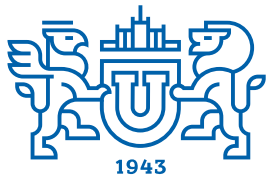


# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2023  
Т. 15, № 1**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

## «МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

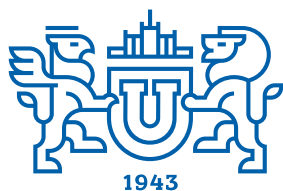
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

### Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
к.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Заляпин И.В.** (Университет Невады, г. Рино, США)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (INHA-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

2023

Vol. 15, no. 1

SERIES

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

- S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**E.V. Golubev**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.P. Beskachko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.I. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**Yu.M. Kovalev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

- A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation  
**G.L. Brovko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**V.D. Buchelnikov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**D. Guidetti**, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy  
**V.I. Zhukovsky**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**I.V. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Ph. D., Professor, University of Nevada, Reno, United States of America  
**S.V. Zelik**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom  
**A.I. Korotkii**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**Jaewan Kim**, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea  
**Kisik Kim**, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea  
**N.D. Kundikova**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**V.V. Menshikh**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation  
**S.I. Pinchuk**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America  
**Y.S. Puzyrev**, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America  
**N.K. Ravshanov**, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan  
**L.V. Utkin**, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation  
**I. Verpoest**, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium  
**V.A. Strauss**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

ГРЕБЕНЩИКОВ Б.Г., ЗАГРЕБИНА С.А., ЛОЖНИКОВ А.Б. Применение некоторых численных методов для решения систем с линейным запаздыванием.....	5
КАДЧЕНКО С.И., СТАВЦЕВА А.В., РЯЗАНОВА Л.С., ДУБРОВСКИЙ В.В. Алгоритмы вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов, заданных на квантовых графах.....	16
КАРАЧИК В.В. Решение задачи Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре.....	26
МЕЩЕРЯКОВ Р.В., ВОЛЬФ Д.А., ТУРОВСКИЙ Я.А. Автокодировщик электрической активности головного мозга человека .....	34
РОНЖИН А.Л., ДУДАКОВ М.О., ДУДАКОВА Д.С. Концептуальная и теоретико-множественная модели задачи функционирования и применения системотехнических решений для пробоотбора донных отложений.....	43
РЯЖСКИХ А.В., ХВОСТОВ А.А., СОБОЛЕВА Е.А., РЯЖСКИХ В.И. Температурное поле однородной квадратной области с движущимися без ускорения смежными сторонами при граничных условиях первого рода.....	55
ЧЕПУРНОВ И.А., ЧЕРВАКОВ В.О., ВАХИТОВ М.Г., КЛЫГАЧ Д.С. Условие оптимальности решающей функции в радиосистемах с принятием решений.....	63

### Физика

ГУРЕВИЧ С.Ю., ГОЛУБЕВ Е.В. Замечание о вычислении скорости волны Рэлея и производной определителя Рэлея в упругих средах.....	69
МИРЗАЕВ Д.А., ОКИШЕВ К.Ю., МИРЗОЕВ А.А. Простая аналитическая модель тепловых полей для разработки цифровых двойников процесса промышленной дуговой сварки .....	76

## CONTENTS

### Mathematics

GREBENSHCHIKOV B.G., ZAGREBINA S.A., LOZHNIKOV A.B. The Application of Numerical Methods to Solve Linear Systems with a Time Delay.....	5
KADCHENKO S.I., STAVTCEVA A.V., RYAZANOVA L.S., DUBROVSKII V.V. Algorithms for the Computation of the Eigenvalues of Discrete Semi-Bounded Operators Defined on Quantum Graphs.....	16
KARACHIK V.V. A Solution to the Riquier–Neymann Problem for Polyharmonic Equations in a Ball.....	26
MESHCHERYAKOV R.V., WOLF D.A., TUROVSKY Y.A. An Autocoder of the Electrical Activity of the Human Brain.....	34
RONZHIN A.L., DUDAKOV M.O., DUDAKOVA D.S. Conceptual and Set-Theoretical Models of the Functioning and Application of System Solutions for Bottom Sediment Sampling.....	43
RYAZHSKIY A.V., KHVOSTOV A.A., SOBOLEVA E.A., RYAZHSKIY V.I. The Temperature Pattern of a Homogeneous Square Area with Adjacent Sides Moving without Acceleration under Boundary Conditions of the First Kind.....	55
CHEPURNOV I.A., CHERVAKOV V.O., VAKHITOV M.G., KLYGACH D.S. Decision Making as an Optimal Decision Rule in Radio Systems.....	63

### Physics

GUREVICH S.Yu., GOLUBEV E.V. A Note on Calculating Rayleigh Wave Velocity and the Derivative of the Rayleigh Determinant in Elastic Media.....	69
MIRZAEV D.A., OKISHEV K.Yu., MIRZOEV A.A. A Simple Analytical Model of Thermal Fields to Develop Digital Twins in Industrial arc Welding.....	76

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**Б.Г. Гребенщиков<sup>1</sup>, С.А. Загребина<sup>1</sup>, А.Б. Ложников<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

<sup>3</sup> Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация  
e-mail: zagrebinasa@susu.ru

**Аннотация.** Рассматриваются возможности применения некоторых модифицированных численных методов для уравнений с запаздыванием, линейно зависящим от времени (аргумента). Поскольку запаздывание неограниченно возрастает, требуется применять также некоторые асимптотические методы при анализе поведения решения таких систем. В статье будут установлены асимптотические свойства исследуемых систем, существенно влияющих на точность численного подсчета. Именно, ввиду неограниченности запаздывания, в случае неустойчивости решения систем с запаздыванием для выяснения свойств решения подобных систем полезно знать асимптотические свойства производных, имеющих порядок больше единицы. Зачастую (при условиях, сформулированных в статье) данные производные стремятся к нулю при неограниченном увеличении времени. Это свойство позволяет достаточно эффективно применять некоторые численные методы конечного порядка (метод Рунге–Кутты, модифицированный метод Эйлера с пересчетом и т. д.). В качестве иллюстрации эффективности разработанных методов в статье будет показано применение некоторых модифицированных методов численного счета для изучения процесса вертикальных колебаний полоза токоприемника, движущегося с постоянной скоростью локомотива при взаимодействии с контактным проводом при наличии эластичного закрепления на опоре. Численные методы, изложенные в статье, позволяют исследовать асимптотическое поведение и более сложных систем, содержащих как постоянное, так и линейное запаздывание. Отметим, что применение численных методов для подсчета решения зачастую позволяет выявить не только неустойчивость решения исследуемых систем, но и может быть использовано при стабилизации некоторых систем, содержащих неограниченное (не обязательно линейное) запаздывание.

*Ключевые слова:* линейное запаздывание; численные методы; асимптотическая устойчивость.

### Введение

Уравнения с запаздыванием встречаются во многих задачах физики, механики, радиоэлектроники, биологии. Если системы с постоянным запаздыванием изучены достаточно хорошо, то системы с переменным (но ограниченным) запаздыванием гораздо менее изучены. Еще менее изучены системы с линейным запаздыванием, т. е. в том случае, когда запаздывание  $\gamma(t)$  является линейной функцией времени, следовательно, не является ограниченным. Между тем системы с линейным запаздыванием встречаются в теории радиоактивного распада, в задаче колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом при наличии эластичности в точке закрепления провода (простейшая модель будет рассмотрена в данной статье). Кроме того, уравнения с линейным (пропорциональным) запаздыванием встречаются в экономике, теории очередей и т. д.

Поиск решения таких систем в аналитическом виде возможен только в исключительных случаях. Между тем для решения, например, задач стабилизации систем такого класса необходимо

знать поведение решения исследуемой (нестабилизированной) системы. Эту информацию можно получить, применяя численные методы решения исследуемых систем. Но в нашем случае наличие неограниченного запаздывания приводит к определенным трудностям (в частности, накапливаются ошибки при приближенных численных расчетах на бесконечном промежутке времени). Поэтому возникает задача модифицировать некоторые традиционные методы численного счета.

## 1. Применение численных методов для решения некоторой системы в случае постоянных коэффициентов в правой части

Изучим поведение решения системы  $m$ -го порядка с постоянными коэффициентами и с запаздыванием  $\gamma(t)$ , линейно зависящим от времени  $t$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(\mu t), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad t \geq t_0 > 0, \quad \gamma(t) = (1-\mu)t. \quad (1)$$

Начальные условия, определяющие решение системы (1), заданы, например, на отрезке  $[\mu t_0, t_0]$  начальной вектор-функцией  $\varphi(\theta)$ , т. е.

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [\mu t_0, t_0] \quad (2)$$

(в частности, начальные значения могут быть заданы и в точке  $t_0 = 0$ ). Асимптотическое поведение решения будем рассматривать в линейном пространстве непрерывных функций  $C(\mathbb{R})$ .

Пусть  $\text{Re}(\lambda_i) < -\beta$ ,  $\beta = \text{const}$ ,  $\beta > 0$ , где  $\lambda_i$  – корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (3)$$

Тогда при  $t > t_0$  для решения системы (1)  $x(t, t_0, \varphi(\theta))$  при любой матрице  $B$  (отличной от нулевой) справедлива оценка [1]

$$x(t) = O(t^p), \quad p = \text{const}, \quad |p| > 1, \quad (4)$$

(под оценкой (4) понимается следующее: найдется постоянная вещественная  $p$ , что величина  $x(t) = O(t^p)$  при  $t \geq t_0$ , т. е. эквивалентна  $t^p$ ).

Дальнейшие свойства решения данной системы (1) при  $|\rho| < 1$ , где  $\rho$  – собственные значения матрицы  $A^{-1}B$ , а именно, асимптотическая устойчивость, также следуют из работы [1]. Иные же свойства системы (1), а именно неустойчивость решения, при наличии хотя бы одного собственного значения  $\bar{\rho}$ ,  $|\bar{\rho}| > 1$  (доказанного с помощью преобразования Лапласа) следуют из результатов работы [2]. Асимптотические свойства данной системы, например, при  $|\rho| = 1$  (в случае неустойчивости) можно исследовать уже с помощью численных методов, учитывая особенности данной системы. Приведем эти свойства.

Продифференцируем обе части системы (1) по  $t$ . Получаем систему

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{dx'(t)}{dt} = Ax'(t) + \mu Bx'(\mu t), \quad \text{где} \quad \frac{dx(t)}{dt} = x'(t), \quad t > \mu^{-1}t_0. \quad (5)$$

При малом  $\mu$  собственные значения матрицы  $\mu A^{-1}B$ , меньше единицы по модулю, тогда решение системы (5) асимптотически устойчиво, следовательно, тем более данное свойство справедливо и для соответствующей системы вида

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} = Ax^{(2)}(t) + \mu^{(2)} Bx^{(2)}(\mu t), \quad t > \mu^{-2}t_0.$$

Тогда для иллюстрации поведения решения исходной системы (1) применим модифицированный метод Эйлера с пересчетом [3].

Если же параметр  $\mu$  не является малым, но при выполнении неравенства  $|\rho_j^k| < 1$ , где  $\rho_j^k$  – собственные числа матрицы  $\mu^k A^{-1}B$ , имеем, что производные  $x^{(k+j)}(t)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) также стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , следовательно, можно эффективно использовать численный метод Нордсика [3, 4], который оперирует лишь с величинами  $x^{(j)}(t)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ). Поскольку имеем асимптотическое равенство

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + \Delta x^{(1)}(t_i) + (1/2)\Delta^2 x^{(2)}(t_i) + \dots + O((1/k!)\Delta^k x^{(k)}(t_i)),$$

где  $\Delta$  – малая постоянная величина, вводим величину  $\hat{Z}_1^k$  (Нордсика), компонентами которой являются величины  $x^{(j)}(t)$ . Получили конечномерную систему, которая может дать достоверные ре-

зультаты при достаточно малых  $\Delta$ . Этот метод исследования (более подробно см. в [3, 4]) применим и для некоторых неоднородных уравнений. Приведем пример.

В статье [5] рассматривается проблема колебаний полоза токоприемника, движущегося с единичной скоростью локомотива, при взаимодействии с контактным проводом. Полагают, что выполнены следующие условия:

$$c^2 = \frac{T_0}{m_0} > 1, c = \text{const},$$

где  $T_0$  – натяжение в тросе,  $m_0$  – масса единицы длины троса. Пусть величина  $Y(x, t)$  – малое вертикальное перемещение натянутого троса под действием движущегося токоприемника, обозначим ординату натянутого контактного провода  $v(x)$ . Схема участка электрофицированной дороги изображена на рис. 1, ось  $y$  направлена вниз, а уравнение (неоднородное) гиперболического типа имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial x^2} = -P\delta(x-t), t > 0.$$

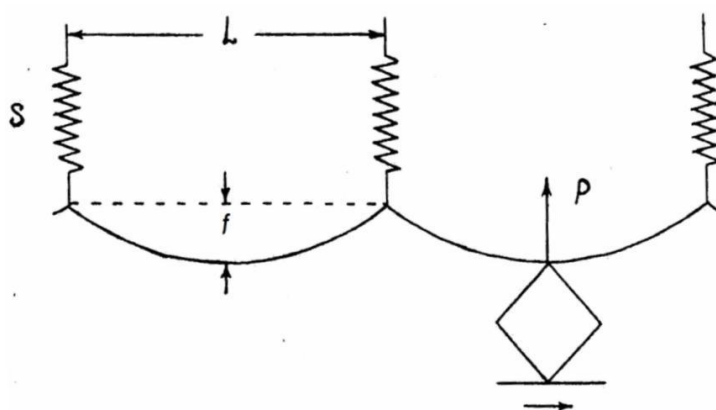


Рис. 1. Схема контактной сети и токоприемника

Считаем, что в результате действия вертикального смещения токоприемника справедливо соотношение

$$\left[ \frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} \right] = \bar{k} \frac{dy(t)}{dt},$$

где  $y(t) = Y(x, t) + v(t)$ ;  $y(t)$  – координаты точки приложения обода токоприемника,  $\bar{k}$  – коэффициент пропорциональности (имеется податливость опорного узла),  $v(t)$  – уравнение контактного провода (подвески) с учетом единичной скорости. Более подробно в [5].

Таким образом, получаем уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1-c}{2\bar{k}} y(t) + \frac{(1-c)\alpha}{2\bar{k}(1-\alpha)} y(\mu t) + \frac{1-c}{2\bar{k}} v(t) + \frac{d}{dt} v(t). \quad (6)$$

Здесь  $\mu = \frac{c-1}{c+1}$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, возникающий ввиду решения волнового уравнения на линии действия токоприемника  $x = t$ , (более подробно см. [5, 6]).

При условии малости величины провеса контактного провода ордината  $v(t)$  в правой части данного уравнения с высокой степенью точности является параболой [6], тогда уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1-c}{2\bar{k}} y(t) + \frac{(1-c)\alpha}{2\bar{k}(1-\alpha)} y(\mu t) + \alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2, \alpha_j = \text{const}, j = 0, 1, 2. \quad (7)$$

Начальные условия заданы в точке  $t = 0$ , т. е.  $y(0) = y_0$ . Отметим, что в случае неравенства  $|(1-\alpha)\alpha^{-1}| < 1$  решение однородного уравнения, соответствующего (6) будет асимптотически устойчивым, тогда решение (7) будет ограниченным [7] и с помощью численных методов (исходя из графика) могут быть оптимизированы параметры подвески и опорного узла.

## Математика

В заключение раздела отметим, что подобными численными методами можно исследовать и поведение систем, содержащих наряду с линейным также и постоянное запаздывание, имеющих вид

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A \hat{x}(t) + B_1 \hat{x}(t - \omega) + B_2 \hat{x}(\mu t), \quad \omega = \text{const}, \omega > 0. \quad (8)$$

Схожие уравнения встречаются, например, в задаче управления затратами на рекламу [8]. Достаточные условия асимптотической устойчивости получены автором в работе [1], при этом полагается, что  $\lambda$  корни характеристического уравнения

$$|A + B_1 \exp(-\lambda\sigma) - \lambda E| = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть. Тогда решение «укороченной» системы

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = A \hat{y}(t) + B_1 \hat{y}(t - \omega).$$

экспоненциально устойчиво, следовательно, и для фундаментальной матрицы решений «укороченной» системы  $Y_\sigma(t, s) = Y_\sigma(t - s)$  справедлива оценка [9]

$$\|Y_\sigma(t - s)\| \leq C \exp(-b(t - s)), \quad b = \text{const}, b > 0, C = \text{const}, C > 1. \quad (9)$$

Если теперь проинтегрировать  $j$  раз обе части системы (8), то из полученного соотношения

$$\frac{d\hat{x}^{(j+1)}(t)}{dt^j} = A \hat{x}^{(j)}(t) + B_1 \hat{x}^{(j)}(t - \omega) + \mu^j B_2 \hat{x}^{(j)}(\mu t)$$

при  $\frac{\mu^k \|B_2\|}{\beta} \leq b$ ,  $b = \text{const}$ ,  $0 < b < 1$  следует свойство производных  $\|\hat{x}^{(j)}(t)\| \rightarrow 0$  (при  $t \rightarrow \infty$ ,  $j \geq k$ ,  $k$  – натуральное число), более подробно в [1]. Как вытекает из результатов, полученных в [1], для вектор-функции  $\hat{x}^{(k)}(t)$  справедлива оценка

$$\|\hat{x}^{(j)}(t)\| \leq C_k \left(\frac{t}{h}\right)^{-\delta_k} \sup_{\eta} \|\varphi_k(\eta)\|, \quad \hat{x}^{(k)}(\eta) = \varphi_k(\eta), \quad \eta \leq h. \quad (10)$$

Представим теперь при  $j = k - 1$  решение соответствующей дифференциальной системы в интегральной форме [9]

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(k-1)}(t) &= Y_\sigma(t - h) f_{k-1}(h) + \int_{-\sigma}^0 Y_\sigma(t - h - \zeta) B_1 f_{k-1}(h + \zeta) d\zeta + \\ &+ \int_h^t Y_\sigma(t - s) \mu^k B_2 \hat{x}^{(k-1)}(\mu s) ds, \quad t > h, \quad \hat{x}^{(k-1)}(\eta) = \varphi(\eta), \quad \eta \leq h. \end{aligned} \quad (11)$$

Первые два члена в правой части этого равенства есть величина  $\hat{y}(t)$ . Рассмотрим интегральный член в правой части. Введем вектор-функцию  $W_1(t)$ , определенную равенством  $\frac{d}{dt} W_1(t) = Y_\sigma(t)$ , причем

$$W(t, h) = - \int_h^t \frac{\partial}{\partial s} W_1(t - s) ds = R - W_1(t - h), \quad (12)$$

где  $R = -W_1(0)$ .

Проинтегрировав по частям второй член в правой части равенства (10), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int_h^t Y_\sigma(t - s) \mu^{k-1} B_2 \hat{x}^{(k-1)}(\mu s) ds &= \mu^{k-1} R B_2 \hat{x}^{(k-1)}(\mu t) - \\ &- \mu^{k-1} W_1(t - h) B_2 \hat{x}^{(k-1)}(h) + \int_h^t W_1(t - s) \mu^k B_2 \hat{x}^{(k)}(\mu s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$



Второй член в правой части (13) является исчезающей вектор-функцией [1], интеграл ввиду соотношений (9), (10) также есть исчезающая вектор-функция. Получили из (11) неоднородную разностную систему

$$\hat{x}^{(k-1)}(t) = \mu^{k-1} \mathbf{RB}_2 \hat{x}^{(k-1)}(\mu t) + F_{k-1}(t). \quad (14)$$

Здесь неоднородность  $F_{k-1}(t)$  (при  $t \rightarrow \infty$ ) является исчезающей вектор-функцией [1, 10]. Полагаем, что среди собственных значений  $\rho_{k-1}$  матрицы  $\mu^{k-1} \mathbf{RB}_2$  найдется хотя бы одно  $\rho_{k-1}$  по модулю больше единицы. Тогда решение однородной разностной системы (соответствующей (14)) будет неустойчиво [10]. Следовательно, неустойчиво и решение системы (14) ввиду того, что общее решение этой системы состоит из суммы общего решения однородной системы и частного неоднородной системы.

Далее рассмотрим поведение величины  $\hat{x}^{(k-2)}(t)$ . Методами, аналогичными использованными выше, получаем для системы первого приближения неоднородное уравнение

$$\hat{x}^{(k-2)}(t) \approx \mu^{k-2} \mathbf{RB}_2 \hat{x}^{(k-2)}(\mu t) + \mu^{k-1} \mu^{k-2} (\mathbf{RB}_2)^2 \hat{x}^{(k-2)}(\mu t) + \hat{F}_{k-2}(t).$$

Здесь  $\hat{F}_{k-2}(t)$  – исчезающая вектор-функция. Снова имеем неоднородное уравнение, при этом соответствующее однородное разностное уравнение неустойчиво.

Продолжая подобные рассуждения, получаем итоговую асимптотическую формулу для решения исходной системы (8)

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) \approx & \mathbf{RB}_2 \hat{x}(\mu t) + \mu (\mathbf{RB}_2)^2 \hat{x}(\mu t) + \mu \mu^2 (\mathbf{RB}_2)^3 \hat{x}(\mu t) + \dots + \\ & + \mu \mu^2 \dots \mu^{k-1} (\mathbf{RB}_2)^k \hat{x}^{(k-1)}(\mu t) + \hat{F}_0(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Данную разностную систему первого приближения легко реализовать в виде компьютерной программы, из нее же можно сделать выводы: если  $k \leq 4$ , численное решение можно применять на конечном промежутке, применяя метод Рунге–Кутты–Фельберга, при этом получать численные решения для производных первого, второго, ..., четвертого порядка, дальнейшее представление получим, используя представления типа (15). Если же  $k > 4$ , то численный подсчет производим методом Нордсика.

## 2. Анализ систем с линейным запаздыванием при $\mu = 1 - \varepsilon$ , $\varepsilon$ – достаточно малое положительное число

Отметим, что произведенные выше исследования весьма эффективны при малых величинах  $\mu$ . Если же при соотношении  $\mu = 1 - \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – достаточно малое положительное число) ввиду того, что производная от величины  $(1 - \varepsilon)t$  весьма близка к единице (и приходится весьма много дифференцировать исходное выражение (2), для получения достаточных условий асимптотической устойчивости производных) весьма эффективно использовать функционалы

$$V(t, x(s)) = W(t, x(t)) + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} \int_{t-\sigma}^t x_j^2(s) ds + \sum_{i,j=1}^m \beta_{ij} \int_{t-\varepsilon t}^t x_j^2(s) ds.$$

Здесь  $W(t, x(t))$  – ограниченная положительно определенная квадратичная форма переменных  $x_j(t)$  ( $x_j(t)$  – компоненты вектор-функции  $x(t)$ ), функционал  $V(t, x(s))$  является знакоопределенным [11]. Рассматривая теперь производную от функционала  $V(t, x(s))$  вдоль интегральных кривых исследуемой системы, видим, что если производная от данного функционала вдоль интегральных кривых этой системы будет отрицательно определенной квадратичной формой переменных  $x(t)$ ,  $x(t-s)$ , и при этом сам функционал  $V(t, x(s))$  является знакоопределенным, знака, противоположного его производной вдоль интегральных кривых этой системы, то система асимптотически устойчива [11].

Приведем простейший пример. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \varepsilon t), \quad a = \text{const}, \quad a < 0, \quad b = \text{const}, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (16)$$

Для решения вопроса о достаточных условиях относительно  $b$ , при которых решение уравнения (16) асимптотически устойчиво, рассмотрим функционал

$$V_1(t, x((s))) = x^2(t) - a \int_{t-\varepsilon}^t x^2(s) ds. \quad (17)$$

Вычислим его производную вдоль траекторий уравнения (16)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(t, x((s)))_1(\tau, z(s)) &= 2x(t)(ax(t) + bx(t - \varepsilon) - ax^2(t) + a(1-\varepsilon)x^2(t - \varepsilon)) = \\ &= a[x^2(t) + 2ba^{-1}x(t)x(t - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)x^2(t - \varepsilon)] = aW_1(x(t), x(t - \varepsilon)). \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, квадратичная форма  $W_1(x(t), x(t - \varepsilon))$  является определено положительной при  $|b| < (1-\varepsilon)^{0.5}|a|$  [10].

С другой стороны достаточными условиями асимптотической устойчивости (более точными и более широкими) является совокупность неравенств [1]:  $a < 0$ ,  $|b| < |a|$ . Видим, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  эти условия асимптотической устойчивости близки к полученным. Этот метод функционалов Ляпунова–Красовского позволяет получать области асимптотической устойчивости и при переменной величине  $b(t)$ .

### 3. Пример

Учитывая применение численных методов, изложенных выше, рассмотрим систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -4x(t) + 1,5y(t) - 4y(t - 1) + 2,4x(0,2t) + 2y(0,2t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -2x(t) - 2y(t - 1) + y(0,2t). \end{aligned} \quad (19)$$

Система имеет два запаздывания:  $\gamma_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 0,8t$ . Корни характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 2\lambda \cdot \exp(-\lambda) + 3 = 0$ ,  $\lambda_1 = -0,449$ ,  $\lambda_{23} = -0,575 \pm 2,675i$ ,  $\lambda_{45} = -1,412 \pm 8,16i$ , ..., обладают свойством  $\text{Re}(\lambda) \leq -0,449$ , корни не являются кратными. Последнее свойство позволяет получать элементы фундаментальной матрицы решений системы без членов с линейным запаздыванием в правой части в виде  $\frac{d_{kr}^j}{\Delta'(\lambda_j)} \exp(\lambda_j t)$ . Здесь  $d_{kr}^j$  – алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{pmatrix} -4 - \lambda_j & 1,5 - 4\exp(-\lambda_j) \\ -2 & -2\exp(-\lambda_j) - \lambda_j \end{pmatrix}$$

в пересечении  $k$ -й строки и  $r$ -го столбца,  $\Delta'(\lambda_j)$  – производная от функции  $\Delta(\lambda)$  при значении аргумента  $\lambda_j$ . Если теперь представить решение системы в численном виде с предысторией (начальные данные):  $x = 1$ ,  $y = t$ , то видим, что решение неустойчиво, это иллюстрируется рис. 2 и подтверждается собственными значениями матрицы

$$\rho(RB_2) \approx \begin{pmatrix} 0,05 \\ 1,406 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему, которой удовлетворяет производная

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}(t)}{dt} &= -4\dot{x}(t) + 1,5\dot{y}(t) - 4\dot{y}(t - 1) + 0,48\dot{x}(0,2t) + 0,4\dot{y}(0,2t), \\ \frac{d\dot{y}(t)}{dt} &= -2\dot{x}(t) - 2\dot{y}(t - 1) + 0,2\dot{y}(0,2t). \end{aligned} \quad (20)$$

Ее решение асимптотически устойчиво (что видно из графика производной на рис. 3). Подсчет велся с применением алгоритма Рунге–Кутты–Фельберга и является закономерным на конечном промежутке.

Поскольку решение медленно растет при  $t \rightarrow \infty$ , то удобно при больших  $t$  асимптотическое представление решения в виде  $\hat{x}(t) \approx RB_2 \hat{x}(\mu t)$ .

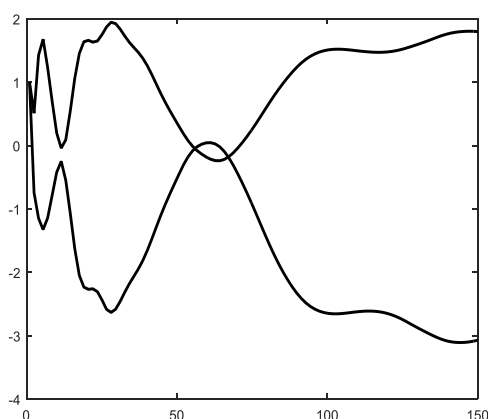


Рис. 2. Неустойчивость решения

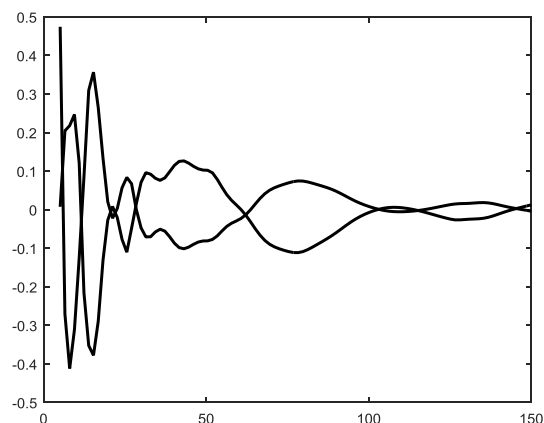


Рис. 3. Устойчивость производной решения

#### 4. Применение численных методов для одной системы в случае переменных матриц $A(t)$ и $B(t)$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными матрицами  $A(t)$ ,  $B(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(\mu t), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (21)$$

Сделаем замену аргумента  $\tau = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$ . Получаем систему с постоянным запаздыванием

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = t_0 e^\tau [\hat{A}(\tau) z(\tau) + \hat{B}(\tau) z(\tau - \sigma)], \quad \sigma = -\ln(\mu), \quad \tau \geq 0. \quad (22)$$

Полагаем, что матрицы  $\hat{A}(\tau)$ ,  $\hat{B}(\tau)$  – периодические (периода  $\sigma$ ), достаточное число раз дифференцируемые, при этом справедливы оценки

$$\|\hat{A}^{(j)}(\tau)\| \leq \bar{a}, \quad \|\hat{B}^{(j)}(\tau)\| \leq \bar{b}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad \bar{a} = \text{const}, \quad \bar{b} = \text{const}. \quad (23)$$

Здесь и далее под нормой вектора  $x$  считаем равенство  $\|x\| = \sum_{i=1}^m |x_i|$ ,  $x_i$  – координаты вектора  $x$ .

При этом норма матриц выбирается в соответствии с нормой вектора. Полагаем, что собственные числа  $\lambda_i(\tau)$  матрицы  $\hat{A}(\tau)$  удовлетворяют неравенству

$$\text{Re}(\lambda_i(\tau)) < -\beta. \quad (24)$$

Для того, чтобы лучше понять асимптотические свойства системы (22), положим  $z_{n+1}(\tau) = z(n\sigma + \tau)$ ,  $\varepsilon_n = \frac{\mu^n}{t_0}$ , и сведем систему (22) к счетной системе

$$\varepsilon_n \frac{dz(\tau)}{d\tau} = e^\tau [\hat{A}(\tau) z_{n+1}(\tau) + \hat{B}(\tau) z_n(\tau)], \quad \tau \in [0, \sigma], \quad z_{n+1}(0) = z_n(\sigma), \quad n = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Известно [12], что при выполнении условий (23), (24) фундаментальная матрица  $Y_n(\tau, s)$  решений линейной системы без запаздывающих членов

$$\varepsilon_n \frac{dy_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^\tau \hat{A}(\tau) y_{n+1}(\tau)$$

при достаточно малом  $\varepsilon_n$  ( $n \geq N$ ) допускает оценку

$$\|Y_n(\tau, s)\| \leq M \exp\left\{-\frac{\beta(e^\tau - e^s)}{\varepsilon_n}\right\}, \quad 0 < s < \tau \leq \sigma. \quad (26)$$

(Отметим, что константа  $M > 1$  одна и та же для любых  $0 < \varepsilon_n \leq \varepsilon_0$ ). Данную величину  $N$  можно установить, сравнивая графики вектор-функции

$$\varepsilon_n \frac{dz_{n+1}^0(\tau)}{d\tau} = \exp(\tau)[A(\tau) z_{n+1}^0(\tau) + E],$$

(где  $E$  – единичная матрица, а вектор-функция  $z_{n+1}^0(0)$  равна нулевому вектору) с матрицей  $-A^{-1}(\tau)$  на интервале  $[0, 5\sigma, \sigma]$ .

Ранее доказано [13], что при выполнении оценок (23), (26) для величин  $\max_{\tau} \|z_{n+i}^{(j)}(\tau)\|$  ( $i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, k$ ) справедливы (довольно грубые) оценки  $\max_{\tau} \|z_{n+i}^{(j)}(\tau)\| \leq C_j q^n \max_{\tau} \|z_n(\tau)\|$ ,

$$q = M[1 + \beta^{-1}b], C_j = \text{const}, C_j > 1.$$

Запишем решение системы (25) в форме Коши

$$z_{n+i}(\tau) = Y_{n+i-1}(\tau, 0) z_{n+i}(0) + \int_0^{\tau} Y_{n+i-1}(\tau, s) \frac{e^s}{\varepsilon_{n+i-1}} [\hat{B}(s) z_{n+i-1}(s)] ds$$

и проинтегрируем последний член в правой части по частям несколько раз. Имеем (учитывая оценки роста решения и производных)

$$\begin{aligned} z_{n+i}(\tau) &= Y_{n+i-1}(\tau, 0) z_{n+i-1}(\tau_0 + \sigma) + \int_0^{\tau} Y_{n+i-1}(\tau, s) \frac{e^s}{\varepsilon_n} [\hat{B}(s) z_{n+i-1}(s)] ds = \\ &= Y_{n+i-1}(\tau, 0) z_{n+i-1}(\tau_0 + \sigma) - \hat{A}^{-1}(\tau) \hat{B}(\tau) z_{n+i-1}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon_{n+i-1}) z_{n+i-1}(\tau) + \\ &+ Y_{n+i-1}(\tau, 0) (-\hat{A}^{-1}(0) \hat{B}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon_{n+i-1})) z_{n+i-1}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon_{n+i-1}) z_{n+i-1}^{(1)}(\tau) + \\ &+ Y_{n+i-1}(\tau, 0) z_{n+i-1}^{(1)}(0) + \dots + (\varepsilon_{n+i-1})^{k-2} \mathcal{O}(\varepsilon_{n+i-1}) z_{n+i-1}^{(k-1)}(\tau) + \\ &+ Y_{n+i-1}(\tau, 0) (\varepsilon_{n+i-1})^{k-2} \mathcal{O}(\varepsilon_{n+i-1}) z_{n+i-1}^{(k-1)}(0) + \mathcal{O}((\mu^k q)^i) \|z_n(\tau)\|, \end{aligned} \quad (27)$$

Полагаем, что  $\mu^k q < 1$ , что возможно при достаточно больших  $k$  (величину  $k$  можно получить из неравенства  $M\mu^k b < \beta$ ). Следовательно,  $\mathcal{O}((\mu^k q)^i) \|z_n(\tau)\|$  является исчезающей вектор-функцией при  $i \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$z(\tau) \approx f(\tau, z(\tau - \sigma), z^{(1)}(\tau - \sigma), \dots, z^{(k-1)}(\tau - \sigma)).$$

Отсюда и в исходной системе (в переменной  $t$ ) вектор-функция  $x(t)$  приближенно зависит лишь от  $x^{(j)}(\mu t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Нахождение численного решения системы (22) (например, методом Рунге–Кутты–Фельберга) может применяться только при малых  $\tau$  и не является приемлемым из-за наличия экспоненты в правой части этой системы. Тем не менее в случае экспоненциальной устойчивости, соответствующей вырожденной (разностной системы), производная системы (21) также экспоненциально устойчива [13], и, разрешив равенство (25) относительно  $z_{n+1}(\tau)$ , имеем, что в правой части полученного равенства  $\varepsilon_n e^{-\tau} \hat{A}^{-1}(\tau) z_{n+1}(\tau)$  является величиной более высокого порядка малости, т. е.  $z_{n+1}(\tau) \approx -\hat{A}^{-1}(\tau) \hat{B}(\tau) z_n(\tau)$ .

Теперь, учитывая тот факт, что в исходной системе (в переменной  $t$ ) вектор-функция  $x(t)$  приближенно зависит лишь от  $x^{(j)}(\mu t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$  искомая вектор-функция  $x(t)$  при  $t > t_0 \mu^{-N}$  может быть вычислена модифицированным методом Нордсика. Но данное свойство также может быть использовано при (модифицированном) методе Рунге–Кутты–Фельберга. Пусть  $k = 3$ . Имеем для численного решения системы (21) асимптотическое равенство [3]

$$\begin{aligned} x(t + \Delta) &\approx x(t) + \Delta[A(t)x(t) + B(t)x(\mu t)] + \\ &\frac{\Delta^2}{2} \left\{ \left( \frac{dA(t)}{dt} x(t) + \frac{dB(t)}{dt} x(\mu t) + A(t)[A(t)x(t) + B(t)x(\mu t)] \right) \right\} + \hat{f}(t), \end{aligned}$$

где  $\hat{f}(t)$  – исчезающая вектор-функция.

Отсюда получаем численный алгоритм

$$u_{i+1} = u_i + \Delta \left[ A(t)u_i + B(t)u_i(\cdot) \right] + \frac{\Delta^2}{2} \left\{ \frac{dA(t)}{dt} u_i + \frac{dB(t)}{dt} u_i(\cdot) + A(t) \left[ A(t)u_i + B(t)u_i(\cdot) \right] \right\}.$$

Здесь  $u_i$  – приближение точного решения  $x(t)$  в точке  $t_i$ ,  $u_i(\cdot) = u(t_i + s)$ , где  $\mu t_i < s < t_i$  (более подробно см. в [3]).

Отметим так же, что предложенный численный метод применим и для систем вида

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = t_0 e^{\tau} \left[ \hat{A}(\tau)z(\tau) + \sum_{i=1}^r \hat{B}_i(\tau)z(\tau - n_i\sigma) \right],$$

$n_i$  – целые числа,  $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r$ , матрицы  $\hat{B}_i(\tau)$  периодические, периода  $\sigma$ .

