*

**Abstract.** This paper investigates the solvability of the optimal control problem for solutions of stochastic Sobolev type equations. It is shown that the optimal dynamic measurement problem can be considered as an optimal control problem. To do this, the mathematical model of dynamic measurements is reduced to a stochastic Sobolev type equation of the first order in the spaces of stochastic processes. The article presents theorems on the existence of a unique classical and strong solutions of the Sobolev type equation with initial condition of Showalter–Sidorov in the spaces of stochastic processes. The theorem of the unique solvability of the optimal control problem for such equation is proved. The abstract results obtained for Sobolev type equation are applied to the problem of restoring a dynamically distorted signal as an optimal dynamic measurement.

**Keywords:** *dynamic measurements; additive “noise”; Sobolev type equations; strong solutions; optimal control problem.*

### References

1. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the “White Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2012, Vol. 27 (286), Iss. 13, pp. 99–108.
2. Zagrebina S.A., Keller A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2015, Vol. 8, no. 2. pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201
3. Shestakov A.L., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal Based on the Theory of Optimal Dynamic Measurements. *Automation and Remote Control*, 2021, Vol. 82, no. 12, pp. 2143–2154. DOI: 10.1134/S0005117921120067
4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501
5. Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2020, Vol. 13, no. 1, pp. 5–27.
6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.
7. Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint Initial-final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive “White Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2018, Vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp190204
8. Lions, Zh.-L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisivaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi* (The Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations). Moscow, Mir Publ., 1972, 414 p. (in Russ.).

*Received July 18, 2022*

### Information about the authors

Zamyshlyayeva Alyona Aleksandrovna is Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru.

Tsyplenkova Olga Nikolaevna is Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: tcyplenkovaon@susu.ru.

# ANALYSIS OF THE CLASS OF HYDRODYNAMIC SYSTEMS

**O.P. Matveeva<sup>1</sup>, T.G. Sukacheva<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation

<sup>2</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: oltan.72@mail.ru, tamara.sukacheva@novsu.ru

**Abstract.** The solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for the generalized homogeneous model of the dynamics of the high-order viscoelastic incompressible Kelvin–Voigt fluid is considered. In the study, the theory of semilinear equations of the Sobolev type was used. The indicated problem for the system of differential equations in partial derivatives is reduced to the Cauchy problem for the indicated type of the equation. The theorem on the existence of the unique solution of this problem, which is a quasi-stationary trajectory, is proved, and its phase space is described.

*Keywords:* Sobolev type equation; phase space; viscoelastic incompressible fluid.

## 1. Formulation of the problem

System of equations

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha \nabla^2)v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v + \sum_{m=1}^r \sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s} \nabla^2 w_{m,s} - \nabla p, \\ 0 = \nabla \cdot v, \\ \frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \quad m = \overline{1, r}, \\ \frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s = \overline{1, n_m - 1}, \quad \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad A_{m,s} \in \mathbb{R}_+, \end{array} \right. \quad (1)$$

describes the homogeneous generalized model of the dynamics of the high-order viscoelastic incompressible Kelvin–Voigt fluid [1].

The functions  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $v_i = v_i(x, t)$ ,  $x \in \Omega$  have the physical meaning of the fluid flow velocity, the function  $p = p(x, t)$  describes the pressure. Here,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3, 4$  is a bounded domain with boundary  $\partial\Omega$  of the class  $C^\infty$ . The parameters  $\nu \in \mathbb{R}_+$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$  correspond to the viscous and elastic properties of the liquid. The parameters  $A_{m,s}$  define the pressure retardation time.

For the system (1), the Cauchy–Dirichlet problem is considered

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, 0) = v_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad w_{m,s}(x, 0) = w_{m,s}(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0, \quad w_{m,s}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad m = \overline{1, r}, \quad s = \overline{0, n_m - 1}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Разрешимость задачи (1), (2) рассматривается в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [2, 3].

The solvability of problem (1), (2) is considered within the framework of the theory of semilinear Sobolev type equations [2, 3].

## 2. The solution of the problem

The proof of the existence theorem for the unique solution of the problem is that the Cauchy problem for the semi-linear Sobolev type equation [4] is first studied, and then the original problem is reduced to it.

Consider the Cauchy problem

$$u(0) = u_0 \quad (3)$$

for the semi-linear Sobolev type equation

$$L\dot{u} = M(u). \quad (4)$$

Here  $U$  and  $F$  are Banach spaces, operators  $L \in L(U; F)$  and  $M \in C^\infty(U; F)$ .

**Definition 1.** The solution of the problem (3), (4) is the vector function

$$u \in C^\infty((-t_0; t_0); U), t_0 = t_0(u_0) > 0,$$

satisfying equation (4) and condition (3).

Problem (3), (4) is solvable not for all initial data from the Banach space  $U$ , and if the solution of this problem exists, then it may be not unique.

**Definition 2.** A Banach  $C^k$ -manifold  $B$  is called the phase space of equation (4), if  $\forall u_0 \in B$  there is a unique solution  $u = u(t)$  of the problem (3), (4) on the interval  $(-t_0, t_0)$ .

**Definition 3.** The solution  $u = u(t)$  of the problem (3), (4), for which  $L\dot{u}^0 \equiv 0 \forall t \in (-t_0, t_0)$ , where  $u^0 = Pu$ , is called a quasi-stationary trajectory of the equation (4).

Here  $u = u^0 + u^1$ ,  $u^0 \in U^0$ ,  $u^1 \in U^1$ ,  $U = U^0 \oplus U^1$ .  $P$  is the projection of the Banach space  $U$  onto  $U^0$ .

Let the operator  $L$  be bi-splitting, its kernel  $\ker L$  and image  $\operatorname{im} L$  be complemented in the spaces  $U$  and  $F$  respectively. Denote by  $M'_{u_0} \in L(U; F)$  the Fréchet derivative of the operator  $M$  at the point  $u_0 \in U$  and introduce into consideration the chains  $M'_{u_0}$ -associated vectors of the operator  $L$ , which we will choose from some complement  $\operatorname{coim} L$  to the kernel  $\ker L$  in the Banach space  $U$ . Consider the condition

**(C1).** Regardless of the choice  $\operatorname{coim} L$  any chain  $M'_{u_0}$ -associated vectors of any vector  $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$  contains exactly  $p$  elements.

Denote by  $\tilde{L}$  the restriction of the operator  $L$  to  $\operatorname{coim} L$ . By virtue of the Banach closed graph theorem the operator  $\tilde{L}: \operatorname{coim} L \rightarrow \operatorname{im} L$  is a toplinear isomorphism. Let  $U^0 = \ker L$  and construct sets  $U_q^0 = \tilde{A}^q[U_0^0]$ ,  $q = \overline{1, p}$ , where  $\tilde{A} = \tilde{L}^{-1}M'_{u_0}$ . Sets  $U_q^0 \subset \operatorname{coim} L$  are linear spaces, the image  $F_p^0 = M'_{u_0}[U_p^0]$  is a linear space, and  $F_p^0 \cap \operatorname{im} L = \{0\}$  (under condition **(C1)**).

Let us introduce one more condition

**(C2).**  $F_p^0 \oplus \operatorname{im} L = F$ .

Equation (4) can be rewritten in the form

$$L\dot{u} = M'_{u_0} u + F(u), \tag{5}$$

where  $F = M - M'_{u_0} \in C^\infty(U; F)$  by construction. Having influenced the equation (5) successively by the projectors  $Q_q: F \rightarrow F_q^0$  ( $F_q^0 = M'_{u_0}[U_q^0]$ ,  $q = \overline{1, p}$ ) and  $I - Q$  we obtain the equivalent system

$$\begin{cases} L\dot{u}_1^0 = M'_{u_0} u_0^0 + F_0(u), \\ \dots \\ L\dot{u}_p^0 = M'_{u_0} u_{p-1}^0 + F_{p-1}(u), \\ 0 = M'_{u_0} u_p^0 + F_p(u), \\ L\dot{u}^1 = (I - Q)M(u), \end{cases} \tag{6}$$

where  $u_q^0 \in U_q^0$ ,  $F_q = Q_q F(u) + Q_q M'_{u_0} u^1$ ,  $q = \overline{1, p}$ ,  $u^1 \in U^1$ .

**Lemma 1.** Let the operators  $L \in L(U; F)$ ,  $M \in C^\infty(U; F)$ , and  $L$  be a bi-splitting operator, and conditions **(C1)** and **(C2)** be satisfied. Then the equation (4) is equivalent to the system (6).

**Remark 1.** Under the conditions of Lemma 1 the operator  $M'_{u_0}(L, p)$  is bounded at the point  $u_0$  [5, 6].

Let us find solutions to the problem (3), (4). To obtain quasi-stationary trajectories from the set of possible solutions to the problem (3), (4), we introduce one more condition.

Let us consider the set  $\tilde{U} = \{u \in U : u_q^0 = \text{const}, q = \overline{1, p}\}$ .  $\tilde{U}$  is a complete affine manifold, modeled by the subspace  $U_0^0 \oplus U^1$ . Let the point  $u_0 \in \tilde{U}$ , by  $O_{u_0} \subset \tilde{U}$  we denote the neighborhood of the point  $u_0$ .

$$(C3). F_q(u) \equiv 0 \quad \forall u \in O_{u_0}, q = \overline{1, p}.$$

**Theorem 1.** *Let*

- (i) *the conditions of Lemma 1 are satisfied;*
- (ii) *point  $u_0 \in B$ , where  $B = \{u \in \tilde{U} : Q_0 M(u) = 0\}$ ;*
- (iii) *condition (C3) is satisfied*

*Then there is a unique solution of the problem (3), (4), which is a quasi-stationary trajectory, and  $u(t) \in B \quad \forall t \in (-t_0, t_0)$ .*

As in [7], we pass from the system (1) to the system

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha \nabla^2) v_l = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla) v + \sum_{m=1}^r \sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s} \nabla^2 w_{m,s} - \bar{p}, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot v), \\ \frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \quad m = \overline{1, r}, \\ \frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s = \overline{1, n_m - 1}, \quad \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad A_{m,s} \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \quad (7)$$

We will be interested in the local unique solvability of the problem (7), (2).

Let us reduce problem (7), (2) to problem (3), (4). For this we set

$$U = \bigoplus_{l=0}^K U_l, \quad F = \bigoplus_{l=0}^K F_l, \quad K = n_1 + n_2 + \dots + n_r, \quad (8)$$

Where  $U_0 = H_\sigma^2 \times H_\pi^2 \times H_p$ ,  $F_0 = H_\sigma \times H_\pi \times H_p$ ;  $U_i = H^2 \cap \overset{\circ}{H}^1 = H_\sigma^2 \times H_\pi^2$ ,  $F_i = L^2 = H_\sigma \times H_\pi$ ,  $i = \overline{1, K}$ . Here  $H_\sigma^2$  is the subspace of the solenoidal vectors of the space  $H^2 \cap \overset{\circ}{H}^1$ ,  $H^2 = (W_2^2(\Omega))^n$ ,  $\overset{\circ}{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$ ;  $H_\pi^2$  is orthogonal (in the sense  $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ ) complement to  $H_\sigma^2$ ;  $H_\sigma$  and  $H_\pi$  – are the closures of the subspaces  $H_\sigma^2$  and  $H_\pi^2$  in the norm  $L^2$  respectively,  $H_p = H_\pi$   $\Sigma: L^2(\Omega) \rightarrow H_\sigma$  is the orthoprojector along  $H_\pi$ . Then  $\Sigma \in L(H^2 \cap \overset{\circ}{H}^1)$ , and  $\text{im} \Sigma = H_\sigma^2$ ,  $\text{ker} \Sigma = H_\pi^2$ . The element of space  $U$  is a vector  $\vec{u}(x, t)$ , it has the form

$$\vec{u}(x, t) = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_{1,0}, \dots, w_{r,0}, w_{1,1}, \dots, w_{l_1}, \dots, w_{r,1}, \dots, w_{r,l_r}),$$

where  $u_\sigma = \Sigma v$ ,  $u_\pi = (I - \Sigma)v$ ,  $u_p = \bar{p}$ ,  $l_s = n_s - 1$ ,  $s = \overline{1, r}$  and

$$\vec{u}(0) = (u_{\sigma_0}, u_{\pi_0}, u_{p_0}, w_{1,0}^0, \dots, w_{r,0}^0, w_{1,1}^0, \dots, w_{l_1}^0, \dots, w_{r,1}^0, \dots, w_{r,l_r}^0),$$

where

$$u_{\sigma_0} = \Sigma v_0, \quad u_{\pi_0} = (I - \Sigma)v_0, \quad u_{p_0} = \bar{p}_0, \quad w_{i0}^0 = w_{i0}(x, 0), \quad i = \overline{1, r}; \quad w_{ij}^0 = w_{ij}(x, 0), \\ i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, l_r}; \quad \vec{u}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}.$$

Operators  $L, M: U \rightarrow F$  are defined by formulas

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma A_\alpha \Sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi A_\alpha \Pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}, \tag{9}$$

where  $\Pi = I - \Sigma$ ,  $A_\alpha = 1 - \alpha \nabla^2$ . Note that  $L$  is the order matrix  $K + 3$ .

$$M(\bar{u}) = M_1 \bar{u} + M_2(\bar{u}), \tag{10}$$

where  $M_1$  is a matrix of the form

$$\begin{pmatrix} \nu \tilde{\Delta} & \nu \tilde{\Delta} & 0 & A_{10} \tilde{\Delta} & \dots & A_{r0} \tilde{\Delta} & A_{11} \tilde{\Delta} & \dots & A_{l1} \tilde{\Delta} & \dots & A_{rlr} \tilde{\Delta} \\ \nu \hat{\Delta} & \nu \hat{\Delta} & -I & A_{10} \hat{\Delta} & \dots & A_{r0} \hat{\Delta} & A_{11} \hat{\Delta} & \dots & A_{l1} \hat{\Delta} & \dots & A_{rlr} \hat{\Delta} \\ \Sigma C & \Pi C & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix}.$$

Here  $\tilde{\Delta} = \Sigma \Delta$ ,  $\hat{\Delta} = \Pi \Delta$ ;  $C(u_\sigma + u_\pi) = \nabla(\nabla \cdot (u_\sigma + u_\pi))$ .

The operator  $M_2$  has the form  $M_2 = (\Sigma B(u_\sigma + u_\pi) + f_\sigma, \Pi B(u_\sigma + u_\pi) + f_\pi, 0, \dots, 0)^T$ , where  $B(u_\sigma + u_\pi) = -((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi)$ .

**Lemma 2.** Let spaces  $U$ ,  $F$  be defined by formulas (8), and let  $n = 2, 3, 4$ , and operators  $L, M : U \rightarrow F$  be defined by formulas (9), (10). Then: (i) operator  $L \in L(U; F)$ , and if  $\alpha^{-1} \notin \sigma(-\nabla^2)$ , then  $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times H_p \times \underbrace{\{0\} \dots \{0\}}_K$ ,  $\text{im} L = H_\sigma \times H_\pi \times \{0\} \times F_1 \times \dots \times F_K$ ; (ii) operator  $M \in C^\infty(U; F)$ .

The statement (i) of Lemma 1 is obvious, and the statement (ii) is checked directly.

$$M'_u = M_1 + M_3, \tag{11}$$

where operator  $M_1$  is defined above, and  $M_3 = \begin{pmatrix} \Sigma B_\sigma & \Sigma B_\pi & 0 \\ \Pi B_\sigma & \Pi B_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Here  $B_\sigma(B_\pi)$  is the Fréchet

partial derivative of the operator  $B$  at the point  $u_\sigma + u_\pi$  по  $u_\sigma(u_\pi)$ . Obviously,  $\forall n \geq 3 \quad \forall u \in U \quad M_u^{(n)} \equiv 0$  [7].

We have reduced the problem (7), (2) to the problem (3), (4).

Next, we check the feasibility of conditions (C1)–(C3). Denote by  $A_{\alpha\sigma}$  the restriction of the operator  $\Sigma A_\alpha \Sigma$  to  $H_\sigma^2$ .

**Lemma 3.** Let the conditions of Lemma 2 be satisfied, and  $\ker A_{\alpha\sigma} = \{0\}$ . Then each vector  $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$  has exactly one  $M'_u$  is associated vector, regardless of the point  $u \in U$ .

*Proof.* Let the vector  $\varphi = (0, 0, \varphi_p, 0, \dots, 0) \in \ker L$ ,  $\varphi_p \neq 0$ . Find the vector  $\psi \in U$  such that  $L\psi = M'_u \varphi$ . From (9) and (10) we have



$$A_{\sigma\sigma}\psi_\sigma = 0, \quad \Pi A_{\sigma\pi}\psi_\pi = -\varphi_p. \quad (12)$$

We get  $\psi_\sigma = 0$ ,  $\psi_\pi = -\Pi A_{\sigma\pi}^{-1}\varphi_p$ , the component  $\psi_p$  of vector  $\psi$  is arbitrary, and the remaining  $K$  components of the vector  $\psi$  are equal to zero.  $M'_u\psi \notin imL$ , since  $C\psi_\pi \neq 0$ , if  $\psi_\pi \neq 0$  [6]. •

The condition (C1) is satisfied for  $p=1$ . Now let's check condition (C2). Denote by  $A_{\sigma\pi}$  the restriction of the operator  $\Pi A_{\sigma\pi}^{-1}\Pi$  to  $H_\pi$ .

**Lemma 4.** Under the conditions of Lemma 3, the operator  $A_{\sigma\pi}: H_\pi \rightarrow H_\pi^2$  is a topological isomorphism.

By virtue of Lemma 2, the operator  $L$  from (9) is bisplitting. Let  $U_0^0 = kerL$ ,  $coimL = H_\sigma^2 \times H_\pi^2 \times \{0\} \times U_1 \times \dots \times U_K$ .

Let's describe lineals

$$F_0^0 = M'_{u_0}[U_0^0] = \{0\} \times H_p \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K = \{0\} \times H_\pi \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K \subset imL,$$

$$U_1^0 = \tilde{L}^{-1}[F_0^0] = \Sigma A_{\sigma\pi}^{-1}[H_p] \times A_{\sigma\pi}[H_p] \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K =$$

$$\Sigma A_{\sigma\pi}^{-1} A_{\sigma\pi}^{-1}[H_\pi^2] \times H_\pi^2 \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K \subset coimL$$

by Lemma 4;  $F_1^0 = M'_{u_0}[U_1^0] = \Sigma \tilde{B}_0 A_{\sigma\pi}^{-1}[H_p] \times \Pi \tilde{B}_0 A_{\sigma\pi}^{-1}[H_p] \times CA_{\sigma\pi}^{-1}[H_p] \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K$ .

Let  $\tilde{C}$  be the restriction of the operator  $C$  to  $H_\pi^2$ . Since there is an operator  $\tilde{C}^{-1}$  [6], then by Lemma 4

$$F_1^0 = \Sigma \tilde{B}_0 A_{\sigma\pi}^{-1} A_{\sigma\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1}[H_p] \times \Pi \tilde{B}_0 A_{\sigma\pi}^{-1} A_{\sigma\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1}[H_p] \times H_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K \notin imL.$$

Here and above  $\tilde{B}_0$  is the Fréchet derivative of the operator  $\tilde{B}$  at the point  $u_{\sigma 0} + u_{\pi 0}$ , and the operator  $\tilde{L}^{-1}$  is defined from (9).

The operators  $P_0$  and  $P_1$  have the form of matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & P_1^{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

where  $P_1^{12} = \Sigma A_{\sigma\pi}^{-1} A_{\sigma\pi}^{-1} \Pi$ ; and the operators are  $Q_0$  and  $Q_1$  respectively

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_0^{21} & \Pi & Q_0^{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1^{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_1^{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

where  $Q_1^{13} = \Sigma \tilde{B}_0 A_{\sigma\pi}^{-1} A_{\sigma\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} \Pi$ ,  $Q_1^{23} = \Pi \tilde{B}_0 A_{\sigma\pi}^{-1} A_{\sigma\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} \Pi$ ,  $Q_0^{21} = -\Pi A_{\sigma\pi} A_{\sigma\pi}^{-1} \Sigma$ ,  $Q_0^{23} = -Q_0^{21} Q_1^{13} - Q_1^{23}$ .

The operators  $P_k \in L(U)$  and  $Q_k \in L(F)$ ,  $k=0,1$ , defined in (13), (14) are projectors, and  $imP_k = U_k^0$ ,  $imQ_k = F_k^0$ ,  $k=0,1$  and  $P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0$ ,  $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = 0$ .  $kerQ_1 = imL$  and  $F_1^0 \oplus imL = F$ , condition (C2) is satisfied.

To check condition (C3) we construct the set

$$\tilde{U} = \{ u \in U : P_1 u = \text{const} \} = \{ u \in U : u_\pi = \text{const} \}.$$

The condition (C3) consists of the only equality  $Q_1 M(u) = (Q_1^{13} C(u_\sigma + u_\pi), Q_1^{23} C(u_\sigma + u_\pi), C(u_\sigma + u_\pi), 0, \dots, 0)^T = 0$ , which is executed if  $u_\pi = 0$ . If  $\tilde{U} = \{ u \in U : u_\pi = 0 \}$ , then the condition (C3) is implemented.

