

# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2023  
Т. 15, № 4**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

**СЕРИЯ**

**«МАТЕМАТИКА.  
МЕХАНИКА.  
ФИЗИКА»**

**Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий**

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

**Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

**Редакционный совет**

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гундетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

SERIES

2023

Vol. 15, no. 4

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

- S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**E.V. Golubev**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.P. Beskachko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**V.I. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**Yu.M. Kovalev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

- A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation  
**G.L. Brovko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**V.D. Buchelnikov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
**D. Guidetti**, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy  
**V.I. Zhukovsky**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
**S.V. Zelik**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom  
**A.I. Korotkii**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**Jaewan Kim**, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea  
**Kisik Kim**, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea  
**N.D. Kundikova**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation  
**V.V. Menshikh**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation  
**S.I. Pinchuk**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America  
**Y.S. Puzyrev**, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America  
**N.K. Ravshanov**, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan  
**A.V. Trukhanov**, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus  
**L.V. Utkin**, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation  
**I. Verpoest**, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium  
**V.A. Strauss**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

ДИЛЬМАН В.Л. Свойства и описание множеств решений линейных функциональных уравнений на простой гладкой кривой.....	5
ПАВЛЕНКО В.Н., ДЕРКУНОВА Е.А. Асимптотическое поведение приближенного решения одномерной сингулярно возмущенной задачи Гольдштика.....	14
СУРИН В.А., ЧЕСКИДОВА М.А. Фильтрация RAW-изображений на основе обобщенного метода наименьших модулей.....	21
ШАБЛОВСКИЙ О.Н. Примеры точных решений нелокального волнового уравнения с нелинейными источниками.....	30

### Механика

КРИВОНОГОВ А.А., ГОНТАРЕВ К.А. Разработка метода неинвазивного измерения расхода жидкости и газа через стенку трубопровода .....	38
ХОРОШЕВСКИЙ К.А., ЕРПАЛОВ А.В., ГАДОЛИНА И.В. Расчётно-экспериментальное исследование влияния демпфирования конструкции на её долговечность при случайном нагружении .....	47

### Физика

БЕЛЬХЕЕВА Р.К. Применение широкодиапазонного уравнения состояния смеси к описанию поведения пористого железа и смесей, содержащих железо.....	58
МИРЗОЕВ А.А., ВЕРХОВЫХ А.В. Сравнение результатов термодинамического и первопринципного моделирования неупорядоченных растворов системы Fe–V.....	68
КОЛЕСНИЧЕНКО И.В., ОЗЕРНЫХ В.С., ГОЛЬБРАЙХ Е. Распространение пульсаций по потоку жидкого металла.....	77
КОТОВ Л.Н., УТКИН А.А., КАЛИНИН Ю.Е., СИТНИКОВ А.В. Магнитные, проводящие и магнитопроводящие свойства композитных плёнок (CoFeB+SiO <sub>2</sub> +N <sub>2</sub> ) в интервале температур 2–400 К и магнитных полей 0, 1 и 5 Тл.....	85

### Персоналии

СЛАВИН Олег Анатольевич – к 60-летию со дня рождения .....	93
--	----

# CONTENTS

## Mathematics

DILMAN V.L. Properties and Description of Solution Sets of Linear Functional Equations on a Simple Smooth Curve.....	5
PAVLENKO V.N., DERKUNOVA E.A. The Asymptotic Behavior of the Approximate Solution of a One-Dimensional Singularly Perturbed Goldshtik Problem.....	14
SURIN V.A., CHESKIDOVA M.A. RAW Image Filtering based on the Generalized Method of Least Modules .....	21
SHABLOVSKI O.N. Examples of Exact Solutions of the Non-Local Wave Equation with Nonlinear Sources.....	30

## Mechanics

KRIVONOGOV A.A., GONTAREV K.A. A Non-Invasive Method for Measuring Liquid and Gas Flow Rates through a Pipeline Wall .....	38
KHOROSHEVSKII K.A., ERPALOV A.V., GADOLINA I.V. A Computational and Experimental Study into the Influence of Structural Damping on a Structure's Durability under Random Loading	47

## Physics

BELKHEEVA R.K. The Application of the Wide-Range Equation of State to the Behavior of Porous Iron and Iron Containing Mixtures.....	58
MIRZOEV A.A., VERKHOVYKH A.V. The Comparative Results of the Thermodynamic and First-Principle Modeling of Disordered Solutions of the Fe–V System .....	68
KOLESNICHENKO I.V., OZERNYKH V.S., GOLBRAIKH E. Transfer of Pulses Along a Liquid Metal Flow .....	77
KOTOV L.N., UTKIN A.A., KALININ Yu.E., SITNIKOV A.V. Magnetic, Conducting, and Magnetic Conducting Properties of Composite Films (CoFeB+SiO <sub>2</sub> +N <sub>2</sub> ) in the Temperature Range 2–400 K and Magnetic Fields of 0, 1, and 5 T .....	85

## Personalia

Oleg SLAVIN – to the 60th Birthday Anniversary .....	93
--	----



## СВОЙСТВА И ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРОСТОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

**В.Л. Дильман**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: dilmанvl@susu.ru

**Аннотация.** Исследуются линейные функциональные уравнения, заданные в поле комплексных чисел на простых гладких кривых, с функцией сдвига бесконечного порядка. Функция сдвига имеет ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, и неподвижные точки только на концах кривой. В статье дано полное описание множеств решений таких уравнений в классах непрерывных, гильбертовских и первообразных от лебеговских функций с коэффициентом и правой частью из таких же классов в зависимости от значений коэффициента уравнения на концах кривой. Установлены достаточные условия принадлежности решений указанным функциональным классам.

*Ключевые слова:* сингулярные интегральные уравнения со сдвигом; линейные функциональные уравнения от одной переменной; гильбертовы классы функций, классы первообразных от лебеговских функций.

Восьмидесятилетию юбилею  
ЮУрГУ посвящается

### Введение

В работах [1, 2] изучались свойства решений сингулярных интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями. Ядрами таких уравнений являются интегралы типа Коши с переменными верхним и нижним пределами. Эти пределы находятся в заданной функциональной зависимости (обозначим ее  $\alpha$ ). Такие уравнения связаны с теорией краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [3–5]. Схема решения таких уравнений на одном из шагов заключается в решении (и, следовательно, в исследовании) линейных функциональных уравнений (ЛФУ)

$$(F_g(\psi))(t) \equiv \psi(\alpha(t)) - g(t)\psi(t) = h(t), \quad (1)$$

заданных на гладких кривых  $\Gamma = [ab]$  комплексной плоскости. Наибольший интерес с точки зрения [1, 2] представляют вопросы инвариантности оператора, обратного к  $(F_g(\psi))$ , относительно гильбертовских и лебеговских классов функций, а также классов первообразных от функций указанных классов. При этом важно понять, как меняются параметры, характеризующие эти классы, при переходе от правой части уравнения к его решению.

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (1) и его обобщениями. В них изучались вопросы существования решений, условий единственности, описания общих решений в основном в классах непрерывных функций [6–13]. В работах [11–13] рассматривались ЛФУ с функциями сдвига  $\alpha$ , порождающими конечную группу относительно суперпозиции. Такие ЛФУ появляются при математическом моделировании методов защиты человека и окружающей среды при процессах переноса заряженных частиц и ионизированных излучений. Ряд работ посвящен функциональному уравнению со сдвигом на числовой прямой (уравнению Коши) и его обобщениям [14–18] в основном в классах непрерывных функций. В гильбертовских, лебеговских классах функций, а также в классах первообразных от них, исследования проводились в работах [19–21]. В этих работах установлено, что существование, единственность, размерность пространства решений в случае отсутствия единственности зависят от значений коэффициента  $g(t)$  уравнения (1) в неподвижных точках, как правило, от знаков величин  $|g(a)| - 1$ ,  $|g(b)| - 1$ .

Естественной областью определения функций из (1) (областью задания уравнения (1)) является кривая, содержащая один из концов и не содержащая другой:  $[a;b]$  или  $(a;b]$ . Тогда можно построить решение (или бесконечный класс решений) с непрерывным продолжением на этот конец. Непрерывное продолжение на другой конец не всегда возможно. В работе исследуются свойства решений уравнения (1), заданных на кривой, содержащей оба конца, что требуется с точки зрения приложений. Цель статьи – дать полное описание множеств решений на  $[a;b]$ , исчерпывающе сформулировать критерии существования и единственности решений таких уравнений в классах непрерывных, гельдеровских и первообразных от лебеговских функций  $A_p$  с коэффициентом и правой частью из таких же классов в зависимости от значений коэффициента уравнения на концах кривой.

С точки зрения приложений к сингулярным интегральным уравнениям [2, 19] специальный интерес представляют решения уравнения (1) такие, что  $\psi(b)=0$  (и тогда должно выполняться условие  $h(b)=0$ ). Действительно, в сингулярных интегральных уравнениях с двумя подвижными логарифмическими особенностями в ядре уравнению (1) удовлетворяет функция

$$\psi(t) = \int_t^b \varphi(\tau) d\tau,$$

где  $\varphi$  – искомая функция. В работе рассмотрен этот случай. Заметим, что рассмотрение этого случая не сужает общей ситуации, так как общий случай легко сводится к данному заменой искомой функции по формуле  $v(t) = \psi(t) - \psi(b)$ .

Тогда (1) приобретает вид:

$$v(\alpha(t)) = g(t)v(t) + h_1(t), \quad (2)$$

где  $h_1(t) = g(t)\psi(b) + h(b)$ , причем решение уравнения (2) удовлетворяет, в силу сделанной замены, условию  $v(b)=0$ , и  $h_1(b)=0$ . Ясно, что функции  $v(t) = \psi(t) - \psi(b)$  и  $v(t) = \psi(t) - \psi(b)$  одновременно принадлежат рассмотренным ниже классам функций, поэтому все результаты, относящиеся к уравнениям (1) с условием  $h(b)=0$ , выполняются и в общем случае.

## Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть  $\Gamma = [a;b]$  – гладкая разомкнутая кривая на комплексной плоскости. Класс непрерывных на  $\Gamma$  комплексных комплекснозначных функций обозначим  $C^\Gamma$  или просто  $C$ . Класс функций  $\varphi$  с условием Гельдера на  $\Gamma$ :

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < K|t_1 - t_2|^\mu, \quad t_1, t_2 \in \Gamma, \quad 0 < \mu \leq 1.$$

Обозначим  $H_\mu^\Gamma(K)$ , или чаще более коротко  $H_\mu(K)$  или  $H_\mu$ ; положим  $H_\mu^\Gamma = \bigcap_{0 < \nu < \mu} H_\nu^\Gamma$ .

Очевидно,  $H_\mu \subseteq H_\nu$ . Класс функций, абсолютно интегрируемых на  $\Gamma$  со степенью  $p$ , обозначим  $L_p^\Gamma$ , или  $L_p$ . Класс первообразных от  $L_p$  обозначим  $A_p$ ; положим  $A_p^\Gamma = \bigcap_{1 \leq q < p} A_q^\Gamma$ ,  $p > 1$ . Оче-

видно,  $A_p \subseteq A_q$ .

В качестве функции «сдвига»  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $t \in \Gamma$ , в ЛФУ (1) примем отображение кривой  $\Gamma$  на себя, удовлетворяющее свойствам:

- 1)  $\alpha$  – непрерывная биекция кривой  $\Gamma$  на себя с сохранением ориентации;
- 2) на  $\Gamma$  точки  $a$  и  $b$ , и только они являются неподвижными относительно биекции  $\alpha$ ;
- 3)  $\forall t \in \Gamma \exists \alpha'(t) \neq 0$  с условием  $\alpha' \in H_\theta$  на  $\Gamma$ ,  $\theta \in (0;1]$ ;
- 4)  $|\alpha'(a)| \neq 1$ ,  $|\alpha'(b)| \neq 1$ .

Целочисленные нижние индексы у  $\alpha$  понимаем в смысле:  $\alpha_0(t) \equiv t$ ,  $\alpha_1(t) \equiv \alpha(t)$ ,  $\alpha_n(t) \equiv \alpha(\alpha_{n-1}(t))$ ,  $\alpha_{-1}(t)$  – обратно к  $\alpha$ ,  $\alpha_{-n}(t) \equiv \alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Заметим:  $\alpha_n(\alpha_{-n}(t)) \equiv \alpha_{-n}(\alpha_n(t)) \equiv t$ .

Если  $\forall t \in (a; b)$   $\alpha(t) \in (a; t)$ , точку  $a$  назовем *притягивающей неподвижной точкой* (п. н. т.). Если же  $\alpha(t) \in (t; b)$ , то точку  $b$  назовем *отталкивающей неподвижной точкой* (о. н. т.). Всегда либо точка  $a$  – п. н. т., а точка  $b$  – о. н. т., либо наоборот,  $a$  – о. н. т., а точка  $b$  – п. н. т.

Не ограничивая общности результатов работы, всюду полагаем, что  $a$  – п. н. т., а  $b$  – о. н. т. Тогда условие 4 приобретает вид:

$$4^*: |\alpha'(a)| < 1, |\alpha'(b)| > 1.$$

Введем обозначения.

Для  $\forall c \in (a; b)$  положим  $I_n(c) = [\alpha_n(c); \alpha_{n-1}(c)]$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Пусть

$$G_n(t) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{g(\alpha_j(t))}{g(a)}, G_0(t) \equiv 1, G_\infty(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{g(\alpha_j(t))}{g(a)}, G_{-n}(t) = \prod_{j=1}^n \frac{g(b)}{g(\alpha_{-j}(t))}, n = \overline{1, \infty}. \quad (3)$$

Из любого утверждения, относящегося к о. н. т., автоматически выводится аналогичное утверждение для п. н. т., и наоборот. Другими словами, имеются пары двойственных утверждений, получаемых друг из друга перестановкой букв  $a$  и  $b$  и заменой неравенств с участием этих букв на противоположные.

### Основные результаты

Сформулируем результаты, относящиеся к вопросам существования, количества и свойств решений ЛФУ (1), определенного на кривой  $\Gamma = [a; b]$ . Большая часть сформулированных ниже теорем следует из результатов работ [19–21], доказанных в основном для кривых, не содержащих одну из конечных точек. В окрестности этой точки решение, как и функции  $g(t)$  и  $h(t)$ , может не иметь непрерывного продолжения. Рассмотрение уравнения (1) на кривой, содержащей оба конца, может принципиально изменить результаты.

Заметим, что если  $|g(b)| > 1$ , то ЛФУ (1) имеет континуум линейно независимых решений в классе  $C^{(a;b)}$  (следует из [20], теорема 2), или двойственное утверждение, если  $|g(a)| < 1$ , то ЛФУ (1) имеет континуум линейно независимых решений в классе  $C^{[a;b]}$  (следует из [21], теорема 1).

Если  $|g(a)| \geq 1$  (кроме случая  $g(a) = 1$ ), то уравнение (1) имеет единственное решение в классе  $C^{[a;b]}$  (следует из [19], теоремы 2 и 4). Двойственное утверждение имеет вид: если  $|g(b)| \leq 1$  (кроме случая  $g(b) = 1$ ), то уравнение (1) имеет единственное решение в классе  $C^{(a;b)}$ .

Переход к  $\Gamma = [a; b]$  от  $[a; b)$  или  $(a; b]$  существенно усложняет ситуацию, особенно с точки зрения свойств решений. В этом случае решений может не быть вообще (см. теорему 5 ниже). Приведем формулировки соответствующих теорем и двойственных к ним в тех случаях, когда эти двойственные теоремы имеются. Свойства решений, приведенные в этих теоремах, получены из теорем работ [19–21] как конъюнкции свойств решений в случаях рассмотрения этих уравнений на  $[a; b)$  и  $(a; b]$ .

Во всех теоремах предполагается  $h(b) = 0$ . Как было замечено выше, это ограничение не снижает общности сформулированных ниже теорем. Будем обозначать значком  $\exists!$  существование единственного решения уравнения (1) в указанном классе.

**Теорема 1.** Пусть  $h, g \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0$ ,  $t \in [a; b]$ . Пусть  $|g(a)| > 1$ ,  $|g(b)| > 1$ . Тогда  $\exists!$  решение (1) в  $C^{[a;b]}$ , определяемое формулами:

$$\psi(a) = \frac{h(a)}{1-g(a)}; \psi(b) = 0; \psi(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{(g(a))^{k+1} G_{k+1}(t)}, t \in (a;b). \quad (4)$$

Если  $\mu < \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|$ , то  $\psi \in H_{\mu}^{[a;b]}$ . Если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|$ , то  $\psi \in A_p^{[a;b]}$ .

Замечание 1. Значения  $\psi(a)$  и  $\psi(b)$  в (4) могут быть вычислены по последней формуле (4). Они выписаны явно для большей наглядности.

Замечание 2. Ограничения на  $\mu$  и  $p$  в заключении теоремы связаны с поведением решения в окрестности о. н. т.  $b$ . Если рассматривать уравнение (1) только на  $[a;b]$ , то верны более сильные утверждения:  $\psi \in H_{\mu}^{[a;b]}$ ; если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ , то  $\psi \in A_p^{[a;b]}$ .

**Теорема 1'** (двойственная к теореме 1). Пусть  $h, g \in H_{\mu}$ ,  $g(t) \neq 0, t \in [a;b]$ . Пусть  $|g(a)| < 1, |g(b)| < 1$ . Тогда  $\exists!$  решение (1) в  $C^{[a;b]}$ , определяемое формулами:

$$\psi(a) = \frac{h(a)}{1-g(a)}; \psi(b) = 0; \psi(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(\alpha_{-k}(t))(g(b))^{k-1}}{G_{-k+1}(t)}, t \in (a;b). \quad (5)$$

Если  $\mu < \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|$ , то  $\psi \in H_{\mu}^{[a;b]}$ . Если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|$ , то  $\psi \in A_p^{[a;b]}$ .

Перед доказательством теоремы 1 введем обозначения. Пусть  $c \in (a;b)$  – любая точка; обозначим через  $C_{c,g,h}$  класс функций  $f$ , определенных и непрерывных на  $I_0(c) = [\alpha(c); c]$  и удовлетворяющих условию:

$$f(\alpha(c)) - g(c)f(c) = h(c). \quad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Из теорем 2 и 4 работы [19] следует, что при условии  $|g(a)| > 1$  на  $[a;b]$   $\exists!$  решение  $\psi^*$ , и оно имеет вид (4). Пусть  $c \in (a;b)$  – любая точка. Тогда для  $\psi^*$ , как и для любого решения (1) на  $I_0(c) = [\alpha(c); c]$ , выполняется условие (6). Поэтому из доказательства теоремы 2 [20] следует, что  $\exists!$  решение  $\psi^{**}$  ЛФУ на  $(a;b]$ , сужение которого на  $I_0(c)$  совпадает с  $\psi^*$ . Тогда  $\psi^*$  и  $\psi^{**}$  совпадают на  $(a;b)$ . Поэтому функция

$$\psi = \begin{cases} \psi^*, & t \in [a;b), \\ \psi^{**}, & t \in (a;b] \end{cases}$$

является единственным непрерывным решением ЛФУ (1) на  $[a;b]$ . Принадлежность этого решения указанным в формулировке теоремы функциональным классам непосредственно следует из результатов работ [19, 20].

**Теорема 2.** Пусть  $h, g \in H_{\mu}$ ,  $g(t) \neq 0, t \in (a;b]$ . Пусть  $|g(a)| < 1, |g(b)| > 1$ . Тогда уравнение (1) имеет континуум линейно независимых решений в классе  $C^{[a;b]}$ , которые имеют вид:

$$\psi(a) = \frac{h(a)}{1-g(a)}; \psi(b) = 0;$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} g(\alpha_{j-n}(t))\psi_0(\alpha_{-n}(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} h(\alpha_{k-n}(t)) \prod_{j=k+1}^{n-1} g(\alpha_{j-n}(t)), & t \in I_n(c), \quad n = 2; 3; \dots \\ g(\alpha_{-1}(t))\psi_0(\alpha_{-1}(t)) + h(\alpha_{-1}(t)), & t \in I_1(c), \\ \psi_0(t), & t \in I_0(c), \\ \prod_{j=1}^{n-1} g^{-1}(\alpha_{j-n}(t))\psi_0(\alpha_n(t)) - \sum_{k=1}^n h(\alpha_{n-k}(t)) \prod_{j=k}^n g^{-1}(\alpha_{n-j}(t)), & t \in I_{-n}(c), \quad n = 1; 2; \dots \end{cases} \quad (7)$$

где функция  $\psi_0 \in C_{c,g,h}$  – произвольна.

Если  $\mu < \min\{\log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|; \log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|\}$ , и  $\psi_0 \in H_\mu$ , то  $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$ . Если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \min\{\log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|; \log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|\}$ ,  $\psi_0 \in A_{p_0}$ ,  $p_0 > 1$ , то  $\psi \in A_{p_1}^{[a;b]}$  для  $p_b = \min\{p; p_0; p_1; p_2\}$ ,  $p_1 = \left(1 - \log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|\right)^{-1}$ , если  $|g(a)| > |\alpha'(a)|$ , и  $p_2 = \left(1 - \log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|\right)^{-1}$ , если  $|g(b)| < |\alpha'(b)|$ , иначе  $p_1 = p_2 = +\infty$ .

Замечание 3. Условие (6) необходимо для того, чтобы в определении (7) функции  $\psi$  функция  $\psi_0 \in C_{c,g,h}$  имела непрерывное продолжение по формуле (7).

Замечание 4. У теоремы 2 двойственная теорема отсутствует.

**Теорема 3.** Пусть  $g, h \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0$  на  $[a; b]$ ,  $|g(a)| = 1, g(a) \neq 1, |g(b)| > 1$ . Тогда  $\exists!$  решение (1) в  $C^{[a;b]}$ , определяемое формулами:

$$\psi(b) = \frac{h(b)}{1-g(b)}, \quad \psi(t) = \frac{h(a)}{1-g(a)} - \frac{1}{1-g(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-g(a))h(\alpha_k(t)) - h(a)(1-g(\alpha_k(t))))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}, \quad t \in [a; b].$$

Если  $\mu < \log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$ , то  $\psi \in H_{\mu_1}^{[ab]}$ ,  $\mu_1 = \frac{\mu\theta}{1+\theta}$  (число  $\theta$  введено в пункте 3 определения функции сдвига  $\alpha$ ). Если  $g, h \in \tilde{A}_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$ , то  $\psi \in A_{p_1}^{[a;b]}$ ,  $p_1 = \frac{p(1+\theta)}{p+\theta}$ .

**Теорема 3'** (двойственная к теореме 3). Пусть  $g, h \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0$  на  $[a; b]$ ,  $|g(a)| < 1, |g(b)| = 1, g(b) \neq 1$ . Тогда  $\exists!$  решение (1) в  $C^{[a;b]}$ , определяемое формулами:

$$\psi(a) = \frac{h(a)}{1-g(a)}, \quad \psi(t) = \frac{h(a)}{1-g(a)} - \frac{1}{1-g(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-g(a))h(\alpha_k(t)) - h(a)(1-g(\alpha_k(t))))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}, \quad t \in [a; b].$$

Если  $\mu < \log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$ , то  $\psi \in H_{\mu_1}^{[ab]}$ ,  $\mu_1 = \frac{\mu\theta}{1+\theta}$  (число  $\theta$  введено в пункте 3 определения функции сдвига  $\alpha$ ). Если  $g, h \in \tilde{A}_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$ , то  $\psi \in A_{p_1}^{[a;b]}$ ,  $p_1 = \frac{p(1+\theta)}{p+\theta}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $h, g \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0, t \in [a; b]$ . Пусть  $g(b) = 1, |g(a)| > 1$ . Тогда уравнение (1) разрешимо в классе  $C^{[a;b]}$  тогда и только тогда, когда  $h(a) = 0$ . В этом случае общее решение является однопараметрическим семейством функций вида:

$$\psi(b) = 0; \quad \psi(t) = \frac{C}{G_\infty(t)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)}, \quad t \in [a; b].$$

Частное решение при  $\psi(a) = \psi_0$  имеет вид

$$\psi(t) = \frac{\psi_0}{G_\infty(t)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)}, \quad t \in [a; b].$$

Если  $\mu < \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|$ , то  $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$ . Если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|$ , то  $\psi \in A_p^{[a;b]}$ .

**Теорема 4'** (двойственная к теореме 4). Пусть  $h, g \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0, t \in [a; b]$ . Пусть  $g(b) = 1, |g(a)| > 1$ . Тогда уравнение (1) разрешимо в классе  $C^{[a;b]}$  тогда и только тогда, когда  $h(b) = 0$ . В этом случае общее решение является однопараметрическим семейством функций вида:

$$\psi(a) = 0; \quad \psi(t) = C \prod_{j=1}^{\infty} g(\alpha_{-j}(t)) + h(\alpha_{-1}(t)) - \sum_{j=2}^{\infty} h(\alpha_{-j}(t)) \prod_{k=1}^{j-1} g(\alpha_{-k}(t)), \quad t \in (a; b].$$

Частное решение при  $\psi(b) = \psi_0$  имеет вид

$$\psi(t) = \psi_0 \prod_{j=1}^{\infty} g(\alpha_{-j}(t)) + h(\alpha_{-1}(t)) - \sum_{j=2}^{\infty} h(\alpha_{-j}(t)) \prod_{k=1}^{j-1} g(\alpha_{-k}(t)), \quad t \in [a; b].$$

Если  $\mu < \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|$ , то  $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$ . Если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|$ , то  $\psi \in A_p^{[a;b]}$ .

**Теорема 5.** Пусть  $h, g \in H_\mu$ ,  $g(t) \neq 0, t \in [a; b]$ . Пусть  $|g(a)| \geq 1, |g(b)| \leq 1$ . Тогда для существования единственного решения уравнения (1) в классе  $C^{[a;b]}$  необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\forall t \in (a; b) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{(g(a))^{k+1} G_{k+1}(t)} = 0,$$

где функция  $G_k(t)$  определена в (3). При выполнении этого условия решение уравнения (1) единственно, причем  $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$ ; если  $g, h \in A_p^{[a;b]}$ ,  $p > 1$ , то  $\psi \in A_p^{[a;b]}$ .

Замечание 5. У теоремы 5 двойственная теорема отсутствует.

## Выводы

Множество непрерывных решений уравнения (1) зависит исключительно от значений  $|g(a)|$  и  $|g(b)|$  в сравнении с единицей и может быть пустым (теорема 5), иметь единственное решение (теоремы 1, 1', 3, 3'), иметь однопараметрическое семейство решений (теоремы 4 и 4') и иметь бесконечное множество линейно независимых решений (теорема 2). Сохраняется принадлежность решения классу  $H_\mu$  или классу  $A_p$ , которым принадлежат функции  $g(t)$  и  $h(t)$ , но в общем случае с другими параметрами.

## Литература

1. Чибрикова, Л.И. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами / Л.И. Чибрикова, Н.Б. Плещинский // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 6. – С. 91–104.
2. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в  $L_p$ ,  $p > 1$  / В.Л. Дильман, Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.

3. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media Dordrecht, 2012. – 378 p.
4. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media, 2012. – 288 p.
5. Карлович, Ю.И. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю.И. Карлович, В.Г. Кравченко, Г.С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.
6. Kuczma, M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality / M. Kuczma // Birkhäuser Basel, 2008. – 595 p.
7. Кравченко, В.Г. Об одном функциональном уравнении со сдвигом в пространстве непрерывных функций / В.Г. Кравченко // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 303–311.
8. Пелюх, Г.П. Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский. – Киев: Инст. мат. НАН, 2013.
9. Бродский, Я.С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – Киев: Вища школа, 1983. – 96 с.
10. Илолов, М. Об одном классе линейных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами / М. Илолов, Р. Авезов // Изв. Акад. наук Респ. Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2019. – Т. 177, № 4. – С. 7–12.
11. Антонец, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антонец. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 231 с.
12. Лихтарников, Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – СПб: Лань, 1997. – 156 с.
13. Чернявский, В.П. Однозначность решений при использовании линейного функционального уравнения в модели радиационной защиты / В.П. Чернявский // Глобальная ядерная безопасность. – 2019. – № 4 (33). – С. 18–26.
14. Forti, G.L. Alternative Cauchy Equation in Three Unknown Functions / G.L. Forti // Aequationes Mathematicae. – 2021. – Vol. 95, Iss. 6. – P. 1233–1242.
15. Reem, D. Remarks on the Cauchy Functional Equation and Variations of it / D. Reem // Aequationes Mathematicae. – 2017. – Vol. 91, Iss. 2. – P. 237–264.
16. Rätz, J. On the Functional Equation  $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$  / J. Rätz // Aequationes Mathematicae. – 2013. – Vol. 86, Iss. 1-2. – P. 187–200.
17. Balcerowski, M. On the Functional Equation  $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$  / M. Balcerowski // Aequationes Mathematicae. – 2008. – Vol. 75, Iss. 3. – P. 297–303.
18. Brzdęk, J. On a Generalization of the Cauchy Functional Equation / J. Brzdęk // Aequationes Mathematicae. – 1993. – Vol. 46, Iss. 1-2. – P. 56–75.
19. Дильман, В.Л. Линейные функциональные уравнения в гельдеровых классах функций на простой гладкой кривой / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 2. – С. 5–12.
20. Дильман, В.Л. Условия существования и единственности решений линейных функциональных уравнений в классах первообразных от лебеговских функций на простой гладкой кривой / В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 13–23.
21. Дильман, В.Л. Линейные функциональные уравнения в классах первообразных от лебеговских функций на отрезках кривых / В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова // Челябинский физико-математический журнал. – 2023. – Т. 13, вып. 4. – С. 5–17.

Поступила в редакцию 12 мая 2023 г.

### Сведения об авторах

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9197-3497>, e-mail: [dilmanvl@susu.ru](mailto:dilmanvl@susu.ru)

## PROPERTIES AND DESCRIPTION OF SOLUTION SETS OF LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS ON A SIMPLE SMOOTH CURVE

V.L. Dilman

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: dilmanvl@susu.ru

Abstract. The article investigates linear functional equations given in the field of complex numbers on simple smooth curves with a shift function of infinite order. The shift function has a nonzero derivative satisfying the Helder condition, and fixed points only at the ends of the curve. The paper gives a complete description of the sets of solutions of such equations in the classes of continuous, Helder, and primitive Lebesgue functions with a coefficient and the right side of the same classes, depending on the values of the coefficient of the equation at the ends of the curve. Sufficient conditions have been established for the solutions to belong to the specified functional classes.

Keywords: singular integral equations with shift; linear functional equations from one variable; Helder function classes; classes of primitives from Lebesgue functions.

## References

1. Chibrikova L.I., Pleshchinskiĭ N.B. Integral Equations with Generalized Logarithmic and Power Kernels. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1976, Vol. 20, no. 6, pp. 80–92.
2. Dil'man V.L., Chibrikova L.I. Solutions of an Integral Equation with Generalized Logarithmic Kernel in  $L_p$ ,  $p > 1$ . *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.
3. Litvinchuk G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2012, 378 p. DOI: 10.1007/978-94-011-4363-9
4. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Science+Business Media, 2012, 288 p. DOI: 10.1007/978-94-011-1180-5
5. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's Theory of Singular Integral Operators with Shift. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.
6. Kuczma M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Birkhäuser Basel, 2008, 595 p. DOI: 10.1007/978-3-7643-8749-5
7. Kravchenko V.G. On a Functional Equation with a Shift in the Space of Continuous Functions. *Mathematical Notes*, 1977, Vol. 22, Iss. 2, pp. 660–665. DOI: 10.1007/BF01780978
8. Pelyuh G.P., Sharkovskiy A.N. *Metod invariantov v teorii funktsional'nykh uravneniy* (Method of Invariants in the Functional Equations Theory). Kiyev: Inst. of Math. NAS, 2013. (in Russ.).
9. Brodskiy Ya.S., Slipenko A.K. *Funktsional'nye uravneniya* (Functional Equations). Kiev, Vishcha shkola, 1983, 96 p. (In Russ.).
10. Ilolov M., Avezov R. On a Class of Linear Functional Equations with Constant Coefficients. *Academy of Sciences of the Republic of Tadjikistan*, 2019, Vol. 177, no. 4, pp. 7–12. (in Russ.).
11. Antonevich A.B. *Lineynye funktsional'nye uravneniya: operatornyy podkhod* (Linear functional equations: an operator approach). Minsk, Izd-vo "Universitetskoe" Publ., 1988, 231 p. (in Russ.).
12. Likhtarnikov L.Ī. *Elementarnoe vvedenie v funktsional'nye uravneniya* (An Elementary Introduction to Functional Equations). Sankt-Peterburg, Lan' Publ., 1997, 156 p. (in Russ.).
13. Cherniavsky V.P. Unambiguity of Decisions when using Linear Functional Equation in the Radiation Protection Model. *Global nuclear security*, 2019, no. 4 (33), pp. 18–26. (in Russ.).
14. Forti G.L. Alternative Cauchy Equation in Three Unknown Functions. *Aequationes Mathematicae*, 2021, Vol. 95, Iss. 6, pp. 1233–1242. DOI: 10.1007/s00010-021-00795-w



15. Reem D. Remarks on the Cauchy Functional Equation and Variations of it. *Aequashines Mathematicae*, 2017, Vol. 91, Iss. 2, pp. 237–264. DOI: 10.1007/s00010-016-0463-6
16. Rätz J. On the Functional Equation  $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ . *Aequashines Mathematicae*, 2013, Vol. 86, Iss. 1-2, pp. 187–200. DOI: 10.1007/s00010-013-0188-8
17. On the Functional Equation  $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ . *Aequashines Mathematicae*, 2008, Vol. 75, Iss. 3, pp. 297–303. DOI: 10.1007/s00010-007-2905-7
18. Brzdęk J. On a Generalization of the Cauchy Functional Equation. *Aequashines Mathematicae*, 1993, Vol. 46, Iss. 1-2, pp. 56–75.
19. Dil'man V.L. Linear Functional Equations in the Hölder Class Functions on a Simple Smooth Curve. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2020, Vol. 12, no. 2, pp. 5–12. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph200201
20. Dil'man V.L., Komissarova D.A. Existence and Uniqueness Conditions for Solutions of Linear Functional Equations in the Classes of Antiderivatives from Lebesgue Function on a Simple Smooth Curve. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2021, Vol. 13, no. 4, pp. 13–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph210402
21. Dilman V.L., Komissarova D.A. Linear Functional Equations in the Class of Antiderivatives from the Lebesgue Functions on Curves Segments. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskii zhurnal*, 2023, Vol. 8, Iss. 1, pp. 5–17. (in Russ.). DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18101

*Received May 12, 2023*

#### Information about the author

Dilman Valeriy Leyzerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9197-3497>, e-mail: [dilmanvl@susu.ru](mailto:dilmanvl@susu.ru).

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ГОЛЬДШТИКА

**В.Н. Павленко<sup>1</sup>, Е.А. Деркунова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: derkunovaea@susu.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной по фазовой переменной нелинейностью, в правую часть которого включен малый параметр. Наряду с этим тот же параметр возникает в записи начальных условий. Это приводит к ситуации, когда исследуемая задача из классической переходит в разряд сингулярно возмущенных. Решить задачу в такой постановке, во-первых, представляется возможным, исходя из понятия точного решения, средствами теории уравнений с разрывными нелинейностями; во-вторых, как сингулярно возмущенную – методом построения асимптотики пограничного типа. Поскольку точное решение терпит разрыв в начальной точке, что в физическом смысле не оправданно, то производится аппроксимация уравнения с целью получить приближенное сглаженное решение. Для него требуется определенная сходимость к точному решению при стремлении малого параметра к нулю. Уравнение со сглаженной правой частью дает решение в квадратурах. Затем доказывается близость его асимптотики к точному решению. Из экспоненциальной близости асимптотики к приближенному решению следует для последнего требуемое поведение.

*Ключевые слова:* разрывные нелинейности; задача Гольдштика; сингулярные возмущения; асимптотическое разложение; пограничные функции.

*Восьмидесятилетию юбилею  
ЮУрГУ посвящается*

**1. Постановка задачи.** Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на числовой прямой  $R$  с разрывной по фазовой переменной нелинейностью и малым параметром  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \begin{cases} 0, & u \geq 0, \\ \frac{1}{\varepsilon^2}, & u < 0, \end{cases} \quad (1)$$

и двусторонним начальным условием при  $x_0 = 0$ :

$$\varepsilon \frac{du}{dx}(0-, \varepsilon) = -1, \quad (2)$$

$$\varepsilon^2 \frac{du}{dx}(0+, \varepsilon) = -k, \quad (3)$$

где  $k > 0$ .

Указанная задача ведет свое происхождение от классической задачи Гольдштика [1], если рассматривать ее в одномерном случае. Сингулярно возмущенные задачи с разрывными правыми частями решаются авторами работ [2–5].

**2. Построение решения.** Дадим определение решения задачи (1)–(3).

**Определение 1.** Решением задачи (1)–(3) будем называть функцию  $u(x, \varepsilon)$  непрерывную на  $R \times R_+$ , непрерывно дифференцируемую на  $(R \setminus \{0\}) \times R_+$  и удовлетворяющую (2)–(3) и уравнению (1) на  $R$  за исключением, быть может, конечного числа точек.

Решение задачи (1)–(3) находится в явном виде. Действительно, в силу условий (2)–(3), уравнения (1) и непрерывности решения  $u(x, \varepsilon)$  при  $x=0$  получим, что  $u(x, \varepsilon) = -\frac{x}{\varepsilon}$  при  $x \leq 0$

$u(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon^2} x(x - x_1)$  при  $x \in (0, x_1)$ , где  $x_1 > 0$  определяется из условия (3):

$-\frac{k}{\varepsilon^2} = \frac{du}{dx}(0+, \varepsilon) = -\frac{1}{2\varepsilon^2} x_1$ , то есть  $x_1 = 2k$ . Наконец, при  $x \geq 2k$   $u(x, \varepsilon) = C_1 + C_2 x$ . Постоянные

$C_1, C_2$  находятся из следующих уравнений:  $C_1 + C_2 x_1 = 0$  (непрерывность решения),

$C_2 = \frac{du}{dx}(x_1-, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2} x_1 = \frac{k}{\varepsilon^2}$ . Таким образом, задача (1)–(3) имеет единственное решение:

$$u(x, \varepsilon) = \begin{cases} -x/\varepsilon, & x \leq 0, \\ x(x - 2k)/2\varepsilon^2, & 0 < x < 2k, \\ k(x - 2k)/\varepsilon^2, & x \geq 2k. \end{cases}$$

Полученное решение удовлетворяет уравнению:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } x \geq 2k, \\ 1, & x \in (0, 2k) \end{cases} \quad (4)$$

и начальным условиям (2)–(3).

**Замечание 1.** Уравнение (4) с механической точки зрения можно трактовать как уравнение прямолинейного движения материальной точки малой массы  $\varepsilon^2$  под действием разрывной силы, принимающей кусочно-постоянные значения, причем такие, что материальная точка до и после нахождения в поле с отличной от нуля силой движется свободно равномерно. При этом сначала на границе между областью равномерного и равноускоренного движений точкой приобретает дополнительный импульс величины  $k - \varepsilon$  и, соответственно, в момент  $x_0 = 0$  происходит разрыв ее скорости движения. Затем постоянное поле «выталкивает» точку, и далее ее движение свободное, так что решение (4) в момент  $x_1$  выхода из средней области претерпевает разрыв второй производной, однако гладкое.

Нашей исходной задачей являлось построение закона движения точки, то есть нахождение решения уравнения (1) с начальными условиями (2)–(3), и определение момента выхода  $x_1 = 2k$ , после чего задача стала эквивалентной (4), (2)–(3).