В заключение авторы считают своим приятным долгом поздравить профессора Алексея Валерьевича Богомолова с пятидесятилетним юбилеем и поблагодарить его за многолетнюю поддержку и интерес к нашим исследованиям, за доброжелательную и конструктивную критику.

### Литература

1. Гребенщиков, Б.Г. Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков, В.И. Рожков // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 751–758.
2. Гребенщиков, Б.Г. О неустойчивости одной системы с линейным запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков, С.И. Новиков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2010. – № 2. – С. 3–13.
3. Ким, А.В.  $i$ -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Ким, В.Г. Пименов. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 255 с.
4. Штеттер, Х.И. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений / Х.И. Штеттер. – Москва: Мир, 1978. – 461 с.
5. On a Functional Differential Equation / L. Fox, D.F. Mayers, J.R. Ockendon, A.V. Tayler // IMA Journal of Applied Mathematics. – 1971. – Vol. 8, Iss. 3. – P. 271–307.
6. Ockendon, J.R. The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive / J.R. Ockendon, A.V. Taylor // Proceedings of the Royal Society of London A – Mathematical and Physical Sciences. – 1971. – Vol. 322, no. 1551. – P. 447–468.
7. Гребенщиков, Б.Г. Об ограниченности решений неоднородных систем с запаздыванием, линейно зависящим от времени / Б.Г. Гребенщиков // Устойчивость и нелинейные колебания: сб. науч. тр. – Свердловск: УрГУ, 1986. – С. 7–12.
8. Сесекин, А.Н. Об одной математической модели управления инвестициями, приводящей к системе с постоянным и линейным запаздываниями / А.Н. Сесекин, А.С. Шляхов // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2021. – Т. 192. – С. 111–116.
9. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
10. Халанай, А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
11. Красовский, Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
12. Гребенщиков, Б.Г. Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков // Устойчивость и нелинейные колебания: сб. науч. тр. – Свердловск: УрГУ, 1984. – С. 18–29.
13. Гребенщиков, Б.Г. Об устойчивости линейных систем с постоянным запаздыванием и экспоненциальными коэффициентами / Б.Г. Гребенщиков // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания: межвуз. сб. науч. тр. – Л. : [б. и.], 1990. – С. 138–148.

Поступила в редакцию 25 октября 2022 г.

### Сведения об авторах

Гребенщиков Борис Георгиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

Загребина Софья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zagrebinasa@susu.ru

Ложников Андрей Борисович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; доцент, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 5–15

---

DOI: 10.14529/mmph230101

### THE APPLICATION OF NUMERICAL METHODS TO SOLVE LINEAR SYSTEMS WITH A TIME DELAY

**B.G. Grebenshchikov<sup>1</sup>, S.A. Zagrebina<sup>1</sup>, A.B. Lozhnikov<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup> N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

<sup>3</sup> Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

e-mail: zagrebinasa@susu.ru

**Abstract.** This paper considers the application of modified numerical methods for solving differential equations with a delay which linearly depends on time. Since the delay increases indefinitely, it is also necessary to apply asymptotic methods to analyze the behavior of the solutions of such systems. The paper establishes the asymptotic properties of the systems under study, which significantly affect the accuracy of the numerical calculation. Given the unbounded delay and the instability of the solutions and to clarify the properties of the solution of such systems, it is useful to know the asymptotic properties of the derivatives having an order greater than one. Under the conditions formulated in the article, these derivatives tend to zero as  $t \rightarrow \infty$ . This property makes it possible to apply finite-order numerical methods (such as the Runge–Kutta method and the modified Euler method). As an illustration of the effectiveness of the methods developed, the article calculates the vertical oscillations of a locomotive pantograph moving at a constant speed when interacting with the contact wire. The numerical methods allow the study of the asymptotic behavior of more complex systems containing both constant and linear delay. Note that the use of numerical methods for calculating the solution reveal the instability of the solution of the systems under study and can be used to stabilize some systems containing an unlimited (not necessarily linear) delay.

**Keywords:** linear delay; numerical methods; asymptotic stability.

#### Reference

1. Grebenshchikov B.G., Rozhkov V.I. Asymptotic Behavior of the Solution of a Stationary System with Delay. *Differ. Equ.*, 1993, Vol. 29, no. 5, pp. 640–647.
2. Grebenshchikov B.G., Novikov S.I. Instability of Systems with Linear Delay Reducible to Singularly Perturbed Ones. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2010, Vol. 54, Iss. 2, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X10020015
3. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-Gladkiy analiz i chislennyye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* (i-Smooth Analysis and Numerical Methods of Solution Functional-Differential Equations). Moscow, Izhevsk, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2004, 255 p. (in Russ.).
4. Stetter H.J. *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York, 1973, 390 p. DOI:10.1007/978-3-642-65471-8

5. Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R., Tayler A.B. On a Functional Differential Equation Get access Arrow. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1971, Vol. 8, Iss. 3, pp. 271–307. DOI: 10.1093/imamat/8.3.271

6. Ockendon J.R., Taylor A.B. The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive. *Proc. Royal Society of London A – Mathematical and Physical Sciences*, 1971, Vol. 322, no. 1551, pp. 447–468. DOI: 10.1098/rspa.1971.0078

7. Grebenshchikov B.G. Ob ogranichennosti resheniy neodnorodnykh sistem s zapazdyvaniem, lineyno zavisyashchim ot vremeni (About Boundary Solutions of Nonhomogeneous Systems with Delay, which Linear Depends on Time). *Ustoychivost' i nelineynye kolebaniya: sb. nauch. tr. (Proc. Stability and nonlinear oscillations)*, Sverdlovsk, UrGU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russ.).

8. Sesekin A.N., Shlyakhov A.S. On a Mathematical Model of Investment Management Leading to a System with Constant and Linear Delays. *Proc. Voronezh spring mathematical school “Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems. Pontryagin Readings – XXX”*, Voronezh, May 3–9, 2019. Part 3, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. (Results of science and technology. The series “Modern Mathematics and its applications”. Thematic reviews), 192, VINITI, Moscow, 2021, pp. 111–116. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-111-116

9. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-Difference Equations*. New York, London, Academic Press, 1963, 462 p.

10. Halanau A., Wexler D. *Teoria Calitativa a Sistemelor cu Impulsuri*. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania Bucurest, 1968, 315 p.

11. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya (Some Tasks of Theory Stability of Movement)*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 212 p. (in Russ.).

12. Grebenshchikov B.G. Ob ustoychivosti nestatsionarnykh sistem s bol'shim zapazdyvaniem (About Stability of Nonstationary Systems with Large Delay). *Ustoychivost' i nelineynye kolebaniya: sb. nauch. tr. (Proc. Stability and nonlinear oscillations)*, Sverdlovsk, UrGU Publ., 1984, pp. 18–29. (in Russ.).

13. Grebenshchikov B.G. Ob ustoychivosti lineynykh sistem s postoyannym zapazdyvaniem i eksponentsial'nymi koeffitsientami (About Stability of Linear Systems with Constant Delay and with Exponential Coefficients). *Matematicheskiiy analiz. Voprosy teorii, istorii i metodiki prepodavaniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. (Mathematical analysis. Questions of theory, history and methodology of education: Interuniversity Collection of Scientific Papers)*. Leningrad, 1990, pp. 138–148. (in Russ.).

Received October 25, 2022

### Information about the authors

Grebenshchikov Boris Georgievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

Zagrebina Sophiya Alexandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zagrebina@susu.ru

Lozhnikov Andrey Borisovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Department of Differential Equations, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

## АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАНЫХ НА КВАНТОВЫХ ГРАФАХ

С.И. Кадченко<sup>1</sup>, А.В. Ставцева<sup>2</sup>, Л.С. Рязанова<sup>1</sup>, В.В. Дубровский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация

<sup>2</sup> ЗАО «Урал–Омега», г. Магнитогорск, Российская Федерация

E-mail: sikadchenko@mail.ru

**Аннотация.** Спектральные задачи для дифференциальных операторов, заданных на квантовых графах, представляют большой научный интерес. Это связано с необходимостью решения таких задач в квантовой механике, моделировании компьютерных сетей, обработке изображений, алгоритмах ранжирования, моделировании электрических, механических, акустических процессов, в сетях разнообразной природы, конструировании наносистем с заданными свойствами и других областях науки и техники. На сегодня разработана теоретическая часть решения прямых и обратных спектральных задач на квантовых графах. Но вычислительные алгоритмы, построенные на этих методах, вычислительно малоэффективны. Мы не встречали опубликованных работ, в которых были бы рассмотрены примеры численного решения спектральных задач на конечных связанных графах с большим количеством вершин и ребер. Поэтому разработка новых вычислительно эффективных алгоритмов численного решения спектральных задач, заданных на конечных связанных графах, является актуальной.

Разработана методика нахождения собственных значений краевых задач, заданных на конечных связанных графах, с необходимым количеством вершин и ребер. Для использования этой методики надо знать собственные значения и вектор собственных функций соответствующих невозмущенных вектор-операторов, которые, как правило, самосопряженные. Находить их вручную, в случае большого количества у графа вершин и ребер, достаточно сложно. Это привело к необходимости написать пакет программ в математической среде MAPLE, позволяющий в символьном режиме находить трансцендентные уравнения для вычисления собственных значений и нахождения собственных функций не возмущенных краевых задач. Приведены примеры вычисления собственных значений для квантового графа, моделирующего молекулу ароматического соединения антрацена.

*Ключевые слова:* асимптотические формулы; собственные значения и собственные функции; дискретные и самосопряженные операторы; обратные спектральные задачи; метод Галеркина.

**Введение.** В статьях [1–18] разработан численный метод нахождения собственных значений дискретного полуограниченного дифференциального оператора вида  $L=T+P$ , заданного в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D_L \in H$ . Здесь  $T$  – самосопряженный оператор такого же порядка, как и оператор  $L$ . Рассмотрим краевую задачу, порожденную оператором  $L$ :

$$Lu = \mu u, \quad Gu|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  – граница области  $D_L$ . Для нахождения собственных значений  $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$  спектральной задачи (1) произведем дискретизацию области  $D_L$  и построим последовательность  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  конечномерных пространств, которая полна в  $H$ . Подберем ортонормированные базисы  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  пространств  $H_n \subseteq H$  таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям задачи (1).

В статье [16] доказана теорема.

**Теорема.** *Приближенные собственные значения  $\mu_n$  спектральной задачи (1) находятся по линейным формулам*



$$\tilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \tilde{\delta}_n, \quad n \in N, \quad (2)$$

где  $\tilde{\delta}_n = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n)]$ ,  $\tilde{\mu}_k(n)$  –  $n$ -е приближения по Галеркину к соответствующим собственным значениям  $\mu_k$  спектральной задачи. При этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_n = 0$ .

За систему координатных функций  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  возьмем систему собственных функций спектральной задачи

$$Tv = \lambda v, \quad Gv|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

С учетом собственных значений  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  и ортонормированных собственных функций  $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  оператора  $T$  формулы (2) записываются в виде

$$\tilde{\mu}_n(n) = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \tilde{\delta}_n, \quad n \in N. \quad (4)$$

Линейные формулы (4) позволяют находить приближенные собственные значения с необходимым порядковым номером, зная спектральные характеристики соответствующего невозмущенного оператора. Они позволяют находить собственные значения оператора независимо от собственных значений с меньшими порядковыми номерами. Решают проблему вычисления всех точек спектра дискретного полуограниченного оператора  $l_j = 1$  с любыми порядковыми номерами. С возрастанием порядкового номера собственного значения оператора  $B_{5_n} = \frac{4}{b_n} (40 + 28 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 52 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 75 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 9 \cos(8\sqrt{\lambda_n}))$  точность его вычисления по формулам (4) возрастает.

В данной статье рассмотрены вопросы нахождения приближенных собственных значений на квантовых графах с использованием формулы (4).

**2. Прямые спектральные задачи на квантовых графах.** Пусть  $G = G(V, E)$  – конечный связанный ориентированный граф с последовательно соединенными ребрами. Через  $V = \{V_i\}_{i=1}^{j_0}$  обозначено множество вершин графа  $G$ , а через  $E = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$  – множество его ребер. Каждое ребро  $E_j$  графа  $G$  имеет длину  $l_j > 0$  и площадь поперечного сечения  $d_j > 0$ . На каждом ребре  $E_j$  графа  $G$  задан дискретный полуограниченный вектор-оператор

$$L = (L_1, L_2, \dots, L_{j_0}), \quad (5)$$

действующий в гильбертовом пространстве

$$H = L^2(G) = \{G = (G_1, G_2, \dots, G_{j_0}), G_j \in L^2[0, l_j], j = \overline{1, j_0}\}$$

со скалярным произведением

$$(g, h) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j ds, \quad g, h \in H. \quad (6)$$

Для компонент вектор-оператора  $L = T + P$  рассмотрим спектральные задачи

$$(T_j + P_j)u_j = \mu u_j, \quad u_j = u_j(s_j), \quad j = \overline{1, j_0}, \quad (7)$$

$$u_j(0) = u_k(0) = u_m(l_m) = u_n(l_n) = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j \left. \frac{du_j}{ds_j} \right|_{s_j=0} - \sum_{E_m \in E^{\omega}(V_i)} d_m \left. \frac{du_m}{ds_m} \right|_{s_m=l_m} = 0, \quad (9)$$

где  $T_j u_j = -\frac{d^2 u_j}{ds_j^2}$ ;  $P_j u_j = \sum_{k=1}^2 p_{jk}(s_j) u_j^{(2-k)}$ ;  $u_j, p_{jk} \in W_2^2[0, l_j]$ ;  $k=1, 2$ ;  $s_j \in [0, l_j]$ .

Граничные условия (8) означают, что вектор-функция  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{j_0})$  непрерывна во внутренних вершинах графа  $\mathbf{G}$ , а условие (9) – что поток через каждую вершину графа  $\mathbf{G}$  равен нулю. В формулах (9) через  $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$  обозначены множества дуг с началом (концом) в вершинах  $V_i$ , а  $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i)$ ,  $E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$ .

Найдем собственные значения и собственные вектор-функции для вектор-оператора  $T = (T_1, T_2, \dots, T_{j_0})$ . Для этого рассмотрим на графе  $G$  следующие спектральные задачи:

$$T_j v_j = \lambda v_j, \quad v_j = v_j(s_j), \quad j = \overline{1, j_0}, \quad (10)$$

$$v_j(0) = v_k(0) = v_m(l_m) = v_n(l_n) = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j \left. \frac{dv_j}{ds_j} \right|_{s_j=0} - \sum_{E_m \in E^\omega(V_i)} d_m \left. \frac{dv_m}{ds_m} \right|_{s_m=l_m} = 0. \quad (12)$$

Собственные значения  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  спектральной задачи (10)–(12) занумеруем в порядке неубывания их величин. Как правило, система собственных вектор-функций  $\{v_n = (v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{j_0 n})\}_{n=1}^\infty$  задачи (10)–(12) ортогональная и ее легко сделать нормированной. Если она не ортогональная, то ее необходимо разложить в ряды Фурье по системе вектор-функций  $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \dots, \varphi_{j_0 n})\}_{n=1}^\infty$  и нормализовать.

Нахождение собственных значений  $\lambda_n$  и соответствующих им собственных вектор-функций  $v_n = (v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{j_0 n})$  спектральных задач (10)–(12) для любых конечных замкнутых графов с большим количеством вершин приводит к большому количеству и громоздкости аналитических вычислений. Для упрощения этого процесса в среде математического пакета MAPLE был написан пакет программ, позволяющий находить необходимое количество этих спектральных характеристик для любых конечных графов [18].

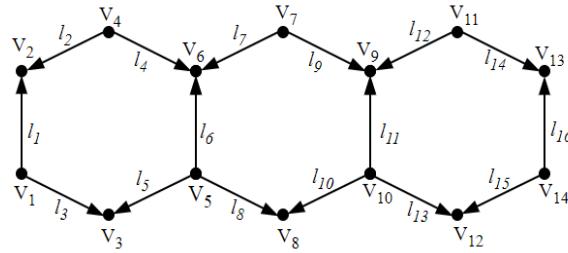
На основании формул (4) и (6) следует, что приближенные собственные значения вектор-оператора  $L$ , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве  $W_2^2(\mathbf{G})$ , находятся по формулам

$$\tilde{\mu}_n(n) = \lambda_n + \sum_{j=1}^{j_0} d_j \chi_j(s) \int_0^{l_j} v_{jn}(s) \sum_{k=1}^2 p_{jk}(s) v_{jn}^{(2-k)}(s) ds + \tilde{\delta}_n, \quad n \in N. \quad (13)$$

Здесь  $\chi_j(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, l_j], \\ 0, & s \notin [0, l_j]. \end{cases}$  Таким образом, по формуле (13) можно вычислять приближенные

собственные значения прямой спектральной задачи (10)–(12), если заданы на ребрах графа  $\mathbf{G}$  все функции  $p_{jk}$ .

**3. Численные эксперименты.** Проверку разработанной методики вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на геометрических графах проведем на примере молекул ароматических соединений антрацена  $C_{14}H_{10}$ . Граф, моделирующий молекулу антрацена, состоит из четырнадцати вершин ( $i_0 = 14$ ) и шестнадцати ребер ( $j_0 = 16$ ) (см. рисунок). Нахождение собственных значений  $\lambda_n$  и соответствующих им собственных вектор-функций  $v_n$  оператора  $T$  при решении спектральных задач (10)–(12) для конечных замкнутых графов с большим количеством вершин вызывает большие аналитические трудности. Поэтому в среде аналитических вычислений MAPLE был написан пакет программ, позволяющих находить эти спектральные характеристики для любых конечных ориентированных графов [18].



Разбиение ориентированного графа, моделирующего молекулу антрацена на вершины и ребра

Так как длины всех ребер для молекулы антрацена одинаковы, можно считать, что  $l_j = 1$  и  $d_j = 1$  для всех  $j = \overline{1, j_0}$ . Используя написанный пакет программ, получили трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений  $\lambda_n$  спектральной задачи (10)–(12)

$$62\sin(\sqrt{\lambda}) + 190\sin(3\sqrt{\lambda}) + 384\sin(5\sqrt{\lambda}) + 463\sin(7\sqrt{\lambda}) + 415\sin(9\sqrt{\lambda}) + 225\sin(11\sqrt{\lambda}) + 81\sin(13\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (14)$$

Компоненты  $v_{j_n}$  собственных вектор-функций  $v_n$  спектральной задачи (10)–(12), которые соответствуют собственным значениям  $\lambda_n$ , записываются в виде

$$v_{j_n} = C_{j_n} \left[ A_{j_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} s) + B_{j_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \right], \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_{1_n} &= \frac{4}{a_n} (8\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 23\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 16\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 9\sin(7\sqrt{\lambda_n})), \\ B_{1_n} &= \frac{4}{b_n} (58 + 88\cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 49\cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 9\cos(6\sqrt{\lambda_n})), \\ A_{2_n} &= \frac{4}{a_n} (26\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 61\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 48\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 21\sin(7\sqrt{\lambda_n})), \\ B_{2_n} &= \frac{4}{b_n} (16 + 30\cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 15\cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 7\cos(6\sqrt{\lambda_n})), \\ A_{3_n} &= -\frac{4}{a_n} (8\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 23\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 16\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 9\sin(7\sqrt{\lambda_n})), \\ B_{3_n} &= \frac{4}{b_n} (58 + 88\cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 49\cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 9\cos(6\sqrt{\lambda_n})), \\ A_{4_n} &= -\frac{4}{a_n} (26\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 61\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 48\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 21\sin(7\sqrt{\lambda_n})), \\ B_{4_n} &= \frac{12}{b_n} (16 + 30\cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 15\cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 7\cos(6\sqrt{\lambda_n})), \\ A_{5_n} &= \frac{4}{a_n} (41\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 85\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 80\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 37\sin(7\sqrt{\lambda_n}) + 9\sin(9\sqrt{\lambda_n})), \\ B_{5_n} &= \frac{4}{b_n} (40 + 28\cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 52\cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 75\cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 9\cos(8\sqrt{\lambda_n})), \\ A_{6_n} &= \frac{4}{a_n} (5\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 9\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 16\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 13\sin(7\sqrt{\lambda_n}) + 9\sin(9\sqrt{\lambda_n})), \\ B_{6_n} &= \frac{4}{b_n} (40 + 28\cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 52\cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 75\cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 9\cos(8\sqrt{\lambda_n})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{7_n} &= \frac{2}{a_n} (93 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 212 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 214 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 124 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + 45 \sin(9\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{7_n} &= \frac{2}{b_n} (64 + 99 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 127 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 73 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 15 \cos(8\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{8_n} &= -\frac{8}{a_n} (23 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 47 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 48 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 25 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + 9 \sin(9\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{8_n} &= \frac{4}{b_n} (40 + 75 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 52 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 28 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 9 \cos(8\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{9_n} &= -\frac{2}{a_n} (93 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 212 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 214 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 124 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + 45 \sin(9\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{9_n} &= \frac{2}{b_n} (64 + 99 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 127 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 73 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 45 \cos(8\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{10_n} &= \frac{2}{a_n} (217 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 127 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 234 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 185 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + 87 \sin(9\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{10_n} &= \frac{2}{b_n} (29 + 84 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 101 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 107 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 60 \cos(8\sqrt{\lambda_n}) + 27 \cos(10\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{11_n} &= -\frac{2}{a_n} (8 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + \sin(3\sqrt{\lambda_n}) - 30 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) - 63 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) - 30 \sin(9\sqrt{\lambda_n}) - 51 \sin(11\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{11_n} &= \frac{2}{b_n} (29 + 84 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 101 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 107 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 60 \cos(8\sqrt{\lambda_n}) + 27 \cos(10\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{12_n} &= \frac{1}{a_n} (103 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 291 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 392 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 371 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + \\
 &\quad + 261 \sin(9\sqrt{\lambda_n}) + 81 \sin(11\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{12_n} &= \frac{3}{b_n} (5 + 45 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 60 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 84 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 51 \cos(8\sqrt{\lambda_n}) + 27 \cos(10\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{13_n} &= -\frac{4}{a_n} (34 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 108 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 132 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 124 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + \\
 &\quad + 69 \sin(9\sqrt{\lambda_n}) + 27 \sin(11\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{13_n} &= \frac{2}{b_n} (29 + 84 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 101 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 107 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 60 \cos(8\sqrt{\lambda_n}) + 27 \cos(10\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{14_n} &= -\frac{1}{a_n} (103 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 291 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 392 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 371 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + \\
 &\quad + 216 \sin(9\sqrt{\lambda_n}) + 81 \sin(11\sqrt{\lambda_n})), \\
 B_{14_n} &= \frac{3}{b_n} (5 + 45 \cos(2\sqrt{\lambda_n}) + 60 \cos(4\sqrt{\lambda_n}) + 84 \cos(6\sqrt{\lambda_n}) + 51 \cos(8\sqrt{\lambda_n}) + 27 \cos(10\sqrt{\lambda_n})), \\
 A_{15_n} &= \frac{1}{a_n} (105 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 266 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 482 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 523 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + \\
 &\quad + 442 \sin(9\sqrt{\lambda_n}) + 225 \sin(11\sqrt{\lambda_n})), \quad B_{15_n} = 1, \\
 A_{16_n} &= \frac{1}{a_n} (19 \sin(\sqrt{\lambda_n}) + 114 \sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 286 \sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 403 \sin(7\sqrt{\lambda_n}) + \\
 &\quad + 388 \sin(9\sqrt{\lambda_n}) + 225 \sin(11\sqrt{\lambda_n}) + 81 \sin(13\sqrt{\lambda_n})), \quad B_{16_n} = 1,
 \end{aligned}$$

$$a_n = 43\sin(\sqrt{\lambda_n}) + 154\sin(3\sqrt{\lambda_n}) + 320\sin(5\sqrt{\lambda_n}) + 403\sin(7\sqrt{\lambda_n}) +$$

$$+ 388\sin(9\sqrt{\lambda_n}) + 225\sin(11\sqrt{\lambda_n}) + 81\sin(13\sqrt{\lambda_n}),$$

$$b_n = 16 + 11\sin(2\sqrt{\lambda_n}) + 143\sin(4\sqrt{\lambda_n}) + 177\sin(6\sqrt{\lambda_n}) + 244\sin(8\sqrt{\lambda_n}) +$$

$$+ 144\sin(10\sqrt{\lambda_n}) + 81\sin(12\sqrt{\lambda_n}).$$

Система  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  ортогональна в смысле скалярного произведения (6). Множители  $C_{j_n}$ , входящие в (15), находятся из условия нормировки этой системы.

В табл. 1, 2 приведены результаты вычисления первых собственных значений вектор-оператора  $L$ , заданного на графе, который моделирует молекулу антрацена. Расчеты были проведены для следующих заданных функций  $p_{jk}(s_j)$  ( $1 \leq j \leq 16$ ,  $k = 1, 2$ ,  $s_j \in [0, l_j]$ ):

$$p_{j_1} = 0, 1 \leq j \leq 16, p_{1_2} = s^2 + 5, p_{2_2} = s^2 + 5s + 1, p_{3_2} = s^2 + 5s - 1, p_{4_2} = 5s + 1, p_{5_2} = 5s - 1,$$

$$p_{6_2} = 0, p_{7_2} = 5s + 1, p_{8_2} = 5s - 1, p_{9_2} = s^2 + 5s + 1, p_{10_2} = s^2 + 5s - 1,$$

$$p_{11_2} = s^2 + 5s, p_{12_2} = s^2 + 5s + 1, p_{13_2} = s^2 + 5s - 1, p_{14_2} = 5s + 1, p_{15_2} = 5s - 1, p_{16_2} = 15s^2 - 9.$$

Таблица 1

$n$	$\tilde{\mu}_n$	$\hat{\mu}_n$	$ \tilde{\mu}_n - \hat{\mu}_n $
1	1,941823	-0,233790	2,175613
2	2,341721	2,639681	0,297960
3	2,985317	3,237994	0,252677
4	3,399854	3,402611	0,002757
5	3,735492	4,079347	0,343855
6	4,433908	4,615242	0,181334
7	5,174741	5,566181	0,391440
8	9,639011	9,777037	0,138026
9	12,046596	11,989504	0,057100
10	14,999971	15,078706	0,078740
11	22,637372	22,584269	0,053100
12	26,389451	26,283345	0,106110
13	28,364816	28,264205	0,100610
14	28,927379	29,020026	0,092650
15	30,917058	30,892965	0,024090
16	31,675799	31,728728	0,052930
17	36,423006	36,537131	0,114120
18	41,600790	41,681763	0,080970
19	47,346396	47,400335	0,053940
20	60,803221	60,734402	0,068820

Таблица 2

$n$	$\tilde{\mu}_n$	$\hat{\mu}_n$	$ \tilde{\mu}_n - \hat{\mu}_n $
32	133,782235	133,836558	0,054400
33	138,087581	138,073378	0,014200
34	139,363870	139,410644	0,046700
35	149,351679	149,400349	0,048600
36	160,022389	160,057500	0,035100
37	171,268499	171,293752	0,025300
38	196,385492	196,337380	0,048100
39	207,948995	207,929674	0,019300
40	213,591153	213,560590	0,030600
41	215,799666	215,842331	0,042600
42	221,265569	221,252390	0,013200
43	222,830313	222,882445	0,052100
44	235,432590	235,485607	0,053000
45	248,847190	248,889225	0,042000
46	262,838151	262,872782	0,034600
47	293,789481	293,775166	0,014300
48	307,937209	307,962172	0,025000
49	314,826087	314,833452	0,007400
50	317,553092	317,621732	0,068600
51	324,179804	324,204533	0,024700

В табл. 1, 2 под  $\tilde{\mu}_n$  обозначены собственные значения спектральной задачи (7)–(9), которые вычислены по формулам (13), а  $\hat{\mu}_n$  – вычисленные методом Галеркина с использованием скалярного произведения (6).

**4. Заключение.** Использование написанного в математической среде MAPLE пакета программ для нахождения собственных значений  $\lambda_n$  и соответствующих им собственных вектор-функций  $v_n$  оператора  $T$ , при решении прямых спектральных задач (10)–(12), заданных на конечных ориентированных графах, значительно упрощает нахождение собственных значений вектор-оператора  $L$  по формулам (13).

Проведенные многочисленные вычислительные эксперименты по вычислению собственных значений оператора  $L$ , заданного на графе  $G$ , показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики.

### Литература

1. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости между параллельными плоскостями при малых числах Рейнольдса / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Доклады Академии наук. – 1997. – Т. 355, № 5. – С. 605–608.
2. Кадченко, С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 37(170), Вып. 4. – С. 4–23.
3. Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Численные методы нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27(286), Вып. 13. – С. 45–57.
4. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265–1272.
5. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 17(234), Вып. 8. – С. 46–51.
6. Кадченко, С.И. Вычисление рядов Релея–Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494–1505.
7. Кадченко, С.И. Алгоритм нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40(299), Вып. 14. – С. 83–88.
8. Кадченко, С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами, методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2013. – № 6(107). – С. 23–30.
9. Computation of the First Eigenvalues of a Discrete Operator / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 4–7.
10. Кадченко, С.И. Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 15–25.
11. Кадченко, С.И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6(97). – С. 13–21.
12. Кадченко, С.И. Алгоритм решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко // Актуальные проблемы современной науки и техники и образования. – 2015. – Т. 3. – С. 138–141.
13. Обратная спектральная задача определения неоднородности упругого стержня / С.И. Кадченко, Г.А. Закирова, Л.С. Рязанова, О.А. Торшина // Актуальные проблемы современной науки и техники и образования. – 2018. – Т. 9, № 2. – С. 42–45.
14. Kadchenko, S.I. A Numerical Method for Inverse Spectral Problems / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 116–126.
15. Kadchenko, S.I. Calculation of Eigenvalues of Discrete Semibounded Differential Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Vol. 4, Iss. 1. – P. 38–47.
16. Кадченко, С.И. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных следов / С.И. Кадченко, О.А. Торшина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8. – С. 36–43.

17. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 380, № 2. – С. 160–163.

18. Программа решения самосопряженных спектральных задач на конечных связанных ориентированных графах: Свидетельство № 2021660658 / А.В. Ставцева; правообладатель Ставцева А.В. – 2021660658; заявление 10.06.2021, зарегистрир. 29.07.2021, реестр программы на ЭВМ.

Поступила в редакцию 20 октября 2022 г.

### Сведения об авторах

Кадченко Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: sikadchenko@mail.ru

Ставцева Анастасия Викторовна – начальник отдела ИТ, ЗАО «Урал-Омега», г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: avstavtceva@gmail.com

Рязанова Любовь Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: ryazanovals23@gmail.com

Дубровский Владислав Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: vvdubrov@mail.ru

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 16–25*

DOI: 10.14529/mmph230102

## ALGORITHMS FOR THE COMPUTATION OF THE EIGENVALUES OF DISCRETE SEMI-BOUNDED OPERATORS DEFINED ON QUANTUM GRAPHS

*S.I. Kadchenko<sup>1</sup>, A.V. Stavtceva<sup>2</sup>, L.S. Ryazanova<sup>1</sup>, V.V. Dubrovskii<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> G.I. Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation  
E-mail: sikadchenko@mail.ru, ryazanovals23@gmail.com, vvdubrov@mail.ru

<sup>2</sup> Ural-Omega, Magnitogorsk, Russian Federation  
E-mail: avstavtceva@gmail.com

Abstract. Spectral problems for differential operators defined on quantum graphs are of great scientific interest related to problems in quantum mechanics, computer network modeling, image processing, ranking algorithms, modeling of electrical, and mechanical and acoustic processes, in networks of a diverse nature, in designing nano systems with prescribed properties and in other areas. Theoretical solutions of direct and inverse spectral problems on quantum graphs have been developed, but computational algorithms based on these methods are computationally inefficient. We have not seen any published works that consider examples of numerical solutions of spectral problems on finite connected graphs with a large number of vertices and edges. Therefore, the development of new computationally effective algorithms for numerical solution of spectral problems given on finite connected graphs is urgent.

This paper develops a technique for finding the eigenvalues of boundary value problems on finite connected graphs with a required number of vertices and edges. To use this technique, it is necessary to know the eigenvalues and vectors of the eigenfunctions of corresponding unperturbed vector operators which are usually self-adjoint. Finding them manually, if the graph has a large number of vertices and edges, is difficult. This led to writing a package of programs in the mathematical environment Maple to find transcendental equations in the symbolic mode to calculate eigenvalues and find the eigenfunctions of unperturbed boundary value problems. Examples of calculating eigenvalues for a quantum graph which models an anthracene aromatic compound molecule are presented.

*Keywords: asymptotic formulas; eigenvalues and eigenfunctions; discrete and self-adjoint operators; inverse spectral problems; Galerkin method.*

### References

1. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Vychislenie pervykh sobstvennykh chisel kraevoy zadachi gidrodinamicheskoy ustoychivosti mezhdu parallel'nymi ploskostyami pri malykh chislakh Reynol'dsa (The Calculation of the First Eigenvalues of the Boundary Value Problem of the Theory of Hydrodynamic Stability of the Flow Between Two Parallel Planes at Small Reynolds Numbers). *Doklady Akademii nauk*, 1997, Vol. 355, no. 5, pp. 605–608. (in Russ.).
2. Kadchenko S.I. Method of Regularized Traces. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2009, no. 37(170), Iss. 4, pp. 4–23. (in Russ.).
3. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Numerical Methods of Eigenvalues and Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoin Operator Finding. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2012, no. 27(286), Iss. 13, pp. 45–57. (in Russ.).
4. Kadchenko S.I., Kinzina I.I. Computation of Eigenvalues of Perturbed Discrete Semibounded Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, Vol. 46, Iss. 7, pp. 1200–1206. DOI: 10.1134/S0965542506070116
5. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Numeric Method of Finding the Eigenvalues for the Discrete Lower Semibounded Operators. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2011, no. 17(234), Iss. 8, P. 46–51. (in Russ.).
6. Kadchenko S.I. Computing the Sums of Rayleigh–Schrödinger Series of Perturbed Self-Adjoint Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, Vol. 47, Iss. 9, pp. 1435–1445. DOI: 10.1134/S0965542507090059
7. Kadchenko, S.I., Kakushkin S.N. The Algorithm of Finding of Meanings of Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoin Operators Via Method of Regularized Traces. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2012, no. 40(299), Iss. 14, pp. 83–88. (in Russ.).
8. Kadchenko S.I. Numerical Method for the Solution of Inverse Problems Generated by Perturbations of Self-Adjoint Operators by Method of Regularized Traces. *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, Iss. 6(107), pp. 23–30. (in Russ.).
9. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. Computation of the first eigenvalues of a discrete operator. *Electromagnetic waves and electronic systems*, 1998, Vol. 3, no. 2, pp. 4–7.
10. Kadchenko S.I. A Numerical Method for Solving Inverse Problems Generated by the Perturbed Self-Adjoint Operators. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2013, Vol. 6, no. 4, pp. 15–25. (in Russ.).
11. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded from below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2012, no. 6(97), pp. 13–21. (in Russ.).
12. Kadchenko S.I. Algoritm resheniya obratnykh zadach, porozhdennykh vozmushchennymi samosopryazhennymi operatorami (The Algorithm for solving inverse problems generated by perturbed self-adjoint operators). *Aktual'nye problemy sovremennoy nauki i tekhniki i obrazovaniya (Actual Problems of Modern Science and Technology and Education)*, 2015, Vol. 3, pp. 138–141. (in Russ.).
13. Kadchenko S.I., Zakirova G.A., Ryazanova L.S., Torshina O.A. Obratnaya spektral'naya zadacha opredeleniya neodnorodnosti uprugogo sterzhnya (Inverse spectral problem of determining the inhomogeneity of an elastic rod). *Aktual'nye problemy sovremennoy nauki i tekhniki i obrazovaniya*, 2018, Vol. 9, no. 2, pp. 42–45. (in Russ.).
14. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. A Numerical Method for Inverse Spectral Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2015, Vol. 8, no. 3, pp. 116–126. (in Russ.).
15. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Calculation of Eigenvalues of Discrete Semibounded Differential Operators. *J. Comp. Eng. Math.*, 2017, Vol. 4, Iss. 1, pp. 38–47. DOI: 10.14529/jcem170104



16. Kadchenko S.I., Torshina O.A. Calculation of Eigenvalues of Elliptic Differential Operators using Regularized Trace Theory. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2016, Vol. 8, Iss. 2, pp. 36–43. DOI: 10.14529/mmph160205

17. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. New Method of Approximated Calculus of the Maiden Eigenvalues of a Spectral Problem of Hydrodynamic Stability of Current Puzel in a Round Tube. *Proc. Academy of Sciences*, 2001, Vol. 380, no. 2, pp. 160–163.

18. *The Program for Solving Self-Adjoint Spectral Problems on Finite Connected Oriented Graphs*: Certificate no. 2021660658, Stavtceva A.V.; copyright Stavtceva A.V., registration date 29.07.2021.