Let us construct the set  $B$ . According to Theorem 1,  $B = \{ u \in \tilde{U} : Q_0 M(u) = 0 \}$ . For  $u_\pi = 0$   $Q_0 M(\bar{u}) = 0 \Leftrightarrow (Q_0^{21} \Sigma + \Pi) \tilde{B}(u_\sigma) - u_p = 0$ , and

$$Q_0^{21} \Sigma + \Pi = A_{e\pi}^{-1} \Pi A_e^{-1} \Sigma + A_{e\pi}^{-1} \Pi A_e^{-1} \Pi = A_{e\pi}^{-1} \Pi A_e^{-1}, \quad (15)$$

then

$$B = \{ u \in \tilde{U} : A_{e\pi}^{-1} \Pi A_e^{-1} (\tilde{B}(u_\sigma)) = u_p, u_\pi = 0, u_\sigma \in H_\sigma^2, u_i \in H_\sigma^2 \times H_\pi^2, i = \overline{1, K} \}. \quad (16)$$

Notice, that

$$\Pi A_e^{-1} A_{e\sigma} \Sigma + \Pi A_e^{-1} \Pi A_e \Sigma = \Pi A_e^{-1} (\Sigma A_e + \Pi A_e) \Sigma = 0.$$

$$\Pi A_e^{-1} A_{e\sigma} \Sigma = -A_{e\pi} \Pi A_e \Sigma, A_{e\pi}^{-1} \Pi A_e^{-1} A_{e\sigma} \Sigma = -\Pi A_e \Sigma, A_{e\pi}^{-1} \Pi A_e^{-1} \Sigma = -\Pi A_e A_{e\sigma}^{-1} \Sigma = Q_0^{21} \Sigma.$$

**Theorem 2.** Let the conditions of Lemma 3 be satisfied. Let  $u_0 \in B$  (16). Then, for some  $t_0 = t_0(u_0)$ , there exists the unique solution of the problem (7), (2), which is a quasistationary trajectory,  $u = (u_\sigma, 0, \bar{p}, w_{10}, \dots, w_{r0}, w_{11}, \dots, w_{1l_1}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{rl_r})$  of class  $C^\infty((-t_0, t_0); U)$ , and such that  $u \in B$  for all  $t \in (-t_0, t_0)$ .

## References

1. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, 1989, Vol. 179, pp. 137–182. (in Russ.).
2. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy problem for a class of semilinear equations of Sobolev type. *Siberian Mathematical Journal*, 1990, Vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493
3. Sukacheva T.G. On a Certain Model of Motion of an Incompressible Visco-Elastic Kelvin-Voigt Fluid of Nonzero Order. *Differ. Equ.*, 1997, Vol. 33, no. 4, pp. 557–562.
4. Matveeva O.P. Kvizistatsionarnye traektorii zadachi Teylora dlya modeli neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti nenulevogo poryadka (Quasistationary trajectories of the Taylor problem for the model of the incompressible viscoelastic liquid of the nonzero order). *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2010, no. 5, pp. 39–47. (in Russ.).
5. Sukacheva T.G., Matveeva O.P. Zadacha Teylora dlya modeli neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti nulevogo poryadka (The Taylor Problem for a Zero-Order Incompressible Viscoelastic Fluid model). *Differentsial'nye uravneniya*, 2015, Vol. 51, no. 6, pp. 771–779. (in Russ.).
6. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Nekotorye matematicheskie zadachi dinamiki vyazkouprugikh neszhimaemykh sred. *Vestnik MaGU*, 2005, no. 8, pp. 5–33. (in Russ.).
7. Matveeva O.P., Sukacheva T.G. Homogeneous Model of Non-Zero Order Incompressible Viscoelastic Fluid. *Bulletin of SUSU. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2016, Vol. 8, no. 3, pp. 22–30. DOI: 10.14529/mmph160303

Received June 23, 2022

## Information about the authors

Matveeva Olga Pavlovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Algebra and Geometry Department, Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation, e-mail: oltan.72@mail.ru.

Sukacheva Tamara Gennadyevna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Algebra and Geometry Department, Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation; Leading Researcher, Laboratory of Nonclassical Sobolev Type Equations, South Ural State University (NRU), Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: tamara.sukacheva@novsu.ru.

УДК 517.958

DOI: 10.14529/mmph220305

## АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.П. Матвеева<sup>1</sup>, Т.Г. Сукачева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: oltan.72@mail.ru, tamara.sukacheva@novsu.ru

Аннотация. Рассмотрена разрешимость задачи Коши–Дирихле для обобщенной однородной модели динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта высокого порядка. При исследовании использована теория полулинейных уравнений соболевского типа. Указанная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к задаче Коши для указанного типа уравнения. Доказана теорема о существовании единственного решения указанной задачи, которое есть квазистационарная траектория, описано ее фазовое пространство.

*Ключевые слова:* уравнение соболевского типа; фазовое пространство; вязкоупругая несжимаемая жидкость.

### Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – № 179. – С. 126–164.
2. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.
3. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 552–557.
4. Матвеева, О.П. Квазистационарные траектории задачи Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О.П. Матвеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), Вып. 5. – С. 39–47.
5. Сукачева, Т.Г. Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 771–779.
6. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестник МаГУ. – 2005. – № 8. – С. 5–33.
7. Матвеева, О.П. Однородная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 22–30.

*Поступила в редакцию 23 июня 2022 г.*

### Сведения об авторах

Матвеева Ольга Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и геометрии, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация, e-mail: oltan.72@mail.ru.

Сукачева Тамара Геннадьевна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра алгебры и геометрии, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация; ведущий научный сотрудник, лаборатория неклассических уравнений соболевского типа, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: tamara.sukacheva@novsu.ru.

# КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО СТЕПЕНЯМ НЕГРУБОСТИ

**В.Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация  
E-mail: vroitenberg@mail.ru

**Аннотация.** Дифференциальное уравнение вида  $x' = f(t, x)$  с правой частью  $f(t, x)$ , имеющей непрерывные производные до  $r$ -го порядка включительно, 1-периодической по  $t$ , мы отождествляем с функцией  $f$  и рассматриваем как элемент банахова пространства  $E^r$  таких функций с  $C^r$ -нормой. Уравнение  $f$  определяет динамическую систему на цилиндрическом фазовом пространстве. Уравнение  $f$  называется грубым, если любое достаточно близкое к нему уравнение топологически эквивалентно  $f$ , то есть имеет ту же топологическую структуру фазового портрета. Уравнение  $f$  имеет  $k$ -ю степень негрубости, если любое достаточно близкое к нему негрубое уравнение либо имеет степень негрубости меньшую  $k$ , либо топологически эквивалентно  $f$ . В работе описано множество уравнений  $k$ -й степени негрубости ( $k < r$ ), показано, что оно образует вложенное подмногообразие коразмерности  $k$  в  $E^r$ , открыто и всюду плотно в множестве всех негрубых уравнений, не имеющих степень негрубости меньшую  $k$ .

*Ключевые слова:* периодическое дифференциальное уравнение; цилиндрическое фазовое пространство; грубость; степень негрубости; бифуркационное многообразие.

## Введение

Идея классификации негрубых динамических систем по степеням негрубости была сформулирована А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович в статье [1]. Для динамических систем на плоскости были описаны грубые системы, системы первой степени негрубости и их бифуркации [2]. На замкнутых двумерных многообразиях необходимые и достаточные условия грубости были получены М. Пейксото [3], а условия первой степени негрубости С.Х. Арансоном [4]. В работе [5] Ж. Сотомайор доказал, что множество  $\Sigma_1^r$  систем первой степени негрубости на замкнутом двумерном многообразии  $M$  является вложенным  $C^{r-1}$ -подмногообразием коразмерности один в банаховом пространстве  $X^r$  всех систем, задаваемых  $C^r$ -векторными полями на  $M$ .

С.Х. Арансон [6] установил, что для динамических систем на поверхностях рода  $g \geq 1$   $\Sigma_1^r$  неплотны в множестве  $X_1^r$  всех негрубых систем. Этот результат показывает, что продолжение классификации по степеням негрубости на таких поверхностях не является естественным. Известно, что для векторных полей на двумерной сфере  $\Sigma_1^r$  всюду плотно в  $X_1^r$  (см. например, [6]), хотя явное доказательство этого факта в литературе, по-видимому, отсутствует. Следующий шаг классификации – полное описание систем второй степени негрубости и их бифуркаций не сделан, хотя бифуркации некоторых систем второй степени негрубости изучены. На многообразиях размерности  $n \geq 3$  грубые системы описаны [7–8], но они не плотны в  $X^r$  [9], и потому классификация негрубых систем по степеням негрубости не имеет смысла.

Таким образом, классификация динамических систем по степеням негрубости может быть разумна либо в тривиальном одномерном случае, либо в двумерном случае для специальных классов динамических систем.

Мы опишем такую классификацию для динамических систем на цилиндре, задаваемых уравнением  $\dot{x} = f(t, x)$  с достаточно гладкой правой частью, периодической по  $t$ .

## 1. Формулировка результатов

Будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

с правой частью  $f(t, x)$ , являющейся  $C^r$ -функцией ( $r \geq 3$ ), определенной на прямом произведении множества действительных чисел  $\mathbf{R}$  на отрезок  $[-a, a]$ , 1-периодической по  $t$ . Будем ото-

рассматривать уравнение (1) с функцией  $f$ , а множество  $E^r$  рассматриваемых уравнений с банаховым пространством соответствующих функций с нормой

$$\|f\|_r := \max_{0 \leq i+j \leq r} \max_{(t,x) \in [0,1] \times [-a,a]} |\partial^{i+j} f(t,x) / \partial t^i \partial x^j|.$$

Пусть  $E_+^r$  – открытое подмножество в  $E^r$ , состоящее из таких уравнений, что

$$\forall t \in [0,1] \quad \pm f(t, \pm a) < 0. \quad (2)$$

Траекториями уравнения  $f \in E_+^r$  будем называть траектории векторного поля

$$\vec{f}(s, x) = 1 \partial / \partial s + f(s, x) \partial / \partial x$$

на цилиндре  $\Phi := \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times [-a, a]$ . Ввиду (2) в точках  $(s, x) \in \partial\Phi = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \{-a, a\}$  вектор  $\vec{f}(s, x)$  направлен внутрь  $\Phi$ .

Уравнения  $f$  и  $g$  из  $E_+^r$  назовем *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h: \Phi \rightarrow \Phi$ , переводящий траектории уравнения  $f$  в траектории уравнения  $g$ .

Уравнение  $f \in E_+^r$  назовем *грубым относительно подпространства*  $\Lambda \subset E_+^r$ , если  $f \in \Lambda$  и существует его окрестность  $U(f)$  в  $E_+^r$ , такая, что  $f$  и любое уравнение  $g \in U(f) \cap \Lambda$  топологически эквивалентны.

Уравнение  $f \in E_+^r$ , грубое относительно  $E_+^r$ , будем называть просто *грубым*, а их множество обозначать  $\Sigma_0^r$ . По индукции определим множества  $\Sigma_k^r$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) уравнений, грубых относительно  $E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{k-1}^r)$ . Уравнения из  $\Sigma_k^r$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) будем называть *уравнениями  $k$ -й степени негрубости*.

Обозначим  $X(t, u, f)$  решение уравнения  $f \in E_+^r$ , удовлетворяющее начальному условию  $X(0, u, f) = u$ . Функция  $X(t, u, f)$  в точках  $(t, u, f) \in [0, \infty) \times [-a, a] \times E_+^r$  определена и принадлежит классу  $C^r$  [10, с. 54]. Функция последования  $P(\cdot, f) := X(1, \cdot, f)$  задает отображение  $(0, u) \mapsto (0, P(u, f))$  дуги  $\{0\} \times [-a, a] \subset \Phi$  в себя по траекториям поля  $\vec{f}$ . Введем также функцию расхождения  $d(u, f) := P(u, f) - u$ . Траектория  $\Gamma_0$  уравнения  $f$ , проходящая через точку  $(0, u_0) \in \Phi$ , является замкнутой тогда и только тогда, когда  $d(u_0, f) = 0$ . Если при этом

$$\partial^k d(u_0, f) / \partial u^k = 0 \text{ для } k \leq n-1, \quad \partial^n d(u_0, f) / \partial u^n \neq 0 \quad (1 \leq n \leq r),$$

то число  $n$  называется *кратностью* замкнутой траектории  $\Gamma_0$ .

Множество  $\Sigma_0^r$  грубых уравнений состоит из уравнений, имеющих замкнутые траектории только кратности 1; оно открыто и всюду плотно в  $E_+^r$  [2].

Как и в [5], *вложенным  $C^l$ -подмногообразием  $E_+^r$  коразмерности  $k$*  будем называть такое подмножество  $V \subset E_+^r$ , что для любого  $f \in V$  существует окрестность  $U(f)$  в  $E_+^r$  и такое  $C^l$ -отображение  $F: U(f) \rightarrow \mathbf{R}^k$ , что производная  $F'(f): E^r \rightarrow \mathbf{R}^k$  сюръективна и  $F^{-1}(0) = V \cap U(f)$ .

**Теорема 1.** *Уравнение  $f \in E_+^r$  является уравнением  $k$ -й степени негрубости ( $1 \leq k \leq r$ ), тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число  $s$  замкнутых траекторий, сумма кратностей которых равна  $s+k$ .*

*Для любого  $k \in \{1, \dots, r\}$  множество  $\Sigma_k^r$  уравнений  $k$ -й степени негрубости открыто и всюду плотно в  $E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{k-1}^r)$ .*

**Теорема 2.** *Для любого  $k \in \{1, \dots, r-1\}$  множество  $\Sigma_k^r$  является вложенным  $C^{r-k}$ -подмногообразием  $E_+^r$  коразмерности  $k$ .*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены соответственно в разделах 2 и 3.

**Замечание 1.** Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для диффеоморфизмов отрезка и диффеоморфизмов окружности с неподвижными точками. Их доказательства получаются модификацией доказательств этих теорем. Поскольку разные уравнения из  $E_+^r$  могут

иметь одну и ту же функцию последования, то эти утверждения не являются следствием теорем 1 и 2, а из них не следуют теоремы 1 и 2.

**Замечание 2.** В определении  $C^r$ -векторного поля  $\vec{f}$   $k$ -й степени негрубости в области  $\Phi$  на плоскости (см. [2]) включено требование, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  окрестность  $U$  поля  $\vec{f}$  можно было выбрать так, чтобы для любого векторного поля  $\vec{g} \in U \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{k-1}^r)$  гомеоморфизм  $h: \Phi \rightarrow \Phi$ , переводящий траектории поля  $\vec{f}$  в траектории поля  $\vec{g}$ , был  $\varepsilon$ -близок к тождественному. Хотя в определении  $k$ -й степени негрубости уравнения  $f \in E_+^r$  аналогичное требование не включено, но из доказательства теоремы 1 и [2] видно, что если  $f \in \Sigma_k^r$ ,  $k \in \{1, \dots, r\}$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  окрестность  $U(f)$  можно выбрать так, чтобы для любого уравнения  $g \in U(f) \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{k-1}^r)$  гомеоморфизм  $h: \Phi \rightarrow \Phi$ , переводящий траектории уравнения  $f$  в траектории уравнения  $g$ , был  $\varepsilon$ -близок к тождественному в метрике  $\text{dist}$  в  $\Phi$ , индуцированной евклидовой метрикой в  $\mathbf{R} \times [-a, a]$ , то есть  $\forall z \in \Phi \text{ dist}(z, h(z)) < \varepsilon$ .

**2. Доказательство теоремы 1**

Обозначим  $\hat{\Sigma}_k^r$ ,  $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ , множество уравнений из  $E_+^r$ , имеющих конечное число замкнутых траекторий, сумма кратностей которых больше их числа на величину  $k$ . Оба утверждения теоремы 1 вытекают из следующей леммы.

**Лемма.** Для любого  $k \in \{0, 1, \dots, r\}$   $\hat{\Sigma}_k^r$  открыто и всюду плотно в  $E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{k-1}^r)$  и  $\hat{\Sigma}_k^r = \Sigma_k^r$ .

**Доказательство леммы.** При  $k = 0$  утверждение леммы верно. Пусть оно верно для всех  $k \leq n-1$ ,  $n \leq r$ . Докажем его справедливость и при  $k = n$ . Возьмем уравнение  $f \in E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r) \setminus \hat{\Sigma}_n^r$ . Тогда либо 1)  $f \in \hat{\Sigma}_j^r$  с  $j > n$ , либо 2)  $f$  имеет замкнутую траекторию, проходящую через точку  $(0, u_0) \in \Phi$ , в которой  $\partial^m d(u_0, f) / \partial u^m = 0$  для всех  $m \leq n$ . Покажем, что в любой окрестности  $U(f)$  уравнения  $f$  есть уравнение из  $\hat{\Sigma}_n^r$ .

Сначала рассмотрим случай 1). Достаточно доказать, что в любой окрестности уравнения  $g \in \hat{\Sigma}_N^r$ ,  $N > n$ , есть уравнение из  $\hat{\Sigma}_{N-1}^r$ . Так как уравнение  $g$  негрубое, то существует точка  $(0, u_0) \in \Phi$ , через которую проходит замкнутая траектория  $\Gamma_0$  уравнения кратности  $l \geq 2$ . Выберем столь малое число  $\varepsilon > 0$ , что

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad -a < X(t, u_0, g) - \varepsilon < X(t, u_0, g) < X(t, u_0, g) + \varepsilon < a,$$

а для любой замкнутой траектории  $x = X(t, u_*, g)$ , отличной от  $\Gamma_0$ ,

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad |X(t, u_*, g) - X(t, u_0, g)| \geq \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть  $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  – такая срезывающая  $C^\infty$ -функция, что

$$\alpha(y) = 1 \text{ при } |y| \leq \varepsilon/3, \quad \alpha(y) = 0 \text{ при } |y| \geq 2\varepsilon/3. \tag{4}$$

Уравнение  $g_\mu \in E_+^r$  с правой частью

$$g_\mu(t, x) := g(t, x) + \mu(x - X(t, u_0, g))^{l-1} \alpha(x - X(t, u_0, g)) \tag{5}$$

имеет решение  $X(t, u_0, g_\mu) \equiv X(t, u_0, g)$ .

Пусть  $l \geq 3$ . Обозначим

$$A(t) := \frac{\partial}{\partial x} g_\mu(t, x) \Big|_{x=X(t, u_0, g)} = \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) \Big|_{x=X(t, u_0, g)}, \quad B_i(t, \mu) := \frac{\partial^i}{\partial x^i} g_\mu(t, x) \Big|_{x=X(t, u_0, g)}, \quad i \geq 2.$$

Производные функций  $\xi_m(t) := \partial^m X(t, u, g_\mu) / \partial u^m \Big|_{u=u_0}$ ,  $m = 1, 2, \dots, l-1$ , удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\xi}_1(t) = A(t)\xi_1(t), \quad \dot{\xi}_m(t) = A(t)\xi_m(t) + B_m(t, \mu)(\xi_1(t))^m + R_m(t, \mu), \quad m \geq 2,$$

где  $R_m(t, \mu)$  – многочлен относительно  $B_2(t, \mu), \dots, B_{m-1}(t, \mu)$  и  $\xi_1(t), \dots, \xi_{m-1}(t)$ ,  $R_2(t, \mu) \equiv 0$ , а также начальным условиям  $\xi_1(0) = 1$ ,  $\xi_m(0) = 0$  при  $m \geq 2$ .

Так как все функции  $A(t)$ ,  $B_i(t, \mu)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l-2$ , а потому  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l-2$ , и  $R_j(t, \mu)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l-1$ , не зависят от  $\mu$ , то  $\partial^l d(u_0, g_\mu) / \partial u^l = \partial^l d(u_0, g) / \partial u^l = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, l-2$ . Учитывая, что  $B_{l-1}(t, \mu) = \mu(l-1)! + B_{l-1}(t, 0)$ ,  $\partial^{l-1} d(u_0, g) / \partial u^{l-1} = 0$ , а  $\xi_1(t) > 0$ , получаем при  $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \partial^{l-1} d(u_0, g_\mu) / \partial u^{l-1} &= \int_0^1 [B_{l-1}(t, \mu)(\xi_1(t))^{l-1} + R_{l-1}(t, 0)] / \xi_1(t) dt = \\ &= \int_0^1 [B_{l-1}(t, 0)(\xi_1(t))^{l-1} + R_{l-1}(t, 0)] / \xi_1(t) dt + \mu(l-1)! \int_0^1 (\xi_1(t))^{l-2} dt = \\ &= \partial^{l-1} d(u_0, g) / \partial u^{l-1} + \mu(l-1)! \int_0^1 (\xi_1(t))^{l-2} dt = \mu(l-1)! \int_0^1 (\xi_1(t))^{l-2} dt > 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $u_0$  – нуль функции  $d(\cdot, g_\mu)$  кратности  $l-1$ . Это верно и при  $l = 2$ , так как тогда

$$\partial X(1, u, g_\mu) / \partial u \Big|_{u=u_0} = \exp \int_0^1 \left( \mu + \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) \Big|_{x=X(t, u_0, g)} \right) dt = \exp \mu,$$

и потому  $\partial d(u_0, g_\mu) / \partial u = \exp \mu - 1 \neq 0$ .