### 3. Исследуемая задача как сингулярно возмущенная

Во-первых, заметим, что вырожденное уравнение, получаемое из (4), если положить параметр  $\varepsilon = 0$ , будет иметь вид:

$$0 = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } x \geq 2k, \\ 1, & x \in (0, 2k), \end{cases}$$

что не выполняется в области  $0 < x < 2k$ . Отметим это обстоятельство как особенность рассматриваемой задачи в отличие от классических сингулярно возмущенных задач, где решение вырожденного уравнения единственно [6] или нет [7], как правило, существует. Итак, регулярной части асимптотики решения не существует, но от решения можно ожидать пограничный характер поведения его асимптотики в том случае, если будет допускаться введение пограничной переменной. Действительно, такая переменная может быть введена по формуле:  $\xi = x/\varepsilon$ . Тогда уравнение (4) и граничные условия (2)–(3) приобретут следующий вид (для искомого решения оставим прежнее обозначение):

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \text{ или } \xi \geq 2k/\varepsilon, \\ 1, & \xi \in (0, 2k/\varepsilon). \end{cases}$$

$$\frac{du}{d\xi}(0-, \varepsilon) = -1,$$

$$\varepsilon \frac{du}{d\xi}(0+, \varepsilon) = -k, \quad k > 0.$$

Решение последней задачи запишется так:

$$u(\xi) = \begin{cases} -\xi, & \xi \leq 0, \\ \xi^2/2 - k\xi/\varepsilon, & 0 < \xi < 2k/\varepsilon, \\ k\xi/\varepsilon - 2k^2/\varepsilon^2, & \xi \geq 2k/\varepsilon. \end{cases}$$

**Замечание 2.** Итак, получено точное решение задачи, терпящее разрыв производной в момент перехода  $x_0 = 0$ . Однако так не происходит физически. Действительно, материальная точка пусть и малой массы, каковой является исследуемая нами, не может изменить импульс мгновенно, а следовательно, требуются некоторые иные соображения, позволяющие построить сглаженную модель, соответствующую ускоренному движению точки в окрестности точки перехода. Ниже предлагается произвести аппроксимацию правой части уравнения (2), и таким путем перейти к требуемой ситуации с гладкостью решения.

Теперь построим такое решение.

#### 4. Построение приближенного решения

Рассмотрим следующее уравнение для нахождения функции  $U(x, \varepsilon)$ :

$$\varepsilon^2 U_{xx} = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon T_x(x, \varepsilon) + \varepsilon^2 R_{xx}(x, \varepsilon), \quad x < 2k, \quad (5)$$

где правая часть уравнения (4) заменена на сглаженную, в которой слагаемое  $\frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{x}{\varepsilon} \right)$  призвано вывести значения второй производной при  $x < 0$  на режим, равный 0, и при  $x > 0$  на значение, равное 1, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В правую часть (5) включено также регуляризирующее слагаемое  $\varepsilon T_x(x, \varepsilon)$ , чтобы функция  $\varepsilon U_x(x, \varepsilon)$  равнялась  $-1$  для случая  $x < 0$ , а  $\varepsilon U_x(x, \varepsilon)$  принимала значение  $(x-k)/\varepsilon$  при  $0 < x \leq 2k$ , когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Положим функцию  $T(x, \varepsilon) = \frac{-k/\varepsilon - 1}{2} + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\varepsilon}$ . Кроме того, (5) содержит регуляризирующий член  $\varepsilon^2 R_{xx}(x, \varepsilon)$  для той цели, чтобы устранить невязку при выборе подходящих постоянных в приближенном решении. Возьмем функцию  $R(x, \varepsilon) = -\frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \frac{x}{\varepsilon}$ .

**Определение 2.** Под приближенным решением задачи (4), (2)–(3) на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $(0; 2k]$  будем понимать функцию  $U(x, \varepsilon) \in C^2((-\infty; 2k] \times R_+)$ , удовлетворяющую уравнению (5) и сходящуюся равномерно при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к решению задачи (4), (2)–(3).

Если ввести растянутую переменную  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ , то уравнение (5) приобретет вид (оставим прежнее обозначение для искомого решения):

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{th} \xi) + \tilde{T}_\xi(\xi, \varepsilon) + \tilde{R}_{\xi\xi}(\xi). \quad (6)$$

причем функции  $\tilde{T}(\xi, \varepsilon) = \frac{-k/\varepsilon - 1}{2} + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \operatorname{th} \xi$ ,  $\tilde{R}(\xi) = -\frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi$ .

Проинтегрировав (6), получим производную общего решения сглаженного уравнения:

$$U_\xi = \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch} \xi) + \tilde{T}(\xi, \varepsilon) + \tilde{R}_\xi(\xi) + C_1(\varepsilon).$$

Имеем:

$$U_\xi = \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch} \xi) + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2} + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \operatorname{th} \xi + \tilde{R}_\xi(\xi) + C_1(\varepsilon). \quad (7)$$

Интегрируя последнее равенство, получаем:

$$U(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{2} \int_0^\xi \ln(\operatorname{ch} s) ds + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2}\xi + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln(\operatorname{ch} \xi) - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi + C_1(\varepsilon)\xi + C_2(\varepsilon). \quad (8)$$

**Замечание 3.** Тем самым, решение уравнения (6) (а значит, и уравнения (5)) найдено через квадратуры. Его главное достоинство состоит в том, что оно дважды непрерывно дифференцируемое. Осталось выбрать неизвестные пока постоянные  $C_1, C_2$ . Но остается вопрос: каким образом это новое решение соотносится с точным? Потребуем от него согласования с решением при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

**Теорема.** Решение уравнения (6), задаваемое формулой (8), при условии, что постоянные  $C_1(\varepsilon)$  и  $C_2(\varepsilon)$  определяются следующими равенствами:

$$C_1(\varepsilon) = \frac{\ln 2}{2}, \quad C_2(\varepsilon) = \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln 2, \quad (9)$$

является приближенным решением задачи (4), (2)–(3) в смысле Определения 2.

Для доказательства сформулированной теоремы проанализируем поведение функции из формулы (8) при условии (9), получив ее асимптотическое разложение.

**Определение 3.** Под асимптотическим разложением решения уравнения (6) на  $(R \setminus \{0\}) \times R_+$  будем понимать функцию  $\tilde{U}(\xi, \varepsilon) \in C^2((R \setminus \{0\}) \times R_+)$ , сходящуюся равномерно к решению уравнения (6) при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

**Доказательство.** Найдем асимптотическое выражение для полученной функции  $U(\xi, \varepsilon)$ , исходя из ее представления (8). Найдем асимптотику при  $\xi \rightarrow -\infty$ , имеем:

$$\begin{aligned} U(\xi, \varepsilon) &= \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{2} \int_0^\xi \ln \frac{1}{2} e^{-s} (1 + e^{2s}) ds + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2}\xi + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln \frac{1}{2} e^{-\xi} (1 + e^{2\xi}) - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi + C_1\xi + C_2 = \\ &= \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{\ln 2}{2}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{2} \int_0^\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2ns}}{n} ds + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2}\xi - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln 2 - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\xi + \\ &\quad + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n} - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi + C_1\xi + C_2 = \\ &= -\frac{\ln 2}{2}\xi + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln 2 - \xi + \\ &\quad + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n} - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi + C_1\xi + C_2. \end{aligned}$$

Ряд из третьего слагаемого имеет, как известно, значение  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ , а следовательно, совместно с седьмым членом оно стремится к нулю. Построим функцию:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\xi, \varepsilon) &= -\xi + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n^2} + \\ &\quad + \left( C_1 - \frac{\ln 2}{2} \right) \xi + \left( C_2 - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln 2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Докажем, что указанная функция является асимптотическим разложением при  $\xi \rightarrow -\infty$  решения уравнения (6). Поскольку ряды из второго, четвертого и пятого слагаемых имеют экспоненциальные оценки вида:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n^2} \right| \leq A e^{-\alpha|\xi|}, \quad \left| \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{2n\xi}}{n} \right| \leq A e^{-\alpha|\xi|}, \quad \left| \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \xi \right| \leq A e^{-\alpha|\xi|},$$

где  $A$  и  $\alpha$  – положительные подходящие константы, то при  $\xi \rightarrow -\infty$  модуль разности

$$|\tilde{U}(\xi, \varepsilon) - U(\xi, \varepsilon)| \leq B e^{-\beta|\xi|}, \quad (11)$$

если взять подходящие  $B > 0$  и  $\beta > 0$ , а это означает, что построенная выше функция  $\tilde{U}(\xi, \varepsilon)$  является асимптотическим разложением решения уравнения (6). В силу (11) построенная асимптотика имеет погранслоный характер.

Кроме того, как следует из (10), если выбрать постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , как в (9), нетрудно видеть, что справедливо равномерное соотношение:

$$|\tilde{U}(\xi, \varepsilon) + \xi| \leq 3Ae^{-\alpha|\xi|} \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, \tag{12}$$

где  $A$  и  $\alpha$  были определены ранее.

Объединяя оценки (11) и (12), приходим к выводу, что решение (8) после замены  $\xi = x/\varepsilon$  равномерно сходится к точному решению задачи (4), (2)–(3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в области, где  $x \in (-\infty; 0)$ , и, следовательно, является приближенным согласно Определению 2.

Получим асимптотику при  $\xi \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} U(\xi, \varepsilon) &= \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{2}\int_0^\xi \ln \frac{1}{2} e^s (1 + e^{-2s}) ds + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2}\xi + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\ln \frac{1}{2} e^\xi (1 + e^{-2\xi}) - \frac{\pi^2}{48} \text{th } \xi + C_1\xi + C_2 = \\ &= \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{\ln 2}{2}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{2}\int_0^\xi \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2ns}}{n} ds + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2}\xi - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\ln 2 + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\xi + \\ &\quad + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n} - \frac{\pi^2}{48} \text{th } \xi + C_1\xi + C_2 = \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{\ln 2}{2}\xi - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\ln 2 - \frac{k}{\varepsilon}\xi + \\ &\quad + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n} - \frac{\pi^2}{48} \text{th } \xi + C_1\xi + C_2. \end{aligned}$$

Имеем функцию:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\xi, \varepsilon) &= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{k}{\varepsilon}\xi + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \frac{\pi^2}{48} \text{th } \xi + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n^2} + \\ &\quad + \left(C_1 - \frac{\ln 2}{2}\right)\xi + \left(C_2 - \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\ln 2\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку ряды из третьего, пятого и шестого слагаемых имеют экспоненциальные оценки вида:

$$\left| \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n^2} \right| \leq Ae^{-\alpha\xi}, \quad \left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} e^{-2n\xi}}{n} \right| \leq Ae^{-\alpha\xi}, \quad \left| \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \frac{\pi^2}{48} \text{th } \xi \right| \leq Ae^{-\alpha\xi},$$

где  $A$  и  $\alpha$  – положительные подходящие константы, то при  $\xi \rightarrow +\infty$  справедливо

$$|\tilde{U}(\xi, \varepsilon) - U(\xi, \varepsilon)| \leq Be^{-\beta\xi}, \tag{14}$$

если взять подходящие  $B > 0$  и  $\beta > 0$ , а это означает, что функция  $\tilde{U}(\xi, \varepsilon)$  из (13) является асимптотикой решения уравнения (6) погранслоного типа.

Затем, выбирая постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из (9), при  $\xi \rightarrow +\infty$  получаем:

$$\left| \tilde{U}(\xi, \varepsilon) - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{k}{\varepsilon}\xi \right| \leq 3Ae^{-\alpha\xi}, \tag{15}$$

где  $A$  и  $\alpha$  были определены ранее.

Принимая во внимание оценки (14) и (15), приходим к заключению о том, что решение (8) после замены переменной  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  равномерно сходится к точному решению задачи (4), (2)–(3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в области, где  $x \in (0; 2k]$ , и, следовательно, является приближенным согласно Определению 2.

Заметим, что формула (8) приобретет вид:

$$U(\xi, \varepsilon) = \frac{x^2}{4\varepsilon^2} + \frac{-k/\varepsilon + \ln 2 - 1}{2\varepsilon} x + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{x/\varepsilon} \ln(\operatorname{ch} s) ds + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2} \ln\left(\operatorname{ch} \frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{\pi^2}{48} \operatorname{th} \frac{x}{\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

### Литература

1. Goldshtik, M. Inviscid Separation in Steady Planar Flows / M. Goldshtik, F. Hussain // Fluid Dynamics Research. – 1998. – Vol. 23. – P. 235–266.
2. The Solution with Internal Transition Layer of the Reaction-Diffusion Equation in Case of Discontinuous Reactive and Diffusive Terms / N.T. Levashova, N.N. Nefedov, O.A. Nikolaeva *et al.* // Math Meth Appl Sci. – 2018. – Vol. 41, Iss. 18. – P. 9203–9217.
3. Нефедов, Н.Н. Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция–диффузия с разрывным реактивным слагаемым / Н.Н. Нефедов, Н.Т. Левашова, А.О. Орлов // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. Теоретическая и математическая физика. – 2018. – № 6. – С. 3–10.
4. Нефедов, Н.Н. О периодическом внутреннем слое в задаче реакция–диффузия с источником модульно-кубического типа / Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов // ЖВММФ. – 2020. – Т. 60, № 9. – С. 1513–1532.
5. Левашова, Н.Т. Асимптотически устойчивые стационарные решения реакция–диффузия–адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми / Н.Т. Левашова, Н.Н. Нефедов, О.А. Николаева // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 615–631.
6. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.
7. Васильева, А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 106 с.

Поступила в редакцию 22 октября 2023 г.

### Сведения об авторах

Павленко Вячеслав Николаевич – профессор, доктор физико-математических наук, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: pavlenkovp@yandex.ru.

Деркунова Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: derkunovaea@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 14–20

DOI: 10.14529/mmp230402

## THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF A ONE-DIMENSIONAL SINGULARLY PERTURBED GOLDSHTIK PROBLEM

V.N. Pavlenko<sup>1</sup>, E.A. Derkunova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: derkunovaea@susu.ru

Abstract. The Cauchy problem is considered for an ordinary differential equation with discontinuous phase-variable nonlinearity, in the right part of which a small parameter is included. The same parameter occurs in the initial conditions, leading to the problem going from classical to singularly perturbed. It seems possible to solve the problem in such a formulation, firstly based on the concept of an exact solution, by means of the theory of equations with discontinuous nonlinearities; and secondly, being singularly perturbed, by the method of constructing asymptotics of the boundary layer type. Since the exact solution suffers a discontinuity at the starting point, which is not justified in the physical sense,

the equation is approximated in order to obtain an approximate smoothed solution. It requires a convergence to the exact solution when the small parameter tends to zero. An equation with a smoothed right-hand side gives a solution in quadratures. Then the proximity of its asymptotic to the exact solution is proved. From the exponential proximity of the asymptotic to the approximate solution, the required behavior follows for the latter.

*Keywords: discontinuous nonlinearities; Goldshtick problem; singular perturbations; asymptotic decomposition; boundary functions.*

### References

1. Goldshtik M., Hussain F. Inviscid Separation in Steady Planar Flows. *Fluid Dynamics Research*, 1998, Vol. 23, pp. 235–266. DOI: 10.1016/S0169-5983(98)00017-3
2. Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A. The Solution with Internal Transition Layer of the Reaction-Diffusion Equation in Case of Discontinuous Reactive and Diffusive Terms. *Math Meth Appl Sci.*, 2018, Vol. 41, Iss. 18, pp. 9203–9217. DOI: 10.1002/mma.5134
3. Nefedov N.N., Levashova N.T., Orlov A.O. The Asymptotic Stability of a Stationary Solution with an Internal Transition Layer to a Reaction–Diffusion Problem with a Discontinuous Reactive Term. *Moscow University Physics Bulletin*, 2018, Vol. 73, no. 6, pp. 565–572.
4. Nefedov N.N., Nikulin E. I., Orlov A.O. On a Periodic Inner Layer in the Reaction–Diffusion Problem with a Modular Cubic Source. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, Vol. 60, Iss. 9, pp. 1461–1479. DOI: 10.1134/S0965542520090134
5. Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A. Asymptotically Stable Stationary Solutions of the Reaction–Diffusion–Advection Equation with Discontinuous Reaction and Advection Terms. *Differential Equations*, 2020, Vol. 56, no. 5, pp. 605–620. DOI: 10.1134/S0012266120050067
6. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* (Asymptotic Methods in Theory of Singular Perturbation). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1990, 207 p. (in Russ.).
7. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Singulyarno vozmushchennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* (Singularly Perturbed Equations in Critical Cases). Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1978, 106 p. (in Russ.).

*Received October 22, 2023*

### Information about the authors

Pavlenko Vyacheslav Nikolaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: pavlenko-vn@yandex.ru.

Derkunova Elena Anatol'evna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: derkunovaea@susu.ru.



## ФИЛЬТРАЦИЯ RAW-ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ

**В.А. Сурин, М.А. Ческидова**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*

*E-mail: surinva@susu.ru, cheskidovama@susu.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются необработанные RAW-изображения, получаемые с фотоматрицы. Цель работы – адаптировать фильтр на основе обобщенного метода наименьших модулей (ОМНМ) для фильтрации RAW-изображений с цифровых камер.

Цифровые изображения, получаемые при оцифровке аналогового сигнала цифровой фотоматрицей, помимо полезного сигнала имеют шумовую составляющую. Кроме того, структура изображения, полученная напрямую с цифровой матрицы, сильно отличается от привычного RGB-изображения. Для получения RGB-изображения необходимо применить интерполяционный алгоритм, называемый демозаикой, которая вносит дополнительные искажения. Предлагается производить фильтрацию полученного изображения до применения алгоритма демозаики.

RAW-изображения используют большее количество бит для описания яркости каждого пикселя, чем стандартные RGB-изображения, и имеют другую структуру. Для работы с такими изображениями требуется адаптация существующих цифровых фильтров. Для ОМНМ-фильтрации подобраны коэффициенты для параметров функции сглаживающего преобразования. Показаны преимущества фильтрации RAW-изображений, по сравнению со стандартными RGB-изображениями, а также сравнение ОМНМ с усредняющей и медианной фильтрацией. На основе полученных зависимостей решена практическая задача по повышению контрастности изображений стеклянных изоляторов на основе их RAW-снимков для последующего обнаружения дефектов в изоляторах.

*Ключевые слова:* ОМНМ; обобщенный метод наименьших модулей; RAW-изображения; фильтрация изображений; подавление шума; обнаружение дефектов в стеклянных изоляторах.

*Восьмидесятилетию юбилею  
ЮУрГУ посвящается*

### Введение

Важную роль в обработке и анализе цифровых изображений имеет задача повышения качества цифровых изображений. Существует большое количество алгоритмов, направленных на решение этой задачи [1]. При формировании цифрового изображения исходное аналоговое изображение сопровождается различными преобразованиями. Это и формирование пучка света оптикой, и фиксация фотонов света светочувствительной матрицей, и т.д. Основными факторами, оказывающими влияние на конечный результат, являются качество оптики, формирующее резкое изображение на светочувствительной матрице, и зашумление итогового изображения в процессе съемки. В таком случае основной задачей обработки изображения становится шумоподавление и восстановление контрастных границ объектов в изображении [2].

В ЭВМ изображения представляют собой матрицу чисел, кодирующую яркость и цвет, чаще всего в цветовой модели RGB [3]. Методы, разрабатываемые для борьбы с шумом, применяются, как правило, для фильтрации изображений в градациях серого или полноцветных RGB-изображений. Сигнал же, поступающий с цифровых матриц, имеет другую структуру и отличается от форматов хранения изображений в ЭВМ. Изображения, формирующиеся на цифровой фотоматрице, называют «сырыми» или RAW-изображениями. Цифровые фотоматрицы фиксируют только интенсивность света, то есть яркость, а цвет зависит от цветового фильтра, стоящего перед каждым светочувствительным элементом матрицы.

Большая часть производимых фотоматриц имеет байеровскую схему расположения цветных фильтров, другие типы схем встречаются реже. В результате получается мозаика из пикселей трех цветов, которые распознает человеческий глаз [4] (рис. 1)

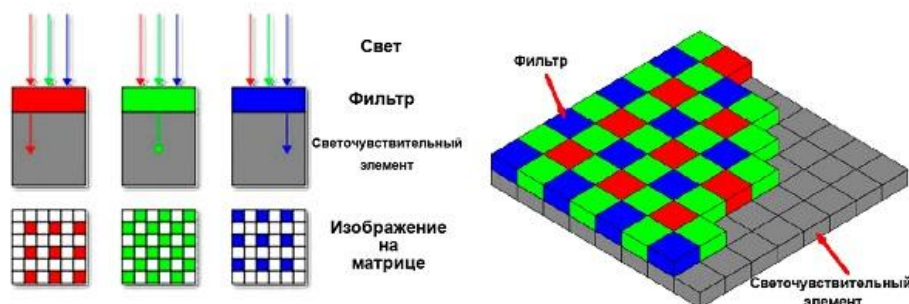


Рис. 1. Порядок расположения цветных фильтров

Пиксели в RAW-изображении кодируются одним числом. Количество бит, отведенное для кодирования числа, зависит от фотоматрицы и называется глубиной цвета. Глубина цвета RAW-изображений колеблется в пределах от 10 до 16 бит в отличие от стандартных изображений в RGB формате, где каждый цвет кодируется 8 битами. Это дает больше информации о изображении. Преобразование из RAW-изображений в привычное для нас изображение осуществляется различными алгоритмами демозаики, однако они же вносят дополнительные искажения в структуру шума в изображении [5], усложняя структуру шума и меняя плотность распределения.

Изначально источником шума является сам свет. Фотоны в пучке света распределены в соответствии со статистикой Пуассона [6], из чего следует, что в каждом отдельном цветовом канале можно ожидать гауссово распределение шума. После регистрации фотонов на светочувствительных элементах фотоматрицы и усиления полученного сигнала могут быть внесены и другие помехи, но распределение шума в сформированном RAW-изображении не должно нарушаться. Следующий этап – перевод RAW-изображения в стандартное цветное изображение с использованием алгоритма демозаики, который сильно влияет на распределение шума в изображении. В результирующем изображении гауссовость распределения шума не подтверждается [7].

Обычно применяются методы подавления шума к изображениям, уже прошедшим алгоритм демозаики. В данном случае предлагается проводить процедуру подавления шума в изображении до прохождения процедуры демозаики, то есть непосредственно в RAW-изображении, и только после переводить его в стандартное цветное RGB-изображение. Поскольку в исходном RAW-изображении пиксели кодируют только один цвет, стандартный подход к подавлению шумовой составляющей для таких изображений не применим. Необходимо разложить изображение на четыре отдельные матрицы, каждая из которых будет отвечать за свой цвет, после чего проводить фильтрацию каждой из них отдельно.

Предложено использовать фильтр на основе обобщенного метода наименьших модулей (ОМНМ) [8]:

$$\hat{y}_{ij} = \arg \min_a \sum_{(l,k) \in U_{ij}} \rho_{\text{ОМНМ}}(|y_{lk} - a|), \quad i = [1:n], j = [1:m], \quad (1)$$

где  $\hat{y}_{ij}$  – сглаженные с помощью ОМНМ-фильтра значения яркостей пикселей изображения размером  $n$  на  $m$  пикселей;  $U_{ij}$  – некоторая окрестность сглаживаемой точки  $y_{ij}$ ;  $l$  и  $k$  – координаты пикселя в области  $U_{ij}$ ;  $y_{lk}$  – фактические значения яркости пикселя;  $a$  – искомый сигнал.

ОМНМ-фильтр является эффективным инструментом для фильтрации цифровых контрастных изображений [9]. В качестве функции сглаживающего преобразования используется арктангенс

$$\rho_{\text{ОМНМ}}(x) = \arctg \left( \frac{|x|^\alpha}{\beta} \right), \quad (2)$$

где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  – параметры, подбираемые на основе характеристик изображения и перепада, таких как:  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение (уровень) шума в выбранной области

изображения;  $A$  – нижняя граница уровня яркости перепада;  $B$  – верхняя граница уровня яркости перепада;  $h = B - A$  – разница между верхней и нижней границами яркости перепада, т. е. степени контрастности перепада (рис. 2, а).

Использование указанных параметров в функции потерь позволяет настраивать кривизну функции сглаживающего преобразования, и функция может иметь участки выпуклости и вогнутости (рис. 2, б), что позволит более точно настраивать фильтр на каждом локальном участке обрабатываемого изображения.

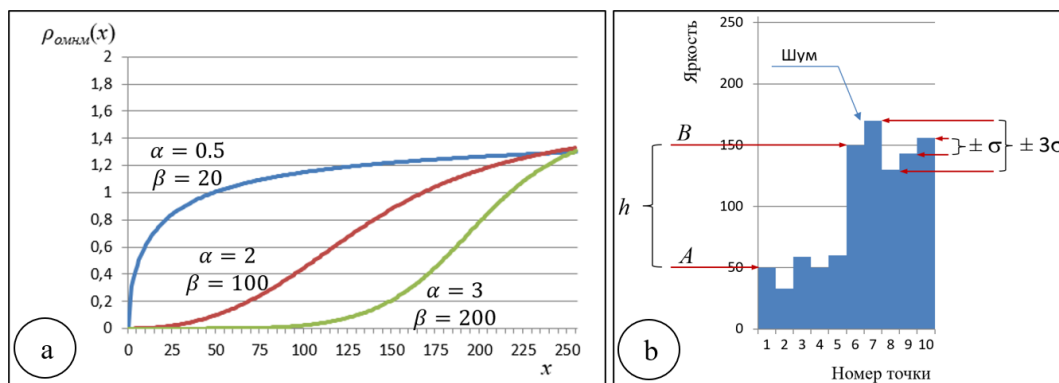


Рис. 2. а) график функции (2) с различными значениями параметров  $\alpha$  и  $\beta$ ;  
б) контрастный перепад с указанием переменных, используемых при поиске параметров функции потерь (2)

Правильность выбора параметров  $\alpha = \alpha(\sigma, h, A)$  и  $\beta = \beta(\sigma, h, A)$  будет напрямую влиять на эффективность сглаживания. В [10] был представлен алгоритм, позволивший подобрать функции для параметров к функции потерь (1) и для других функций. На основе данного алгоритма были найдены функции для коэффициентов и для 14-битных RAW-изображений с цифровой камеры Canon 80D. Найденные функции полностью актуальны для конкретной модели цифровой камеры, но стоит учитывать, что в рамках других серий камер того же производителя или других производителей коэффициенты функций могут отличаться ввиду использования производителями различных технологий производства цифровых фотоматриц. Основным отличием стала большая глубина цвета, область допустимых значений для каждого цвета в данном случае будет ограничена значением от 0 (минимальная яркость) до 16 383 (максимальная яркость). Вследствие этого уровень шума  $\sigma$  будет существенно отличаться от стандартного RGB-изображения и возрастет пропорционально максимальной яркости, то есть уровень шума для 14-битного RAW-изображения возрастет в  $2^{14-8} = 64$  раза в сравнении с 8-битным изображением. Для вариантов RAW-изображений с глубиной цвета 12 и 16 бит уровень шума будет увеличиваться соответствующим образом.

Поскольку фильтрация будет проходить над RAW-изображением, где распределение шума не было искажено алгоритмом демозаики и предполагается, что распределение шума будет больше похоже на гауссово, то предполагается высокая эффективность фильтров, хорошо работающих с гауссовым распределением, таких как усредняющий и медианный фильтры [1].

Оценкой эффективности фильтрации будет служить модуль разности яркостей пикселей между идеальным изображением и сглаженным – среднее линейное отклонение. Оценка рассчитывается следующим образом [10]:

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - f_i|, \quad (3)$$

где  $f_i$  – идеальные (без шума) значения яркостей пикселей изображений,  $\hat{y}_i$  – значение яркости пикселей после фильтрации,  $n$  – число пикселей в изображении. Меньшее значение среднего линейного отклонения  $d$  будет указывать на более высокую эффективность сглаживания шумовой составляющей.

В результате фильтрации RAW-изображения ОМНМ-фильтром, конвертации в стандартное RGB-изображение и устранения цветовой составляющей шума [8] удалось достичь результат лучше, чем при фильтрации этого же изображения, преобразованного сразу в стандартное RGB-изображение. Оценка  $d$  на 9 % ниже в случае обработки RAW-изображения. Применение усред-

няющего фильтра для RAW-изображения не имеет смысла, так как результат оказался хуже, чем при фильтрации RGB-изображения. Медианный фильтр, как и ОМНМ-фильтр, дал положительный результат, и его оценка уменьшилась на 6 %. Однако преимущество ОМНМ-фильтра над медианным фильтром сохранилось и составило порядка 10,5 % по среднему линейному отклонению  $d$ . ОМНМ-фильтрация при обработке RAW-изображений сохраняет границу контраста лучше усредняющего и медианного фильтров, как и при фильтрации RGB-изображений [7].

### Фильтрация RAW-изображения

RAW-изображение имеет глубину цвета, как правило, 14 бит, при этом каждый пиксел в нем может кодировать только один цвет. Обработать пиксели разного цвета вместе неверно, поэтому исходное изображение разбивается на отдельные изображения, соответствующие разным цветам. В итоге получается одно изображение, составленное из пикселей красного цвета, одно – из пикселей синего цвета, два – из пикселей зеленого цвета (рис. 3). Каждое такое изображение будет иметь разрешение в 4 раза ниже исходного, пиксели в котором будут кодироваться числом от 0 до 16 383.

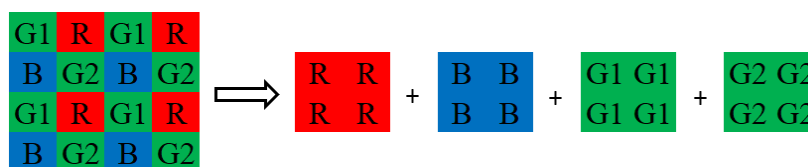


Рис. 3. Разбивка RAW-изображения на каналы

На вход фильтра подаются все полученные изображения, каждое из которых фильтруется отдельно. После фильтрации производится обратное преобразование, и пиксели из разделенных изображений становятся на свои места в объединённом изображении. Далее применяется алгоритм демозаики, на выходе которого получается стандартное RGB-изображение, где каждый пиксел закодирован набором из трех чисел от 0 до 255.

Сглаживание каждого разделённого изображения не будет отличаться от сглаживания изображения в градациях серого, за исключением глубины цвета в 14 бит на пиксель. Поэтому усредняющая и медианная фильтрация могут быть применены без модификации [1]. Использование весовых коэффициентов для усредняющего и медианного фильтра [4, 11] в данном случае положительного эффекта не имеет.

Для применения ОМНМ-фильтрации требовалось провести подбор функций для параметров  $\alpha$  и  $\beta$  из функции потерь (2). Использовался алгоритм подбора параметров, описанный в [10], но с учетом максимальной допустимой яркости для 14-битной глубины цвета. В итоге не потребовалась кардинальная модификация функций подбора параметров, найденных в [10]. Необходимо ввести умножающий коэффициент  $k = 64$  для функции  $\beta$  (для 12- и 16-битной глубины цвета  $k = 16$  и  $k = 256$  соответственно):

$$\alpha = \begin{cases} 0,7, & A = 0, \\ 0,7 \cdot \left( \frac{3\sigma - A}{3\sigma} \right) + 1,6 \cdot \left( 1 - \frac{3\sigma - A}{3\sigma} \right), & 0 < A \leq 3\sigma, \\ 1,6, & A > 3\sigma, \end{cases} \quad \beta = 10 \cdot k + \frac{\sigma \cdot h}{100 \cdot k}. \quad (4)$$

Тремя wybranными фильтрами было проведено подавление шума в RAW-изображении, снятое на камеру Canon 80D при высоком значении светочувствительности ISO. На рис. 4 представлена часть этого изображения.

Производилась фильтрация как RAW-изображения, так и конвертированного в RGB-изображения с глубиной цвета 8 бит на канал. RGB-изображение переводилось в цветовую модель Lab [3] перед фильтрацией, так как обработка указанными фильтрами проводилась только в канале яркости и подавлялась яркостная составляющая шума. Цветовая составляющая шума подавлялась путем фильтрации цветовых каналов билатеральным фильтром. Оценка эффективности фильтрации вычислялась по формуле (3), при этом за эталон взято RGB-изображение, снятое при минимальном значении светочувствительности 100. Результаты для всех фильтров представлены в табл. 1. Результат сглаживания нескольких участков в приближении представлен на рис. 5.



Усредняющий фильтр при обработке RAW-изображения не показал улучшения в сравнении с обработкой RGB-изображения. Медианный фильтр показал лучший результат при таком сценарии, среднее линейное отклонение уменьшилось примерно на 6 %, что можно считать хорошим результатом. OMHM-фильтр показал наибольшее улучшение, его эффективность при обработке RAW-изображения увеличилась на 9 %. В сравнении с медианным фильтром OMHM-фильтр оказался на 10,5 % эффективнее по среднему линейному отклонению.



Рис. 4. Исходное RAW-изображение

В дополнение к подавлению шума OMHM-фильтр позволяет сохранять контраст на перепаде яркости в изображении. Причем эффективность при обработке RAW-изображения оказалась выше. Для сравнения были выбраны варианты, показавшие наилучшие результаты в предыдущем тесте. Это участки после OMHM-фильтрации RGB-изображения и участки после медианной и OMHM-фильтрации RAW-изображения. Участки, на которых визуально продемонстрирован перепад яркости, показаны на рис. 6.

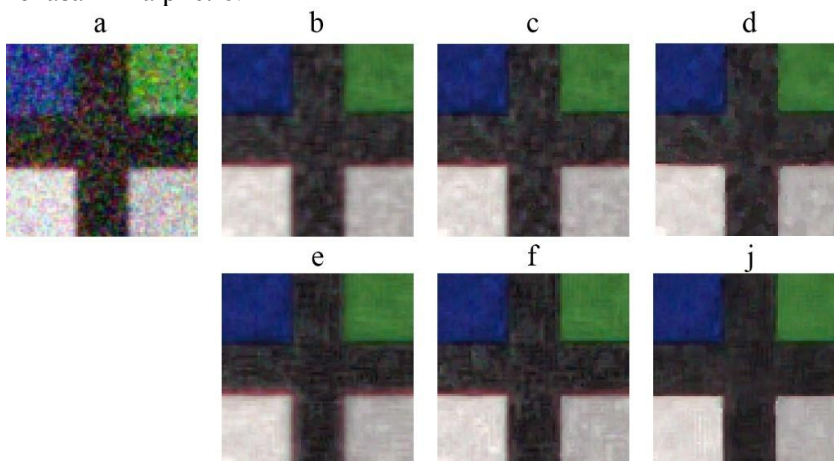


Рис. 5. Участок изображения а) исходного; после фильтрации RGB: б) усреднением; с) медианой; д) OMHM; после фильтрации RAW: е) усреднением; ф) медианой; ж) OMHM

Таблица 1  
Оценка  $d$  для сглаженных RGB- и RAW-изображений фильтрами (меньше – лучше)

Изображение	Фильтр		
	Усредняющий	Медианный	OMHM
RGB	18,87	12,91	11,91
RAW	20,34	12,1	10,83

Визуально контраст на участках после OMHM-фильтрации RAW-изображения самый высокий. Контрастная граница четко просматривается. В численном выражении контраст можно по-

## Математика

считать как разницу яркостей соседних пикселей на перепаде. Для каждого участка был взят единственный срез, на котором рассчитан контраст. Позиция срезов для каждого изображения идентична. Результаты расчета контраста на участках изображения представлены в табл. 2.

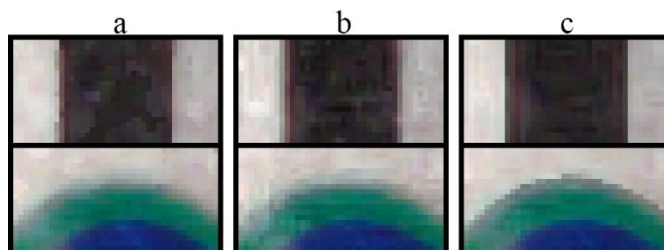


Рис. 6. Участки после фильтрации: а) RGB-изображения OMNM-фильтром; б) RAW-изображения медианным фильтром; с) RAW-изображения OMNM-фильтром

Таблица 2  
Контраст для сглаженных участков изображений, представленных на рис. 6:  
1 – верхний участок; 2 – нижний участок; (больше - лучше)

Участок	RGB-изображение	RAW-изображение	
	OMNM-фильтрация	Медианная фильтрация	OMNM-фильтрация
1	90	59	102
2	46	40	71

Наибольший контраст оказался на участках после фильтрации RAW-изображения OMNM-фильтром, следовательно, для сохранения максимального контраста RAW-изображения стоит подвергать фильтрации до их преобразования в стандартное RGB-изображение с помощью методов демозаики. Такая фильтрация будет наиболее полезна в системах технического зрения, так как сохранение контраста на перепадах яркости имеет большое значение в данной области.

Примером реальной задачи в области технического зрения может служить задача выделения дефектов на изображениях стеклянных изоляторов. Снимки объектов из прозрачного материала часто имеют недостаточный контраст, а в случае с объектами сложной формы оптические искажения могут дополнительно размывать контрастные границы, что затрудняет их обнаружение. Применение OMNM-фильтрации позволит повысить контрастность на подобных снимках даже в том случае, если подавление шума выполнять не требуется.

На рис. 7 представлена часть изображения со стеклянным изолятором для высоковольтных линий. На изоляторе отмечено вкрапление постороннего объекта в стекло. Наличие этого дефекта негативно сказывается на диэлектрических свойствах изделия. Чем выше контраст подобных дефектов в изображении, тем проще их детектировать.

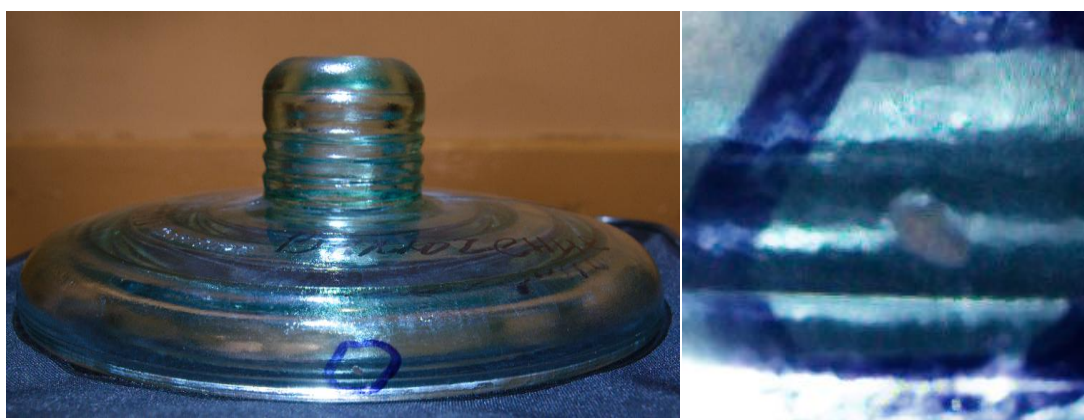


Рис. 7. Изображение стеклянного изолятора с отмеченным дефектом и участок с дефектом в приближении

Для повышения резкости были применены усредняющий, медианный и ОМНМ-фильтр как к RAW-изображению, так и к RGB-изображению, полученному из данного RAW. Результаты участков с дефектом на отфильтрованных изображениях представлены на рис. 8.