*Received October 20, 2022*

### Information about the authors

Kadchenko Sergey Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics and Informatics Department, G.I. Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: sikadchenko@mail.ru

Stavtceva Anastasiya Viktorovna is Head of IT Department, Ural-Omega CJSC, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: avstavtceva@gmail.com

Ryazanova Lyubov' Sergeevna is Cand. Sc. (Pedagogical), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, G.I. Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: ryazanovals23@gmail.com

Dubrovsky Vladislav Vladimirovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, G.I. Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: vvdubrov@mail.ru

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИКЬЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

**В.В. Карачик**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: karachik@susu.ru

**Аннотация.** Определяется элементарное решение полигармонического уравнения и приводятся его свойства. Это элементарное решение совпадает с известными ранее элементарными решениями бигармонического и тригармонического уравнений. Используя введенное элементарное решение, находится интегральное представление решений неоднородного полигармонического уравнения в ограниченной области с гладкой границей. На основе полученного интегрального представления исследуется разрешимость задачи Рикье–Неймана. Сначала определяется понятие функции Грина задачи Рикье–Неймана, а затем доказывается существование так определенной функции Грина. Затем, используя интегральное представление решений полигармонического уравнения и функцию Грина задачи Рикье–Неймана, находится интегральное представление решения задачи Рикье–Неймана в единичном шаре. Приведен пример решения задачи Неймана для уравнения Пуассона с простейшей правой частью, необходимый в дальнейшем.

На основе функции Грина задачи Рикье–Неймана доказана теорема об интегральном представлении решения краевой задачи Рикье–Неймана с граничными данными, интеграл от которых по единичной сфере обращается в нуль. В заключение на основании доказанной теоремы приводится пример вычисления решения задачи Рикье–Неймана с граничными функциями, совпадающими со следами однородных гармонических полиномов на единичной сфере.

*Ключевые слова:* полигармоническое уравнение; задача Рикье–Неймана; функция Грина.

**Введение.** Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Приведем только некоторые из них. Например, в двумерном случае, в работе [1], на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [2, 3], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [4, 5]. Исследования задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре можно найти в работах [6, 7]. В них получен явный вид функции Грина. Явное представление функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона получено в статье [8], а в [9] для 3-гармонического уравнения в шаре представлен оператор Грина, действующий на полиномиальные данные.

В связи с бигармоническим уравнением отметим недавние работы [10, 11], посвященные условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В качестве наиболее общих результатов по обобщенной задаче Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях, отметим работу [12]. В статье [13] для бигармонического уравнения в шаре получен явный вид функций Грина задач Навье [14] и Рикье–Неймана. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [15] исследована разрешимость четырех краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией.

Известно [16], что для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  при  $n \geq 2$  функция Грина имеет вид

$$G_2(x, \xi) = E(x, \xi) - E(x/|x|, |x|\xi),$$

где  $E(x, \xi)$  – элементарное решение уравнения Лапласа. Элементарные решения бигармонического и 3-гармонического уравнений – функции  $E_4(x, \xi)$  и  $E_6(x, \xi)$  – были введены в работах [9, 17, 18]. Кроме того, в этих работах были найдены функции Грина соответствующих задач Ди-

рихле в  $S$ . В дальнейшем изложении нам понадобится функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в  $S$ . Она была построена в работе [19]

$$\mathcal{N}_2(x, \xi) = E_2(x, \xi) - E_0(x, \xi), \tag{1}$$

где гармоническая по  $x, \xi \in S$  функция  $E_0(x, \xi)$  имеет вид

$$E_0(x, \xi) = \int_0^1 (\hat{E}_2(x/|x|, t|x|\xi) + 1) \frac{dt}{t},$$

причем  $\hat{E}_2(x, \xi) = \Lambda_x E_2(x, \xi)$ . Здесь обозначено  $\Lambda u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$ . Индекс  $x$  указывает, что оператор

$\Lambda$  применяется по переменным  $x$ . Нетрудно заметить, что  $\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$  на  $\partial S$ . Поскольку

$$\hat{E}_2(x, \xi) = -\frac{|x|^2 - x \cdot \xi}{|x - \xi|^n},$$

то функция

$$\hat{E}_2\left(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\right) = -\frac{1 - (x \cdot \xi)t}{(1 - 2t(x \cdot \xi) + |x|^2|\xi|^2 t^2)^{n/2}}$$

симметрична и, значит, функция  $E_0(x, \xi)$ , а следовательно, и функция  $\mathcal{N}_2(x, \xi)$  тоже симметричны. Функция  $\mathcal{N}_2(x, \xi)$  обладает свойствами [8, теорема 3.1] и [13, теорема 3]

$$\Lambda_x \mathcal{N}_2(x, \xi) = \Lambda_x E_2(x, \xi) - (\Lambda_x E_2)(x/|x|, |x|\xi) - 1, \quad x, \xi \in S, x \neq \xi$$

$$\Lambda_x \mathcal{N}_2(x, \xi) \Big|_{\xi \in \partial S} = -\frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - 1, \quad x \in S,$$

а поэтому верны равенства

$$\int_S \frac{\partial \mathcal{N}_2(x, \xi)}{\partial \nu_x} f(\xi) d\xi \Big|_{x \in \partial S} = -\int_S f(\xi) d\xi,$$

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{N}_2(x, \xi)}{\partial \nu_x} \psi(\xi) ds_\xi \Big|_{x \in \partial S} = \psi(x) \Big|_{\partial S} - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi.$$

В [13, теорема 3] показано, что для следующей задачи Неймана

$$\Delta u(x) = f(x), x \in S; \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \psi(x), x \in \partial S$$

при выполненном условии

$$\int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi = \int_S f(\xi) d\xi$$

решение записывается в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_2(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi + C.$$

Для полигармонического уравнения задача Неймана исследована в работах [20, 21], а в [22] приведено решение этой задачи.

**Элементарное решение.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда множество  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  можно разбить на два непересекающихся подмножества  $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$  и дополнение к нему  $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$ . Поскольку множество  $\mathbb{N}_m^c$  – конечное, то  $\mathbb{N}_m$  – бесконечное. Ясно, что  $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$ , а поэтому  $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$ . Определим элементарное решение  $m$ -гармонического уравнения  $\Delta^m u = 0$  в виде

$$E_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m (2, 2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^* (2, 2)_{m-1}} \left( \ln |x - \xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c. \end{cases} \tag{2}$$

## Математика

где  $(a, b)_k = a(a+b)\dots(a+kb-b)$  – обобщенный символ Похгаммера с соглашением  $(a, b)_0 = 1$ , а символ  $(a, b)_k^*$  означает, что если среди сомножителей  $a, (a+b), \dots, (a+kb-b)$ , входящих в  $(a, b)_k$ , есть 0, то его следует заменить на 1, например,  $(-2, 2)_3^* = (-2) \cdot 1 \cdot 2 = -4$ . Кроме того, если в суммах, входящих в (2), верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю. Заметим, что  $(2-n, 2)_m = (2-n)(4-n)\dots(2m-n) \neq 0$  при  $n \in \mathbb{N}_m$  и, значит, первая часть формулы (2) определена корректно.

Справедливы следующие простые утверждения.

**Лемма 1.** Функция  $E_{2m}(x, \xi)$  совпадает с элементарными функциями  $E(x, \xi)$ ,  $E_4(x, \xi)$  и  $E_6(x, \xi)$  при  $m=1$ ,  $m=2$  и  $m=3$  соответственно.

**Лемма 2.** Симметричная функция  $E_{2m}(x, \xi)$ , определенная при  $x \neq \xi$ , удовлетворяет равенствам

$$\Delta_\xi E_{2m}(x, \xi) = -E_{2(m-1)}(x, \xi), \quad \Delta_\xi E_2(x, \xi) = 0.$$

Найдем интегральное представление функций  $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ , где  $D \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с гладкой границей  $\partial D$  с помощью  $E_{2m}(x, \xi)$ .

**Теорема 1.** Для любой функции  $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$  справедливо следующее представление:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (E_{2k+2}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} - \frac{\partial E_{2k+2}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u) ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D E_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi,$$

где  $\omega_n = |\partial S|$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\nu$  – внешняя единичная нормаль к  $\partial D$ .

Доказательства этих утверждений опустим.

Пусть  $n \geq 3$ . В рассуждениях, приводимых ниже, необходима также следующая функция, задаваемая рекуррентно:

$$E_{2k}^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E_{2k-2}^r(x, y) E_2(y, \xi) dy, \quad k \geq 2,$$

где  $E_2^r(x, \xi) = E_2(x, \xi)$ . Например,

$$E_4^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, y) E_2(y, \xi) dy, \quad E_6^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n^2} \int_S E_2(x, \eta) \int_S E_2(\eta, y) E_2(y, \xi) dy d\eta.$$

**Лемма 3.** Функция  $E_{2m}^r(x, \xi)$  ( $m > 1$ ) определена при  $\xi, x \in S$ ,  $\xi \neq x$  и имеет, быть может, особенность при  $\xi = x$  такую, что  $E_{2m}^r(x, \xi) \leq C|x-\xi|^{3-n}$ , где  $C$  – некоторая положительная константа. При  $\xi \neq x$  справедливо равенство  $\Delta E_{2m}^r(x, \xi) = -E_{2m-2}^r(x, \xi)$ .

По теореме о стирании особенностей [23] функция  $h_{2k}(x, \xi) = E_{2k}(x, \xi) - E_{2k}^r(x, \xi)$  является  $k$ -гармонической в  $S$  по  $\xi$ .

**Функция Грина задачи Рикье–Неймана.** Задача Рикье–Неймана, сформулированная в [24], состоит в нахождении функции  $u \in C^{2m}(S) \cap C^{2m-1}(\bar{S})$ , которая является решением следующей граничной задачи для неоднородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_0(\xi), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(\xi), \dots, \quad \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_{m-1}(\xi), \quad \xi \in \partial S. \quad (3)$$

**Определение.** Функцию вида

$$\mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = E_{2m}(x, \xi) + g_{2m}^n(x, \xi), \quad m \geq 1,$$

где  $g_{2m}^n(x, \xi)$  –  $m$ -гармоническая функция по переменным  $x, \xi \in S$  такая, что

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = \dots = \frac{\partial \Delta_\xi^{m-2} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\xi^{m-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = (-1)^m,$$

где  $x \in S$  назовем функцией Грина задачи Рикье–Неймана (3).

**Теорема 2.** Функция  $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$  при  $\xi, x \in S$  и  $m > 1$ , определяемая рекуррентно равенством

$$\mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \left( \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) \mathcal{N}_2(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy \right),$$

где  $\tau_n = |S|$ , а  $\mathcal{N}_2(x, y)$  – функция Грина задачи Неймана из (1), является функцией Грина задачи Рикье–Неймана (3). Функция  $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$  обладает свойством

$$\Lambda_x \mathcal{N}_{2k}(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} = 0, k > 1, \quad \Lambda_x \mathcal{N}_2(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} = -1, \quad \xi \in S.$$

**Пример 1.** Для нахождения решения задачи Рикье–Неймана с многочленами в граничных условиях или в правой части уравнения необходима следующая формула:

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) |\xi|^{2l} d\xi = -\frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)(2l+n)} + \frac{1}{(2l+2)(n-2)},$$

где  $l \in \mathbb{N}_0$ . Докажем ее. В работе [19, замечание 2] была получена аналогичная формула

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) |\xi|^{2l} H_k(\xi) d\xi = -\frac{|x|^{2l+2} - (2l+2+k)/k}{(2l+2)(2l+2k+n)} H_k(x), \tag{4}$$

где  $H_k(x)$  – однородный гармонический полином степени  $k$ , которая не работает в рассматриваемом случае, так как правая часть в ней не определена при  $k = 0$ .

Рассмотрим полную систему однородных степени  $k \in \mathbb{N}_0$  ортогональных на  $\partial S$  гармонических полиномов  $\{H_k^{(i)}(x) : i = 1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  [25] такую, что  $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(\xi))^2 ds_\xi = \omega_n$ , где  $h_k$  – размерность базиса. В [8, теорема 1] установлено, что имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, \xi) |\xi|^{2l} H_k(\xi) d\xi = -\frac{|x|^{2l+2} H_k(x)}{(2l+2)(2l+2k+n)} + \frac{H_k(x)}{(2l+2)(2k+n-2)},$$

где  $k \in \mathbb{N}_0$  и  $l \in \mathbb{N}_0$ . Отсюда получаем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, \xi) |\xi|^{2l} d\xi = -\frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)(2l+n)} + \frac{1}{(2l+2)(n-2)}.$$

В [19, теорема 1] доказано, что при  $x \in S$  и  $\xi \in \bar{S}$

$$E_0(x, \xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi),$$

причем приведенный ряд сходится равномерно по  $\xi$ . Поэтому имеем

$$\int_S E_0(x, \xi) |\xi|^{2l} d\xi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) \int_S H_k^{(i)}(\xi) |\xi|^{2l} d\xi = 0,$$

и значит, учитывая (1), получаем доказываемую формулу.

**Интегральное представление решения.** Верно следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть граничные функции задачи обладают гладкостью  $\varphi_0 \in C(\partial S)$ ,  $\varphi_k \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$  и  $\int_{\partial S} \varphi_k(\xi) ds_\xi = 0$  при  $k = 1, \dots, m-1$ , а  $f = 0$ . Тогда решение задачи Рикье–Неймана (3) существует и его можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k[\varphi_k](x) + C, \tag{5}$$

где обозначено

$$u_k[\varphi](x) = \frac{(-1)^k}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2k+2}^0(x, \xi) \varphi(\xi) ds_\xi,$$

$$\mathcal{N}_{2k+2}^0(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) \mathcal{N}_{2k}^0(y, \xi) dy, k > 0; \quad \mathcal{N}_2^0(x, \xi) = \mathcal{N}_2(x, \xi).$$

Для  $(k+1)$ -гармонической функции  $u_k[\varphi_k](x)$  выполнены условия

$$\Delta u_k[\varphi](x) = u_{k-1}[\varphi](x), \frac{\partial u_k[\varphi]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, k \in \mathbb{N}; \quad \Delta u_0[\varphi](x) = 0, \frac{\partial u_0[\varphi]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi(x).$$

**Пример 2.** Вычислим функции  $u_p[H_k](x)$  из формулы (5) при  $p \in \mathbb{N}_0$ , где  $H_k(x)$  – однородный гармонический полином степени  $k \in \mathbb{N}$ . В этом случае условия теоремы 3 выполнены, поскольку справедливо равенство  $\int_{\partial S} H_k(\xi) ds_\xi = 0$ . В работе [19] было установлено, что при  $x \in S$  и  $\xi \in \partial S$  верны равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(x, \xi) &= E(x, \xi) - E_0(x, \xi) = \frac{1}{n-2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+n-2} + \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)} \right) \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{n-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \end{aligned}$$

где система гармонических полиномов  $\{H_k^{(i)}(x)\}$ , определенная в примере 1, ортогональна на  $\partial S$ . Поэтому в силу равномерной сходимости ряда по  $\xi \in \partial S$  имеем

$$\begin{aligned} u_0[H_k](x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_2(x, \xi) H_k(\xi) ds_\xi = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial S} H_k(\xi) ds_\xi + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{h_m} H_m^{(i)}(x) \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_m^{(i)}(\xi) H_k(\xi) ds_\xi = \frac{1}{k} H_k(x). \end{aligned}$$

Вычислим  $u_1[H_k](x)$ . С помощью (4) при  $l=0$  и предыдущих вычислений найдем

$$\begin{aligned} u_1[H_k](x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_4^0(x, \xi) H_k(\xi) ds_\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_2(y, \xi) H_k(\xi) ds_\xi dy = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) u_0[H_k](y) dy = -\frac{1}{k} \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) H_k(y) dy = \frac{1}{k} \frac{|x|^2 - 1 - 2/k}{2(2k+n)} H_k(x). \end{aligned}$$

Аналогично в общем случае для  $u_p[H_k](x)$  при  $p \in \mathbb{N}$  имеем

$$u_p[H_k](x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2p+2}^0(x, \xi) H_k(\xi) ds_\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) u_{p-1}[H_k](y) dy. \quad (6)$$

Отсюда, используя найденную выше функцию  $u_1[H_k](x)$  и формулу (4), получим

$$u_2[H_k](x) = \left( \frac{|x|^4 - 1 - 4/k}{8k(2k+n)(2k+2+n)} - (k+2) \frac{|x|^2 - 1 - 2/k}{4k^2(2k+n)^2} \right) H_k(x).$$

Нетрудно убедиться, что 3-гармоническая функция  $u_2[H_k](x)$  удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u_2[H_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \left( \frac{(k+4)|x|^4 - k - 4}{8k(2k+n)(2k+2+n)} - (k+2) \frac{(k+2)|x|^2 - k - 2}{4k^2(2k+n)^2} \right) H_k(x) \Big|_{\partial S} = 0,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta u_2[H_k] &= \left( \frac{|x|^2}{2k(2k+n)} - \frac{(k+2)}{2k^2(2k+n)} \right) H_k(x) = u_1[H_k], \\ \frac{\partial \Delta u_2[H_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= \frac{(k+2)|x|^2 - k - 2}{2k(2k+n)} H_k(x) \Big|_{\partial S} = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, верны равенства

$$\Delta^2 u_2[H_k] = \frac{1}{k} H_k(x) = u_0[H_k], \quad \frac{\partial \Delta^2 u_2[H_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = H_k(x).$$

Используя (6) и (4), можно последовательно найти любую функцию  $u_p[H_k](x)$ .

### Литература

1. Begehr, H. Biharmonic Green functions / H. Begehr // Le Matematiche. – 2006. – Vol. 61, no. 2. – P. 395–405.

2. Begehr, H. Modified Harmonic Robin Function / H. Begehr, T. Vaitekhovich // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2013. – Vol. 58, Iss. 4. – P. 483–496.
3. Sadybekov, M.A. On an Explicit Form of the Green Function of the Robin Problem for the Laplace Operator in a Circle / M.A. Sadybekov // Advances in Pure and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 6, no. 3. – P. 163–172.
4. Wang, Y. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector / Y. Wang, L. Ye // Complex Variables Elliptic Equ. – 2013. – Vol. 58, Iss. 1. – P. 7–22.
5. Wang, Y. Tri-harmonic Boundary Value Problems in a Sector / Y. Wang // Complex Variables Elliptic Equ. – 2014. – Vol. 59, Iss. 5. – P. 732–749.
6. Boggio, T. Sulle funzioni di Green d'ordine  $m$  / T. Boggio // Rend. Circ. Matem. Palermo. – 1905. – Vol. 20. – P. 97–135.
7. Kalmenov, T.Sh. Green Function Representation for the Dirichlet Problem of the Polyharmonic Equation in a Sphere / T.Sh. Kalmenov, B.D. Koshanov, M.Y. Nemchenko // Complex Var. Elliptic Equ. – 2008. – Vol. 53, Iss. 2. – P. 177–183.
8. Karachik, V.V. On Green's Function of the Robin Problem for the Poisson Equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Advances in Pure and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 10, Iss. 3. – P. 203–214.
9. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.
10. Карачик, В.В. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Б.Т. Торекбек // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102, № 1. – С. 39–51.
11. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.
12. Солдатов, А.П. О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана / А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 217–225.
13. Карачик В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 5. – С. 673–686.
14. Sweers, G. A Survey on Boundary Conditions for the Biharmonic / G. Sweers // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – Vol. 54, Iss. 2. – P. 79–93.
15. Karachik, V. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball / V. Karachik, B. Turmetov, H. Yuan // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, Iss. 7. – P. 1–21.
16. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
17. Karachik, V.V. Greens Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, Iss. 9. – P. 1500–1521.
18. Карачик, В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 1. – С. 71–86.
19. Карачик, В.В. О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона / В.В. Карачик, Б.Х. Турметов // Матем. труды. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 17–34.
20. Бицадзе, А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций / А.В. Бицадзе // Дифференц. ур-ния. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 825–831.
21. Бицадзе, А.В. К задаче Неймана для гармонических функций / А.В. Бицадзе // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311, № 1. – С. 11–13.
22. Карачик, В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238.
23. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
24. Карачик, В.В. Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 653–662.
25. Karachik, V.V. On One Set of Orthogonal Harmonic Polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – Vol. 126, no. 12. – P. 3513–3519.

Поступила в редакцию 10 января 2023 г.

## Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3077-3595>, e-mail: [karachikvv@susu.ru](mailto:karachikvv@susu.ru)

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 26–33

---

DOI: 10.14529/mmph230103

## A SOLUTION TO THE RIQUIER–NEYMANN PROBLEM FOR POLYHARMONIC EQUATIONS IN A BALL

**V.V. Karachik**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*  
E-mail: [karachik@susu.ru](mailto:karachik@susu.ru)

**Abstract.** In this paper, an elementary solution for polyharmonic equations is determined and its properties are given. This elementary solution coincides with previously known elementary solutions of biharmonic and triharmonic equations. Using the elementary solution, an integral representation of the solutions of a non-homogeneous polyharmonic equation in a bounded domain with a smooth boundary is found. Based on the integral representation, the solvability of the Riquier–Neumann problem is investigated. First, the concept of the Green's function of the Riquier–Neumann problem is defined, and then the Green's function is proved. Using the integral representation of the solutions of the polyharmonic equation and the Green's function of the Riquier–Neumann problem, the integral representation of the solution of the Riquier–Neumann problem in a unit ball is found. An example of the solution of the Neumann problem for the Poisson equation with the simplest right-hand side is given, which is necessary in what follows.

On the basis of the Green's function of the Riquier–Neumann problem, a theorem on the integral representation of the solution of the Riquier–Neumann boundary value problem with boundary data, the integral of which over the unit sphere vanishes, is proved. In conclusion, on the basis of the theorem, an example of calculating the solution of the Riquier–Neumann problem with boundary functions coinciding with the traces of homogeneous harmonic polynomials on a unit sphere is given.

*Keywords:* polyharmonic equation; the Riquier–Neumann problem; Green's function.

### References

1. Begehr H. Biharmonic Green Functions. *Le Matematiche*, 2006, Vol. 61, no. 2, pp. 395–405.
2. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified Harmonic Robin Function. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, Vol. 58, Iss. 4, pp. 483–496. DOI: 10.1080/17476933.2011.625092
3. Sadybekov M.A. On an Explicit Form of the Green Function of the Robin Problem for the Laplace Operator in a Circle. *Adv. Pure Appl. Math.*, 2015, Vol. 6, no. 3, pp. 163–172. DOI: 10.1515/apam-2015-0003
4. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2013., Vol. 58, Iss.1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199
5. Wang Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2014, Vol. 59, Iss. 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566
6. Boggio T. Sulle funzioni di green d'ordine m. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1905, Vol. 20, pp. 97–135. DOI: 10.1007/BF03014033
7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation for the Dirichlet Problem of the Polyharmonic Equation in a Sphere. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2008, Vol. 53, Iss. 2, pp. 177–183. DOI: 10.1080/17476930701671726
8. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Green's Function of the Robin Problem for the Poisson Equation. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 2019, Vol. 10, Iss. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1515/apam-2017-0113



9. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirichlet Boundary Value Problem for the 3-harmonic Equation in a Ball. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2012, Vol. 5, Iss. 4, pp. 527–546.
10. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet–Riquier Problem for Biharmonic Equations. *Mathematical Notes*, 2017, Vol. 102, Iss. 1, pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0001434617070045
11. Karachik V.V. A Neumann-type Problem for the Biharmonic Equation. *Siberian Advances in Mathematics*, 2017, Vol. 27, Iss. 2, pp. 103–118. DOI: 10.3103/S105513441702002X
12. Soldatov, A.P. On the Fredholm Property and Index of the Generalized Neumann Problem. *Differential Equations*, 2020, Vol. 56, no. 2, pp. 212–220.
13. Karachik V.V. Green’s Functions of the Navier and Riquier–Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differential Equations*, 2021, Vol. 57, no. 5, pp. 654–668.
14. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2009, Vol. 54, Iss. 2, pp. 79–93. DOI: 10.1080/17476930802657640
15. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball. *Mathematics*, 2022, Vol. 10, Iss. 7, pp. 1–21. DOI: 10.3390/math10071158
16. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).
17. Karachik V.V. Greens Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, Vol. 64, Iss. 9, pp. 1500–1521. DOI: 10.1080/17476933.2018.1536702
18. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, Vol. 59, no. 1, pp. 66–81. DOI: 10.1134/S0044466919010113
19. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On the Green’s Function for the Third Boundary Value Problem. *Siberian Advances in Mathematics*, 2019, Vol. 29, Iss. 1, pp. 32–43. DOI: 10.3103/S1055134419010036
20. Bitsadze A.V. Some Properties of Polyharmonic Functions. *Differ. Equ.*, 1988, Vol. 24, no. 5, pp. 543–548.
21. Bitsadze, A.V. On the Neumann Problem for Harmonic Functions. *Sov. Math. Dokl.*, 1990, Vol. 41, no. 2, pp. 193–195.
22. Karachik V.V. On the Arithmetic Triangle Arising from the Solvability Conditions for the Neumann Problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, Iss. 2, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232
23. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1981, 512 p.
24. Karachik V.V. Riquier–Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Differential Equations*, 2018, Vol. 54, no. 5, pp. 648–657.
25. Karachik V.V. On One Set of Orthogonal Harmonic Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1998, Vol. 126, no. 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9

Received January 10, 2023

### Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3077-3595>, e-mail: karachikvv@susu.ru

## АВТОКОДИРОВЩИК ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ГОЛОВНОГО МОЗГА ЧЕЛОВЕКА

**Р.В. Мещеряков, Д.А. Вольф, Я.А. Туровский**

*Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация*

*E-mail: mrv@ipu.ru, runsolar@mail.ru*

**Аннотация.** С помощью искусственной нейронной сети и глубокого машинного обучения производится поиск скрытых параметров функции, описывающей электрическую активность головного мозга человека, полученную по методу электроэнцефалографии. Осуществляется формулировка задачи сжатия прикладной информации, необходимой для понижения размерности пространства признаков прикладных данных с целью дальнейшего получения модели искусственной нейронной сети – автокодировщика. Приводится новизна общего решения, освещаются теоретические аспекты и проблематика существующих методов сжатия. Исследуется экспериментальное получение модели автокодировщика с помощью прикладных данных – последовательностей ЭЭГ, содержащих зрительные вызванные потенциалы. Решение задачи сжатия проводится путем понижения размерности многомерного вектора, ассоциируемого с исследуемым образцом. С помощью полученного автокодировщика осуществляется кодирование исходного многомерного вектора в вектор меньшей размерности. С применением глубокого машинного обучения находится такая функция кодирования, что может быть выполнено обратное декодирование в исходный вектор. В итоге эмпирического подбора размерности вектора выбрана наилучшая экспериментальная модель автокодировщика, сжимающая пространство признаков, размерностью, равной 1260 (в исходном смысле ЭЭГ-сигналы длительностью 0,2 с) до пространства размерности, равного 24, с последующей возможностью реконструкции исходного сигнала с потерями не более 10 %.

*Ключевые слова:* интерфейс «мозг–компьютер»; электроэнцефалограмма; управление; уменьшение размерности признаков; вызванные потенциалы; автокодировщик; кодирование.

### Введение. Формулировка задачи

Развитие современных междисциплинарных подходов на стыке информационных технологий и физиологии привело к появлению большого числа устройств коммуникации между человеком и компьютером, таких как интерфейсы «мозг–компьютер», окулографических, миографических интерфейсов. Подобные перспективные направления рассмотрены в работах [1–4]. Разрабатываемые устройства коммуникации человека и машины планируется использовать для решения широкого спектра задач, связанных с реабилитацией пациентов неврологического и травматологического профилей, совершенствованием управления различными устройствами: от домашнего компьютера до авиационных систем [5, 6]. Наиболее распространённые задачи, решаемые в настоящее время – это улучшение их аппаратной части, разработка новых алгоритмов обработки полученных сигналов и дальнейшей трансформации их в команды на устройства-эффекторы, поиск новых физиологических феноменов, которые можно использовать как основу для команд, передаваемых по новым интерфейсам [7, 8].

Данная статья посвящена решению задачи сжатия электрической активности головного мозга человека, регистрируемой с помощью электроэнцефалографии (ЭЭГ) с целью получения модели искусственной нейронной сети, способной сжимать первичную информацию с минимальными потерями и воссоздавать исходное состояние с определенной степенью качества, что необходимо для задач машинного обучения и задач машинной классификации.

Цель исследования заключается в разработке метода сжатия ЭЭГ, содержащего полезный сигнал в виде вызванного потенциала (ВП), с последующим восстановлением и сохранением возможности выделения ВП с сохранением его свойств.

Пусть имеется единичный экземпляр данных электрической активности головного мозга человека, представляющий собой вектор  $x$  ( $x \in \mathbb{R}^m$ ). Требуется получить вектор  $z$  размерностью  $p$ :  $p(x \in \mathbb{R}^p, p < m)$  – такой, что можно было бы восстановить  $x$ . Более того, на основе  $z$  можно оценить (описать)  $x$ .

Несмотря на широкую распространённость, существующие алгоритмы обладают следующими недостатками:

1. С одной стороны, на первый взгляд может показаться, что задача достаточно простая и действительно существуют различные алгоритмы компрессии данных, которые бы с легкостью из  $x$  получили бы  $z$ . Однако, например, применяя ту же элементарную компрессию на базе XOR или используя более мощные алгоритмы типа PPM, LZSS и т. д., по результатам работы данных алгоритмов достаточно сложно будет сказать что-то про  $x$ .

2. С другой стороны, данную задачу можно решить с помощью алгоритмов, базирующихся на SVD, понизив размерность пространства  $\mathbb{R}^m$  до размерности нового пространства  $\mathbb{R}^p$ , в котором располагается вектор  $z$ . Тогда возникает резонный вопрос: насколько минимальным должно быть  $p$ , чтобы максимально подробно сказать что-то про  $x$ ?

Новизна данного исследования исходит из решения самой задачи сжатия:  $m$ -мерный вектор в виде некоторого признака (полученного на основе прикладных данных – электроэнцефалограммы – ЭЭГ), ассоциированного с образцом  $x$  (т. е.  $x \in \mathbb{R}^m$ ), с помощью искусственной нейронной сети кодируется в  $p$ -мерный вектор  $z$  (т. е.  $z \in \mathbb{R}^p$ ); применяя глубокое машинное обучение, находится функция кодирования  $z = \varphi(x)$ , такая, что может быть выполнено декодирование  $x = \psi(z)$ .

## 1. Теоретические аспекты автокодирования данных искусственной нейронной сетью. Проблематика.

Автокодировщик (АК) – это разновидность искусственной нейронной сети, целью которой является восстановление входной информации (данных) на выходе. АК выполняет всего две задачи: 1) сжатие входных данных в представление скрытого пространства (или латентного вектора), также известное как информационно узкое место; 2) восстановление выходных данных на основе полученного представления. Сам по себе процесс автокодирования – это неконтролируемый алгоритм машинного обучения, так как алгоритм извлечения признаков определяется в результате глубокого машинного обучения.

Понятие информационно узкого места (англ. Information Bottleneck – IB) было введено Tishby и др. [9]. Данное понятие было представлено вместе с гипотезой о том, что IB может извлекать релевантную информацию, сжимая объем информации, которая проходит через всю нейронную сеть, используя предварительно изученное сжатие входных данных.

Традиционно АК использовались в задачах понижения размерности для изучения информативных признаков. И только относительно недавно АК-модели со скрытыми параметрами, которые используют концепцию априорного и апостериорного распределения, такие как вариационные АК, начали использоваться для построения генеративных моделей, которые могут генерировать новые данные. Это достигается за счет сжатия информации в информационно узком месте таким образом, что из всего набора данных извлекаются только важные признаки, и эти извлеченные признаки (представления) могут использоваться для создания новых данных.

С формальной точки зрения, математическая модель АК может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi: X &\rightarrow F \\ \psi: F &\rightarrow X \end{aligned} \quad (1)$$
$$\varphi, \psi = \arg \min_{\varphi, \psi} \|X - \varphi \circ \psi\|^2,$$

где  $\varphi$  – функция кодера;  $X$  – исходные данные;  $F$  – скрытое пространство;  $\psi$  – функция декодера.

По сути, нейронная сеть разделяется на два сегмента: кодер и декодер.

Функция кодировщика, обозначенная  $\varphi$ , отображает исходные данные  $X$  в скрытое пространство  $F$ , которое присутствует в IB. Функция декодера, обозначенная  $\psi$ , отображает скрытое

пространство  $F$  в  $IV$  на выходе. Выход в этом случае совпадает с входной функцией. Таким образом, воссоздается исходное изображение после некоторого обобщенного нелинейного сжатия.

Сеть кодирования может быть представлена стандартной функцией нейронной сети, пропущенной через функцию активации, где  $z$  – скрытая размерность:

$$z = \sigma(Wx + b). \quad (2)$$

Аналогично сеть декодирования может быть представлена таким же образом, но с другим весом и смещением  $-b$ , и потенциально используемыми функциями активации:

$$x' = \sigma'(Wz + b'). \quad (3)$$

Используя (2) и (3), функция потерь примет вид:

$$(x, x') = \|x - x'\|^2 = \|x - \sigma'(W(\sigma(Wx + b)) + b')\|^2. \quad (4)$$

Функция потерь (4) используется для обучения нейронной сети с помощью стандартной процедуры обратного распространения ошибки.

Ввиду того, что вход и выход – это одни и те же данные и, как уже было обозначено выше, что алгоритм машинного обучения АК является неконтролируемым, процесс глубокого машинного обучения АК является самоконтролируемым обучением. Цель самоконтролируемого обучения АК состоит в подборе таких функций кодировщика и декодера, чтобы размерность  $IV$  была минимальной для кодирования входного сигнала, но достаточной для его восстановления на выходе.

При достаточно небольшом числе персептронов в слое  $IV$  способность воссоздавать входную информацию на выходе будет ограниченным и сильно отличаться от оригинала (высокие потери). Если используется слишком большое количество персептронов, то вообще нет смысла использовать сжатие, АК может начать выполнять задачу по реконструкции исходного сигнала (в проводимом исследовании это отрицательный эффект), не извлекая полезной информации о распределении данных, если:

- размерность скрытого представления совпадает с размерностью входа;
- размерность скрытого представления больше, чем размерность входа;
- для АК предоставляется слишком большой объем данных.

В этих случаях даже линейный кодер и линейный декодер просто копируют входные данные на выход, не изучая ничего полезного о распределении.

Обобщая изложенные выше теоретические аспекты, можно заключить, что в сети АК, функционально левая часть является кодирующей частью, а правая часть – декодирующей. В идеале можно организовать любую архитектуру АК, задавая размеры  $IV$  на основе сложности моделируемого распределения.

Поэтому целью глубокого машинного обучения АК является не копирование входных данных на выходе нейронной сети, а обучение АК восстановлению входных данных таким образом, чтобы информативно узкое место выделяло (как бы узнавало) только полезную информацию.

На сегодняшний день применение АК активно популяризируется в задачах реконструкции изображений и их базовой раскраски, сжатия данных, преобразования изображений в оттенках серого в цветные изображения, создания изображений с более высоким разрешением и т. д. Однако проблема заключается в том, что различные модели АК работают только с данными, которые аналогичны тем, на которых они были обучены, это прикладные данные.

## 2. Экспериментальное проектирование модели автокодировщика ЭЭГ сигналов

Учитывая приведенные выше теоретические аспекты, был разработан специальный АК для кодирования ЭЭГ-данных. Для получения модели АК использовались прикладные данные, которые представляют собой структурированные записи электрической активности головного мозга человека в результате проведенного эксперимента с устойчиво зрительно вызванным потенциалом (УЗВП, англ. *Steady state visually evoked potentials* – SSVEP – зрительные вызванные потенциалы устойчивого состояния) – это сигналы, которые головной мозг генерирует в ответ на визуальную стимуляцию с постоянным периодом воздействия.

Когда сетчатка глаза возбуждается вспышками частотой от 3,5 до 75 Гц, мозг генерирует электрическую активность с частотой мигания вспышки [10, 11]. Данный потенциал нашел ши-

рокое применение в задачах разработки и дальнейшей модификации интерфейса «мозг–компьютер» как один из хорошо выявляемых, воспроизводимых и не требующих в большинстве случаев специальной подготовки оператора, феноменов мозговой активности [12–14]. Первичной задачей эксперимента было формирование базы данных с ЭЭГ УЗВП от 30 испытуемых обоих полов в возрасте от 17 до 23 лет (12 девушек и 18 юношей), не имеющих неврологических и психиатрических патологий. Перед экспериментом участники не принимали психотропных препаратов и имели нормальное или скорректированное до нормального зрение. Данные электроэнцефалограммы фиксировались прибором «Нейрон-спектр-4ВП» (ООО «Нейрософт», Россия) на отведениях  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_z$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  и  $P_z$  с частотой дискретизации 5 000 Гц, включенным режекторным фильтром и отключенным фильтром высоких и низких частот. Фотостимуляция осуществлялась с частотами 1, 8 и 14 Гц. Длительность каждого сеанса УЗВП составляла 15 с.

С целью создания обучающего массива данных для последующего получения модели АК, способного работать с ЭЭГ-информацией, предварительно была проведена работа по их обработке. В первую очередь произведена фильтрация электроэнцефалограмм полосным фильтром Баттерворта 6-го порядка (order) с пропусканием 2 (lowcut) – 35 (highcut) Гц. Далее сигналы были сгруппированы по частотам фотостимуляции (1, 8 и 14 Гц) и группам отведений « $O_1$ », « $O_2$ », « $O_z$ », « $P_3$ », « $P_4$ », « $P_z$ » для каждого испытуемого. С учетом частоты дискретизации после группировки были получены три матрицы с данными:

$$N = 30 \times M = 75000 \times V = 6 \text{ элементов, где:}$$

$N$  – порядковый номер испытуемого;

$M$  – количество семплов в сигнале;

$V$  – количество сигналов в группе по каждому испытуемому (также пусть данная величина обозначает множество, состоящее из {« $O_1$ », « $O_2$ », « $O_z$ », « $P_3$ », « $P_4$ », « $P_z$ »}).