Вследствие (3) и (5)  $\operatorname{sgn}[d(u_0 - \varepsilon, g_\mu)d(u_0 + \varepsilon, g_\mu)] = \operatorname{sgn}[d(u_0 - \varepsilon, g)d(u_0 + \varepsilon, g)] = (-1)^l$ . Поэтому независимо от знака производной  $\partial^l d(u_0, g) / \partial u^l$  и четности числа  $l$ , функция  $d(\cdot, g_\mu)$  имеет на интервале  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$  хотя бы один нуль  $u_1$ , отличный от  $u_0$ . Вне этого интервала  $d(\cdot, g_\mu)$  имеет те же нули и той же кратности, что и  $d(\cdot, g)$ . При  $\mu$ , достаточно близких к нулю, сумма кратности нулей  $d(\cdot, g_\mu)$  не превосходит сумму кратности нулей  $d(\cdot, g)$  [2, с. 18–20]. Поэтому  $u_1$  – единственный нуль на интервале  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$ , отличный от  $u_0$ , а его кратность равна 1. Таким образом, разность между суммой кратностей замкнутых траекторий и их числом уменьшилась на единицу при переходе от уравнения  $g$  к уравнению  $g_\mu$ , которое можно выбрать сколь угодно близким к  $g$  в  $E_+^r$ . Тем самым доказано, что в любой окрестности уравнения  $f \in \hat{\Sigma}_j^r$  с  $j > n$  есть уравнение из  $\hat{\Sigma}_n^r$ .

Рассмотрим случай 2). Как и в случае 1) получим, что в заданной окрестности  $U(f)$  уравнения  $f$  существует уравнение  $g$ , для которого  $\Gamma_0: x = X(t, u_0, f)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , является замкнутой траекторией, причем  $u_0$  – нуль функции расхождения  $d(\cdot, g)$  кратности  $n$ . Для определенности, пусть  $n$  нечетно и  $\partial^n d(u_0, g) / \partial u^n < 0$ . Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

Из [11, с. 100] следует, что существуют  $C^r$ -отображения  $\bar{\gamma}_\pm: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , такие, что  $\forall t \in \mathbf{R}$   $\bar{\gamma}_\pm(t+1) = \bar{\gamma}_\pm(t)$ ,  $-a < \bar{\gamma}_-(t) < X(t, u_0, f) < \bar{\gamma}_+(t) < a$ ,  $\operatorname{sgn}(\bar{\gamma}'_\pm(t) - g(t, \bar{\gamma}_\pm(t))) = \pm 1$ , а траектории уравнения  $g$ , начинающиеся в точках кольца  $\{(s, x) \in \Phi: s = t \bmod 1, \bar{\gamma}_-(t) \leq x \leq \bar{\gamma}_+(t)\}$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_0$ . Выбрав достаточно малое число  $\varepsilon > 0$ , получим, что

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R} \quad -a < \bar{\gamma}_-(t) - \varepsilon < \bar{\gamma}_-(t) + \varepsilon < X(t, u_0, f) < \bar{\gamma}_+(t) - \varepsilon < \bar{\gamma}_+(t) + \varepsilon < a, \\ \operatorname{sgn}(\bar{\gamma}'_\pm(t) - g(t, \bar{\gamma}_\pm(t) + \xi)) = \pm 1 \text{ при всех } t \in \mathbf{R}, \xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть  $U_\nu(g) := \{\tilde{g} \in E_+^r: \|\tilde{g} - g\|_r < \nu\}$ . Выберем  $\rho > 0$  так, чтобы  $U_\rho(g) \subset U(f)$ . Для любого  $\delta > 0$  существует уравнение  $g_\delta \in U_\delta(g)$  с аналитической правой частью  $g_\delta(t, x)$ . Можно взять за  $g_\delta(t, x)$   $N$ -ю сумму Фейера ряда Фурье функции  $g(t, x)$  при достаточно большом  $N$  [12, с. 405]. При достаточно малом  $\delta$  из (6) следует, что

$$\operatorname{sgn}(\bar{\gamma}'_\pm(t) - g_\delta(t, \bar{\gamma}_\pm(t) + \xi)) = \pm 1 \text{ при всех } t \in \mathbf{R}, \xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{7}$$

Пусть  $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  –  $C^\infty$ -функция, удовлетворяющая условиям (4). Рассмотрим уравнение  $g_* \in E_+^r$  с правой частью

$$g_*(t, x) := \alpha(x - \bar{\gamma}_\pm(t))g_\delta(t, x) + (1 - \alpha(x - \bar{\gamma}_\pm(t)))g(t, x), \text{ если } |x - \bar{\gamma}_\pm(t)| \leq \varepsilon,$$

$$g_*(t, x) := g(t, x), \text{ если } \bar{\gamma}_-(t) + \varepsilon < x < \bar{\gamma}_+(t) - \varepsilon, \quad (8)$$

$$g_*(t, x) := g_\delta(t, x), \text{ если } -a \leq x < \bar{\gamma}_-(t) - \varepsilon \text{ или } \bar{\gamma}_+(t) + \varepsilon < x \leq a.$$

При достаточно малом  $\delta$   $g_* \in U_\rho(g)$ . Из (7) и (8) следует, что

$$\text{sgn}(\bar{\gamma}_\pm(t) - g_*(t, \bar{\gamma}_\pm(t) + \xi)) = \pm 1 \text{ при всех } t \in \mathbf{R}, \xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем, что все траектории уравнения  $g_*$ , пересекающиеся с кольцом

$$K := \{(s, x) \in \Phi : s = t \bmod 1, \bar{\gamma}_-(t) - \varepsilon \leq x \leq \bar{\gamma}_+(t) + \varepsilon\},$$

$\omega$ -предельны к  $\Gamma_0$ . Поскольку в  $\Phi \setminus K$  векторное поле  $\bar{g}_*$  аналитическое, то все замкнутые траектории поля, принадлежащие  $\Phi \setminus K$  имеют конечную кратность. Поэтому  $g_* \in \hat{\Sigma}_j^r$  при некотором  $j \geq n$ . Но тогда, как было показано в случае 1), в любой окрестности уравнения  $g_*$ , а потому и в  $U(f)$  есть уравнение из  $\hat{\Sigma}_n^r$ . Таким образом, плотность  $\hat{\Sigma}_n^r$  в  $E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r)$  доказана.

Пусть уравнение  $f \in \hat{\Sigma}_n^r$ , и  $u_i, i = 1, \dots, N$ , – все нули функции  $d(\cdot, f)$ , пронумерованные в порядке возрастания. Выберем число  $\rho > 0$  так, чтобы отрезки  $[u_i - \rho, u_i + \rho]$  принадлежали  $[-a, a]$  и между собой не пересекались. Если окрестность  $U(f)$  уравнения  $f$  в  $E_+^r$  достаточно мала, то для любого уравнения  $\tilde{f} \in U(f)$  в точках каждого из отрезков  $[-a, u_1 - \rho]$ ,  $[u_i + \rho, u_{i+1} - \rho], i = 1, \dots, N - 1, [u_N + \rho, a]$   $\text{sgn} d(u, \tilde{f}) = \text{sgn} d(u, f)$ , а число нулей функции  $d(\cdot, \tilde{f})$  с учетом их кратности на каждом интервале  $(u_i - \rho, u_i + \rho), i = 1, \dots, N$ , не превосходит кратности нуля  $u_i$  функции  $d(\cdot, f)$  [2, с. 18–20]. Если при этом  $\tilde{f} \notin \Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r$ , то в каждом интервале  $(u_i - \rho, u_i + \rho)$  будет по одному нулю  $\tilde{u}_i$  функции  $d(\cdot, \tilde{f})$ , той же кратности, что и нуль  $u_i$  функции  $d(\cdot, f)$ . Но тогда  $\tilde{f} \in \hat{\Sigma}_n^r$ , то есть,  $\hat{\Sigma}_n^r$  открыто в  $E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r)$ ; в точках каждого из промежутков  $[-a, \tilde{u}_1), (\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1}), i = 1, \dots, N - 1, (\tilde{u}_N, a]$   $d(u, \tilde{f})$  имеет тот же знак, что и  $d(u, f)$  в точках соответствующих промежутков  $[-a, u_1), (u_i, u_{i+1}), i = 1, \dots, N - 1, (u_N, a]$ . Отсюда следует, что функции последования  $P(\cdot, \tilde{f})$  и  $P(\cdot, f)$  сопряжены, то есть существует такой гомеоморфизм  $h_0 : [-a, a] \rightarrow [-a, a]$ , что  $\forall u \in [-a, a] P(h_0(u), \tilde{f}) = h_0(P(u, f))$ . Но тогда уравнения  $f$  и  $\tilde{f}$  топологически эквивалентны, то есть  $f \in \Sigma_n^r$ . Тем самым доказано, что  $\hat{\Sigma}_n^r \subset \Sigma_n^r$ .

Пусть уравнение  $f \in \Sigma_n^r$ , а  $U(f)$  такая его окрестность в  $E_+^r$ , что  $f$  и любое уравнение из  $U(f) \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r)$  топологически эквивалентны. Поскольку  $\hat{\Sigma}_n^r$  всюду плотно в  $E_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r)$ , то  $f$  топологически эквивалентно некоторому уравнению из  $\hat{\Sigma}_n^r$ , и потому  $d(\cdot, f)$  имеет конечное число нулей. Покажем, что  $f \in \hat{\Sigma}_n^r$ . Предположим временно, что это не так. Тогда возможны два случая:

А)  $f \in \hat{\Sigma}_l^r$  при некотором  $l \geq n + 1$ , Б)  $d(u_0, f) = \dots = \partial^r d(u_0, f) / \partial u^r = 0$  при некотором  $u_0$ .

В случае А), аналогично случаю 1) в доказательстве плотности  $\hat{\Sigma}_n^r$ , в  $U(f)$  существует уравнение  $\tilde{f}$ , принадлежащее  $\hat{\Sigma}_{l-1}^r$ , а потому и  $U(f) \setminus (\Sigma_0^r \cup \dots \cup \Sigma_{n-1}^r)$ , имеющее больше замкнутых траекторий, чем  $f$ . Это противоречит тому, что  $f$  и  $\tilde{f}$  топологически эквивалентны.

В случае Б) при некотором  $\varepsilon > 0$   $u_0$  – единственный нуль функции  $d(\cdot, f)$  на отрезке  $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$ . Как и выше, мы можем построить такое уравнение  $\tilde{f} \in U(f)$ , что все замкнутые траектории уравнения  $f$  являются и траекториями уравнения  $\tilde{f}$ ,  $u_0$  – нуль функции  $d(\cdot, \tilde{f})$  кратности  $r$ ,  $d(u_0 + \varepsilon, \tilde{f}) \cdot \partial^r d(u_0, \tilde{f}) / \partial u^r < 0$ . Тогда  $d(\cdot, \tilde{f})$  имеет нуль  $u_* \in (u_0, u_0 + \varepsilon)$ , а уравнение  $\tilde{f}$  имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение  $f$ . Но это противоречит топологической эквивалентности уравнений  $f$  и  $\tilde{f}$ .



Таким образом, сделанное предположение неверно и, на самом деле,  $f \in \hat{\Sigma}_n^r$ . Тем самым, мы показали, что  $\hat{\Sigma}_n^r = \Sigma_n^r$ .

Теперь доказано, что из утверждения леммы при  $k \leq n-1$  следует утверждение леммы при  $k = n$ . По индукции получаем утверждения леммы при всех  $k \leq r$ .

### 3. Доказательство теоремы 2

Пусть уравнение  $f \in \Sigma_k^r$ ,  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ . Пусть  $u_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  – все нули функции  $d(\cdot, f)$ , а  $k_j$  – их кратности,  $u_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $n \leq N$ ) – те нули, кратность которых  $k_i \geq 2$ . Тогда  $k_1 + \dots + k_n - n = k$ . Выберем такое число  $\varepsilon > 0$ , что кольца

$$\{(s, x) : s = t \bmod 1, X(t, u_j, f) - \varepsilon < x < X(t, u_j, f) + \varepsilon\}, j \in \{1, \dots, N\},$$

содержатся в  $\Phi$  и попарно не пересекаются. Так как при каждом  $j \in \{1, \dots, N\}$  производные  $\partial^{k_j} d(u_i, f) / \partial u^{k_j} \neq 0$ , то число  $\varepsilon$  и окрестность  $U(f)$  уравнения  $f$  можно взять такими, что для любого  $g \in U(f)$  уравнение  $\partial^{k_i-1} d(u, g) / \partial u^{k_i-1} = 0$  имеет на интервале  $(u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon)$  единственное решение  $u = \hat{u}_i(g)$ , причем  $\hat{u}_i(\cdot) \in C^{r-k_i+1}$ ,  $\hat{u}_i(f) = u_i$ .

Определим отображение  $F : U(f) \rightarrow \mathbf{R}^k \equiv \mathbf{R}^{k_1-1} \times \dots \times \mathbf{R}^{k_n-1}$ , положив  $F = (F_1, \dots, F_n)$ , где  $F_i = (F_{i0}, \dots, F_{i, k_i-2})$ , а  $F_{ip} : U(f) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p \in \{0, \dots, k_i-2\}$ , задается равенством  $F_{ip}(g) := \partial^p d(\hat{u}_i(g), g) / \partial u^p$ . Проверим, что производная  $F'(f) : E^r \rightarrow \mathbf{R}^k$  сюръективна. Пусть  $h_{jq} \in E^r$  – уравнения с правыми частями

$$h_{jq}(t, x) := (x - X(t, u_j, f))^q \alpha(x - X(t, u_j, f)), j \in \{1, \dots, n\}, q \in \{0, \dots, k_j-2\},$$

где  $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  –  $C^\infty$ -функция, удовлетворяющая (4). Пусть  $\hat{d}(u, \mu) := d(u, f + \mu h_{jq})$ . Тогда

$$F'_{ip}(f)h_{jq} = \frac{d}{d\mu} F_{ip}(f + \mu h_{jq}) \Big|_{\mu=0} = \frac{\partial^{p+1}}{\partial u^{p+1}} d(u_i, f) \frac{d}{d\mu} \hat{u}(f + \mu h_{jq}) \Big|_{\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \frac{\partial^p}{\partial u^p} \hat{d}(u_i, \mu) \Big|_{\mu=0}.$$

Так как  $\partial^{p+1} d(u_i, f) / \partial u^{p+1} = 0$ , то отсюда следует, что

$$F'_{ip}(f)h_{jq} = \frac{d}{d\mu} \frac{\partial^p}{\partial u^p} d(u_i, f + \mu h_{jq}) \Big|_{\mu=0}. \tag{10}$$

При  $i \neq j$   $d(u_i, f + \mu h_{jq})$  не зависит от  $\mu$ , и потому из (10) получаем  $F'_{ip}(f)h_{jq} = 0$ .

Аналогично случаю 1) в доказательстве леммы имеем для  $p < q$   $\partial^p d(u_i, f + \mu h_{iq}) / \partial u^p = \partial^p d(u_i, f) / \partial u^p = 0$  и потому  $F'_{ip}(f)h_{iq} = 0$ , а для  $p = q$

$$\partial^p d(u_i, f + \mu h_{ip}) / \partial u^p = \mu p! \int_0^1 \exp[(p-1) \int_0^t f'_x(\tau, X(\tau, u_i, f)) d\tau] dt,$$

и потому  $F'_{ip}(f)h_{ip} > 0$ .

Рассмотрим систему  $k$  линейных уравнений с  $k$  неизвестными  $\lambda_{jq}$ :

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ q=0, \dots, k_j-2}} \lambda_{jq} F'_{ip}(f)h_{jq} = c_{ip}.$$

Матрица коэффициентов этой системы блочно-диагональна с блоками на диагонали, являющимися треугольными матрицами, на диагонали которых стоят положительные числа  $F'_{ip}(f)h_{ip}$ . Ее определитель  $\neq 0$ . Поэтому система имеет решение при любых правых частях  $c_{ip}$ .

Но тогда для любого набора чисел  $c_{ip}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p \in \{0, \dots, k_i-2\}$   $F'_{ip}(f)(\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ q=0, \dots, k_j-2}} \lambda_{jq} h_{jq}) = c_{ip}$ , и

потому отображение  $F'(f)$  сюръективно.

То, что  $F^{-1}(0) = \Sigma_k^r \cap U(f)$ , если окрестность  $U(f)$  выбрана достаточно малой, следует из доказательства включения  $\hat{\Sigma}_n^r \subset \Sigma_n^r$  в п. 2. Теорема 2 доказана.

## Литература

1. Андронон, А.А. К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории / А.А. Андронон, Е.А. Леонтович // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 21, № 9. – С. 427–430.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронон, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.
3. Peixoto, M. Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds / M. Peixoto // Topology. – 1962. – Vol. 1, no. 2. – P. 101–120.
4. Арансон, С.Х. Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному предельному циклу у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях / С.Х. Арансон // Мат. Сборник. – 1968. – Т. 76(118), № 2. – С. 214–230.
5. Sotomayor, J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds / J. Sotomayor // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. – 1974. – Vol. 43. – P. 5–46.
6. Арансон, С.Х. О неплотности полей конечной степени негрубости в пространстве негрубых векторных полей на замкнутых двумерных многообразиях / С.Х. Арансон // УМН. – 1988. – Т. 43, вып. 1. – С. 191–192.
7. Robinson, C. Structural stability of vector fields / C. Robinson // Annals of Mathematics. Second Series. – 1974. – Vol. 99, no. 1. – P. 154–175.
8. Hayashi, S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of  $C^1$ -Stability and  $\Omega$ -Stability Conjectures for Flows / S. Hayashi // Annals of Mathematics. Second Series. – 1997. – Vol. 145, no. 1. – P. 81–137.
9. Abraham, R. Non-genericity of  $\Omega$ -stability / R. Abraham, S. Smale // Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Mathematics. 14. – Publ. Am. Math. Soc, 1970. – P. 5–8.
10. Шварц, Л. Анализ. Т. 2 / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – 528 с.
11. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронон, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
12. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

*Поступила в редакцию 29 марта 2022 г.*

## Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, e-mail: vroitenberg@mail.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2022, vol. 14, no. 3, pp. 52–59*

---

DOI: 10.14529/mmph220306

## CLASSIFICATION OF PERIODIC DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DEGREES OF NON-ROUGHNESS

**V.Sh. Roitenberg**

*Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation  
E-mail: vroitenberg@mail.ru*

Abstract. A differential equation of the form  $x' = f(t, x)$  with the right part  $f(t, x)$  having continuous derivatives up to  $r$ -th order inclusive, 1-periodic in  $t$ , we identify with the function  $f$  and consider as an element of the Banach space  $E^r$  of such functions with the  $C^r$ -norm. The equation  $f$  defines a dynamical system on a cylindrical phase space. An equation  $f$  is called rough if any equation close enough to it is topologically equivalent to  $f$ , that is, it has the same topological structure of the phase portrait. An

equation  $f$  has the  $k$ -th degree of non-roughness if any non-rough equation sufficiently close to it either has a degree of non-roughness less than  $k$ , or is topologically equivalent to  $f$ . The paper describes the set of equations of the  $k$ -th degree of non-roughness ( $k < r$ ), shows that it form an embedded submanifold of codimension  $k$  in  $E^r$ , are open and everywhere dense in the set of all non-rough equations that do not have a degree of non-roughness less than  $k$ .

*Keywords:* periodic differential equation; cylindrical phase space; structural stability; degree of structural instability; bifurcation manifold.

### References

1. Andronov A.A., Leontovich E.A. К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории (On the Theory of Changing the Qualitative Structure of the Division of a Plane into Trajectories). *Doklady AN SSSR*, 1938, Vol. 21, no. 9, pp. 427–430. (in Russ.).

2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973, 482 p.

3. Peixoto M. Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds. *Topology*, 1962, Vol. 1, no. 2, pp. 101–120.

4. Aranson S.H. The Absence of Nonclosed Poison-Stable Semitrajectories and Trajectories Doubly Asymptotic to a Double Limit Cycle for Dynamical Systems of the First Degree of Structural Instability on Orientable Two-Dimensional Manifolds. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1968, Vol. 5, no. 2, pp. 205–219. DOI: 10.1070/SM1968v005n02ABEH002593

5. Sotomayor J. Generic One-Parameter Families of Vector Fields on Two-Dimensional Manifolds. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1974. Vol. 43, pp. 5–46. DOI: 10.1007/BF02684365

6. Aranson, S. Kh. On the Non-Denseness of Fields of Finite Degree of Non-Robustness in the Space of Non-Robust Vector Fields on Closed Two-Dimensional Manifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 1988, Vol. 43, no. 1, pp. 231–232. DOI: 10.1070/RM1988v043n01ABEH001537

7. Robinson C. Structural Stability of Vector Fields. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1974, Vol. 99, no. 1, pp. 154–175. DOI: 10.2307/1971016

8. Hayashi S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of  $C^1$  Stability and  $\Omega$ -Stability Conjectures for Flows. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1997, Vol. 145, no. 1, pp. 81–137. DOI: 10.2307/2951824

9. Abraham R., Smale S. Non-genericity of  $\Omega$ -stability. Global Analysis. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 14, Publ. Am. Math. Soc., 1970, pp. 5–8.