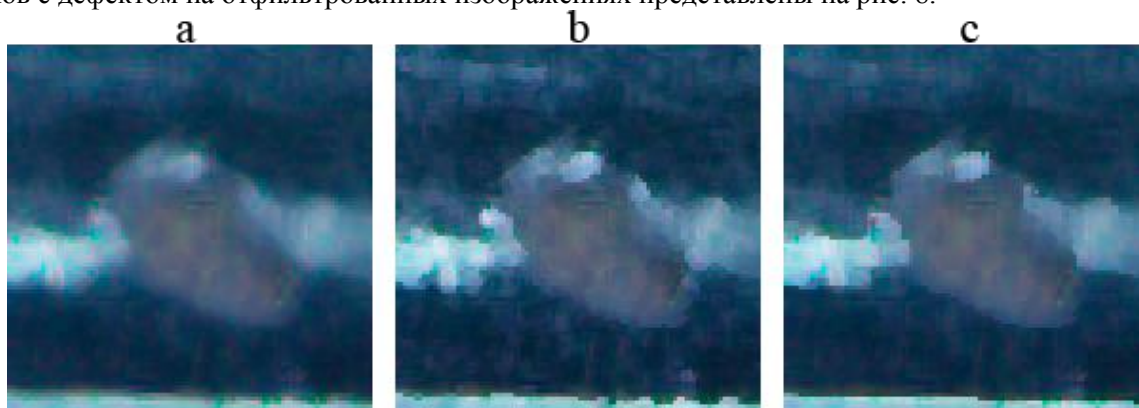
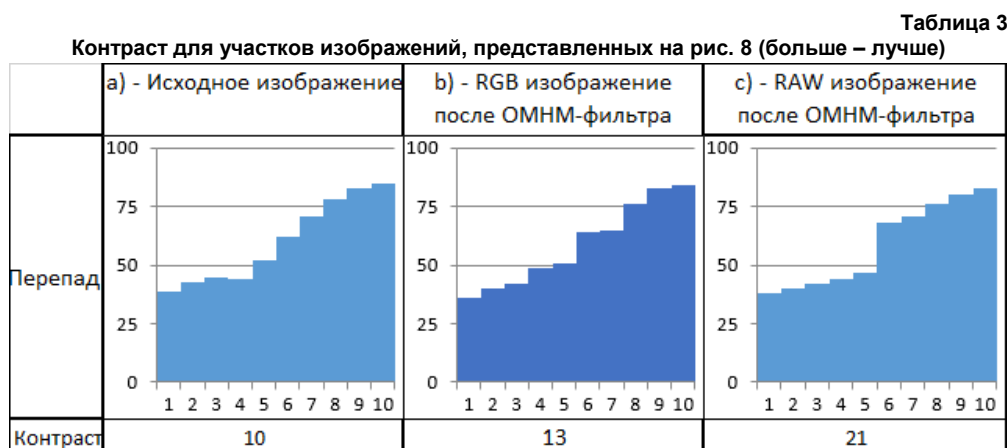


Рис. 8. Участки изображения с дефектом:  
а) исходное; б) RGB после обработки ОМНМ-фильтром; в) RAW после обработки ОМНМ-фильтром

Локальный контраст на изображении после ОМНМ-фильтрации повысился, что можно наблюдать на рис. 8. Если привести срез из 10 пикселей на границе контрастной области, то можно оценить в числовом формате на сколько повысился контраст при фильтрации RGB- и RAW-изображения в сравнении с исходным изображением (табл. 3).



Таким образом, контраст объекта после ОМНМ-фильтрации оказался выше, чем на исходном изображении. Причем приоритет стоит отдавать фильтрации необработанных RAW-изображений при наличии такой возможности.

### Заключение

В работе представлена задача фильтрации зашумленного RAW-изображения на основе обобщенного метода наименьших модулей. Формулы для подбора параметров функции сглаживающего преобразования адаптированы для глубины цвета 14 бит. Приведена сравнительная оценка эффективности сглаживания полученных изображений различными методами в сравнении с эталонным изображением. Показана большая эффективность ОМНМ-сглаживания при фильтрации RAW-изображения, чем того же изображения, переведенного в стандартное RGB-изображение. Было показано что ОМНМ-фильтр при обработке RAW-изображений сохраняет границы контрастных областей лучше других методов. Это свойство можно эффективно использовать при решении практических задач в области компьютерного зрения. Такое свойство фильтра было использовано при решении задачи повышения контрастности дефекта на изображении стеклянного изолятора.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание на выполнение фундаментальных научных исследований № FENU-2023-0025 (2023025Г3)).*

### Литература

1. Гонсалес, Р.С. Цифровая обработка изображений / Р.С. Гонсалес, Р.Е. Вудс. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.
2. Ярославский, Л.П. Введение в цифровую обработку изображений / Л.П. Ярославский. – М.: Советское радио, 1979. – 312 с.
3. CIE Recommendations on Uniform Color Spaces, Color Difference Equations, Psychometric Color Terms, Supplement 2 to CIE publication 15 (E1.3.1) 1971/(TC1.3). Central Bureau of the Commission Internationale de l'Éclairage (Vienna, Austria). – 1978.
4. Television noise reduction IC / G. de Naan, T.G. Kwaaitaal-Spassova, M.M. Larragy *et al.* // IEEE Transactions on Consumer Electronics. – 1998. – Vol. 44, no. 1. – pp. 143–154.
5. Kimmel, R. Demosaicing: Image Reconstruction from Color CCD Samples / R. Kimmel // IEEE transactions on image processing. – 1999. – Vol. 8, Iss. 9. – P. 1221–1229.
6. Никитин, В.В. Телевидение в системах физической защиты / В.В. Никитин, А.К. Цыцулин. – СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2001. – 132 с.
7. Сурин, В.А. Исследование свойств цифрового шума в контрастных изображениях / В.А. Сурин, А.Н. Тырсин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 8-2. – С. 93–96.
8. Surin, V.A. Nonlinear Filtering of Noisy Contrast Images Based on the Generalized Method of the Least Absolute Values / V.A. Surin, A.N. Tyrsin // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2018. – Vol. 5, no. 2. – P. 58–69.
9. Сурин, В.А. Математическая модель фильтрации на основе обобщенного метода наименьших модулей как инструментарий обработки и анализа контрастных изображений / В.А. Сурин, А.Н. Тырсин // Материалы Тринадцатой Международной конференции «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». – Томск, Томский государственный университет, 2020. – С. 55–56.
10. Сурин, В.А. Модель нелинейного фильтра для цифровой обработки контрастных изображений / В.А. Сурин, А.Н. Тырсин // Автометрия. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 54–62.
11. Weighted Median Filters: a Tutorial / L. Yin, R. Yang, M. Gabbouj, Y. Neuvo // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. – 1996. – Vol. 43, Iss. 3. – P. 157–192.

*Поступила в редакцию 14 октября 2023 г.*

### Сведения об авторах

Сурин Владимир Анатольевич – старший преподаватель, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: surinva@susu.ru.

Ческидова Мария Александровна – преподаватель, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: cheskidovama@susu.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 21–29*

---

DOI: 10.14529/mmph230403

## RAW IMAGE FILTERING BASED ON THE GENERALIZED METHOD OF LEAST MODULES

**V.A. Surin, M.A. Cheskidova**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: surinva@susu.ru, cheskidovama@susu.ru*

Abstract. This article studies the filtering of RAW images obtained from a photo matrix. The article adapts a filter based on the generalized method of least modules (GMLM) for filtering RAW images



from digital cameras. Digital images obtained by digitizing an analog signal with a digital photo matrix have a noise component in addition to the useful signal. The image structure obtained directly from the digital matrix is very different from the usual RGB image. It is necessary to apply a demosaicing algorithm to obtain an RGB image, which introduces additional distortions. It is proposed to filter the resulting image before applying the demosaicing algorithm. RAW images use more bits to describe the brightness of each pixel than standard RGB images and have a different structure. The adaptation of existing digital filters is required to work with such images. For GMLM filtering, coefficients for the parameters of the smoothing transformation function are selected. The advantages of filtering RAW images in comparison with standard RGB images and a comparison of GMLM with averaging and median filtering are shown. Based on the obtained dependencies, the practical problem of increasing the contrast in images of glass insulators based on their RAW images for the subsequent detection of defects in insulators is solved.

*Keywords:* GMLM; generalized method of least modules; RAW image; image filtering; noise reduction; detection of defects in glass insulators.

### References

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*. 4th edition. Pearson Education, Inc., New York, 2018, 1092 p.
2. Yaroslavsky L.P. *Vvedenie v cifrovuyu obrabotku izobrazhenij* (Introduction to Digital Image Processing). Moscow, Sovetskoe radio, 1979, 312 p. (in Russ.).
3. CIE Recommendations on Uniform Color Spaces, Color Difference Equations, Psychometric Color Terms, *Supplement 2 to CIE publication 15 (E1.3.1) 1971/(TC1.3)*. Central Bureau of the Commission Internationale de l'Éclairage (Vienna, Austria), 1978.
4. de Haan G., Kwaaitaal-Spassova T.G., Larragy M.M., Ojo O.A., Schutten R.J. Television Noise Reduction IC. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 1998, Vol. 44, no. 1, pp. 143–154. DOI: 10.1109/30.663741
5. Kimmel, R. Demosaicing: Image Reconstruction from Color CCD Samples. *IEEE transactions on image processing*, 1999, Vol. 8, Iss. 9, pp. 1221–1229. DOI: 10.1109/83.784434
6. Nikitin V.V., Tsytsulin A.K. *Televidenie v sistemakh fizicheskoy zashchity* (Television in Systems of Physical Protection). SPb.: SPbGETU “LETI” Publ., 2001, 132 p. (in Russ.).
7. Surin V.A., Tursin A.N. Research of Properties of Digital Noise in Contrast Images. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2016, Vol. 59, no. 8-2, pp. 93–96. (in Russ.).
8. Surin V.A., Tyrsin A.N. Nonlinear Filtering of Noisy Contrast Images based on the Generalized Method of the Least Absolute Values. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2018, Vol. 5, no. 2, pp. 58–69. DOI: 10.14529/jcem180205
9. Surin V.A., Tyrsin A.N. Matematicheskaya model' fil'tratsii na osnove obobshchennogo metoda naimen'shikh moduley kak instrumentariy obrabotki i analiza kontrastnykh izobrazheniy (Mathematical Model of Filtering based on the Generalized Method of Least Modules as a Tool for Processing and Analyzing Contrast Images). *Proc. ICAM-2020*, 2020, pp. 55–56. (in Russ.)
10. Surin V.A., Tyrsin A.N. Nonlinear Filter Model for Digital Imaging of Contrast Images. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2018, Vol. 54, no. 2, pp. 155–161. DOI: 10.3103/S8756699018020061
11. Yin L., Yang R., Gabbouj M., Neuvo Y. Weighted Median Filters: a Tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1996, Vol. 43, Iss. 3, pp. 157–192. DOI: 10.1109/82.486465

*Received October, 14, 2023*

### Information about the authors

Surin Vladimir Anatolevich is Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Programming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: surinva@susu.ru.

Cheskidova Mariya Aleksandrovna is Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Programming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: cheskidovama@susu.ru.

## ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

**О.Н. Шабловский**

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

E-mail: shablovsky-on@yandex.by

**Аннотация.** Предмет исследования – волновое уравнение с источником в среде со слабой пространственной нелокальностью. Такое уравнение отличается от классического варианта наличием дополнительного члена, содержащего искомую функцию в виде частной производной четвертого порядка по пространственной координате. Выполнено преобразование независимых переменных, позволяющее строить точные частные решения в виде бегущих волн, которые генерирует источник, нелинейным образом зависящий от искомой функции. Скоростной режим бегущей волны (дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой) характеризуется числом Маха, равным отношению скорости перемещения волны к скорости распространения малых возмущений. Рассмотрена функция источника, аналогичная той, что применяется в классическом случае для двойного уравнения синус-Гордона. Решение имеет вид кинка, который соответствует двум состояниям равновесия системы «среда – источник». Установлена связь между параметрами источника и аналитической структурой кинка (область определения решения, знак наклона кинка и скорость его перемещения). Показано, что по отношению к безразмерному параметру нелокальности квадрат числа Маха есть функция монотонно возрастающая/убывающая для сверхзвукового/дозвукового скоростного режима. Вместе с тем по отношению к одному из параметров источника квадрат числа Маха – немонотонная функция, которая имеет минимум/максимум в сверхзвуковом/дозвуковом случаях. Соответствующие экстремальным режимам функции источников отличаются одна от другой инверсией областей, где эти функции положительны и отрицательны. Для уравнения синус-Гордона сопоставление классического и нелокального процессов показывает, что различаются не только области определения сравниваемых решений, но и скоростные режимы (дозвуковой – сверхзвуковой) движения кинков. В случае кубической нелинейности источника получены решения, представляющие собой слабый разрыв искомой функции либо уединенную волну. Рассмотрено кинк-решение, зависимость которого от волновой координаты определяется гиперболическим тангенсом. Выполнен сопоставительный анализ свойств полиномиальных (третьей и пятой степени) функций источников, генерирующих такую бегущую волну в классической и нелокальной средах.

*Ключевые слова:* нелокальность; кинк; дозвуковая и сверхзвуковая волна; уравнение Клейна–Гордона; кубическая нелинейность источника.

**Введение.** Волновое уравнение с источником имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \varepsilon \chi_1^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} = k_v(\tau),$$

где  $\tau$  – функция, характеризующая некоторое физическое свойство среды;  $t$  – время;  $x$  – декартова координата;  $w$  – скорость распространения малых возмущений;  $k_v(\tau)$  – функция источника;  $\varepsilon \chi_1^2$  – параметр слабой пространственной нелокальности, см. [1] и указанную там библиографию. В монографиях [2, 3] изложены прикладные аспекты задач о волновых процессах в пространственно нелокальных средах.

Для перехода к безразмерной формулировке применяем масштабы  $\tau_b, t_b$ :

$$\begin{aligned} (t/t_b) \rightarrow t, \quad [x/(wt_b)] \rightarrow x', \quad (\tau/\tau_b) \rightarrow \tau, \\ [(k_v t_b^2)/\tau_b] \rightarrow k_v, \quad [\varepsilon \chi_1^2 / (w^4 t_b^2)] \rightarrow (\varepsilon \chi^2). \end{aligned}$$

В результате получаем следующую форму записи нелокального волнового уравнения в пределе слабой нелокальности

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} - \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial (x')^4} = k_v(\tau). \quad (1)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем в (1) уравнение Клейна–Гордона, которое позволяет исследовать нелинейные волны различной физической природы [4, 5]. Современные результаты и библиография исследований нелинейных гиперболических уравнений с источниками даны в [6–9]. Набор известных в литературе точных решений нелинейного уравнения Клейна–Гордона представлен в [10].

Цель данной статьи – рассмотреть для нелокального уравнения (1) новые точные решения типа бегущей волны в среде с источником  $k_v(\tau)$ , имеющим синусную либо полиномиальную нелинейность.

**Преобразование волнового уравнения.** Уравнение (1) запишем в виде системы, определяющей две неизвестные функции  $\tau, \theta$ :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x')^2} = k_v, \quad \theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2}. \quad (2)$$

Обозначим  $\partial \tau / \partial x' = u$ ,  $\partial \tau / \partial t = v$ , и тогда (2) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x')^2} = k_v, \quad \theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x'}. \quad (3)$$

Выполним преобразование независимых переменных  $(x', t) \rightarrow (\tau, t)$ . Результатом вычислений является следующая форма записи уравнений (3) [11]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \tau} - u \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) = k_v, \quad (4)$$

$$\theta = \tau + \varepsilon \chi^2 u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = u \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Рассмотрим автомодельный вариант  $u = u(\tau)$ ,  $v = v(\tau)$ , для которого  $v = -uM$ ,  $\tau = \tau(\zeta)$ ,  $\zeta = x' - Mt$ ,  $M \equiv \text{const}$ .

Скорость перемещения линии  $\zeta = \text{const}$  равна  $N = dx/dt$ . Число Маха  $M = N/w$  определяет дозвуковой ( $M^2 < 1$ ) либо сверхзвуковой ( $M^2 > 1$ ) скоростной режим. Уравнение (5) запишем в виде

$$\theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{dU}{d\tau}, \quad U = u^2/2,$$

подставим в (4) и в итоге получим

$$\frac{d}{d\tau} \left[ U \left( M^2 - 1 - \varepsilon \chi^2 \frac{d^2 U}{d\tau^2} \right) \right] - \varepsilon \chi^2 U \frac{d^3 U}{d\tau^3} = k_v. \quad (6)$$

Зависимость искомой функции  $\tau = \tau(\zeta)$  от волновой координаты  $\zeta$  определяется выражением

$$\frac{d\tau}{(2U)^{1/2}} = \pm d\zeta. \quad (7)$$

Обсудим частные примеры зависимостей  $U = U(\tau)$ , позволяющие проинтегрировать (7) в конечном виде и получить физически содержательные функции источника  $k_v(\tau)$ .

**Синусная нелинейность источника.** Обозначим  $\tau' = n\tau$ , где  $n$  – произвольная положительная константа. В формуле (7) возьмем знак «+». Пусть  $(2U)^{1/2} = A \cos \tau'$ ,  $A \equiv \text{const}$ . Решение типа кинк, описывающее переход между двумя состояниями равновесия системы «среда – источник», имеет вид

$$\tau' = -\frac{\pi}{2} \pm 2 \operatorname{arctg} [C_1 \exp(n\zeta A)], C_1 > 0, \zeta \in (-\infty, \infty); A, C_1 - \text{const.} \quad (8)$$

Здесь верхний знак «+» относится к области определения решения  $\tau' \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Наклон кинка положителен при  $A > 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (\pi/2)$ . Наклон отрицателен при  $A < 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ . Знак «-» перед арктангенсом в (8) относится к интервалу  $\tau' \in (-3\pi/2, -\pi/2)$ . Наклон этого кинка отрицателен при  $A > 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (-3\pi/2)$ . Наклон положителен при  $A < 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (-3\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ .

Данный процесс генерируется источником

$$k_v/n = k_2 \sin 2\tau' + k_4 \sin 4\tau'; k_2, k_4 - \text{const.} \quad (9)$$

При  $\varepsilon \neq 0$  свойства коэффициентов  $k_2, k_4$  и их связь с параметрами задачи состоят в следующем:

$$A^2 = \left(-4k_4/3\varepsilon\chi^2 n^2\right)^{1/2}, \varepsilon k_4 < 0; \quad (10)$$

$$M^2 = 1 + \frac{2}{A^2} \left(\frac{4}{3}k_4 - k_2\right). \quad (11)$$

Если  $k_2 < (4k_4/3)$ , то процесс сверхзвуковой. «Звуковое» решение  $M^2 = 1$  получаем при  $k_2 = 4k_4/3$ . Дозвуковой режим движения кинка наблюдается при

$$k_2 > (4k_4/3), \left(-k_4/3\varepsilon\chi^2\right) > \left[k_2 - (4k_4/3)\right]^2.$$

Последнее неравенство всегда будет выполнено при достаточно малом  $|\varepsilon|\chi^2$ .

Итак, порядок вычислений следующий. Заданные параметры  $k_2, k_4$  определяют скоростной режим движения кинка. Область определения решения соотносится с выбором знака «+» или «-» в (8). По формулам (10), (11) подсчитываем  $A^2, M^2$ . Посредством произвольной положительной константы  $C_1$  задаем начальное значение  $\tau'(\zeta = 0)$ . Далее указываем знак  $A$ , т. е. фиксируем знак наклона кинка. Выбор знака величины  $M$  указывает направление его движения.

Формулу (11) можно представить в виде  $M^2 = 1 + \varepsilon_1 [(4k_4/3) - k_2] \sqrt{3}$ , который позволяет проследить зависимость скорости движения кинка от параметра нелокальности среды  $\varepsilon_1 = (-\varepsilon\chi^2/k_4)^{1/2} > 0$ . А именно: в сверхзвуковом режиме  $\partial(M^2)/\partial\varepsilon_1 > 0$ , в дозвуковом режиме  $\partial(M^2)/\partial\varepsilon_1 < 0$ .

Обсудим свойства функции источника (9), применяя выражение

$$k_v/n = \sin 2\tau'(k_2 + 2k_4 \cos 2\tau'), \tau' \in (-3\pi/2, \pi/2). \quad (12)$$

При всех скоростях движения  $k_v = 0$  там, где  $\sin 2\tau' = 0$ , т. е. при  $\tau' = -3\pi/2, -\pi, -\pi/2, 0, \pi/2$ . Существование либо отсутствие других корней  $\tau' = \tau'_1$  уравнения  $k_v(\tau') = 0$  связано со знаком параметра  $\varepsilon\chi^2$  и со скоростным режимом  $M^2$ . Для сверхзвукового процесса корни вида  $\tau' = \tau'_1, k_v(\tau'_1) = 0$  существуют при следующих условиях: 1)  $\varepsilon < 0, k_4 > 0, 0 < (-k_2) < 2k_4, \cos 2\tau'_1 > 0$ ; 2)  $\varepsilon < 0, k_4 > 0, 0 < k_2 < 2k_4, \cos 2\tau'_1 < 0$ ; 3)  $\varepsilon > 0, k_4 < 0, (3k_2/4) < k_4 < (k_2/2) < 0, \cos 2\tau'_1 < 0$ . Для дозвукового процесса: 1)  $\varepsilon < 0, k_4 > 0, 0 < k_2 < 2k_4, \cos 2\tau'_1 < 0$ ; 2)  $\varepsilon > 0, k_4 < 0, 0 < k_2 < (-2k_4), \cos 2\tau'_1 > 0$ ; 3)  $\varepsilon > 0, k_4 < 0, (4k_4/3) < k_2 < 0, \cos 2\tau'_1 < 0$ .

Отметим немонотонную зависимость  $M^2$  от параметра источника  $k_4$ :  $\partial(M^2)/\partial k_4 = 0$ , если  $k_4 = (-3k_2/4)$ , т. е. функция (12) равна

$$k_v/n = 2k_4 \sin 2\tau' [\cos 2\tau' - (2/3)]. \quad (13)$$

В сверхзвуковом режиме имеем минимальное значение  $(M^2)_{\min}$  при  $k_4 > 0$ ,  $\varepsilon < 0$ ,  $k_2 = (-4k_4/3) < 0$ . В дозвуковом режиме максимальное значение  $(M^2)_{\max}$  достигается при  $k_4 < 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $k_2 = (-4k_4/3) > 0$ . Это значит, что соответствующие до- и сверхзвуковому режимам источники вида (13) отличаются один от другого инверсией областей  $k_v > 0$  и  $k_v < 0$ . На рис. 1 схематически показан пример такой инверсии для  $\cos 2\tau'_1 = 2/3$ ,  $\tau' \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Отдельный вариант  $k_2 = 0$  (см. (9)–(11)) представляет собой точное решение (8) нелокально-го уравнения синус-Гордона, для которого

$$k_v/n = k_4 \sin 4\tau', \quad \tau' = n\tau, \quad n > 0, \quad M^2 = 1 + (8k_4/3A^2). \quad (14)$$

Здесь  $A^2$  по-прежнему определяется формулой (10). Движение кинка дозвуковое при  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < (-k_4) < [3/16\varepsilon\chi^2]$ . Сверхзвуковой режим имеем при  $\varepsilon < 0$ ,  $k_4 > 0$ .

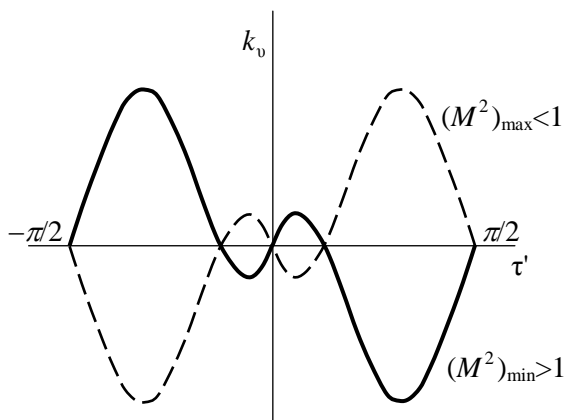


Рис. 1. Инверсия областей  $k_v > 0$  и  $k_v < 0$  для источников (13), соответствующих экстремальным скоростям движения кинка

Важный частный случай решения (8)–(11): если  $\varepsilon = 0$ , то  $k_4 = 0$ ,  $A$  – произвольная постоянная, и функция (8) – это известное решение [4, 5] уравнения синус-Гордона,

$$k_v = nk_2 \sin(2n\tau), \quad M^2 - 1 = (-2k_2/A^2). \quad (15)$$

Здесь  $M^2 > 1$ , если  $k_2 < 0$ ;  $0 < M^2 < 1$ , если  $0 < k_2 < (A^2/2)$ . Своеобразие ситуации в том, что аналитическая структура кинка (8) одинаковая для классической ( $\varepsilon = 0$ ) и нелокальной ( $\varepsilon \neq 0$ ) сред. Основные различия между этими процессами видны из формул для  $M^2$  в (14) и (15). Возьмем для наглядности одинаковые источники:

$$n_* = 2n_0 = 4n_\varepsilon, \quad k_* = n_0 k_2 = n_\varepsilon k_4, \quad n_0 > 0, \quad n_\varepsilon > 0, \quad \text{т. е. } \text{sgn } k_2 = \text{sgn } k_4, \quad k_v = k_* \sin(n_* \tau),$$

где нижние индексы «0» и «ε» относятся к классической и нелокальной средам соответственно. Тогда имеем

$$M_0^2 = 1 - 2k_2/A_0^2, \quad M_\varepsilon^2 = 1 + 8k_4/(3A_\varepsilon^2).$$

Следовательно, различаются области определения решений и скоростные режимы (дозвуковой – сверхзвуковой) движения кинков.

**Кубическая нелинейность источника.** В формуле (7) применяем оба знака «±». Возьмем

$$(2U)^{1/2} = \tau(A_2 + A_3 \tau)^{1/2}; \quad A_2, A_3 - \text{const} \quad (16)$$

и получим

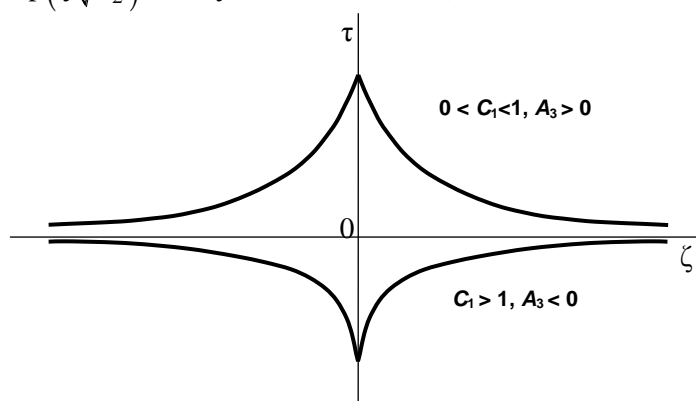
$$\tau = \frac{4C_1 A_2 E}{A_3 (1 - C_1 E)^2}, \quad E = \exp(\pm \zeta \sqrt{A_2}), \quad (17)$$

$$\frac{d\tau}{d\zeta} = \pm \sqrt{A_2} \frac{4A_2 C_1 E (1 + C_1 E)}{A_3 (1 - C_1 E)^3}. \quad (18)$$

Величина  $\tau(\zeta = 0)$  зависит от выбора константы  $C_1 > 0$ .

Вариант 1: слабый разрыв. Пусть  $A_2 > 0$ ,  $A_3 > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $0 < C_1 < 1$ . Решение (17) содержит две ветви, смыкающиеся при  $\zeta = 0$  и образующие слабый разрыв функции  $\tau(\zeta)$ : при  $\zeta = 0$  терпит разрыв первого рода первая производная  $d\tau/d\zeta$ , см. верхнюю часть рис. 2. В формуле (18) знак «+» относится к левой ветви,  $\zeta \leq 0$ ,  $E = \exp(\zeta\sqrt{A_2})$ ,  $d\tau/d\zeta > 0$ ; знак «-» – для правой ветви,  $\zeta \geq 0$ ,  $E = \exp(-\zeta\sqrt{A_2})$ ,  $d\tau/d\zeta < 0$ . Здесь  $\tau(\zeta = 0) > 0$  для обеих ветвей.

Если  $A_2 > 0$ ,  $A_3 < 0$ ,  $\tau < 0$ ,  $C_1 > 1$ , то решение (17) содержит по-прежнему две ветви, образующие слабый разрыв, но меняется конфигурация этих ветвей, см. нижнюю половину рис. 2. В формуле (18) знак «-» относится к левой ветви:  $\zeta \leq 0$ ,  $E = \exp(-\zeta\sqrt{A_2})$ ,  $d\tau/d\zeta < 0$ ; правая ветвь: знак «+»,  $\zeta \geq 0$ ,  $E = \exp(\zeta\sqrt{A_2})$ ,  $d\tau/d\zeta > 0$ . Здесь  $\tau(\zeta = 0) < 0$ .

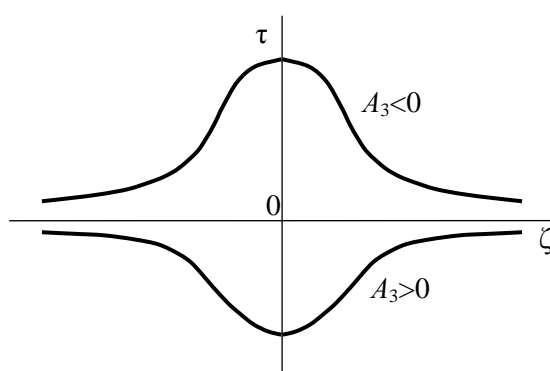


**Рис. 2. Кубическая нелинейность источника (20): решение (17), содержащее слабый разрыв**

Вариант 2: уединенная волна. В этом случае следует взять  $(-A_2) < A_3\tau < 0$ . Из (7), (16) после интегрирования получаем гладкое решение

$$\tau = \frac{-4A_2E}{A_3(1+E)^2}, \quad E = \exp(\mp\zeta\sqrt{A_2}), \quad A_2 > 0, \quad \zeta = 0, \quad d\tau/d\zeta = 0. \quad (19)$$

Формула (19) дает уединенные волны, различающиеся знаком функции  $\tau(\zeta)$ : 1)  $\tau > 0$  при  $A_3 < 0$ ,  $E = \exp(-\zeta\sqrt{A_2})$ ,  $\zeta \in (-\infty, \infty)$  (см. верхнюю часть рис. 3); 2)  $\tau < 0$  при  $A_3 > 0$ ,  $E = \exp(\zeta\sqrt{A_2})$ ,  $\zeta \in (-\infty, \infty)$  (см. нижнюю часть рис. 3).



**Рис. 3. Кубическая нелинейность источника (20): уединенная волна (19)**

Волновые процессы, которые описываются решениями (17) и (19), вызваны воздействием источника

$$k_0 = k_1\tau + k_3\tau^3, \quad k_1k_3 < 0, \quad (20)$$

для которого выполнены соотношения

$$A_2^2 = \frac{k_1}{4\varepsilon\chi^2} > 0, \quad A_3^2 = -\frac{2k_3}{15\varepsilon\chi^2} > 0, \quad M^2 = 1 + 5A_2\varepsilon\chi^2. \quad (21)$$

Напомним, что для всех рассмотренных здесь вариантов  $A_2 > 0$ . Следовательно, сверхзвуковой ( $M^2 > 1$ ) режим движения имеем для  $\varepsilon > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_3 < 0$ . Если  $k_1 < 0$ ,  $k_3 > 0$ ,  $0 < (-\varepsilon\chi^2) < [-4/(25k_1)]$ , то режим движения дозвуковой,  $M^2 \in (0, 1)$ . Функция (20) обращается в ноль в трех точках:  $\tau = 0$ ,  $\tau = \pm(-k_1/k_3)^{1/2}$ . Решения (17) и (19) содержат дробь  $A_2/A_3$ , которая определяется только свойствами источника:  $A_2^2/A_3^2 = (-15k_1/8k_3)$ . Информация о влиянии параметра нелокальности  $\varepsilon\chi^2$  заключена в показателе экспоненты  $\zeta\sqrt{A_2} = (x' - Mt)\sqrt{A_2}$ , где  $M^2 A_2 = A_2 + (5k_1/4)$ . Выбор знака константы  $A_3$  соответствует тому обстоятельству, что для слабого разрыва  $A_3\tau > 0$ , а для уединенной волны  $A_3\tau < 0$ .

Частный случай  $\varepsilon = 0$  дает тривиальное решение линейного однородного волнового уравнения:  $k_1 = 0$ ,  $k_3 = 0$ . Воздействие источника (20) обусловлено именно нелокальными ( $\varepsilon \neq 0$ ) свойствами среды.

**Источник – полином пятой степени.** В формуле (7) возьмем знак «+» и примем

$$(2U)^{1/2} = br \left( 1 - \frac{\tau^2}{b^2} \right); \quad b, r - \text{const.}$$

В результате вычислений получаем

$$\tau = b \operatorname{th}(r\zeta), \quad \tau \in (-b, b), \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \quad (22)$$

Тогда при  $\varepsilon \neq 0$  функция  $k_v(\tau)$  в (6) представляет собой полином, содержащий степени  $\tau$ ,  $\tau^3$  и  $\tau^5$  – запись не приводится. Если  $\varepsilon = 0$ , то член  $\tau^5$  отсутствует, и функция (22) – это известное [4, с. 640] кинковое решение, генерируемое источником

$$k_v = k_0 \tau \left( \frac{\tau^2}{b^2} - 1 \right), \quad M^2 - 1 = (k_0/2r^2). \quad (23)$$

Здесь  $k_0$ ,  $r$ ,  $b$  – свободные параметры. Скорость перемещения бегущей волны сверхзвуковая, если  $k_0 > 0$ ; скорость волны дозвуковая, если  $(-2r^2) < k_0 < 0$ . В нелокальном случае заслуживают внимания два частных примера, для которых  $k_v(\tau)$  содержит  $\tau$  и  $\tau^5$  либо  $\tau^3$  и  $\tau^5$ .

$$\text{I.} \quad k_v = k_1 \tau \left( 1 - \frac{\tau^2 \sqrt{2}}{b^2 \sqrt{3}} \right) \left( 1 + \frac{\tau^2 \sqrt{2}}{b^2 \sqrt{3}} \right), \quad r^4 = k_1 / (36\varepsilon\chi^2), \quad k_1\varepsilon > 0, \quad M^2 = 1 - 20r^2\varepsilon\chi^2. \quad (24)$$

Сверхзвуковой режим:  $\varepsilon < 0$ ,  $k_1 < 0$ . Дозвуковой режим:  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < k_1 < (0,09/\varepsilon\chi^2)$ .

$$\text{II.} \quad k_v = k_3 \tau^3 \left( 1 - \frac{2\tau^2}{3b^2} \right), \quad r^4 = k_3 b^2 / (36\varepsilon\chi^2), \quad k_1\varepsilon > 0, \quad M^2 = 1 - 2r^2\varepsilon\chi^2. \quad (25)$$

Сверхзвуковой режим:  $\varepsilon < 0$ ,  $k_3 < 0$ . Дозвуковой режим:  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < k_3 b^2 < (9/\varepsilon\chi^2)$ .

Сравним классический вариант (23) с источниками (24), (25), воздействие которых обусловлено нелокальными свойствами среды,  $\varepsilon \neq 0$ . Для представленных примеров одной и той же аналитической структуре кинка (22) соответствуют функции источника (23), (24) и (25), различающиеся степенями  $\tau$  в отдельных слагаемых  $[(\tau, \tau^3); (\tau, \tau^5); (\tau^3, \tau^5)]$ , но имеющие одинаковое число ненулевых действительных корней вида  $\tau = \tau_1$ ,  $k_v(\tau_1) = 0$ . Эти корни, соответственно, такие:  $\pm b$ ;  $\pm b(3/2)^{1/4}$ ,  $\pm b(3/2)^{1/2}$ .

**Заключение.** Получены точные частные решения нелокального волнового уравнения (1) с источниками. Для синусной нелинейности (9) источника построено кинк-решение (8). Его частным случаем является точное решение (8), (10), (14) нелокального уравнения синус-Гордона. В случае кубической нелинейности (20) указаны зависимости, которые описывают слабый разрыв (17) либо уединенную волну (19). Даны примеры (14), (15) и (23)–(25) сопоставления свойств классической и нелокальной сред. Определены условия существования дозвуковых и сверхзвуковых режимов распространения бегущих волн.

### Литература

1. Алфимов, Г.Л. Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности / Г.Л. Алфимов // *Нелинейная динамика*. – 2009. – Т. 5, № 4. – С. 585–602.
2. Браун, О.М. Модель Френкеля-Конторовой / О.М. Браун, Ю.С. Кившарь. – М.: Физматлит, 2008. – 519 с.
3. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
4. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
5. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.
6. Кузнецова, М.Н. О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна–Гордона / М.Н. Кузнецова // *Уфимский математический журнал*. – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 86–103.
7. Копылова, Е.А. Асимптотическая устойчивость солитонов для нелинейных гиперболических уравнений / Е.А. Копылова // *Успехи математических наук*. – 2013. – Т. 68, Вып. 2 (410). – С. 91–144.
8. Аэро, Э.Л. Решения уравнений синус-Гордон с переменной амплитудой / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Ю.В. Павлов // *Теоретическая и математическая физика*. – 2015. – Т. 184, № 1. – С. 79–91.
9. Корпусов, М.О. Аналитико-численное исследование вопроса о разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Клейна–Гордона / М.О. Корпусов, А.Н. Левашов, Д.В. Лукьяненко // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2020. – Т. 60, № 9. – С. 1503–1512.
10. Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 431 с.
11. Шабловский, О.Н. Динамика неустойчивых решений волнового уравнения с источниками / О.Н. Шабловский // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 51–61. DOI: 10.14529/mmph200406.

*Поступила в редакцию 14 февраля 2023 г.*

### Сведения об авторе

Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь, e-mail: shablovsky-on@yandex.by.

---

**Bulletin of the South Ural State University  
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 30–37**

---

DOI: 10.14529/mmph230404

## EXAMPLES OF EXACT SOLUTIONS OF THE NON-LOCAL WAVE EQUATION WITH NONLINEAR SOURCES

### *O.N. Shablovskii*

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus*

*E-mail: shablovsky-on@yandex.by*

Abstract. The scope of the study is a wave equation with a source in a medium with weak spatial nonlocality. The equation is distinguished by an additional term containing the function sought as a fourth order partial derivative of the spatial coordinate. The transformation of independent variables enables the construction of accurate partial solutions in the form of waves generated by a nonlinear source which depend on the desired function. The velocity regime of the wave (subsonic, sonic, supersonic) is characterized by the Mach number equal to the ratio of the velocity of the wave to the propagation ve-



locity of small perturbations. A source function similar to the classical case for the double sine-Gordon equation is considered. A kink solution corresponds to two equilibrium states of the medium-source system. The relation between the source and the kink structure (the area of the solution, the sign of the kink obliquity, and the velocity of its movement) has been established. It is shown that in relation to the dimensionless parameter of nonlocality, the square of the Mach number is a monotonic increasing/decreasing function for the supersonic/subsonic velocity mode. In relation to one of the source parameters, the square of the Mach number is a non-monotonic function with a minimum/maximum in the supersonic/subsonic cases. The source functions corresponding to the extreme modes differ from each other by the inversion of the areas where these functions are positive and negative. For the sine-Gordon equation, the comparison of the classical and nonlocal processes are different not only in the areas of the solutions, but also in the velocity modes (subsonic/supersonic) of the motion of the kink. The cubic nonlinearity of the source gives solutions representing a weak discontinuity of the function sought or a solitary wave. A kink solution depends on the wave coordinate and is determined by a hyperbolic tangent. The paper provides a comparative analysis of the properties of the polynomial (third and fifth degree) functions of sources generating a wave in classical and nonlocal media.

*Keywords:* nonlocality; kink; subsonic and supersonic wave; Klein–Gordon equation; cubic nonlinearity of the source.

### References

1. Alfimov G.L. Nonlocal Sine-Gordon Equation: Kink Solutions in the Weak Nonlocality Limit. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2009, Vol. 5, no. 4, pp. 585–602. DOI: 10.20537/nd0904010
2. Braun O.M., Kivshar Y.S. *The Frenkel–Kontorova Model*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, 472 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10331-9
3. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer, 2001, 462 p.
4. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London, Academic Press Inc., 1984, 630 p.
5. Tabor M. *Chaos and Integrability In Nonlinear Dynamics*. New York etc., Wiley, Cop., 1989, 364 p.
6. Kuznetsova M.N. On Nonlinear Hyperbolic Differential Equations Related to the Klein–Gordon Equation by Differential Substitutions. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, Vol. 4, Iss. 3, pp. 86–103. (in Russ.).
7. Kopylova E.A. Asymptotic Stability of Solitons for Nonlinear Hyperbolic Equations. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, Vol. 68, no. 2, pp. 283–334. DOI: 10.1070/RM2013v068n02ABEH004830
8. Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V. Solutions of the Sine-Gordon Equation with Variable Amplitude. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2015, Vol. 184, no. 1, pp. 961–972. DOI: 10.4213/tmf8821.
9. Korpusov M.O., Levashov A.N., Lukyanenko D.V. Analytical-Numerical Study of Finite-Time Blow-Up of the Solution to the Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Klein–Gordon Equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, Vol. 60, no. 9, pp. 1452–1460. DOI: 10.1134/S0965542520090109
10. Polyenin A.D., Zaytsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: Tochnye resheniya* (Handbook of Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Exact Solutions). Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 431 p. (in Russ.).
11. Shablovskiy O.N. Dynamics of Unstable Solutions for the Wave Equation with Sources. *Bulletin of SUSU. The series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2020, Vol. 12, no. 4, pp. 51–61. DOI: 10.14529/mmph200406

Received February 14, 2023

### Information about the author

Shablovskii Oleg Nikiforovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus, e-mail: shablovsky-on@yandex.by.