Несложно заметить, что имеются достаточно большие наборы по  $M$  для множества  $V$ . Для снижения размерности  $V$  произведено ресемплирование каждого сигнала в группах до  $M = 25\,000$  с сохранением структуры данных.

Аугментация данных осуществлена за счет «разбивки» признака  $M$  на окна по 1260 отсчетов с шагом 625 отсчетов. В сумме для каждого отведения получено по 1140 образцов для последующего глубокого машинного обучения АК.

Итоговая архитектура модели полученного АК – «кодер–декодер» – представляет собой симметричный многослойный мульти-адаптивный нейрон прямого распространения [15–17]. Кодировщик позволяет отобразить признаки размерностью 1260 элементов в признаки размерностью 24 элемента. Однако данная размерность была получена не сразу. Релевантность полученных признаков также оценивалась с помощью глубокой нейронной сети в части декодера, который позволяет реконструировать исходный сигнал (рис. 1).

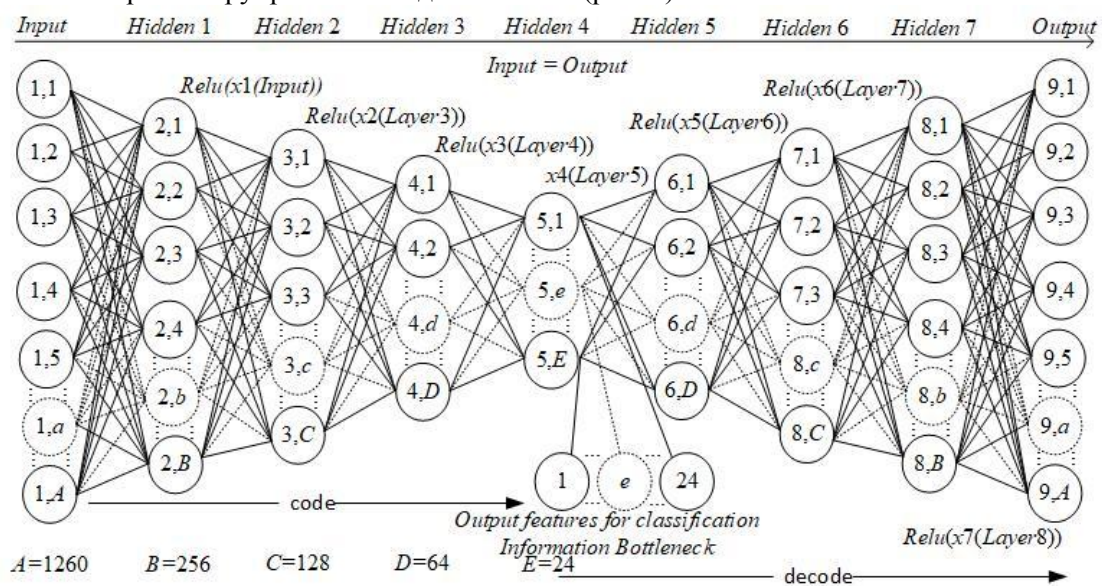


Рис. 1. Граф симметричного многослойного мульти-адаптивного нейрона прямого распространения, обеспечивающий функции кодера и декодера.

На рис. 1 показана итоговая сеть АК, состоящая из 9 слоев, из которых 7 слоев с персептронами скрыты (hidden1 – hidden7). Слои сокращаются к 4-му скрытому слою (5-й слой для всей сети) и также увеличиваются в направлении выходного слоя, образуя симметричную архитектуру нейронной сети. Кроме 5-го выходного слоя – IV, каждый выход внутренних слоев обеспечивается функцией активации – Relu. Стоит отметить, что, если в каждом слое применить линейную функцию активации, тогда скрытые параметры, присутствующие в IV, напрямую соответствуют основным компонентам из PCA (метода главных компонент).

Обучение АК воспроизводилось до тех пор, пока АК не получался неполным. По результатам каждого цикла глубокого обучения оценивалось представление скрытого пространства изучением информативных признаков в сторону уменьшения размеров IV.

В результате каждого цикла глубокого обучения сети, производилась периодическая прогонка тестовых данных в объеме  $N = 582 \times M = 1260 \times V = 6$ . Далее результаты кодирования подвергались машинной классификации. Входная размерность данных машинной классификации представляла собой следующую структуру:  $N = 582 \times M = p \times V = 6$ , где  $p$  – эмпирически подбираемая искомая величина.

Оценка кодированных данных производилась методом «случайного леса» по уровню значимости полученных признаков (рис. 2). В результате отбирались два значимых признака, на основе которых с помощью метода  $k$ -ближайших соседей строились границы решения и выбиралось наилучшее (рис. 3).

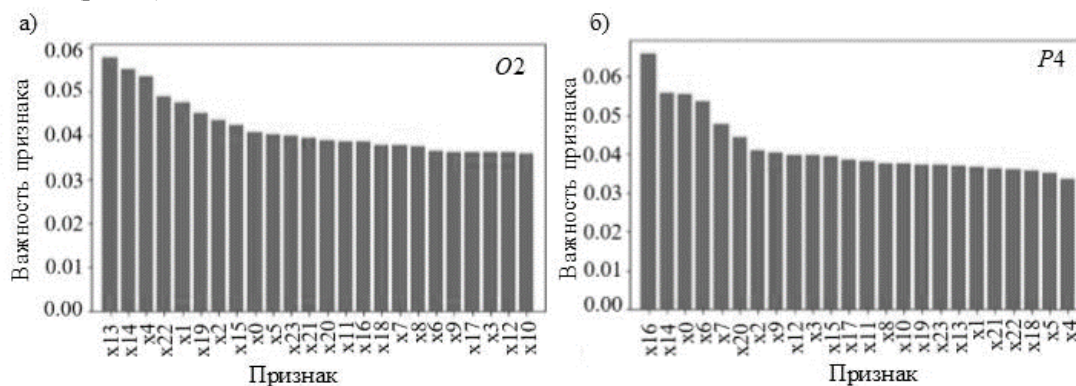


Рис. 2. Графики относительной важности признаков в наборе данных для отведений O2 – график (а) и P4 – график (б)

На рис. 2 можно наблюдать границы и кластеры внутри них, которые соответствуют шести отведениям: O1, O2, Oz, P3, P4 и Pz. Также можно заметить, что скрытое пространство содержит «пробелы» – это эквивалентно отсутствию данных в задаче обучения с учителем, поскольку АК не был обучен этим особенностям скрытого пространства. Другой проблемой является разделимость пробелов, некоторые отведения хорошо разделены на рис. 2, но есть также области, где имеются «вкрапления» одних признаков в другие (в данном случае отведения O2, P3, Pz), что затрудняет разделение уникальных особенностей данных отведений. Еще одной проблемой здесь является невозможность изучения непрерывного скрытого пространства, например, из-за отсутствия статистической модели АК, которая была бы обучена для произвольного ввода (и отсутствовала бы, даже если бы были заполнены все пробелы в скрытом пространстве).

Обеспечивая начальное условие задачи сжатия  $p < m$ , АК доводился до неполного представления и, наоборот – до его переполнения. Так, например, задавая размеры IV, равные размерам входных данных, АК просто копировал выходные данные на выходе, не извлекая полезные признаки. В случае, если размеры скрытого пространства выбирались большими или равными входным данным, то АК был переполнен. Таким образом, экспериментальные результаты поведения моделей АК не противоречили теоретическим аспектам. Ввиду того, что размерность кодированных данных коррелировали с качеством построенных границ решений, на основе их визуальных оценок подбиралась величина  $p$  и результаты границ решений представлены на рис. 3.

В итоге эмпирического подбора параметра  $p$  была выбрана наилучшая экспериментальная модель АК, способная сжимать пространство признаков  $m = 1260$  (в исходном смысле ЭЭГ-сигналы длительностью 0,2 с) до пространства размерностью  $p = 24$  с последующей возможностью реконструкции исходного сигнала с потерями не более 10 %.



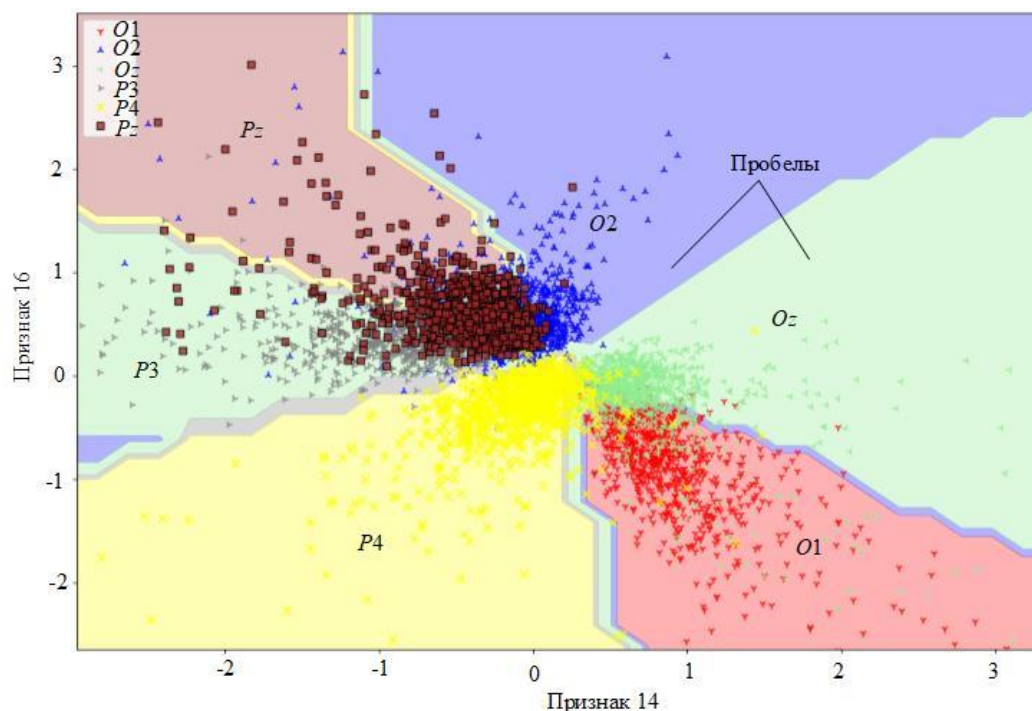


Рис. 3. Границы решений по отведениям O1, O2, Oz, P3, P4 и Pz, полученные в результате работы исследуемой модели автокодировщика.

На рис. 4 показаны результаты работы АК. Когда сеть еще не обучена, то на основном выходе наблюдается случайный шум (рис. 4, а и в). После глубокого машинного обучения сети выходной сигнал аппроксимирует входной (рис. 4, б и г).

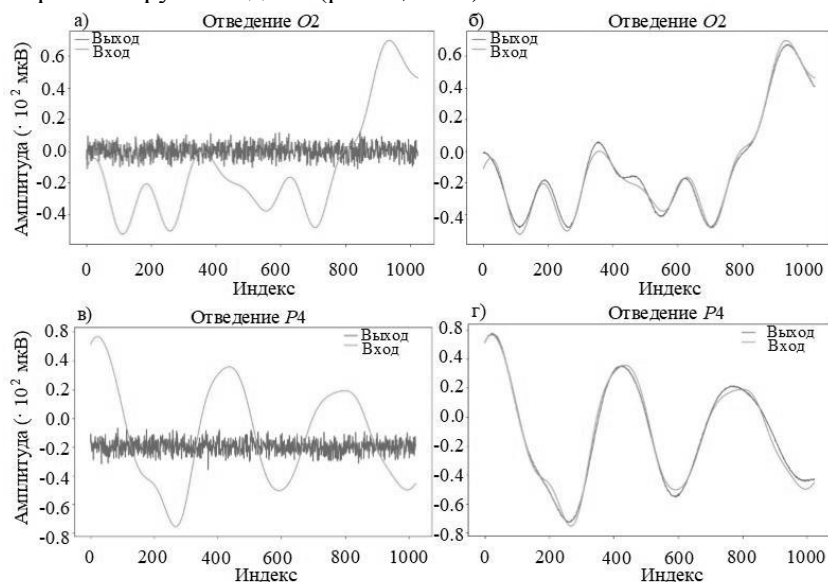


Рис. 4. Результат работы симметричного многослойного мульти-адаптивного нейрона, обеспечивающего функции кодера и декодера – до (а, в) и после глубокого машинного обучения (б, г).

### Заключение

Автоэнкодеры тесно связаны с анализом главных компонент (PCA). С соответствующими ограничениями размерности и разреженности АК могут изучать проекции данных, которые более интересны, чем PCA или другие базовые методы. Это означает, что легко натренировать части алгоритма, которые будут затем хорошо работать на конкретных прикладных данных и не будут требовать применения новых методов, а будут требоваться только соответствующие данные для обучения. По мере того, как АК обучается по заданному датасету, он достигает разумных резуль-

татов сжатия, аналогичных используемому для тренировок набору, но плохо работает как компрессор общего назначения. Однако полученная модель АК может быть использована в теоретических проверках различного рода гипотез, связанных с тематикой интерфейсов «мозг–компьютер».

### Благодарность

Авторы благодарят д.т.н. профессора А.В. Богомолова за ценные замечания при обсуждении направлений и результатов исследования.

### Литература

1. Новиков, Д.А. Кибернетика 2.0 / Д.А. Новиков // Проблемы управления. – 2016. – № 1. – С. 73–81.
2. Implementation of Robot–Human Control Bio-Interface when Highlighting Visual-Evoked Potentials Based on Multivariate Synchronization Index / S. Kharchenko, R. Meshcheryakov, Y. Turovsky, D. Volf // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2021. – Vol. 187. – С. 225–236.
3. Гридин, Л.А. Методологические основы исследования физической работоспособности человека / Л.А. Гридин, А.В. Богомолов, Ю.А. Кукушкин // Актуальные проблемы физической подготовки силовых структур. – 2011. – № 1. – С. 10–19.
4. The Brain Computer Interface Cycle / M.V. Gerven, J. Farquhar, R. Schaefer *et al.* // Journal of Neural Engineering. – 2009. – Vol. 6, no. 4. – P. 1–10.
5. Дворников, М.В. Технология синтеза законов управления человеко-машинными системами, эксплуатируемыми в условиях высокого риска гипоксических состояний человека / М.В. Дворников, Ю.А. Кукушкин, А.В. Богомолов, Т.В. Матюшев // Двойные технологии. – 2014. – № 1 (66). – С. 8–11.
6. Исакова, А.О. Неинвазивный нейрокомпьютерный интерфейс для управления роботом / А.О. Исакова, Д.А. Вольф, А.Ю. Исаков // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. – 2021. – Т. 5, № 1. – С. 166–171.
7. Гузий, А.Г. Теоретические основы функционально-адаптивного управления системами «человек–машина» повышенной аварийности / А.Г. Гузий, А.В. Богомолов, Ю.А. Кукушкин // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 1. – С. 39–45.
8. Исакова, А.О. Время-частотные преобразования в анализе паттернов нестационарных квазипериодических биомедицинских сигналов для задач идентификации акустических аномалий / А.О. Исакова, М.Д. Алёхин, А.В. Богомолов // Информационно-управляющие системы. – 2020. – № 1 (104). – С. 15–23.
9. Tishby, N. The information bottleneck method / N. Tishby, C.P. Fernando, B. William // ArXiv physics/0004057. – 2000.
10. Chirp-Modulated Visual Evoked Potential as a Generalization of Steady State Visual Evoked Potential / T. Tao, X. Yi, G. Xiaorong, G. Shangkai // Journal of neural engineering. – 2011. – Vol. 9, no. 1. – 016008.
11. Kwak, N.S. Toward Exoskeleton Control Based on Steady State Visual evoked potentials / N.S. Kwak, K.R. Müller, S.W. Lee // 2014 International Winter Workshop on Brain–Computer Interface, BCI 2014. – Gangwon, Korea, 2014.
12. Diagnostic Value of Conventional Visual Evoked Potentials Applied to Patients With Multiple Sclerosis / R. Balnytė, I. Uloziene, D. Rastenytė *et al.* // Medicina. – 2011. – Vol. 47, Iss. 5. – P. 263–269.
13. Markand, O. Visual Evoked Potentials / O. Markand // Clinical Evoked Potentials. – Springer, Cham., 2020. – pp. 83–137.
14. Chaudhary, U. Brain-Machine Interface (BMI) in paralysis / U. Chaudhary, N. Birbaumer, M.R. Curado // Annals of Physical and Rehabilitation Medicine. – 2015. – Vol. 58, Iss. 1. – P. 9–13.
15. Adversarial Neural Networks for Error Correcting Codes / H. Nguyen, S. Bottone, K. Kim *et al.* // 2021 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), 7–11 December 2021, Madrid, Spain. – 2021.



16. Diagnosing Parkinson by Using Deep Autoencoder Neural Network / U. Köse, O. Deperlioglu, J. Alzubi, B. Patrut // Deep Learning for Medical Decision Support Systems. Studies in Computational Intelligence. – Springer, Singapore, 2020. – Vol. 909. – P. 73–93.

17. Semi-adversarial Networks: Convolutional Autoencoders for Imparting Privacy to Face Images / V. Mirjalili, S. Raschka, A. Namboodiri, A. Ross // 2018 International Conference on Biometrics (ICB). – IEEE, Gold Coast, QLD, Australia, 2018. – P. 82–89.

Поступила в редакцию 3 октября 2022 г.

### Сведения об авторах

Мещеряков Роман Валерьевич – доктор технических наук, профессор РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: mrv@ipu.ru

Вольф Данияр Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.

Туровский Ярослав Александрович – старший научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 34–42

DOI: 10.14529/mmph230104

## AN AUTOCODER OF THE ELECTRICAL ACTIVITY OF THE HUMAN BRAIN

**R.V. Meshcheryakov, D.A. Wolf, Y.A. Turovsky**

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow  
E-mail: mrv@ipu.ru, runsolar@mail.ru

**Abstract.** The authors identify hidden parameters of the function describing the electrical activity of the human brain, obtained using electroencephalography (EEG), with the help of an artificial neural network and deep machine learning. The compression of applied information, necessary to reduce the dimensionality of the feature space of the data in order to obtain a model of an artificial neural network—an autoencoder is formulated. The novelty of the general solution and the theoretical aspects and problems of existing compression methods are described. An experimental study is carried out, which consists in obtaining an autoencoder model using applied data EEG sequences containing visual evoked potentials. The compression problem is solved by decreasing the dimensionality of the multidimensional vector associated with the sample. The autoencoder encodes the original multi-dimensional vector into a vector of smaller dimensionality. Using deep machine learning, a coding function is found such that reverse decoding into the original vector can be performed. As a result of the empirical selection of the vector dimensionality, the best experimental model of the autoencoder was chosen, which compresses the feature space of dimensionality equal to 1260 (in the initial sense EEG signals of duration 0,2 s) to a 24-dimensional space, with the possibility of the reconstruction of the initial signal with losses of not more than 10 %.

**Keywords:** brain-computer interface; BCI; electroencephalogram; EEG; control; feature dimensionality reduction; evoked potentials; autoencoder; encoding.

### References

1. Novikov D.A. Cybernetics 2.0. *Probl. Upr.*, 2016, no. 1, pp. 73–81. (in Russ.).
2. Kharchenko S., Meshcheryakov R., Turovsky Y., Volf D. Implementation of Robot–Human Control Bio-Interface when Highlighting Visual-Evoked Potentials Based on Multivariate Synchronization Index. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2021, Vol. 187, pp. 225–236. DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0\_18
3. Gridin L.A., Bogomolov A.V., Kukushkin Y.A. Methodological bases of Physical Working Capacity Investigation. *Aktual'nye problemy fizicheskoy podgotovki silovykh struktur*, 2011, no. 1, pp. 10–19. (in Russ.).

4. Gerven M.V., Farquhar J., Schaefer R., Vlek R., Geuze J., Nijholt A., Ramsey N., Haselager P., Vuurpijl L., Gielen S., Desain P. The Brain Computer Interface Cycle. *Journal of Neural Engineering*, 2009, Vol. 6, no. 4, pp. 1–10. DOI 10.1088/1741-2560/6/4/041001
5. Dvornikov M., Kukushkin Y., Bogomolov A., Matyushev T. Synthesis Technology Control Laws of Man-Machine Systems Operating in High-Risk Human Hypoxic Conditions. *Dvoynye tekhnologii*, 2014, no. 1 (66), pp. 8–11. (in Russ.).
6. Iskhakova A.O., Volf D.A., Iskhakov A.Y. Non-Invasive Neurocomputer Interface for Robot Control. *Vysokoproizvoditel'nye vychislitel'nye sistemy i tekhnologii*, 2021, Vol. 5. no. 1, pp. 166–171. (in Russ.).
7. Guziy A.G., Bogomolov A.V., Kukushkin Yu.A. Teoreticheskie osnovy funktsional'no-adaptivnogo upravleniya sistemami “chelovek–mashina” povyshennoy avariynosti (Theoretical foundations of functional and adaptive control of man-machine systems with increased accident rate). *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2005, no. 1, pp. 39–45. (in Russ.).
8. Iskhakova A.O., Alekhin M.D., Bogomolov A.V. Time-Frequency Transforms in Analysis of Non-Stationary Quasi-Periodic Biomedical Signal Patterns for Acoustic Anomaly Detection. *Information and Control Systems*, 2020, no. 1 (104), pp. 15–23. DOI: 10.31799/1684-8853-2020-1-15-23
9. Tishby, N., Fernando C.P., William B. The information bottleneck method. *ArXiv physics/0004057*, 2000. ([https://www.researchgate.net/publication/2844514\\_The\\_Information\\_Bottleneck\\_Method](https://www.researchgate.net/publication/2844514_The_Information_Bottleneck_Method))
10. Tao T., Yi X., Xiaorong G., Shangkai G. Chirp-Modulated Visual Evoked Potential as a Generalization of Steady State Visual Evoked Potential. *Journal of neural engineering*, 2011, Vol. 9, no. 1, 016008. DOI 10.1088/1741-2560/9/1/016008
11. Kwak N.S., Müller K.R., Lee S.W. Toward Exoskeleton Control Based on Steady State Visual evoked potentials. *Proc. 2014 International Winter Workshop on Brain-Computer Interface*, BCI 2014, Gangwon, Korea, 2014. DOI: 10.1109/iww-BCI.2014.6782571
12. Balnytė R., Uloziene I., Rastenytė D., Vaitkus A., Malcienė L., Laučkaitė K. Diagnostic Value of Conventional Visual Evoked Potentials Applied to Patients With Multiple Sclerosis. *Medicina*, 2011, Vol. 47, Iss. 5, pp. 263–269. DOI: 10.3390/medicina47050037
13. Markand, O.N. Visual Evoked Potentials. In: *Clinical Evoked Potentials*. Springer, Cham., 2020, pp. 83–137. DOI: 10.1007/978-3-030-36955-2\_3
14. Chaudhary U., Birbaumer N., Curado M.R. Brain-Machine Interface (BMI) in paralysis. *Annals of Physical and Rehabilitation Medicine*, 2015, Vol. 58, Iss. 1, pp. 9–13. DOI: 10.1016/j.rehab.2014.11.002
15. Nguyen H., Bottone S., Kim K., Chiang M., Poor H.V. Adversarial Neural Networks for Error Correcting Codes. *2021 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, 7–11 December 2021, Madrid, Spain. 2021.
16. Kose U., Deperlioglu O., Alzubi J., Patrut B. Diagnosing Parkinson by Using Deep Autoencoder Neural Network. In: *Deep Learning for Medical Decision Support Systems. Studies in Computational Intelligence*, Vol. 909, Springer, Singapore, 2021, pp. 73–93. DOI: 10.1007/978-981-15-6325-6\_5
17. Mirjalili V., Raschka S., Nambodiri A., Ross A. Semi-adversarial Networks: Convolutional Autoencoders for Imparting Privacy to Face Images. *2018 International Conference on Biometrics (ICB)*, IEEE, Gold Coast, QLD, Australia, 2018, pp. 82–89. DOI: 10.1109/ICB2018.2018.00023

*Received October 3, 2022*

### Information about the authors

Meshcheryakov Roman Valer'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor of Russian Academy of Sciences, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: mrv@ipu.ru

Volf Daniyar Aleksandrovich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation.

Turovskiy Yaroslav Aleksandrovich is Senior Staff Scientist, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation.

# КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМОТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПРОБООТБОРА ДОННЫХ ОТЛОЖЕНИЙ

**А.Л. Ронжин, М.О. Дудаков, Д.С. Дудакова**

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук,  
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация  
E-mail: ronzhin@iias.spb.su

**Аннотация.** Системно рассмотрена задача модернизации лимнологического оборудования, применяемого для пробоотбора донных отложений. Предложены концептуальная и теоретико-множественная модели задачи функционирования и применения дночерпателя. Приведена классификация существующих пробоотборников, рассмотрены их отличительные характеристики, а также исторический обзор проведенных модернизаций. Задача проектирования допустимых системотехнических решений дночерпателя сводится к поиску вариантов, удовлетворяющих функциональным, эргономическим критериям. Окончательное решение о структуре и функциях дночерпателя и программно-аппаратном обеспечении принимается с учетом стоимостных затрат всего жизненного цикла оборудования. Подчеркивается важность учета аспектов эргономики и безопасности применения исследовательских измерительных инструментов и средств пробоотбора при их проектировании и модернизации. Разработанная версия дночерпателя отличается применением анализа качества забора пробы при автоматизации срабатывания ковшей. Дночерпатель был успешно апробирован в период экспедиции по Ладожскому озеру, а собранный материал по динамике изменения ускорения в момент приземления дночерпателя на донный грунт будет использоваться для конфигурирования структуры и обучения искусственной нейронной сети, на основе которой будет разработана бортовая система распознавания типов донных поверхностей.

*Ключевые слова:* системный анализ; жизненный цикл оборудования; лимнология; пробоотбор; дночерпатель; эргономика; донный грунт; искусственные нейронные сети.

## 1. Постановка задачи

Целью данного исследования являлось определение направлений модернизации лимнологического оборудования и их оценивание с точки зрения увеличения функциональных возможностей, удовлетворения эргономических требований и стоимостных затрат. Структура статьи сформирована следующим образом. В первую очередь описана концептуальная модель предметной области исследования, затем приведена классификация существующих образцов лимнологического оборудования, применяемых для отбора донных проб, после чего представлена теоретико-множественная модель, раскрывающая структурно-функциональные связи дночерпателей и описывающая критерии оценивания их характеристик. Также обсуждается выполненная модернизация дночерпателя коробчатого типа и результаты его экспериментальной проверки во время экспедиций по Ладожскому озеру.

Средства пробоотбора донных отложений (дночерпатели) являются одними из основных первичных исследовательских средств в области лимнологии. Для формализации задачи функционирования и применения дночерпателя рассмотрим концептуальную модель, представленную на рис. 1, которая включает следующие основные сущности: дночерпатель, проба донного грунта, окружающая среда, транспортное средство, специалист-лимнолог, задача пробоотбора, критерии оценивания дночерпателя. Предложенная концептуальная модель является основой для выявления основных недостатков существующего лимнологического оборудования, формирования требований к новым разрабатываемым образцам и оценивания качества как самих дночерпате-

## Математика

лей, так и реализации всей поставленной задачи пробоотбора. Описание параметров предложенных основных сущностей рассмотрим ниже при описании теоретико-множественной модели задачи функционирования и применения дночерпателя.



Рис. 1. Концептуальная модель задачи функционирования и применения дночерпателя

Далее рассмотрим особенности задачи пробоотбора и кратко историю создания устройств донного пробоотбора с классификацией и примерами существующего оборудования. В любом водоёме – от маленького пруда до океана – постоянно идут два противоположных процесса: осадконакопление и диффузия веществ из донных осадков в воду. Донные осадки являются естественным буфером для химических веществ водоёма и одновременно домом для огромного числа живых организмов от простейших бактерий и водорослей до рыб и моллюсков. Поэтому донные осадки водоёмов изучаются специалистами как естественных наук (гидрология, экология, гидробиология, палеогеография, геология и др.), так и прикладных областей, в частности сельского хозяйства (сапропели, аквакультура). Изучение состава и структуры донных отложений позволяют получить информацию о текущем состоянии водоёма, его истории и даже дать прогноз на будущее.

Процесс отбора бентосных проб является начальным, но очень существенным этапом в цикле получения информации о донных осадках водоёма, так как результаты даже самого точного (и дорогостоящего) анализа теряют всякий смысл при неправильно проведенном отборе пробы. Ошибки, возникающие вследствие некорректного отбора пробы, в дальнейшем исправить, как

правило, уже невозможно. Поэтому достоверность и точность последующего анализа в значительной степени зависят от правильности выбора способа и тщательности проведения процедуры отбора.

Дночерпатели являются основным инструментом для проведения бентосного пробоотбора. Их совершенствование, а также разработка новых конструкций и схем является естественным путём для получения корректных данных о донных осадках и их обитателях.

На рис. 2 приведена оригинальная классификация широкого спектра приборов для решения задач донного пробоотбора: драги, скребки, пробоотборники-насосы и другие [1]. Отбор проб грунта с определенной, заданной габаритами пробоотборника, площади производится с помощью специализированных механических устройств – дночерпателей и трубчатых пробоотборников [1–4]. Первые и по сей день наиболее распространенные дночерпатели появились в прошлом веке в форме конструкций, разработанных Карлом Дж. Й. Петерсенем в 1911 г. [5], Свенном Экманом [6] в 1911 г., Эдвардом А. Берджи [7] в 1921 г. Несколько позже, в 1933 г., был разработан дночерпатель Ван-Винна, принцип работы которого был достаточно схож с дночерпателем Петерсена, однако имел более совершенный механизм срабатывания [8]. В дночерпателях Экмана и Берджа для срабатывания механизма схлопывания применялся посыльный груз, отправляемый оператором, проводящим пробоотбор. В двух же других конструкциях применялся принцип работы по типу грейфера, и таким образом была сделана попытка автоматизирования процесса схлопывания пробоотборника на дне.

Позднее происходило взрывообразное развитие идей по конструкциям и модификациям пробоотборников для решения различных задач [1, 9–12]. Океанические глубоководные исследования потребовали создания крупногабаритных дночерпателей, что определялось необходимостью пробоотбора с очень больших глубин, отбора проб большого объема для анализа специалистами разных научных дисциплин, масштабной оценки геологического строения дна и состава донных осадков, изучения крупных бентосных организмов. Такие приборы начали появляться с 1950-х годов [4]. Появилась необходимость разработки устройств для отбора стратифицированных колонок (керн) на глубины, большие по сравнению с теми, что давали дночерпатели. Ранние пробоотборники керн, на основе которых появились более поздние конструкции, включали корбчатый пробоотборник Рейнека [13] и трубчатый пробоотборник Крейба [14].

Для изучения гетерогенности донного грунта и его обитателей стали использоваться мульти- и мегакореры [4]. Появились пробоотборники, управляемые аквалангистами при погружении [15]. Позднее развитие робототехнических устройств и подводных аппаратов позволило создавать системы доставки и автоматизированного управления пробоотборниками непосредственно с ПА с контролем условий и качества пробоотбора (ROV corers) [1]. Также начала применяться видеосъемка, сопровождающая пробоотбор [16].

В настоящее время в практике лимнологических работ используются хорошо зарекомендовавшие себя для решения конкретных задач пробоотборники. Основные модели, известные на настоящий момент и доступные в продаже или производимые под заказ в России, приведены в таблице.

## 2. Теоретико-множественная модель задачи функционирования и применения дночерпателя

На основе предложенной концептуальной модели, приведенной на рис. 1, рассмотрим далее теоретико-множественную модель задачи функционирования и применения дночерпателя, описываемую следующим кортежем параметров:

$$BGF = \langle G, B, E, V, M, W, Q \rangle,$$

где  $G$  – кортеж параметров дночерпателя,  $B$  – кортеж параметров пробы донного грунта,  $E$  – кортеж параметров окружающей среды,  $V$  – кортеж параметров транспортного средства,  $M$  – кортеж параметров специалиста-лимнолога,  $W$  – кортеж параметров описания задачи пробоотбора,  $Q$  – кортеж критериев оценивания качества дночерпателя. Далее рассмотрим введенные параметры более подробно.

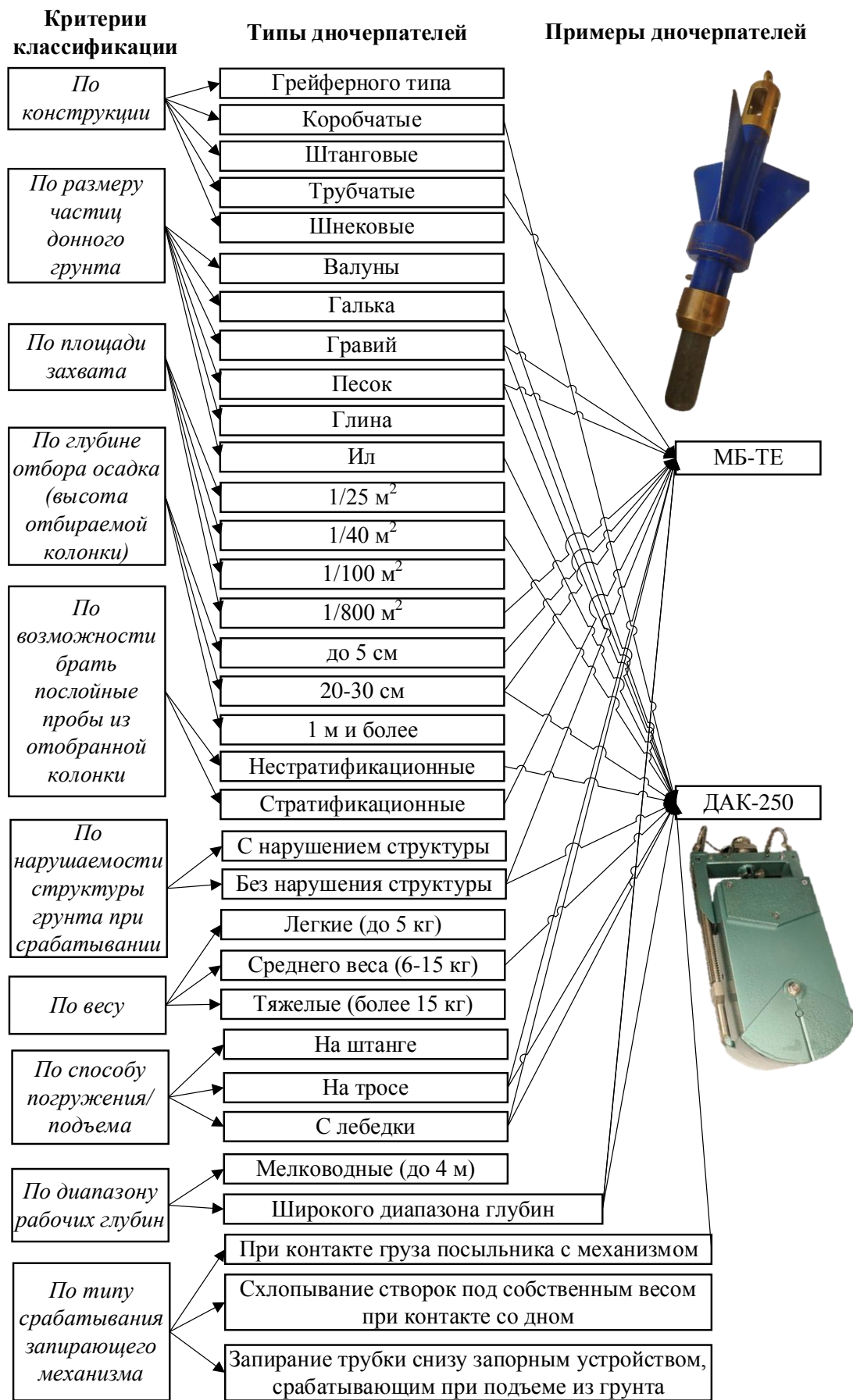


Рис. 2. Классификация дночерпателей для пробоотбора

Обзор существующих конструкций устройств для донного пробоотбора

Модель	Особенности рабочих грунтов	Принцип действия
Дночерпатель штанговый ГР-91	Песчано-гравелистые донные отложения	При натяжении троса заборный ковш поворачивается под действием пружины
Дночерпатели коробчатые автоматические: ДАК-100, ДАК-250, ДАК-400	Для мягких и средней плотности грунтов	Удар посылы освобождает пружины, захлопывающие челюсти
Дночерпатель Ван-Винна	Сбор поверхностного слоя грунта	Скребки, втягиваемые тросом, соскребают верхний слой грунта
Дночерпатель Петерсена	Сбор поверхностного слоя грунта	Скребки, втягиваемые тросом, соскребают верхний слой грунта
Дночерпатель Заболоцкого	Сбор донных проб на глубинах < 2,5 м	Челюсти захлопываются под весом вертикальной штанги при снятии ее с упоров (повороте)
Трубчатый дночерпатель Мордухай-Болтовского	Сбор донных проб на глубинах < 2,5 м	Грунт набивается в трубу при заглублении и поднимается с поворотом вокруг оси
Дночерпатели стратификационные: ДЧС-100, ДЧС-250	Для мягких и средней плотности грунтов с послойной стратификацией через каждые 50 мм	Удар посылы освобождает пружины, захлопывающие челюсти
Дночерпатель Экмана-Берджи: 100x100, 200x200	Для мягких и средней плотности грунтов	Удар посылы освобождает пружины, захлопывающие челюсти
Дночерпатели трубчатые: ТГ-1, ТГ-1,5	Для мягких грунтов	Донный осадок забивается в трубку при ее ударе о дно, и трубка закрывается инерционным клапаном
Трубка Лаури-Ниеместо	Для мягких и средней плотности грунтов (с ограничениями)	Донный осадок забивается в трубку при ее ударе о дно, и трубка закрывается запорным механизмом при вытягивании ее из грунта
Дночерпатель микробендометр МБ-ТЕ	Для мягких и средней плотности грунтов	Донный осадок забивается в трубку при ее ударе о дно, и трубка закрывается барометрическим клапаном, иногда дополняется дополнительным запорным механизмом, срабатывающим при вынимании из грунта

$G = \langle F_G, A_G, H_G, L_G, D_G, R_G, W_G, S_G, P_G, E_G, C_G \rangle$  – кортеж параметров, описывающий основные характеристики дночерпателя:  $F_G$  – множество видов конструкции,  $A_G$  – максимальное значение площади захвата дночерпателя,  $H_G$  – максимальное значение высоты отбираемой колонки,  $L_G$  – наличие возможности стратификационного отбора,  $I_G$  – бинарная оценка нарушаемости структуры грунта при отборе,  $D_G$  – множество диапазонов рабочих глубин,  $R_G$  – множество способов погружения/подъема,  $W_G$  – множество диапазонов весов,  $S_G$  – множество бортового сенсорного оборудования,  $P_G$  – кортеж характеристик бортового вычислительного оборудования,  $E_G$  – кортеж характеристик бортовой системы электропитания,  $C_G$  – кортеж характеристик бортового оборудования связи.