10. Schwartz L. *Analyse Mathématique*. II, Paris: Hermann, 1967.

11. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Halsted Press (A division of John Wiley & Sons) and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973, 524 p.

12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis). Moscow: Nauka Publ., 1968. (in Russ.).

*Received March 29, 2022*

### Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, e-mail: vroitenberg@mail.ru.

## ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ $K_I$ ТРЕЩИНОПОДОБНЫХ ДЕФЕКТОВ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

**В.Л. Дильман, П.Б. Уткин**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: dilmantvl@susu.ru, neobart@yandex.ru

**Аннотация.** Разработан новый метод нахождения коэффициента интенсивности напряжений и номинального напряжения  $\sigma_{ox}$  для пластины с трещиноподобным (эллиптическим) дефектом. В качестве экспериментальной основы берутся картины полос абсолютной разности хода, полученные на основе метода голографической интерферометрии. С помощью соотношений Фавра и приближенного разложения компонент напряжений для плоского случая определяется коэффициент интенсивности напряжений и номинальное напряжение  $\sigma_{ox}$ . Отличие предлагаемого метода заключается в более точном представлении тензора напряжений в окрестности вершины трещиноподобного дефекта. Такое представление позволяет учитывать геометрию дефекта. Вычисленные по предложенному методу значения параметра функции в формуле для теоретического определения коэффициента интенсивности напряжений оказались выше, чем полученные по ранее использовавшимся методикам. Это, возможно, говорит о недооценке величины коэффициента интенсивности напряжений при использовании ранее предложенных методов. Помимо использования более точных формул для тензора напряжений, подход предусматривает рассмотрение номинального напряжения и коэффициента интенсивности напряжений как независимых параметров. Полный учет геометрии трещины и особенностей нагружения невозможен с аналитической точки зрения, однако данная особенность метода позволяет частично компенсировать упрощения аналитических выражений тензора напряжений. Также данный метод дает возможность определить главные напряжения и интенсивность напряжений в окрестности вершины дефекта. Полученные формулы хорошо согласуются с результатами натурных экспериментов.

*Ключевые слова:* механика разрушения; коэффициенты интенсивности напряжений; напряженное состояние пластины с наклонным эллиптическим вырезом; метод голографической интерферометрии.

### Введение

Работа посвящена описанию нового метода нахождения коэффициента интенсивности напряжений пластины с трещиноподобным дефектом, использующегося при прогнозировании хрупкого разрушения [1, 2].

В случае тел и дефектов сложной геометрии при попытке получить аналитическую зависимость для вычисления коэффициента  $K_I$  методами теории упругости возникают значительные математические трудности. Среди методов натурных экспериментов большое развитие получили методы фотоупругости [3–8], которые позволяют решить широкий круг сложных задач линейной механики разрушения, но сдерживаются недостаточной разработанностью методов.

Можно отметить метод голографической интерферометрии, основанный на использовании картин полос абсолютных разностей хода (АРХ) [4–7, 9, 10]. В работах [5, 8] рассмотрен случай оптически чувствительных пластин с центральной и боковой трещиной. Для них дан обзор и сравнительный анализ фотоупругих методов, используемых при определении величины  $K_I$ .

В линейной механике в рамках теории упругости было принято разлагать компоненты напряжений и перемещений по степеням расстояния до вершины дефекта. В непосредственной

близости от конца прямолинейной трещины использовалось «однопараметрическое» представление, т. е. зависящее от коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  [3]. При таком подходе геометрия тела с трещиной и граничные условия нагружения не учитываются.

Цель статьи – разработка нового метода нахождения коэффициента интенсивности напряжений и номинального напряжения  $\sigma_{ox}$  для пластины с трещиноподобным (эллиптическим) дефектом, основанного на независимом нахождении этих величин. Идея независимости позволяет найти поправочный коэффициент в аналитической формуле для вычисления  $K_I$ . В качестве данных натурального эксперимента используется информация, которая снимается с картин, полученных на основе метода голографической интерферометрии.

Отличие предлагаемого метода заключается в более точном представлении тензора напряжений в окрестности вершины трещиноподобного дефекта. Такое представление позволяет учитывать геометрию дефекта. Вычисленные по предложенному методу значения поправочной функции в формуле для теоретического определения коэффициента интенсивности напряжений оказались выше, чем полученные по ранее использовавшимся методикам. Это, возможно, говорит о недооценке величины коэффициента интенсивности напряжений при использовании ранее предложенных методов. Помимо использования более точных формул для тензора напряжений, подход предусматривает рассмотрение номинального напряжения и коэффициента интенсивности напряжений как независимых параметров. Полный учет геометрии трещины и особенностей нагружения невозможен с аналитической точки зрения, однако данная особенность метода позволяет частично компенсировать упрощения аналитических выражений тензора напряжений. Также данный метод дает возможность определить главные напряжения и интенсивность напряжений в окрестности вершины дефекта.

### Описание метода

Для получения значений коэффициента интенсивности напряжений и номинальных напряжений в вершине дефекта выполняются следующие действия. Значения номеров полос совместно с расстояниями от вершины дефекта до середины полосы находятся в результате эксперимента. Далее, с помощью приведенных ниже формул (9) и (10) они преобразуются в значения коэффициента интенсивности напряжений и интенсивность напряжений соответственно. Полученные величины совместно со значениями расстояния до середины полосы аппроксимируются по методу наименьших квадратов или с применением аналогичных методов линейной функцией  $\sigma_I(r)$ . Строгим обоснованием применения линейной аппроксимации авторы пока не располагают. Во всяком случае, в идеальном случае аппроксимирующая зависимость должна быть постоянна (и следовательно, линейна). Таким образом, значения коэффициента интенсивности напряжений и интенсивность напряжений находятся не в вершине трещины, а на некотором расстоянии от неё по оси дефекта. Итоговое значение  $\sigma_I^{жк}$  получается как предельное значение данной функции в нуле (что следует интерпретировать как вершину дефекта).

Компоненты напряжения при разложении в ряд по степеням  $r$  в окрестности вершины трещины с точностью до второго члена при двухосном нагружении трещиноподобного дефекта имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \sigma_x \approx & -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \left( \frac{2l}{\rho} \frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)} \right) K_I \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{A_1 K_I}{4\sqrt{2\pi r}} - \\ & - \left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1/2} \left(\frac{2l}{\rho} \frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}\right)^{1/2} \sigma(1+\varepsilon) \frac{(1+m)}{2\sqrt{m}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sigma(1-\varepsilon) \left(\frac{1+m}{2m}\right)^2 \\ \sigma_y \approx & \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \left( \frac{2l}{\rho} \frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)} \right) K_I \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{B_1 K_I}{4\sqrt{2\pi r}} + \\ & + \left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1/2} \left(\frac{2l}{\rho} \frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)}\right)^{1/2} \sigma(1+\varepsilon) \frac{(1+m)}{2\sqrt{m}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sigma(1-\varepsilon) \left(\frac{1-m}{2m}\right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tau_{xy} \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \left( \frac{2l}{\rho} \frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)} \right) K_I \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{C_1 K_I}{4\sqrt{2\pi r}} -$$

$$-\left(\frac{2r}{\rho}\right)^{-1/2} \left( \frac{2l}{\rho} \frac{(1-m)^2}{4\sqrt{m}(1+m)} \right)^{1/2} \sigma(1+\varepsilon) \frac{(1+m)}{2\sqrt{m}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

где  $\sigma$  – номинальное напряжение;  $\varepsilon$  – параметр двухосности нагружения;  $m = \frac{1-\sqrt{\rho/l}}{1+\sqrt{\rho/l}}$ ,  $2l$  – длина трещины, а коэффициенты

$$A_1 = \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + \frac{-17m^2 + 26m + 15}{8m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad B_1 = -\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) + \frac{17m^2 + 38m - 15}{8m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$C_1 = \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right) - \frac{17m^2 + 6m - 15}{8m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  для эллиптической трещины ищется по формуле:

$$K_I = \sqrt[4]{\frac{4m}{(1+m)^2}} \left( \sqrt{\pi l} \frac{\sigma(m(1+k) + (1-k))}{2m} \right) = \sigma \left( \frac{\rho}{\pi l} \right)^{-1/2} \sqrt[4]{\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)} \frac{\left(1 - k \sqrt{\frac{\rho}{l}}\right)}{\left(1 - \sqrt{\frac{\rho}{l}}\right)} \quad (2)$$

Для случая одноосного растяжения и значений параметра  $m$  (зависящего от главных осей эллиптического дефекта), близких к 1, формула (2) упрощается и приобретает вид:

$$K_I / (\sigma \sqrt{\pi l}) \approx 1 + (1-m)/2.$$

Известно [6], что в плоской фотоупругой модели существуют два семейства полос  $N_1$  и  $N_2$ . Номера полос связаны с главными напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соотношениями Фавра [9]. Для плосконапряженного состояния эти соотношения имеют вид:

$$N_1 = a\sigma_1 + b\sigma_2; \quad N_2 = a\sigma_2 + b\sigma_1, \quad (3)$$

где  $N_2$  и  $a$  – константы материала исследуемого образца. Эти постоянные определяют на основе модельного эксперимента с пластиной, не содержащей дефекта [7]. Номера полос  $N_1$  и  $N_2$  в картинах АРХ берутся при различных поляризациях опорного пучка – вертикальной ( $\beta = 0^\circ$ ) и горизонтальной ( $\beta = 90^\circ$ ) соответственно [4]. Значения констант для рассматриваемого натурного эксперимента:

$$a = 0,625 \frac{\text{полос}}{\text{МПА}}; \quad b = 0,453 \frac{\text{полос}}{\text{МПА}}.$$

Картины АРХ удобнее всего обрабатывать вдоль оси трещины, так как вдоль нее наблюдается наибольшее количество полос и происходит значительное упрощение формул (1). В этом случае выражения для напряжений [10] приобретают вид: при угле  $\theta = 0^\circ$ ,  $\tau_{xy} = 0$  в формулах (1)

$$\sigma_1 \approx \frac{DK_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} + \left( \frac{17m^2 + 30m - 15}{32m} \right) \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + \left( \frac{2r}{\rho} \right)^{-1/2} D^{3/2} \sigma(1+\varepsilon) + \sigma(1-\varepsilon) \left( \frac{1-m}{2m} \right)^2, \quad (4)$$

$$\sigma_2 \approx -\frac{DK_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} + \left( \frac{-17m^2 + 34m + 15}{32m} \right) \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} - \left( \frac{2r}{\rho} \right)^{-1/2} D^{3/2} \sigma(1+\varepsilon) - \sigma(1-\varepsilon) \left( \frac{1+m}{2m} \right)^2, \quad (5)$$

где  $r$  – расстояние до вершины трещины,  $D = \frac{(1+m)}{2\sqrt{m}}$ .

Из уравнений (1), (3)–(5) для первой картины АРХ выражение

$$N_1 = K_I \left\{ \frac{D}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} (a-b) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ a \left( \frac{17m^2 + 30m - 15}{32m} \right) + b \left( \frac{-17m^2 + 34m + 15}{32m} \right) \right] \right\} + \sigma \left\{ \left( \frac{2r}{\rho} \right)^{-1/2} D^{1/2} (1+\varepsilon) \frac{(1+m)}{2\sqrt{m}} (a-b) + (1-\varepsilon) \left[ a \left( \frac{1-m}{2m} \right)^2 - b \left( \frac{1+m}{2m} \right)^2 \right] \right\}. \quad (6)$$

Для второй картины АРХ соответственно получим

$$N_2 = K_I \left\{ \frac{D}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} (b-a) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ b \left( \frac{17m^2 + 30m - 15}{32m} \right) + a \left( \frac{-17m^2 + 34m + 15}{32m} \right) \right] \right\} + \sigma \left\{ \left( \frac{2r}{\rho} \right)^{-1/2} D^{1/2} (1+\varepsilon) \frac{(1+m)}{2\sqrt{m}} (b-a) + (1-\varepsilon) \left[ b \left( \frac{1-m}{2m} \right)^2 - a \left( \frac{1+m}{2m} \right)^2 \right] \right\}. \quad (7)$$

Считая параметры  $K_I$  и  $\sigma$  независимыми, объединим формулы (6), (7) в систему, решение которой дается формулой:

$$K_I^i = \left\{ \left[ \left( \frac{2r_i}{\rho} \right)^{-1/2} D^{3/2} (1+\varepsilon) + (1-\varepsilon) \frac{1+m^2}{4m^2} \right] (a-b) (N_1^i + N_2^i) + \frac{(1-\varepsilon)(a+b)(N_1^i - N_2^i)}{2m} \right\} / \Delta, \quad (8)$$

$$\sigma^i = \left\{ \left[ \frac{D}{\sqrt{2\pi r_i}} \frac{\rho}{2r_i} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r_i}} \left( \frac{17m^2 - 2m - 15}{32m} \right) \right] (a-b) (N_1^i + N_2^i) + \frac{(a+b)(N_2^i - N_1^i)}{\sqrt{2\pi r_i}} \right\} / \Delta, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \left\{ \frac{D}{\sqrt{2\pi r_i}} \frac{\rho}{2r_i} \frac{(1-\varepsilon)}{m} (a^2 - b^2) + \left( \frac{2r_i}{\rho} \right)^{-1/2} D^{3/2} (1+\varepsilon) (b^2 - a^2) \frac{2}{\sqrt{2\pi r_i}} + \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{2\pi r_i}} \left\{ (b^2 - a^2) \left( \frac{1-m}{2m} \right)^2 \left( \frac{-17m^2 + 34m + 15}{32m} \right) + (b^2 - a^2) \left( \frac{1+m}{2m} \right)^2 \left( \frac{17m^2 + 30m - 15}{32m} \right) \right\} \right\},$$

где  $N_{1i}$  – номер полосы в  $i$ -й точке, расположенной на оси трещины на расстоянии  $r_i$  от ее вершины.

Как известно [1, 2], при растяжении пластины с конечными размерами с трещиной коэффициент интенсивности напряжений равен:

$$K_I = \sigma_H \sqrt{\pi l} \cdot f_1, \quad (10)$$

где  $\sigma_H$  – номинальные напряжения вдали от трещины;  $l$  – полудлина трещины;  $f_1$  – поправочная функция, зависящая от геометрии образца и вида нагружения.

Из выражения (10) получаем:

$$f_{1i} = \frac{K_I^i}{\sigma_H \sqrt{\pi l}}, \quad (11)$$

Таким образом, для получения значения поправочной функции  $f_{1i}$  измеряются координаты полос АРХ  $N_{1i}$  и  $N_{2i}$  на оси трещины ( $\theta = 0^\circ$ ), после чего по формулам (8), (11) определяют  $f_{1i}$ . Точность приближенных формул (1) возрастает в окрестности вершины трещины, поэтому полученные значения  $f_{1i}$  экстраполируются в вершину дефекта  $r = 0$ . Согласно [5] экспериментальное значение для  $r_{\min} = (3,5 - 4)\rho$ . Отношение этих величин сохранялось при варьировании радиуса надреза  $\rho$  от 0,1 до 0,25 мм и длины надреза от 3 до 30 мм для пластины шириной 100 мм. Величину  $r_{\max}$  определяли совпадением теоретического по формулам (4), (5) и фактического напряжения [5].

Также по графикам  $N_1$  и  $N_2$  определяются номера полос в выбранных точках исследуемого сечения, и вычисляются главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  [7]

$$\sigma_1 = \frac{aN_1 - bN_2}{a^2 - b^2}; \quad \sigma_2 = \frac{aN_2 - bN_1}{a^2 - b^2}. \quad (12)$$

На точность определения главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  влияет точность определения порядков АРХ в исследуемой модели, а также точность тарировочного эксперимента.

### Применение метода к результатам натурального эксперимента

Для проверки предложенного метода определения коэффициента  $K_I$  были использованы данные натуральных экспериментов. При проведении экспериментов трещиноподобный надрез имел ширину 0,3 мм и длину  $2l = 13$  мм в пластине шириной  $2B = 13$  мм, толщиной 3,83 мм, выполненной из материала ЭД-20ММГФА. Эксперименты проведены при двух значениях относительной длины надреза  $W = \frac{l}{B} = 0,13; 0,3$ . Номинальное напряжение для  $W = 0,3$  равно  $\sigma_H = 3,28$  МПа, для  $W = 0,13$  равно  $\sigma_H = 4,7$  МПа. По обеим картинам  $N_{1i}$  и  $N_{2i}$  по формуле (11) определены значения  $f_{1i}$  для  $W = 0,13; 0,3$ .

Данные натурального эксперимента представляют из себя значения номеров полос и расстояния до центра полосы. Эти значения с помощью формулы (9) преобразуются в значения коэффициента интенсивности напряжений. Полученные значения совместно со значениями расстояния до центра полосы аппроксимируются по методу наименьших квадратов линейной функцией  $K_I(r)$ . Применение других методов аппроксимации (метод наименьших модулей, обобщенный метод наименьших модулей) не дало заметных улучшений результатов. Итоговое значение  $K_I^{\text{ЭК}}$  получается как значение данной функции в нуле (что следует интерпретировать как вершину дефекта).

Для получения интенсивности напряжений выполняются аналогичные процедуры. Значения номеров полос совместно с расстояниями по формуле (10) преобразуются в значения коэффициента интенсивности напряжений. Полученные значения совместно со значениями расстояния до центра полосы аппроксимируются по методу наименьших квадратов линейной функцией  $\sigma_I(r)$ . Итоговое значение  $\sigma_I^{\text{ЭК}}$  получается как значение данной функции в нуле (что следует интерпретировать как вершину дефекта).

На рис. 1–2 построены графики для интерполирующей линейной функции  $K_I(r)$  совместно с точками  $K_I^i$ , а на рис. 3–4 графики для линейной аппроксимации  $\sigma_I(r)$  и точки  $\sigma_I^i$  (значения интенсивности напряжений в точке  $r_i$ ). При вычислении  $\sigma^i$  использовались формулы (12) для определения главных напряжений. По значениям  $K_I^i$  построены прямые, приближающие полученные значения и определено значение  $K_I^{\text{ЭК}}$ . Значения для  $\sigma^i$  выходят на значение  $\sigma_H$  при увеличении расстояния. Значения  $f_{1i}$  аппроксимируются прямыми линиями, сходящимися в одну точку.

Экспериментальные средние значения  $f_{1\text{эксн}}$  для двух значений  $W$ , полученные по формуле (11), приведены в таблице. Здесь же приведены теоретические значения  $f_{1i}$ , полученные по различным методикам: формула Феддерсена [1, 2], экспериментальные значения, полученные методом фотоупругости по картинам изохром [3], экспериментальные результаты, полученные с помощью метода голографической фотоупругости по картинам АРХ [4].



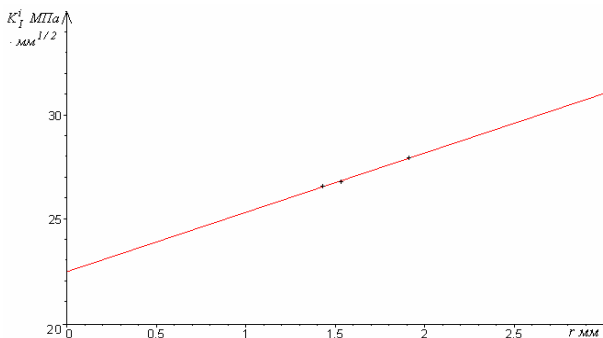


Рис 1. Экспериментальные точки  $K_I^i$ ,  $W = 0,3$

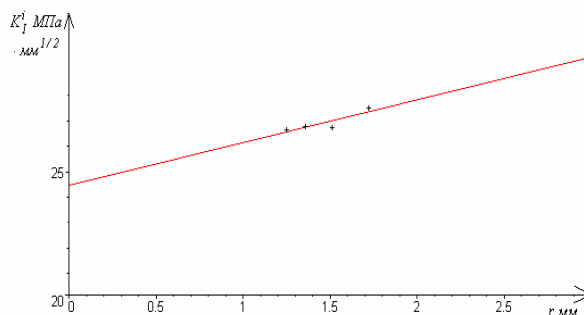


Рис 2. Экспериментальные точки  $K_I^i$ ,  $W = 0,13$

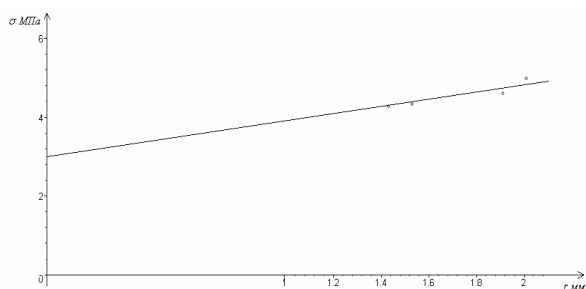


Рис 3. Экспериментальные точки  $\sigma_i^j$ ,  $W = 0,3$

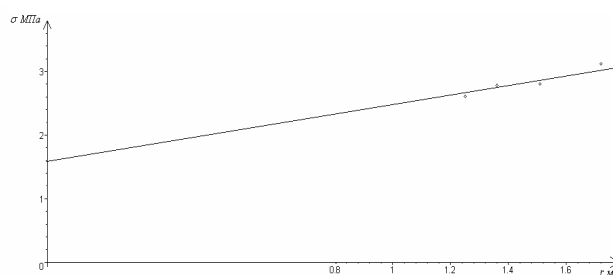


Рис 4. Экспериментальные точки  $\sigma_i^j$ ,  $W = 0,13$

Таблица

$W = \frac{l}{B}$	$f_1 = \sqrt{\sec \frac{\pi}{2} W}$ Феддерсен [1, 2]	$f_1$ [3]	$f_1$ [4]	$f_1$ (предложенный метод)
0,13	1,01	—	1,00	1.05
0,3	1,06	1,06	1,06	1.08

В случае центрального эллиптического выреза с радиусом кривизны в вершине  $\rho = 0,15$  мм экспериментальные значения главного напряжения  $\sigma_1$ , определенные методом голографической интерферометрии, согласуются с расчетными значениями с погрешностью 10 %, значения коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  с погрешностью 13 %.