## РАЗРАБОТКА МЕТОДА НЕИНВАЗИВНОГО ИЗМЕРЕНИЯ РАСХОДА ЖИДКОСТИ И ГАЗА ЧЕРЕЗ СТЕНКУ ТРУБОПРОВОДА

А.А. Кривоногов<sup>1</sup>, К.А. Гонтарев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: krivonogova@susu.ru

<sup>2</sup> ООО «К-Омега», г. Челябинск, Российская Федерация  
E-mail: k.gontarev@k-omega.ru

**Аннотация.** В связи с разработкой методов определения объемно-массовых параметров «жидкость–газ», выполняемой командой ученых Южно-Уральского государственного университета, в публикации представлен новый метод измерения расхода жидкости и газа, позволяющий измерять конвективную скорость турбулентного потока через твёрдую стенку трубопровода и объемный расход жидкости и газа соответственно. Дано краткое описание гипотезы «о замороженной турбулентности» Дж. Тейлора, на основе которой работает метод. Обозначены научные проблемы, связанные с ее доказательством применительно к задаче определения скорости конвекции турбулентности. Представлен математический метод обработки сигнала, основанный на двумерной частотно-волновой спектральной обработке и пространственно-временной фильтрации сигнала. Показана функциональная схема предлагаемого устройства с описанием алгоритма обработки входного сигнала. С целью определения оптимальной конфигурации экспериментальной установки выполнено математическое моделирование в пакете вычислительной гидрогазодинамики ANSYS CFD с применением гибридной вихреразрешающей модели турбулентности SBES. Дано краткое описание опытного образца накладного гидроакустического расходомера «К – Омега П1», созданного на основе представленного в публикации метода и результатов численного моделирования. Выполнены испытания на проливочном стенде «МЕТРАН – УПА – 2000», являющемся вторичным эталоном. Приведены результаты натурных испытаний на проливочном стенде для пяти скоростей потока. Сделаны выводы о результатах исследований к настоящему моменту и дальнейшие шаги по улучшению способа измерения с применением метода обработки *k-omega beamforming*.

*Ключевые слова:* накладной гидроакустический расходомер; конвекция вихрей; частотно-волновой спектр; фазовая скорость; объемный расход.

*Восьмидесятилетнему юбилею  
ЮУрГУ посвящается*

### Введение

Важнейшей задачей в механике жидкости и газа является определение характеристик турбулентного течения по параметрам акустического сигнала. Турбулентность является сложным физическим процессом и к настоящему времени имеет много нерешённых вопросов, в том числе одним из них является математическое описание процесса диссипации турбулентных вихрей в пограничном слое.

С практической стороны важность исследования обусловлена современными тенденциями в приборостроении, направленными на энергоэффективность и снижение затрат. В настоящее время широкое распространение получили неинвазивные методы измерения расхода жидких и газообразных сред в трубопроводах. Это является следующим витком в развитии средств измерения.

Одним из таких перспективных устройств является накладной гидроакустический расходомер, определяющий расход по характеристикам турбулентных вихрей в пограничном слое. Предлагаемая технология позволяет определять параметры турбулентного течения в пограничном слое через твёрдую стенку, в том числе измерять объемный расход жидких, газообразных и мно-

гокомпонентных сред без врезки в трубопровод и без перекрытия потока. Разработанное решение повышает безопасность, поскольку нет повреждения трубопровода от врезки расходомера, снижает потери при транспортировке продукта, поскольку нет препятствия потоку. Дополнительно имеется возможность переустановки на различные участки трубопровода без остановки потока, не требует остановки процесса при проверке.

Основной проблемой в создании накладного акустического расходомера является математический метод обработки выходного сигнала, позволяющий выделить полезный сигнал из набора шумов, приходящих от сенсоров, и определить фазовую скорость перемещающихся вихревых полей, которая соответствует скорости потока среды в трубопроводе, а из скорости потока вычисляется объемный расход.

К настоящему моменту эту технологию исследует американский ученый Dr. Daniel L. Gysling. Он имеет ряд научных публикаций [1, 2] и патентов на изобретения [3], в которых говорится о возможности измерения конвективной скорости потока через стенку при помощи пьезопленочных сенсоров. При этом нет явного описания физического процесса, на базе которого реализован данный способ измерения, а также подробного описания метода обработки сигнала. Известно только то, что в основе способа измерения расхода лежит гипотеза Дж. Тейлора о «замороженной турбулентности», при этом не раскрыты методы обработки сигнала и параметры этого физического явления. Однако на базе его патентов две западные компании – Cidra и Expro предлагают на рынке расходомеры, работающие на вышеизложенном принципе.

В книге профессора ЦАГИ д.т.н. А.Ю. Голубева [4] представлены существующие методы построения структуры поля пристеночных пульсаций давления в виде частотно-волновых спектров, но нет описания методов измерения пульсаций давления через стенку и фильтрации полученного сигнала.

В связи с вышеизложенным создание метода определения параметров турбулентного течения по значениям акустического сигнала и устройства для определения объемного расхода на его основе является актуальной задачей.

### Разработка метода неинвазивного измерения расхода

В предлагаемом методе физическим носителем полезного сигнала являются турбулентные вихри, находящиеся в пограничном слое [5]. В процессе движения по течению они переносятся со средней скоростью потока. Вихри пульсируют, двигаясь по потоку, и распадаются на более мелкие составляющие.

В основе метода заложена гипотеза о «замороженности турбулентности» Тейлора [6], которая гласит, что скорость конвекции турбулентных вихрей  $U_c$  не зависит от пульсационной составляющей  $u'(t)$  и равна средней скорости потока. Таким образом, зная частоту пульсаций вихря  $-f$  и волновое число  $-k$ , можно определить скорость турбулентной конвекции или фазовую скорость:

$$U_c = f / k . \quad (1)$$

В качестве источника сигнала используются вихри, движущиеся в пограничном слое или вблизи него в турбулентном потоке, которые можно определить как мгновенное значение давления:

$$P(x,t) = P(x) + p(x,t) , \quad (2)$$

где  $P(x)$  – статическое давление,  $p(x,t)$  – центрированная функция, описывающая случайные по пространству и времени пульсации давления, которая, в свою очередь, может быть представлена в виде суммы гидродинамической  $p(x,t)_{гд}$ , акустической  $p(x,t)_{ак}$  и остальных составляющих пульсационного давления  $p(x,t)_{др}$ :

$$p(x,t) = p(x,t)_{гд} + p(x,t)_{ак} + p(x,t)_{др} . \quad (3)$$

Для измерения объемного расхода полезным источником сигнала является гидродинамическая составляющая  $p(x,t)_{гд}$  пульсирующего давления, поскольку конвекция вихрей происходит именно в этой области сигнала. Однако простого считывания сигнала в точке недостаточно, потому что для вычисления скорости конвекции необходимо определить параметры конвертирующего вихря, такие как частота пульсаций вихря  $-f$  и его волновое число  $-k$ . Для этого применяется пространственная спектральная обработка.

В соответствии с вышеизложенным метод [7] реализован в виде функциональной схемы, представленной на рис. 1. В качестве источника полезного сигнала выступают турбулентные вихри поз. 1, конвертирующие в потоке измеряемой среды. Сигналы, получаемые с датчиков поз. 2, подвергаются пространственной (волновой) фильтрации, затем частотной (полосовой). Далее на вход К-Омега модуля обработки сигнала поз. 3 поступает отфильтрованный сигнал со всех сенсоров одновременно, содержащий значения пульсаций давления турбулентных вихрей  $p(x, t)_{\omega}$  в конвективной области спектра, где его подвергают частотно-волновой обработке по зависимости:

$$S(k, f) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} p(x_m, t_n) e^{-i2\pi(f_n t/N + k_m x/M)}, \quad (4)$$

где  $S$  – частотно-волновой спектр,  $k$  – волновое число,  $f$  – частота,  $N$  – количество отсчетов,  $M$  – количество сенсоров,  $p$  – набор сигналов (двумерная матрица) с сенсоров после фильтрации,  $n$  – строки,  $m$  – столбцы,  $x$  – расстояние между сенсорами,  $t$  – время.

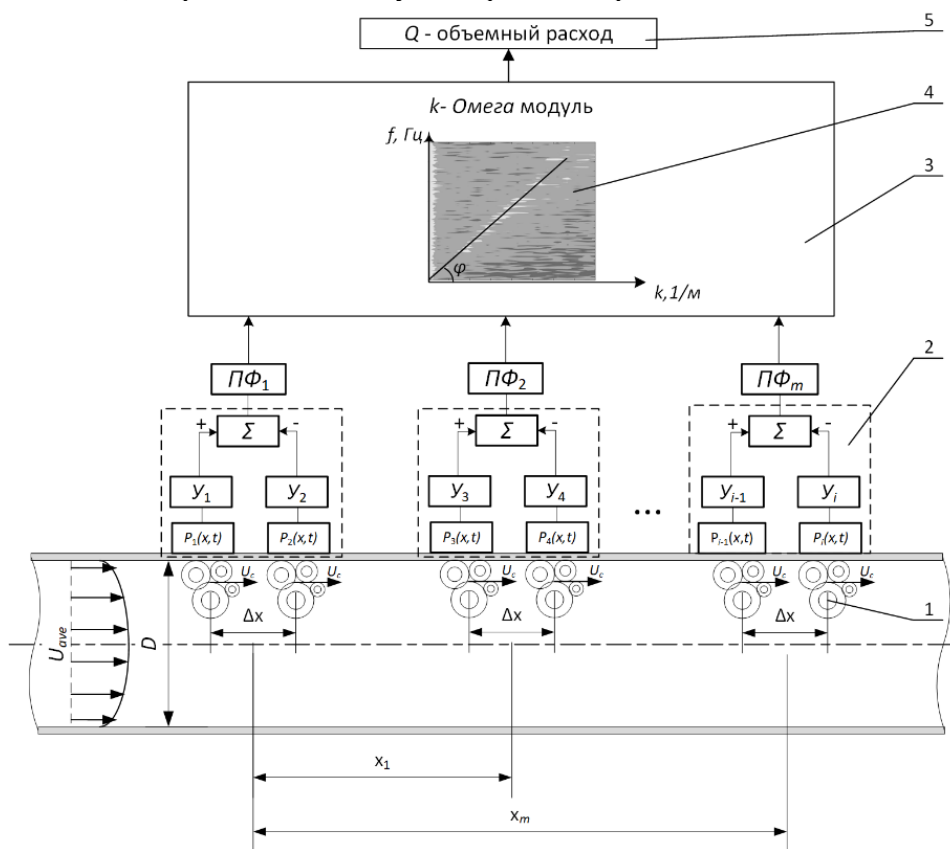


Рис. 1. Функциональная структура метода неинвазивного измерения расхода

По результатам обработки строятся двумерные графики частотно-волновых спектров поз. 4. Каждая точка, лежащая на вершине фронта, определяет скорость конвекции вихря своего масштаба. Тем самым можно определить скорость конвекции вихревого поля в потоке, а не отдельной волны. Для этого выполняется линейная аппроксимация значений фронта конвективных максимумов и определяется угол наклона  $\varphi$  линии фронта, значения которого передаются в модуль поз. 5, где можно вычислить скорость конвекции вихрей  $U_c$ . Зная скорость конвекции, возможно вычислить среднюю скорость потока  $U_{cp}$  через передаточный коэффициент  $\gamma$ , а по средней скорости вычислить объемный расход  $Q$ :

$$Q = \frac{U_{cp} \pi D^2}{4} = \frac{\gamma U_c \pi D^2}{4} = \frac{\gamma \pi D^2 \operatorname{tg}(\varphi)}{4}. \quad (5)$$

Таким образом, работает метод неинвазивного определения объемного расхода жидкости и газа в трубопроводе на основе пространственно-временной фильтрации и частотно-волновой обработки сигнала.

### Численные исследования

С целью определения оптимальной конфигурации опытного образца и уменьшения количества паразитных параметров, влияющих на полезный сигнал, построена его имитационная модель.

Моделирование выполнено в двумерной постановке в программной среде ANSYS CFX. Расчетная область представляет собой плоский канал длиной 1 метр, высотой 14 миллиметров с заданными условиями симметрии [8]. Таким образом имитируется плоский канал бесконечной ширины. Тем самым возможно получить течение жидкости вдоль плоской поверхности. Модель турбулентности SBES (scale based eddy simulation) [9] позволяет моделировать турбулентные пульсации давления и скорости в потоке, не осредняя их полностью. В результате получается пульсирующее течение, при этом не требуется сетка высокой плотности в параллельных стенке канала координатах, как для LES модели турбулентности.

Для исследования влияния количества сенсоров и расстояния между ними было построено 4 расчетных модели (рис. 2), отличающихся количеством точек записи пульсаций давления и расстояния между ними.

Первая модель (рис. 2, а) содержит 36 расчетных точек, расположенных вдоль оси канала с шагом 9 миллиметров. Построена с целью максимального разрешения полей пульсаций давления.

Вторая, третья и четвертая (рис. 2, а, б и в) модели содержат 8 точек записи сигнала с шагом 9, 18 и 36 миллиметров соответственно. Таким образом, можно оценить влияние количества сенсоров на качество получаемого частотно-волнового спектра.

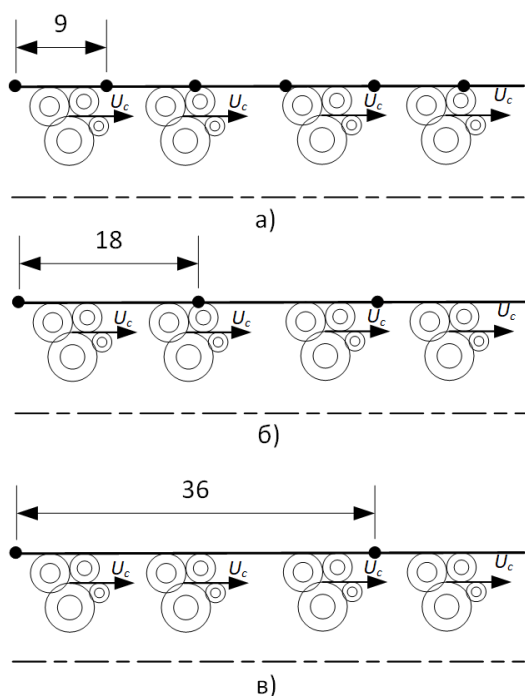


Рис. 2. Расчетные модели в ANSYS CFX

В процессе моделирования для каждого расчетного случая записано по 5 000 отсчетов (сэмплов) с шагом по времени 0,0005 с. Расчеты выполнены для скорости потока 5 м/с, поскольку при наибольшей скорости потока достигается максимальная амплитуда пульсаций давления. Это позволяет точнее определять конвективные характеристики турбулентного течения относительно паразитных шумов.

По результатам обработки по вышеизложенному алгоритму построены двумерные графики частотно-волновых спектров (рис. 3).

На рис. 3, а представлены результаты моделирования для первого расчетного случая – 36 точек с шагом 9 мм. На графике частотно-волнового спектра отчетливо виден конвективный фронт, угол наклона которого соответствует средней скорости потока в канале. Если разделить значение частоты на волновое число для точки, лежащей в границах конвективного фронта, то получим скорость набегающего потока. Например,  $200 \text{ Гц}/40(\text{м}^{-1}) = 5 \text{ м/с}$ .

На рис. 3, б представлен график для второго расчетного случая, на котором конвективный фронт получился с более низким разрешением за счет меньшего количества точек – 8 штук.

На рис. 3, в и г представлены графики для третьего и четвертого расчетных случаев – 8 точек записи с шагом 18 и 36 миллиметров соответственно. На графиках видно, что при увеличении расстояния между точками записи (сенсорами) разрешение по волновому числу снижается за счет увеличения минимального значения волнового числа  $k$ . Однако конвективный фронт присутствует также, но в связи с увеличением расстояния между сенсорами возникает вторичный конвективный фронт. Соответственно, на графиках с большим расстоянием между сенсорами виден «хвост» нижнего конвективного фронта.

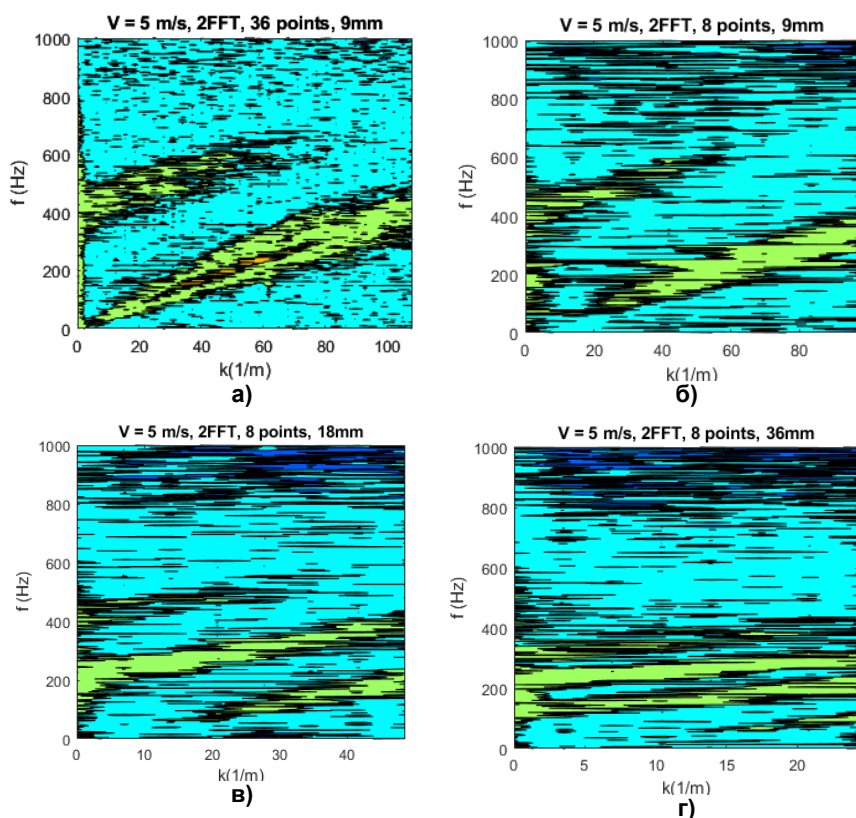


Рис. 3. Частотно-волновые спектры расчетные

устранения ступенчатого отображения конвективного фронта по волновому числу.

## Натурные испытания

Испытания проведены на проливочной установке МЕТРАН – УПА – 2000. Пролитка выполнена на пяти скоростях потока от максимальной 10 м/с до минимальной 1 м/с, чтобы понять, какую чувствительность обеспечивает прибор на различных скоростях потока.

Конструкция измерительной части содержит восемь анизотропных пьезопленочных сенсоров, прижатых хомутами к наружной стенке проточной части номинальным диаметром 100 мм. Благодаря этому обеспечивается плотный контакт с поверхностью. Далее с помощью экранированного кабеля сигналы передаются на восьмиканальный осциллограф Tektronix MSO 5B (рис. 4). Сигналы записывались на флэш-накопитель для последующей обработки с помощью метода, представленного в разделе 2.

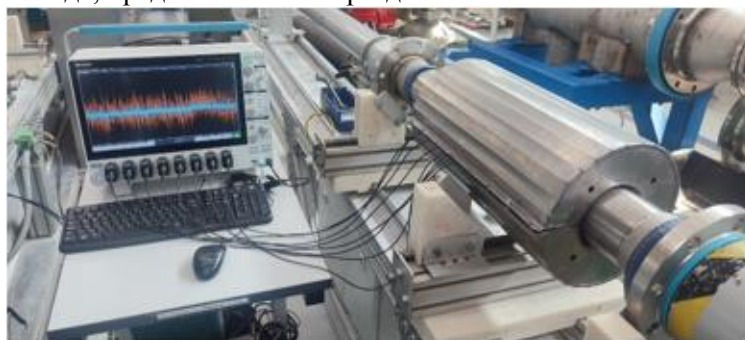


Рис. 4. Испытания опытного образца с осциллографом

По результатам испытаний построено пять двумерных контурных графиков (рис. 5). Поскольку полезный сигнал расположен в низкочастотной и коротковолновой части турбулентного спектра, он отфильтрован по длине волны больше 360 мм и по частотной полосе от 10 до 300 Гц. Соответственно после волновой обработки остается 7 точек для построения частотно-волнового спектра, поскольку удаление длинноволновых пульсаций выполняется путем вычитания сигнала с одного сенсора из другого (см. рис. 1). Для обработки взято 100 тысяч отсчетов (сэмпл) с интервалом записи 0,00001 с, таким образом, время записи сигнала составило 1 с.

Как видно из результатов испытаний, на скоростях потока 10 и 8 м/с отчетливо наблюдается конвективный фронт, который соответствует скорости потока (показано черной линией). Если

При этом угол наклона сохраняется постоянным, что позволяет определять скорость конвекции вихрей.

Таким образом, по результатам моделирования установлено, что для корректной частотно-волновой обработки достаточно 8 сенсоров (точек) с расстоянием 36 мм для точного определения конвективного фронта, однако требуется модификация метода обработки с помощью применения двумерной спектральной обработки по времени и по пространству (k-omega beamforming). Переход от линейной частоты и волнового числа к угловым параметрам для

По результатам испытаний построено пять двумерных контурных графиков (рис. 5).

Поскольку полезный сигнал расположен в низкочастотной и коротковолновой части турбулентного спектра, он отфильтрован по длине волны больше 360 мм и по частотной полосе от 10 до 300 Гц. Соответственно после волновой обработки остается 7 точек для построения частотно-



поделить частоту на волновое число, которые соответствуют точке, лежащей на этом фронте, то получаем скорость конвекции (переноса) вихревых полей в потоке и соответственно скорость потока. Например, для первого графика частота  $100(\text{Гц})/10(1/\text{м}) = 10 \text{ м/с}$ , что соответствует скорости потока.

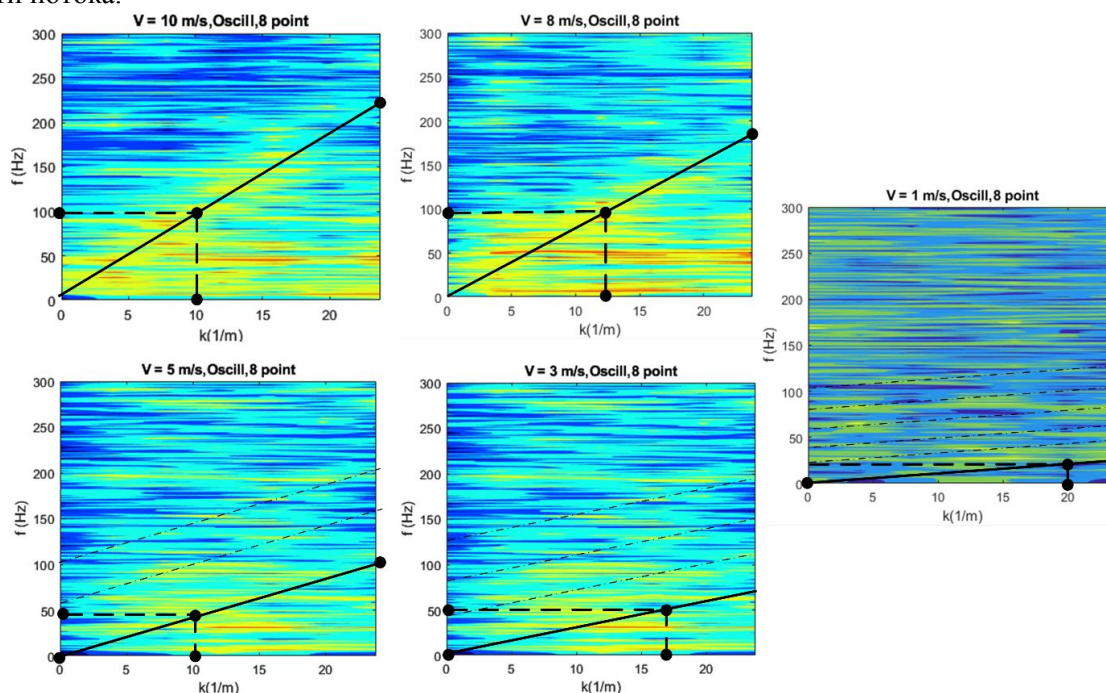


Рис. 5. Результаты испытаний с осциллографом

Однако на более низких скоростях потока 5, 3 и 1 м/с картина не так однозначна, как для 10 и 8 м/с. Связано это с несколькими факторами. Основной фактор – это применение частотно-волновой обработки в линейных координатах по частоте и волновому числу, в результате чего полосы по волновому числу не хватает для непрерывного отображения конвективного фронта. Получается ступенчатый конвективный фронт (обозначено тонкими штрихпунктирными линиями). Более отчетливо этот эффект виден на частотно-волновых спектрах, полученных при помощи моделирования (см. рис. 3), поскольку там нет помех и сигнал идеально чистый. Видно, что если сопоставить эти ступенчатые линии последовательно, то получится картина, как на рис. 1, там фронт непрерывен, потому что полоса по волновому числу шире. Таким образом, в следующей версии алгоритма будет применена частотно-волновая обработка в угловых координатах ( $k$ - $\omega$  beamforming) с учетом мнимой и действительной частей турбулентного спектра.

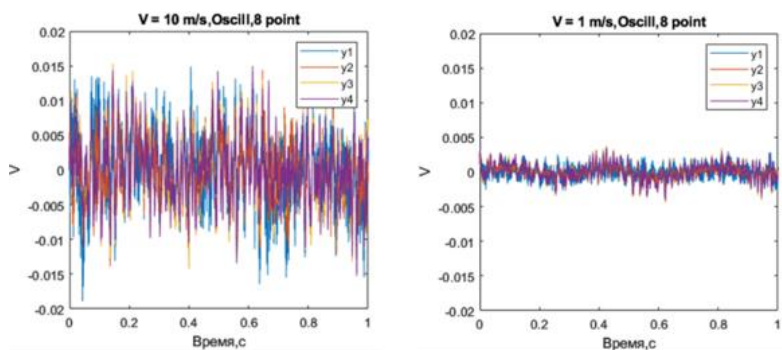


Рис. 6. Сигналы с осциллографа для скорости потока 10 м/с и 1 м/с

ходящая с пьезопленочных сенсоров, в связи с чем требуется приведение всех сигналов к одинаковому уровню. В данном случае сделано приведение по максимальному значению выборки по первому сенсору.

Вторая причина неявного отображения конвективного фронта связана со снижением энергии вихревого потока при снижении скорости. Уровень сигнала пропорционально снижается. На рис. 6 представлены два графика с сигналами для скорости 10 м/с и 1 м/с. Видно, что уровень сигнала снижается примерно в 10 раз.

Третья причина – это разная амплитуда сигналов, при-

### Заключение

По результатам моделирования установлено, что при использовании частотно-волновой обработки для точного определения конвективного фронта достаточно 8 точек с расстоянием 36 мм. Установлено, что расстояние между сенсорами не влияет на результат обработки, но конвективный фронт отображается ступенчато, поскольку ширины полосы по волновому числу недостаточно для непрерывного отображения конвективного фронта. Таким образом, требуется модификация метода обработки с помощью применения двумерной спектральной обработки по времени и по пространству ( $k$ - $\omega$  beamforming). Необходим переход от линейной частоты и волнового числа к угловым параметрам соответственно.

По результатам натурных испытаний опытного прототипа накладного акустического расходомера установлено, что разработанный математический метод позволяет определять объемный расход жидкости и газа в трубопроводе на основе пространственно-временной фильтрации и частотно-волновой обработки сигнала. В качестве источника полезного сигнала выступают турбулентные вихри, конвертирующие в потоке измеряемой среды. Однако предлагаемый метод необходимо модифицировать путем перехода от линейных величин  $k-f$  к угловым  $k$ - $\omega$ .

Таким образом, подтверждена справедливость гипотезы Дж. Тейлора «о замороженной турбулентности» для определения конвективного фронта в трубопроводе. При этом требуется проводить дальнейшие исследования с целью определения ограничений по минимальной скорости потока, при которой гипотеза будет справедлива.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-10151, <https://rscf.ru/project/23-29-10151/>*

### Литература

1. Gysling, D.L. Sonar-based Flow Meter for Chemical and PetroChemical Applications / D.L. Gysling, D.H. Loose // ISA Process Control. – 2003. – Reference number: BI0039. – P. 1–8.
2. Gysling, D.L. Clump-on, Sonar based Volumetric Flow Rate and Gas Volume Fraction Measurement for Industrial Application / D.L. Gysling, D.H. Loose, A.M. van der Spek // 13th international flow measurement conference FLOMEKO, Peebles. – 2005. – Reference number: BI0197. – P. 1–9.
3. Пат. US8109127B2 Measurement of entrained and dissolved gases in process flow lines / D.L. Gysling D.H. Loose. – Заявл. 30.06.2009; Опубл. 07.02.2012.
4. Голубев, А.Ю., Турбулентные пульсации давления в акустике и аэрогидродинамике / А.Ю. Голубев, Е.Б. Кудашев, Л.Р. Яблоник. – М.: Физматлит, 2019. – 421 с.
5. Moin, P. Revisiting Taylor's hypothesis / P. Moin // Journal of fluid mechanics. – 2009. – Vol. 640. – P. 1–4.
6. Taylor, G.I. Production and Dissipation of Vorticity in a Turbulent Flow / G.I. Taylor // Proc. of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and physical sciences. – 1938. – Vol. 164, no. 916. – P. 15–23.
7. Пат. RU2780566C1 Российская Федерация. Способ неинвазивного определения объемного расхода жидкости и газа в трубопроводе и устройство для его осуществления/ А.А. Кривоногов. – заявл. 18.04.2022; опубл. 27.09.2022.
8. Krivonogov, A. Non-Invasive Flow Measurement Technology Based on Taylor's Frozen Turbulence Hypothesis / A. Krivonogov // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – 2021. – P. 450–454
9. Frank, T. Validation of URANS SST and SBES in ANSYS CFD for the Turbulent Mixing of Two Parallel Planar Water Jets Impinging on a Stationary Pool / T. Frank // ASME 2017 Verification and Validation Symposium, Las Vegas, Nevada, USA, At: May 3–5, 2017. – 2017. – Paper No. VVS2017-4047.

*Поступила в редакцию 29 сентября 2023 г.*

### Сведения об авторах

Кривоногов Алексей Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: [krivonogovaa@susu.ru](mailto:krivonogovaa@susu.ru).

Гонтарев Кирилл Артурович – инженер-механик, ООО «К-Омега», г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: [k.gontarev@k-omega.ru](mailto:k.gontarev@k-omega.ru).



## A NON-INVASIVE METHOD FOR MEASURING LIQUID AND GAS FLOW RATES THROUGH A PIPELINE WALL

A.A. Krivonogov<sup>1</sup>, K.A. Gontarev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: krivonogovaa@susu.ru

<sup>2</sup>K-Omega, LLC, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: k.gontarev@k-omega.ru

**Abstract.** In connection to methods developed for determining “liquid-gas” volume-mass parameters, carried out at South Ural State University, this article presents a new method for measuring liquid and gas flow rates. The method makes it possible to measure a turbulent flow’s convective velocity through a pipeline wall and the volumetric flow rate of a liquid or gas. A brief description of Taylor’s “frozen turbulence” hypothesis, which forms the basis of the method, is given, and the main problems associated with its proof in relation to the problem of determining the convection velocity of turbulence are identified. A mathematical signal processing method is presented based on two-dimensional frequency-wave number spectral processing and spatiotemporal signal filtering. A functional scheme and the input signal processing algorithm of the proposed device is presented. Mathematical modeling was performed in the ANSYS CFD computational fluid dynamics package using the hybrid eddy-resolving turbulence model SBES to determine the optimal configuration of the experimental setup. A brief description is given of the non-invasive sonar flow meter “K-Omega P1” prototype based on method presented and of numerical simulation results. Tests were performed on the METRAN-UPA-2000 flow test workbench which is a secondary standard. Full-scale test results on the flow test workbench for five flow rates are presented. Conclusions are drawn about the research results to date and further steps to improve the measurement method using the k-omega beamforming processing method.

**Keywords:** *Non-invasive sonar flowmeter; turbulence convection; frequency-wavenumber spectrum; phase velocity; volume flow rate.*

### References

1. Gysling D.L., Loose D.H. Sonar-based Flow Meter for Chemical and PetroChemical Applications. *ISA Process Control*, 2003, Reference number: BI0039, pp. 1–8.
2. Gysling D.L., Loose D.H., van der Spek A.M. Clamp-on, Sonar-Based Volumetric Flow Rate and Gas Volume Fraction Measurement for Industrial Applications. *Presented at the 13th international flow measurement conference FLOMEKO*, Peebles, 2005, Reference number: BI0197, pp. 1–9.
3. Pat. US8109127B2 *Measurement of entrained and dissolved gases in process flow lines*; app. 30.06.2009; publ. 07.02.2012; inventors – D.L. Gysling D.H. Loose; proprietor – Expro Meters Inc.
4. Golubev A.Yu., Kudashev E.B., Jablonik L.R. *Turbulentnye pul'satsii davleniya v akustike i aerogidrodinamike* (Turbulent Pressure Pulsation in Acoustics and Aerodynamicse), Moscow, Fizmatlit Publ., 2019, 421 p. (in Russ.).
5. Moin P. Revisiting Taylor’s hypothesis. *Journal of fluid mechanics*, 2009, Vol. 640, pp. 1–4. DOI: 10.1017/S0022112009992126
6. Taylor G.I. Production and Dissipation of Vorticity in a Turbulent Flow. *Proc. of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and physical sciences*, 1938, Vol. 164, no. 916, pp. 15–23. DOI: 10.1098/rspa.1938.0002
7. Pat. RU2780566C1 *Method for non-invasive determination of the volumetric flow rate of liquid and gas in a pipeline and a device for its implementation*; app. 18.04.2022; publ. 27.09.2022; inventor A.A. Krivonogov; proprietor A.A. Krivonogov.

8. Krivonogov A. Non-Invasive Flow Measurement Technology Based on Taylor's Frozen Turbulence Hypothesis. *Proc. International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, Sochi, Russia, 2021, pp. 450–454. DOI: 10.1109/ICIEAM51226.2021.9446362

9. Frank T. Validation of URANS SST and SBES in ANSYS CFD for the Turbulent Mixing of Two Parallel Planar Water Jets Impinging on a Stationary. *ASME 2017 Verification and Validation Symposium, Las Vegas, Nevada, USA, At: May 3-5, 2017*, Paper No. VVS2017-4047.

*Received September 29, 2023*

### Information about the authors

Krivonogov Aleksey Aleksandrovich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: krivonogovaa@susu.ru.

Gontarev Kirill Arturovich is Mechanical Engineer, K-Omega, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: k.gontarev@k-omega.ru.

# РАСЧЁТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ НА ЕЁ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ

**К.А. Хорошевский<sup>1</sup>, А.В. Ерпалов<sup>1</sup>, И.В. Гадолина<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: khoroshevskiika@susu.ru

**Аннотация.** В ходе эксплуатации изделия машиностроения чаще всего подвержены динамическому воздействию, представляющему собой случайное разночастотное нагружение. Для корректного анализа долговечности конструкций, функционирующих при таком нагружении, необходимо учитывать их динамические характеристики (собственные частоты и формы колебаний, демпфирование и др.).

Выполнено исследование влияния коэффициента демпфирования на долговечность конструктивно подобного образца при расчёте частотными методами, а именно методом для узкополосного процесса и методом Дирлика. Для этого разработана расчётная схема на основе конечно-элементной модели для определения спектральной плотности напряжений, экспериментальным путём определён диапазон изменения коэффициента демпфирования, рассчитана долговечность. Выполнен анализ влияния демпфирования на расчётную долговечность разными методами. Проведена экспериментальная верификация выполненных расчётных исследований.

*Ключевые слова:* усталостная долговечность; частотные методы; коэффициент демпфирования; спектральная плотность мощности.

*Восьмидесятилетию юбилею  
ЮУрГУ посвящается*

## Введение

На сегодняшний день исследование явления усталости остаётся актуальной задачей, поскольку выход из строя изделий машиностроения чаще всего происходит из-за усталостного разрушения. При этом эксплуатационное воздействие носит случайный характер, в связи с чем оценка долговечности при таком нагружении представляет наибольший интерес. За последние годы количество публикаций, посвящённых этой проблеме, увеличилось в несколько раз. Существует два подхода к оценке долговечности при случайном нагружении [1]. Первым является оценка во временной области, суть которого заключается в анализе всей истории нагружения, схематизации случайного эксплуатационного воздействия и дальнейшей оценке накопленных повреждений. Наибольшее распространение получил метод «падающего дождя», впервые описанный в [2]. Ко второму подходу относятся различные частотные методы. Общей идеей таких методов является использование спектральных характеристик случайного процесса для оценки усталостной долговечности. Основным применением частотных методов является оценка долговечности на стадии проектирования, когда неизвестна история нагружения.

Исследователи не достигли консенсуса в том, какой из подходов к оценке долговечности является наилучшим. В последнее время появляются работы [1, 3, 4], в которых проводится сравнительный обзор существующих методов временной и частотной областей. При этом авторы работ акцентируют внимание на том, что временные подходы оценивают долговечность по напряжениям, деформациям и энергетическим критериям, в том числе в вероятностной постановке. Частотные подходы оценивают долговечность только по напряжениям, не учитывая вероятность разрушения.

Применение частотных методов ограничивается только стационарными процессами, в то время как в реальной эксплуатации преобладают нестационарные воздействия (статистические характеристики процесса изменяются во времени). В связи с этим исследователи разрабатывают

новые подходы, учитывающие нестационарность процессов. В работе [5] авторы предлагают метод для анализа нестационарного процесса, скомбинированного из нескольких стационарных. В работах [6, 7] описывается применение плотностей распределения напряжений для оценки долговечности. Также предпринимались попытки совместить временные и частотные подходы [8]. Однако существующие работы рассматривают только определённые типы нестационарных процессов.

Оценка усталостной долговечности характеризуется большими разбросами, поэтому важным аспектом является экспериментальная верификация разработанных методов. Этой проблеме уделено большое количество работ [9–17]. Одной из проблем, вызывающей расхождение расчётных и экспериментальных результатов, является некорректный учёт динамических характеристик изделия: частотная стабильность материала [18] и демпфирующие свойства изделия. В работе [19] на примере ветряного генератора авторы показывают, что долговечность может увеличиться до 67 % при увеличении демпфирования системы. Среди приведенных выше работ только в [11, 15–17] учитывалось демпфирование при проведении эксперимента.

Целью данной работы является исследование влияния демпфирования на расчётную оценку долговечности при применении разных частотных методов с последующей верификацией экспериментом. В первом разделе даётся информация об использованных в работе методах оценки долговечности. Второй раздел посвящён описанию конечно-элементной модели и численной оценке долговечности. В третьем разделе выполнена экспериментальная верификация расчётных исследований.

### Использованные методы

Оценка долговечности спектральными методами выполняется на основе статистических характеристик процесса, а именно спектральной плотности мощности (СПМ). СПМ показывает, как энергия распределяется между частотами и является наиболее полным способом описания случайного стационарного процесса. В частотной и временной областях случайный процесс представляется по-разному, связь между этими подходами может быть выражена через спектральные моменты. Спектральные моменты  $n$ -го порядка определяются по формуле

$$\lambda_n = \int_0^{\infty} \omega^n G(\omega) d\omega, \quad (1)$$

где  $\omega$  – угловая частота в рад/с,  $G(\omega)$  – СПМ сигнала.