Множество видов конструкций включает  $F_G = \{F_G^1, F_G^2, F_G^3, F_G^4, F_G^5\}$ , где обозначены следующие конструкции:  $F_G^1$  – грейферного типа,  $F_G^2$  – коробчатые,  $F_G^3$  – штанговые,  $F_G^4$  – трубчатые,  $F_G^5$  – шнековые. В множестве диапазонов рабочих глубин выделяют два типа  $D_G = \{D_G^1, D_G^2\}$ , где  $D_G^1$  – мелководные (до 4 м),  $D_G^2$  – широкого диапазона глубин. Множество способов погружения/подъема включает  $R_G = \{R_G^1, R_G^2, R_G^3\}$ , где  $R_G^1$  – на штанге,  $R_G^2$  – на тросе,  $R_G^3$  – с лебедки. Множество диапазонов весов содержит  $W_G = \{W_G^1, W_G^2, W_G^3\}$ , где  $W_G^1$  – легкие (до 5 кг),  $W_G^2$  – среднего веса (5–15 кг),  $W_G^3$  – тяжелые (более 15 кг). Множество бортового сенсорного оборудования  $S_G = \{S_G^1, S_G^2, \dots, S_G^s, \dots, S_G^{SS}\}$ ,  $s = [1, SS]$ , включающего датчики измерения разных величин: температуры, мутности, кислотности и т. д. При этом для повышения надежности и достоверности измерений датчики одного типа могут ставиться на борт в нескольких экземплярах в зависимости от предъявляемых эксплуатационных требований.

Предполагается, что бортовое вычислительное оборудование дночерпателя не обладает высокой мощностью и развитой периферией, поэтому описание кортежа его характеристик включает основные элементы, которые важны при интеграции составных частей дночерпателя:  $P_G = \langle P_G^{Freq}, P_G^{Ener}, P_G^{Volt}, P_G^{Dim}, P_G^{Weg} \rangle$ , где  $P_G^{Freq}$  – тактовая частота процессора,  $P_G^{Ener}$  – потребляемая электрическая мощность процессора,  $P_G^{Volt}$  – электрические характеристики процессора,  $P_G^{Dim}$  – габаритные размеры бортового вычислительного оборудования,  $P_G^{Weg}$  – вес бортового вычислительного оборудования. Последние два параметра критичны с точки зрения размещения и балансировки дночерпателя, так как в свободном падении или спуске на тросе важно сохранить вертикальность входа конструкции в донный грунт.

Кортеж характеристик бортовой системы электропитания содержит  $E_G = \langle E_G^{Typ}, E_G^{Cap}, E_G^{Volt}, E_G^{Char}, E_G^{Weg}, E_G^{Dim} \rangle$ , где  $E_G^{Typ}$  – тип аккумулятора,  $E_G^{Cap}$  – емкость аккумулятора,  $E_G^{Volt}$  – электрические характеристики,  $E_G^{Typ}$  – способ зарядки (беспроводной, тип разъема проводной зарядки),  $E_G^{Weg}$  – вес аккумулятора,  $E_G^{Dim}$  – габаритные размеры бортовой системы электропитания.

Кортеж характеристик бортовой системы связи содержит  $C_G = \langle C_G^{Typ}, C_G^{Dist}, C_G^{Volt}, C_G^{Ener}, C_G^{Weg}, C_G^{Dim} \rangle$ , где  $C_G^{Typ}$  – тип связи (проводная, беспроводная (гидроакустическая, оптическая)),  $C_G^{Dist}$  – максимальная гарантированная дальность передачи данных,  $C_G^{Volt}$  – электрические характеристики,  $C_G^{Ener}$  – потребляемая электрическая мощность системы связи,  $C_G^{Weg}$  – вес системы связи,  $C_G^{Dim}$  – габаритные размеры бортовой системы связи.

Параметры пробы донного грунта представлены следующим кортежем:  $B = \langle K_B, Part_B, W_B, H_B, D_B, T_B, ADINF_B \rangle$ , где  $K_B$  – тип грунта,  $Part_B$  – размер частиц донного грунта,  $W_B$  – вес пробы,  $H_B$  – высота взятой колонки пробы,  $D_B$  – глубина дна, где была взята проба,  $T_B$  – время и дата взятия пробы,  $ADINF_B$  – дополнительная информация о пробе, получаемая от бортовой сенсорной системы или из внешних открытых реестров. Тип грунта  $K_B$  выбирается из множества  $Type_{BotSoil}$  в зависимости от точности автоматического анализа, навыков эксперта или требуемой точности. По размеру частиц донного грунта  $Part_B$  выделяют несколько типов грунта: ил, глина, песок, гравий, валуны.



Кортеж параметров окружающей среды включает  $E = \langle Lk_E, Wth_E, Clm_E \rangle$ , где  $Lk_E$  – характеристики водоема,  $Wth_E$  – характеристики погодных условий,  $Clm_E$  – характеристики климатических условий. Описание характеристик водоема представляет собой кортеж следующих параметров:

$$Lk_E = \left\langle Lk_E^{Th}, Lk_E^{Tp}, Lk_E^{TISq}, Lk_E^{WtSq}, Lk_E^{WtCmSq}, Lk_E^{WtVI}, Lk_E^{DpMn}, Lk_E^{DpMx}, Lk_E^{LnMx}, Lk_E^{WdMx}, Lk_E^{WdMn}, Lk_E^{CsLn}, Lk_E^{CsInd}, Lk_E^{LzZnSq}, Lk_E^{WtTrph} \right\rangle, \text{ где}$$

$Lk_E^{Th}$  – название озера,  $Lk_E^{Tp}$  – тип водоема,  $Lk_E^{TISq}$  – площадь общая,  $Lk_E^{TISq}$  – площадь водного зеркала,  $Lk_E^{TISq}$  – площадь водосбора,  $Lk_E^{TISq}$  – объем водоема,  $Lk_E^{TISq}$  – средняя глубина,  $Lk_E^{TISq}$  – максимальная глубина,  $Lk_E^{TISq}$  – максимальная длина,  $Lk_E^{TISq}$  – максимальная ширина,  $Lk_E^{TISq}$  – средняя ширина,  $Lk_E^{TISq}$  – длина береговой линии,  $Lk_E^{TISq}$  – изрезанность береговой линии,  $Lk_E^{TISq}$  – площадь литоральной зоны,  $Lk_E^{TISq}$  – трофность водоема. В случае необходимости эти базовые параметры могут дополняться.

Описание характеристик текущих погодных условий на территории, где располагается водоем, представляет собой кортеж следующих параметров:

$$Wth_E = \langle Wth_E^{ArTmp}, Wth_E^{WtTmp}, Wth_E^{WndSpd}, Wth_E^{WndDrc}, Wth_E^{Exc}, Wth_E^{RnVI}, Wth_E^{LkLv}, Wth_E^{Cld}, Wth_E^{VhcDrf} \rangle, \text{ где}$$

$Wth_E^{ArTmp}$  – температура воздуха,  $Wth_E^{WtTmp}$  – температура воды,  $Wth_E^{WndSpd}$  – скорость ветра,  $Wth_E^{WndDrc}$  – направление ветра,  $Wth_E^{Exc}$  – волнение,  $Wth_E^{RnVI}$  – количество осадков,  $Wth_E^{LkLv}$  – уровень озера,  $Wth_E^{Cld}$  – облачность,  $Wth_E^{VhcDrf}$  – дрейф судна (в момент пробоотбора).

Описание характеристик климатических условий в регионе, где располагается водоем, представляет собой кортеж следующих параметров:

$$Clm_E = \langle Clm_E^{Tp}, Clm_E^{SsSIRd}, Clm_E^{SsTmp}, Clm_E^{SsWnd}, Clm_E^{SsRn}, Clm_E^{SsEvp}, Clm_E^{SsPrs} \rangle, \text{ где } Clm_E^{Tp} \text{ – тип климата,}$$

$Clm_E^{SsSIRd}$  – солнечная радиация по сезонам,  $Clm_E^{SsTmp}$  – температура по сезонам,  $Clm_E^{SsWnd}$  – ветер по сезонам (роза ветров),  $Clm_E^{SsRn}$  – осадки по сезонам,  $Clm_E^{SsEvp}$  – испарение по сезонам,  $Clm_E^{SsPrs}$  – давление по сезонам.

Кортеж параметров транспортного средства, которое применяется для перевозки и эксплуатации дночерпателя, включает  $V = \langle Tp_V, Ft_V, DvEq_V \rangle$ , где  $Tp_V$  – тип транспортного средства (воздушный, наземный, надводный, подводный),  $Ft_V$  – характеристики применяемого транспортного средства,  $DvEq_V$  – характеристики оборудования погружения/подъема на транспортном средстве.

Сведения о специалисте-лимнологе, участвующем в экспедиции, включают также персональные данные, но в рамках данного исследования используется ограниченный кортеж параметров, включающий:  $M = \langle Sk_M, Sch_M \rangle$ , где  $Sk_M$  – навыки специалиста,  $Sch_M$  – график работы специалиста.

Описание параметров задачи пробоотбора содержит кортеж  $W = \langle Tp_W, Ms_W, Tm_W, Eq_W, Cst_W \rangle$ , где  $Tp_W$  – тип задачи,  $Ms_W$  – необходимое число специалистов,  $Tm_W$  – необходимое время реализации,  $Eq_W$  – необходимое оборудование,  $Cst_W$  – стоимость реализации задачи.

Критерии оценивания качества дночерпателя представлены кортежем  $Q = \langle Fnc_Q, Erg_Q, Cst_Q \rangle$ , где  $Fnc_Q$  – множество функциональных критериев,  $Fnc_Q$  – множество эргономических критериев,  $Fnc_Q$  – множество стоимостных критериев. Вопросы эргономики и безопасности применения исследовательских измерительных инструментов и средств пробоотбора непременно рассматриваются при их проектировании и модернизации. Зачастую пользова-

тель готов отказаться от части функций, если их использование вызывает физическое затруднение или алгоритмы управления слишком сложны для восприятия и запоминания. В работах ведущей научной школы профессора А.В. Богомолова детально обсуждаются проблемы безопасности персонала в профессиональной деятельности, создано математическое и методическое обеспечение средств индивидуальной и коллективной защиты, диагностики состояния человека [17–21].

Задача проектирования допустимых системотехнических решений дночерпателя сводится к поиску конструктивных путей формирования вариантов, удовлетворяющих функциональным, эргономическим критериям. Окончательное решение о структуре и функциях дночерпателя и программно-аппаратном обеспечении, необходимом для его реализации, принимается с учетом стоимостных затрат всего жизненного цикла оборудования [22].

### 3. Технологические особенности и предложенный вариант модернизации дночерпателя коробчатого типа

В данном исследовании основное внимание было уделено модернизации дночерпателя Экмана–Берджи/ДАК, поэтому далее рассмотрим более подробно технологические особенности его конструкции и ключевые моменты работы с прибором. История использования дночерпателя насчитывает уже более ста лет, за это время его механическая конструкция многократно модернизировалась, и на сегодняшний день, видимо, достигнуты максимально возможные показатели эффективности и надёжности для прибора, построенного по такой схеме. Было создано несколько как мелких вариаций конструкции, отличающихся размерами (и, соответственно, массой и объёмом), так и материалом: сталь, нержавеющая сталь, латунь, а также более принципиальными: использованием отдельной пружины (пружин) для привода каждой из двух створок пробоотборника. Такой вариант конструкции оказался более эффективным, он позволяет значительно увеличить запасаемую энергию в пружинах и соответственно повысить давление на створках при срабатывании, а также упрощает взведение прибора, поскольку каждую пружину (группу пружин) можно взводить отдельно [1, 11].

Но история совершенствования конструкции дночерпателей Экмана–Берджи/ДАК никак не затронула очень важный аспект: систему управления прибором. Выпускаемые на сегодняшний день дночерпатели по-прежнему, как и сто лет назад, управляются с помощью механического посыла, скользящего по тросу. Такая схема имеет практически одно преимущество: крайнюю простоту и дешевизну. При этом присутствуют несколько очень серьёзных недостатков. Приведём самые существенные из них:

1. Для движения посыла трос должен быть постоянно натянут, но излишний натяг может вытягивать несработавший дночерпатель из грунта.

2. Отклонение от вертикали троса более чем на  $25^\circ$  приведёт к несрабатыванию прибора из-за недостаточной кинетической энергии посыла, даже если сам дночерпатель идеально вертикально вошёл в грунт.

3. Огромное время движения посыла по тросу (до 2–3 мин зависит от глубины) за это время корабль даже на якорю значительно сместится.

Хотелось бы подчеркнуть, что эти проблемные моменты частично удаётся решить за счёт многолетнего опыта сотрудников, но эти методы не являются надёжными и требуют высочайшей квалификации.

Кроме этого, дночерпатель не имеет никаких средств контроля вертикальности входа в грунт и, соответственно, захваченной площади в пробе.

Исследования по оценке качества работы разных модификаций коробчатого пробоотборника Экмана с помощью прямого наблюдения аквалангистами были проведены С. Бломкистом [11]. Цитата из этой работы: «Наклон, заполнение до краев и потеря осадка из пробоотборника, а также перераспределение, ресуспендирование являются основными факторами некорректного отбора бентосных проб. Поскольку исследуемые группы являются моделями общего пользования, эти результаты свидетельствуют о том, что необходимо проявлять осторожность при оценке исследований, основанных на пробоотборе дночерпателем Экмана обычного дизайна. Надёжность отбора проб может быть значительно повышена за счет оснащения захватов опорной стойкой и механизмом, который фиксирует крышки во время подъема. Правильно управляемый захват Экма-

на соответствующей конструкции является подходящим инструментом для сбора определенных типов образцов, таких как бентосная макрофауна и инфауна в частности».

Приведённые исследования, а также многолетний опыт сотрудников СПб ФИЦ РАН, занимающихся бентосным пробоотбором, позволяет сформулировать вывод о необходимости модернизации дночерпателя Экмана–Берджа / ДАК-250 прежде всего в части управления срабатыванием и записи условий, при которых отбиралась проба (отклонение от вертикали, точная глубина, температура), при этом конструктив самого дночерпателя правильно сохранить, это прекрасно отлаженная, надёжная конструкция, которая описана в огромном количестве методик и исследований. Предложенная модернизация дночерпателей Экмана–Берджа / ДАК-250 призвана эффективно решить эти проблемы, оставив основную конструкцию практически без изменений.

Дополнительное сенсорное и вычислительное оборудование в автоматическом режиме принимает решение о захвате пробы и практически гарантирует корректность обора пробы с расчётной площади грунта. В подавляющем большинстве случаев работа производится в режиме «быстрый спуск–подъём», что значительно ускоряет процесс и существенно снижает требования к квалификации оператора. Новая версия дночерпателя состоит из следующих основных модулей: дночерпатель автоматический коробчатый ДАК-250, система управления с датчиками и сервоприводом срабатывания ковшей, трос.

Разработанная версия дночерпателя отличается применением анализа качества забора пробы при автоматизации срабатывания ковшей. Себестоимость дночерпателя существенно не увеличивается за счет минимизации дорогостоящего оборудования для подводного визуального мониторинга и распределения функций между специалистом и автоматикой. В период экспедиции по Ладожскому озеру в августе-сентябре 2022 года с помощью разработанного интеллектуального дночерпателя был проведен сбор свыше 160 проб.

Собранный в ходе экспериментов материал по динамике изменения ускорения в момент приземления дночерпателя на донный грунт также представляет собой интерес с точки зрения автоматизации классификации типов донных поверхностей на твердые скальные и каменистые, гравийно-галечные, песчаные, алевролиты, алевопелиты, глины и другие. Полученный набор сигналов длительностью 0,5 с с частотой дискретизации 200 Гц содержит целые числа в диапазоне [0, 4000] и будет использоваться для конфигурирования структуры и обучения искусственной нейронной сети, на основе которой будет разработана бортовая система распознавания типов донных поверхностей.

*Авторы выражают признательность профессору А.В. Богомолу за плодотворные дискуссии и считают своим приятным долгом поздравить профессора А.В. Богомолова с юбилеем.*

### Литература

1. Eleftheriou, A. Methods for the Study of Marine Benthos / A. Eleftheriou. – Heraklion, Greece, 2013. – 496 p.
2. Жадин, В.И. Методика изучения донной фауны водоёмов и экологии донных беспозвоночных. Жизнь пресных вод. Том. 4. Часть 1 / В.И. Жадин. – М.-Л.: Академия наук СССР, 1956. – С. 279–382.
3. Characteristics of Portable Core Samplers for Lake Deposit Investigations / K. Katsuki, K. Seto, Y. Suganuma, D.Y. Yang // Journal of Geography (Chigaku Zasshi). – 2019. – Vol. 128, Iss. 3. – P. 359–376.
4. Corers and Grabs / B.E. Narayanaswamy, B.J. Bett, P.A. Lamont *et al.* // Biological Sampling in the Deep Sea (eds M.R. Clark, M. Consalvey and A.A. Rowden). – 2016.
5. Petersen, C.G.J. Valuation of the Sea. I. Animal Life of the Sea Bottom, Its FOOD and quantity. Report from the Danish Biological Station / C.G.J. Petersen, P. Boysen-Jensen. – 1911. – Vol. 20. – pp. 1–81.
6. Ekman, S. Neue Apparate zur Qualitativen und Quantitativen Erforschung der Boden-Fauna der Seen / S. Ekman // Int. Revue ges. Hydrobiol. Hydrogr. – 1911. – Vol. 3, Iss. 5-6. – P. 553–561.
7. Birge, E.A. A Second Report on Limnological Apparatus / E.A. Birge // Trans. Wis. Acad. Sci. Arts Lett. – 1921. – Vol. 20. – P. 533–552.
8. van Veen J. Onderzoeken naar het zandtransport van rivieren / J. van Veen // De Ingenieur. – 1933. – Vol. 48. – P. 151–160.

9. Лисицын, А.П. Дночерпатель «Океан-50» и возможности его применения при океанографических исследованиях / А.П. Лисицын, Г.Б. Удинцев // Метеорология и гидрология. – 1952. – № 8. – С. 44–46.
10. Elliott, J.M. A Comparative Study of Seven Grabs used for Sampling Benthic Macroinvertebrates in Rivers / J.M. Elliott, C.M. Drake // Freshwater biology. – 1981. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 99–120.
11. Blomqvist, S. Sampling Performance of Ekman Grabs – *in situ* Observations and Design Improvements / S. Blomqvist // Hydrobiologia. – 1990. – Vol. 206. – P. 245–254.
12. Jonasson, A. New Devices for Sediment Sampling / A. Jonasson, E. Olausson // Marine Geology. – 1966. – Vol. 4, Iss. 5. – P. 365–372.
13. Reineck, H.E. Der Kastengreifer / H.E. Reineck // Natur und Museum. – 1963. – Vol. 93, no. 3. – P. 101–108.
14. Craib, J.S. A Sampler for Taking Short Undisturbed Marine Cores / J.S. Craib // ICES Journal of Marine Science. – 1965. – Vol. 30, Iss. 1. – P. 34–39.
15. Rowe, G.T. Modifications of the Birge–Ekman Box Corer for use with SCUBA or Deep Submergence / G.T. Rowe, C.H. Clifford // Limnology and Oceanography. – 1973. – Vol. 18. – P. 172–175.
16. Mortensen, P.B. Video-Assisted Grabbing: a Minimally Destructive Method of Sampling Azooxanthellate Coral Banks / P.B. Mortensen, J.M. Roberts, R.C. Sundt // Journal of the Marine Biological Association United Kingdom. – 2000. – Vol. 80, Iss. 2. – P. 365–366.
17. Kukushkin, Yu.A. Procedure for Synthesizing the Index of an Operator's Psychophysiological Stress / Yu.A. Kukushkin, A.V. Bogomolov // Biomedical Engineering. – 2001. – no. 4. – P. 29–33.
18. Богомолов, А.В. Концепция математического обеспечения диагностики состояния человека / А.В. Богомолов // Информатика и системы управления. – 2008. – № 2 (16). – С. 11–13.
19. Исследование эффективности средств индивидуальной и коллективной защиты от шума на основе оценки потенциальной ненадежности профессиональной деятельности авиационных специалистов / В.Н. Зинкин, Ю.А. Кукушкин, А.В. Богомолов и др. // Безопасность жизнедеятельности. – 2010. – № 11 (119). – С. 2–6.
20. Проблемы обеспечения акустической безопасности персонала авиационной промышленности / С.К. Солдатов, А.В. Богомолов, В.Н. Зинкин, С.П. Драган // Безопасность труда в промышленности. – 2014. – № 10. – С. 58–60.
21. Экологические аспекты безопасности жизнедеятельности населения, подвергающегося действию авиационного шума / В.Н. Зинкин, А.В. Богомолов, И.М. Ахметзянов, П.М. Шешегов // Теоретическая и прикладная экология. – 2011. – № 3. – С. 97–101.
22. Методы и алгоритмы синтеза технологий и программ управления реконфигурацией бортовых систем маломассовых космических аппаратов / В.Н. Калинин, А.Ю. Кулаков, А.Н. Павлов и др. // Информатика и автоматизация. – 2021. – no. 2 (20). – С. 236–269.

*Поступила в редакцию 15 декабря 2022 г.*

### Сведения об авторах

Ронжин Андрей Леонидович – доктор технических наук, профессор, директор, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8903-3508>, e-mail: [ronzhin@iias.spb.su](mailto:ronzhin@iias.spb.su)

Дудаков Михаил Олегович – ведущий инженер лаборатории комплексных проблем лимнологии Института озераведения Российской академии наук, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2254-4896>, e-mail: [mike814@yandex.ru](mailto:mike814@yandex.ru)

Дудакова Дина Сергеевна – кандидат биологических наук, научный сотрудник, лаборатория гидробиологии Института озераведения Российской академии наук, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7709-3933>, e-mail: [judina-d@yandex.ru](mailto:judina-d@yandex.ru)

## CONCEPTUAL AND SET-THEORETICAL MODELS OF THE FUNCTIONING AND APPLICATION OF SYSTEM SOLUTIONS FOR BOTTOM SEDIMENT SAMPLING

A.L. Ronzhin, M.O. Dudakov, D.S. Dudakova

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

E-mail: ronzhin@ias.spb.su

**Abstract.** The modernization of limnological equipment used for the sampling of bottom sediments is systematically considered. Conceptual and set-theoretical models of the functioning and application of bottom grab sampling are proposed. A classification of existing samplers is given, their distinctive characteristics are considered, and a historical overview of upgrades is carried out. The task of designing acceptable system engineering solutions for bottom grab sampling is reduced to finding options that meet functional and ergonomic criteria. The structure and functions of bottom grab sampling software and hardware are considered taking into account the cost of the entire life cycle of the equipment. The importance of taking into account the ergonomics and safety of the use of the measuring instruments and sampling equipment during their design and modernization is emphasized. The version of the bottom grab sampler is distinguished by the use of sampling quality analysis when automating the operation of buckets. Bottom grab sampling was successfully tested during an expedition on Lake Ladoga. The collected material and the changes in acceleration at the time of the landing of the bottom grab sampler on the bottom sediment is used to configure the structure and train the artificial neural network, on the basis of which the on-board system for recognizing types of bottom surfaces.

**Keywords:** system analysis; equipment life cycle; limnology; sampling; bottom grab; ergonomics; bottom soil; artificial neural networks.

### References

1. Eleftheriou A. *Methods for the study of marine benthos*. Heraklion, Greece, 2013, 496 p.
2. Zhadin V.I. *Metodika izucheniya donnoy fauny vodoyemov i ekologii donnykh bespozvonochnykh. Zhizn' presnykh vod. Tom. 4. Chast' 1* (Methods of studying the bottom fauna of reservoirs and ecology of bottom invertebrates. The life of fresh waters. Vol. 4. Part 1), Moscow, Leningrad, Akademiya nauk SSSR Publ., 1956, pp. 279–382. (in Russ.).
3. Katsuki K., Seto K., Suganuma Y., Yang D.Y. Characteristics of Portable Core Samplers for Lake Deposit Investigations. *Journal of Geography* (Chigaku Zasshi), 2019, Vol. 128, Iss. 3, pp. 359–376. DOI: 10.5026/jgeography.128.359
4. Narayanaswamy B.E., Bett B.J., Lamont P.A. *et al.* Corers and Grabs: Clark. In book: *Biological Sampling in the Deep Sea*, 2016. DOI: 10.1002/9781118332535.ch10
5. Petersen C.G.J., Boysen-Jensen P. Valuation of the Sea. I. Animal Life of the Sea Bottom, its Food and Quantity. *Report from the Danish Biological Station*, 1911, Vol. 20, pp. 1–81.
6. Ekman, S. Neue Apparate zur Qualitativen und Quantitativen Erforschung der Bodenfauna der Seen. *Internationale Revue Der Gesamten Hydrobiologie Und Hydrographie*, 1911, Vol. 3, Iss. 5-6, pp. 553–561. doi:10.1002/iroh.19110030509
7. Birge E.A. A Second Report on Limnological Apparatus. *Trans. Wis. Acad. Sci. Arts Lett.*, 1921, Vol. 20, pp. 533–552.
8. van Veen J. Onderzoeken Naar het Zandtransport van Rivieren. *De Ingenieur*, 1933, Vol. 48, pp. 151–160.

9. Lisitsyn A.P., Udintsev G.B. Dnocherpatel' "Okean-50" i vozmozhnosti ego primeneniya pri okeanograficheskikh issledovaniyakh (The "Ocean-50" Dredger and the Possibilities of Its Application in Oceanographic Research). *Meteorologiya i gidrologiya*, 1952, no. 8, pp. 44–46. (in Russ.).

10. Elliott J.M., Drake C.M. A Comparative Study of Seven Grabs used for Sampling Benthic Macroinvertebrates in Rivers. *Freshwater biology*, 1981, Vol. 11, Iss. 2, pp. 99–120. DOI: 10.1111/j.1365-2427.1981.tb01247.x

11. Blomqvist S. Sampling Performance of Ekman Grabs – In Situ Observations and Design Improvements. *Hydrobiologia*, 1990, Vol. 206, pp. 245–254. DOI: 10.1007/BF00014090

12. Jonasson A., Olausson E. New Devices for Sediment Sampling. *Marine Geology*, 1966, Vol. 4, Iss. 5, pp. 365–372. DOI: 10.1016/0025-3227(66)90040-5

13. Reineck H.E. Der Kastengreifer. *Natur und Museum*, 1963, Vol. 93, no. 3, pp. 101–108.

14. Craib J.S. A Sampler for Taking Short Undisturbed Marine Cores. *ICES Journal of Marine Science*, 1965, Vol. 30, Iss. 1, pp. 34–39. DOI: 10.1093/icesjms/30.1.34

15. Rowe G.T., Clifford C.H. Modifications of the Birge–Ekman Box Corer for use with SCUBA or Deep Submergence. *Limnology and Oceanography*, 1973, Vol. 18, pp. 172–175.

16. Mortensen P.B., Roberts J.M., Sundt R.C. Video-Assisted Grabbing: a Minimally Destructive Method of Sampling Azooxanthellate Coral Banks. *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom*, 2000, Vol. 80, Iss. 2, pp. 365–366. DOI: 10.1017/S0025315400001983

17. Kukushkin Yu.A., Bogomolov A.V. Procedure for Synthesizing the Index of an Operator's Psychophysiological Stress. *Biomedical Engineering*, 2001, no. 4, pp. 29–33.

18. Bogomolov A.V. Kontseptsiya matematicheskogo obespecheniya diagnostiki sostoyaniya cheloveka (The Concept of Mathematical Support for the Diagnosis of Human Condition). *Informatika i sistemy upravleniya*, 2008, no. 2 (16), pp. 11–13. (in Russ.).

19. Zinkin V.N., Kukushkin Yu. A., Bogomolov A.V., Soldatov S.K., Alekseenko M.S. Probe of Efficiency of Means of Individual and Collective Protection Against Noise on the Basis of an Estimation of Potential Unreliability of Professional Work of Aviation Experts. *Bezopasnost' zhiznedejatel'nosti*, 2010, no. 11 (119), pp. 2–6. (in Russ.).

20. Soldatov S.K., Bogomolov A.V., Zinkin V.N., Dragan S.P. Problemy obespecheniya akusticheskoy bezopasnosti personala aviatsionnoy promyshlennosti (Problems of ensuring acoustic safety of aviation industry personnel). *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*, 2014, no. 10, pp. 58–60. (in Russ.).

21. Zinkin V.N., Bogomolov A.V., Akhmetzyanov I.M., Sheshegov P.M. Environmental Aspects of Life Safety of People Affected by Aircraft Noise. *Teoreticheskaya i prikladnaya jekologiya*, 2011, no. 3, pp. 97–101. (in Russ.).

22. Kalinin V., Kulakov A., Pavlov A., Potryasaev S., Sokolov B. Methods and Algorithms for the Synthesis of Technologies and Programs for Controlling the Reconfiguration of On-board Systems of Small-Sized Spacecrafts. *Informatics and Automation*, 2021, no. 2 (20), pp. 236–269. (in Russ.).

*Received December 15, 2022*

### Information about the authors

Ronzhin Andrey Leonidovich is Professor, Dr. Sc. (Engineering), Director, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8903-3508>, e-mail: [ronzhin@iias.spb.su](mailto:ronzhin@iias.spb.su)

Dudakov Mikhail Olegovich is Leading Engineer, Laboratory of Complex Problems of Limnology of the Institute of Limnology of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2254-4896>, e-mail: [mike814@yandex.ru](mailto:mike814@yandex.ru)

Dudakova Dina Sergeevna is Cand. Sc. (Biological), Researcher of Laboratory of Hydrobiology of the Institute of Limnology of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7709-3933>, e-mail: [judina-d@yandex.ru](mailto:judina-d@yandex.ru)

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНОЙ КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ С ДВИЖУЩИМИСЯ БЕЗ УСКОРЕНИЯ СМЕЖНЫМИ СТОРОНАМИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

**А.В. Рязских, А.А. Хвостов, Е.А. Соболева, В.И. Рязских**

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация,  
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

**Аннотация.** Исследована однородная по теплофизическим характеристикам деформируемая с сохранением подобия 2D-область в виде квадрата. В начальный момент времени две смежные стороны начинают двигаться соответственно в направлении осей абсцисс и ординат с постоянной скоростью, оставаясь эквидистантными двум другим смежным сторонам (неподвижные и движущиеся стороны поддерживаются при различных постоянных температурах). Нелинейная начально-краевая задача с граничными условиями первого рода путем применения специальных координат иммобилизирует движущуюся границу области в неподвижную с соответствующей трансформацией исходной начально-краевой задачи для неподвижных границ относительно мультипликативной переменной двух неизвестных функций, которые определены с помощью формулировки дополнительных начально-краевых задач. Решения сформулированных дополнительных задач получены с помощью последовательного применения интегральных синус-преобразований по псевдопространственным переменным. Это позволило записать решение исходной задачи в аналитическом виде с помощью специально сконструированных квадратур. Вычислительный эксперимент показал корректность полученного решения и безусловное выполнение начального условия. Полученные результаты также иллюстрируют качественную адекватность расчётов процессу прогрева квадратной области с движущимися сопряженными границами.

**Ключевые слова:** теплопроводность; движущаяся граница; квадратная область; аналитическое решение; граничные условия 1-го рода.

**Введение.** Интерес к задачам с движущимися границами не ослабевает в связи с многопредметными приложениями: идентификация движущейся границы для обратной задачи теплопроводности [1]; прогнозирование переходной свободной конвекции и тепловой стратификации в резервуарах хранения сжиженных газов в присутствии микропримесей [2, 3]; оценка термического воздействия на защитные ограждения [4]; изменение объема при тепловой обработке в пищевой технологии [5, 6]; повышение эффективности абляционной защиты гиперзвуковых обтекателей летательных аппаратов [7] и т. д. Если ограничиваться переносными характеристиками в практических применениях, то их математические модели формализуются на основе фундаментальных законов Фурье и Фика в виде уравнений в частных производных параболического типа либо их систем с соответствующим набором краевых условий, в том числе и на части или на всей границе, движущейся по произвольному закону с сохранением ее гладкости [8]. В частности, при описании задач с фазовыми переходами на движущейся границе (плавление или кристаллизация) [9] добавляется условие Стефана [10] и формулировка такой задачи переходит в классическую формулировку Стефана.

Только ограниченное число задач с движущимися границами допускает аналитическое решение, к которым относятся в основном классические одномерные задачи Стефана и Неймана [11], а также найденные в последнее время новые решения [12–15], но тоже в одномерной постановке.

В связи с этим актуален поиск новых решений задач для 2D-областей, в которых части границы движутся в разных направлениях.

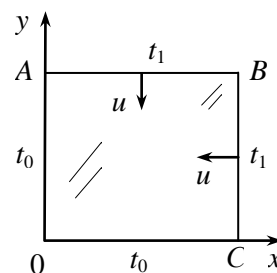


Рис. 1. Расчетная схема области

**Постановка задачи.** Рассматривается однородная по теплофизическим характеристикам (коэффициент температуропроводности  $a = \text{const}$ ) деформируемая с сохранением подобия область  $ABCO$  в декартовой системе координат  $(xOy)$ , для которой  $AB = BC = CO = OA = h_0$  (рис. 1). В начальный момент времени  $\tau = 0$  стороны  $AB$  и  $BC$  начинают двигаться соответственно в направлении осей абсцисс и ординат с постоянной скоростью  $u$ , оставаясь им параллельными, причем локальная температура в каждой точке области одинакова и равна  $t_0 = \text{const}$ , при  $\tau > 0$  сторона  $AO$  и  $OC$  также поддерживается при температуре  $t_0$ , а стороны  $AB$  и  $BC$  при  $t_1 = \text{const}$ .