Погрешность составила 2 % по формуле (6) из [4] с результатами натурального эксперимента взятыми из [3]. Расчет велся по формулам с однопараметрическим представлением тензора напряжения на основе коэффициента  $K_I$ . Второй член в представлении М. Вильямса  $\sigma$  не учитывался. Анализ результатов таблицы показывает, что экспериментальные значения  $f_{1i}$  для  $W = 0,13$  выше значений  $f_1 = 1,00$ , приведенных в [4], что произошло за счет добавления слагаемого  $\sigma$  в формулах (6)–(7) и последующего их учета в формуле (8). Аналогичные экспериментальные результаты, полученные по картинам изохром методом фотоупругости, приведены в [8] с погрешностью 2–5 % двухпараметрическим методом на основе решения Ирвина.

Некоторые теоретические и экспериментальные исследования по механике разрушения трещиноподобных дефектов в случае двухосного нагружения конструкции приведены в работах [10].

Таким образом, предложенный двухпараметрический метод определения  $K_I$  может быть использован для решения задач линейной механики разрушения с использованием метода голографической интерферометрии по картинам АРХ. Предложенные формулы для расчета  $K_I$  хорошо согласуются с теоретическими результатами.

### Литература

1. Махутов, Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н.А. Махутов. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.
2. Красовский, А.Я. Хрупкость металлов при низких температурах / А.Я. Красовский. – Киев: Наукова думка, 1980. – 337 с.
3. Определение коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  методом фотоупругости / О.А. Бакши, Н.Л. Зайцев, С.Ю. Гооге и др. // Заводская лаборатория. – 1980. – Т. 46, № 3. – С. 280–282.
4. Определение коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  методом голографической фотоупругости / Л.Л. Ситников, А.А. Остсемин, С.А. Денискин, А.А. Загребалов // Заводская лаборатория. – 1982. – Т. 48, № 9. – С. 81–83.
5. Остсемин, А.А. Определение коэффициента интенсивности напряжений методами фотоупругого моделирования / А.А. Остсемин, С.А. Денискин, Л.Л. Ситников // Проблемы прочности. – 1990. – № 1. – С. 33–37.
6. Остсемин А.А. Двухпараметрическое определение коэффициентов интенсивности напряжений для наклонной трещины методом голографической интерферометрии / А.А. Остсемин // Заводская лаборатория. – 1991. – Т. 57, № 12. – С. 45–48.
7. Определение напряженного состояния тел с дефектами методом голографической интерферометрии / Остсемин А.А., Денискин С.А., Ситников Л.Л. и др. // Проблемы прочности. – 1982. – № 10. – С. 77–81.
8. Разумовский, И.А. Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела: учебное пособие / И.А. Разумовский. – М.: Изд-во МГТУ, 2007. – 235 с.
9. Александров, А.Я. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / А.Я. Александров, М.Х. Ахметзянов. – М: Наука, 1973. – 576 с.
10. Остсемин, А.А. Напряженно-деформированное состояние и коэффициент интенсивности напряжений в окрестности трещиноподобных дефектов при двухосном растяжении пластины / А.А. Остсемин, П.Б. Уткин // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 6(328). – С. 162–172.

*Поступила в редакцию 21 июня 2022 г.*

### Сведения об авторах

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: dilmanvl@susu.ru.

Уткин Павел Борисович – доцент, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: utkinpb@susu.ru, neobart@yandex.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2022, vol. 14, no. 3, pp. 60–67*

---

DOI: 10.14529/mmph220307

## TWO-PARAMETER METHOD OF DETERMINING STRESS INTENSITY FACTOR $K_I$ OF CRACK-LIKE DEFECTS USING HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY

**V.L. Dilman, P.B. Utkin**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: dilmanvl@susu.ru, neobart@yandex.ru*

Abstract. A new method has been developed for finding the stress intensity coefficient and the nominal stress  $\sigma_{ox}$  for a plate with a crack-like (elliptical) defect. As an experimental basis, the patterns of bands of absolute path difference obtained on the basis of the method of holographic interferometry are taken. Using Favre ratios and approximate decomposition of stress components for the plane case, the stress intensity coefficient and the nominal stress  $\sigma_{ox}$  are determined. The difference of the proposed method is in a more accurate representation of the stress tensor in the vicinity of the vertex of a crack-

like defect. Such representation allows one to take the geometry of the defect into account. The values of the correction function calculated by the proposed method in the formula for theoretical determining of the intensity factor have been higher than those obtained by previously used methods. This indicates a possible underestimation of the magnitude of the intensity factor when using the previously proposed methods. In addition to using more precise formulas for the stress tensor, the approach implies considering the nominal stress and the intensity factor as independent parameters. Full consideration of the crack geometry and loading features is very difficult from a mathematical point of view; however, this property of the method allows partially compensating for the simplifications of the stress tensor analytic expressions. Also, this method makes it possible to determine the main stresses and the intensity of stresses in the vicinity of the vertex of the defect. The obtained formulas agree well with experimental results.

*Keywords:* fracture mechanics; stress intensity factors; stress state of a plate with an inclined elliptical cutout; method of holographic interferometry.

### References

1. Makhutov N.A. *Deformatsionnye kriterii razrusheniya i raschet elementov konstruksiy na prochnost'* (Deformation Criteria Destruction and Calculation of Elements of Structures for Strength). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981, 272 p. (in Russ.).
2. Krasovskiy A.Ya. *Khrupkost' metallov pri nizkikh temperaturakh* (The brittleness of metals at low temperatures). Kiev, Naukova dumka Publ., 1980, 337 p. (in Russ.).
3. Bakshi O.A., Zaytsev N.L., Googe S.Yu. *et al.* Opredelenie koeffitsientov intensivnosti napryazheniy  $K_I$  i  $K_{II}$  metodom fotouprugosti (Determination of stress intensity coefficients  $K_I$  and  $K_{II}$  by photoelasticity method). *Zavodskaya laboratoriya*, 1980, Vol. 46, no. 3, pp. 280–282. (in Russ.).
4. Sitnikov L.L., Ostsemin A.A., Deniskin S.A., Zagrebalo A.A. Opredelenie koeffitsienta intensivnosti napryazheniy  $K_I$  metodom golograficheskoy fotouprugosti (Determination of stress intensity factor  $K_I$  by the method of holographic interferometry). *Zavodskaya laboratoriya*, 1982, Vol. 48, no. 9, pp. 81–83. (in Russ.).
5. Ostsemin A.A., Deniskin S.A., Sitnikov L.L. Opredelenie koeffitsienta intensivnosti napryazheniy metodami fotouprugogo modelirovaniya (Determination of stress intensity factor by methods of photoelastic simulation). *Problemy prochnosti*, 1990, no. 1, pp. 33–37. (in Russ.).
6. Ostsemin A.A. Dvukhparametricheskoe opredelenie koeffitsientov intensivnosti napryazheniy dlya naklonnoy treshchiny metodom golograficheskoy interferometrii (Two-parameter determination of stress intensity factors for slant cracks by the method of holographic interferometry). *Zavodskaya laboratoriya*, 1991, Vol. 57, no. 12, pp. 45–48. (in Russ.).
7. Ostsemin A.A., Deniskin S.A., Sitnikov L.L. *et al.* Opredelenie napryazhennogo sostoyaniya tel s defektami metodom golograficheskoy interferometrii (Determination of the Stress State of Bodies with Defects using Holographic Interferometry). *Problemy prochnosti*, 1982, no. 10, pp. 77–81. (in Russ.).
8. Razumovskiy I.A. *Interferentsionno-opticheskie metody mekhaniki deformiruемого твердого тела: учебное пособие* (Interferention-Optical Methods of Solid Mechanics: Text Book). Moscow, Izdvo MGTU Publ., 2007, 235 p. (in Russ.).
9. Aleksandrov A.Ya., Akhmetzyanov M.Kh. *Polyarizatsionno-opticheskie metody mekhaniki deformiruемого тела* (Polarization-Optical Methods of Mechanics of Deformable Bodies). Moscow, Nauka Publ., 1973, 576 p. (in Russ.).
10. Ostsemin A.A., Utkin P.B. Stress-Strain State and Stress Intensity Factor in the Vicinity of Crack-Like Defects under Biaxial Tension of a Plate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, Vol. 55, no. 6, pp. 1045–1054. DOI: 10.1134/S0021894414060170

*Received June 21, 2022*

### Information about the authors

Dilman Valeriy Leyzerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: dilmanvl@susu.ru.

Utkin Pavel Borisovich is Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: utkinpb@susu.ru, neobart@yandex.ru.

## СИСТЕМА ОСВЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТА ДЛЯ МИКРОСКОПИИ С СУБДИФРАКЦИОННЫМ РАЗРЕШЕНИЕМ

**С.А. Ассельборн, Е.С. Зацепин, Д.С. Исаков, А.М. Герасимов, Д.Г. Пихуля, Ю.В. Микляев**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: aborn@mail.ru

**Аннотация.** Разработана система освещения объекта лазерным источником с подавлением когерентности для оптической микроскопии. Освещение объекта выполнено по методу темного поля. Данная система позволяет визуализировать детали (наночастицы) с размерами менее 50 нм. Это необходимо для повышения разрешения ранее предложенного метода сверхразрешения оптической микроскопии NORM (наноскопии), основанном на обработке в реальном времени видеопотока, регистрирующего броуновское движение наночастиц над поверхностью объекта. Реализован метод определения вертикальной координаты наночастиц при помощи астигматического изображения. Получены трехмерные картины распределения координат наночастиц в суспензии над наблюдаемым объектом. Разрешение по вертикали составило менее 200 нм, в плоскости объекта (по обоим латеральным координатам) – менее 100 нм.

*Ключевые слова:* микроскопия, наноскопия; ближнепольная микроскопия; сверхразрешение; наночастицы; анализ траекторий частиц; видеообработка.

### Введение

В последние годы разработано несколько методов сверхразрешения в оптической микроскопии. Разрешающая способность традиционной оптической микроскопии ограничена дифракционным пределом разрешения, составляющим около половины длины волны наблюдаемого излучения [1]. В видимой области спектра этот предел составляет около 200 нм. Наиболее подробно исследованным и часто используемым способом получения оптических изображений с субволновым разрешением является сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия (СБОМ) [2, 3]. При помощи СБОМ можно считывать распределение интенсивности света, спектр излучения на поверхности образца с разрешением, гораздо более высоким, чем это позволяет критерий Релея. Однако, сканирующий принцип и необходимость контроля положения зонда вблизи поверхности образца с точностью, выше 50 нм, делают получение изображений этим методом довольно медленным, стоимость микроскопа – высокой, а также накладывают дополнительные требования на свойства образца.

С другой стороны, в последнее время разработано несколько методик получения изображений с высоким разрешением, основанных на оптических принципах, но позволяющих получать информацию не о распределении интенсивности оптических полей, а о распределении красителя (люминофора) в образце, имеющих особое значение для наблюдения биологических объектов.

Метод STED [4] основан на сканировании образца пучком лазера на двух длинах волн и использовании специального красителя, люминесценция которого возбуждается излучением одной длины волны и подавляется излучением на другой длине волны. Другой подход получения сверхразрешения в люминесцентной микроскопии основан на таком возбуждении люминесценции, когда в каждый отдельный момент времени имеет место люминесценция случайно распределенных отдельных молекул красителя, изолированных друг от друга на расстояние, большее предела разрешения оптического микроскопа, в который они наблюдаются [5–7].

Третий подход (SIM) [8] в некотором смысле подобен принципу конфокальной микроскопии [9]. Этот метод основан на освещении образца последовательностью интерференционных картин. Использование нелинейных свойств люминофора в этом методе позволяет добиться повышения

разрешающей способности. Так, в работе [10] сообщалось о достижении разрешающей способности 50 нм в режиме насыщения люминесценции.

Для преобразования ближнепольного изображения в распространяющиеся волны было предложено и реализовано несколько вариантов так называемых дальнепольных суперлинз (far-field superlenses – FSL) и гиперлинз. Часть из них основана на возбуждении эванесцентными волнами волн поверхностных плазмонов [11]. Другой класс таких суперлинз основан на субволновой фокусировке и увеличении изображения при помощи диэлектрических линз и сфер с радиусом кривизны около нескольких микрометров [12, 13]. Изображение получается при очень малом фокусном расстоянии с субволновым разрешением. При таком способе получения изображения область наблюдения является очень малой или состоящей из множества отдельных небольших участков размером не более нескольких микрометров.

Последние результаты в области оптического сверхразрешения связаны с дальнейшим развитием уже существующих методов. Так, в области люминесцентной локализационной микроскопии получены результаты по быстрому сканированию образца за счет использования высокочувствительных камер и уменьшению поля зрения [14], а также оптимизации алгоритмов [15, 16]. Развитие этой техники идет также в направлении получения трехмерных изображений [17] и в получении двухцветных изображений объектов, различные элементы которых поглощают различные красители [18]. Новые результаты в зондовой микроскопии связаны с использованием нелинейных эффектов [19, 20] и комбинационного рассеяния [21, 22].

Метод сверхразрешения, рассмотренный в данной статье, основан на подходе, ранее предложенном авторами [23], позволят получать изображения с разрешением, аналогичным методу сканирующей ближнепольной микроскопии, равным 50–100 нм. В отличие от люминесцентной микроскопии изображения объектов получают не в виде картины распределения красителя, а в виде распределения оптических свойств самого объекта. Отличительной особенностью метода является возможность получения большого поля зрения и сравнительно большой глубины резкости при высоком разрешении. Также возможно получение изображений подвижных объектов, поскольку в данном методе, в отличие от люминесцентной микроскопии, используется динамичная картина движущихся наночастиц. По сравнению с зондовой микроскопией данный метод может обеспечить более высокую скорость сканирования, обусловленную тем, что в роли зондов одновременно используется большое количество наночастиц. Также метод допускает получение трехмерных изображений объектов.

В предложенном нами методе наночастицы, взвешенные в слое жидкости на поверхности объекта, наблюдаются в оптический микроскоп. Определяется координата каждой частицы и интенсивность рассеиваемого ей света. В результате, вычисляется интенсивность света в месте нахождения частицы. Разрешение метода, ограничено, в основном, только размерами частиц, которые могут регистрироваться оптическим микроскопом, и может достигать 10–20 нм. На текущем этапе нами выполнялось сканирование поверхности образца частицами со средним размером менее 120 нм.

Получение изображения в данном методе состоит из следующей последовательности действий:

1. Нанесение суспензии наночастиц на поверхность объекта, в результате суспензия находится между поверхностью объекта и покровным стеклом.
2. Регистрация картины броуновского движения наночастиц с помощью микроскопа и ПЗС камеры.
3. Обработка получаемого видеопотока при помощи специально разрабатываемой программы трассировки частиц, вычисление координат частиц (с субволновой точностью) и определение соответствующей им интенсивности рассеяния.
4. Обработка данных на выходе программы трассировки частиц, и расчет распределения интенсивности ближнего поля с субволновой точностью. Фурье-фильтрация полученного изображения.

Для регистрации броуновского движения наночастиц в суспензии требуется оптическая схема, которая в отличие от обычного оптического микроскопа позволит использовать различные виды источников освещения (в том числе лазерные) как в режиме отраженного, так и в режиме проходящего света.

В ходе работы были получены суспензии частиц золота и диоксида титана в воде. Для предотвращения агрегации частиц и адгезии на поверхность объекта использовался сурфактант. На рис. 1 и 2 показаны распределения частиц по размерам, полученным методом динамического рассеяния на анализаторе размера частиц Microtrac «Nanotrac Ultra» производства компании Microtrac Inc..

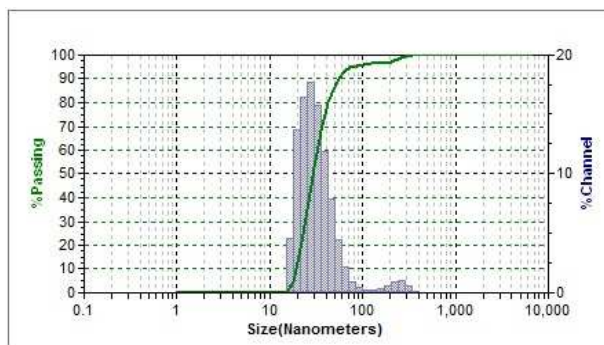


Рис. 1. Гистограмма распределения размеров золотых наночастиц в водной суспензии

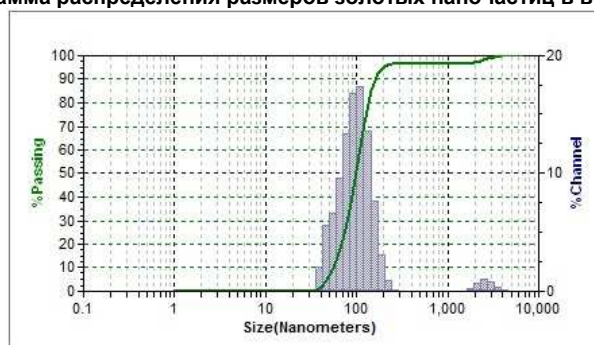


Рис. 2. Гистограмма распределения размеров наночастиц диоксида титана в водной суспензии

На данном этапе исследований была выполнена разработка алгоритма обработки видео, позволяющих получать изображения с субдифракционным разрешением до 50 нм. Исследована функциональность метода на различных тестовых объектах.

Для увеличения яркости изображения наночастиц с размерами меньше 90 нм в качестве источника освещения использовался непрерывный лазер с устройством для подавления когерентности. Регистрация броуновского движения проводилась с помощью стандартной черно-белой ПЗС камеры повышенной чувствительности, так и с помощью сверхвысокочувствительной камеры на основе EMCCD детектора (Andor iXon Ultra).

На рис. 3 показаны изображения наночастиц золота со средним размером 29 нм, полученные при помощи лазерной подсветки.

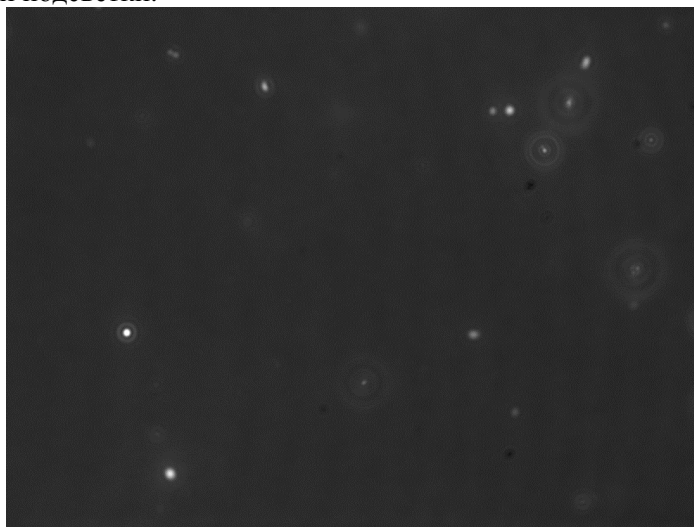


Рис. 3. Снимок наночастиц золота со средним размером 29 нм, полученный в темном поле при помощи лазерной подсветки. Числовая апертура объектива  $NA = 0,75$

Для обработки видеоряда была разработана программа трассировки частиц. В этой программе использован алгоритм, позволяющий, в первую очередь, обеспечить высокую скорость вычислений, в том числе за счет использования встроенного набора инструкций процессора, и, во вторую очередь, обеспечивающий приемлемую точность локализации наночастиц. Для этой цели наиболее хорошо подходит метод аппроксимации изображения наночастицы гауссовой поверхностью [24]. Последовательность обработки видеоряда программой можно описать следующим образом: выделение динамической составляющей (удаление статической составляющей изображения), подавление шумов и подготовка изображений видеоряда к распознаванию частиц, поиск и распознавание частиц (корреляционным методом), определение координат центров частиц с субпиксельной точностью (методом аппроксимации с гауссовой поверхностью), определение яркости частиц, компенсация пространственного дрейфа изображения в видеоряде.