Более подробное описание спектральных моментов с точки зрения долговечности приведено в работе [1]. С их помощью можно выразить основные характеристики процесса: частоту пересечения среднего уровня ( $v_0$ ) и частоту появления пиков ( $v_p$ ).

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}, v_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}}. \quad (2)$$

Отношение между двумя этими параметрами называется коэффициентом нерегулярности ( $\gamma$ ), который характеризует широкополосность процесса

$$\gamma = \frac{v_0}{v_p} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_4}}. \quad (3)$$

Для узкополосных процессов коэффициент нерегулярности равен единице, тогда как для широкополосных процессов он стремится к нулю.

В работе долговечность будет оцениваться двумя методами: Narrow band approximation [20], далее в статье называется «метод для узкополосного процесса», и методом Дирлика [21].

Метод для узкополосных процессов базируется на допущении, что в случайных процессах каждый пик соответствует одному циклу. Тогда амплитуды процесса распределены по закону Рэлея и суммарные накопленные повреждения определяются по зависимости [22]:

$$D_{NB} = v_0 C^{-1} \left( \sqrt{2\lambda_0} \right)^k \Gamma \left( 1 + \frac{k}{2} \right), \quad (4)$$

где  $C$  и  $k$  – постоянные величины кривой усталости материала ( $N = \sigma^{-k} C$ ),  $\Gamma$  – гамма функция,  $\lambda_0$  – спектральный момент нулевого порядка.

Метод Дирлика основан на взвешенной сумме распределений Рэлея, Гаусса и экспоненциального. В настоящее время является наиболее распространённым методом оценки в частотной области. Повреждение за время  $T$  действия случайной нагрузки рассчитывается по зависимости:

$$D_{DK} = \frac{\nu_p T}{C} (\sqrt{\lambda_0})^k \left[ D_1 Q^k \Gamma(1+k) + (\sqrt{2})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (D_2 |R|^k + D_3) \right], \quad (5)$$

где  $Z = s/\sigma_X$  – нормированная амплитуда,

$$x_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_4} \right)^{1/2}, \quad D_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \alpha_2^2}, \quad D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}{1 - R}, \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2,$$

$$Q = \frac{1,25(\gamma - D_3 - D_2 R)}{D_1}, \quad R = \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2},$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – спектральные моменты  $n = 0, 1, 2$  и  $4$  порядков соответственно,  $\alpha_2$  – параметр ширины спектра.

### Численная оценка долговечности конструктивно подобного образца из сплава МА-15 при воздействии случайной вибрации

#### Описание объекта исследования

В качестве объекта исследований выбран конструктивно подобный образец, представляющий собой стандартный плоский образец с галтелью III типа [23], изготовленный из магниевого сплава МА-15, применяемого в авиационной промышленности в конструкциях, требующих повышенного предела текучести при сжатии (модуль упругости  $E = 4,2 \times 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,035$ , плотность  $\rho = 1850$  кг/м<sup>3</sup>), с грузом массой 47,6 г, установленным на свободной стороне образца для снижения собственной частоты колебаний. Эскиз образца с размерами приведён на рис. 1, а.

Кривая усталости задана зависимостью  $N = s^{6,7} \times 10^{18,95}$ , где  $s$  – это уровень напряжений.

Динамические испытания проводились при консольном изгибе. Для реализации такого нагружения образец с одной стороны жестко крепился к вибростолу, с другой стороны образец был свободно вывешен вместе с грузом (рис. 1, б).

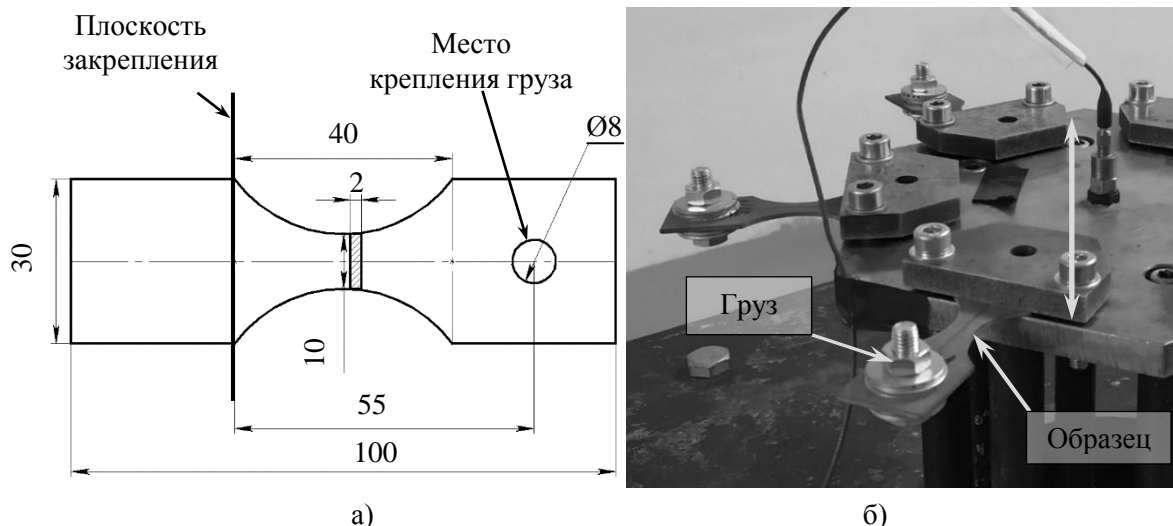


Рис. 1. Эскиз образца с размерами (а) и установленные образцы на испытательном стенде (б)

#### Расчёт спектральной плотности напряжений

Первый этап исследования – это построение конечно-элементной модели образца с последующим проведением численного модального анализа и определением напряжений, развиваемых на поверхности образца при случайном нагружении. Структурная схема численного расчёта долговечности представлена на рис. 2.

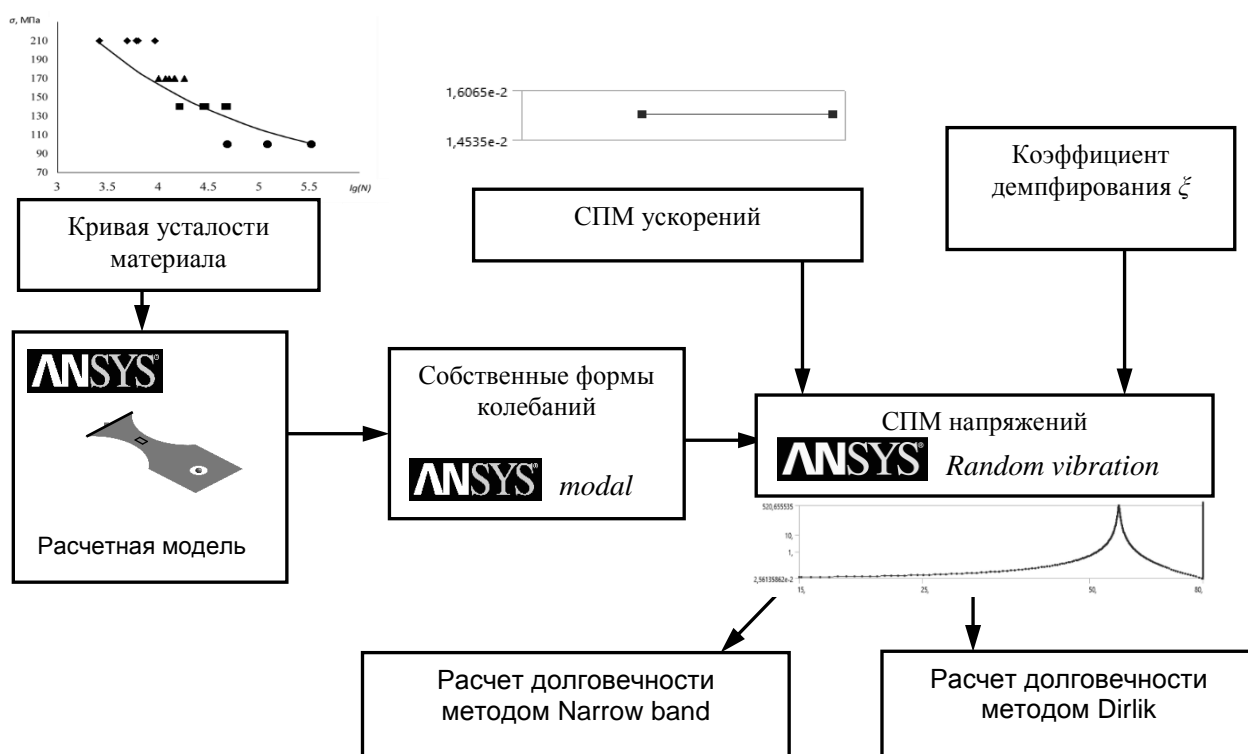


Рис. 2. Структурная схема расчёта долговечности при случайном нагружении

Конечно-элементная сетка и численный модальный анализ реализованы в программном пакете ANSYS. Использовались оболочечные элементы, размер элемента 0,5 мм, в модели 6 270 узлов и 6 051 элемент.

По результатам модального анализа первая изгибная собственная форма колебаний идентифицирована на частоте 57 Гц. С целью проявления этой формы колебания и принимая во внимание ограничения оборудования, выбран частотный диапазон случайной вибрации от 15 до 80 Гц.

Для оценки долговечности спектральными методами необходимо знать спектральную плотность напряжений, развиваемых в наиболее нагруженной точке образца. Она построена с помощью модуля ANSYS Random Vibration. Входным воздействием является случайная вибрация с постоянным уровнем дисперсии виброускорений («белый» шум), направленная вдоль вертикальной оси стенда (см. рис. 1). Случайная вибрация задана спектральной плотностью виброускорений, характерный вид которой показан на рис. 3.

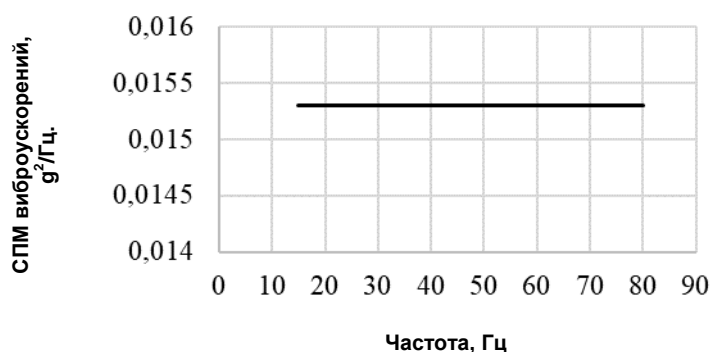


Рис. 3. Спектральная плотность виброускорений для уровня 0,0153  $g^2/Гц$

Исследовались три расчётных случая с дисперсией на уровнях: 0,01245  $g^2/Гц$ , 0,0153  $g^2/Гц$  и 0,018  $g^2/Гц$ . Картина распределения эквивалентных напряжений для 0,018  $g^2/Гц$  в образце показана на рис. 4, а. Для остальных случаев картина похожа.

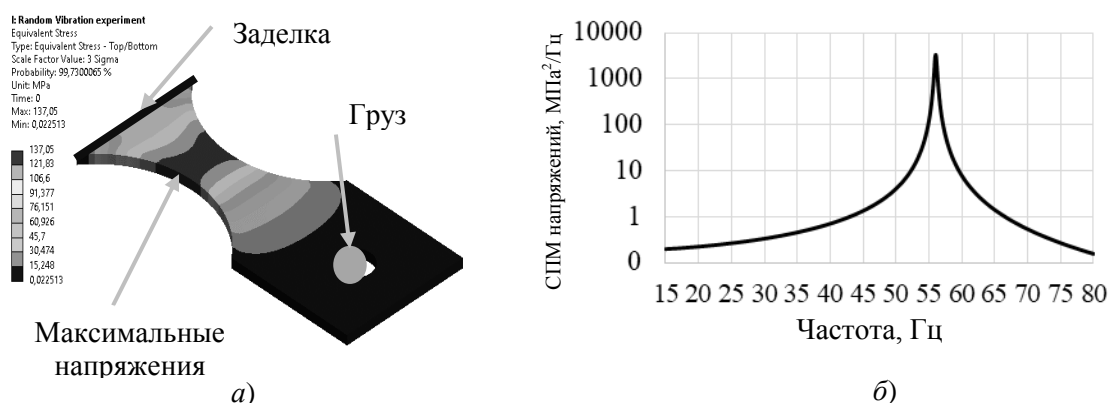


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений с вероятностью 99 % в образце при случайных колебаниях (расчётный случай – 0,018  $g^2/Гц$ ) (а). Спектральная плотность напряжений в наиболее нагруженной точке (б)

Для наиболее нагруженной точки образца средствами программного комплекса ANSYS рассчитана спектральная плотность напряжений. Характерный вид спектральной плотности напряжений показан на рис. 4, б (ось ординат в логарифмическом масштабе).

#### Определение коэффициента демпфирования

Одной из основных динамических характеристик конструкции является коэффициент демпфирования, который характеризует способность конструкции поглощать энергию колебаний. При вибрационном воздействии перемещения конструкции зависят от величины коэффициента демпфирования. При его низких значениях перемещения будут большими, что, в свою очередь, вызовет высокие напряжения в конструкции [15]. Особенно важным это свойство является при резонансе, когда амплитуды перемещений увеличиваются в несколько раз. Коэффициент демпфирования определяется только экспериментальным путём. Поэтому для уточнения конечно-элементной модели проведено экспериментальное исследование демпфирующих свойств конструктивно подобного образца. Определение коэффициента демпфирования осуществлялось по затухающим колебаниям согласно методике, описанной в [24]. Образец обладает малой массой, поэтому для исключения искажения динамических характеристик, вызванных установкой дополнительных датчиков, применялся бесконтактный способ регистрации вибрации с помощью лазерного виброметра компании *Polytec*. Виброметр устанавливался таким образом, чтобы лазерный луч располагался перпендикулярно образцу (рис. 6, б). Затухающие колебания возбуждались с помощью модального молотка. Экспериментальная установка и характерная виброграмма затухающих колебаний показана на рис. 6, а.

Для анализа вводится допущение, что рассматриваемая система обладает линейным вязким демпфированием. Тогда через максимумы виброграммы затухающих колебаний можно провести огибающую, которая описывается экспоненциальным законом  $Ae^{-nt}$ .

В таком случае логарифмический декремент колебаний рассчитывается по зависимости

$$\delta = n\tau, \quad (6)$$

где  $n$  – коэффициент затухания,  $\tau$  – период колебаний.

Относительный коэффициент демпфирования оценивается по зависимости:

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi}. \quad (7)$$

Выполнив серию из десяти экспериментов, выявили диапазон изменения коэффициента демпфирования: от 0,0024 до 0,0035. Для дальнейшей оценки долговечности выбран весь диапазон его изменения.

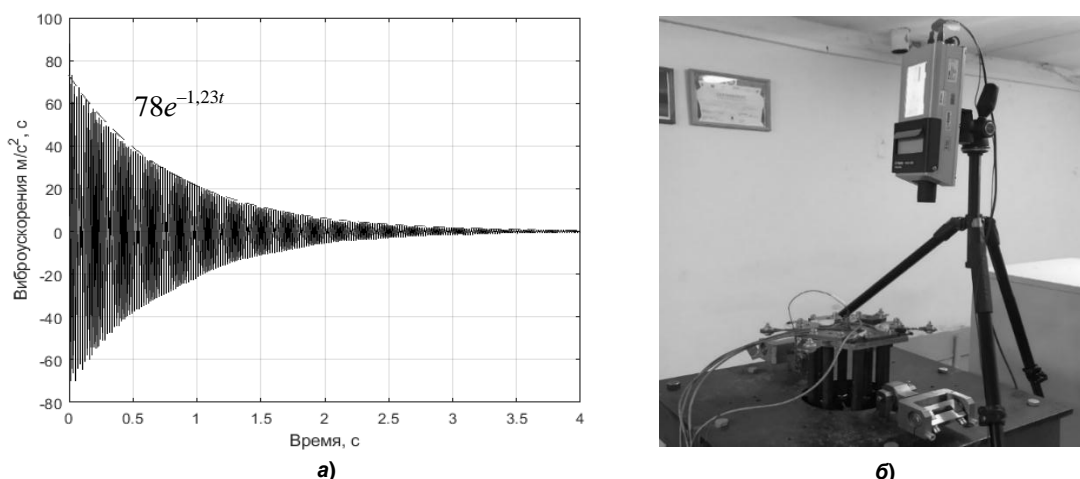


Рис. 6. Характерная виброграмма затухающих колебаний (а) и лазерный виброметр с образцами в оснастке (б)

**Оценка долговечности частотными методами**

Долговечность частотными методами определяется с помощью спектральной плотности напряжений в наиболее нагруженной точке. Оценка выполнялась двумя методами: методом для узкополосного процесса и методом Дирлика. Результаты расчетов с учетом вариативности демпфирования показаны на рис. 7.

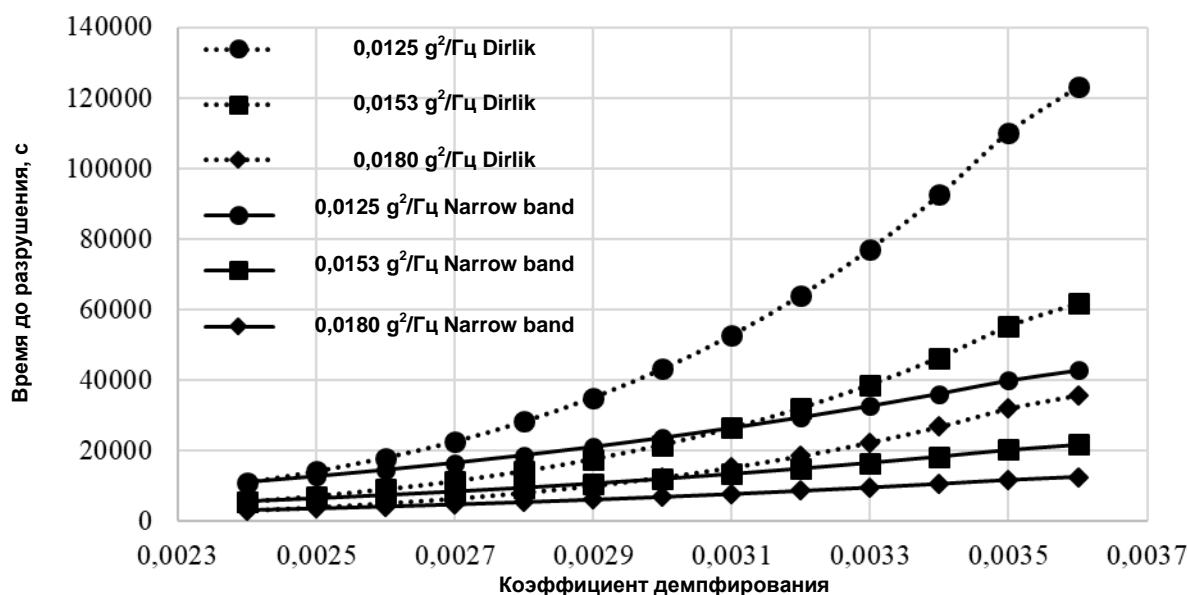


Рис. 7. Долговечности образцов в зависимости от коэффициента демпфирования

Сравнивая полученные значения, видим, что метод Дирлика даёт больший допустимый диапазон долговечностей, чем метод для узкополосного процесса. При малых значениях коэффициента демпфирования долговечности, определенные методами Дирлика и для узкополосного случайного процесса, показывают близкие значения, разница не превышает 2 %. С увеличением демпфирования разница увеличивается до 64 %.

**Экспериментальная верификация**

Заключительным этапом исследования является экспериментальная верификация проведенных расчетов. Испытания проведены при консольном изгибе образцов с заданием случайного воздействия. Образцы испытывались до разрушения, общий вид испытательной установки с образцами показан на рис. 8, а. Реализовано три случая нагружения: 0,018, 0,153 и 0,0125 g<sup>2</sup>/Гц. На уровне 0,018 g<sup>2</sup>/Гц испытывалось шесть образцов, на уровне 0,0153 g<sup>2</sup>/Гц – две группы по шесть образцов, на уровне 0,0125 g<sup>2</sup>/Гц – четыре образца.



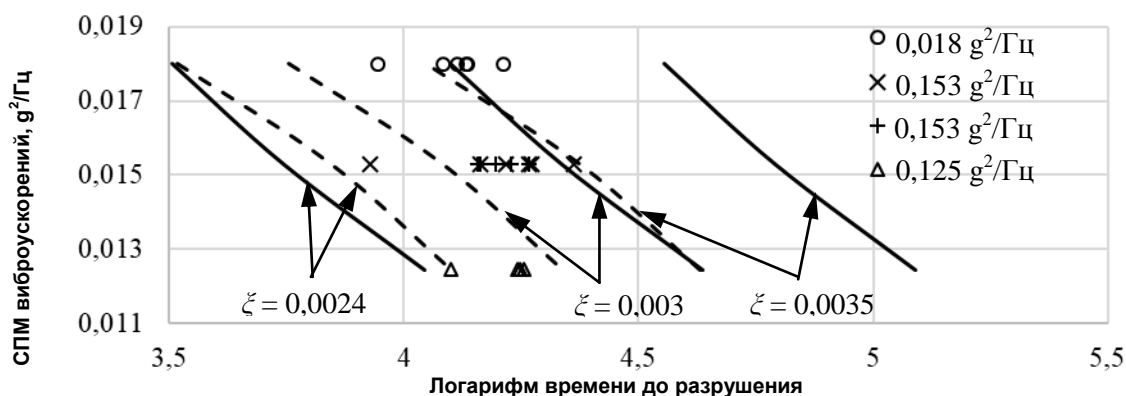


Рис. 8. Расчётные и экспериментальные результаты:  
пунктирная линия – долговечность по методу для узкополосного процесса,  
сплошная линия – долговечность по методу Дирлика,  
маркеры – экспериментальные данные

Сравнение экспериментальных результатов с расчётными зависимостями представлено на рис. 8, б. Видно, что экспериментальные данные находятся практически полностью в пределах диапазона, ограниченного кривыми, полученными методом для узкополосного процесса, и полностью входят в диапазон, ограниченный кривыми, полученными методом Дирлика. Анализируя полученные результаты, важно отметить сильное влияние коэффициента демпфирования на расчётную долговечность объектов исследования. В таблице приведена погрешность экспериментальных данных в сравнении с кривыми, полученными численными методами, для значений коэффициента демпфирования  $\zeta = 0,003$ . В данном случае коэффициент демпфирования выбирался как среднее значение исследуемого диапазона его изменения.

Разница между экспериментальными и численными результатами ( $\zeta = 0,003$ )

Номер образца	Погрешность, %					
	Метод для узкополосного процесса			Метод Дирлика		
	0,0125 g <sup>2</sup> /Гц	0,0153 g <sup>2</sup> /Гц	0,0180 g <sup>2</sup> /Гц	0,0125 g <sup>2</sup> /Гц	0,0153 g <sup>2</sup> /Гц	0,0180 g <sup>2</sup> /Гц
1	-35	-13	20	-145	-103	-43
2	-88	17	46	-243	-49	3
3	-32	22	42	-140	-40	-4
4	-32	32	48	-140	-23	7
5	-	35	49	-	-17	8
6	-	36	57	-	-16	23
Среднее	-47	21	44	-167	-41	-1

Из таблицы видно, что на низком уровне (0,0125 g<sup>2</sup>/Гц) СПМ-виброускорений численные методы дают завышенную оценку долговечности: метод для узкополосного процесса завышает оценку в среднем на 47 %, метод Дирлика – в среднем на 167 %. При увеличении СПМ-виброускорений метод для узкополосного процесса занижает оценку долговечности (21 % для СПМ 0,0153 g<sup>2</sup>/Гц и 44 % для СПМ 0,0180 g<sup>2</sup>/Гц). Метод Дирлика даёт завышенную оценку (41 % для СПМ 0,0153 g<sup>2</sup>/Гц и 1% для СПМ 0,0180 g<sup>2</sup>/Гц).

### Выводы

Исследовано влияние демпфирования на долговечность при расчёте частотными методами. Разработана конечно-элементная модель исследуемого объекта для получения спектральной плотности напряжений в наиболее нагруженной точке. Экспериментально выявлен диапазон изменения коэффициента демпфирования объекта исследования. Выполнены численные расчёты на долговечность с учётом коэффициента демпфирования методами для узкополосного процесса и методом Дирлика.

Установлено, что метод Дирлика более чувствителен к изменению демпфирования конструкции. При этом для низкого уровня нагружения разница рассчитанной долговечности в сравнении с полученной экспериментально достигает 167 %, с увеличением уровня нагрузок разница снижается до 1 %. Для узкополосного процесса разница рассчитанной долговечности в сравнении с полученной экспериментально для всех уровней нагружения в среднем варьируется в пределах 50 %. Таким образом, величина коэффициента демпфирования может существенно влиять на расчётную долговечность, изменяя её в разы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-10097, <https://rscf.ru/project/23-29-10097/>.

### Литература

1. A Comparative Review of Time- and Frequency-Domain Methods for Fatigue Damage Assessment / M. Muñiz-Calvente, A. Álvarez-Vázquez, F. Pelayo *et al.* // *Int. J. Fatigue*. – 2022. – Vol. 163. – P. 107069.
2. Rain Flow Method / T. Endo, M. Matsuishi, K. Mitsunaga *et al.* // *Kyushu Institute of Technology Academic Repository*. – 1974. – Vol. 28. – P. 33–62.
3. Gadolina, I.V. Varied Approaches to Loading Assessment in Fatigue Studies / I.V. Gadolina, N.A. Makhutov, A.V. Erpalov // *Int. J. Fatigue*. – 2021. – Vol. 144. – P. 106035.
4. Zorman, A. Vibration Fatigue by Spectral Methods – A Review with Open-Source Support / A. Zorman, J. Slavič, M. Boltežar // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2023. – Vol. 190. – P. 110149.
5. Benasciutti, D. Frequency-Based Fatigue Analysis of Non-Stationary Switching Random Loads / D. Benasciutti, R. Tovo // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2007. – Vol. 30, no. 11. – P. 1016–1029.
6. Braccesi, C. Random Fatigue. A New Frequency Domain Criterion for the Damage Evaluation of Mechanical Components / C. Braccesi, F. Cianetti, L. Tomassini // *Int. J. Fatigue*. – 2015. – Vol. 70. – P. 417–427.
7. Park, J.B. A New Fatigue Prediction Model for Marine Structures Subject to Wide band Stress Process / J.B. Park, J. Choung, K.S. Kim // *Ocean Eng.* – 2014. – Vol. 76. – P. 144–151.
8. Evaluation of Mechanical Component Fatigue Behavior under Random Loads: Indirect Frequency Domain Method / C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori, D. Pioli // *Int. J. Fatigue*. – 2014. – Vol. 61. – P. 141–150.
9. Marques, J.M.E. Fatigue Analysis of Nonstationary Random Loadings Measured in an Industrial Vehicle Wheel: Uncertainty of Fatigue Damage / J.M.E. Marques, L. Solazzi, D. Benasciutti // *Metals*. – 2022. – Vol. 12, no. 4. – P. 616.
10. Akbaba, Ö.M. Vibration Based Fatigue Analysis of a Structure Integrated on an Air Vehicle by Using Experimental and Theoretical Methods / Ö.M. Akbaba, B. Yildirim, G. Canbaloglu // *Results Eng.* – 2022. – Vol. 15. – P. 100549.
11. Demirel, G.I. Implementation of Dirlik's Damage Model for the Vibration Fatigue Analysis / G.I. Demirel, A. Kayran // *Procedia Struct. Integr.* – 2019. – Vol. 21. – P. 101–111.
12. Wang, Y. Adapted Locati Method used for Accelerated Fatigue Test under Random Vibrations / Y. Wang, R. Serra, E.P. Argoul // *Procedia Struct. Integr.* – 2019. – Vol. 19. – P. 674–681.
13. Fatigue Life Estimation of a Military Aircraft Structure subjected to Random Loads / G. Zucca, F. Cianetti, M. Palmieri *et al.* // *Procedia Struct. Integr.* – 2018. – Vol. 12. – P. 183–195.
14. Non-Gaussianity and Non-Stationarity in Vibration Fatigue / M. Palmieri, M. Česnik, J. Slavič *et al.* // *Int. J. Fatigue*. – 2017. – Vol. 97. – P. 9–19.
15. Kihm, F. Influence of the Modal Damping on the Estimated Fatigue Life / F. Kihm, A. Langelier, K. Munson // *Procedia Eng.* – 2018. – Vol. 213. – P. 270–281.
16. Fatigue Reliability Analysis System for Key Components of Aero-Engine / H. Qi, Y. Lu, S. Song, Q. Xu // *International Journal of Aerospace Engineering*. – 2022. – Vol. 2022. – Article ID: 1143901.
17. Zorman, A. Short-Time Fatigue-Life Estimation for Non-Stationary Processes Considering Structural Dynamics / A. Zorman, J. Slavič, M. Boltežar // *International Journal of Fatigue*. – 2021. – Vol. 147. – P. 106178.

18. Мыльников, В.В. Метод изучения частотной стабильности материалов при испытаниях на многоцикловую усталость стали / В.В. Мыльников, Э.А. Дмитриев // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2023. – Т. 66, № 3. – С. 367–375.
19. Rezaei, R. Fatigue Life Sensitivity of Monopile-Supported Offshore Wind Turbines to Damping / R. Rezaei, P. Fromme, P. Duffour // Renewable Energy. – 2018. – Vol. 123. – P. 450–459.
20. Miles, J.W. On Structural Fatigue under Random Loading / J.W. Miles // J. Aeronaut. Sci. – 1954. – Vol. 21, no. 11. – P. 753–762.
21. Dirlik, T. Application of Computers in Fatigue Analysis: PhD thesis / T. Dirlik. – University of Warwick., UK, 1985. – 234 p.
22. Mršnik, M. Frequency-Domain Methods for a Vibration-Fatigue-Life Estimation – Application to Real Data / M. Mršnik, J. Slavič, M. Boltežar // International Journal of Fatigue. – 2013. – Vol. 47. – P. 8–17.
23. ГОСТ 25.502-79. Методы механических испытаний металлов. Метод испытаний на усталость. – М: Изд-во стандартов, 1979. – 44 с.
24. Нашиф, А. Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Д. Хендерсон. – М.: Мир, 1988. – 448 p.

Поступила в редакцию 28 сентября 2023 г.

### Сведения об авторах

Хорошевский Кирилл Антонович – аспирант, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: khoroshevskiiika@susu.ru.

Ерпалов Алексей Викторович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Гадолина Ирина Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация.

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 47–57

---

DOI: 10.14529/mmp230406

## A COMPUTATIONAL AND EXPERIMENTAL STUDY INTO THE INFLUENCE OF STRUCTURAL DAMPING ON A STRUCTURE'S DURABILITY UNDER RANDOM LOADING

**K.A. Khoroshevskii<sup>1</sup>, A.V. Erpalov<sup>1</sup>, I.V. Gadolina<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

E-mail: khoroshevskiiika@susu.ru

**Abstract.** Mechanical engineering products are often subjected to dynamic impact during operation. The analysis of the durability of structures functioning under random multi-frequency loading requires taking into account their dynamic parameters (natural frequencies and vibration forms, damping, etc.). This paper analyzes the influence of the damping coefficient on the durability of a structurally similar specimen using a method for the narrow-band process and the Dirlik method. A computational scheme based on a finite element model determines the stress spectral density. The study defines the range of the damping coefficient variation by experiment and calculates the durability of the damping coefficient. The influence of damping on durability is analyzed by different methods. The calculations are experimentally verified.

**Keywords:** fatigue life; frequency methods; damping coefficient; power spectral density.

### References

1. Muñiz-Calvente M., Álvarez-Vázquez A., Pelayo F., Aenlle M., García-Fernández N., Lamela-Rey M.J. A Comparative Review of Time- and Frequency-Domain Methods for Fatigue Damage Assessment. *Int. J. Fatigue*, 2022, Vol. 163, p. 107069. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107069
2. Endo T., Matsuishi M., Mitsunaga K., Kobayashi K., Takahashi K. Rain Flow Method. *Bulletin of the Kyushu Institute of Technology. Science and technology*, 1974, Vol. 28, pp. 33–62. (in Jap.). <http://hdl.handle.net/10228/3927>
3. Gadolina I.V., Makhutov N.A., Erpalov A.V. Varied Approaches to Loading Assessment in Fatigue Studies. *Int. J. Fatigue*, 2021, Vol. 144, p. 106035. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2020.106035
4. Zorman A., Slavič J., Boltežar M. Vibration Fatigue by Spectral Methods – A Review with Open-Source Support. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, Vol. 190, p. 110149. DOI: 10.1016/j.ymsp.2023.110149
5. Benasciutti D., Tovo R. Frequency-Based Fatigue Analysis of Non-Stationary Switching Random Loads. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2007, Vol. 30, no. 11, pp. 1016–1029. DOI: 10.1111/j.1460-2695.2007.01171.x
6. Braccési C., Cianetti F., Tomassini L. Random Fatigue. A New Frequency Domain Criterion for the Damage Evaluation of Mechanical Components. *Int. J. Fatigue*, 2015, Vol. 70, pp. 417–427. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2014.07.005
7. Park J.B., Choung J., Kim K.S. A New Fatigue Prediction Model for Marine Structures Subject to Wide band Stress Process. *Ocean Eng.*, 2014, Vol. 76, pp. 144–151. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2013.11.002
8. Braccési C., Cianetti F., Lori G., Pioli D. Evaluation of Mechanical Component Fatigue Behavior under Random Loads: Indirect Frequency Domain Method. *Int. J. Fatigue*, 2014, Vol. 61, pp. 141–150. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2013.11.017
9. Marques J.M.E., Solazzi L., Benasciutti D. Fatigue Analysis of Nonstationary Random Loadings Measured in an Industrial Vehicle Wheel: Uncertainty of Fatigue Damage. *Metals*, 2022, Vol. 12, no. 4, p. 616. DOI: 10.3390/met12040616
10. Akbaba Ö.M., Yildirim B., Canbaloğlu G. Vibration Based Fatigue Analysis of a Structure Integrated on an Air Vehicle by Using Experimental and Theoretical Methods. *Results Eng.*, 2022, Vol. 15, P. 100549. DOI: 10.1016/j.rineng.2022.100549
11. Demirel G.I., Kayran A. Implementation of Dirlik’s Damage Model for the Vibration Fatigue Analysis. *Procedia Struct. Integr.*, 2019, Vol. 21, pp. 101–111. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.12.091
12. Wang Y., Serra R., Argoul E.P. Adapted Locati method used for accelerated fatigue test under random vibrations. *Procedia Struct. Integr.*, 2019, Vol. 19, pp. 674–681. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.12.073
13. Zucca G., Cianetti F., Palmieri M., Braccési C., De Paolis F. Fatigue Life Estimation of a Military Aircraft Structure subjected to Random Loads. *Procedia Struct. Integr.*, 2018, Vol. 12, pp. 183–195. DOI: 10.1016/j.prostr.2018.11.096
14. Palmieri M., Česnik M., Slavič J., Cianetti F., Boltežar M. Non-Gaussianity and Non-Stationarity in Vibration Fatigue. *Int. J. Fatigue*, 2017, Vol. 97, pp. 9–19. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.12.017
15. Kihm F., Langelier A., Munson K. Influence of the Modal Damping on the Estimated Fatigue life. *Procedia Eng.*, 2018, Vol. 213, pp. 270–281. DOI: 10.1016/j.proeng.2018.02.028
16. Qi H., Lu Y., Song S., Xu Q. Fatigue Reliability Analysis System for Key Components of Aero-Engine. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2022, Vol. 2022, Article ID: 1143901. DOI:10.1155/2022/1143901
17. Zorman A., Slavič J., Boltežar M. Short-Time Fatigue-Life Estimation for Non-Stationary Processes Considering Structural Dynamics. *Int. J. Fatigue*, 2021, Vol. 147, p. 106178. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2021.106178
18. Myl’nikov V.V., Dmitriev E.A. A Method for Studying the Frequency Stability of Materials during Tests for Multi-Cycle Fatigue of Steel. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2023, Vol. 66, no. 3, pp. 367–375. DOI: 10.17073/0368-0797-2023-3-367-375
19. Rezaei R., Fromme P. Fatigue Life Sensitivity of Monopile-supported Offshore Wind Turbines to Damping. *Renew. Energy*, 2018, Vol. 123, pp. 450–459. DOI: 10.1016/j.renene.2018.02.086

20. Miles J.W. On Structural Fatigue under Random Loading. *J. Aeronaut. Sci.*, 1954, Vol. 21, no. 11, pp. 753–762. DOI: 10.2514/8.3199

21. Dirlik T. *Application of Computers in Fatigue Analysis*: PhD thesis. University of Warwick, UK, 1985, 234 p.

22. Mršnik M., Slavič J., Boltežar M. Frequency-Domain Methods for a Vibration-Fatigue-Life Estimation – Application to Real Data. *Int. J. Fatigue*, 2013, Vol. 47, pp. 8–17. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.07.005

23. GOST 25.502-79 *Methods of mechanical testing of metals. Method of fatigue testing*. Moscow: Izd-vo standartov Publ., 1979, 44 p.

24. Nashif A., Jones D., Henderson J. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, Chichester, 1985, 453 p.

*Received September 28, 2023*

### Information about the authors

Khoroshevskii Kirill Antonovich is Post-graduate Student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: khoroshevskiika@susu.ru.

Erpalov Aleksey Viktorovich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Gadolina Irina Victorovna is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation.

## ПРИМЕНЕНИЕ ШИРОКОДИАПАЗОННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СМЕСИ К ОПИСАНИЮ ПОВЕДЕНИЯ ПОРИСТОГО ЖЕЛЕЗА И СМЕСЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЖЕЛЕЗО

**Р.К. Бельхеева**

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация

E-mails: rumia@post.nsu.ru, rimbela@academ.org

**Аннотация.** В рамках одноконтинуальной термодинамически равновесной среды описано поведение пористого железа и смеси железа и меди. Использование этой модели позволяет достоверно описывать поведение среды при ударно-волновом нагружении и изоэнтропической разгрузке образцов сплошного и пористого железа и железосодержащей смеси, используя только параметры уравнения состояния и массовые концентрации компонентов. Проведенное сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными данными позволяет сделать вывод о возможности применения предложенного уравнения состояния при моделировании этих процессов.

*Ключевые слова:* уравнение состояния; пористое вещество; ударная адiabата; изоэнтропа разгрузки; одноконтинуальная модель; коэффициент Грюнайзена.

### Введение

Железо является одним из самых востребованных металлов. Оно используется при производстве стали и чугуна как основной компонент и входит в состав сплавов с другими металлами, что служит предпосылкой для тщательного наблюдения и изучения поведения материалов, в составе которых присутствует железо. Оно является главным конструкционным материалом, и это объясняет потребность моделирования поведения материалов из железа при различных формах нагружения. Само железо является довольно мягким материалом, поэтому его сплавляют с различными легирующими элементами для получения разнообразных сталей с заданными свойствами. Отсюда возникает необходимость использования какой-либо математической модели для описания поведения смеси при описании процессов, происходящих в материалах с содержанием различных веществ. Прежде чем описывать составные материалы, необходимо получить достоверные сведения о компонентах сложных материалов. С этой целью проводится исследование, посвященное получению параметров уравнения состояния для железа.

Железо является полиморфным материалом, известны четыре модификации железа, обозначаемые  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\epsilon$ , причем первые три формы существуют при нормальных условиях. В данной работе не проводится детализация того, какая именно модификация железа используется.

Порошковые материалы вызывают всё больший интерес в промышленности и науке. Изучение поведения пористых смесей порошковых материалов, подвергнутых импульсному сжатию, вызваны необходимостью получения новых материалов, требуемых потребностями современного производства. Учитывая востребованность и разнообразие материалов, в состав которых входит железо, построение модели уравнения состояния, позволяющей достоверное описание поведения смесей, обеспечит решение различных практических задач.