Изменение локальной температуры  $t(x, y, \tau)$  во внутренних точках рассматриваемой области должно быть определено из следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right]; \quad (1)$$

$$t(x, y, 0) = t(0, y, \tau) = t(x, 0, \tau) = t_0; \quad (2)$$

$$t(h, y, \tau) = t(x, h, \tau) = t_1; \quad (3)$$

$$h(\tau) = h_0 - u\tau. \quad (4)$$

С помощью относительных переменных  $\theta = a\tau/h_0^2$ ;  $X = x/h_0$ ;  $Y = y/h_0$ ;  $T(X, Y, \theta) = [t(x, y, \tau) - t_0]/(t_1 - t_0)$ ;  $A = uh_0/a$ ;  $H(\theta) = 1 - A\theta$  система (1)–(4) записана в безразмерном виде:

$$\frac{\partial T(X, Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T(X, Y, \theta)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T(X, Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (5)$$

$$T(X, Y, 0) = T(0, Y, \theta) = T(X, 0, \theta) = 0; \quad (6)$$

$$T[H(\theta), Y, \theta] = T[X, H(\theta), \theta] = 1; \quad (7)$$

$$H(\theta) = 1 - A\theta. \quad (8)$$

Применение координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  [16]:

$$\alpha = X/(1 - A\theta); \quad \beta = Y/(1 - A\theta); \quad \gamma = \theta$$

иммобилизует движущиеся стороны области и трансформирует систему (5)–(8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = & -\frac{A}{1 - A\gamma} \left[ \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} \right] + \\ & + \frac{A}{(1 - A\gamma)^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Omega(\alpha, \beta, 0) = \Omega(0, \beta, \gamma) = \Omega(\alpha, 0, \gamma) = 0, \quad (10)$$

$$\Omega(1, \beta, \gamma) = \Omega(\alpha, 1, \gamma) = 1, \quad (11)$$

где

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = T[X(\alpha, \beta, \gamma), Y(\alpha, \beta, \gamma), \theta(\alpha, \beta, \gamma)].$$

Решение. Пусть

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = q(\alpha, \beta, \gamma)W(\alpha, \beta, \gamma), \quad (12)$$

где  $q = q(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $W = W(\alpha, \beta, \gamma)$  – функции, которые будут определены ниже. С помощью (12) уравнение (9) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \gamma} = & \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \left[ -\frac{\alpha A}{1 - A\gamma} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{2}{q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \\ & + \left[ -\frac{\beta A}{1 - A\gamma} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{2}{q} \frac{\partial q}{\partial \beta} \right] \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{1}{q} \left[ -\frac{\alpha A}{1 - A\gamma} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha^2} \right] W + \end{aligned}$$



$$+\frac{1}{q}\left[-\frac{\beta A}{1-A\gamma}\frac{\partial q}{\partial\beta}+\frac{1}{(1-A\gamma)^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\beta^2}\right]W. \quad (13)$$

Подстановка  $q(\alpha, \beta, \gamma)$  как координатный мультипликатор

$$q(\alpha, \beta, \gamma) = q_1(\alpha, \gamma)q_2(\beta, \gamma),$$

где  $q_1(\alpha, \gamma)$ ,  $q_2(\beta, \gamma)$  идентифицируются соответственно из условий

$$-\frac{\alpha A}{1-A\gamma} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{2}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial\alpha} = 0, \quad -\frac{\beta A}{1-A\gamma} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{2}{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial\beta} = 0,$$

откуда

$$q_1(\alpha, \gamma) = C_1(\gamma) \exp\left[\frac{1}{4}A\alpha^2(1-A\gamma)\right], \quad q_2(\beta, \gamma) = C_2(\gamma) \exp\left[\frac{1}{4}A\beta^2(1-A\gamma)\right],$$

где константы интегрирования  $C_1(\gamma)$  и  $C_2(\gamma)$  определяются из выполнения тождеств

$$-\frac{\alpha A}{1-A\gamma} \frac{\partial q_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial\alpha^2} \equiv 0, \quad -\frac{\beta A}{1-A\gamma} \frac{\partial q_2}{\partial\beta} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial\beta^2} \equiv 0,$$

что обеспечивается, когда  $C_1(\gamma) = C_2(\gamma) = (1-A\gamma)^{-1/2}$ .

Таким образом соотношение (12) принимает структурированный вид

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{W(\alpha, \beta, \gamma)}{1-A\gamma} \exp\left[\frac{1}{4}A(1-A\gamma)(\alpha^2 + \beta^2)\right]. \quad (14)$$

С помощью (14) из системы (9)–(11) следует начально-краевая задача для  $W(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma} = \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2} \right); \quad (15)$$

$$W(\alpha, \beta, 0) = W(\alpha, 0, \gamma) = W(0, \beta, \gamma) = 0; \quad (16)$$

$$W(1, \beta, \gamma) = F_1(\beta, \gamma), \quad W(\alpha, 1, \gamma) = F_2(\alpha, \gamma), \quad (17)$$

где

$$F_1(\beta, \gamma) = (1-A\gamma) \exp\left[-\frac{1}{4}A(1-A\gamma)(1+\beta^2)\right],$$

$$F_2(\alpha, \gamma) = (1-A\gamma) \exp\left[-\frac{1}{4}A(1-A\gamma)(\alpha^2+1)\right].$$

Исходная функция  $W(\alpha, \beta, \gamma)$  представлена как суперпозиция функций  $W_1(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $W_2(\alpha, \beta, \gamma)$ , т. е.

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = W_1(\alpha, \beta, \gamma) + W_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad (18)$$

где  $W_1(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $W_2(\alpha, \beta, \gamma)$  являются решениями следующих начально-краевых задач:

$$\frac{\partial W_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \left[ \frac{\partial^2 W_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 W_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\beta^2} \right], \quad (19)$$

$$W_1(\alpha, \beta, 0) = W_1(\alpha, 0, \gamma) = W_1(0, \beta, \gamma) = 0; \quad (20)$$

$$W_1(1, \beta, \gamma) = F_1(\beta, \gamma), \quad W_1(\alpha, 1, \gamma) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial W_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \left[ \frac{\partial^2 W_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 W_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\beta^2} \right], \quad (22)$$

$$W_2(\alpha, \beta, 0) = W_2(\alpha, 0, \gamma) = W_2(0, \beta, \gamma) = 0; \quad (23)$$

$$W_2(1, \beta, \gamma) = 0, \quad W_2(\alpha, 1, \gamma) = F_2(\alpha, \gamma). \quad (24)$$

Для нахождения  $W_1(\alpha, \beta, \gamma)$  вновь воспользуемся суперпозицией неизвестных функций

$$W_1(\alpha, \beta, \gamma) = V_1(\alpha, \beta, \gamma) + U_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad (25)$$

где  $U_1(\alpha, \beta, \gamma)$  представим как

$$U_1(\alpha, \beta, \gamma) = U_1^*(\alpha, \beta, \infty)W_1(1, \beta, \gamma), \quad (26)$$

причем  $U_1^*(\alpha, \beta, \infty) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)$ , а  $U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)$  есть решение вспомогательной задачи

$$\frac{\partial U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta^2}, \quad (27)$$

$$U_1^*(\alpha, \beta, 0) = U_1^*(\alpha, 0, \gamma) = U_1^*(0, \beta, \gamma) = U_1^*(\alpha, 1, \gamma) = 0; \quad (28)$$

$$U_1^*(1, \beta, \gamma) = 1. \quad (29)$$

Поскольку решение (27)–(29)

$$U_1^*(\alpha, \beta, \gamma) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos q_k}{q_k} \right) \left[ \frac{\text{sh}(q_k \alpha)}{\text{sh} q_k} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i \sin(\delta_i \alpha)}{(\delta_i^2 + q_k^2) \cos \delta_i} \exp(-\delta_i^2 \gamma) \right] \sin(q_k \beta), \quad (30)$$

где  $q_k = \pi k$ ,  $\delta_i = \pi i$ ,  $k, i = \overline{1, \infty}$ , то при  $\gamma \rightarrow \infty$  из (30) следует

$$U_1^*(\alpha, \beta, \infty) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos q_k}{q_k} \right) \frac{\text{sh}(q_k \alpha)}{\text{sh} q_k} \sin(q_k \beta). \quad (31)$$

С помощью (25), (26) и (31) система (22)–(24) может быть представлена относительно  $V_1 = V_1(\alpha, \beta, \gamma)$  в виде:

$$(1 - A\gamma)^2 \frac{\partial V_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta^2} - (1 - A\gamma)^2 \frac{\partial U_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \beta^2}; \quad (32)$$

$$V_1(\alpha, \beta, 0) = -U_1^*(\alpha, \beta, \infty)F_1(\beta, \gamma); \quad (33)$$

$$V_1(\alpha, 0, \gamma) = V_1(0, \beta, \gamma) = V_1(\alpha, 1, \gamma) = V_1(1, \beta, \gamma) = 0. \quad (34)$$

Применение конечного интегрального синус-преобразования Фурье по переменной  $\alpha$  к системе (32)–(34)

$$\Phi_1 = \Phi_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 V_1(\alpha, \beta, \gamma) \sin(\lambda_n \beta) d\beta,$$

$$P_1 = P_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 U_1(\alpha, \beta, \gamma) \sin(\lambda_n \beta) d\beta,$$

где  $\lambda_n = \pi n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , переводит ее в систему

$$(1 - A\gamma)^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha^2} - \lambda_n^2 \Phi_1 - (1 - A\gamma)^2 \frac{\partial P_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial \alpha^2} - \lambda_n^2 P_1; \quad (35)$$

$$\Phi_1(\alpha, \lambda_n, 0) = - \int_0^1 U_1^*(\alpha, \beta, \infty) F_1(\beta, 0) \sin(\lambda_n \beta) d\beta; \quad (36)$$

$$\Phi_1(\alpha, 0, \gamma) = \Phi_1(0, \beta, \gamma) = \Phi_1(\alpha, 1, \gamma) = \Phi_1(1, \beta, \gamma) = 0. \quad (37)$$

Применение конечного интегрального синус-преобразования Фурье по переменной  $\beta$

$$\Psi_1 = \Psi_1(\mu_m, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 \Phi_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha,$$

$$Q_1 = Q_1(\mu_m, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 P_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha$$

к (35)–(37) генерирует задачу Коши относительно  $\Psi_1$

$$\frac{d\Psi_1}{d\theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} \Psi_1 = - \left[ \frac{dQ_1}{d\theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} Q_1 \right] = L_1(\theta),$$

$$\Psi_1^0(\mu_m, \lambda_n, 0) = - \int_0^1 \int_0^1 U_1^*(\alpha, \beta, \infty) F_1(\beta, 0) \sin(\lambda_n \beta) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha d\beta,$$

$$L_1(\theta) = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} U_1 \right] \sin(\lambda_n \beta) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha d\beta,$$

решение которой

$$\Psi_1(\mu_m, \lambda_n, \theta) = \exp \left[ - \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] \left\{ \Psi_1^0(\mu_m, \lambda_n, 0) + \int_0^1 L_1(\theta) \exp \left[ \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] d\theta \right\}. \quad (38)$$

Оригинал (38)

$$V_1(X, Y, \theta) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_1(\mu_m, \lambda_n, \theta) \sin\left(\frac{\mu_m X}{1 - A\theta}\right) \sin\left(\frac{\lambda_n Y}{1 - A\theta}\right) \quad (39)$$

и в итоге

$$W_1(X, Y, \theta) = U_1^*\left(\frac{X}{1 - A\theta}, \frac{Y}{1 - A\theta}, \infty\right) F_1\left(\frac{Y}{1 - A\theta}, \theta\right) + V_1(X, Y, \theta). \quad (40)$$

Решая систему (22)–(24) аналогичным образом, получим

$$W_2(X, Y, \theta) = U_2^*\left(\frac{X}{1 - A\theta}, \frac{Y}{1 - A\theta}, \infty\right) F_2\left(\frac{X}{1 - A\theta}, \theta\right) + V_2(X, Y, \theta), \quad (41)$$

где

$$U_2^*(\alpha, \beta, \infty) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos p_l}{p_l} \right) \frac{\text{sh}(p_l \beta)}{\text{sh} p_l} \sin(q_k \alpha), \quad p_l = \pi l;$$

$$V_2(X, Y, \theta) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_2(\mu_m, \lambda_n, \theta) \sin\left(\frac{\mu_m X}{1 - A\theta}\right) \sin\left(\frac{\lambda_n Y}{1 - A\theta}\right);$$

$$\Psi_2(\mu_m, \lambda_n, \theta) = \exp \left[ - \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] \left\{ \Psi_2^0(\mu_m, \lambda_n, 0) + \int_0^1 L_2(\theta) \exp \left[ \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] d\theta \right\};$$

$$\Psi_2^0(\mu_m, \lambda_n, 0) = - \int_0^1 \int_0^1 U_2^*(\alpha, \beta, \infty) F_2(\alpha, 0) (\mu_m \alpha) \sin(\lambda_n \beta) \sin d\alpha d\beta;$$

$$L_2(\theta) = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} U_2 \right] \sin(\lambda_n \beta) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha d\beta;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \theta} = U_2^*(\alpha, \beta, \infty) \left[ -A + \frac{1}{4} A^2 (1 - A\theta) (1 + \alpha^2) \right] \exp \left\{ - \frac{1}{4} [A\alpha^2 (1 - A\theta) + A(1 - A\theta)] \right\}.$$

Таким образом, окончательное решение с учетом (14), (40), (41) таково:

$$T(X, Y, \theta) = \frac{W_1(X, Y, \theta) + W_2(X, Y, \theta)}{1 - A\theta} \exp \left( \frac{A}{4} \cdot \frac{X^2 + Y^2}{1 - A\theta} \right). \quad (42)$$

Результаты расчетов по (42) показаны на рис. 2, которые при безусловном выполнении начального условия иллюстрируют справедливость полученного аналитического решения в квадратах.

**Заключение.** Полученное решение может быть обобщено на случай  $A < 0$ , а также на движение частей границы области в разных направлениях и с разными скоростями. Кроме того, нет никаких ограничений к распространению изложенного подхода для равноускоренного или равнозамедленного движения сторон, а также при наличии источника или стока теплоты.

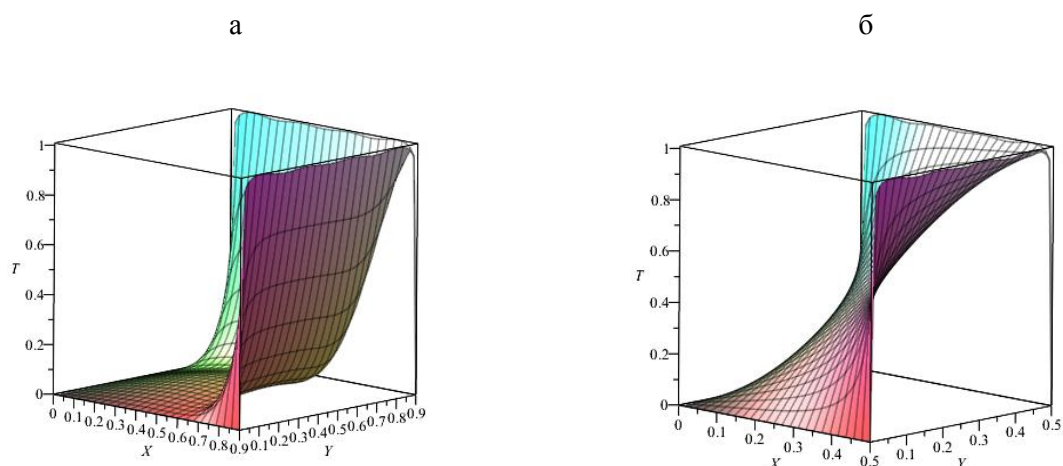


Рис. 2. Температурное поле при  $A=1$  и различных  $\theta$ : а – 0,1; б – 0,5

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору А.В. Богомолову за участие в обсуждении выбора метода решения задачи и поздравляют его с юбилеем.

### Литература

1. Lin, J.-Ch. Moving Boundary Identification for a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem / J.-Ch. Lin, T. Wei // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2011. – Vol. 19, Iss. 8. – P. 1139–1154.
2. A Moving-Boundary Based Dynamic Model for Predicting the Transient Free Convection and Thermal Stratification in Liquefied Gas Storage Tank / Z. Duan, H. Sun, C. Cheng *et al.* // *Int. J. of Thermal Sciences*. – 2021. – Vol. 160. – Article 106890.
3. Ryazhskih A.V. Sedimentation of a Low-Concentration Suspension of Stokes Particles in a Stirred Layer with a Movable Free Boundary / A.V. Ryazhskih // *Technical Physics*. – 2019. – Vol. 64. – P. 1082–1089.
4. Sulc, S. Thermal Model for Timber Fire Exposure with Moving Boundary / S. Sulc, V. Smilauer, F. Wald // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, Iss. 3. – P. 574–584.
5. Feyissa A.H., Adler-Nissen J., Gernacy K.V. Model of Heat and Mass Transfer with Moving Boundary during Roasting of Meat in Convection-Oven / *Proceedings of the COMSOL Conference, Milan*. – 2009. – Article 168420.
6. Adrover, A. A Non-Isothermal Moving-Boundary Model for Continues and Intermittent Drying of Pears / A. Adrover, C. Venditti, A. Brasiello // *Foods*. – 2020. – Vol. 9, Iss. 11. – P. 1577–1599.
7. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдеевский, Б.М. Галицкий, Г.А. Глебов, В.К. Кошкин. – М.: Машиностроение, 1992. – 518 с.
8. Gupta, S.C. Temperature and Moving Boundary in Two-Phase Freezing due to an Axisymmetric Cold Spot / S.C. Gupta // *Quarterly of applied mathematics*. – 1987. – Vol. 45. – P. 205–222.
9. Crank, J. *Free and Moving Boundary Problems* / J. Crank. – Oxford: Clarendon Press, 1984. – 425 p.
10. Ozisik, M.N. *Heat Conduction* / M.N. Ozisik. – NY: John Wiley & Sons, Inc. – 1993. – 692 p.
11. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
12. Рубин, А.Г. Решение краевых задач нестационарной теплопроводности в области с движущейся границей при наличии источника теплоты / А.Г. Рубин // *Челябинский физико-математический журнал*. – 1994. – Т. 3. – №1(2). – С. 108–111.
13. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высш. шк., 2001. – 549 с.
14. Власов, П.А. Влияние равномерного движения границы на температурное поле полупространства, подверженного нагреву внешним тепловым потоком / П.А. Власов // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*. – 2014. – № 8. – С. 101–109.

15. Kulish, V. A Non-Field Analytical Method for Heat Transfer Problems through a Moving Boundary / V. Kulish, V. Horak // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11. – Article 18968.

16. Landau, H.G. Heat Conduction in a Melting Solid / H.G. Landau // Quarterly of applied mathematics. – 1950. – Vol. 8, no. 1. – P. 81–94.

Поступила в редакцию 19 октября 2022 г.

### Сведения об авторах

Ряжских Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskihav@bk.ru

Хвостов Анатолий Анатольевич – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: khvtol1974@yandex.ru

Соболева Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: sobol5661@yandex.ru

Ряжских Виктор Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskih\_vi@mail.ru

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 55–62

DOI: 10.14529/mmph230106

## THE TEMPERATURE PATTERN OF A HOMOGENEOUS SQUARE AREA WITH ADJACENT SIDES MOVING WITHOUT ACCELERATION UNDER BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

**A. V. Ryazhskih, A. A. Khvostov, E. A. Soboleva, V. I. Ryazhskih**  
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation  
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

**Abstract.** A square area with homogeneous thermal and physical characteristics, deformed preserving 2-D similarity, is investigated. At the initial moment of time, two adjacent sides start moving respectively towards the abscissa and ordinate axes with constant speed while remaining equidistant to the other two adjacent sides (the fixed and moving sides are kept at different constant temperatures). A nonlinear initial boundary value problem with boundary conditions of the first kind and special coordinates immobilizes the moving boundary of the area into a fixed one with the corresponding transformation of the initial boundary value problem for the fixed boundaries with respect to the multiplicative variable of two unknown functions, which are defined by additional initial boundary values. These were solved by the successive application of integral sine transformations on pseudo-space variables.

This enables the solution of the original problem to be notated analytically using special quadratures. The computational experiment proved the correctness of the solution and the absolute fulfillment of the initial conditions. The results also illustrate the adequacy of the qualitative calculations for the heating process of a quadratic area with moving adjacent boundaries. This approach can be applied to the differently directed motion of adjacent boundaries, to uniformly retarded or uniformly accelerated motion. Considering that Fourier's and Fick's laws are mathematically similar, the solution and its generalization are of practical importance in describing mass transfer processes, such as crystallization or dissolution.

**Keywords:** thermal conductivity; moving boundary; square area; analytical solution; boundary conditions of the first kind.

### References

1. Lin J.-Ch., Wei T. Moving Boundary Identification for a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011, Vol. 19, Iss. 8, pp. 1139–1154. DOI: 10.1080/17415977.2011.603084

2. Duan Z., Sun H., Cheng C., Tang W., Xue H. A Moving-Boundary Based Dynamic Model for Predicting the Transient Free Convection and Thermal Stratification in Liquefied Gas Storage Tank. *Int. J. of Thermal Sciences*, 2021, Vol. 160, Article 106890. DOI:°10.1016/j.ijthermalsci.2020.106690
3. Ryazhskikh A.V. Sedimentation of a Low-Concentration Suspension of Stokes Particles in a Stirred Layer with a Movable Free Boundary. *Technical Physics*, 2019, Vol. 64, pp. 1082–1089. DOI:°10.1134/S106378421908019X
4. Sulc S., Smilauer V., Wald F. Thermal Model for Timber Fire Exposure with Moving Boundary. *Materials*, 2021, Vol. 14, Iss. 3, pp. 574–584. DOI:°10.3390/ma14030574
5. Feyissa A.H., Adler-Nissen J., Gernacy K.V. Model of Heat and Mass Transfer with Moving Boundary During Roasting of Meat in Convection-Oven. *Expert from the proceedings of the COMSOL Conference*, Milan. 2009, Article 168420, [www.comsol.ru/paper/6798](http://www.comsol.ru/paper/6798)
6. Adrover A., Venditti C., Brasiello A. A Non-Isothermal Moving-Boundary Model for Continuous and Intermittent Drying of Pears. *Foods*, 2020, Vol. 9, Iss. 11, pp. 1577–1599. DOI: 10.3390/foods9111577
7. Avduevskiy V.S., Galitseyskiy B.M., Glebov G.A., Koshkin V.K. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* (Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket and Space Technology). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 518p. (in Russ.).
8. Gupta S.C. Temperature and Moving Boundary in Two-Phase Freezing due to an Axisymmetric Cold Spot. *Quarterly of applied mathematics*, 1987, Vol. 45, pp. 205–222. DOI: 10.1090/qam/895094
9. Crank J. Free and moving boundary problems, *Oxford: Clarendon Press*, 1984, 425 p.
10. Ozisik M.N. *Heat Conduction*, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1993, 692 p.
11. Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel.* (Thermal Conductivity of Solids). Moscow, Nauka Publ., 1964, 487 p. (in Russ.).
12. Rubin A.G. Reshenie kraevykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti v oblasti s dvizhushcheyasya granitsey pri nalichii istochnika teploty (Solution of Boundary Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in a Region with a Moving Boundary in the Presence of a Heat Source). *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskii zhurnal*, 1994, Vol. 3, no. 1(2), pp. 108–111. (in Russ.).
13. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* (Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids). Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2001, 549 p. (in Russ.).
14. Vlasov P.A. Vliyanie ravnomernogo dvizheniya granitsy na temperaturnoe pole poluprostranstva, podverzhennogo nagrevu vneshnim teplovym potokom (Influence of Uniform Boundary Motion on the Temperature Field of a Half-Space Subjected to Heating by an External Heat Flow). *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana*, 2014, no. 8, pp. 101–109. (in Russ.). DOI: 10.7463/0814.0726072
15. Kulish V., Horak V. A Non-Field Analytical Method for Heat Transfer Problems Through a Moving Boundary. *Scientific Reports*, 2021, Vol. 11, Article 18968. DOI: 10.1038/s41598-021-98572-x
16. Landau H.G. Heat Conduction in a Melting Solid. *Quarterly of applied mathematics*, 1950, Vol. 8, no. 1, pp. 81–94. <https://www.jstor.org/stable/43633788>

*Received October 19, 2022*

### Information about the authors

Ryazhskikh Aleksandr Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9823-3165>, e-mail: [ryazhskihav@bk.ru](mailto:ryazhskihav@bk.ru)

Khvostov Anatoliy Anatol'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: [khvtol1974@yandex.ru](mailto:khvtol1974@yandex.ru)

Soboleva Elena Aleksandrovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: [sobol5661@yandex.ru](mailto:sobol5661@yandex.ru)

Ryazhskikh Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: [ryazhskih\\_vi@mail.ru](mailto:ryazhskih_vi@mail.ru)

## УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В РАДИОСИСТЕМАХ С ПРИНЯТИЕМ РЕШЕНИЙ

**И.А. Чепурнов, В.О. Черваков, М.Г. Вахитов, Д.С. Клыгач**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*

*E-mail: klygachds@susu.ru*

**Аннотация.** Рассматривается выбор оптимальной решающей функции для радиосистем с принятием решений. Проводится анализ алгоритмов объединения частных решений на основе байесовского подхода. Предлагается метод вычисления оптимальной решающей функции для определения принадлежности наблюдаемых значений к заданному классу значений. Предложенный метод позволяет эффективно использовать частные решения для принятия общего решения в другом алфавите на основе сведений о составе наблюдаемой группы объектов и распределении их по классам, а также оптимального учёта текущей достоверности этих частных решений. Набор наблюдаемых значений и частных решений формируется на основе экспериментальных результатов измерений. Предполагается, что значения в алфавите заранее известны. Описано применение данного метода в задачах неразрушающего контроля композитных материалов, а именно с помощью радиоволнового метода. Радиоволновый метод можно применять для поиска дефектов в структуре композитных материалов. С помощью излучателя сканируется поверхность эталонного композитного материала и формируется набор данных. После проводится сканирование исследуемого образца и формируется набор по наблюдаемым объектам. Возникающие неоднородности (дефекты) будут являться установленными известными классами в алфавите и будут определяться набором значений коэффициента отражения от этих неоднородностей (дефектов).

*Ключевые слова:* радиосвязь; распознавание; достоверность; принятие решений.

### Введение

К радиосистемам с двухэтапным принятием решений можно отнести системы цифровой связи [1] и многодатчиковые системы распознавания (классификации) [2, 3]. В системах передачи дискретной информации на первом этапе формируются решения демодулятора, а на втором эти решения обрабатываются в декодере, в результате формируется окончательное решение о том, какая информация была передана. В многодатчиковых системах распознавания на первом этапе датчики (подсистемы, каналы, классификаторы) формируют решения о принадлежности наблюдаемого объекта к одному из заранее установленных классов в алфавите каждого датчика, а на втором этапе эти решения объединяются, при этом используется алфавит окончательных решений. Для общности будем называть решения первого этапа частными, а второго – общими. Применительно и к системам цифровой связи, и к многодатчиковым системам распознавания будем называть процесс принятия общего решения объединением частных решений.

В работе [3, 4] на основе общего байесовского подхода рассматриваются алгоритмы объединения частных решений. Предлагается метод оптимального учёта текущей достоверности частных решений, в частном случае приводящий к алгоритму оптимального голосования. Критерием оптимальности является критерий идеального наблюдателя.

Одним из направлений использования предложенных радиотехнических систем является неразрушающий контроль. В настоящее время полимерные композиты, например, угле- и органо-пластики, широко используются в авиационной технике, авиационных двигателях для изготовления высоконагруженных несущих элементов. Основным достоинством композитных материалов на основе синтетических армирующих волокон является высокая удельная прочность, возможность в широких пределах управлять прочностью и жесткостью конструкции, добиваясь ее высокого весового совершенства [5–7]. Возникающие при ударах внутри- и межслойные повреждения (расслоения, разрыв волокон) существенно влияют на остаточную прочность композитного элемента и могут приводить к его внезапному разрушению в процессе штатной эксплуатации [8–9]. В связи с этим важной частью мониторинга состояния композитных конструкций является

выявление ударных дефектов для их дальнейшего ремонта или принятия решения о замене всего элемента [10–12]. В этом случае радиоволновый метод можно применять для поиска дефектов в структуре композитных материалов.

С помощью излучателя сканируется поверхность эталонного композитного материала и формируется набор данных. После проводится сканирование исследуемого образца и формируется набор по наблюдаемым объектам. Возникающие неоднородности (дефекты) будут являться установленными известными классами в алфавите.

### Математическая модель

В работе [4] на первом этапе формирования решения о принадлежности наблюдаемых объектов к заранее установленным классам в алфавите  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  нет описания возможных ошибок, которые могут возникать при ложной принадлежности наблюдаемых значений к заданному классу. Необходимо учитывать вероятность ошибки системы и выбрать оптимальную решающую функцию, с помощью которой можно принимать решение о принадлежности наблюдаемых объектов к заданным классам. Это необходимо выполнять особенно в случае большого количества значений от датчиков или источников.

Для определения такой решающей функции воспользуемся моделью, основанной на нахождении ключевых статистик в теории принятия решений по фиксированному числу наблюдений [13]. В предложенной модели предполагается, что рассматривается модель в случае дискретного времени. Решающая функция должна быть оптимальна и позволять принимать решение о принадлежности не только в случае, когда в установленный класс входит одно значение  $U = \{u_1\}$ , но и в случае нескольких значений  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ . Условие оптимальности решающей функции зададим на основе леммы Неймана–Пирсона.

В многодатчиковых системах распознавания на первом этапе датчики (подсистемы, каналы, классификаторы) формирования решения о принадлежности наблюдаемого объекта к одному из заранее установленных классов в алфавите  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  каждого датчика рассмотрим с помощью ключевых статистик в теории принятия решения по фиксированному числу наблюдений.

Будем предполагать, что наблюдаемые объекты формируют наблюдаемые данные, которые описываются числовой последовательностью:

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (1)$$

Эти числовые последовательности являются результатом наблюдений над независимыми одинаково распределенными случайными величинами:

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n. \quad (2)$$

Структура (2) описывает наблюдаемый процесс  $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$ , и данный процесс задан в измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Здесь  $\Omega = \{\omega\}$  – пространство элементарных событий (исходов)  $\omega$ ,  $\mathcal{F} = \{A: A \subseteq \Omega\}$  – совокупность множеств (событий) из  $\Omega$ , образующих  $\sigma$ -алгебру. В пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  заданы меры  $P_0$  и  $P_\infty$ , которым соответствуют  $\theta_0$  и  $\theta_\infty$ .

В рассматриваемых последовательностях будем предполагать, что все величины  $\theta_k$  – одномерные случайные величины с одномерными функциями распределения

$$F_\theta = F_\theta(x) (= P_\theta(\theta_n \leq x)). \quad (3)$$

И при  $n \geq 1$  имеют плотность  $f_0(x)$

$$dF_0(x) = f_0(x)\mu(dx), \quad (4)$$

где  $\mu(dx)$  – некоторая  $\sigma$ -конечная мера.

В качестве меры будем использовать меру

$$\mu(dx) = \frac{1}{2}(P_0(dx) + P_\infty(dx)). \quad (5)$$

Для  $P_\theta(\theta_1 \leq x_1, \dots, \theta_n \leq x_n)$  соответствует функция плотности распределения  $p_\theta(x_1, \dots, x_n)$ .

Поскольку рассматриваемые величины независимые и одинаково распределенные, это означает, что плотность совместного распределения  $p_\theta(x_1, \dots, x_n)$  будет равна



$$F_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = P_{\theta}(\theta_1 \leq x_1, \dots, \theta_n \leq x_n) \quad (6)$$

и имеет следующий вид

$$p_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = f_{\theta}(x_1) \dots f_{\theta}(x_n) \quad (7)$$

Ключевой статистикой (для каждого  $n \geq 1$ ) будет статистика:

$$L_n = \frac{f_0(x_1) \dots f_0(x_n)}{f_{\infty}(x_1) \dots f_{\infty}(x_n)} \quad (8)$$

Для принятия решения о принадлежности наблюдаемого объекта к одному из заранее установленных классов в алфавите каждого датчика введем функцию  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , которая принимает значения в  $[0, 1]$ .

### Фундаментальная лемма Неймана–Пирсона

В общем случае функция  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$  – это вероятность соответствия принадлежности наблюдаемого объекта к одному из заранее установленных классов в алфавите каждого датчика. С точки зрения теории вероятности  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$  – вероятность принятия гипотезы  $H_0$ , когда получены наблюдения  $x_1, x_2, \dots, x_N$  над случайными величинами  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ .

Введем следующие функции:

$$\alpha(\varphi) = E_{\infty} \varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad \beta(\varphi) = E_0(1 - \varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)), \quad (9)$$

где  $E_0$  и  $E_{\infty}$  – усреднение по исходным мерам  $P_0$  и  $P_{\infty}$ . Значения  $E_0$  и  $E_{\infty}$  можно найти как математическое ожидание для каждого значения наблюдаемых случайных величин  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ .

Основной смысл введенных функций (9) в том, функция  $\alpha(\varphi)$  – это вероятность принятия гипотезы  $H_0$ , когда верна гипотеза  $H_{\infty}$ . Функция  $\alpha(\varphi)$  – это вероятность ошибки I рода. Аналогично, что функция  $\beta(\varphi)$  – это вероятность принятия гипотезы  $H_{\infty}$ , когда верна гипотеза  $H_0$ . Функция  $\beta(\varphi)$  – вероятность ошибки II.

Применительно к задаче о принадлежности наблюдаемых объектов к заранее установленным классам гипотеза  $H_0$  будет описывать вариант, когда полученные значения принадлежат установленным классам. Гипотеза  $H_{\infty}$  описывает вариант, когда наблюдаемые значения не принадлежат установленным классам. Соответственно  $\alpha(\varphi)$  – функция показывает вероятность ошибки в случае, когда наблюдаемые объекты принадлежат к заранее установленным классам  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in U$ , но в действительности это не так  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \notin U$ . Функция  $\beta(\varphi)$  показывается, когда наблюдаемые объекты не принадлежат к заранее установленным классам  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \notin U$ , но в действительности  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in U$ .

Решающая функция будет оптимальна, если для  $\Phi_a = \{\varphi: \alpha(\varphi) \leq a\}$ , где  $a \in [0, 1]$ , выполняется

$$\beta(\varphi_a^*) = \inf_{\varphi \in \Phi_a} \beta(\varphi). \quad (10)$$

Для любого  $0 \leq a \leq 1$  найдутся такие постоянные коэффициенты  $\lambda_a^*$  и  $h_a^*$ , что решающая функция

$$\varphi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) = \begin{cases} 1, & p_0(x_1, x_2, \dots, x_N) > h_a^* p_{\infty}(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ \lambda_a^*, & p_0(x_1, x_2, \dots, x_N) = h_a^* p_{\infty}(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ 0, & p_0(x_1, x_2, \dots, x_N) < h_a^* p_{\infty}(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases} \quad (11)$$

является оптимальным в классе  $\Phi_a$ .

В (11)  $h_a^*$  – отношение правдоподобия

$$h_a^* = L_n = p_0(x_1, x_2, \dots, x_N) / p_{\infty}(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (12)$$

Приведенная выше решающая функция является обобщенным случаем для алгоритма неполного декодирования Форни [14]. В этом алгоритме используются коэффициенты текущей достоверности оценок символов с выхода демодулятора следующего вида:

$$\alpha_{t\_MOP} = \begin{cases} 1, & L(\hat{\theta}_t) > s \\ L(\hat{\theta}_t)/s, & 0 \leq L(\hat{\theta}_t) \leq s, \\ 0, & L(\hat{\theta}_t) < s, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\alpha_{t\_MOP}$  – коэффициент достоверности Форни,  $L(\hat{\theta}_t)$  определяется по формуле:

$$L(\hat{\theta}_t) = \ln \left( P(\xi_t | \hat{\theta}_t) / \sum_{\theta_t = \hat{\theta}_t}^Q P(\xi_t | \theta_t) \right),$$

где  $P(\xi_t | \theta_t)$  – функция правдоподобия  $t$ -го символа,  $s$  – параметр, введенный в [5] при применении границы Чернова.

С учетом (11) получаем, что

$$h_a^* = L_n = L(\hat{\theta}_t) = \ln \left( P(\xi_t | \hat{\theta}_t) / \sum_{\theta_t = \hat{\theta}_t}^Q P(\xi_t | \theta_t) \right). \quad (14)$$

Задача нахождения оптимальной решающей функции сводится к нахождению коэффициента отношения правдоподобия  $L_n$ . Для нахождения неоднородностей (дефектов) эталонный образец необходим для формирования  $p_\infty(x_1, x_2, \dots, x_N)$  и, соответственно, гипотезы  $H_\infty$ . Данные  $p_0(x_1, x_2, \dots, x_N)$  формируются на исследуемых образцах. Вычисляется коэффициент отношения правдоподобия  $L_n$  и находится решающая функция, на основе которой определяется, входят те или иные значения в класс установленных функций, т. е. принимается решение, является ли данный набор данных неоднородностью (дефектом) или нет.

### Выводы

В статье рассматривается выбор оптимальной решающей функции для радиосистемы принятием решений. Предлагается метод вычисления оптимальной решающей функции для определения принадлежности наблюдаемых значений к заданному классу. Предложенный метод позволяет эффективно использовать частные решения для принятия общего решения в другом алфавите на основе сведений о составе наблюдаемой группы объектов и распределении их по классам, а также оптимального учёта текущей достоверности этих частных решений.

Показано, что данный алгоритм подходит для решения практической задачи определения неоднородностей (дефектов) в проблемах неразрушающего контроля.

Авторы выражают признательность профессору А.В. Богомолу за интерес к работе и плодотворные дискуссии. Кроме того, считаем своим приятным долгом поздравить профессора А.В. Богомолу с юбилеем.

### Финансирование

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01002, <https://rscf.ru/project/22-29-01002/>.

### Литература

1. Кларк, Дж., мл. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Дж. Кларк, мл., Дж. Кейн // Статистическая теория связи, Вып. 28. – М.: Радио и связь, 1987. – 391 с.
2. Селекция и распознавание на основе локационной информации / А.Л. Горелик, Ю.Л. Барабаш, О.В. Кривошеев, С.С. Эпштейн. – М.: Радио и связь, 1990. – 239 с.
3. Радиозлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник. / Под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: Радиотехника, 2007. – 512 с.
4. Доросинский, Л.Г. Основы теории принятия решений и ее применение для оптимальной обработки сигналов в РСА / Л.Г. Доросинский, Н.В. Папуловская. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 204 с.
5. Self-Reporting Mechanochromic Coating: Glassfiber Reinforced Polymer Composites that Predict Impact Induced Damage / S. Shree, M. Schulz-Senft, A. Kuntze *et al.* // Materials Horizons. – 2020. – Vol. 7, Iss. 2. – P. 598–604.
6. Mechanical Unfolding of a Fluorescent Protein Enables Self-Reporting of Damage in Carbon-Fibre-Reinforced Composites / S. Lörcher, T. Winkler, K. Makyła, C. Ouellet-Plamondon, I. Burgert, N. Bruns // Journal of Materials Chemistry A. – 2014. – Vol. 2, Iss. 17. – P. 6231–6237.