После получения изображения на основе данных трассировки частиц, полученное изображение обрабатывается методом Фурье-фильтрации. Для построения Фурье-фильтра использованы измерения амплитудно-частотной характеристики данного метода получения изображений.

Схема экспериментальной установки для получения изображения наночастиц в проходящем свете при использовании лазерной подсветки представлена на рис. 4. Данная экспериментальная установка разработана на основе модульного микроскопа. В схеме используется лазер на длине волны 532 нм и сверхвысокочувствительная камера Andor iXon Ultra. Фото установки показано на рис. 5.

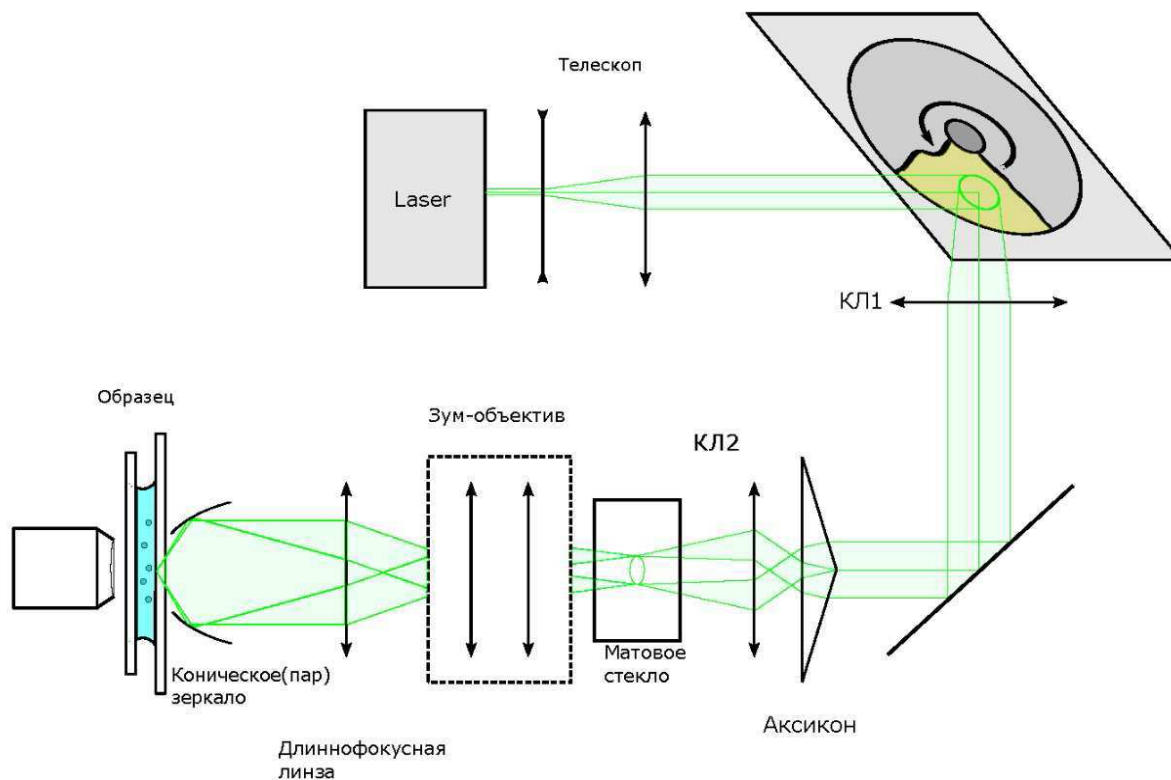


Рис. 4. Схема лазерного освещения объекта.  
КЛ1 и КЛ2 – коллимирующие линзы



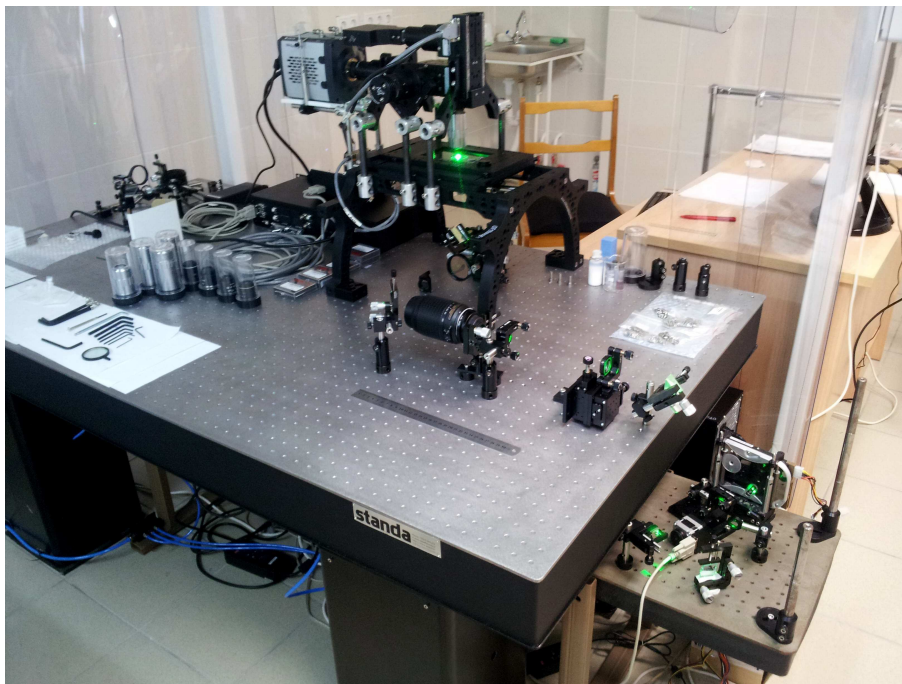


Рис. 5. Фотография установки микроскопии со сверхразрешением на основе модульного микроскопа с лазерной подсветкой и высокочувствительной камерой Andor iXon Ultra. В правом нижнем углу фото диффузор – устройство для подавления пространственной когерентности в системе лазерного освещения объекта

При помощи данной установки были получены изображения тестовых объектов, показанные на рис. 6, 7. Тестовый объект на рис. 6 представлял собой полоски хрома толщиной около 50 нм на кварцевой подложке, тестовый объект на рис. 7 – ряд отверстий диаметром 100 нм в пленке титана на кварцевой подложке.

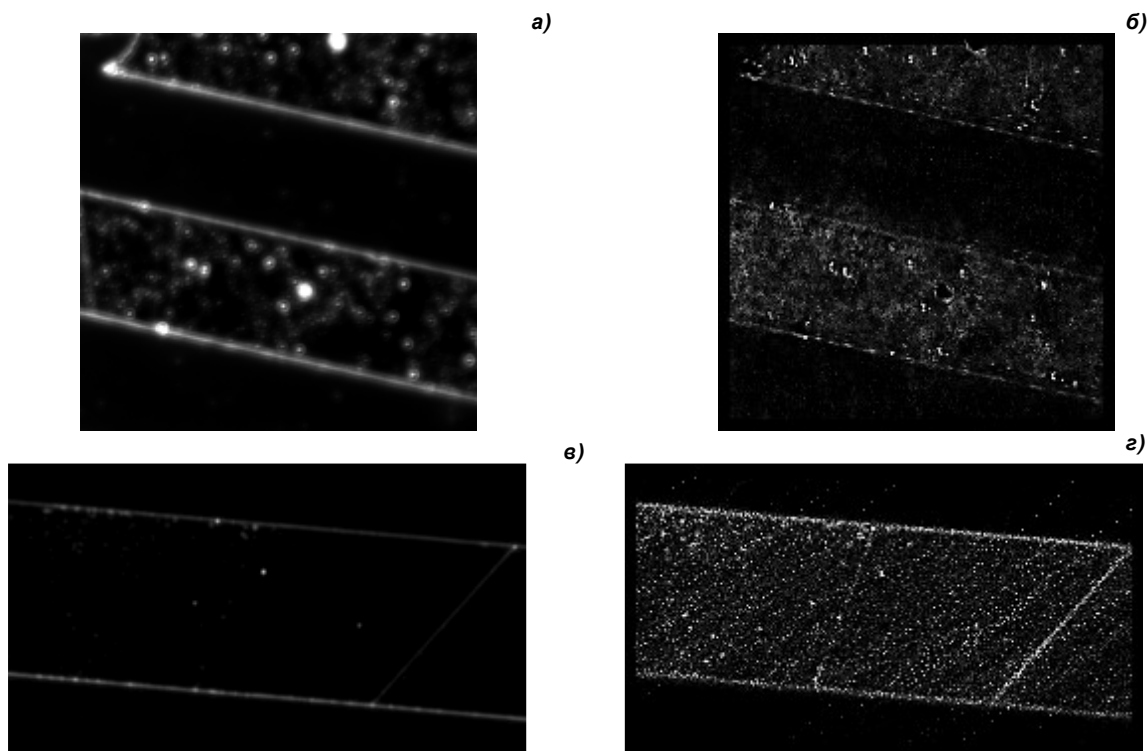
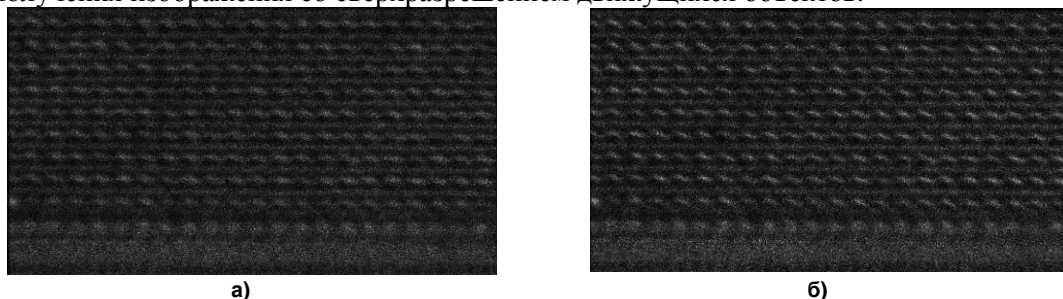


Рис. 6. Изображение объекта, видимое в объектив микроскопа а), в), и построенное по трассировке наночастиц б), г)

Как можно видеть из сравнения фото в) и г), сканирование наночастицами позволяет не только повысить четкость изображения, но и выявить новые детали изображения.



На рис. 7 показано сравнение изображений тестового объекта с дополнительной математической обработкой видеоряда, позволяющей компенсировать дрейф изображения в процессе съемки (рис. 7, а) – без компенсации, рис. 7, б) – с компенсацией). Дело в том, что с учетом высокого разрешения получаемого изображения даже небольшие перемещения объекта под микроскопом приводят к снижению разрешения. В данном случае такая обработка демонстрирует возможность получения изображения со сверхразрешением движущихся объектов.



а) б)  
Рис. 7. Изображение без компенсации дрейфа объекта (а)  
и с дополнительной математической обработкой, учитывающей этот дрейф (б)

Кроме алгоритма определения координаты наночастицы на плоскости с субдифракционной точностью, в данной работе был разработан алгоритм, позволяющий определять положение наночастиц в объеме (все три координаты). Данный подход основан на обработке изображения наночастиц при их наблюдении в микроскоп с введенным астигматизмом. Использовалась схема микроскопа, показанная на рис. 8.

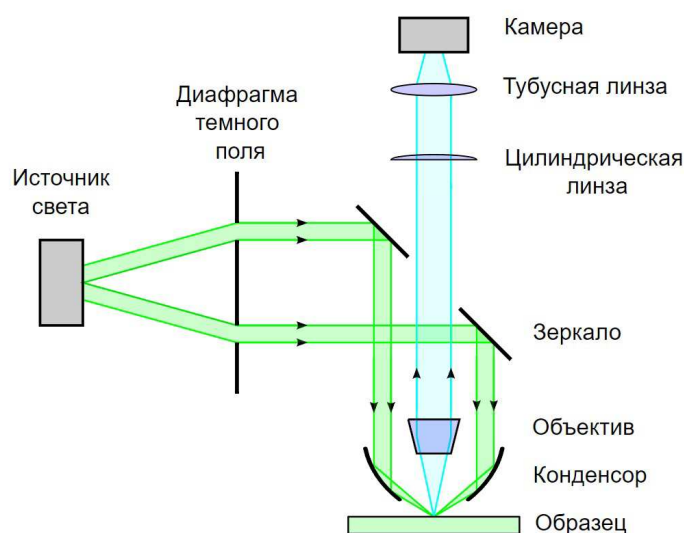


Рис. 8. Схема модифицированного микроскопа для получения астигматического изображения наночастиц. В микроскоп дополнительно помещалась цилиндрическая линза с фокусным расстоянием 2 м непосредственно перед тубусной линзой с фокусным расстоянием 180 мм

Дополнительная цилиндрическая линза, помещенная между объективом и тубусной линзой, приводила к формированию астигматического изображения наночастиц, эксцентриситет которого определялся вертикальным положением наночастицы. Снимок суспензии наночастиц, нанесенной непосредственно на плоскую поверхность (после испарения жидкости) показан на рис. 9.

Определение эксцентриситета изображения наночастицы в каждый момент времени позволило вычислить все три координаты наночастицы. Данный подход позволяет выделить частицы, расположенные в непосредственной близости от поверхности объекта и на основе этого повысить контраст получаемого двумерного изображения. Это обусловлено тем, что таким образом можно учитывать только вклад частиц, находящихся в области ближнего поля.

Кроме того, данный способ позволяет определять трехмерный рельеф поверхности объекта. На данном этапе нами были проведены исследования для случая плоской поверхности (границы допустимой области для частиц). Было проведено сканирование наночастицами при различных наклонах поверхности объекта и вертикальном смещении поверхности объекта.

Результаты расчетов координат частиц показаны на рис. 10.

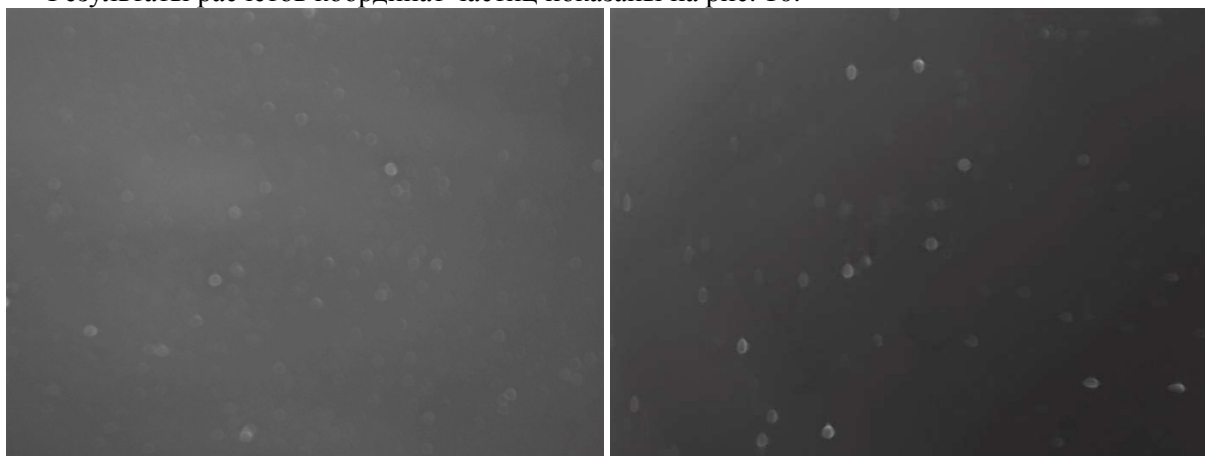


Рис. 9. Наночастицы на плоской поверхности, полученный при астигматизме изображения на микроскопе Olympus BX51 с объективом 20x, NA=0,4 и фокусном расстоянии цилиндрической линзы, равном 2 м. Во втором случае поверхность наклонена относительно вертикальной оси. Левая сторона поверхности расположена ближе, а правая – дальше от объектива. Это приводит к тому, что эксцентриситет изображений частиц отличается в левой и правой стороне снимка

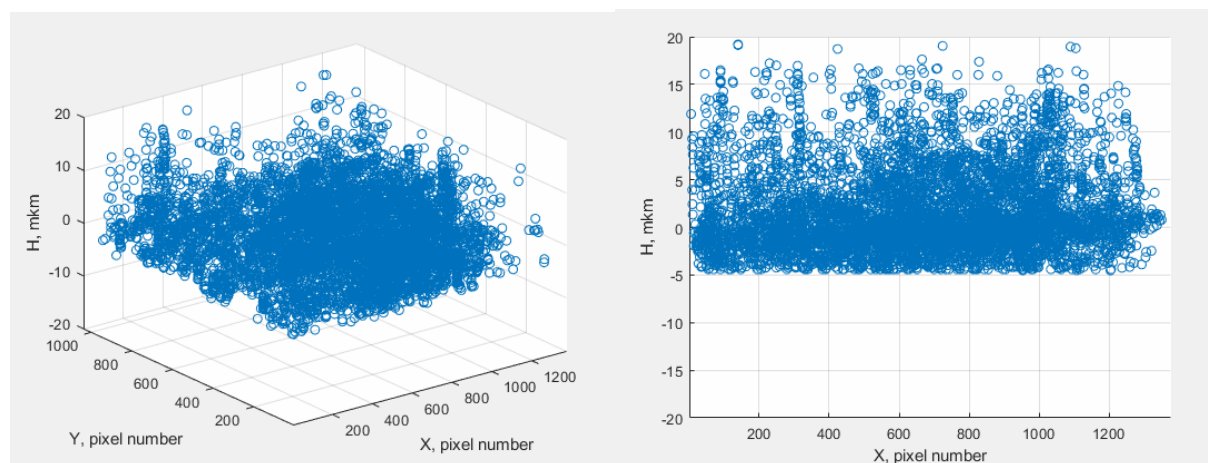


Рис. 10. Распределение координат частиц в объеме суспензии. Вертикальная координата горизонтальной поверхности объекта равна 5 мкм. Количество зарегистрированных частиц равно 6 000

Точность измерений вертикальной координаты определялась по величине разброса при исследовании изображений частиц после испарения жидкости и вертикальном смещении объекта. Точность определения вертикальной координаты составила около 200 нм при диапазоне измерений, равном 30 мкм.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что использование лазерной подсветки и высокочувствительной камеры в методе сканирования ближнего поля при помощи наночастиц позволяет получать двумерные изображения с разрешением около 50 нм и с точностью 200 нм по вертикали определять рельеф объекта. Кроме построения рельефа объекта данная информация может быть использована для дискриминации частиц по высоте или удаленности от поверхности объекта и получения более четкого изображения.

*Исследование поддержано Грантом РФФИ по проекту № 20-42-740008.*

### Литература

1. Abbe, E. Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung / E. Abbe // Archiv für mikroskopische Anatomie. – 1873. – Vol. 9, no. 1. – P. 413–468.
2. Breaking the Diffraction Barrier: Optical Microscopy on a Nanometric Scale / E. Betzig, J.K. Trautman, T.D. Harris *et al.* // Science. – 1991. – Vol. 251, no. 5000. – P. 1468–1470.
3. High-Resolution Near-Field Raman Microscopy of Single-Walled Carbon Nanotubes / A. Hartschuh, E.J. Sanchez, X.S. Xie, L. Novotny // Physical Review Letters. – 2003. – Vol. 90, Iss. 9. – P. 095503.