Построение уравнения состояния вещества – это непростая задача, для ее решения при рассмотрении конкретной физической системы используется какая-либо упрощенная математическая модель с ограниченной областью применения. Применяется следующий прием: из практических соображений выбирается вид уравнения состояния, а параметры этого уравнения устанавливаются путем сравнения экспериментальных и расчетных данных. Сложность описания смеси конденсированных веществ существенно возрастает. Цель настоящей работы состоит в исследовании возможности применения полученного ранее уравнения состояния смеси с коэффициентом Грюнайзена, зависимость которого от объема задается в логарифмической форме, и в подборе параметров уравнения состояния железа.

**Математическая модель уравнения состояния**

При математическом моделировании ударно-волновых явлений в качестве уравнения состояния твердых тел чаще всего используют уравнение Ми–Грюнайзена

$$P = P_X + P_T, \quad (1)$$

в котором упругая часть описывается уравнением Тета  $P_X = A \left[ (\rho/\rho_0)^n - 1 \right]$ ; тепловая составляющая описывается выражением  $P_T = \gamma \rho E_T$ . Здесь  $\rho$  – плотность среды;  $\rho_0$  – параметр уравнения состояния (в случае сплошного вещества это его плотность при нормальных условиях);  $A, n$  – константы, характеризующие вещество;  $\gamma$  – коэффициент Грюнайзена;  $E_T$  – тепловая энергия. Для задания коэффициента сжимаемости  $A$  используют выражение  $A = c_0^2 \rho_0 / n$ , где  $c_0$  – объемная скорость звука при нормальных условиях. Внутренняя энергия также представляется в виде суммы двух составляющих:

$$E = E_X + E_T. \quad (2)$$

Упругая часть внутренней энергии  $E_X$  и упругая часть давления связаны зависимостью  $E_X = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{P_X}{\rho^2} d\rho$ , тепловая часть энергии задается соотношением  $E_T = c_v (T - T_0)$ , где  $c_v$  – удельная теплоемкость;  $T$  – температура;  $T_0$  – начальная температура. Важным условием при получении уравнения состояния смеси, используемого в данной работе, являлось требование одинакового вида уравнений состояния как всех компонентов, так и смеси. Правомерность использования для воздуха уравнения состояния в данной форме показана в [1].

В данном исследовании пористое вещество рассматривается как многокомпонентная гетерогенная среда, поры которой заполнены воздухом. Поры изолированы, испарения твердого вещества не происходит, концентрация газообразного вещества вследствие действия ударной волны не изменяется. Величина начальной пористости вычисляется как отношение плотности сплошного вещества к плотности пористого вещества при нормальных условиях.

Согласно изложенным в [2] принципам построения модели взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов для простых смесей, термодинамически равновесную среду можно рассматривать как единый континуум, в уравнении состояния которого учитываются свойства всех составляющих. Условиями равновесия считаются условия равенства давлений, температур и скоростей для всех компонентов  $P_i = P$ ,  $T_i = T$ ,  $u_i = u$ , (где  $P_i, T_i, u_i$  – давление, температура и массовая скорость компонента  $i$  соответственно;  $P, T, u$  – давление, температура и массовая скорость смеси соответственно). В подобных случаях считается, что уравнения состояния компонентов в среде такие же, как в свободном состоянии. В рамках этого метода в [3] описан способ построения уравнения состояния и получены выражения для параметров уравнения состояния смеси.

Предложенная в [4] зависимость коэффициента Грюнайзена от плотности в виде

$$\gamma = \gamma_0 (\rho_0 / \rho)^{\ln(\rho/\rho_0)} \quad (3)$$

позволяет адекватно отображать поведение коэффициента Грюнайзена как для сплошных, так и для высокопористых веществ, и расширяет диапазон его применимости на область пониженных плотностей.

В выражениях для вычисления параметров уравнения состояния смеси массовая концентрация (массовая доля) компонента  $x_i$  вычисляется как отношение массы  $i$ -го компонента к массе смеси, под истинной плотностью компонента  $\rho_{ii}$  понимается масса  $i$ -го компонента в единице объема  $i$ -го компонента, индекс 0 относится к начальному состоянию:

$$n = \frac{R_1 R_3}{R_2^2} - 1, \quad A = kA_N - \frac{nR_2}{R_1}, \quad \rho_0 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{A}{P + kA_N} \right)^{1/n}, \quad \gamma_0 = \frac{n}{c_v} (\rho_0 B_1)^{\ln(\rho_0 B_1)} B_2, \quad (4)$$

где

$$R_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left( \frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i}, \quad R_2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left( \frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i} \frac{kA_N - A_i}{n_i},$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left( \frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i} (n_i + 1) \left( \frac{kA_N - A_i}{n_i} \right)^2.$$

Величины  $A_i$  упорядочены следующим образом:  $A_1 < \dots < A_N$ . При значении коэффициента  $k$ , равном двум, выполняется условие сходимости для каждого ряда. Этот факт и способ получения выражений (4) описаны в [3]. Полученное уравнение состояния смеси удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в [5].

Чтобы получить более полную информацию о поведении материалов при высоких температурах и должным образом описать полученное знание с помощью тепловой составляющей уравнения состояния, исследуют поведение пористых веществ, так как при интенсивных импульсных нагрузках возрастает доля теплового вклада в полное давление и полную энергию вещества. Изучению поведения пористых материалов в ударных волнах посвящено большое количество как экспериментальных [6–13], так и теоретических [14–17] работ. Методы исследования термодинамических свойств веществ и требования, предъявляемые к уравнениям состояния, описаны в [18, 19]. Сведения о свойствах материалов находятся в результате сопоставления экспериментальных данных и данных, полученных в результате математического моделирования ударно-волновых явлений.

Соотношения Гюгонио для находящейся в покое в невозмущенном состоянии среды используются в виде:

$$\rho_{00}(D - u_0) = \rho(D - u), \quad P - P_0 = \rho_{00}(D - u_0)(u - u_0), \quad E - E_0 = \frac{P + P_0}{2} \left( \frac{1}{\rho_{00}} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (5)$$

Здесь  $\rho_{00}$ ,  $E_0$  – соответственно плотность и энергия смеси перед фронтом ударной волны;  $u$ ,  $P$ ,  $E$  – массовая скорость, давление и энергия среды за фронтом ударной волны;  $D$  – скорость фронта ударной волны. Давление в среде перед фронтом ударной волны принимается равным нулю. Решение системы уравнений Гюгонио (5), дополненное уравнениями состояния среды (1)–(3) с параметрами (4), при заданном значении массовой скорости за фронтом ударной волны, определяет значения всех искомых величин за фронтом ударной волны.

Параметры уравнений состояния железа, меди и воздуха, которые использовались при проведении расчетов, указаны в таблице. При проведении расчетов были использованы одни и те же параметры уравнения состояния для всех значений пористости. Способность используемого уравнения состояния (1)–(3) описывать поведение материалов устанавливалась сравнением опытных и расчетных данных.

Параметры уравнений состояния воздуха, железа и меди

Вещество	$\rho_{ii0}, \text{кг/м}^3$	$A_i, \text{Па}$	$n_i$	$c_{vi}, \text{кДж/(кг} \times \text{К)}$	$\gamma_{i0}$
Воздух	1,3	$0,695 \cdot 10^{-3}$	2,20	0,718	0,16
Железо	$7,873 \cdot 10^3$	$3,153 \cdot 10^{10}$	4,3	0,465	1,75
Медь	$8,93 \cdot 10^3$	$3,295 \cdot 10^{10}$	4,25	0,382	2,00

### Сравнение с экспериментальными данными

На рис. 1–2 приведены расчетные ударные адиабаты сплошных образцов железа в координатах «массовая скорость за фронтом ударной волны–скорость фронта ударной волны» и «плотность–давление за фронтом ударной волны». Экспериментальные данные, отмеченные символами, либо лежат на расчетных кривых, либо примыкают к ним для всего диапазона давлений и плотностей. Достигнутое хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных в широком диапазоне давлений показывает, что приведенная в работе математическая модель уравнения состояния очень хорошо описывает поведение железа в ударной волне. Использование логарифмической зависимости от плотности коэффициента Грюнайзена (3) позволяет расширить диапазон применения уравнений состояния (1)–(3), достигая достоверного качественного и количественного описания результатов эксперимента. Кроме того, показатель в случае сплошного вещества в зависимости (3) уменьшается с увеличением интенсивности нагружения, что дает более плавное изменение адиабаты.



В ударно-волновых экспериментах наиболее точными и надежными являются измерения массовой скорости за фронтом ударной волны и скорости ударной волны. Остальные параметры ударной волны находятся при подстановке этих скоростей в уравнения Гюгонио. Рис. 1 и 2 для сплошного железа показывают хорошее совпадение как измеряемых величин  $u$  и  $D$ , так и величин  $\rho$  и  $P$ , полученных с помощью использования соотношений Гюгонио.

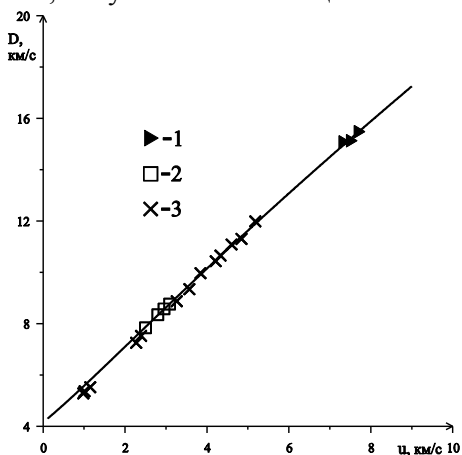


Рис. 1. Ударные адиабаты в сплошных образцах железа в координатах  $u - D$ ; расчетная кривая – сплошная линия; экспериментальные данные: 1 – [20], 2 – [21], 3 – [22]

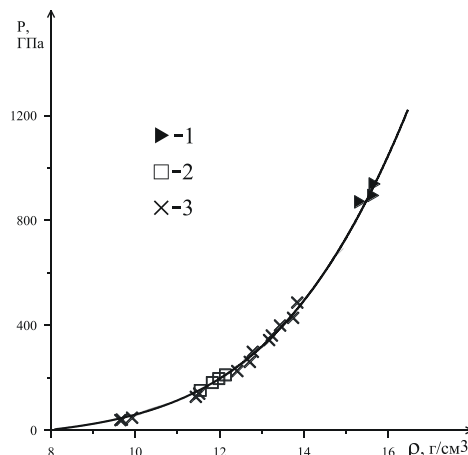


Рис. 2. Ударные адиабаты в сплошных образцах железа в координатах  $\rho - P$ ; расчетная кривая – сплошная линия; экспериментальные данные: 1 – [20], 2 – [21], 3 – [22]

Более полное представление о том, как предлагаемая модель уравнения состояния (1)–(3) с параметрами, приведенными в таблице, описывает поведение конденсированного вещества, дает изучение данных, полученных с его помощью в области пониженных плотностей, т. е. при адиабатическом расширении. С этой целью рассмотрено поведение сплошных образцов при изоэнтропической разгрузке из конечного состояния материала, подвергнутого ударно-волновому сжатию. Для этого приводятся выражения для изоэнтропии разгрузки и скорости звука в рассматриваемом веществе. Основное уравнение термодинамики  $dS = dE/T + PdV/T$ , где  $S$  – энтропия,  $v$  – удельный объем, в случае постоянной энтропии преобразуется к виду

$$\ln \left( \frac{c_v(T - T_0)}{c_{v_{in}}(T_{in} - T_0)} \right) \int_{v_{in}}^v \frac{\gamma(v)}{v} dv$$

Индексом  $in$  отмечены величины в исходном состоянии, в котором энтропия  $S = S_{in}$ . В случае постоянной удельной теплоемкости  $c_v = c_{v_{in}}$  температура и плотность на изоэнтропе связаны соотношением:

$$\frac{(T - T_0)}{(T_{in} - T_0)} = e^{-\gamma_0 \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} \left[ \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2n+1} - \left( \ln \frac{\rho_0}{\rho_{in}} \right)^{2n+1} \right] \right)} \tag{6}$$

Интеграл был вычислен путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора.

Для более детального подтверждения адекватности предлагаемой модели проведено сравнение со всеми имеющимися экспериментальными данными. Скорость звука  $C_{3g}^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$  определяет изоэнтропическую сжимаемость вещества. Для данной модели уравнения состояния с коэффициентом Грюнайзена в форме (3) выражение для скорости звука имеет вид:  $C_{s2} = \frac{1}{\rho} \left[ n(P_X + A) + \left( \gamma + 1 + 2 \ln \frac{\rho_0}{\rho} \right) P_T \right]$ . Результаты сравнения расчетных и экспериментальных скоростей звука в координатах «массовая скорость за фронтом ударной волны – скорость звука на ударной адиабате», приведенные на рис. 3, также показывают хорошее совпадение.

Для образцов сплошного железа изоэнтропы в координатах «скорость свободной поверхности – давление», рассчитанные с использованием выражения (6), изображены на рис. 4 разрывными линиями, сплошная линия – адиабата Гюгонно. Экспериментальные точки либо совпадают, либо очень близко прилежат к расчетным кривым как для давлений начала изоэнтропической разгрузки порядка 100 ГПа (кривая 1), так и для давлений 200 ГПа (кривая 3). Хорошее совпадение результатов расчетов для сплошного железа с имеющимися на данный момент экспериментальными сведениями подтверждает надежность предлагаемого уравнения состояния железа при моделировании ударно-волнового нагружения и изоэнтропической разгрузки.

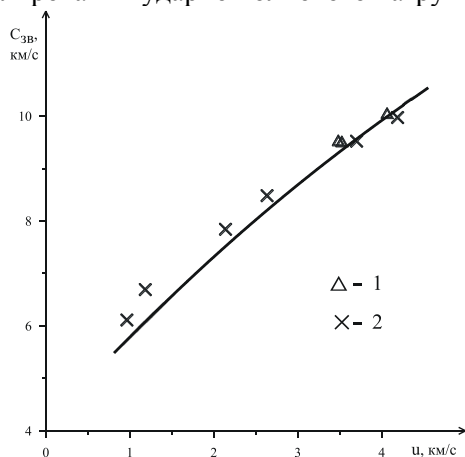


Рис. 3. Скорость звука на ударных адиабатах в сплошных образцах железа в координатах  $u - C_{зв}$ ; экспериментальные данные: 1 – [23], 2 – [24]

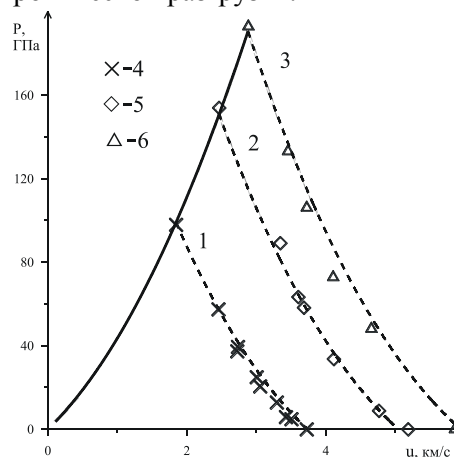


Рис. 4. Сплошная линия – адиабата Гюгонно, прерывистые линии – адиабаты Пуассона в сплошных образцах железа в  $u - P$ -координатах; экспериментальные данные: 4, 5– [25], 6 – [22]

Представление о зависимости свойств материалов от высоких температур получают, подвергая ударному обжатию образцы одного и того же материала при различных начальных пористостях. Анализируя полученные в результате экспериментов данные, устанавливают зависимость коэффициента Грюнайзена от температур и плотностей в широком диапазоне давлений. Начиная с некоторых пористостей наклон ударных адиабат изменяется: при возрастании давлений объем среды пористых материалов увеличивается, в то время как в сплошных материалах объем уменьшается. Такое поведение адиабат пористых материалов называют аномальным. Случай аномального поведения ударных адиабат не отражается при использовании общепринятой зависимости коэффициента Грюнайзена, описываемого формулой  $\gamma = \gamma_0 (\rho_0 / \rho)^l$ , где  $l > 0$ . Применение этой зависимости для описания коэффициента Грюнайзена при моделировании импульсных нагружений для материалов с высокой пористостью приводит к тому, что коэффициент Грюнайзена возрастает с ростом интенсивности ударной волны. Это противоречит наблюдениям. В [3] показано, что в случае высокой пористости образца для адекватного отображения расчетных ударных адиабат необходимо показатель задавать отрицательным числом  $l < 0$ . В предлагаемом варианте описания коэффициента Грюнайзена в форме (3) знак показателя зависит от величины аргумента логарифма и при  $\rho / \rho_0 < 1$  показатель становится отрицательным. Предложенное уравнение состояния с коэффициентом Грюнайзена в виде (3) позволяет описать аномальный ход адиабат в области пониженных плотностей, что демонстрируют рис. 5 и 6.

На рис. 5 и рис. 6 приведены ударные адиабаты образцов железа различной пористости в координатах «массовая скорость за фронтом ударной волны – скорость фронта ударной волны» и «относительная плотность – давление за фронтом ударной волны». Рядом с кривыми указаны соответствующие значения пористостей образцов, через  $\rho_{T0}$  обозначена плотность сплошного железа при нормальных условиях. Рис. 5 демонстрирует близкое прилегание измеряемых в эксперименте величин  $u$  и  $D$  к расчетным кривым для образцов со всеми приведенными пористостями, что показывает хорошее описание поведения среды предлагаемым уравнением состояния. На рис. 6 наиболее сильно от расчетных кривых отклоняются экспериментальные точки для образцов железа с пористостью, равной двадцати. Это различие может быть вызвано неучетом при моделировании ударно-волнового нагружения физико-химических процессов, происходящих при

сильном нагревании образцов железа. По расположению экспериментальных точек (излом на экспериментальной адиабате) для образцов железа с пористостью, равной десяти, можно сделать заключение о происходящем при давлениях порядка 20 ГПа полиморфном фазовом переходе. Для образцов железа с пористостью, равной  $m = 1,66$ , экспериментальные точки расположены почти вертикально, и это описывается предложенным уравнением состояния. Следует учесть, что использовались одни и те же параметры уравнения состояния для всех значений пористостей. Хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных для различных значений пористости подтверждает правомочность использования этой модели уравнения состояния.

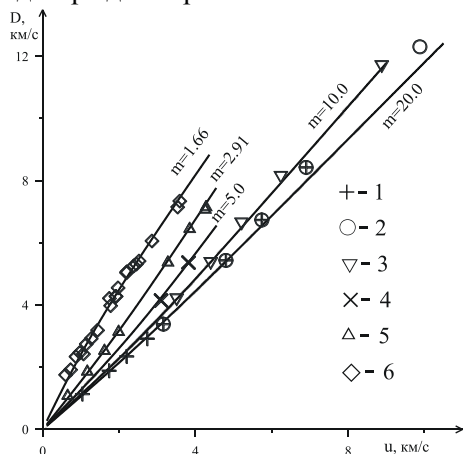


Рис. 5. Ударные адиабаты в пористых образцах железа в координатах  $u - D$ ; экспериментальные данные: 1 – [26], 2, 3, 4 – [27], 5 – [28], 6 – [29]

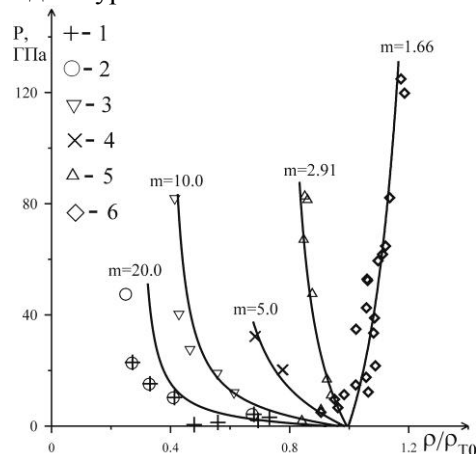


Рис. 6. Ударные адиабаты в пористых образцах железа в координатах  $\rho / \rho_{T0} - P$ ; экспериментальные данные: 1 – [26], 2, 3, 4 – [27], 5 – [28], 6 – [29]

Далее на рис. 7 и рис. 8 проведено сравнение расчетных и экспериментальных ударных адиабат для смеси железа и меди с массовыми концентрациями железа и меди 0,49 и 0,51 соответственно. В работе [4] проведено исследование применимости аналогичной модели уравнения состояния и получены параметры для описания меди. Экспериментальные данные приведены для сплава. В расчетах сплав рассматривается как смесь с пористостью, равной единице ( $m = 1$ ). Ударная адиабата смеси железо–медь находится между ударными адиабатами железа и меди. Результаты расчетов демонстрируют удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных в пределах точности экспериментов.

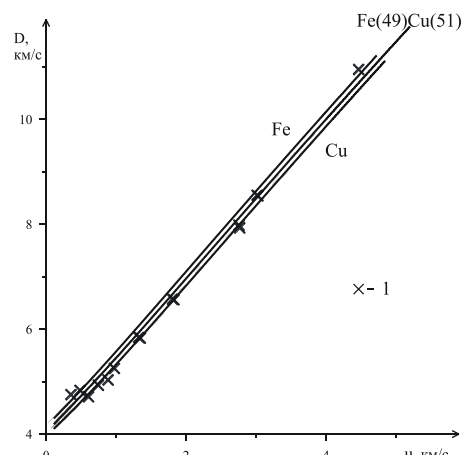


Рис. 7. Ударные адиабаты в сплошных образцах железа, меди и смеси железо–медь в координатах  $u - D$ ; экспериментальные данные: 1 – [30]

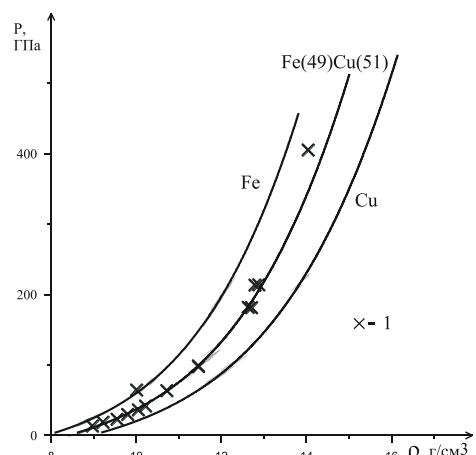


Рис. 8. Ударные адиабаты в сплошных образцах железа, меди и смеси железо–медь в координатах  $\rho - P$ ; экспериментальные данные: 1 – [30]

### Выводы

Полученные результаты свидетельствуют о возможности описания предлагаемым уравнением состояния монолитных и пористых материалов для ударных сжатий и последующих разгрузок. Использование логарифмической зависимости коэффициента Грюнайзена позволяет расширить диапазон плотностей и описывать поведение вещества как в области разрежения на изоэн-

тропе разгрузки, так и для образцов со значительной пористостью. Таким образом, предложенная простая модель уравнения состояния смеси, параметры которой определяются параметрами входящих в смесь составляющих и массовыми концентрациями компонентов, позволяет производить достоверные расчеты для пористых смесей. Показано, что эта модель адекватно описывает экспериментальные данные по ударно-волновому нагружению и адиабатической нагрузке образцов железа различной пористости и смеси железо–медь.

### Литература

1. Бельхеева, Р.К. Построение уравнения состояния пористой смеси конденсированных компонентов / Р.К. Бельхеева // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 4. – С. 3–15.
2. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
3. Бельхеева, Р.К. Уравнение состояния сильнопористого вещества / Р.К. Бельхеева // ТВТ. – 2015. – Т. 53, № 3. – С. 367–377.
4. Бельхеева, Р.К. Модель коэффициента Грюнайзена для широкого диапазона плотностей на примере меди / Р.К. Бельхеева // ТВТ. – 2021. – Т. 59, № 4. – С. 514–519.
5. Широкодиапазонные уравнения состояния конструкционных материалов / В.В. Валько, И.В. Ломоносов, А.В. Острик и др. // Физика ядерного взрыва: В 5 т. Т. 2. Действие взрыва. – М.: Физматлит. – 2010. – С. 140–228.
6. Фунтиков, А.И. Ударное сжатие пористого урана / А.И. Фунтиков // ТВТ. – 1998. – Т. 36, № 3. – С. 406–410.
7. Трунин Р.Ф., Симаков Г.В., Медведев А.Б. Сжатие титана в ударных волнах // ТВТ. – 1999. – Т. 37, № 6. – С. 881–886.
8. Ударное сжатие и изоэнтропическое расширение пористых образцов вольфрама, никеля и олова / Л.Ф. Гударенко, О.Н. Гущина, М.В. Жерноклетов // ТВТ. – 2000. – Т. 38, № 3. – С. 437–444.
9. Трунин, Р.Ф. Ударное сжатие пористой меди при мегабарных давлениях / Р.Ф. Трунин, Н.В. Панов // ТВТ. – 2000. – Т. 38, № 5. – С. 754–758.
10. Трунин, Р.Ф. Ударное сжатие пористого алюминия и никеля при мегабарных давлениях / Р.Ф. Трунин, Г.В. Симаков, Н.В. Панов // ТВТ. – 2001. – Т. 39, № 3. – С. 430–436.
11. Ослабление действия отраженной ударной волны при взрыве внутри объема со стенками из гранулированного материала / Т.В. Баженова, В.В. Голуб, О.А. Мирова // ТВТ. – 2012. – Т. 50, № 3. – С. 476–479.
12. Ударная сжимаемость и уравнение состояния полиамида / А.В. Бушман, М.В. Жерноклетов, И.В. Ломоносов и др. // Письма в ЖЭТФ. – 1993. – Т. 58, № 8. – С. 640–644.
13. Милявский В.В. Эмпирическая формула для оценки параметров ударного сжатия пористого вещества // ТВТ. – 2000. – Т. 38, № 2. – С. 232–241.
14. О сходящихся ударных волнах в пористых средах / А.А. Чаракхч'ян, И.В. Ломоносов, В.В. Милявский и др. // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, № 1. – С. 72–77.
15. Shock Compression of some Porous Media in Conical Targets: Numerical Study / A.A. Charakhch'yan, K.V. Khishchenko, V.E. Fortov *et al.* // Shock Waves. – 2011. – Vol. 21, no. 1. – P. 35–42.
16. Hydrodynamic Simulation of Converging Shock Waves in Porous Conical Samples Enclosed within Solid Targets / K.V. Khishchenko, A.A. Charakhch'yan, V.E. Fortov *et al.* // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 110, no. 5. – P. 053501.
17. Кинеловский, С.А. Модель поведения алюминия и смесей на его основе при ударно-волновом воздействии / С.А. Кинеловский, К.К. Маевский // ТВТ. – 2014. – Т. 52, № 6. – С. 843–851.
18. Ломоносов, И.В. Широкодиапазонные полуэмпирические уравнения состояния вещества для численного моделирования высокоэнергетических процессов / И.В. Ломоносов, С.В. Фортова // ТВТ. – 2017. – Т. 55, № 4. – С. 596–626.
19. Khishchenko, K.V. Equation of State for Niobium at High Pressures / K.V. Khishchenko // Mathematica Montisnigri. – 2020. – Vol. 47. – pp. 119–123.
20. Исследование ударной сжимаемости молибдена, титана, тантала и железа / К.К. Крупников, М.И. Баканова, М.И. Бражник, Р.Ф. Трунин // ДАН СССР. – 1963. – Т.148, Вып. 6. – С. 1302–1305.

21. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ / Р.Ф. Трунин, Л.Ф. Гударенко, М.В. Жерноклетов, Г.В. Симаков. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. – 531 с.
22. Динамическая сжимаемость и уравнения состояния железа при высоких давлениях / Л.В. Альтшулер, К.К. Крупников, Б.Н. Леденев и др. // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, Вып. 4. – С. 874–885.
23. Brown, J.M. Phase Transitions, Grüneisen Parameter, and Elasticity for Shocked Iron Between 77 GPa and 400 GPa / J.M. Brown, R.G. McQueen // J. Geophys. Res. Ser. B. – 1986. – Vol. 91, Iss. 7. – P. 7485–7494.
24. Изэнтропическая сжимаемость алюминия, меди, свинца и железа при высоких давлениях / Л.В. Альтшулер, С.Б. Кормер, М.И. Бражник и др. // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 38, Вып. 4. – С. 1061–1073.
25. Изэнтропы расширения алюминия, железа, молибдена, свинца и тантала / М.В. Жерноклетов, Г.В. Симаков, Ю.Н. Сутулов, Р.Ф. Трунин // ТВТ. – 1995. – Т. 33, № 1. – С. 40–43.
26. Ударно-волновое сжатие сильнонеидеальной плазмы металлов и ее термодинамика / В.К. Грязнов, М.В. Жерноклетов, И.Л. Иосилевский, Г.В. Симаков и др. // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 114, Вып. 4(10). – С. 1242–1265.
27. Shock Compression of Highly Porous Samples of Copper, Iron, Nickel and their Equation of State / R.F. Trunin, M.V. Zhernokletov, G.V. Simakov *et al.* // AIP Conf. Proc. 10 July 1998. – 1998. – Vol. 429, Iss. 1. – P. 83–86.
28. Сжимаемость пористых металлов в ударных волнах / Р.Ф. Трунин, Г.В. Симаков, Ю.Н. Сутулов и др. // ЖЭТФ. – 1989. – Т. 96, Вып. 3. – С. 1024–1038.
29. Marsh S.P. LASL Shock Hugoniot Data / S.P. Marsh. – Berkeley, Univ. California Press, 1980. – 658 p.
30. Ударное сжатие металлических сплавов / М.Ю. Белякова, М.В. Жерноклетов, Ю.Н. Сутулов, Р.Ф. Трунин // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. – № 1. – С. 99–172.

Поступила в редакцию 10 мая 2023 г.

### Сведения об авторе

Бельхеева Румия Катдусовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация, e-mails: rumia@post.nsu.ru, rimbela@academ.org.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 58–67*

DOI: 10.14529/mmph230407

## THE APPLICATION OF THE WIDE-RANGE EQUATION OF STATE TO THE BEHAVIOR OF POROUS IRON AND IRON CONTAINING MIXTURES

**R.K. Belkheeva**

*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation  
E-mails: rumia@post.nsu.ru, rimbela@academ.org*

**Abstract.** This paper considers the behavior of porous iron and iron-copper mixtures within a single-continuum thermodynamic equilibrium medium. This model describes the behavior of the medium under the shock-wave loading and the isentropic unloading of solid and porous iron and iron-containing mixture samples using only the parameters of the equation of state and mass concentrations of the components. The comparison of the calculated results with experimental data suggests the effectiveness of the proposed equation for modeling.

**Keywords:** *equation of state; porous substance; shock adiabatic; unloading isentropy; single-continuum model; Grüneisen coefficient.*

References

1. Bel'kheeva R.K. Construction of the Equation of State of a Porous Mixture of Condensed Species. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, Vol. 53, Iss. 4, pp. 471–481. DOI: 10.1134/S0021894412040013
2. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* (Fundamentals of Heterogeneous Media Mechanics). Moscow, Nauka Publ., 1978, 336 p. (in Russ.).
3. Belkheeva R.K. Equation of State for a Highly Porous Material. *High temperature*, 2015, Vol. 53, no. 3, pp. 348–357. DOI: 10.1134/S0018151X15020054
4. Belkheeva R.K. Model of the Grüneisen Coefficient for a Wide Range of Densities on the Example of Copper. *High Temperature*, 2022, Vol. 60, Iss. Suppl. 1, pp. S26–S31. DOI: 10.1134/S0018151X21040040
5. Val'ko V.V., Lomonosov I.V., Ostriuk A.V., Fortov V.E., Khishchenko K.V. *Shirokodiapazonnyye uravneniya sostoyaniya konstruktivnykh materialov* (Wide-Range Equations of State of Structural Materials). Fizika yadernogo vzryva: V 5 t. t. 2. Deystvie vzryva (Physics of a nuclear explosion: In 5 vols., Vol. 2. The Effect of the Explosion.). Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, pp. 140–228.
6. Funtikov A.I. Shock Compression of Porous Uranium. *High Temperature*, 1998, Vol. 36, no. 3, pp. 384–388.
7. Trunin R.F., Simakov G.V., Medvedev A.B. Compression of Titanium in Shock Waves. *High Temperature*, 1999, Vol. 37, no. 6, pp. 851–856.
8. Gudarenko L.F., Gushchina O.N., Zhernokletov M.Y., Medvedev A.B., Simakov G.V. Shock Compression and Isentropic Expansion of Porous Samples of Tungsten, Nickel, and Tin. *High Temperature*, 2000, Vol. 38, Iss. 3, pp. 413–420. DOI: 10.1007/BF02756001
9. Trunin R.F., Panov N.V. Shock Compression of Porous Copper at Megabar Pressures. *High Temperature*, 2000, Vol. 38, Iss. 5, pp. 728–731. DOI: 10.1007/BF02755925
10. Trunin R.F., Simakov G.V., Panov N.V. Shock Compression of Porous Aluminum and Nickel at Megabar Pressures. *High Temperature*, 2001, Vol. 39, no.3, pp. 401–406.
11. Bazhenova T.V., Golub V.V., Mirova O.A., Kotelnikov A.L., Lenkevich D.A. Attenuation of Impact of the Reflected Shock Wave upon an Explosion Inside a Vessel with Granular Material Walls. *High Temperature*, 2012, Vol. 50, Iss. 3, pp. 447–450. DOI: 10.1134/S0018151X12030054
12. Bushman A.V., Lomonosov I.V., Fortov V.E., Khishchenko K.V., Zhernokletov M.V., Sutulov Yu.N. Shock Compressibility and Equation of State of a Polyimide. *JETP Lett.*, 1993, Vol. 58, no. 8, C. 620-624.
13. Milyavskii V.V. Empirical Estimates of Shock Compression Parameters for Porous Materials. *High Temperature*, 2000, Vol. 38, Iss. 2, pp. 215–223. DOI: 10.1007/BF02755948
14. Charakhch'yan A.A., Lomonosov I.V., Milyavskiy V.V., Fortov V.E., Frolova A.A., Khishchenko K.V., Shurshalov L.V. O skhodyashchikhsya udarnykh volnakh v poristykh sredakh (On Converging Shock Waves in Porous Media). *Pis'ma v ZhTF*, 2004, Vol. 30, no. 1, pp. 72–77. (in Russ.).
15. Charakhch'yan A.A., Khishchenko K.V., Fortov V.E., Frolova A.A., Milyavskiy V.V., Shurshalov L.V. Shock Compression of some Porous Media in Conical Targets: Numerical Study. *Shock Waves*, 2011, Vol. 21, no. 1, pp. 35–42. DOI: 10.1007/s00193-010-0274-y
16. Khishchenko K.V., Charakhch'yan A.A., Fortov V.E., Frolova A.A., Milyavskiy V.V., Shurshalov L.V. Hydrodynamic Simulation of Converging Shock Waves in Porous Conical Samples Enclosed within Solid Targets. *J. Appl. Phys.*, 2011, Vol. 110, no. 5, pp. 053501. DOI: 10.1063/1.3605556
17. Kinelovskii S.A., Maevskii K.K. Model of the Behavior of Aluminum and Aluminum-Based Mixtures under Shock-Wave Loading. *High Temperature*, 2014, Vol. 52, Iss. 6, pp. 821–829. DOI: 10.1134/S0018151X14050083
18. Lomonosov I.V., Fortova S.V. Wide-Range Semiempirical Equations of State of Matter for Numerical Simulation on High-Energy Processes. *High Temperature*, 2017, Vol. 55, Iss. 4, pp. 585–610. DOI: 10.1134/S0018151X17040113
19. Khishchenko K.V. Equation of State for Niobium at High Pressures. *Mathematica Montisnigri*, 2020, Vol. 47, pp. 119–123. DOI: 10.20948/mathmontis-2020-47-10

20. Krupnikov K.K., Bakanova M.I., Brazhnik M.I., Trunin R.F. Issledovanie udarnoy szhimaemosti molibdena, titana, tantala i zheleza (Investigation of the Impact Compressibility of Molybdenum, Titanium, Tantalum and Iron). *DAN SSSR*, 1963, Vol. 148, Iss. 6, pp.1302–1305.
21. Trunin R.F., Gudarenko L.F., Zhernokletov M.V., Simakov G.V. *Eksperimental'nye dan-nye po udarno-volnovomu szhatiyu i adiabaticheskomu rasshireniyu kondensirovannykh veshchestv* (Experimental Data on Shock-Wave Compression and Adiabatic Expansion of Condensed Substances). Sarov, RFYaTs-VNIIEF Publ., 2006, 531 p. (in Russ.).
22. Al'tshuler L.V., Krupnikov K.K., Ledenev B.N., Zhuchigin V.I., Brazhnik M.I. *Dinamicheskaya szhimaemost' i uravneniya sostoyaniya zheleza pri vysokikh davleniyakh* (Dynamic Compressibility and Equations of State of Iron at High Pressures). *ZhETF*, 1958, Vol. 34, Iss. 4, pp. 874–885. (in Russ.).
23. Brown J.M., McQueen R.G. Phase Transitions, Gruneisen Parameter, and Elasticity for Shocked Iron Between 77 GPa and 400 GPa. *J. Geophys. Res. Ser. B.*, 1986, Vol. 91, Iss. 7, pp. 7485–7494. DOI: 10.1029/JB091iB07p07485
24. Al'tshuler L.V., Kormer S.B., Brazhnik M.I., Vladimirov L.A., Speranskaya M.P., Fun-tikov A.I. *Izotropicheskaya szhimaemost' alyuminiya, medi, svintsa i zheleza pri vysokikh davleniyakh* (Isentropic Compressibility of Aluminum, Copper, Lead and Iron at High Pressures). *ZhETF*, 1960, Vol. 38, Iss. 4, pp. 1061–1073. (in Russ.).
25. Zhernokletov M.V., Simakov G.V., Sutulov Yu.N., Trunin R.F. Expansion Isentropes of Aluminum, Iron, Molybdenum, Lead, and Tantalum. *High Temperature*, 1995, Vol. 33, no. 1, pp. 36–39.
26. Gryaznov V.K., Fortov V.E., Zhernokletov M.V., Simakov G.V., Trunin R.F., Trusov L.I., Iosilevski I.L. Shock Compression and Thermodynamics of Highly Nonideal Metallic Plasma. *JETP*, 1998, Vol. 87, no 4, p. 678–690. DOI: 10.1134/1.558710
27. Trunin R.F., Zhernokletov M.V., Simakov G.V., Gudarenko L.F., Gushchina O.N. Shock Compression of Highly Porous Samples of Copper, Iron, Nickel and their Equation of State. *AIP Conf. Proc.*, 10 July 1998, 1998, Vol. 429, Iss. 1, pp. 83–86. DOI: 10.1063/1.55599
28. Trunin R.F., Simakov G.V., Sutulov Yu.N., Medvedev A.B., Rogozkin B.D., Fedorov Yu.N. *Szhimaemost' poristykh metallov v udarnykh volnakh* (Compressibility of Porous Metals in Shock Waves). *ZhETF*, 1989, Vol. 96, Iss. 3, pp. 1024–1038. (in Russ.).
29. Marsh S.P. (Ed.) *LASL Shock Hugoniot Data*. Berkeley, Univ. California Press, 1980, 658 p.
30. Belyakova M.Yu., Zhernokletov M.V., Sutulov Yu.N., Trunin R.F. *Udarное szhatie metallicheskih splavov* (Impact Compression of Metal Alloys). *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1991, no. 1, pp. 99–172. (in Russ.).

Received May 10, 2023

### Information about the author

Belkheeva Rumiya Katdusovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Modelling Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, e-mails: rumia@post.nsu.ru, rimbela@academ.org.

## СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО И ПЕРВОПРИНЦИПНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ Fe–V

**А.А. Мирзоев, А.В. Верховых**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: mirzoevaa@susu.ru

**Аннотация.** Концентрационные зависимости среднего магнитного момента сплава и энтальпии растворения как функции концентрации ванадия изучены в области от 1 до 10 ат. % для неупорядоченного твердого раствора Fe–V в упорядоченном магнитном состоянии с использованием первопринципных расчетов электронной структуры в программном пакете WIEN2k. Полученные результаты сопоставлены с имеющимися в мировой литературе данными, полученными в CALPHAD-моделях. На этой основе сделан вывод о перспективах поиска возможной инверсии ближнего порядка в сплавах Fe–V по аналогии с инверсией в системе Fe–Cr.