7. Mechanochromic Fluorescence in Epoxy as a Detection Method for Barely Visible Impact Damage in CFRP Composites / R. Toivola, P.-N. Lai, J. Yang *et al.* // Composites Science and Technology. – 2017. – Vol. 139. – P. 74–82.
8. Smart Polymeric Coatings for Damage Visualization in Substrate Materials / S. Vidinejevs, A.N. Aniskevich, A. Gregor *et al.* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – Vol. 23, Iss. 12. – P. 1371–1377.
9. Microcapsule-Based Visualization Smart Sensors for Damage Detection: Principles and Applications / X. Zheng, Q. Wang, Y. Li *et al.* // Advanced Materials. Technologies. – 2020. – Vol. 5, Iss. 2. – paper no. 1900832.
10. Spectroscopic Study of Terahertz Reflection and Transmission Properties of Carbon-Fiber-Reinforced Plastic Composites / J. Zhang, C. Shi, Y. Ma *et al.* // Optical Engineering. – 2015. – Vol. 54, Iss. 5. – статья № 054106.
11. Palka, N. Detailed non-destructive evaluation of UHMWPE composites in the terahertz range / N. Palka, D. Miedzinska // Optical and Quantum Electronics. – 2014. – Vol. 46, no. 4. – P. 515–525.
12. Soutis, C. Carbon Fiber Reinforced Plastics in Aircraft Construction / C. Soutis // Materials Science and Engineering A. – 2005. – Vol. 412, Iss. 1-2. – P. 171–176.
13. Ширяев, А.Н. Стохастические задачи о разрядке. Электронное издание / А.Н. Ширяев. – М.: МЦНМО, 2017. – 391 с.
14. Форни, Д. Каскадные коды / Д. Форни. – М.: Мир, 1970. – 205 с.

Поступила в редакцию 15 декабря 2022 г.

#### Сведения об авторах

Чепурнов Илья Александрович – студент группы ЕТв-129, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: chepurnov@bmgtau.ru

Черваков Владимир Олегович – студент группы ЕТв-129, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: vchervakov@mail.ru

Вахитов Максим Григорьевич – кандидат технических наук, доцент, кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: vakhitovmg@susu.ru

Клыгач Денис Сергеевич – кандидат технических наук, доцент, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: klygachds@susu.ru

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 63–68*

---

DOI: 10.14529/mmph230107

## DECISION MAKING AS AN OPTIMAL DECISION RULE IN RADIO SYSTEMS

**I.A. Chepurnov, V.O. Chervakov, M.G. Vakhitov, D.S. Klygach**  
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: klygachds@susu.ru

Abstract. Decision making is considered as an optimal decision rule for a radio system. The algorithms for combining particular solutions based on a Bayesian approach is analyzed. A method for computing the optimal decision rule to determine the class membership of observed values is proposed. The method enables the effective use of particular solutions for making a general decision in another alphabet. The decision is based on information about the composition of the objects under study and their distribution into classes. The method also enables the optimal accounting of the current validity of these particular solutions.

*Keywords: radio communication; recognition; reliability; decision making.*

## References

1. Clark G.C., Jr., Cain J.B. *Error-correction coding for digital communications*. New York and London, Plenum Press, 1981.
2. Gorelik A.L., Barabash Yu.L., Krivosheev O.V., Epshteyn S.S. *Selektsiya i raspoznavanie na osnove lokatsionnoy informatsii* (Selection and Recognition Based on Location Information). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1990, 239 p. (in Russ.).
3. Shirman Ya.D. *Radioelektronnye sistemy: Osnovy postroeniya i teoriya. Spravochnik* (Radio-electronic systems: Fundamentals of construction and theory. Guide). Moscow, Radiotekhnika Publ., 2007, 512 p. (in Russ.).
4. Dorosinsky L.G., Papulovskaya N.V. *Osnovy teorii prinyatiya resheniy i ee primeneniye dlya optimal'noy obrabotki signalov v RSA* (Fundamentals of the Theory of Decision Making and its Application for Optimal Signal Processing in SAR). Ekaterinburg, Izd-vo Ural. un-ta Publ., 2018, 204 p. (in Russ.).
5. Shree S., Schulz-Senft M., Kuntze A., Mishra Y.K., Staubitz A., Adelung R. Self-Reporting Mechanochromic Coating: Glassfiber Reinforced Polymer Composites that Predict Impact Induced Damage. *Materials Horizons*, 2020, Vol. 7, Iss. 2, pp. 598–604. DOI: 10.1039/c9mh01400d
6. Lörcher S., Winkler T., Makyła K., Ouellet-Plamondon C., Burgert I., Bruns N. Mechanical Unfolding of a Fluorescent Protein Enables Self-Reporting of Damage in Carbon-Fibre-Reinforced Composites. *Journal of Materials Chemistry A*, 2014, Vol. 2, Iss. 17, pp. 6231–6237. DOI: 10.1039/c3ta14803c
7. Toivola R., Lai P.-N., Yang J., Jang S.-H., Jen A.K.-Y., Flinn B.D., Mechanochromic Fluorescence in Epoxy as a Detection Method for Barely Visible Impact Damage in CFRP Composites. *Composites Science and Technology*, 2017, Vol. 139, pp. 74–82. DOI: 10.1016/j.compscitech.2016.11.026
8. Vidinejevs S., Aniskevich A.N., Gregor A., Sjöberg M., Alvarez G. Smart Polymeric Coatings for Damage Visualization in Substrate Materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 23, Iss. 12, pp. 1371–1377. DOI: 10.1177/1045389X12447
9. Zheng X., Wang Q., Li Y., Luan J., Wang N. Microcapsule-Based Visualization Smart Sensors for Damage Detection: Principles and Applications. *Advanced Materials. Technologies*. 2020, Vol. 5, Iss. 2, paper no. 1900832. DOI: 10.1002/admt.201900832
10. Zhang J., Shi C., Ma Y., Han X., Li W., Chang T., Wei D., Du C., Cui H.-L. Spectroscopic Study of Terahertz Reflection and Transmission Properties of Carbon-Fiber-Reinforced Plastic Composites. *Optical Engineering*, 2015, Vol. 54, Iss. 5, no. 054106. DOI: 10.1117/1.OE.54.5.054106
11. Palka N., Miedzinska D. Detailed Non-Destructive Evaluation of UHMWPE Composites in the Terahertz Range. *Optical and Quantum Electronics*, 2014, Vol. 46, no. 4, pp. 515–525. DOI: 10.1007/s11082-013-9836-4
12. Soutis, C. Carbon Fiber Reinforced Plastics in Aircraft Construction. *Materials Science and Engineering A*, 2005, Vol. 412, Iss. 1-2, pp. 171–176. DOI: 10.1016/j.msea.2005.08.064
13. Shiryaev A.N. *Stokhasticheskie zadachi o razladke. Elektronnoe izdanie* (Stochastic Problems about the Disorder. Electronic Edition). Moscow, MTsNMO Publ., 2017, 391 p. (in Russ.).
14. Forni D. *Kaskadnye kody* (Cascading Codes), Moscow, Mir Publ., 1970, 205 p.

*Received December 15, 2022*

## Information about the authors

Chepurnov Il'ya Aleksandrovich is student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: chepurnov@bmgtau.ru

Chervakov Vladimir Olegovich is student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: vchervakov@mail.ru

Vakhitov Maksim Grigor'evich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Design and production of Radio Equipment Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: vakhitovmg@susu.ru

Klygach Denis Sergeevich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Mathematical and Computer Modeling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: klygachds@susu.ru

## ЗАМЕЧАНИЕ О ВЫЧИСЛЕНИИ СКОРОСТИ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ И ПРОИЗВОДНОЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ РЭЛЕЯ В УПРУГИХ СРЕДАХ

**С.Ю. Гуревич, Е.В. Голубев**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
e-mail: golubev@susu.ru

**Аннотация.** Существует много приближенных и точных формул для определения скорости поверхностных волн в упругих средах. Получено аналитическое выражение для скорости волны Рэлея через значения скоростей объемных волн, а также формула, позволяющая определить вычет в задачах возбуждения и дифракции поверхностных акустических волн в однородном изотропном упругом полупространстве, допускающих решение для полей деформаций и напряжений в виде квадратур. Вычислены значения скорости волн Рэлея и производной определителя Рэлея для некоторых сред по литературным данным. Полученные результаты могут помочь в получении аналитических выражений и позволяют уменьшить время расчета на этапе численного решения задач дифракции и возбуждения акустических волн.

**Ключевые слова:** поверхностные волны; скорость волны Рэлея; корни характеристического уравнения; точное решение.

Поверхностные волны или волны Рэлея [1] давно и широко применяются в науке и технике, например, для определения характеристик их излучателей и изучения физических процессов, происходящих при возбуждении и распространении колебаний [2, 3], фазовых переходов [4], изучения свойств веществ и состояния их поверхностей [5], в дефектоскопии и оценке остаточного ресурса [6–8], для передачи и обработки информации [9, 10], в геофизике и сейсмологии [11].

Задача вычисления скорости рэлеевской волны, сводящаяся к решению уравнения третьей степени, раньше решалась численно [2] или с помощью простых приближенных формул [6, 12–15]. Поскольку к настоящему времени математики уже предложили аналитические методы решения уравнений невысоких степеней, например метод Лагранжа [16] или формулу Кардано [17–19], то эти методы учитываются при исследовании выражений в программах компьютерной алгебры. Это позволяет записать и упростить аналитические выражения для скорости поверхностной волны и для корней соответствующего уравнения [20, 21] (см. также источники 4, 6–13 в [20]).

Работа посвящена записи производной определителя Рэлея в аналитическом виде с помощью точного решения характеристического уравнения.

Согласно [22, с. 136], уравнение для определения скорости волны Рэлея

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left( 3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2} \right) - 16 \left( 1 - \frac{c_t^2}{c_l^2} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\xi = \omega/c_l k = c_r/c_l$  ( $0 \leq \xi < 1$ ),  $\omega$  – циклическая частота колебаний,  $k = \omega/c$  – волновое число,  $c_r, c_t, c_l$  – скорость поверхностных, поперечных и продольных волн соответственно.

Сделаем замену  $x = \xi^2 = (k/k_l)^2$ , введем обозначение  $u^2 = (c_t/c_l)^2$  и получим уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 8x(3 - 2u^2) - 16(1 - u^2) = 0, \quad (2)$$

имеющее в интервале  $x \in [0, 1)$  единственный действительный корень  $a$ , который и определяет скорость волны Рэлея:

$$c_r = c_l \sqrt{a}. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$T = \sqrt{((-64u^2 + 107)u^2 - 62)u^2 + 11}, \quad (4)$$

$$U = \sqrt[3]{17 - 45u^2 - 3\sqrt{3}T} \quad (5)$$

и запишем решение уравнения (2), полученное в программах *Maxima* [23] и *WolframAlfa* [24] в виде

$$a = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \left[ U + \frac{2(6u^2 - 1)}{U} \right]. \quad (6)$$

Это выражение вместе с (4) и (5) является решением поставленной задачи. Значение корня определяется только отношением квадратов скоростей объемных волн или коэффициентом Пуассона  $\sigma$ , связанным с  $u^2$  известным соотношением  $u^2 = c_2^2/c_1^2 = (1 - 2\sigma)/(1 - \sigma)$  (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость  $a(\sigma)$

$\sigma$	$u^2$	$a$ , точное решение (6)	$a$ , численный метод <sup>c)</sup>
-1,0	0,7500000000000000	0,4745724391564827	0,474572439156483
-0,9	0,7368421052631579	0,4960417626756930	0,4960417626756933
-0,8	0,7222222222222222	0,5191753282850295	0,5191753282850295
-0,7	0,7058823529411765	0,5440779615104171	0,5440779615104173
-0,6	0,6875000000000000	0,5708262701628667	0,570826270162867
-0,5	0,6666666666666667	0,5994463782101697	0,5994463782101699
-0,4	0,6428571428571429	0,6298836881418670	0,6298836881418671
-0,3	0,6153846153846159	0,6619660579475539	0,661966057947554
-0,2	0,5833333333333333	0,6953666629760182	0,6953666629760183
-0,1	0,5454545454545455	0,7295801516555792	0,7295801516555793
0,0	0,5000000000000000	0,7639320225002102 <sup>a)</sup>	0,7639320225002103
0,1	0,4444444444444444	0,7976383362116029	0,797638336211603
0,2	0,3750000000000000	0,8299135133739662	0,8299135133739663
0,3	0,2857142857142857	0,8600943341185433	0,8600943341185434
0,4	0,1666666666666667	0,8877322341853701 <sup>b)</sup>	0,88773223418537
0,5	0,0000000000000000	0,9126219746158490	0,9126219746158474

a)  $3 - \sqrt{5}$ , b)  $a = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3$  [21], c) – значения получены с помощью [23] при использовании функции *find\_root*, пример кода: `s:-1.0; u2:0.5*(1-2*s)/(1-s); find_root(((x-8)*x-16*u2+24)*x+16*u2-16,x,0.47,0.92);`

В научных работах, например в [20], есть подобные результаты, но они записаны в другой форме – в виде подробного алгоритма действий, которые к нему приводят, а не в виде конечной формулы (6). В [20] приведена таблица корней уравнения (2) для различных значений коэффициента Пуассона ( $-1 \leq \sigma \leq 0,5$ ) и корней, полученных численным методом (см. табл. 1 из [20]). Из рассмотрения этой таблицы следует, что необходимо порядка 10 итераций для вычисления корня с абсолютной погрешностью, меньшей  $10^{-9}$ . Очевидно, что точное выражение существенно проще в использовании, чем применение численных методов, которые требуют многократного вычисления исходной функции (2).

Согласно [22, с. 137],  $u^2$  изменяется для различных веществ от 0 до  $1/2$  ( $u$  от 0 до  $1/\sqrt{2}$ ). Решение (6) допускает подстановку любого значения  $u^2$  из указанного интервала и остается действительным. Вычисление не вызывает никаких трудностей в интервале  $1/6 < u^2 < 0,3215$  с использованием действительных чисел. При  $u^2 < 1/6$  ( $\sigma > 0,4$ ), подкоренное выражение в (5) отрицательно и это требует аккуратного вычисления корня  $U = -\sqrt[3]{-17 + 45u^2 + 3\sqrt{3}T}$  при работе с такими веществами, например, как свинец и золото. В самой точке  $u^2 = 1/6$  ( $\sigma = 0,4$ ) и ее малой окрестности при вычислении функции может накопиться значительная вычислительная погрешность, так как для получения значения знаменателя в формуле (6) требуется существенно больший объем вычислений, чем для числителя. Неопределенность типа  $0/0$  легко устраняется разложением функции  $U(u^2)$  в ряд Тейлора в окрестности этой точки

$$U(u^2) \approx \frac{12}{\sqrt[3]{19}} \left( u^2 - \frac{1}{6} \right) + \frac{360}{19\sqrt[3]{19}} \left( u^2 - \frac{1}{6} \right)^2 + \dots,$$

что дает из (6) значение корня  $a = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3 \approx 0,887732234185370088\dots$ . Автором [21] получен аналогичный результат из (2) при  $u^2 = 1/6$ . При  $u^2 > 0,3215$  ( $u = c_t/c_l > 0,567$ )  $T$  (4) становится мнимым и в расчетах необходимо использовать переменные комплексного типа (например, для таких веществ как цинк, германий, бериллий), для получения действительного значения  $a$  необходимо выделить реальную часть, мнимая часть сравнима с вычислительной погрешностью.

В работе [21] с помощью формулы Кардано и программы MAPLE получено выражение (см. формулу после 2.14), определяющее действительный корень через коэффициент Пуассона, которое в заключительной части работы автор привел к (6), записанному не в упрощенном виде. Автором отмечено, что функция имеет разрыв в точке  $u^2 = 1/6$  ( $\sigma = 2/5$ ), что, как показано, не имеет места. В [21] также получено, что  $a = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3$ , при  $\sigma = 2/5 = 0,4$ . В [25] приведены точные значения других корней для  $\sigma$  равных  $-\frac{15}{17}, -\frac{2}{7}, -\frac{5}{123}, \frac{3}{28}, \frac{77}{365}, \frac{20}{69}, \frac{55}{136}, \frac{114}{235}$ .

Результаты вычисления на основе выражения (6) можно сравнить с экспериментальными данными для величины скорости рэлеевской волны в различных материалах и признать удовлетворительным соответствие расчетных и табличных данных. Так, в работе [26] приведены данные измерений скорости: в алюминии (А-1) – 2990 м/с, в железе (АРМКО) – 2912 м/с. По данным [7] (см. приложение, табл. П2,  $10^3$  м/с): свинец – 0,63; золото – 1,12; платина – 1,57; серебро – 1,48; висмут – 1,03; латунь – 1,95; вольфрам – 2,65; медь – 3,52 (указана  $c_t = 3,72$ ); алюминий – 2,80; олово – 1,56; никель – 2,64; кадмий – 1,4; железо – 3,0; цинк – 2,22; бериллий – 7,87.

При решении задачи возбуждения и распространения акустических волн в сплошных упругих средах при использовании модели полупространства и методов интегральных преобразований для нахождения решения в аналитическом виде конечные квадратурные формулы для акустического поля (поля векторов деформаций и напряжений) содержат в знаменателе выражение [12, стр. 7] (I.6) (также см. [2]):

$$R(k) = (k^2 + s^2)^2 - 4k^2qs = (2k^2 - k_2^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - k_1^2} \sqrt{k^2 - k_2^2}, \quad (7)$$

где  $k = \omega/c$  – волновое число;  $q = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ ,  $k_t = \omega/c_t$ ;  $s = \sqrt{k^2 - k_r^2}$ ,  $k_r = \omega/c_r$ . Согласно [27],  $R(k)$  определяет четыре точки ветвления подынтегральной функции  $k = \pm k_1, \pm k_2$  и три полюса  $k = 0, \pm k_r$ , где  $k_r = \omega/c_r$  – волновое число волны Рэлея. Вычет в  $k = k_r$  определяет вклад волны Рэлея в акустическое поле. Для его определения необходимо вычислить производную

$$R'(k_r) = \frac{dR}{dk} \Big|_{k=k_r} = \left[ 8k(2k^2 - k_t^2) - 8k \sqrt{k^2 - k_t^2} \sqrt{k^2 - k_r^2} - 4k^3 \frac{\sqrt{k^2 - k_t^2}}{\sqrt{k^2 - k_t^2}} - 4k^3 \frac{\sqrt{k^2 - k_t^2}}{\sqrt{k^2 - k_t^2}} \right]_{k=k_r} =$$

$$= - \frac{2k_t^8 - 8k^2 k_t^6 + 16k^6 (k_t^2 - k_r^2)}{k(2k^2 - k_t^2)^2} \Big|_{k=k_r} = - \frac{2[a^3 - 4a^2 + 8(1 - u^2)]}{\sqrt{a}(a - 2)^2} k_t^3, \quad (8)$$

где учтено, что  $(2k_r^2 - k_2^2)^2 = 4k_r^2 \sqrt{k_r^2 - k_1^2} \sqrt{k_r^2 - k_2^2}$ ,  $k_r = k_t/\sqrt{a}$ ,  $k_t = uk_t$ . Это выражение, записанное в аналитическом виде, пропорционально частоте в третьей степени. Безразмерный коэффициент перед  $k_t^3$  (приведен для некоторых веществ в табл. 2), от которого зависит амплитуда волны Рэлея, определяется только отношением скоростей распространения объемных упругих волн или коэффициентом Пуассона.

Аналогичные результаты представлены в [2], где приведены графики расчетных зависимостей величин скорости волны Рэлея и отношения производной определителя и  $k_t^3$  от коэффициента Пуассона (см. рис. 2 и 3 в [2]).

Скорости звука для некоторых веществ ( $c_l, c_t$  – данные [28], столбцы 4–7 – расчет по (6), (3) и (8))

	$c_l$	$c_t$	$u^2 = c_t^2 / c_l^2$	$a$	$c_r$	$\frac{1}{k^3} \frac{dR}{dk} \Big _{k=k_r}$
1	2	3	4	5	6	7
Свинец	2160	700	0,105024	0,898355	663,47	-8,09648
Золото	3240	1200	0,137174	0,893063	1134,02	-7,64224
Платина	3960	1670	0,177845	0,885579	1571,56	-7,07566
Серебро	3600	1590	0,195069	0,882107	1493,34	-6,83877
Висмут (кристалл)	2140	960	0,20124	0,880815	900,98	-6,75439
Нейзильбер	4760	2160	0,205918	0,879817	2026,05	-6,69059
Латунь	4430	2123	0,229664	0,874507	1985,33	-6,36919
Вольфрам	5460	2620	0,230259	0,874369	2449,9	-6,36118
Медь	4700	2260	0,231218	0,874145	2113	-6,3483
Алюминий	6260	3080	0,242077	0,871556	2875,4	-6,20289
Олово	3320	1670	0,253021	0,868846	1556,64	-6,05731
Константен	5240	2640	0,253831	0,868641	2460,5	-6,04658
Висмут	2180	1100	0,254608	0,868444	1025,09	-6,03629
Никель	5630	2960	0,276418	0,862689	2749,28	-5,7496
Чугун	4500	2400	0,284444	0,860454	2226,26	-5,6452
Свинец (кристалл)	2350	1266	0,290223	0,858804	1173,22	-5,57043
Кадмий	2780	1500	0,291134	0,858541	1389,86	-5,55867
Олово (кристалл)	3480	1900	0,298091	0,8565	1758,4	-5,46916
Железо	5850	3230	0,304855	0,854465	2985,72	-5,3826
Цинк	4170	2410	0,334012	0,845069	2215,46	-5,01527
Германий (кристалл)	5390	3540	0,431349	0,80447	3175,11	-3,87086
Бериллий	12660	8900	0,494211	0,767838	7798,7	-3,2182

**Выводы**

В виде конечных формул приведены аналитическое решение для уравнения, определяющего скорость поверхностной волны, и выражение, помогающее определить вычет при использовании квадратурных формул, определяющих поля векторов деформаций и напряжений. Полученные результаты могут помочь в получении и анализе аналитических выражений, а также позволят уменьшить время расчета на этапе численного моделирования при решении задач дифракции и возбуждения акустических волн.

**Литература**

1. Rayleigh, L. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid / L. Rayleigh // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1885. – Vol. s1-17, Iss. 1. – P. 4–11.
2. Гуляев, Ю.В. Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах / Ю.В. Гуляев, В.П. Плесский // Успехи физических наук. – 1989. – Т. 157, Вып. 1. – С. 85–127.
3. Карабутов, А.А. Лазерное возбуждение поверхностных акустических волн: новое направление в оптико-акустической спектроскопии твердого тела / А.А. Карабутов // Успехи физических наук. – 1985. – Т. 147, № 3. – С. 605–620.
4. Гуляев, Ю.В. Поверхностные магнитоакустические волны в магнитных кристаллах в области ориентационных фазовых переходов / Ю.В. Гуляев, И.Е. Дикштейн, В.Г. Шавров // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 7. – С. 735–750.
5. Муравьев, В.В. Скорость звука и структура сталей и сплавов / В.В. Муравьев, Л.Б. Зуев, К.Л. Комаров. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. – 184 с.
6. Ермолов, И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля. – М.: Машиностроение, 1981. – 240 с.
7. Ермолов И.Н. Неразрушающий контроль. Кн. 2. Акустические методы контроля: практ. пособие / И.Н. Ермолов, Н.П. Алешин, А.И. Потапов. – М.: Высш. шк., 1991. – 283 с.
8. Non-destructive Testing with Surface Acoustic Waves using Double-Pulse TV Holography / D. Carnadas, C. Trillo, A.F. Doval *et al.* // Meas. Sci. Technol. – 2002. – no. 13. – P. 438–444.



9. Crecraft, D.I. Ultrasonic instrumentation: principles, methods and applications / D.I. Crecraft // J. Phys. E: Sci. Instrum. – 1983. – Vol. 16, no. 3. – P. 181–189.
10. Meirion, F.L. Rayleigh Waves – a Progress Report / F.L. Meirion // Eur. J. Phys. – 1995. – Vol. 16. – P. 1–7.
11. Novotny, O. Seismic Surface Waves / O. Novotny. – Salvador, Bahia, 1999. – 155 p.
12. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
13. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 287 с.
14. Можаяев, В.Г. Приближенные аналитические выражения для скорости волн Рэлея в изотропных средах и на базисной плоскости в высокосимметричных кристаллах / В.Г. Можаяев // Акустический журнал. – 1991. – Т. 37, Вып. 2. – С. 368–374.
15. Vinh P.C., Malischewsky P.G. Improved Approximations of the Rayleigh Wave Velocity / P.C. Vinh, P.G. Malischewsky // Journal of Thermoplastic Composite Materials. – 2008. – Vol. 21, Iss. 4. – P. 337–352.
16. Zhao, T. Solution formulas for cubic equations without or with constraints / T. Zhao, D. Wang, H. Hong // J. Symb. Comput. – 2011. – Vol. 46. – P. 904–918.
17. Cardano, G. Ars Magna / G. Cardano. – Nurnberg, 1545.
18. Stedall, J. From Cardano’s Great Art to Lagrange’s Reflections. Filling a Gap in the History of Algebra / J. Stedall. – Heritage of European Mathematics. Zurich: European Mathematical Society (EMS), 2011. – 236 p. (German, English).
19. Herbison-Evans, D. Solving Quartics and Cubics for Graphics / D. Herbison-Evans // Technical Report TR94-487. – 1994. (updated 31 March 2011, 27 May 2017, 13 January 2019).
20. Sudheer, G. A Note on Formulas for the Rayleigh Wave Speed in Elastic Solids / G. Sudheer, M.H. Lakshmi, Y.V. Rao // Ultrasonics. – 2017. – Vol. 73. – P. 82–87.
21. Mechkour, H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation / H. Mechkour / Proceedings of the 2-nd International Colloquium of Mathematics in Engineering and Numerical Physics (MENP-2) April 22–27, 2002, Bucharest, ROMANIA. – P. 96–104.
22. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
23. <https://maxima.sourceforge.io/ru/index.html>
24. <https://wolframalpha.com>
25. Pichugin, A. Approximation of the Rayleigh Wave Speed / A. Pichugin // People.Brunel.Ac.Uk (Unpublished draft). – 2008. – P. 1-2008. <http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf>
26. Виноградов, Н. Измерение скорости и затухания ультразвуковых поверхностных волн в твердых материалах / Н. Виноградов, К. Ульянов / Акустический журнал. – 1959. – Т. 5, Вып. 3. – С. 290–293.
27. Коломенский, Ал.А. Поверхностные отклики при лазерном воздействии на твердое тело: рэлеевские волны и предвестники / Ал.А. Коломенский, А.А. Мазнев // Акуст. журн. – 1990. – Т. 36, № 3. – С. 463–469.
28. Кикоин, И.К. Таблицы физических величин. Справочник / И.К. Кикоин. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.

*Поступила в редакцию 5 января 2022 г.*

### Сведения об авторах

Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1042-0303>, e-mail: [gurevichsi@susu.ru](mailto:gurevichsi@susu.ru)

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>, e-mail: [golubev@susu.ru](mailto:golubev@susu.ru)

## A NOTE ON CALCULATING RAYLEIGH WAVE VELOCITY AND THE DERIVATIVE OF THE RAYLEIGH DETERMINANT IN ELASTIC MEDIA

**S.Yu. Gurevich, E.V. Golubev**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
e-mail: golubev@susu.ru

Abstract. There are many approximate and exact formulae to calculate surface wave velocity in an elastic medium. An analytical expression for Rayleigh wave velocity in volume wave velocity values has been obtained. A formula which determines the remainder in the excitation and diffraction of surface acoustic waves in a homogeneous isotropic elastic half-space involving solutions for the strain and stress fields in the form of quadratures is worked out. The values of the Rayleigh wave velocity and the derivative of the Rayleigh determinant for different media according to the reference data were obtained. The results can help in obtaining analytic expressions and reducing the calculation time of numerical solutions of the diffraction and excitation of acoustic waves.

*Keywords:* surface waves; Rayleigh wave velocity; roots of the characteristic equation; exact solution.

### References

1. Rayleigh L. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid. *Proc. London Mathematical Society*, 1885, Vol. s1-17, Iss. 1, pp. 4–11. DOI: 10.1112/plms/s1-17.1.4
2. Gulyaev Y.V., Plesskiĭ V.P. Propagation of Acoustic Surface Waves in Periodic Structures. *Physics–Uspekhi*, 1989, Vol. 32, Iss. 1, pp. 51–74. DOI: 10.1070/PU1989v032n01ABEH002676
3. Karabutov A.A. Laser Excitation of Surface Acoustic Waves: a New Direction in Opto-Acoustic Spectroscopy of a Solid. *Physics–Uspekhi*, 1985, Vol. 28, Iss. 11, pp. 1042–1051. DOI: 10.1070/PU1985v028n11ABEH003981
4. Gulyaev Yu.V., Dikshtein I.E., Shavrov V.G. Magnetoacoustic Surface Waves in Magnetic Crystals Near Spin-Reorientation Phase Transitions. *Physics–Uspekhi*, 1997, Vol. 40, Iss. 7, pp. 701–716. DOI: 10.1070/PU1997v040n07ABEH000252
5. Muraviev V.V., Zuev L.B., Komarov K.L. *Skorost' zvuka i struktura staley i splavov* (The Ultrasound Velocity and Structure of Steels and Alloys). Novosibirsk, Nauka, Siberian Publishing Firm RAN, 1995, 184 p. (in Russ.).
6. Ermolov I.N. *Teoriya i praktika ul'trazvukovogo kontrolya* (Theory and Practice of Ultrasound Control). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981, 240 p. (in Russ.).
7. Ermolov I.N., Aleshin N.P., Potapov A.I. *Nerazrushayushchiy kontrol'. Kn. 2. Akusticheskie metody kontrolya: prakt. posobie* (Non-destructive Testing. Book 2. Acoustic Control Methods: Practice Guide). Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1991, 283 p. (in Russ.).
8. Carnadas D., Trillo C., Doval A.F., Lopez J.C., Dorrio B.V., Fernandez J.L., Perez-Amor M. Non-Destructive Testing with Surface Acoustic Waves using Double-Pulse TV Holography. *Meas. Sci. Technol.*, 2002, no. 13, pp. 438–444.
9. Crecraft D.I. Ultrasonic Instrumentation: Principles, Methods and Applications. *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, 1983, Vol. 16, no. 3, pp. 181–189. DOI: 10.1088/0022-3735/16/3/001
10. Meirion F. L. Rayleigh Waves – A Progress Report. *Eur. J. Phys.*, 1995, Vol. 16, pp. 1–7.
11. Novotny O. *Seismic Surface Waves*. Salvador, Bahia, 1999, 155 p.
12. Viktorov I.A. *Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lemba v tekhnike* (Physical Bases of Application of Rayleigh and Lamb Ultrasonic Waves in Engineering). Moscow, Nauka Publ., 1966, 168 p. (in Russ.).
13. Viktorov I.A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* (Sound Surface Waves in Solids). Moscow, Nauka Publ., 1981, 287 p. (in Russ.).

14. Mozhaev V.G. Priblizhennye analiticheskie vyrazheniya dlya skorosti voln Releya v izotropnykh sredakh i na bazisnoy ploskosti v vysokosimmetrichnykh kristallakh (Approximate Analytical Expressions for the Rayleigh Wave Velocity in Isotropic Media and on the Basis Plane in Highly Symmetric Crystals). *Akusticheskiy zhurnal*, 1991, Vol. 37, Iss. 2, pp. 368–374. (in Russ.).
15. Vinh P.C., Malischewsky P.G. Improved Approximations of the Rayleigh Wave Velocity. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 2008, Vol. 21, Iss. 4, pp. 337–352. DOI: 10.1177/0892705708089479
16. Zhao T., Wang D., Hong H. Solution Formulas for Cubic Equations without or with Constraints. *J. Symb. Comput.*, 2011, Vol. 46, pp. 904–918. DOI: 10.1016/j.jsc.2011.02.001
17. Cardano G. *Ars Magna*. Nurnberg, 1545.
18. Stedall J. *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections. Filling a Gap in the History of Algebra*. Heritage of European Mathematics. Zurich: European Mathematical Society (EMS), 2011, 236 p. (German, English). DOI: 10.4171/092
19. Herbison-Evans, D. Solving Quartics and Cubics for Graphics. *Technical Report. TR94-487*, 1994. (updated 31 March 2011, 27 May 2017, 13 January 2019). DOI: 10.1016/b978-0-12-543457-7.50009-7
20. Sudheer G., Lakshmi M.H., Rao Y.V. A Note on Formulas for the Rayleigh Wave Speed in Elastic Solids. *Ultrasonics*, 2017, Vol. 73, pp. 82–87. DOI: 10.1016/j.ultras.2016.08.021
21. Mechkour H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation. *BSG Proceedings 8*, Geometry Balkan Press, 2003, pp. 96–104.
22. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity* (3rd ed.). Oxford, England: Butterworth Heinemann, 1986, 204 p.
23. <https://maxima.sourceforge.io/ru/index.html>
24. <https://wolframalpha.com>
25. Pichugin, A.V. Approximation of the Rayleigh wave speed. *Unpublished draft*, 2008, <http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf>
26. Vinogradov N., Ul'yanov K. Izmerenie skorosti i zatukhaniya ul'trazvukovykh poverkhnostnykh voln v tverdykh materialakh (Measurement of the Velocity and Attenuation of Ultrasonic Surface Waves in Solid Materials). *Akusticheskiy zhurnal*, 1959, Vol. 5, Iss. 3, pp. 290–293. (in Russ.).
27. Kolomenskiy A.I., Maznev A.A. Poverkhnostnye otkliki pri lazernom vozdeystvii na tverdoe telo: releevskie volny i predvestniki (Surface Responses under Laser Action on a Solid: Rayleigh Waves and Precursors). *Akusticheskiy zhurnal*, 1990, Vol. 36, no. 3, pp. 463–469. (in Russ.).
28. Kikoin I.K. *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* (Tables of Physical Quantities. Guide). Moscow, Atomizdat Publ., 1976, 1005 p. (in Russ.).

Received January 5, 2023

### Information about the authors

Gurevich Sergey Yur'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1042-0303>, e-mail: [gurevichsi@susu.ru](mailto:gurevichsi@susu.ru)

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>, e-mail: [golubev@susu.ru](mailto:golubev@susu.ru),

## ПРОСТАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ ПРОЦЕССА ПРОМЫШЛЕННОЙ ДУГОВОЙ СВАРКИ

**Д.А. Мирзаев, К.Ю. Окишев, А.А. Мирзоев**

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация*

*E-mail: mirzoevaa@susu.ru*

**Аннотация.** Цифровые технологии являются одним из важнейших направлений развития производственных процессов. Цифровой двойник – это виртуальное представление физического объекта, системы или процесса с использованием моделирования и других компьютеризированных цифровых технологий. Задача значительно усложняется, если нужно создать цифровых двойников для динамичных производственных процессов, таких как сварка, когда время моделирования не должно превышать нескольких секунд. В данной работе представлен метод моделирования тепловых полей при промышленной сварке в реальном времени, основанный на физике процесса. Предлагаемый метод может служить в качестве возможной технологии-кандидата для создания цифрового двойника на уровне процесса. В принятой методике используются аналитические решения задачи о распределении температуры вокруг движущегося источника тепла, представляющего собой сварной шов.

*Ключевые слова:* моделирование; тепловое поле; сварной шов; цифровой двойник.

### **Введение**

Сварка – надежный и эффективный способ соединения металлических изделий, который используется практически во всех отраслях промышленности. В связи с этим используемые технологии должны обеспечивать качество и экономичность производимых изделий. Однако практика показывает, что традиционные методы сварки не всегда обеспечивают выполнение этих требований [1]. Термический процесс, включающий интенсивный нагрев соединяемых частей изделия с помощью источника тепла, является определяющим при дуговой сварке. Он определяет протекание практически всех других сварочных процессов, в том числе форму ванны, создание металлургической связи, формирование металлоконструкций и остаточных напряжений (деформаций) в сварных соединениях и прилегающих к шву участках. Остаточные растягивающие напряжения, как правило, вредны, повышая восприимчивость сварного шва к усталостным повреждениям, коррозионному растрескиванию под напряжением и разрушению [2]. При оценке риска роста дефектов, например поверхностных дефектов трубопроводных систем, остаточные напряжения при сварке могут вносить больший вклад в общее поле напряжений, чем напряжения, вызванные расчетными нагрузками [2]. Кроме того, для предотвращения коррозионного растрескивания под напряжением в корневой зоне сварных швов из нержавеющей стали необходимо соблюдать определенные требования в отношении условий процесса, свойств материала и остаточных сварочных напряжений. Поэтому для достижения качества сварочного процесса необходимо моделировать совокупность термических, металлургических и механических процессов. Наиболее распространенным подходом к моделированию процесса сварки является использование численных методов, таких как метод конечных элементов (МКЭ), который обеспечивает хорошую точность результатов за счет уменьшения размеров элементов при увеличении их количества [3–5]. Однако трехмерная модель, позволяющая детально фиксировать распределение остаточных напряжений в процессе сварки, требует значительного времени расчета, поскольку механические явления при сварке представляют собой сильно нелинейные процессы. Это допустимо на этапе разработки сварочного процесса, но совершенно непригодно для создания цифрового двойника, используемого в режиме реального времени для контроля качества сварки, где время моделирования не может превышать нескольких секунд. В связи с этим в последнее время возник интерес к поиску упрощающих допущений с минимальными потерями в точности, обеспечивающих повышение

быстродействия всего комплексного подхода к моделированию процесса сварки. Наиболее часто используемой процедурой в рамках комплексного моделирования термических, металлургических и механических сварочных процессов является расчет температурного поля. Исследователи достигли значительного прогресса в аналитическом моделировании движущихся источников тепла и сварочных процессов, что представлено в литературе [6–10]. Тем не менее расчет теплового поля связан с численной оценкой достаточно сложных объемных интегралов, что замедляет моделирование. В работе [11] показано, что комплексное моделирование процесса сварки достаточно устойчиво к вариациям температурного поля, возникающим из-за различных допущений о форме и распределении начальной температуры источника дуги. Это обстоятельство побудило нас в данной статье предложить приближенное аналитическое выражение в элементарных функциях для тепловых полей. Это решение содержит всего два регулируемых параметра (эффективная ширина и температура электрода), которые можно подобрать для получения максимальной точности моделирования при заданной толщине и материале свариваемой трубы. Допускаемая при этом погрешность полностью компенсируется высокой скоростью расчета температурного поля.