4. Hell, S.W. Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission: stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy / S.W. Hell, J. Wichmann // *Optics letters*. – 1994. – Vol. 19, no. 11. – P. 780–782.
5. Пат. 2305270 Российская Федерация, Способ флуоресцентной наноскопии / А.А. Климов. – № 2005115052; заявл. 18.05.2005; опубл. 27.11.2006.
6. Hess, S.T. Ultra-High Resolution Imaging by Fluorescence Photoactivation Localization Microscopy / S.T. Hess, T.P.K. Girirajan, M.D. Mason // *Biophysical journal*. – 2006. – Vol. 91, Iss. 11. – P. 4258–4272.
7. Rust, M.J. Sub-Diffraction-Limit Imaging by Stochastic Optical Reconstruction Microscopy (STORM) / M.J. Rust, M. Bates, X. Zhuang // *Nature methods*. – 2006. – Vol. 3, no. 10. – P. 793–796.
8. Gustafsson, M.G.L. Surpassing the Lateral Resolution Limit by a Factor of Two using Structured Illumination Microscopy / M.G.L. Gustafsson // *Journal of microscopy*. – 2000. – Vol. 198, no. 2. – P. 82–87.
9. US Patent No. 3013467, 1957 / S. Namiki, Y. Ikegaya // *Biological & pharmaceutical bulletin*. – 2009. – Vol. 32, no. 1. – P. 1–9.
10. Gustafsson M.G.L. Nonlinear Structured-Illumination Microscopy: Wide-Field Fluorescence Imaging with Theoretically Unlimited Resolution / M.G.L. Gustafsson // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2005. – Vol. 102, no. 37. – P. 13081–13086.
11. Jacob, Z. Optical Hyperlens: Far-Field Imaging Beyond the Diffraction Limit / Z. Jacob, L.V. Alekseyev, E. Narimanov // *Optics express*. – 2006. – Vol. 14, no. 18. – P. 8247–8256.
12. Near-field Focusing and Magnification Through Self-Assembled Nanoscale Spherical Lenses / J. Lee, B. Hong, W. Kim *et al.* // *Nature*. – 2009. – Vol. 460, no. 7254. – P. 498–501.
13. Optical Virtual Imaging at 50 nm Lateral Resolution with a White-Light Nanoscope / Z. Wang, W. Guo, L. Li // *Nature communication*. – 2011. – Vol. 2. – Article number: 218.
14. Fast, Three-Dimensional Super-Resolution Imaging of Live Cells / S.A. Jones, S.H. Shim, J. He, X. Zhuang // *Nature methods*. – 2011. – Vol. 8, no. 6. – P. 499–508.
15. Small A., Stahlheber S. Fluorophore Localization Algorithms for Super-Resolution Microscopy // *Nature methods*. – 2014. – Vol. 11, no. 3. – P. 267–279.
16. rapidSTORM: Accurate, Fast Open-Source Software for Localization Microscopy / S. Wolter, A. Löschberger, T. Holm *et al.* // *Nature methods*. – 2012. – Vol. 9, no. 11. – P. 1040–1041.
17. Elucidation of Synaptonemal Complex Organization by Super-Resolution Imaging with Isotropic Resolution / K. Schücker, T. Holm, C. Franke *et al.* // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2015. – Vol. 112, no. 7. – P. 2029–2033.
18. Minimal Tags for Rapid Dual-Color Live-Cell Labeling and Super-Resolution Microscopy / Nikić I., Plass T., Schraidt O. *et al.* // *Angewandte Chemie international edition*. – 2014. – Vol. 53, no. 8. – P. 2245–2249.
19. Mapping Local Field Enhancements at Nanostructured Metal Surfaces by Second-Harmonic Generation Induced in the Near Field / I. Nikić, T. Plass, O. Schraidt *et al.* // *Journal of microscopy*. – 2008. – Vol. 229, no. 2. – P. 233–239.
20. Nonlinear Optical Imaging of Single Plasmonic Nanoparticles with 30 nm Resolution / A. Horneber, K. Braun, J. Rogalski *et al.* // *Physical Chemistry Chemical Physics*. – 2015. – Vol. 17, no. 33. – P. 21288–21293.
21. Willets, K.A. Super-Resolution Imaging of SERS Hot Spots / K.A. Willets // *Chemical Society Reviews*. – 2014. – Vol. 43, no. 11. – P. 3854–3864.
22. Label-Free Nanometer-Resolution Imaging of Biological Architectures Through Surface Enhanced Raman Scattering / S. Ayas, G. Cinar, A.D. Ozkan *et al.* // *Scientific reports*. – 2013. – Vol. 3, no. 1. – P. 1–8.
23. Пат. 2,319,948 Российская Федерация. Способ получения изображения повышенной разрешающей способности / Ю.В. Микляев, С.А. Ассельборн; U.S. Patent No. 2009,0116,024 (Priority date 7 April 2006).
24. Cheezum, M.K. Quantitative Comparison of Algorithms for Tracking Single Fluorescent Particles / M.K. Cheezum, W.F. Walker, W.H. Guilford // *Biophysical Journal*. – 2001. – Vol. 81. – P. 2378–2388.

Поступила в редакцию 20 апреля 2022 г.

### Сведения об авторах

Ассельборн Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория сенсорики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: aborn@mail.ru, asselbornsa@susu.ru.

Зацепин Евгений Сергеевич – лаборант-исследователь, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Исаков Денис Сергеевич – научный сотрудник, лаборатория сенсорики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Герасимов Александр Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Оптоинформатика», старший научный сотрудник лаборатории сенсорики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Пихуля Денис Григорьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Оптоинформатика», старший научный сотрудник лаборатории сенсорики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: pikhuliadg@susu.ru.

Микляев Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Физика наноразмерных систем», ведущий научный сотрудник, лаборатория сенсорики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: mikliaevyv@susu.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2022, vol. 14, no. 3, pp. 68–78

---

DOI: 10.14529/mmph220308

## ILLUMINATION SYSTEM FOR SUB-DIFFRACTION RESOLUTION MICROSCOPY

**S.A. Asselborn, E.S. Zatsepin, D.S. Isakov, A.M. Gerasimov, D.G. Pikhulya, Yu.V. Miklyaev**  
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*  
E-mail: aborn@mail.ru

**Abstract.** Illumination scheme for superresolution microscopy is developed. The scheme accomplishes dark field illumination with a laser light source including spatial coherence suppression. The scheme allows to observe nanoparticles with a size smaller than 50 nm. This is necessary to get higher resolution in the previously proposed method of superresolution microscopy (Near field Optical Random Microscopy – NORM). This method is based on real-time video processing of a nanoparticles Brownian motion those are located near the object surface. The method of vertical coordinate measurement is demonstrated. This method is based on astigmatic nanoparticle imaging. Three-dimensional distributions of suspended nanoparticles are obtained. Vertical resolution better than 200 nm and lateral resolution better than 100 nm are demonstrated.

**Keywords:** *microscopy; nanoscopy; near-field microscopy; super-resolution; nanoparticles; particle trajectory analysis; video processing.*

### References

1. Abbe E. Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung. *Archiv für mikroskopische Anatomie*, 1873, Vol. 9, no. 1, pp. 413–468. DOI: 10.1007/BF02956173
2. Betzig E., Trautman J.K., Harris T.D., Weiner J.S., Kostelak R.L. Breaking the Diffraction Barrier: Optical Microscopy on a Nanometric Scale. *Science*, 1991, Vol. 251, no. 5000, pp. 1468–1470. DOI: 10.1126/science.251.5000.1468
3. Hartschuh A., Sanchez E.J., Xie X.S., Novotny L. High-Resolution Near-Field Raman Microscopy of Single-Walled Carbon Nanotubes. *Physical Review Letters*, 2003, Vol. 90, Iss. 9, p. 095503. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.095503
4. Hell S.W., Wichmann J. Breaking the Diffraction Resolution Limit by Stimulated Emission: Stimulated-Emission-Depletion Fluorescence Microscopy. *Optics letters*, 1994, Vol. 19, no. 11, pp. 780–782. DOI: 10.1364/OL.19.000780

5. Klimov A.A. *Sposob fluorestsentnoy nanoskopii* (The Method of Fluorescent Nanoscopy) pat. 2305270 Ros. Federatsiya. no. 2005115052; zayavl. 18.05.2005; opubl. 27.11.2006. (pat. 2305270 Russian Federation. No. 2005115052; declared on 05/18/2005; published on 11/27/2006).
6. Hess S.T., Girirajan T.P.K., Mason M.D. Ultra-High Resolution Imaging by Fluorescence Photoactivation Localization Microscopy. *Biophysical Journal*, 2006, Vol. 91, Iss. 11, pp. 4258–4272. DOI: 10.1529/biophysj.106.091116
7. Rust M.J., Bates M., Zhuang X. Sub-Diffraction-Limit Imaging by Stochastic Optical Reconstruction microscopy (STORM). *Nature methods*, 2006, Vol. 3, no. 10, pp. 793–796. DOI: 10.1038/nmeth929
8. Gustafsson M.G.L. Surpassing the Lateral Resolution Limit by a Factor of Two using Structured Illumination Microscopy. *Journal of Microscopy*, 2000, Vol. 198, no. 2, pp. 82–87. DOI: 10.1046/j.1365-2818.2000.00710.x.
9. Namiki S., Ikegaya Y. US Patent No. 3013467 US Patent No. 3013467, 1957. *Biological & pharmaceutical bulletin*, 2009, Vol. 32, no. 1, pp. 1–9.
10. Gustafsson M.G.L. Nonlinear Structured-Illumination Microscopy: Wide-Field Fluorescence Imaging with Theoretically Unlimited Resolution. *Proc. National Academy of Sciences*, 2005, Vol. 102, no. 37, pp. 13081–13086. DOI: 10.1073/pnas.0406877102
11. Jacob Z., Alekseyev L.V., Narimanov E. Optical Hyperlens: Far-Field Imaging Beyond the Diffraction Limit. *Optics express*, 2006, Vol. 14, no. 18, pp. 8247–8256. DOI: 10.1364/oe.14.008247
12. Lee J., Hong B., Kim W. *et al.* Near-Field Focusing and Magnification through Self-Assembled Nanoscale Spherical Lenses. *Nature*, 2009, Vol. 460, no. 7254, pp. 498–501. DOI: 10.1038/nature08173
13. Wang Z., Guo W., Li L., Luk'yanchuk B., Khan A., Liu Z., Chen Z., Hong M. Optical Virtual Imaging at 50 nm Lateral Resolution with a White-Light Nanoscope. *Nat Commun.* 2011, Vol. 2, Article number: 218. DOI: 10.1038/ncomms1211
14. Jones S.A., Shim S.H., He J., Zhuang X. Fast, Three-Dimensional Super-Resolution Imaging of Live Cells. *Nature methods*, 2011, Vol. 8, no. 6, pp. 499–508. DOI: 10.1038/nmeth.1605
15. Small A., Stahlheber S. Fluorophore Localization Algorithms for Super-Resolution Microscopy. *Nat Methods*, 2014, Vol. 11, no. 3, pp. 267–279. DOI: 10.1038/nmeth.2844
16. Wolter S., Löschberger A., Holm T. *et al.* rapidSTORM: Accurate, Fast Open-Source Software for Localization Microscopy. *Nat Methods*, 2012, Vol. 9, no. 11, 1040–1041. DOI: 10.1038/nmeth.2224
17. Schücker K., Holm T., Franke C., Sauer M., Benavente R. Elucidation of Synaptonemal Complex Organization by Super-Resolution Imaging with Isotropic Resolution. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2015, Vol. 112, no. 7, pp. 2029–2033. DOI: 10.1073/pnas.1414814112
18. Nikić I., Plass T., Schraidt O., Szymański J., Briggs J.A., Schultz C., Lemke E.A. Minimal Tags for Rapid Dual-Color Live-Cell Labeling and Super-Resolution Microscopy. *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.*, 2014, Vol. 53, no. 8, pp. 2245–2249. DOI: 10.1002/anie.201309847
19. Celebrano M., Zavelani-Rossi M., Polli D., Cerullo G., Biagioni P., Finazzi M., Duò L., Labardi M., Allegrini M., Grand J., Adam P.M. Mapping Local Field Enhancements at Nanostructured Metal Surfaces by Second-Harmonic Generation Induced in the Near Field. *J. Microsc.*, 2008, Vol. 229(Pt 2), pp. 233–239. DOI: 10.1111/j.1365-2818.2008.01892.x
20. Horneber A., Braun K., Rogalski J., Leiderer P., Meixner A.J., Zhang D. Nonlinear Optical Imaging of Single Plasmonic Nanoparticles with 30 nm Resolution. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2015, Vol. 17, no. 33, pp. 21288–21293. DOI: 10.1039/c4cp05342g
21. Willets K.A. Super-Resolution Imaging of SERS Hot Spots. *Chemical Society Reviews*, 2014, Vol. 43, no. 11, pp. 3854–3864. DOI: 10.1039/c3cs60334b
22. Ayas S., Cinar G., Ozkan A.D., Soran Z., Ekiz O., Kocaay D., Tomak A., Toren P., Kaya Y., Tunc I., Zareie H., Tekinay T., Tekinay A.B., Guler M.O., Dana A. Label-Free Nanometer-Resolution Imaging of Biological Architectures through Surface Enhanced Raman Scattering. *Scientific reports*, 2013, Vol. 3, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1038/srep02624
23. Mikliaev J.V., Asselborn S.A. *A Method for Obtaining an Image of Increased Resolution*. RU Patent No. 2,319,948; U.S. Patent No. 2009,0116,024 (Priority date 7 April 2006).
24. Cheezum M.K., Walker W.F., Guilford W.H. Quantitative Comparison of Algorithms for Tracking Single Fluorescent Particles. *Biophysical Journal*, 2001, Vol.81, pp. 2378–2388.

Received April 20, 2022

### Information about the authors

Asselborn Sergey Aleksandrovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Laboratory of Sensorics, e-mail: aborn@mail.ru, asselbornsa@susu.ru.

Zatsepin Evgeniy Sergeevich is Laboratory Assistant-Researcher, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Isakov Denis Sergeevich is Researcher, Laboratory of Sensorics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Gerasimov Aleksandr Mikhaylovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of "Optoinformatics", Senior Staff Scientist, Laboratory of Sensorics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Pikhulya Denis Grigor'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of "Optoinformatics", Senior Staff Scientist, Laboratory of Sensorics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: pikhuliadg@susu.ru.

Miklyaev Yuriy Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Physics of Nanoscale Systems, Leading Researcher, Laboratory of Sensorics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: mikliaevyv@susu.ru.

# ПРИМЕНЕНИЕ СКАНИРУЮЩЕЙ ТУННЕЛЬНОЙ МИКРОСКОПИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ ГРАНИЦ ЗЕРЕН В НИКЕЛЕ, ПОЛУЧЕННОМ КРУЧЕНИЕМ ПОД ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ

**Е.В. Осинников, И.В. Блинов, А.Ю. Истомина, В.В. Попов**

*Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, г. Екатеринбург,*

*Российская Федерация*

*E-mail: osinnikov@imp.uran.ru*

**Аннотация.** Цель работы состоит в оценке относительной свободной энергии границ зерен никеля, продеформированного методом кручения под высоким давлением (КВД), с помощью сканирующей туннельной микроскопии. В процессе работы проведены следующие исследования:

1) Отработана методика пробоподготовки образцов Ni, подвергнутых интенсивной пластической деформации (ИПД) методом КВД, для последующих исследований методом туннельной сканирующей микроскопии, обеспечивающая усредненное значение среднеквадратичной шероховатости поверхности около 2 нм.

2) С помощью сканирующей туннельной микроскопии получены изображения структуры поверхности никеля, которые обработаны с помощью программы-приложения Gwyddion. В результате рассчитаны профили границ зерен, на основании которых вычислялись значения двугранных углов у дна канавок травления и рассчитывались относительные энергии границ зерен.

3) Установлено, что после деформации КВД средняя относительная энергия границ зерен значительно превышает относительную энергию границ зерен крупнозернистого никеля с границами зерен рекристаллизационного происхождения. Таким образом, в результате КВД в образцах формируются неравновесные границы зерен.

4) Показано, что с увеличением степени деформации КВД происходит увеличение средней относительной энергии границ зерен, что свидетельствует об увеличении степени их неравновесности.

5) Продемонстрировано, что ИПД методом КВД позволяет достигнуть более высокого уровня относительной энергии границ зерен, чем деформация методом равноканального углового прессования (РКУП).

*Ключевые слова:* никель; интенсивная пластическая деформация; сканирующая туннельная микроскопия; относительная свободная энергия.

## Введение

В последние десятилетия были разработаны различные методы интенсивной пластической деформации (ИПД) для изготовления ультрамелкозернистых (УМЗ) материалов [1]. Эти материалы обладают очень высокой плотностью границ зерен, которые играют важную роль в достижении новых свойств. В работе [2] было высказано предположение, что ГЗ в УМЗ-материалах, производимых ИПД, находятся в сильно «неравновесном» метастабильном состоянии. По мнению авторов работы [3], эти «неравновесные» ГЗ отвечают за улучшенные механические свойства материалов, обработанных интенсивной пластической деформацией, которые превышают свойства, ожидаемые только на основе уменьшения размеров зерен.

Согласно [4, 5], эти «неравновесные» границы характеризуются тремя основными особенностями, а именно избыточной энергией границ зерен, присутствием дальнедействующих упругих напряжений и повышенным свободным объемом. Еще одним свойством неравновесных границ зерен является сверхбыстрая зернограницная диффузия [6].

Обнаружить особое деформационно-модифицированное состояние границ зерен позволяют различные методы: электронная микроскопия высокого разрешения [7], эмиссионная ядерная гамма-резонансная (мессбауэровская) спектроскопия [8], измерение параметров зернограницной

диффузии [9]. Однако, желательно характеризовать состояние границ зерен не только качественно, но и количественно. Наиболее прямой метод количественной оценки состояния границ – это определение их энергии.

В работах [10, 11] была исследована зернограницная диффузия в крупнозернистом поликристаллическом никеле и УМЗ никеле, полученном ИПД методом кручения под высоким давлением. Было показано, что коэффициент зернограницной диффузии в УМЗ никеле, подвергнутом ИПД, на несколько порядков выше, чем в крупнозернистом образце с границами зерен рекристаллизационного происхождения. Это свидетельствует о том, что в материале, подвергнутом ИПД, присутствуют «неравновесные» границы зерен.

В настоящей работе была поставлена задача оценить относительную энергию границ зерен в никеле, продеформированном кручением под высоким давлением.

### Материал и методика

Исследования проводились на Ni номинальной чистоты 99,98 %. Содержание примесей в образце приведено в таблице 1.

Таблица 1

Содержание примесей в Ni образце											
Элемент примеси	Al	Co	Cr	Cu	Fe	Mn	Mg	P	Si	Ti	V
Содержание, 10 <sup>-4</sup> % вес	61	35	<3	17	4	<1	13	<30	10	7	7

Цилиндрические прутки никеля диаметром 10 мм были нарезаны на тонкие диски толщиной 1,5 мм. Деформирование проводилось в наковальнях Бриджмена при комнатной температуре, на 0,5 и 5 оборотов при давлении 4 ГПа, с угловой скоростью 0,3 об/мин.

Наиболее широко используемым методом определения энергии границ зерен является метод измерения двугранного угла канавки термического травления. Канавки травления в месте выхода границ зерен на поверхность получают путем нагрева металла в вакууме или соответствующей атмосфере.

В этом случае относительная энергия границы зерна может быть рассчитана по формуле:

$$\gamma_{rel} = \frac{\gamma_{gb}}{\gamma_s} = 2 \cos \frac{\Psi}{2}, \quad (1)$$

где  $\gamma_{rel}$ ,  $\gamma_{gb}$  и  $\gamma_s$  – безразмерная энергия границы зерна, энергия границы зерна и энергия свободной поверхности соответственно,  $\Psi$  – угол у дна канавки.

Этот метод дает хорошие результаты для измерения относительной энергии равновесных границ (см. например, [12, 13]).

Есть примеры использования этого метода для характеристики состояния деформационно-модифицированных (неравновесных) границ зерен с использованием туннельного или атомно-силового микроскопов для определения углов у дна канавок в ультрамелкозернистых материалах. Так, в работе [14] было показано, что границы зерен в УМЗ меди после РКУП находятся в сильно неравновесном состоянии и не релаксируют полностью при температуре отжига 400 °С.

Однако, нужно отметить, что при температурах, необходимых для образования канавок при использовании термического травления, возможно протекание процессов возврата в границах зерен, в результате чего их состояние может значительно измениться. В то же время известно, что скорость травления границ в зеренно-субзеренной структуре металлов зависит от степени их неравновесности [15]. Поэтому получила распространение методика измерения относительной энергии границ зерен путем измерения двугранного угла в канавках, сформированных в результате химического травления [16, 17]. Сопоставление значений относительных энергий равновесных границ зерен в меди, полученных измерением углов в канавках термического [14] и химического [17] травления показывает, что они достаточно близки: в случае термического травления относительная энергия границ зерен составляет 0,24, а в случае химического травления – 0,19. Таким образом, можно заключить, что определение относительных энергий границ зерен с использованием канавок химического травления достаточно корректно.

В настоящей работе относительная энергия границ зерен оценивалась на образцах с канавками, полученными химическим травлением.



В данной работе была отработана методика пробоподготовки образцов для сканирующей туннельной микроскопии. Подготовка образцов включает в себя следующие этапы.

1. Шлифовка образца на наждачной бумаге различной зернистости.

2. Механическая полировка с использованием алмазной пасты 1,0 мкм для создания зеркальной поверхности. Контроль чистоты поверхности проводился на микроскопе Carlzeiss Jena при увеличении  $\times 80$ .

3. Электролитическая полировка образца в растворе, состав которого приведен в таблице 2, для формирования более гладкого рельефа после механической полировки. Для оценки качества электрополировки образцов было проведено исследование состояния поверхности с помощью сканирующего мультимикроскопа СММ-2000 и оценена среднеквадратичная шероховатость, которая составила около 2 нм, что свидетельствует о гладкой поверхности исследуемых образцов

4. химическое травление границ зерен в 11 % растворе персульфата аммония  $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_8$  для выявления границ зерен.

Состояние границ зерен исследовали с помощью сканирующего мультимикроскопа, работающего в режиме сканирующего туннельного микроскопа (СТМ). Съемка проводилась на середине радиуса исследуемых образцов. Обработка изображений, полученных с помощью СТМ, проводилась в приложении Gwyddion путем построения линий перпендикулярно границам зерен. В результате был получен профиль границы зерна, совместимый с программой Origin, на основании которого вычислялось значение двугранного угла у дна канавки травления. Пример такого профиля приведен на рис. 1.

Затем с использованием выражения (1) рассчитывалась относительная энергия границы зерна.

### Результаты и обсуждение

Изображения зеренной структуры никеля после КВД на 5 оборотов показаны на рис. 2.

На рис. 3 приведены гистограммы относительного распределения границ зерен для никеля, прокрученного на 0,5 (а) и 5 (б) оборотов.