**Ключевые слова:** *ab initio* моделирование; твердые растворы Fe–V; магнитные моменты; энтальпия растворения.

Восьмидесятилетию юбилею  
ЮУрГУ посвящается

### Введение

Твердые растворы железа с переходными элементами (Ni, Cr, Co, Mn, V) играют важную роль при конструировании специальных сталей (нержавеющие, жаропрочные, хладостойкие), поэтому история их изучения насчитывает многие десятилетия. Тем не менее, до сих пор многие термодинамические характеристики данной системы не могут считаться достоверными [1]. Это связано с тем, что термодинамическое описание методом CALPHAD требует знания разности энергий гамма- и альфа-фаз при нуле Кельвина, а энергия гамма-фазы определяется по измерениям теплоёмкости, активности, теплоты смешения в достаточно узком интервале концентраций и температур. Соответственно, экстраполяции данных эксперимента на 0 К приводит к значительной погрешности в определении энергии гамма-фазы.

Анализ результатов моделирования фазовых диаграмм и термодинамических свойств бинарных систем Fe–Cr, полученных в ряде работ (см., например, [2]), выявил принципиальные ошибки в работах, где их рассчитывают по методу CALPHAD. Так, теплота образования данных сплавов считается положительной во всем диапазоне концентраций [3], т. е. данные сплавы при низких температурах должны расслаиваться на области, обогащенные хромом и обогащенные железом (сегрегирующие сплавы). Однако с помощью нейтронографического анализа в 1984 г. [4] было показано, что параметр ближнего порядка Каули примеси Cr отрицателен при малых концентрациях, что свидетельствует о ближнем упорядочении. С увеличением концентрации выше 10 ат. % наблюдается инверсия знака этого параметра, что приводит к короткодействующей сегрегации. Этот вывод был подтвержден и уточнен в более поздней работе [5]. Более того, Сагарадзе и др. [6] обнаружили, что сплавы Fe–Cr с 5 и 9 мас. % Cr действительно демонстрируют упорядочение после термического отжига и электронного облучения, в то время как в сплавах с концентрацией Cr 13 % и выше наблюдается образование фазы, богатой Cr.

Для выяснения атомистических деталей такого поведения сплавов Fe–Cr был проведен ряд *ab initio* исследований, в которых были рассчитаны энергии смешения и энергии взаимодействия между атомами компонентов [7–9]. Было показано, что инверсия типа SRO в твердом растворе Fe–Cr обусловлена взаимным отталкиванием атомов Cr в матрице Fe при низкой концентрации и их притяжением при более высокой концентрации. Смена знака энергии взаимодействия имеет магнитную природу [8]. Обнаружено, что магнитный момент растворённых атомов Cr устанавливается антипараллельно моментам атомов ферромагнитного железа. Но по мере роста концентрации хрома между атомами которого также существует антиферромагнитное взаимодействие, возникает эффект магнитной фрустрации. При этом магнитная энергия сплава резко понижается, уменьшается и средний магнитный момент. Близкое поведение наблюдается и в системе Fe–V.



Магнитный момент одиночной примеси ванадия в железе при 0 К также антипараллелен магнитному моменту матрицы железа, а отталкивающее взаимодействие пары близкорасположенных атомов ванадия еще сильнее, чем у пары атомов хрома в Fe [10]. Отметим также существенное изменение магнитных свойств сплавов с ростом содержания V, приводящее к образованию максимума на концентрационной зависимости точки Кюри, в полной аналогии со сплавами системы Fe–Cr [11]. Это позволяет предположить, что в системе Fe–V в области небольших содержаний ванадия также можно ожидать изменения типа ближнего упорядочения, а также особенность энергии (энтальпии) смешения. Следует отметить, что существующие термодинамические CALPHAD-расчеты характеризуют ОЦК систему Fe–V, как систему с отрицательной энергией смешения во всем диапазоне концентраций [11–13]. Но, как отмечалось выше, CALPHAD-расчеты могут содержать существенные ошибки из-за того, что многие параметры модели определяются в высокотемпературной парамагнитной области и не учитывают существенный вклад, связанный с магнитным упорядочением. В связи с этим указанную инверсию типа упорядочения проще обнаружить, используя методы первопринципного компьютерного моделирования в рамках теории функционала плотности (DFT).

Несмотря на то, что ванадийсодержащие стали широко используются в промышленности и история их экспериментального изучения насчитывает десятки лет, теория процессов легирования сталей ванадием весьма далека от завершения. Укажем, что ряд основных термодинамических параметров, используемых для расчетов фазовых диаграмм (CALPHAD), которые не могут быть определены термодинамическими методами, например энергия неустойчивой ГЦК-фазы чистого ванадия, имеют очень широкий разброс. Так, в работе [11] разность энтальпий образования ГЦК и ОЦК фаз чистого ванадия составляла 9 000 Дж/моль, в работе [12] – 7500 Дж/моль, а в работе В.-J. Lee [13] она уже имеет значение 12 253 Дж/моль. Это говорит о том, что температурная зависимость энергии смешения, которая используется при экстраполяции на 0 К, определена с аналогичной погрешностью. Несомненно, что устранить указанную неопределенность можно при помощи первопринципного моделирования, чтобы получить правильные значения параметров стабильности фаз в области малых температур. Такое моделирование превратилось в весьма точный метод расчета, позволяющий воспроизводить свойства материалов с точностью, часто не уступающей точности лучших экспериментальных данных. Однако, в отличие от родственной системы Fe–Cr, для которой число публикаций, посвященных *ab initio* компьютерному моделированию, исчисляется десятками, работ по моделированию системы Fe–V очень немного. К тому же они либо были выполнены в 80-е годы [14], когда точность вычислений была не слишком высока, либо рассматривают лишь отдельные вопросы: примеси ванадия в железе [15], зависимость плотности электронных состояний от концентрации [16]. Наиболее полное и близкое к цели проекта исследование можно найти в работе О. Горбатова и Ю. Горностырева [17]. Однако и в этой работе рассмотрена лишь ограниченная область концентрации твердых растворов Fe–V, поэтому вопросы об аномальном поведении температуры Кюри и энтальпия смешения не обсуждались. Таким образом, для понимания физических особенностей системы Fe–V, несомненно, требуется проведение не только более точных, но и более широких по концентрации первопринципных расчетов. В случае неупорядоченных сплавов, обладающих магнитными свойствами, ситуация проведения DFT-расчетов существенно усложняется. Дело в том, что результаты моделирования должны быть усреднены по всем возможным конфигурациям в расположении атомов компонентов и ориентациям их магнитных моментов. Это приводит к необходимости выбора некоторой процедуры усреднения и в то же время, к резкому увеличению объема вычислений. По этой причине большая часть расчетов неупорядоченных сплавов проводилась при помощи приближения когерентного потенциала [7]. Однако следует отметить, что приближение когерентного потенциала существенно занижает локальные корреляции в расположении магнитных моментов, что при решении задач образования локальных магнитных или структурных кластеров может приводить к неточностям. Поэтому в ряде случаев необходимо проведение времязатратного, но прямого расчета энергии смешения для различных атомных и магнитных конфигураций неупорядоченного сплава, чтобы выявить указанный эффект.

В силу указанных обстоятельств, прежде чем приступить к обширной программе расчетов энергии смешения для растворов замещения Fe–V, мы посчитали нужным провести первоначальные DFT-расчеты средних магнитных моментов сплава и энтальпии растворения в магнито-

упорядоченном состоянии при 0 К как функции концентрации V, а затем сопоставить с имеющимися в литературе термодинамическими данными. В случае значительной нестыковки расчетных DFT-данных по энтальпии растворения с термодинамическими данными, полученными для парамагнитной области, можно надеяться, что учет энергии магнитного упорядочения способен обеспечить инверсию ближнего порядка и смену знака энергии смещения в растворах Fe–V. В связи с этим основными задачами данной работы являются следующие:

1. Проведение первопринципного компьютерного моделирования неупорядоченного твердого раствора системы Fe–V в упорядоченном магнитном состоянии и изучение концентрационной зависимости среднего магнитного момента сплава и энтальпии растворения как функции концентрации ванадия в области от 1 до 10 ат. %;
2. Сопоставление полученных результатов с имеющимися в мировой литературе данными по величине магнитного момента и энтальпии растворения, полученными в CALPHAD-моделях. Заключение о перспективности поиска возможной инверсии ближнего порядка в сплавах Fe–V.

### Обзор имеющихся термодинамических данных по системе Fe–V и методика первопринципного моделирования

Методы первопринципного компьютерного моделирования [18] позволяют рассчитать полную энергию модельного кристалла, образованного из периодически повторяющейся в пространстве элементарной ячейкой, в качестве которой берется определенная часть исследуемого неупорядоченного материала. Тем самым удается определить энергию неупорядоченного твердого раствора замещения при 0 К. Аналогичную величину можно получить с помощью методов термодинамики. Речь идет об энергии (энтальпии) смещения компонентов в растворе  $E_{см}$ , которая для бинарного раствора при  $T = \text{const}$  представляет разность между энергией раствора и энергиями чистых компонентов B и C, взятых в соответствующих пропорциях. В простейшем квазихимическом приближении [19]

$$E_{см} = A \cdot x_B \cdot x_C, \quad (1)$$

где  $A = \frac{1}{2} zN(2\varepsilon_{BC} - \varepsilon_{CC} - \varepsilon_{BB})$  представляет энергию взаимообмена атомов сорта B и C. Таким образом, теплота смещения прямо выражается через энергии взаимодействия  $\varepsilon_{ij}$  атомов сорта  $i$  и  $j$ . Если принять, что изменение энтропии при растворении сводится к конфигурационной энтропии для неупорядоченного распределения атомов, то получается так называемая модель регулярных растворов [19]. В этом случае параметр A не должен зависеть от концентрации, но может изменяться при варьировании температуры. В следующем приближении используется модель субрегулярных растворов, согласно которой A зависит от концентрации. В этом случае общепринято использовать полином Редлиха–Кистера [20] для представления константы A бинарного раствора. Для бинарного раствора замещения со случайным смешиванием составляющих можно написать

$$A = \sum_{k=0}^n {}^k L_{A,B} (x_A - x_B)^k \cong {}^0 L_{A,B} + {}^1 L_{A,B} (x_A - x_B),$$

где  $k$ ,  $L_{A,B}$  – параметры Редлиха–Кистера. Экспериментальные измерения теплот смещения или параметров A проводят методами давления насыщенных паров, электрохимическим и калориметрическими методами, но, как правило, измерения проводятся при достаточно высоких температурах в парамагнитной области. В связи с этим экстраполяция экспериментальных результатов в область низких температур всегда сопряжена с риском ошибки.

В таблице приведены данные о термодинамических параметрах  $A^\alpha$  и  $A^\gamma$  для  $\gamma$ - и  $\alpha$ -твердых растворов ванадия в железе по различным литературным источникам. Здесь

$$A = \frac{\Delta G_{изб}}{x_A x_B} = \frac{E_{см}}{x_A x_B} - T \frac{\Delta S_{изб}}{x_A x_B}, \quad (2)$$

где  $\Delta G_{изб}$  – есть избыточная величина свободной энергии смещения по отношению к идеальному раствору. В этом уравнении независимый от температуры член соответствует энергии смещения, а коэффициент при T выражается через избыточную энтропию смещения, которая часто оказывается независимой от температуры.

Термодинамические функции ОЦК сплавов Fe-V

N	${}^0L_{Fe,V}$ , Дж/моль	${}^1L_{Fe,V}$ , Дж/моль	Лит. источник
1	$-23980 + 1,5197 T$	$8020 + 2,5202 T$	[11]
2	$-23980 + 1,5197 T$	5020	[13]
3	$-21427 + 6,846T$	$7345 - 1,509 T$	[12]

На рис. 1 результаты CALPHAD-моделирования [11–13] сопоставлены с экспериментальными данными Спенсера [21]. Как видно из рис. 1 наилучшее согласие обеспечивает модель, предложенная в работе Андерссона [11], поэтому дальнейшее сравнение с результатами первопринципного моделирования будем проводить именно с ней.

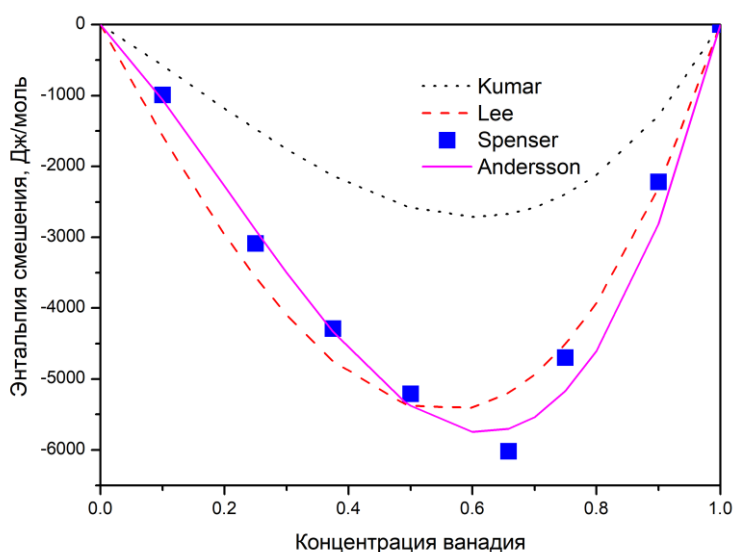


Рис. 1. Сравнение результатов CALPHAD-моделирования в работах [11–13] для  $T = 1623$  К с экспериментальными данными Спенсера [21] для той же температуры

### Результаты моделирования и обсуждение

Все расчеты были выполнены в рамках теории функционала плотности (DFT) полнопотенциальным методом линейаризованных присоединенных плоских волн (FLAPW) с учетом обобщенного градиентного приближения (GGA) в программном пакете WIEN2k. В качестве модельной системы была выбрана ферромагнитная суперячейка ОЦК-железа содержащая 200 атомов, которые частично замещались атомами ванадия. Интегрирование в  $k$ -пространстве выполнялось с использованием 27  $k$ -точек сетки. Радиус muffin-tin сферы  $R_{mt}$  был равен 2,00 а.е. для атома железа и ванадия. Для всех систем была выбрана энергия обрезания 340 эВ. Критерием сходимости расчетов были воспроизведение полной энергии и заряда с точностью не менее  $10^{-3}$  эВ,  $10^{-3}e^-$  соответственно, а силы на каждом из атомов не превышали значения 0,01 эВ/Å. Все это обеспечивает погрешность результатов расчетов не более 0,01 эВ.

Величины магнитных моментов на атомах в неупорядоченных сплавах Fe-V определены в работе Алдредра [22]. Это позволило провести на рис. 2 детальное сравнение наших результатов с экспериментальными данными этой работы.

Видно, что результаты нашего расчета прекрасно согласуются с имеющимися экспериментальными данными по величинам магнитных моментов атомов в сплаве, что свидетельствует о достоверности проведенного моделирования.

На рис. 3 приведено сравнение результатов нашего моделирования энтальпии образования ОЦК сплавов системы Fe-V с данными CALPHAD-модели [11] при 0 К.

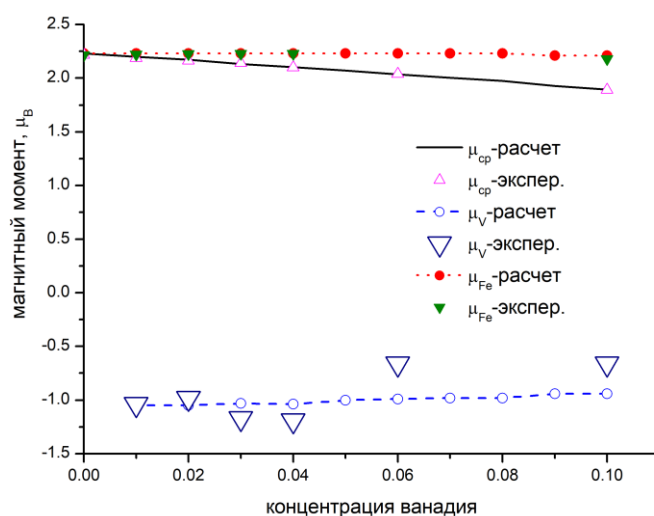


Рис. 2. Сравнение результатов *ab initio* расчета величин магнитных моментов (среднего момента на атом в сплаве, а также локальных моментов на атомах железа и ванадия) с экспериментальными значениями в работе Алдредра [22]

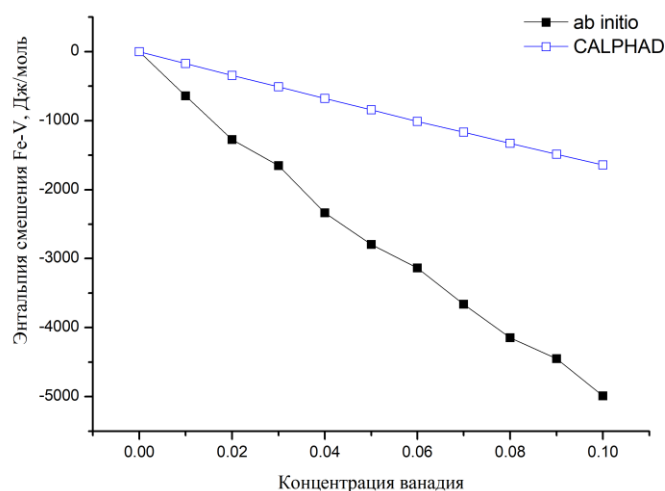


Рис. 3. Сравнение результатов *ab initio* расчета энтальпии смешения ОЦК сплавов Fe-V с данными CALPHAD-модели Андерссона [11]

Сравнение показывает, что термодинамическое моделирование существенно занижает энтальпию смешения сплавов Fe-V в рассмотренной области концентраций ванадия. Скорее всего, расхождение обусловлено тем, что CALPHAD-моделирование не учитывает вклад отрицательной энергии магнитного упорядочения, поскольку опирается на высокотемпературные термодинамические данные, полученные в парамагнитной области. В таком случае 3-кратное изменение энтальпии свидетельствует о значительном влиянии магнитного порядка на энергию смешения рассматриваемых сплавов. Как видно из рис. 2, рост содержания V в сплаве приводит к уменьшению магнитного момента на атомах ванадия. Можно предположить, что если этот спад будет быстрым, то отрицательный магнитный вклад в энтальпию может резко упасть. Это может привести к важным особенностям в ближнем упорядочении системы Fe-V. Однако поскольку химическая часть энтальпии данной системы отрицательна (в отличие от системы Fe-Cr), то инверсия ближнего порядка наблюдаться не будет. Тем не менее важно изучить изменение магнитных свойств системы Fe-V в широком диапазоне концентраций ванадия и установить их влияние на особенности ближнего порядка.

## Выводы

Проведено первопринципное компьютерное моделирование неупорядоченного твердого раствора системы Fe–V в упорядоченном магнитном состоянии и изучена концентрационная зависимость среднего магнитного момента сплава и энтальпии растворения как функции концентрации ванадия в области от 1 до 10 ат. %. Сопоставление с имеющимися в мировой литературе данными по величинам магнитных моментов показало высокую точность и достоверность полученных результатов. Показано, что энтальпия смешения в этой области концентраций является отрицательной, что согласуется с данными CALPHAD-моделей [11–13], и противоречит результатам более ранней работы [23]. Сделан вывод, что возможность обнаружить инверсию ближнего порядка в сплавах Fe–V маловероятна, однако вполне возможны особенности ближнего упорядочения в данных сплавах на концентрационной зависимости.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-10039.*

## Литература

1. Miettinen, J. Thermodynamic Reassessment of Fe–Cr–Ni System with Emphasis on the Iron-Rich corner / J. Miettinen // *Calphad*. – 1999. – Vol. 23, Iss. 2. – P. 231–248.
2. Klaver, T.P.C. Magnetism and Thermodynamics of Defect-Free Fe–Cr Alloys / T.P.C. Klaver, R. Drautz, M.W. Finnis // *Physical Review B*. – 2006. – Vol. 74, Iss. 9. – P. 094435.
3. Кубашевский, О. *Металлургическая термохимия* / О. Кубашевский, С.Б. Олкокк. – М.: Металлургия, 1982. – 391 с.
4. Mirebeau, I. First Measurement of Short-Range-Order Inversion as a Function of Concentration in a Transition Alloy / I. Mirebeau, M. Hennion, G. Parette // *Phys. Rev. Lett.* – 1984. – Vol. 53, Iss. 7. – P. 687–690.
5. Mirebeau, I. Neutron Study of the Short Range Order Inversion in Fe<sub>1-x</sub>Cr<sub>x</sub> / I. Mirebeau, G. Parette // *Phys. Rev. B*. – 2010. – Vol. 82, Iss. 10. – P. 104203.
6. Phase Transformations in Fe-Cr Alloys upon Thermal Aging and Electron Irradiation / V.A. Shabashov, V.V. Sagaradze, I.I. Kositsyna *et al.* // *Физика металлов и металловедение*. – 2001. – Т. 92, № 5. – С. 89–98.
7. Ruban A.V., Abrikosov I.A. Configurational Thermodynamics of Alloys from First Principles: Effective Cluster Interactions // *Reports on Progress in Physics*. – 2008. – Vol. 71, no. 4. – P. 46501.
8. Мирзоев, А.А. Расчет энергии смешения сплавов Fe–Cr первопринципными методами компьютерного моделирования / А.А. Мирзоев, М.М. Ялалов, Д.А. Мирзаев // *Физика металлов и металловедение*. – 2004. – Т. 97, № 4. – С. 11–16.
9. Olsson, P. Electronic Origin of the Anomalous Stability of Fe-Rich BCC Fe–Cr Alloys / P. Olsson, I.A. Abrikosov, J. Wallenius // *Physical Review B*. – 2006. – Vol. 73, Iss. 10. – P. 104416–6.
10. Влияние магнетизма на растворимость 3d-элементов в ОЦК-Fe. результаты первопринципных исследований / О.И. Горбатов, С.В. Окатов, Ю.Н. Горностырев и др. // *Физика металлов и металловедение*. – 2013. – Т. 114. – № 8. – С. 698.
11. Andersson, J.-O. A Thermodynamic Evaluation of the Iron–Vanadium System / J.-O. Andersson // *Calphad*. – 1983. – Vol. 7, Iss. 4. – P. 305–315.
12. Hari Kumar, K.C. A Thermodynamic Reassessment of the Fe–V System / K.C. Hari Kumar, V. Raghavan // *Calphad*. – 1991. – Vol. 15, Iss. 3. – P. 307–314.
13. Lee, B.-J. A Thermodynamic Study on the V–C and Fe–V systems / B.-J. Lee, D.N. Lee // *Calphad*. – 1991. – Vol. 15, Iss. 3. – P. 283–291.
14. Johnson, D.D. The Slater–Pauling Curve: First Principles Calculations of the Moments of Fe<sub>1-c</sub>Ni<sub>c</sub> and V<sub>1-c</sub>Fe<sub>c</sub> / D.D. Johnson, F.J. Pinski, J.B. Staunton // *Journal of Applied Physics*. – 1987. – Vol. 61, Iss. 8. – P. 3715–3717.
15. First-Principles Investigation of Magnetism and Electronic Structures of Substitutional 3d-Transition-Metal Impurities in BCC Fe / G. Rahman, I.G. Kim, H.K.D.H. Bhadeshia, A.J. Freeman // *Physical Review B*. – 2010. – Vol. 81, Iss. 18. – P. 184423.
16. Krause, J.C. Electronic Structure of Disordered Fe–V Alloys / J.C. Krause, C. Paduani, J. Schaff, M.I. da Costa, Jr. // *Physical Review B*. – 1998. – Vol. 57, Iss. 2. – P. 857–861.
17. Влияние магнетизма на растворимость 3d-элементов в ОЦК-Fe результаты первопринципных исследований / О.И. Горбатов, С.В. Окатов, Ю.Н. Горностырев и др. // *Физика металлов и металловедение*. – 2013. – Т. 114, № 8. – С. 698–710.

18. Schwarz, K. Electronic Structure Calculations of Solids using the WIEN2k Package for Material Science / K. Schwarz, P. Blaha, G.K.H. Madsen // *Computer Physics Communications*. – 2002. – Vol. 147, Iss. 1-2. – P. 71–76.

19. Sandman, B. A Regular Solution Model for Phase with Several Components and Sublattices, Suitable for Computer Applications / B. Sandman, J. Agren // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. – 1981. – Vol. 42, Iss. 4. – P. 297–301.

20. Redlich, O. Algebraic Representation of Thermodynamic Properties and the Classification of Solutions / O. Redlich, A.T. Kister // *Industrial & Engineering Chemistry*. – 1948. – Vol. 40, Iss. 2. – P. 345–348.

21. Smith, J.F. The Fe–V (Iron–Vanadium) system / J.F. Smith // *Bulletin of Alloy Phase Diagrams*. – 1984. – Vol. 5. – P. 184–194.

22. Nevitt, M.V. Ferromagnetism in V–Fe and Cr–Fe Alloys / M.V. Nevitt, A.T. Aldred // *Journal of Applied Physics*. – 1963. – Vol. 34, Iss. 3. – P. 463–468.

23. Aldred, A.T. Thermodynamic Properties of Solid Vanadium–Iron Alloys / A.T. Aldred, K.M. Myles // *J. Phys. Chem.* – 1964. – Vol. 68, Iss. 1. – P. 64–69.

*Поступила в редакцию 22 августа 2023 г.*

### Сведения об авторах

Мирзоев Александр Аминулаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1527-371X>, e-mail: [mirzoevaa@susu.ru](mailto:mirzoevaa@susu.ru).

Верховых Анастасия Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: [avverkhovykh@susu.ru](mailto:avverkhovykh@susu.ru).

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 68–76*

---

DOI: 10.14529/mmph230408

## THE COMPARATIVE RESULTS OF THE THERMODYNAMIC AND FIRST-PRINCIPLE MODELING OF DISORDERED SOLUTIONS OF THE Fe–V SYSTEM

**A.A. Mirzoev, A.V. Verkhovykh**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
E-mail: [mirzoevaa@susu.ru](mailto:mirzoevaa@susu.ru)*

**Abstract.** This paper considers the concentration dependences of the average magnetic moment of the Fe–V system and solution enthalpy as a function of the vanadium concentration from 1 to 10 at% for a disordered Fe–V solid solution in an orderly magnetic state using first-principle calculations of the electronic structure in the WIEN2k software package. The results are compared with data obtained using CALPHAD-models in previous studies. A conclusion about the prospects of finding a possible inversion of the short-range order in Fe–V alloys similar to the inversion in Fe–Cr systems has been made on this basis.

*Keywords:* *ab initio modeling; Fe–V solid solutions; magnetic moments; solution enthalpy.*

### References

1. Miettinen J. Thermodynamic Reassessment of Fe–Cr–Ni System with Emphasis on the Iron-Rich Corner. *Calphad*, 1999, Vol. 23, Iss. 2, pp. 231–248. DOI: 10.1016/s0364-5916(99)00027-9

2. Klaver T.P.C., Drautz R., Finnis M.W. Magnetism and Thermodynamics of Defect-Free Fe–Cr Alloys. *Physical Review B*, 2006, Vol. 74, Iss. 9, p. 094435. DOI:10.1103/physrevb.74.094435

3. Kubashewski O., Olkock S.B. *Metallurgical Thermochemistry*. Springer, Berlin, 1979, 449 p.

4. Mirebeau I., Hennion M., Parette G. First Measurement of Short-Range-Order Inversion as a Function of Concentration in a Transition Alloy. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, Vol. 53, Iss. 7, pp. 687–690. DOI:10.1103/physrevlett.53.687
5. Mirebeau I., Parette G. Neutron Study of the Short Range Order Inversion in  $\text{Fe}_{1-x}\text{Cr}_x$ . *Phys. Rev. B*, 2010, Vol. 82, Iss. 10, P. 104203. DOI: 10.1103/PhysRevB.82.104203
6. Shabashov V.A., Sagaradze V.V., Kositsyna I.I., Arbuzov V.L., Filippov Y.I. Phase Transformations in Fe–Cr Alloys upon Thermal Aging and Electron Irradiation. *Phys. Met. Metallogr.*, 2001, Vol. 92, Iss. 5, pp. 508–517.
7. Ruban A.V., Abrikosov I.A. Configurational Thermodynamics of Alloys from First Principles: Effective Cluster Interactions. *Rep. Prog. Phys.*, 2008, Vol. 71, Iss. 4, p. 46501. DOI: 10.1088/0034-4885/71/4/046501
8. Mirzoev A.A., Yalalov M.M., Mirzaev D.A. Calculation of the Energy of Mixing for the Fe–Cr Alloys by the First-Principles Methods of Computer Simulation. *The Physics of Metals and Metallography*, 2004, Vol. 97, no. 4, pp. 336–341. (in Russ.). DOI: 10.1134/s0031918x06040065
9. Olsson P.; Abrikosov I.A.; Wallenius J. Electronic Origin of the Anomalous Stability of Fe-rich BCC Fe–Cr Alloys. *Physical Review B*, 2006, Vol. 73, Iss. 10, P. 104416–6. DOI: 10.1103/PhysRevB.73.104416
10. Gorbатов O.I., Okatov S.V., Gornostyrev Y.N., Korzhavyi P.A., Ruban A.V. Effect of Magnetism on the Solubility of 3d Elements in BCC Iron: Results of First-Principle Investigations. *The Physics of Metals and Metallography*, 2013, Vol. 114, Iss. 8, pp. 642–653. DOI: 10.1134/S0031918X13080036
11. Andersson J.-O. A Thermodynamic Evaluation of the Iron–Vanadium System. *Calphad*, 1983, Vol. 7, Iss. 4, pp. 305–315. DOI: 10.1016/0364-5916(83)90010-X
12. Hari Kumar K.C., Raghavan V.A Thermodynamic Reassessment of the Fe–V System. *Calphad*, 1991, Vol. 15, Iss. 3, pp. 307–314. DOI: 10.1016/0364-5916(91)90008-8
13. Lee B.-J., Lee D.N. A Thermodynamic Study on the V–C and Fe–V Systems. *Calphad*, 1991, Vol. 15, Iss. 3, pp. 283–291. DOI: 10.1016/0364-5916(91)90006-6
14. Johnson D.D., Pinski F.J., Staunton J.B. The Slater–Pauling Curve: First Principles Calculations of the Moments of  $\text{Fe}_{1-c}\text{Ni}_c$  and  $\text{V}_{1-c}\text{Fe}_c$ . *Journal of Applied Physics*, 1987, Vol. 61, no. 8, pp. 3715–3717. DOI: 10.1063/1.338670
15. Rahman G., Kim I.G., Bhadeshia H.K.D.H., Freeman A.J. First-Principles Investigation of Magnetism and Electronic Structures of Substitutional 3d-Transition-Metal Impurities in BCC Fe. *Physical Review B*, 2010, Vol. 81, Iss. 18, P. 184423. DOI:10.1103/PhysRevB.81.184423
16. Krause J.C., Paduani C., Schaff J., da Costa, M.I., Jr. Electronic Structure of Disordered Fe–V Alloys. *Physical Review B*, 1998, Vol. 57, Iss. 2, pp. 857–861. DOI: 10.1103/physrevb.57.857
17. Gorbатов O.I., Okatov S.V., Gornostyrev Yu.N., Korzhavyi P.A., Ruban A.V. Effect of Magnetism on the Solubility of 3d Elements in BCC Iron: Results of First-Principle Investigations. *The Physics of Metals and Metallography*, 2013, Vol. 114, Iss. 8, P. 642–653. DOI: 10.1134/S0031918X13080036
18. Schwarz K., Blaha P., Madsen G.K.H. Electronic Structure Calculations of Solids using the WIEN2k Package for Material Science. *Comp. Phys. Commun.*, 2002, Vol. 147, Iss. 1-2, pp. 71–76. DOI:10.1016/S0010-4655(02)00206-0
19. Sandman B., Agren J. A Regular Solution Model for Phase with Several Components and Sublattices, Suitable for Computer Applications. *J. of Phys. and Chem. of Solids.*, 1981, Vol. 42, Iss. 4, pp. 297–301. DOI: 10.1016/0022-3697(81)90144-X
20. Redlich O., Kister A.T. Algebraic Representation of Thermodynamic Properties and the Classification of Solutions. *Industrial & Engineering Chemistry*, 1948, Vol. 40, Iss. 2, pp. 345–348. DOI: 10.1021/ie50458a036
21. Smith J.F. The Fe–V (Iron–Vanadium) system. *Bulletin of Alloy Phase Diagrams*, 1984, Vol. 5, pp. 184–194. DOI: 10.1007/BF02868958
22. Nevitt M.V., Aldred A.T. Ferromagnetism in V–Fe and Cr–Fe Alloys. *Journal of Applied Physics*, 1963, Vol. 34, Iss. 3, pp. 463–468. DOI:10.1063/1.1729295
23. Aldred A.T., Myles K.M. Thermodynamic Properties of Solid Vanadium-Iron Alloys. *J. Phys. Chem.*, 1964, Vol. 68, Iss. 1, pp. 64–69. DOI: 10.1021/j100783a012

Received August 22, 2023

### Information about the authors

Mirzoev Aleksandr Aminulaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1527-371X>, e-mail: [mirzoevaa@susu.ru](mailto:mirzoevaa@susu.ru).

Verkhovikh Anastasiia Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Physics of Nanoscale System Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: [avverkhovikh@susu.ru](mailto:avverkhovikh@susu.ru).



## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ПО ПОТОКУ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА

**И.В. Колесниченко<sup>1</sup>, В.С. Озерных<sup>1</sup>, Е. Гольбрайх<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

<sup>2</sup> Университет им. Бен Гуриона, Беер-Шева, Израиль

E-mail: kiv@icmm.ru

**Аннотация.** Работа посвящена разработке способа измерения скорости изотермического потока жидкого металла в цилиндрическом канале. Предлагаемый способ измерения не требует калибровки и является бесконтактным. Он основывается на корреляционной методике. Генерация пульсаций осуществляется с помощью индукторов вращающегося магнитного поля. Пульсации аксиальной компоненты скорости фиксируются с помощью регистрации электромагнитного отклика локальных измерителей скорости. Показано, что при малом количестве импульсов величина корреляционной функции мала, что не позволяет надежно измерять скорость, даже при увеличении интенсивности пульсаций. Получено, что высокая степень корреляции для данной методики достигается при существенном увеличении количества импульсов, что влечет за собой увеличение длительности измерений.

*Ключевые слова:* измерение скорости потока жидкого металла; магнитная гидродинамика; корреляционный способ определения расхода жидкого металла.

### Введение

В металлургии и энергетике, где применяется жидкий металл в качестве теплоносителя, необходимо точно измерять текущие характеристики потока жидкого металла, так как они определяют режимы работы установок [1]. Высокая электрическая проводимость жидких металлов дает возможность эффективного управления его потоками с помощью электромагнитных сил [2], а также электромагнитного измерения расхода [3]. Электромагнитные силы генерируются в расплавах с помощью индукционных аппаратов [4], расположенных от них на некотором удалении, т. е. бесконтактно. Наиболее востребованными являются простые технологические каналы с отсутствием внутри них перегородок, датчиков, нагревательных элементов и т. д. Этот факт усложняет конструкции как систем генерации транзитного течения, так и систем контроля характеристик транзитного течения. Поэтому основное преимущество дает отсутствие прямого контакта жидких металлов с аппаратами – они контактируют только со стенкой канала. Существуют бесконтактные методы расходомерии, основанные на измерении электромагнитной силы [5], на измерении искажения магнитного поля потоком [6, 7], на измерении воздействия потока на вращающийся магнит [8]. Основной недостаток этих методик заключается в необходимости калибровки.

В работе предлагается корреляционный способ определения расхода жидкого металла, заключающийся в регистрации флуктуаций магнитного поля в двух измерительных сечениях, расположенных на известном расстоянии друг от друга, и измерении времени пролета флуктуациями этих измерительных сечений, по которому судят о расходе жидкого металла (рис. 1, слева). Для этого при помощи индукторов переменного вращающегося поля (рис. 1, справа), включенных сонаправленно либо противоположно направлению в непрерывном либо импульсном режиме, генерируют возмущения поля скорости в плоскости, ортогональной направлению основного потока [9]. Регистрация флуктуаций реализуется также при помощи электромагнитных методов. Созданные разнонаправленно вращающиеся магнитные поля создают мелкомасштабные флуктуации скорости небольшой интенсивности, преимущественно в плоскости сечения трубы. В данной работе мы акцентируем свое внимание на пульсации той компоненты скорости, которая направлена вдоль потока. Будут ли эти флуктуации скорости надежно зафиксированы регистрирующими индукторами и не потеряют ли свою интенсивность при перемещении потоком по рабочему каналу – предстоит выяснить в данном исследовании. Целью работы является выяснение возможности измерения скорости транзитного течения с помощью корреляционной методики на основе анализа некоторых вариантов конфигурации системы генерации гидродинамических импульсов.

## Методы исследования

Концептуальная постановка задачи заключается в поиске наиболее рациональной конструкции для реализации корреляционной бесконтактной методики регистрации расхода в канале 1 с жидким металлом (рис. 1). В качестве генератора пульсаций 2 решено использовать индуктор вращающегося магнитного поля [10]. Вращающееся магнитное поле создает не только вращающееся течение жидкого металла, но и вторичные полоидальные течения [10] вследствие ограниченности размера индуктора (рис. 1), или наличия экмановской подкачки при присутствии твердых торцевых стенок. Встречные вращающиеся магнитные поля существенно усложняют структуру течения, которое в том числе является предметом исследования этапа проекта. Поток после прохождения через индуктор 2 будет содержать пульсации (см. рис. 1), которые регистрируются измерительным модулем 3. Регистрирующий модуль реагирует на пульсации аксиальной компоненты скорости методом кондукционной анемометрии [3], поэтому в статье изучается поведение именно этих пульсаций.

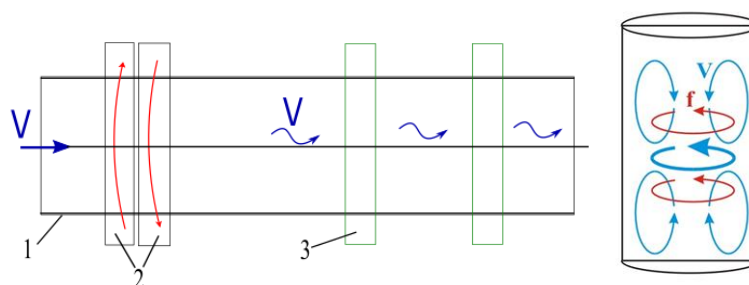


Рис. 1. Схема охватывающего индукционного расходомера (слева), схема генерации вращающегося магнитного поля (справа)

Исследование проводится с помощью математического моделирования. Математическая модель основана на уравнениях магнитной гидродинамики в безындукционном приближении и подробно описана в [11, 12]. Модель реализована в программной среде Ansys и верифицирована на результатах экспериментов, проводимых на галлиевых установках и галлиевом контуре [11, 12]. С ее помощью исследуется распространение пульсаций по потоку жидкого металла с целью их регистрации и восстановления значения скорости с помощью кросскорреляционной методики. В данном исследовании в генерирующем модуле направление вращающихся магнитных полей было встречным: одно вращалось по часовой стрелке, другое – против относительно оси канала. Генерирующий модуль работает в импульсном режиме с длительностью импульса 1–2 с и временем между импульсами 5–10 с. Скорость транзитного потока равна 0,1 и 0,2 м/с. Индуктор вращающегося магнитного поля описан в [13]. Он вызывал генерацию течения, азимутальная скорость которого примерно на порядок меньше скорости транзитного течения. Ток на питающих обмотках равен 1 А. Длина канала равна 0,5 м, диаметр 0,1 м, рабочая жидкость – жидкий натрий. Начало координат располагается на оси цилиндрического канала и связано с положением центра генерирующего модуля. Ось OZ направлена вдоль канала, а оси OX и OY лежат в плоскости, ортогональной оси OZ, и образуют правую тройку векторов. Расстояние от первого датчика до генерирующего модуля равно 0,3 м, а расстояние между датчиками 0,1 м. При построении результатов формируется так называемая диаграмма профиля скорости течения (рис. 2). По вертикальной оси диаграммы отложена координата, вдоль которой строится профиль. По горизонтальной оси откладывается время. В каждый момент времени строится профиль и для их совместного отображения на одном рисунке используется цветовая шкала. Наиболее удобно наблюдать за развитием течения [12] именно с помощью подобных диаграмм, так как на них хорошо видна эволюция пульсаций скорости вдоль потока. Скорость транзитного потока определяется с помощью корреляционного анализа аксиальной компоненты скорости в двух выбранных точках вдоль потока по методике, описанной в [14].