### 1. Метод расчета процесса охлаждения сварных швов

Большая работа по расчету охлаждения сварных швов выполнена профессором А.М. Попковым [12]. Мы усовершенствовали предложенный им метод, чтобы сделать модель более реалистичной.

Аналитическое моделирование нагрева и охлаждения при сварке в [12] основано на известном решении задачи нагрева пластины или трубы точечным источником тепла, быстро движущимся прямолинейно [13, 14].

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{2\pi\lambda v\tau} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4a\tau}\right), \quad (1)$$

где  $q$  – тепловая мощность источника,  $\eta$  – эффективный КПД нагрева металла дугой (согласно [12] для сварки под флюсом  $\eta = 0,8–0,9$ ; мы используем значение  $\eta = 0,85$ ),  $v$  – скорость источника тепла,  $\tau$  – время (при  $\tau = 0$  источник пересекает условное начало координат, от которого отсчитывается радиус-вектор  $r$  в сечении, перпендикулярном траектории источника),  $a$  – температуропроводность,  $\lambda$  – теплопроводность (мы используем значения, характерные для трубных сталей  $a = 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\lambda = 29 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ).

Рассмотрим любую точку на расстоянии  $r$  от оси шва, расположенную на поверхности трубы. При  $\tau = 0$  начальная температура в этой точке будет  $T_0$ , которую в статье мы будем принимать равной  $22 \text{ }^\circ\text{C}$ . Затем температура будет повышаться, достигать максимума и снова падать. Максимальная температура достигается в момент

$$\tau = \frac{r^2}{4a}, \quad (2)$$

и принимает значение

$$T_{\max} = T_0 + \frac{2aq\eta}{\pi\lambda v r^2} \cdot \exp(-1). \quad (3)$$

Чем меньше  $r^2$ , тем выше  $T_{\max}$ . На некотором расстоянии  $r = \delta$  температура станет равной температуре плавления  $T_m$ ; тогда при меньших радиусах металл будет расплавлен. Полагая  $T_{\max} = T_m$ , находим радиус жидкой зоны:

$$\delta = \left( \frac{2aq\eta \cdot \exp(-1)}{\pi\lambda v (T_m - T_0)} \right)^{1/2} = 2,108 \cdot 10^{-4} \cdot \left( \frac{q\eta}{v(T_m - T_0)} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Для стенки толщиной 16–17 (в среднем 16,5) мм электрическая мощность дуги, используемой на ОАО «Челябинский трубопрокатный завод», составляет  $q = 163 \text{ кВт}$ , а ее скорость  $v = 120 \text{ м/ч} = 0,033 \text{ м/с}$ . Учитывая, что коэффициент полезного действия  $\eta = 0,85$  [12], а температура плавления стали  $T_m = 1572 \text{ }^\circ\text{C}$ , получаем  $\delta = 11,0 \text{ мм}$ . Рассчитанная глубина расплавленной зоны (т. н. «ванны») в общем близка к реальной величине.

Оценим среднюю температуру расплавленной ванны:

$$\bar{T} = \frac{1}{\pi\delta^2/2} \cdot \int_0^\delta T(r, \tau) \pi r dr = T_0 + \frac{2}{\pi\delta^2} \cdot \frac{q\eta a}{\lambda\nu} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{\delta^2}{4a\tau}\right) \right). \quad (5)$$

Но так как  $\delta^2 = 4a\tau$ , а в силу (3):

$$\frac{2aq\eta}{\pi\lambda\nu\delta^2} = \exp(1) \cdot (T_{nl} - T_0),$$

то

$$\bar{T} = T_0 + (T_{nl} - T_0) \cdot (\exp(1) - 1) = 1,718T_{nl} - 0,718T_0. \quad (6)$$

Основным недостатком описанного метода является форма изотермы – полуокружность. Это означает, что если глубина расплавленной зоны равна  $\delta$ , то ширина шва равна  $2\delta$ . В рассмотренном случае ширина шва должна быть равна  $2 \cdot 11,0 = 22,0$  мм, тогда как на самом деле она составляет в среднем  $30 \pm 3$  мм. Предлагаемый нами метод позволяет устранить эту проблему, которая, очевидно, связана с пренебрежением реальным диаметром сварного электрода. Этот недостаток можно преодолеть, если моделировать электрод радиуса  $l$  при помощи двух источников тепла мощностью  $q/2$ , движущихся синхронно и параллельно друг другу на расстоянии  $2l$ . Пусть начало координат  $O$  лежит ровно посередине (рис. 1).

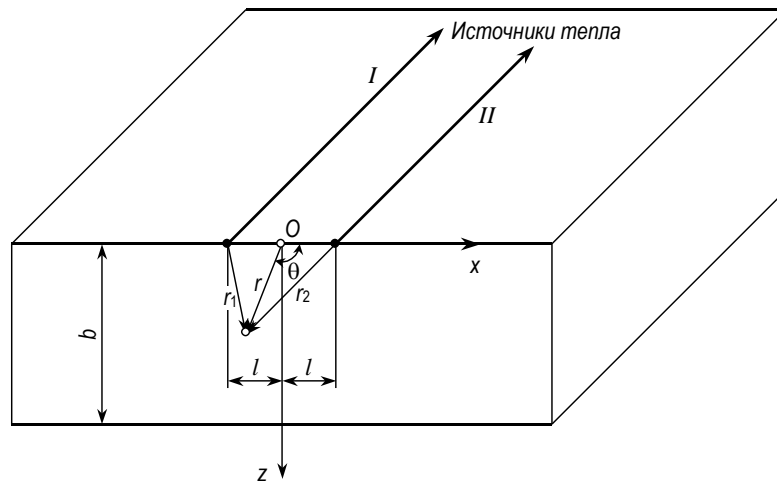


Рис. 1. Предлагаемый вариант замены одного источника тепла двумя источниками на расстоянии  $2l$  между ними

Если бы имелся один источник тепла мощностью  $q/2$ , то радиус ванны был бы

$$\delta_{1/2} = 2 \cdot 108 \cdot 10^{-4} \cdot \left( \frac{q\eta}{2\nu(T_m - T_0)} \right)^{1/2} = 7,76 \text{ мм} \quad (7)$$

Разумно принять  $2l = 13$  мм, чтобы обеспечить требуемую ширину шва  $2 \cdot 7,76 + 13 = 28,5$  мм.

Используя принцип аддитивности [13], запишем температурное поле вокруг двух линейных источников тепла:

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{4\pi\lambda\nu\tau} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{r_1^2}{4a\tau}\right) + \exp\left(-\frac{r_2^2}{4a\tau}\right) \right], \quad (8)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиус-векторы точки, отсчитываемые от линий источников (см. рис. 1). Удобно ввести такую систему координат  $zOx$ , чтобы её начало располагалось симметрично относительно линий токов, и использовать полярные координаты  $\theta$  и  $r$ . Поскольку

$$r_1^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos(180^\circ - \theta) = r^2 + l^2 + 2rl \cos \theta, \quad (9a)$$

$$r_2^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta, \quad (9b)$$

то

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{4\pi\lambda\nu\tau} \cdot \exp\left(-\frac{r^2 + l^2}{4a\tau}\right) \cdot \left[ \exp\left(\frac{rl}{2a\tau} \cos \theta\right) + \exp\left(-\frac{rl}{2a\tau} \cos \theta\right) \right]. \quad (10)$$

Изотермы превращаются в сложные кривые, которые, однако, можно легко построить численными расчётами. Но нас интересуют размеры оплавленной зоны прежде всего в горизонтальном и вертикальном направлениях. Вдоль оси  $z$  угол  $\theta = 90^\circ$  и  $\cos \theta = 0$ , поэтому

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{2\pi\lambda\nu\tau} \cdot \exp\left(-\frac{z^2 + l^2}{4a\tau}\right). \quad (11)$$

Проведя в (10) дифференцирование по  $\theta$ , получим выражения, аналогичные (2) и (3), но с заменой  $r^2$  на  $z^2 + l^2$ . Выражение (4) при  $z = \delta$  примет вид

$$(\delta^2 + l^2)^{1/2} = 2,108 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{q\eta}{\nu(T_{nl} - T_0)}\right)^{1/2} = 11,0 \text{ мм}, \quad (12)$$

откуда  $\delta = \sqrt{11,0^2 - 6,5^2} = 8,9$  мм.

Размер оплавленной зоны в горизонтальном направлении при  $\theta = 0$  определяется удвоенной величиной радиуса  $r = x$ , при которой температура равна  $T_{nl} = 1572^\circ\text{C}$ . Для такого направления

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{4\pi\lambda\nu\tau} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4a\tau}\right) + \exp\left(-\frac{(x+l)^2}{4a\tau}\right) \right]. \quad (13)$$

Однако, как показали оценки, вторая экспонента вблизи  $x \approx 14$  мм имеет ничтожно малое значение по сравнению с первой, поэтому оказывается применимой формула (7), и расчётная ширина шва

$$2x_{nl} = 2\delta_{1/2} + 2l = 28,5 \text{ мм} \quad (14)$$

оказывается равной действительному значению. Таким образом, модель двух линейных источников гораздо точнее описывает размеры и форму сварной ванны, чем модель одного источника [12].

Для практических целей важно знать распределение температуры и скоростей охлаждения вдоль оси  $z$ . Эту информацию можно получить, используя выражение (11) и его производную по  $\tau$ . Но по мере увеличения координаты  $z$  и приближения к другой стороне пластины, где  $z = b$  ( $b$  – толщина трубы или пластины), мы сталкиваемся с другой проблемой. Формула (11) справедлива для полубесконечного вдоль  $z$  тела. Это означает, что при  $z = b$  температура будет убывать так, как если бы тепловой поток продолжал перемещаться вдоль  $z$ . Между тем, как показано в [12], теплообмен с окружающей средой на внешних поверхностях пренебрежимо мал, то есть противоположная поверхность является почти теплоизолированной. Ликвидировать этот недостаток метода можно следующим образом. Допустим, что мы увеличим в два раза толщину пластины, но с противоположной поверхности поместим дополнительно ещё два линейных источника тепла такой же мощности, расположив их точно под двумя первыми источниками. Все источники должны двигаться синхронно с одинаковой скоростью. Тепловые потоки от поверхностей  $z = 0$  и  $z = 2b$  двигаются навстречу друг другу. На плоскости симметрии  $z = b$  потоки оказываются равными и противоположно направленными, так что на этой поверхности  $\partial T / \partial z = 0$ , и поток как бы отражается от этой поверхности. Область  $b < z < 2b$  является недействительной.

Вместо выражения (13) мы получим тогда более точное:

$$T(z, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{2\pi\lambda\nu\tau} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{z^2 + l^2}{4a\tau}\right) + \exp\left(-\frac{(2b-z)^2 + l^2}{4a\tau}\right) \right], \quad (15)$$

которое позволяет найти распределение температуры вдоль оси  $z$ , являющейся осью симметрии сечения сварного шва. Изменение температуры в произвольной точке  $(r, \theta)$  получается из выражения (10):

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{4\pi\lambda\nu\tau} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{r^2 + l^2}{4a\tau}\right) + \exp\left(-\frac{r^2 \cos^2 \theta + (2b - r \sin \theta)^2 + l^2}{4a\tau}\right) \right] \times \\ \times \left[ \exp\left(\frac{rl}{2a\tau} \cos \theta\right) + \exp\left(-\frac{rl}{2a\tau} \cos \theta\right) \right]. \quad (16)$$

Для труб с толщиной стенки 30 мм нет необходимости использовать два точечных источника, так как глубина жидкой ванны  $\delta = 16,7$  мм, рассчитанная по уравнению (5), примерно в 2 раза меньше ширины шва. В таком случае

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q\eta}{2\pi\lambda\nu\tau} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{r^2}{4a\tau}\right) + \exp\left(-\frac{(2b-r)^2}{4a\tau}\right) \right]. \quad (17)$$

## 2. Тестирование модели

В экспериментальной работе [15] проводилось измерение температурного поля в толстом листе мягкой стали при сварке с использованием двухпроволочного электрода. Измеряющие термопары располагались на разной глубине заготовки по средней линии непосредственно под сварочной дугой, что соответствует формуле (11) нашей модели. Тогда сравнение результатов расчета с данными указанного эксперимента позволит получить представление о корректности модели. Для мягкой низкоуглеродистой стали характерные значения  $a = 6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda = 60$  Вт/(м·К). В табл. 1 приведены основные параметры нашей модели, соответствующие экспериментальной установке в работе [15], а также проведено сравнение экспериментальных и расчетных значений.

Таблица 1

Значения параметров в эксперименте [15] и сравнение полученных экспериментальных данных для максимальной температуры  $T^{\max}(z)$  и времени ее достижения  $t^{\max}$  на данной глубине  $z$  с расчетом по формуле (11)

Параметр	$l$ , мм	$\nu$ , см/мин	$q$ , кВт	$\lambda$ , Вт/(м·°С)	$a$ , $10^{-6}$ м <sup>2</sup> /с	$T^{\max}$ расчет	$T_{\max}$ exper.	$t^{\max}$ , с расчет	$t^{\max}$ , с exper.
глубина									
$z = 5$ мм	9	40	19,2	60	60	550	680	5	5
$z = 7$ мм						450	500	6	7
$z = 9$ мм						355	380	7	8

Видно, что согласие модели с данными эксперимента является вполне удовлетворительным.

## 3. Результаты расчёта температурных полей при охлаждении сварных труб на воздухе

Развитый выше метод моделирования тепловых полей был применен для расчетов термического цикла свариваемых труб при охлаждении на воздухе. При расчетах было использовано уравнение (15), а также следующие значения параметров:  $\lambda = 29$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $a = 5,5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\nu = 0,033$  м/с (скорость движения трубы или электрода);  $2l = 13 \cdot 10^{-3}$  мм;  $\eta = 0,85$ ;  $T_0 = 22$  °С;  $T_{пл} = 1572$  °С.

### А) Охлаждение труб толщиной 12 мм

Электрическая мощность дуги при сварке труб толщиной  $b = 12$  мм была принята равной  $q = 115 \cdot 10^3$  Вт. Температурное поле в направлении толщины стенки, то есть радиуса трубы, было рассчитано для средней линии шва в определённых точках ( $r = z$ ):  $z = 3; 6; 7,3; 9$  и  $11$  мм. Точка  $z = 6$  мм соответствует полутолщине, а точки  $z = 3$  и  $9$  мм находятся на расстоянии  $1/4$  и  $3/4$  толщины от наружной поверхности. Рассматривается наружный шов.

Зависимость температуры в указанных точках от времени после прохождения дуги в данном сечении показаны на рис. 2. Они отражают термический цикл при сварке: нагрев, достижение максимальной температуры и охлаждение. Чем дальше от наружной поверхности расположена точка, тем ниже пик температуры и тем большее время необходимо для его достижения. С помощью кривых на рис. 2 можно легко оценить длительность кристаллизации, для чего следует провести горизонталь  $T = T_{пл} = 1572$  °С и найти её пересечения с кривыми термического цикла: первая точка пересечения есть начало, вторая – конец кристаллизации. В случае  $z_3 = 7,3$  мм горизонталь  $T_{пл}$  касается максимума кривой; это означает, что эта точка является последней по глубине точкой оплавления, определяющей глубину жидкой ванны шва. Кристаллизация происходит примерно за 10 с.



Очень интересным и важным является то обстоятельство, что после охлаждения длительно-стью 12 с температуры всех точек сварного шва оказываются очень близкими. Это означает, что вдоль средней линии шва температура почти постоянна: например, по прошествии 16 с она равна 1200 °С. Следовательно, металл внутреннего шва в этом месте нагревается выше температуры фазового перехода ( $A_{c3}$ ), и в стали возникает аустенит, который при дальнейшем охлаждении будет испытывать превращение. Увеличение длительности охлаждения, конечно, приводит к снижению температуры, но это снижение опять-таки оказывается почти одинаковым для всех точек средней линии шва.

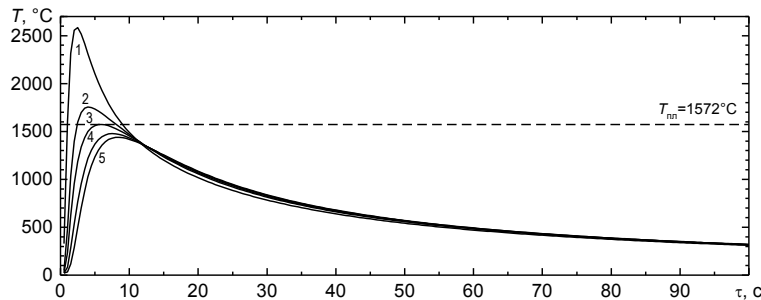


Рис. 2. Зависимость температуры в различных точках по толщине от времени после сварки для трубы толщиной 12 мм:  
1 –  $z=3$ ; 2 –  $z=6$ ; 3 –  $z=7,3$ ; 4 –  $z=9$ ; 5 –  $z=11$  мм

На рис. 3 представлена зависимость скорости охлаждения  $v_{\text{охл}} = -dT/dt$  от времени. Самые большие скорости охлаждения наблюдаются при малых выдержках (менее 15 с), а затем они уменьшаются с течением времени, причём в разных точках средней линии сечения шва скорости охлаждения оказываются примерно одинаковыми.

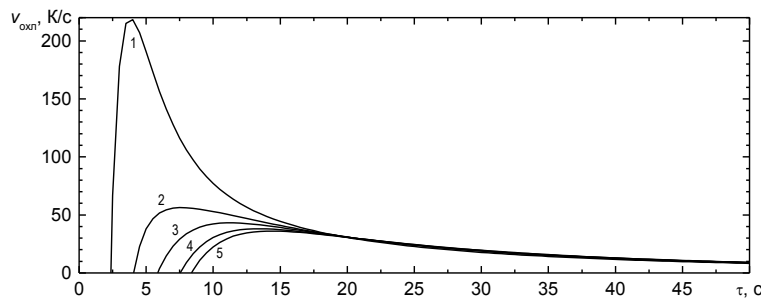


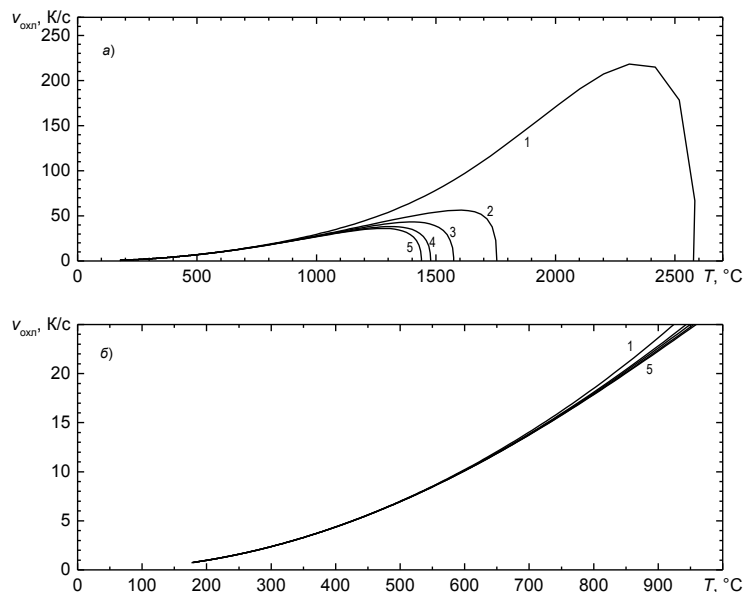
Рис. 3. Зависимость скоростей охлаждения для различных точек по сечению трубы толщиной 12 мм от времени охлаждения:  
1 –  $z=3$ ; 2 –  $z=6$ ; 3 –  $z=7,3$ ; 4 –  $z=9$ ; 5 –  $z=11$  мм

На рис. 4 показано, как зависит скорость охлаждения в рассматриваемых точках от температуры, что очень важно для понимания характера превращения аустенита. Он может распадаться в интервале температур 800...500 °С на феррит и некоторое количество цементита в составе перлитной структуры, между 500 и 400 °С возможно превращение аустенита в бейнит, а ниже 400 °С возможна закалка, в ходе которой происходит образование высокопрочного мартенсита. У низкоуглеродистых трубных сталей, например 13ГС, для подавления реакции образования феррита нужны скорости охлаждения порядка 80 К/с, а для полной закалки – 150 К/с [4]. При охлаждении шва на воздухе в районе 600 °С скорость охлаждения составляет порядка 10 К/с (рис. 4; табл. 2), поэтому закалка невозможна.

Таблица 2

Зависимость скорости охлаждения сварного шва (К/с) от толщины трубы и температуры шва

Текущая температура, °С	Толщина трубы, мм		
	12	16,5	30
650	12	8,4	3,6
500	7,0	4,9	2,2
400	4,4	3,1	1,4

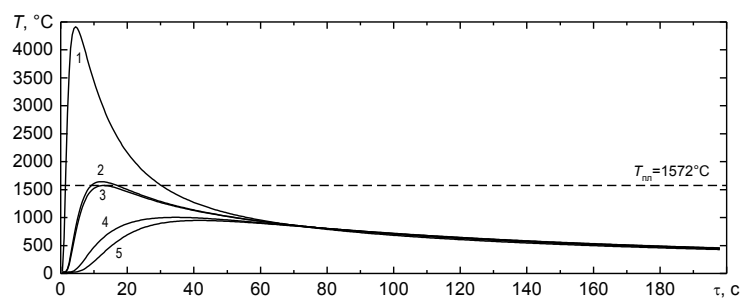


**Рис. 4. Зависимость скорости охлаждения после сварки от температуры для различных точек по сечению трубы толщиной 12 мм:**  
 1 –  $z=3$ ; 2 –  $z=6$ ; 3 –  $z=7,3$ ; 4 –  $z=9$ ; 5 –  $z=11$  мм;  
 а — во всей области температур; б — в области температур ниже 1000 °С

**Б) Охлаждение труб толщиной 16,5 и 30 мм**

Качественно соответствующие кривые изменения температуры для труб разной толщины оказываются сходными. Поэтому на рис. 5, 6 и 7 приведены кривые зависимости температуры и скорости охлаждения от времени, а также скорости охлаждения от температуры для труб толщиной 30 мм. Для труб толщиной 16,5 мм зависимости оказываются промежуточными между рис. 2, 3, 4 и рис. 5, 6 и 7. При расчётах принималось, что электрическая мощность дуги  $q=163 \cdot 10^3$  Вт для толщины  $b=16,5$  мм и  $q=378 \cdot 10^3$  Вт для толщины  $b=30$  мм.

Несмотря на качественное сходство, количественное различие между ними значительно. Например, при толщине 30 мм кристаллизация расплавленного металла на глубине 7,5 мм происходит за 30 с. Скорости охлаждения также существенно уменьшаются с увеличением толщины при фиксированной температуре и со снижением температуры при фиксированной толщине (см. табл. 2).



**Рис. 5. Зависимость температуры в различных точках по толщине от времени после сварки для трубы толщиной 30 мм:**  
 1 –  $z=7,5$ ; 2 –  $z=15$ ; 3 –  $z=15,4$ ; 4 –  $z=22,5$ ; 5 –  $z=27$  мм

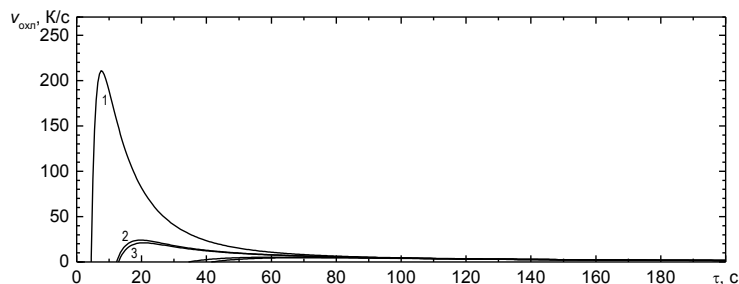


Рис. 6. Зависимость скоростей охлаждения для различных точек по сечению трубы толщиной 30 мм от времени охлаждения:  
1 –  $z = 7,5$ ; 2 –  $z = 15$ ; 3 –  $z = 15,4$ ; 4 –  $z = 22,5$ ; 5 –  $z = 27$  мм

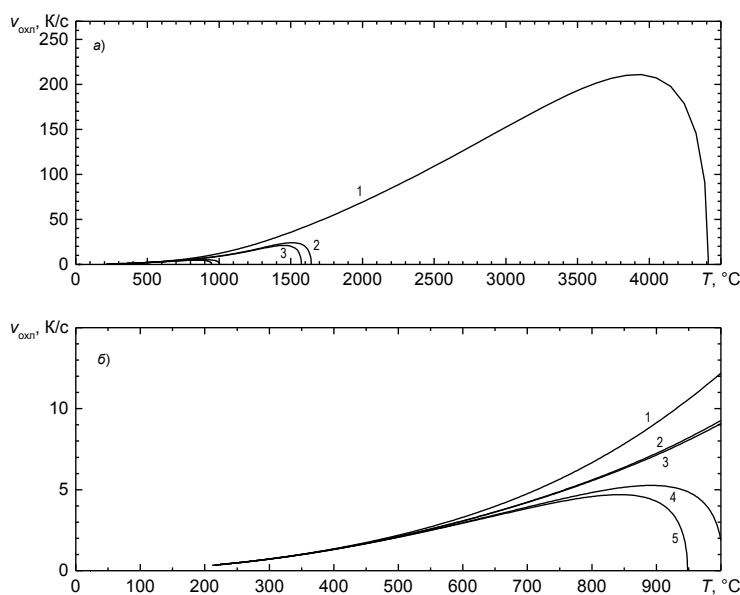


Рис. 7. Зависимость скорости охлаждения после сварки от температуры для различных точек по сечению трубы толщиной 30 мм:  
1 –  $z = 7,5$ ; 2 –  $z = 15$ ; 3 –  $z = 15,4$ ; 4 –  $z = 22,5$ ; 5 –  $z = 27$  мм;  
а – во всей области температур; б – в области температур ниже 1000 °С

## Заключение

Предложен достаточно точный аналитический метод моделирования тепловых полей в процессе технической сварки, учитывающий ряд реальных физических особенностей процесса, а именно конечный, а не точечный размер сварного электрода и ограниченную толщину свариваемого объекта. Этого удалось добиться путем использования модели с двумя точечными источниками тепла, разнесенными на величину порядка диаметра электрода. Показано, что новый расчетный метод гораздо лучше описывает температурное поле в области сварного шва, размер и форму сварочной ванны, чем модель одиночного источника [12]. Предлагаемая модель удовлетворяет как требованиям достоверности, так и вычислительной быстроты, необходимым для использования в качестве элемента при разработке цифровых двойников процесса промышленной сварки. Показано, что использование данной аналитической модели позволяет легко проанализировать зависимость скорости охлаждения от температуры в различных точках стали вблизи трубных швов. Такая информация очень важна для понимания характера превращения аустенита и возможности закалки области сварного шва.

## Финансирование

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание на выполнение фундаментальных научных исследований № FENU-2023-0011 (2023011ГЗ)).

**Литература**

1. A Review on Wire-Arc Additive Manufacturing: Typical Defects, Detection Approaches, and Multisensor Data Fusion-Based Model / X. Chen, F. Kong, Y. Fu *et al.* // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2021. – Vol. 117. – P. 707–727.
2. Deng, D. Numerical Simulation of Temperature Field and Residual Stress in Multi-pass Welds in Stainless Steel Pipe and Comparison with Experimental Measurements / D. Deng, H. Murakawa // Comput. Mater. Sci. – 2006. – Vol. 37, Iss. 3. – P. 269–277.
3. Finite Element Modeling of Welding Processes / A. Anca, A. Cardona, J. Risso, V.D. Fachinotti // Applied Mathematical Modelling. – 2011. – Vol. 35, Iss. 2. – P. 688–707.
4. Influences of Latent Heat on Temperature Field, Weld Bead Dimensions and Melting Efficiency during Welding Simulation / B. Singh, P. Singhal, K.K. Saxena, R.K. Saxena // Metals and Materials International. – 2021. – Vol. 27. – P. 2848–2866.
5. Rykalin, R.R. Energy Sources for Welding / R.R. Rykalin // Welding in the World. – 1974. – Vol. 12, no. 9/10. – P. 227–248. (Houdremont Lecture, International Institute of Welding, London, 1974. – P. 1–23)
6. Fachinotti, V.D. Analytical Solutions of the Thermal Field Induced by Moving Double-Ellipsoidal and Double-elliptical Heat Sources in a Semi-infinite Body / V.D. Fachinotti, A.A. Anca, A. Cardona // Int. J. Numer. Meth. in Biomedical Eng. – 2011. – Vol. 27, Iss. 4. – P. 595–607.
7. Semi-Analytical Solutions for the Transient Temperature Fields Induced by a Moving Heat Source in an Orthogonal Domain / T.F. Flint, J.A. Francis, M.C. Smith, A.N. Vasileiou // International Journal of Thermal Sciences. – 2018. – Vol. 123. – P. 140–150.
8. Nasiri M.B. Powerful Analytical Solution to Heat Flow Problem in Welding / M.B. Nasiri, N. Enzinger // Int. J. Therm. Sci. – 2019. – Vol. 135. – P. 601–612.
9. Karkhin, V.A. Calculation of Thermal Processes in Welding Thick Plates with Moving Axisymmetric Heat Sources / V.A. Karkhin, S.V. Zharkov, V.G. Mikhaylov // Weld. Int. – 2016. – Vol. 30, Iss. 9. – P. 708–711.
10. Farias, R.M. Variable Profile Heat Source Models for Numerical Simulations of Arc Welding Processes / R.M. Farias, P.R.F. Teixeira, L.O. Vilarinho // International Journal of Thermal Sciences. – 2022. – Vol. 179. – Article no. 107593
11. Chiocca, A. Evaluation of Heat Sources for the Simulation of the Temperature Distribution in Gas Metal Arc Welded Joints / A. Chiocca, F. Frendo, L. Bertini // Metals. – 2019. – Vol. 9, Iss. 11. – P. 1142.
12. Попков, А.М. Тепловые и энергетические расчеты при электрической дуговой сварке: учеб. пособие / А.М. Попков. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 74 с.
13. Рыкалин, Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке: учеб. пособие для машиностроит. вузов / Н.Н. Рыкалин. – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.
14. Багрянский, К.В. Теория сварочных процессов: учебник для сварочных специальностей вузов / К.В. Багрянский, Э.А. Добротина, К.К. Хренов. – Киев: Вища школа, 1976. – 423 с.
15. Estimation of Heat Source Model Parameters for Twin-Wire Submerged Arc Welding / A. Sharma, A.K. Chaudhary, N. Arora, B.K. Mishra // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2009. – Vol. 45, Iss. 11-12. – P. 1096–1103. DOI: 10.1007/s00170-009-2046-3

*Поступила в редакцию 16 января 2023 г.*

**Сведения об авторах**

Мирзаев Джалал Аминович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: mirzaevda@susu.ru

Окишев Константин Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра материаловедения и физико-химии материалов, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: okishevki@susu.ru

Мирзоев Александр Аминулаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1527-371X>, e-mail: mirzoevaa@susu.ru

## A SIMPLE ANALYTICAL MODEL OF THERMAL FIELDS TO DEVELOP DIGITAL TWINS IN INDUSTRIAL ARC WELDING

D.A. Mirzaev, K.Yu. Okishev, A.A. Mirzoev

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: mirzoevaa@susu.ru

**Abstract.** A digital twin is the virtual representation of a physical object, system, or process using computerized digital technologies. Creating digital twins becomes much more difficult for dynamic manufacturing processes, such as welding, when simulation time should not exceed a few seconds. This paper presents a method for modeling thermal fields in industrial welding in real time, based on physical processes. The method can be used to create a digital twin at the process level. The method uses analytical solutions to the problem of temperature distribution around a weld which is a moving heat source.

*Keywords:* simulation; thermal field; weld; digital twin.

### References

1. Chen X., Kong F., Fu Y., Zhao X., Li R., Wang G., Zhang H. A Review on Wire-Arc Additive Manufacturing: Typical Defects, Detection Approaches, and Multisensor Data Fusion-Based Model. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2021, Vol. 117, pp. 707–727. DOI: 10.1007/s00170-021-07807-8
2. Deng D., Murakawa H. Numerical Simulation of Temperature Field and Residual Stress in Multi-Pass Welds in Stainless Steel Pipe and Comparison with Experimental Measurements. *Comput. Mater. Sci.*, 2006, Vol. 37, pp. 269–277. DOI: 10.1016/j.commatsci.2005.07.007
3. Anca A., Cardona A., Risso J., Fachinotti V.D. Finite Element Modeling of Welding Processes. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, Vol. 35, Iss. 2, pp. 688–707. DOI: 10.1016/j.apm.2010.07.026
4. Singh B., Singhal P., Saxena K.K., Saxena R.K. Influences of Latent Heat on Temperature Field, Weld Bead Dimensions and Melting Efficiency During Welding Simulation. *Metals and Materials International*, 2021, Vol. 27, pp. 2848–2866. DOI: 10.1007/s12540-020-00638-4
5. Rykalin R.R. Energy Sources for Welding. *Welding in the World*, 1974, Vol. 12, no. 9/10, pp. 227–248. (Houdremont Lecture, International Institute of Welding, London, 1974, pp. 1–23)
6. Fachinotti V.D., Anca A.A., Cardona A. Analytical Solutions of the Thermal Field Induced by Moving Double-Ellipsoidal and Double-Elliptical Heat Sources in a Semi-Infinite Body. *Int. J. Numer. Meth. in Biomedical Eng.*, 2011, Vol. 27, Iss. 4, pp. 595–607. DOI: 10.1002/cnm.1324
7. Flint T.F., Francis J.A., Smith M.C., Vasileiou A.N. Semi-Analytical Solutions for the Transient Temperature Fields Induced by a Moving Heat Source in an Orthogonal Domain. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, Vol. 123, pp. 140–150. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2017.09.012
8. Nasiri M.B., Enzinger N. Powerful Analytical Solution to Heat Flow Problem in Welding. *Int. J. Therm. Sci.*, 2019, Vol. 135, pp. 601–612. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.08.003
9. Karkhin V.A., Zharkov S.V., Mikhaylov V.G. Calculation of Thermal Processes in Welding thick Plates with Moving Axisymmetric Heat Sources. *Weld. Int.*, 2016, Vol. 30, Iss. 9, pp. 708–711. DOI: 10.1080/09507116.2016.1143584
10. Farias R.M., Teixeira P.R.F., Vilarinho L.O. Variable Profile Heat Source Models for Numerical Simulations of Arc Welding Processes. *International Journal of Thermal Sciences*, 2022, Vol. 179, Article no. 107593, DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2022.107593
11. Chiocca A., Frendo F., Bertini L. Evaluation of Heat Sources for the Simulation of the Temperature Distribution in Gas Metal Arc Welded Joints. *Metals*, 2019, Vol. 9, Iss. 11, pp. 1142. DOI: 10.3390/met9111142
12. Popkov A.M. *Тепловые и энергетические расчеты при электрической дуговой сварке* (Heat and Energy Calculations in Electric Arc Welding). Chelyabinsk, South Ural State Univ., 2006, 74 p. (in Russ.).

13. Rykalin N.N. *Raschety teplovykh protsessov pri svarke: ucheb. posobie dlya mashinostroit. vuzov* (Calculations of Thermal Processes during Welding: Textbook. Manual for Mechanical Engineering Universities). Moscow, Mashgiz Publ., 1951, 296 p. (in Russ.).

14. Bagryanskiy K.V., Dobrotina Z.A., Khrenov K.K. *Teoriya svarochnykh protsessov: uchebnik dlya svarochnykh spetsial'nostey vuzov* (Theory of Welding Processes: Textbook for Welding Specialties of Universities). Kiev, Vishcha shkola Publ., 1976, 423 p. (in Russ.).

15. Sharma A., Chaudhary A.K., Arora N., Mishra B.K. Estimation of Heat Source Model Parameters for Twin-Wire Submerged Arc Welding. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, Vol. 45, Iss. 11-12, pp. 1096–1103. DOI: 10.1007/s00170-009-2046-3

*Received January 16, 2023*

### Information about the authors

Mirzaev Dzhalal Aminulovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: mirzaevda@susu.ru

Okishev Konstantin Yur'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Materials Science and Physical Chemistry of Materials Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: okishevki@susu.ru

Mirzoev Aleksandr Aminulaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1527-371X>, e-mail: mirzoevaa@susu.ru

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук».

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 15, № 1  
2023

16+

Редактор *С.И. Уварова*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 24.01.2023. Дата выхода в свет 31.01.2023.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23.

Тираж 500 экз. Заказ 12/45. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.