Средняя относительная энергия границ зерен в никеле, после КВД составляет 0,47 и 0,88 при 0,5 и 5 оборотов, соответственно. С увеличением степени деформации КВД с 0,5 до 5 оборотов относительная энергия границ зерен увеличивается. Согласно [16] средняя относительная энергия границ зерен в крупнозернистом поликристаллическом никеле с границами зерен рекристаллизационного происхождения равна 0,3, а энергия границ зерен после ИПД методом равноканального углового прессования по маршруту  $V_c$  (4 прохода) составляет 0,57. Это больше энергии границ зерен при КВД на 0,5 оборота, но меньше, чем в случае деформации на 5 оборотов. Очевидно, что после деформации КВД на 0,5 оборота степень неравновесности границ зерен меньше, чем в случае деформации методом равноканального прессования на 4 прохода. В то же время после деформации КВД на 5 оборотов удается достигнуть большей степени неравновесности границ зерен, чем после равноканального углового прессования.

Таким образом, ИПД методом кручения под высоким давлением приводит к формированию границ зерен с повышенной относительной энергией, что позволяет сделать вывод об их неравновесном характере.

### Заключение

Отработана методика пробоподготовки образцов Ni, подвергнутых ИПД, для последующих исследований методом туннельной сканирующей микроскопии. С помощью сканирующей

Таблица 2

Состав электролита  
для электрополировки никеля

Компонент	Концентрация компонента, г/л
Серная кислота $\text{H}_2\text{SO}_4$	1200
Ортофосфорная кислота $\text{H}_3\text{PO}_4$	120 – 150
Лимонная кислота	15 – 20

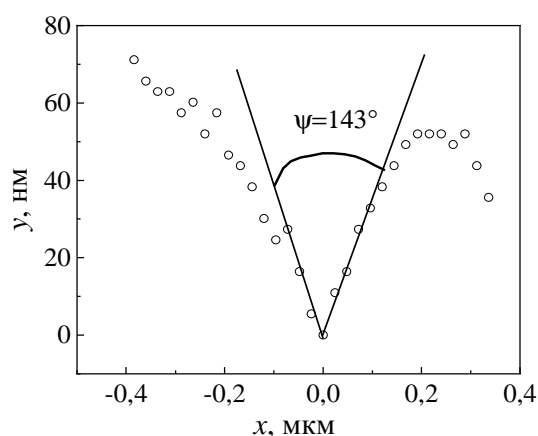


Рис. 1. Пример профиля для расчета двугранного угла

туннельной микроскопии проведена оценка относительной энергии границ зерен в никеле, подвергнутому кручению под высоким давлением. Показано, что после деформации КВД, средняя относительная энергия границ зерен значительно превышает относительную энергию границ зерен в крупнозернистом никеле. Это позволяет сделать вывод о формировании в процессе КВД неравновесных границ зерен. Показано, что с увеличением степени деформации КВД происходит увеличение средней относительной энергии границ зерен, что свидетельствует об увеличении степени их неравновесности. Установлено, что ИПД методом КВД позволяет достигнуть более высокого уровня относительной энергии границ зерен, чем деформация методом РКУП.

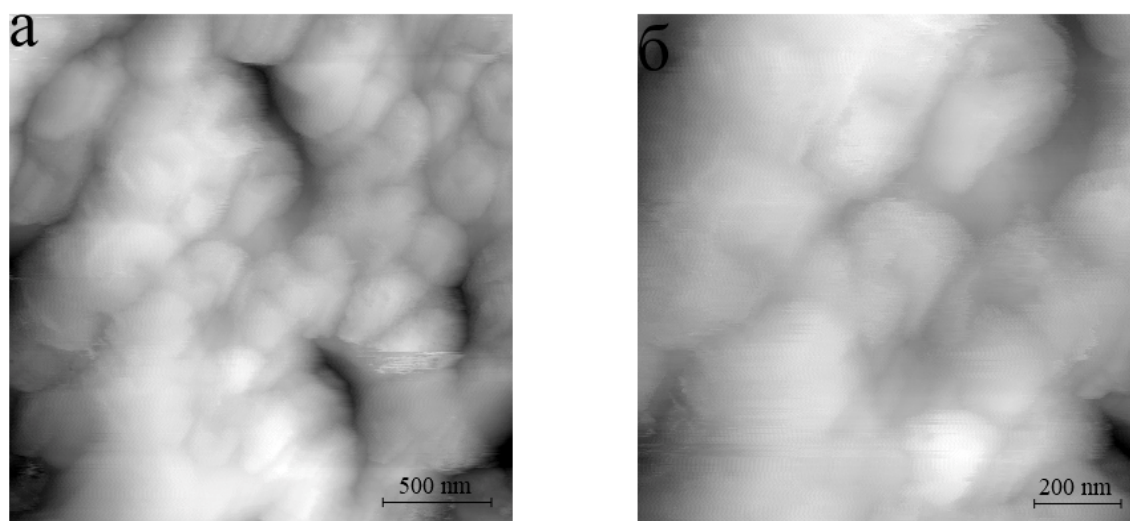


Рис. 2. СТМ-изображение структуры никеля, подвергнутого кручению на 5 оборотов на разных масштабных уровнях. Размер приведенных СТМ-изображений: а – 2500 × 2500 нм; б – 1200 × 1200 нм

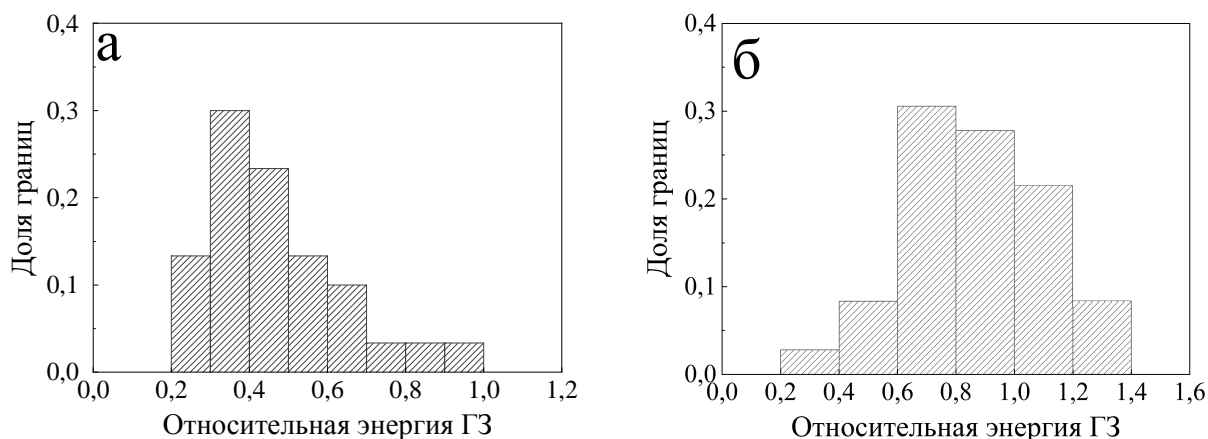


Рис. 3. Распределение относительной энергии в никеле, подвергнутом КВД на 0.5 об (а) и 5 об (б)

### Благодарности

Авторы выражают благодарность за помощь в подготовке образцов м.н.с лаборатории диффузии Р.М. Фалахутнидову и ведущему технологу лаборатории диффузии Л.И. Мамаевой.

Работа выполнена в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Функция» номер госрегистрации 122021000035-6) при частичной поддержке РФФИ, проект № 20-32-90100.

### Литература

1. Producing Bulk Ultrafine-Grained Materials by Severe Plastic Deformation / R.Z. Valiev, Y. Estrin, Z. Horita *et al.* // JOM. – 2006. – Vol. 58. – P. 33–39.
2. Valiev, R.Z. Grain boundary structure and properties under external influences / R.Z. Valiev, V.Yu. Gertsman, O.A. Kaibyshev // Phys. Stat. Sol. (a). – 1986. – Vol. 97, Iss. 1. – P. 11–56.

3. Valiev, R.Z. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation. / R.Z. Valiev, R.K. Islamgaliev, I.V. Alexandrov // *Progress in Materials Science*. – 2000. – Vol. 45, no. 2. – P. 103–189.
4. Nazarov, A.A. On the structure, stress fields and energy of nonequilibrium grain boundaries. / A.A. Nazarov, A.E. Romanov, R.Z. Valiev // *Acta Metall. Mater.* – 1993. – Vol. 41, no. 4. – P. 1033–1040.
5. Nazarov, A.A. Review: Nonequilibrium Grain Boundaries in Bulk Nanostructured Metals and their Recovery under the Influences of Heating and Cyclic Deformation / A.A. Nazarov // *Letters on Materials*. – 2018. – Vol. 8, no. 3. – P. 372–381.
6. Effect of Heat Treatment on Diffusion, Internal Friction, Microstructure and Mechanical Properties of Ultra-Fine-Grained Nickel Severely Deformed by Equal-Channel Angular Pressing / Divinski S.V., Reglitz G., Golovin I.S. *et al.* // *Acta Mater.* – 2015. – Vol. 82. – P. 11–21.
7. Observations of Grain Boundary Structure in Submicrometer-Grained Cu and Ni Using High-Resolution Electron Microscopy / Z. Horita, D.J. Smith, M. Nemoto *et al.* // *Journal of Materials Research*. – 1998. – Vol. 13, no 2. – P. 446–450.
8. Popov, V.V. Mossbauer Spectroscopy of Interfaces in Metals. / V.V. Popov // *The Physics of Metals and Metallography*. – 2012. – Vol. 113, no. 13. – P. 1257–1289.
9. Wilde, G. Grain Boundaries and Diffusion Phenomena in Severely Deformed Materials / G. Wilde, S. Divinski // *Mater. Trans.* – 2019. – Vol. 60, Iss. 7. – P. 1302–1315.
10. Grain boundary diffusion of  $^{57}\text{Co}$  in nickel / V.V. Popov, E.V. Osinnikov, S.A. Murzinova *et al.* // *Journal of phase equilibria and diffusion*. – 2020. – Vol. 41, no. 2. – pp. 132–137.
11. Зернограничная диффузия  $^{57}\text{Co}$  в ультрамелкозернистом никеле, полученном интенсивной пластической деформацией / Е.В. Осинников, С.А. Мурзинова, А.Ю. Истомина и др. // *Физика металлов и металловедение*. – 2021. – Т. 122, № 10. – С. 1049–1053.
12. Amouyal, Y. Correlation between Grain Boundary Energy and Geometry in Ni-rich NiAl / Y. Amouyal, E. Rabkin, Y. Mishin // *Acta Materialia*. – 2005. – Vol. 53, Iss. 14. – P. 3795–3805.
13. Measurement of the grain boundary energy of commercially pure grade 2 titanium at high temperature / C.C. Camilo, E.C. de Souza, P.L. Di Lorenzo, J.M.D. de Almeida Rollo // *Braz. J. Biom. Eng.* – 2011. – Vol. 27, no. 3. – P. 175–181.
14. Amouyal, Y. A Scanning Force Microscopy Study of Grain Boundary Energy in Copper Subjected to Equal Channel Angular Pressing / Y. Amouyal, E. Rabkin // *Acta Materialia*. – 2007. – Vol. 55, Iss. 20. – P. 6681–6689.
15. Салтыков, С.А. Стереометрическая металлография / С.А. Салтыков. – М.: Металлургия, 1976. – 271 с.
16. Применение сканирующей туннельной микроскопии для характеристики зеренно-субзеренной структуры СМК никеля после низкотемпературного отжига / П.В. Кузнецов, И.В. Петракова, Т.В. Рахматулина и др. // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2012. – Т. 78, № 4. – С. 26–34
17. Энергия внутренних границ раздела как характеристика эволюции структуры ультрамелкозернистых меди и никеля после отжига / П.В. Кузнецов, Т.В. Рахматулина, И.В. Беляева, А.В. Корзников // *Физика металлов и металловедение*. – 2017. – Т. 118, № 3. – С. 255–262.

Поступила в редакцию 14 апреля 2022 г.

#### Сведения об авторах

Осинников Егор Вячеславович – младший научный сотрудник, лаборатория диффузии, Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: osinnikov@imp.uran.ru.

Блинов Илья Викторович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория диффузии, Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: blinov@imp.uran.ru.

Истомина Анастасия Юрьевна – младший научный сотрудник, лаборатория диффузии, Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: zhuk.1111@mail.ru.

Попов Владимир Владимирович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, лаборатория диффузии, Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: vpopov@imp.uran.ru.

DOI: 10.14529/mmph220309

## **APPLICATION OF SCANNING TUNNELING MICROSCOPY FOR EVALUATION OF THE NON-EQUILIBRIUM STATE OF GRAIN BOUNDARIES IN NICKEL SUBJECTED TO HIGH PRESSURE TORSION**

**E. V. Osinnikov, I.V. Blinov, A.Yu. Istomina, V.V. Popov**

*M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation*

*E-mail: osinnikov@imp.uran.ru*

Abstract. The goal of the study is to estimate the relative free energy of grain boundaries in nickel deformed by high-pressure torsion (HPT) using scanning tunneling microscopy. In the process of work, the following studies have been carried out.

The technique has been developed for sample preparation of Ni samples subjected to severe plastic deformation (SPD) by the HPT method for subsequent studies by scanning tunneling microscopy, which provides an average value of the root-mean-square surface roughness of approximately 2 nm. Using scanning tunneling microscopy, images of the nickel surface structure have been obtained, which have been processed using the Gwyddion application program.

As a result, the grain boundary profiles have been calculated, based on which the values of the dihedral angles at the bottom of the etching grooves have been calculated and the relative energies of the grain boundaries have been calculated.

It has been established that after HPT deformation, the average relative energy of grain boundaries significantly exceeds the relative energy of grain boundaries of coarse-grained nickel with grain boundaries of recrystallization origin. Thus, because of HPT, non-equilibrium grain boundaries are formed in the samples.

It has been shown that with an increase in the degree of HPT deformation, an increase in the average relative energy of grain boundaries occurs, which indicates an increase in the degree of their non-equilibrium.

It has been demonstrated that SPD by the HPT method makes it possible to achieve a higher level of relative energy of grain boundaries than deformation by the equal-channel angular pressing (ECAP) method.

*Keywords: Nickel; severe plastic deformation; scanning tunneling microscopy; relative free energy.*

### **References**

1. Valiev R.Z., Estrin Y., Horita Z., Langdon T.G., Zehetbauer M.J., Zhu Y.T. Producing bulk ultrafine-grained materials by severe plastic deformation. *JOM*, 2006, Vol. 58, pp. 33–39. DOI: 10.1007/s11837-006-0213-7
2. Valiev R.Z., Gertsman V.Yu., Kaibyshev O.A. Grain Boundary Structure and Properties under External Influences. *Phys. Stat. Sol. (a)*, 1986, Vol. 97, Iss. 1, pp. 11–56. DOI: 10.1002/pssa.2210970102
3. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation. *Progr. Mater. Sci.*, 2000, Vol. 45, no. 2, pp. 103–189. DOI: 10.1016/S0079-6425(99)00007-9
4. Nazarov A.A., Romanov A.E., Valiev R.Z. On the structure, stress fields and energy of nonequilibrium grain boundaries. *Acta Metall. Mater.*, 1993, Vol. 41, no. 4, pp. 1033–1040. DOI: 10.1016/0956-7151(93)90152-I

5. Nazarov, A.A. Nonequilibrium Grain Boundaries in Bulk Nanostructured Metals and their Recovery under the Influences of Heating and Cyclic Deformation. *Letters on Materials*, 2018, Vol. 8, no. 3, pp. 372–381. DOI: 10.22226/2410-3535-2018-3-372-381
6. Divinski S.V., Reglitz G., Golovin I.S., Peterlechner M., Lapovok R., Estrin Y., Wilde G. Effect of Heat Treatment on Diffusion, Internal Friction, Microstructure and Mechanical Properties of Ultra-Fine-Grained Nickel Severely Deformed by Equal-Channel Angular Pressing. *Acta Mater.*, 2015, Vol. 82, pp. 11–21. DOI: 10.1016/j.actamat.2014.08.064
7. Horita Z., Smith D.J., Nemoto M., Valiev R.Z., Langdon T.G. Observations of Grain Boundary Structure in Submicrometer-Grained Cu and Ni Using High-Resolution Electron Microscopy. *Journal of Materials Research*, 1998, Vol. 13, no. 2, pp. 446–450. DOI: 10.1557/JMR.1998.0057
8. Popov V.V. Mossbauer Spectroscopy of Interfaces in Metals. *The Physics of Metals and Metallography*, 2012, Vol. 113, no. 13, pp. 1257–1289. DOI: 10.1134/S0031918X12130029
9. Wilde G., Divinski S. Grain Boundaries and Diffusion Phenomena in Severely Deformed Materials. *Mater. Trans.*, 2019, Vol. 60, Iss. 7, pp. 1302–1315. DOI: 10.2320/matertrans.MF201934
10. Popov V.V., Osinnikov E.V., Murzinova S.A., Stolbovsky A.V., Falahutdinov R.M. Grain boundary diffusion of  $^{57}\text{Co}$  in nickel. *Journal of phase equilibria and diffusion*, 2020, Vol. 41, no. 2, pp. 132–137. DOI: 10.1007/s11669-020-00794-5
11. Osinnikov E.V., Murzinova S.A., Istomina A.Yu., Popov V.V., Stolbovskiy A. V., Falahutdinov R.M. Grain-Boundary Diffusion of  $^{57}\text{Co}$  in Ultrafine Nickel after Severe Plastic Deformation. *The Physics of Metals and Metallography*, 2021, Vol. 122, no. 10, pp. 976–980. DOI: 10.1134/S0031918X21100082
12. Amouyal Y., Rabkin E., Mishin Y. Correlation between grain boundary energy and geometry in Ni-rich NiAl. *Acta Materialia*, 2005, Vol. 53, Iss. 14, pp. 3795–3805. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.04.043
13. Camilo C.C., de Souza E.C., Di Lorenzo P.L., de Almeida Rollo J.M.D. Measurement of the grain boundary energy of commercially pure grade 2 titanium at high temperature. *Braz. J. Biom. Eng.*, 2011, Vol. 27, no. 3, pp. 175–181. DOI: 10.4322/RBEB.2011.014
14. Amouyal Y., Rabkin E. A Scanning Force Microscopy Study of Grain Boundary Energy in Copper Subjected to Equal Channel Angular Pressing. *Acta Materialia*, 2007, Vol. 55, Iss. 20, pp. 6681–6689. DOI: 10.1016/j.actamat.2007.08.023
15. Saltykov S.A. *Stereometricheskaya metallografiya* (Stereometric Metallography). Moscow, Metallurgiya Publ., 1976, 271 p. (in Russ.).
16. Kuznetsov P.V., Petrakova I.V., Rakhmatullina T.V., Baturin A.A., Korznikov A.V. The Use of Scanning Tunneling Microscopy in Characterizing the Grain-Subgrain Structure of SMC Nickel after Low Temperature Annealing. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2012, Vol. 78, no. 4, pp. 26–34.
17. Kuznetsov P.V., Rakhmatulina T.V., Belyaeva I.V., Korznikov A.V. Energy of Internal Interfaces as a Characteristic of the Structural Evolution of Ultrafine-Grained Copper and Nickel after Annealing. *The Physics of Metals and Metallography*, 2017, Vol. 118, no. 3, pp. 241–248. DOI: 10.1134/S0031918X17030115

Received April 14, 2022

### Information about the authors

Osinnikov Egor Vyacheslavovich is Junior Research Fellow, Diffusion Laboratory, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: osinnikov@imp.uran.ru.

Blinov Il'ya Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Staff Scientist, Diffusion Laboratory, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: blinov@imp.uran.ru.

Istomina Anastasiya Yur'evna is Junior Research Fellow, Diffusion Laboratory, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: zhuk.1111@mail.ru.

Popov Vladimir Vladimirovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Chief Scientist Officer, Diffusion Laboratory, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: vpopov@imp.uran.ru.



Редакционный коллектив журнала «Математика. Механика. Физика» сердечно поздравляет с 70-летним юбилеем доктора технических наук, профессора, заслуженного работника высшей школы, председателя Совета ректоров УрФО, председателя редакционного совета научного журнала «Вестник ЮУрГУ», президента ЮУрГУ

Шестакова Александра Леонидовича!

Уважаемый коллегами и любимый студентами педагог, крупный ученый, один из авторов теории управления динамическими стендами, создатель теории оптимальных динамических измерений, выдающийся организатор науки и образования, под руководством которого наш университет занял достойное место в списке высших учебных заведений страны и вышел на международную арену, он пользуется заслуженным авторитетом не только в нашей стране, но и за рубежом.

Поздравляя Александра Леонидовича с этой знаменательной датой, мы желаем ему здоровья, долголетия, творческого вдохновения, успехов и новых достижений на благо отечественной науки и образования.

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки), 01.01.07 – Вычислительная математика (физико-математические науки), 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки), 01.04.05 – Оптика (физико-математические науки), 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 14, № 3  
2022

16+

Редактор *А.В. Шуватова*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 25.07.2022. Дата выхода в свет 29.07.2022.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23.

Тираж 500 экз. Заказ 307/235. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.