## Результаты

Результаты исследования для избранных конфигураций показали, что данная методика регистрации скорости может быть реализована, но при этом существуют ограничения, влияющие на точность измерений. На примере четырех вариантов набора параметров будут показаны эти особенности. Вариант 1 демонстрирует существенно ограниченный по времени интервал записи

сигнала. Этот короткий интервал времени измерения оказался недостаточен для накопления статистики. Тем не менее, на примере этого варианта можно проиллюстрировать вид карт эволюции профиля скорости (см. рис. 2) и разверток сигналов в измеряемых областях (рис. 3). Именно между этими сигналами определяется корреляционная функция (рис. 10, а). Видно, что в данном случае величина корреляционной функции крайне мала, что делает невозможным измерение скорости.

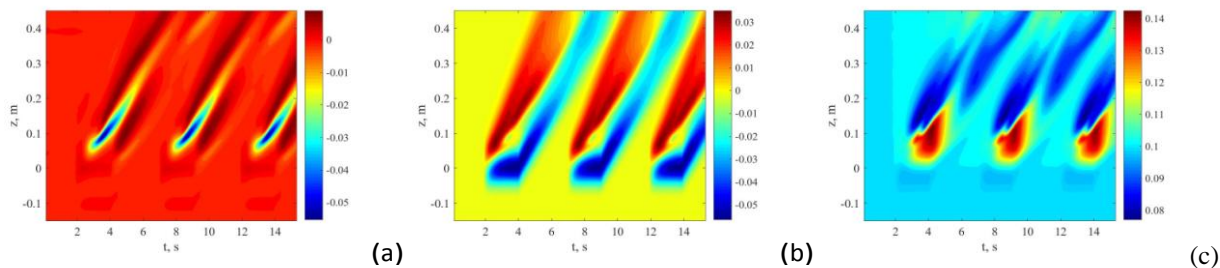


Рис. 2. Карта профилей компоненты скорости вдоль оси канала (а) –  $V_x$ , (б) –  $V_y$ , (с) –  $V_z$ . Вариант 1: скорость транзитного течения  $V = 0,1\text{ м/с}$ , период между импульсами 5 с, длительность импульсов 2 с

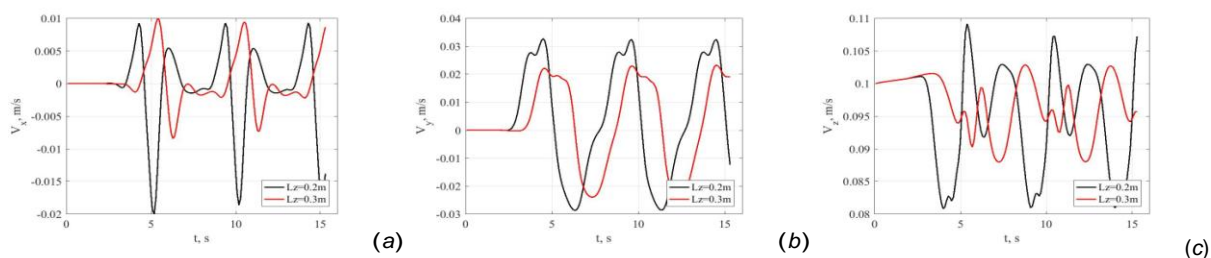


Рис. 3. Эволюции значений компоненты скорости в двух точках вдоль оси канала, в которых вычисляются кросс-корреляции: (а) –  $V_x$ , (б) –  $V_y$ , (с) –  $V_z$ . Вариант 1

В следующем варианте набора параметров исследовалось то, как увеличение интенсивности вращающегося течения повлияет на корреляционную функцию при небольшом увеличении времени регистрации сигнала (количества импульсов). Оказалось, что применение чрезмерно интенсивной электромагнитной силы для достижения сильного всплеска также не является рациональным выбором. На рис. 4 и 5 видно, что, хотя и интенсивность течения существенно возросла, это не помогает надежно восстановить значение скорости (см. рис. 10, б).

Тем не менее увеличение количества импульсов положительно сказывается на способности системы определять скорость – пики корреляционной функции стали ближе друг к другу. Следующий набор параметров демонстрирует возможность проводить измерения скорости при умеренном значении интенсивности вращающегося течения (рис. 6 и 7), о чем свидетельствует корреляционная функция (см. рис. 10, с). В данном случае корреляционная функция для поперечных компонент скорости показывает высокие значения, для продольной компоненты – недостаточные для осуществления надежных измерений.

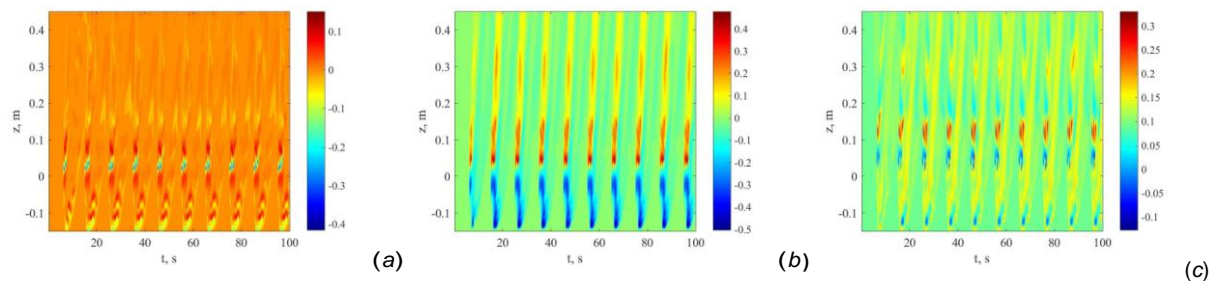


Рис. 4. Карта профилей компоненты скорости вдоль оси канала (а) –  $V_x$ , (б) –  $V_y$ , (с) –  $V_z$ . Вариант 2: скорость транзитного течения  $V = 0,1\text{ м/с}$ , период между импульсами 10 с, длительность импульсов 2 с. Электромагнитная сила в 100 раз больше, чем в других вариантах

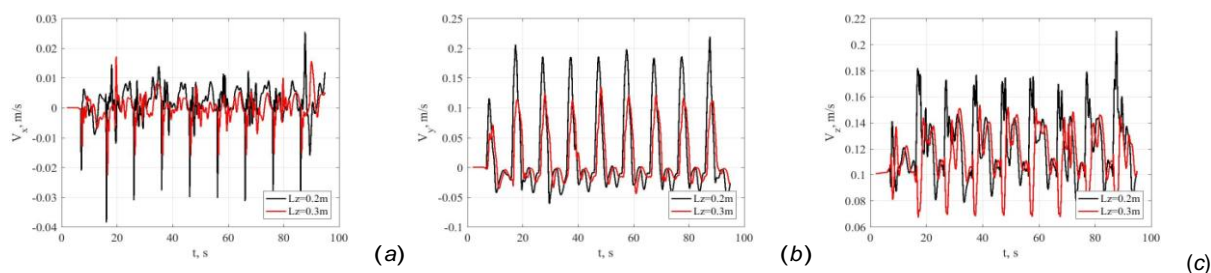


Рис. 5. Эволюции значений компоненты скорости в двух точках вдоль оси канала, в которых вычисляются кросс-корреляции: (a) –  $V_x$ , (b) –  $V_y$ , (c) –  $V_z$ . Вариант 2

Увеличение времени измерений, т. к. количества импульсов, существенно улучшает результат определения скорости с помощью данной методики (рис. 8, 9; 10, d). В данном случае корреляционная функция показывает наивысшую степень корреляции для всех трех компонент скорости и точно восстанавливает значение скорости потока. Это достигается высокой ценой – нужна статистика в 800 с. Таким образом, реализовать корреляционную методику измерения с использованием пульсаций продольной компоненты скорости возможно в тех случаях, когда допустимо проводить такие длительные замеры для накопления статистики.

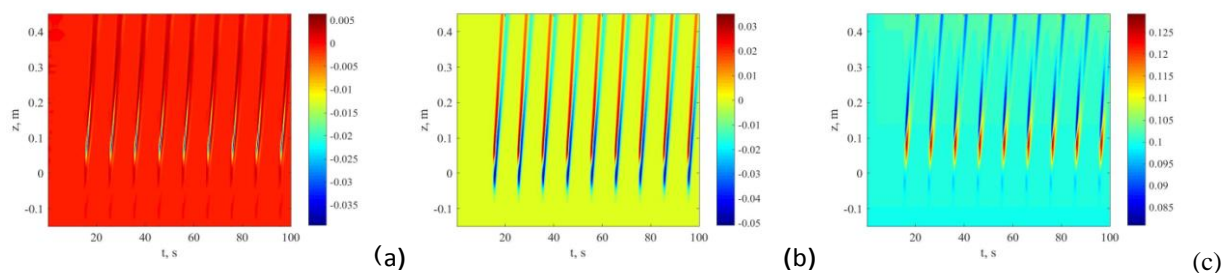


Рис. 6. Карта профилей компоненты скорости вдоль оси канала (a) –  $V_x$ , (b) –  $V_y$ , (c) –  $V_z$ . Вариант 3: скорость транзитного течения  $V = 0,1$  м/с, период между импульсами 10 с, длительность импульсов 1 с

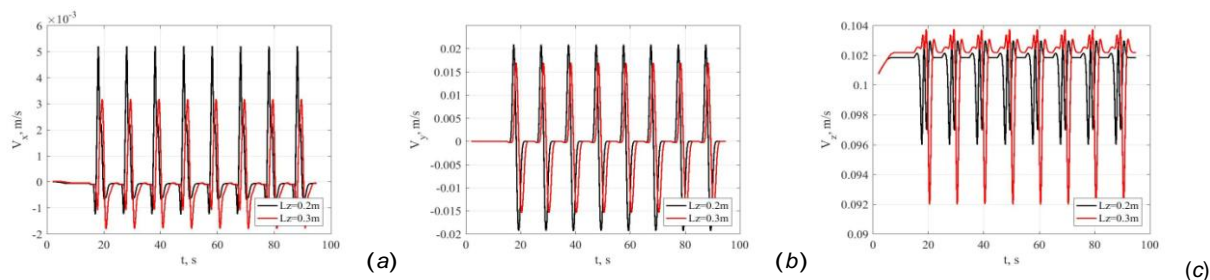


Рис. 7. Эволюции значений компонент скорости  $V_z$  в двух точках вдоль оси канала, в которых вычисляются кросс-корреляции: (a) –  $V_x$ , (b) –  $V_y$ , (c) –  $V_z$ . Вариант 3

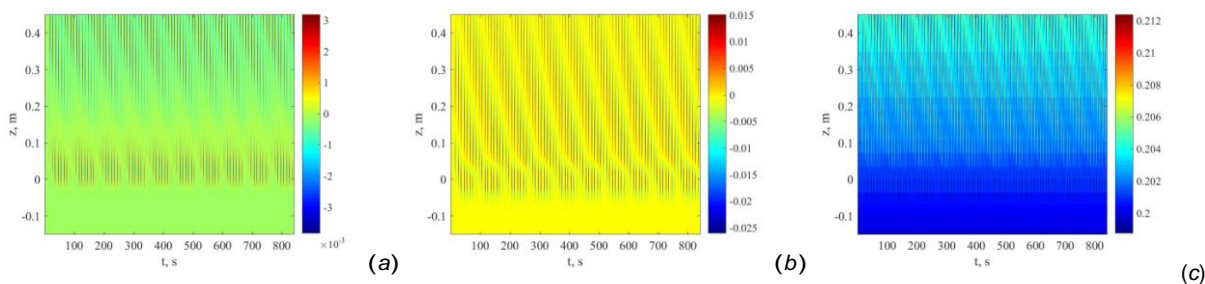


Рис. 8. Карта профилей компоненты скорости вдоль оси канала (a) –  $V_x$ , (b) –  $V_y$ , (c) –  $V_z$ . Вариант 4: скорость транзитного течения  $V = 0,2$  м/с, период между импульсами 10 с, длительность импульсов 1 с



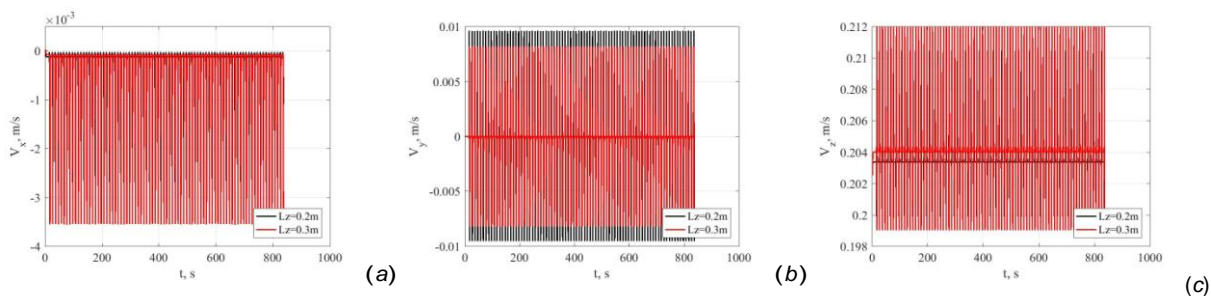


Рис. 9. Эволюции значений компонент скорости в двух точках вдоль оси канала, в которых вычисляется кросс-корреляция: (а) –  $V_x$ , (б) –  $V_y$ , (с) –  $V_z$ . Вариант 4

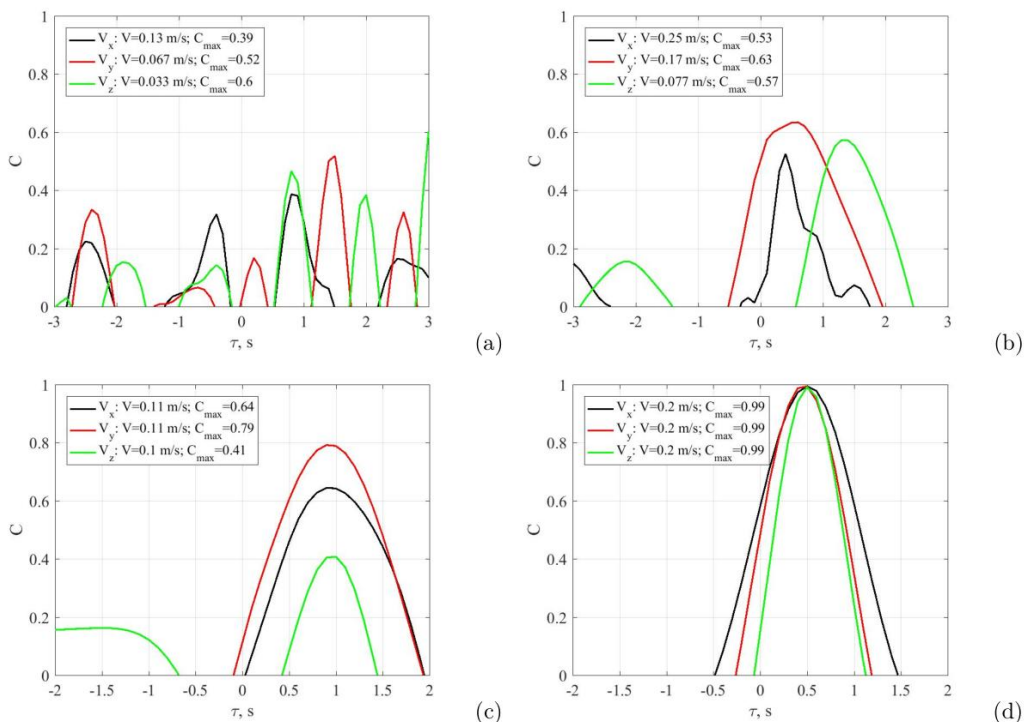


Рис. 10. Корреляционные функции двух сигналов в двух точках вдоль канала, варианты конфигурации которых показаны выше: (а) – вариант 1, (б) – вариант 2, (с) – вариант 3, (д) – вариант 4

## Заключение

В работе изучена возможность реализации корреляционной методики измерения скорости транзитного потока жидкого металла в цилиндрическом канале на основе измерения пульсации аксиальной компоненты скорости. Исследование показало, что для всех изученных режимов генерации пульсации, реализуемой электромагнитным индуктором, всплеск скорости практически не теряет своей интенсивности вдоль потока. Результаты исследования показали, что для надежного определения с помощью регистрирующего модуля интервала времени между пульсациями необходимо проводить достаточно длительные измерения. Для коротких интервалов измерений – при небольшом количестве импульсов – величина корреляционной функции для пульсаций аксиальной компоненты скорости оказалось малой, что не позволяет надежно измерять значения скорости. Повышение интенсивности импульсов также не способствует увеличению величины корреляционной функции. Таким образом, если в данной методике регистрации скорости есть возможность проводить длительные измерения для накопления статистики, то она может быть применена. Для систем с быстро изменяющимися параметрами, переходными процессами, реализация именно этой методики измерения скорости встретит большие затруднения. Следует отметить, что в большинстве систем течения относительно стабильны, поэтому для них эта методика является подходящей. Результаты научного исследования позволили получить параметры конструкции, которые легли в основу разрабатываемого индукционного расходомера. Он имеет сле-

дующие преимущества над имеющимися аналогами [5–8]: отсутствие ограничений на поток контрольной жидкости (например, неизотермичность); повышение достоверности метода за счёт того, что проводятся прямые, а не косвенные измерения поля скорости; расширение диапазонов расхода контрольной жидкости и диаметров трубопровода, отсутствие необходимости калибровки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края, проект № С-26/564.*

### Литература

1. Архипов, В.М. Техника работы с натрием на АЭС / В.М. Архипов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 133 с.
2. Лиелпетер, Я.Я. Индукционные МГД машины / Я.Я. Лиелпетер. – Рига: Зинатне, 1969. – 246 с.
3. Schulenberg, T. Flow Measurement Techniques in Heavy Liquid Metals / T. Schulenberg, R. Stieglitz // Nuclear Engineering and Design. – 2010. – Vol. 240, Iss. 9. – P. 2077–2087.
4. Кузнецов, И., Поплавский В. Безопасность АЭС с реакторами на быстрых нейтронах / И. Кузнецов, В. Поплавский. – М.: ИздАТ, 2012. – 631 с.
5. Thess, A. Lorentz Force Velocimetry / A. Thess, E. Votyakov, Y. Kolesnikov // Physical review letters. – 2006. – Vol. 96, Iss. 16. – P. 164501(4).
6. Forbriger, J. Transient Eddy Current Flow Metering / J. Forbriger, F. Stefani // Measurement Science and Technology. – 2015. – Vol. 26, no. 10. – P. 105303.
7. Design, Development and Performance Testing of Fast Response Electronics for Eddy Current Flowmeter in Monitoring Sodium Flow / S. Poornapushpakala, C. Gomathy, J. Sylvia, B. Babu // Flow Measurement and Instrumentation. – 2014. – Vol. 38. – P. 98–107.
8. Priede, J. Force-Free and Contactless Sensor for Electromagnetic Flowrate Measurements / J. Priede, D. Buchenau, G. Gerbeth // Magnetohydrodynamics. – 2009. – Vol. 45, no. 3. – P. 451–458.
9. Пат. 2791036 Российская Федерация. Корреляционный способ определения расхода жидкого металла и безэлектродный электромагнитный расходомер жидкого металла «ПИР» (Пермский индукционный расходомер) для его осуществления / И. Колесниченко, Р. Халилов, А. Мамыкин. Заявл. 24.06.2022. Опубл. 01.03.2022, Бюл. 7.
10. The Study of Turbulence in MHD Flow Generated by Rotating and Traveling Magnetic Fields / I. Kolesnichenko, A. Pavlinov, E. Golbraikh. *et al.* // Experiments in Fluids. – 2015. – Vol. 56. – P. 88.
11. Колесниченко, И. Экстремум зависимости напора электромагнитного насоса для жидкого металла от частоты питающего тока / И. Колесниченко, Р. Халилов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2022. – Т. 15. – С. 495–506.
12. Evolution of a Strong Electrosvortex Flow in a Closed Cell / I. Kolesnichenko, P. Frick, V. Eltishchev *et al.* // Physical Review Fluid. – 2020. – Vol. 5, Iss. 12. – P. 123703.
13. Начальная стадия формирования вихревого течения в индукторе с вращающимися встречно магнитными полями / В.С. Озерных, Е. Голбрайх, Г.Л. Лосев, И.В. Колесниченко // Вычислительная механика сплошных сред (принята к публикации).
14. Application of the Temperature Correlation Method to Measuring the Flow Rate of Liquid Sodium / I Kolesnichenko., A. Mamykin, E. Golbraikh, A. Pavlinov // Magnetohydrodynamics. – 2021. – Vol. 57, no. 4. – P. 547–557.

*Поступила в редакцию 14 сентября 2023 г.*

### Сведения об авторах

Колесниченко Илья Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией технологической гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация, e-mail: kiv@icmm.ru.

Озерных Владимир Сергеевич – младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация, e-mail: ozernykh.v@icmm.ru.

Гольбрайх Ефим – Ph.D., доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики, Университет им. Бен Гуриона, Беер-Шева, Израиль, e-mail: golbref@bgu.ac.il.

## TRANSFER OF PULSES ALONG A LIQUID METAL FLOW

I.V. Kolesnichenko<sup>1</sup>, V.S. Ozernykh<sup>1</sup>, E. Golbraikh<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

<sup>2</sup> Ben-Gurion University of the Negev, Beersheba, Israel

E-mail: kiv@icmm.ru

**Abstract.** This work develops a method for measuring the speed of an isothermal flow of liquid metal in a cylindrical channel. The method does not require calibration, is non-contact and is based on a correlation technique. The generation of pulses is carried out using rotating magnetic field inductors. Pulses of the axial velocity component are recorded by recording the electromagnetic response of local velocity meters. It is shown that with a small number of pulses, the value of the correlation function is small, which does not allow the velocity to be reliably measured, even with increasing pulse intensity. Conversely, a high degree of correlation for this technique is achieved with a significant increase in the number of pulses, which entails an increase in the duration of measurements.

**Keywords:** measurement of liquid metal flow velocity; magnetic hydrodynamics; correlation method for determining liquid metal consumption.

### References

1. Arhipov V.M. *Tekhnika raboty s natriem na AES* (Techniques for Working with Sodium at Nuclear Power Plants). Moscow, Energoatomizdat Publ., 1986, p. 136. (in Russ.).
2. Lielpeter Ya.Ya. *Zhidkometallicheskie induktsionnye MGD-mashiny* (Induction MHD Machines). Riga: Zinatne Publ., 1969, 246 p. (in Russ.).
3. Schulenberg T., Stieglitz R. Flow Measurement Techniques in Heavy Liquid Metals. *Nuclear Engineering and Design*, 2010, Vol. 240, Iss. 9, pp. 2077–2087. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2009.11.017
4. Kuznecov I., Poplavskij V. *Bezopasnost' AES s reaktorami na bystryh nejtronah* (Safety of Nuclear Power Plants with Fast Neutron Reactors). Moscow, Izdat, 2012, 631 p.
5. Thess A., Votyakov E., Kolesnikov Y. Lorentz Force Velocimetry. *Physical review letters*, 2006, Vol. 96, Iss. 16, P. 164501(4). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.164501
6. Forbriger J., Stefani F. Transient Eddy Current Flow Metering. *Measurement Science and Technology*, 2015, Vol. 26, no. 10, P. 105303. DOI: 10.1088/0957-0233/26/10/105303
7. Poornapushpakala S., Gomathy C., Sylvia J., Babu B. Design, Development and Performance Testing of Fast Response Electronics for Eddy Current Flowmeter in Monitoring Sodium Flow. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2014, Vol. 38, pp. 98–107. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.05.004
8. Priede J., Buchenau D., Gerbeth G., Force-Free and Contactless Sensor for ElectroMagnetic Flowrate Measurements. *Magnetohydrodynamics*, 2009, Vol. 45, no. 3, pp. 451–458. DOI: 10.22364/mhd.45.3.19
9. Kolesnichenko I.V., Khalilov R.I., Mamykin A.D. Pat. RU 2791036. *Correlation Method for Determining the Flow Rate of Liquid Metal and Electrodeless Electromagnetic Flowmeter of Liquid Metal "PIF" (Perm Induction Flowmeter) for its Implementation*. Appl. 24.06.2022, Date of publication: 01.03.2023, Bull. no. 7.
10. Kolesnichenko I., Pavlinov A., Golbraikh E., Frick P., Kapusta A., Mikhailovich B. The Study of Turbulence in MHD Flow Generated by Rotating and Traveling Magnetic Fields. *Experiments in Fluids*, 2015, Vol. 56, p. 88. DOI: 10.1007/s00348-015-1957-z
11. Kolesnichenko I.V., Khalilov R.I. Extremum in the Dependence of the Head Generated by Electromagnetic Pump of Liquid Metal on Feeding Current Frequency. *Computational Continuum Mechanics*, 2022, Vol. 15, no. 4, pp. 495–506. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.38

12. Kolesnichenko I., Frick P., Eltishchev V., Mandrykin, S., Stefani F. Evolution of a Strong Electro vortex Flow in a Closed Cell. *Physical Review Fluid*, 2020, Vol. 5, Iss. 12, p. 123703. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.5.123703

13. Ozernyh V.S., Golbrajh E., Losev G.L., Kolesnichenko I.V. The Initial Stage of the Formation of a Vortex Flow in an Inductor with Rotating Counter Magnetic Fields. *Computational Continuum Mechanics* (to be published).

14. Kolesnichenko I., Mamykin A., Golbraikh E., Pavlinov A. Application of the Temperature Correlation Method to Measuring the Flow Rate of Liquid Sodium. *Magnetohydrodynamics*, 2021, Vol. 57, no. 4, pp. 547–557. DOI: 10.22364/mhd.57.4.9

*Received September 14, 2023*

### Information about the authors

Kolesnichenko Ilya Vladimirovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Technological hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences), Russian Federation, e-mail: kiv@icmm.ru.

Ozernykh Vladimir Sergeevich is Junior Research Fellow, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences), Perm, Russian Federation, e-mail: ozernykh.v@icmm.ru.

Golbraikh Efim is Ph.D., Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Physics Department, Ben-Gurion University of the Negev, Beersheba, Israel, e-mail: golbref@bgu.ac.il.



# МАГНИТНЫЕ, ПРОВОДЯЩИЕ И МАГНИТОПРОВОДЯЩИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТНЫХ ПЛЁНОК (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР 2–400 К И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ 0, 1 И 5 Тл

Л.Н. Котов<sup>1</sup>, А.А. Уткин<sup>1</sup>, Ю.Е. Калинин<sup>2</sup>, А.В. Ситников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет, г. Сыктывкар, Российская Федерация

<sup>2</sup> Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: kotovln@mail.ru

**Аннотация.** Композитные плёнки с составами [(CoFeB)<sub>x</sub>+(SiO<sub>2</sub>)<sub>(1-x)</sub>+N<sub>2</sub>],  $x = 0,33–0,52$  были получены методом ионно-лучевого напыления с использованием мишеней металлического сплава и диэлектрика в атмосфере азота. Определены толщины и содержание атомных элементов, концентрации металлического сплава  $x$  композитных плёнок при помощи электронного микроскопа TESCAN MIRA3. Получены изображения магнитного фазового контраста поверхности композитных плёнок с помощью метода магнито-силовой микроскопии с использованием атомно-силового микроскопа Интегра Prima (NT-MDT, Россия) с кантилевером MFM10. Для всех композитных плёнок с  $x = 0,33–0,52$  характерна гранулированная структура, а для плёнок с большой концентрацией  $x > 0,48$  наблюдались и протяжённые области скопления металлических гранул. Были исследованы температурные зависимости магнитной восприимчивости, удельной проводимости и удельной магнитной проводимости композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) с разными  $x = 0,33–0,52$  в широком интервале температур 2–400 К и в магнитных полях 0, 1 и 5 Тл. Было обнаружено, что в композитных плёнках с концентрацией металлического сплава  $x = 0,46–0,52$  в некоторых интервалах температур наблюдаются положительная магнитная проводимость, а в других интервалах температур - отрицательная магнитная проводимость. Соотношение положительной и отрицательной магнитной проводимости определяется температурой и концентрацией металлического сплава  $x$  в композитных плёнках. Наибольшая положительная магнитная проводимость (около 1,2) характерна для гранулированных композитных металл-диэлектрических плёнок с  $x = 0,46$  с малыми размерами гранул. Наибольшая отрицательная магнитная проводимость (около -0,2) возникает в композитных плёнках с наибольшей концентрацией металлического сплава  $x = 0,52$ , которые имеют протяжённые (более нескольких микрон) металлические области скопления металлических гранул.

**Ключевые слова:** композитные металл-диэлектрические плёнки; гранулированная структура; магнитная восприимчивость; электрическое сопротивление; магнитная проводимость.

## Введение

Наногранулированные композитные плёнки металл-диэлектрик – это гетерогенные материалы, в которых металлические и диэлектрические гранулы нанометровых размеров (2–100 нм) хаотически распределены в объёме плёнки. Наноразмерное фрагментирование существенно разнородных по своим электрическим свойствам фаз, обуславливает уникальные квантовые свойства нанокompозитов [1–4]. К этим свойствам можно отнести гигантское магнитосопротивление, аномальный эффект Холла, аномально высокие значения эффекта Керра, высокие значения коэффициента поглощения СВЧ-излучения. Перспективными материалами для СВЧ магнитоэлектроники также являются композитные металл-диэлектрические плёнки, сопротивление которых может сильно изменяться под действием постоянных, переменных и импульсных магнитных полей [5]. Интерес для исследований представляют собой электрические и магнитные свойства композитных плёнок, а также изменения этих свойств при действии на них магнитного поля [5–7]. Наногранулированные магнитные композитные пленки типа металл-диэлектрик обладают как положительной проводимостью, так и отрицательной магнитной проводимостью [6]. Выполнено множество исследований по магнитосопротивлению композитных плёнок, но до сих пор не-

ясно, какие механизмы отвечают за положительную и отрицательную магнитную проводимость в композитных плёнках, и как добиться гигантских значений отрицательного магнитосопротивления. С целью выявления механизма магнитосопротивления композитных плёнок были проведены исследования проводящих, магнитных и магнито-проводящих свойств композитных плёнок ( $\text{CoFeB}+\text{SiO}_2+\text{N}_2$ ) в широком интервале температур 2–400 К при намагничивании плёнок постоянным магнитным полем с индукцией 1 и 5 Тл.

### Составы, характеристики и структура плёнок

Композитные плёнки были получены в Воронежском государственном техническом университете [4]. Напыление плёнок осуществлялось на лавсановый лист формата А4 площадью  $297 \times 210 \text{ мм}^2$  методом ионной бомбардировки мишеней в виде пластин из металлических сплавов  $\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20}$  и диэлектрика  $\text{SiO}_2$  [5]. Плёнки получались в атмосфере аргона и азота, а мишени бомбардировались в основном более лёгкими ионами аргона. Полёт выбитых из мишеней металлических и диэлектрических частиц в атмосфере азота приводил к тому, что поверхность частиц покрывалась шубой из молекул азота. Это приводило к созданию композитных плёнок с гранулированной структурой даже за областью перколяции (протекания металла). Содержание атомов азота в элементном составе плёнок составляло от 7,3 до 8,9 ат. %. Толщины и состав образцов определялись с помощью сканирующего электронного микроскопа TESCAN MIRA3 и приведены в таблице, где использованы обозначения:  $d$  – толщина плёнки,  $\Delta d$  – погрешность измерения толщины плёнки,  $x$  – концентрация металлического сплава  $\text{CoFeB}$ ,  $p$  – пористость плёнок. Концентрация металлического сплава  $x$  и атомных элементов приведена в атомных долях.

Толщины, пористость и составы плёнок ( $\text{CoFeB}+\text{SiO}_2+\text{N}_2$ )

Номер плёнки	$d$ , мкм	$\Delta d$ , нм	$x$	$P$	$B$	$Co$	$Fe$	$N$	$O$	$Si$
1	1,22	36	0,46	0,41	0,02	0,25	0,19	0,07	0,39	0,09
3	1,53	22	0,51	0,31	0,03	0,27	0,21	0,08	0,33	0,094
5	1,55	36	0,52	0,31	0,06	0,26	0,20	0,08	0,33	0,097
7	1,85	30	0,42	0,45	0,04	0,21	0,17	0,08	0,38	0,012
9	2,15	52	0,35	0,53	0,03	0,18	0,14	0,08	0,43	0,014
10	1,51	36	0,33	0,55	0,02	0,19	0,14	0,09	0,44	0,015

При подготовке плёнок для исследования лавсановый лист с напылённым слоем композита ( $\text{CoFeB}+\text{SiO}_2+\text{N}_2$ ) разрезался на 11 полосок, толщиной по 2,7 см. Каждая полоска характеризовалась определённой концентрацией металлического сплава  $x$  (см. таблицу). Для измерения магнитной восприимчивости и электрического сопротивления с каждой полоски вырезался кусочек плёнки на лавсановой подложке с размерами 6 мм на 4 мм. Изображения магнитного фазового контраста поверхности плёнок проводилось с помощью атомно-силового микроскопа Интегра Prima (NT-MDT, Россия) с кантилевером MFM10. Силиконовый зонд был покрыт магнитным сплавом  $\text{CoCr}$  толщиной 40 нм. Радиус закругления кончика зонда составлял 20 нм. Частота колебаний внешней силы, действующей на кантилевер с зондом, подбирались в диапазоне частот  $47 \div 90 \text{ кГц}$ . В микроскопе регистрировалась разность фаз  $\Delta\varphi$ , которая изменялась в зависимости от силы магнитного взаимодействия зонда с поверхностью пленок. Притяжение и отталкивание зонда к участку поверхности магнитной плёнки соответствовало разным знакам  $\Delta\varphi$ . Полученная зависимость  $\Delta\varphi$  от координат поверхности плёнок преобразовывалась в изображение магнитного фазового контраста, отображающее размеры и форму магнитных однородных областей с постоянным сдвигом фаз (рис. 1).

### Методика и техника эксперимента

Все измерения магнитной восприимчивости и электрического сопротивления композитных плёнок в интервале температур 2–400 К и магнитных полей 0–5 Тл проводились в центре диагностики функциональных материалов для медицины, фармакологии и нанoeлектроники научного парка Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Измерения магнитной

восприимчивости проводились с использованием комплекса для автоматизированных измерений, включающих в себя СКВИД (SQUID, Superconducting Quantum Interference Device – «сверхпроводящий квантовый интерферометр») и термостат 1,9–400 К. Измерения электрического сопротивления в интервале температур 2–400 К и магнитных полей 0–5 Тл проводились с использованием измерительного комплекса (ППМС-9 + EverCool-II) со сверхпроводящим магнитом ±9 Тл. Температурные зависимости магнитной восприимчивости измерялись в двух режимах: в режиме охлаждения в нулевом магнитном поле (нулевое поле охлаждения, или режим ZFC) и в режиме охлаждения в ненулевом магнитном поле (полевое охлаждение, или режим FC) (рис. 2, а). Измерения электрического сопротивления проводились при 4-контактном подключении. При измерениях магнитной восприимчивости плёнок магнитное поле было направлено параллельно поверхности плёнки, а при измерениях электрического сопротивления – перпендикулярно.

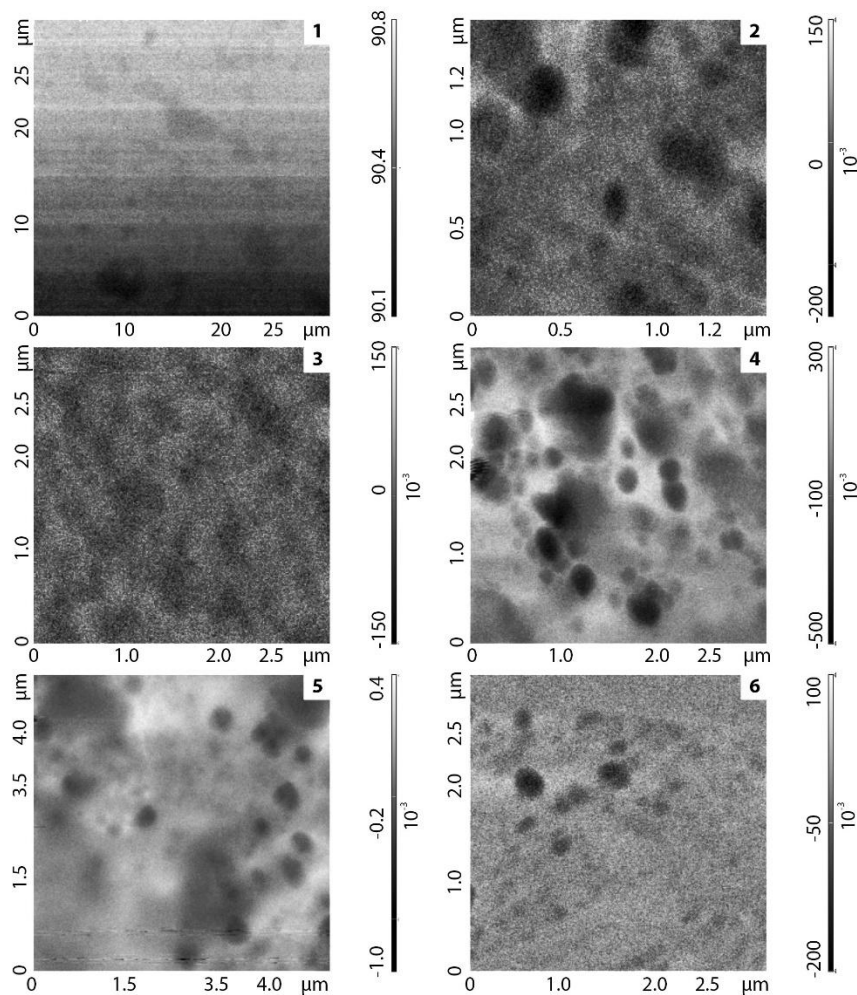


Рис. 1. Изображения магнитного фазового контраста композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>): 1 ( $x = 0,46$ ), 2 ( $0,48$ ), 3 ( $0,51$ ), 4 ( $0,52$ ), 5 ( $0,42$ ), 6 ( $0,35$ ). Справа от изображений приведены значения сдвига фаз

### Результаты эксперимента и их обсуждение

Как видно из рис. 2, для всех композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) с разной концентрацией металлического сплава  $x$ , находящихся в магнитном поле 50 Э, наблюдается сначала увеличение магнитной восприимчивости (МВ) с ростом температуры в интервале температур 2–80 К, а затем монотонное уменьшение МВ в интервале от 100 до 380 К. Максимум МВ плёнок при температурах  $T = 70$  К обусловлен близкими значениями постоянного магнитного поля и коэрцитивного поля. При высоких температурах  $T > 100$  К магнитное поле при 50 Э выстраивает магнитные моменты в металлических гранулах по полю, а ниже  $T < 50$  К магнитное поле не упорядочивает магнитные моменты гранул по полю. Как видно из рис. 2, в для всех композитных плёнок с разными номерами № 1–10, находящихся в магнитном поле 50 кЭ, наблюдается монотонное уменьшение магнитной восприимчивости (МВ) с ростом температуры при  $T = 2–380$  К. Наибольшее

значение МВ наблюдается для плёнок № 3 ( $x = 0,52$ ) с максимальной концентрацией металлического сплава  $x$ . Отметим, что очень малое значение МВ и, следовательно, намагниченности в больших полях (рис. 2, в) свойственно плёнкам № 9, 10 с малой концентрацией  $x$ .

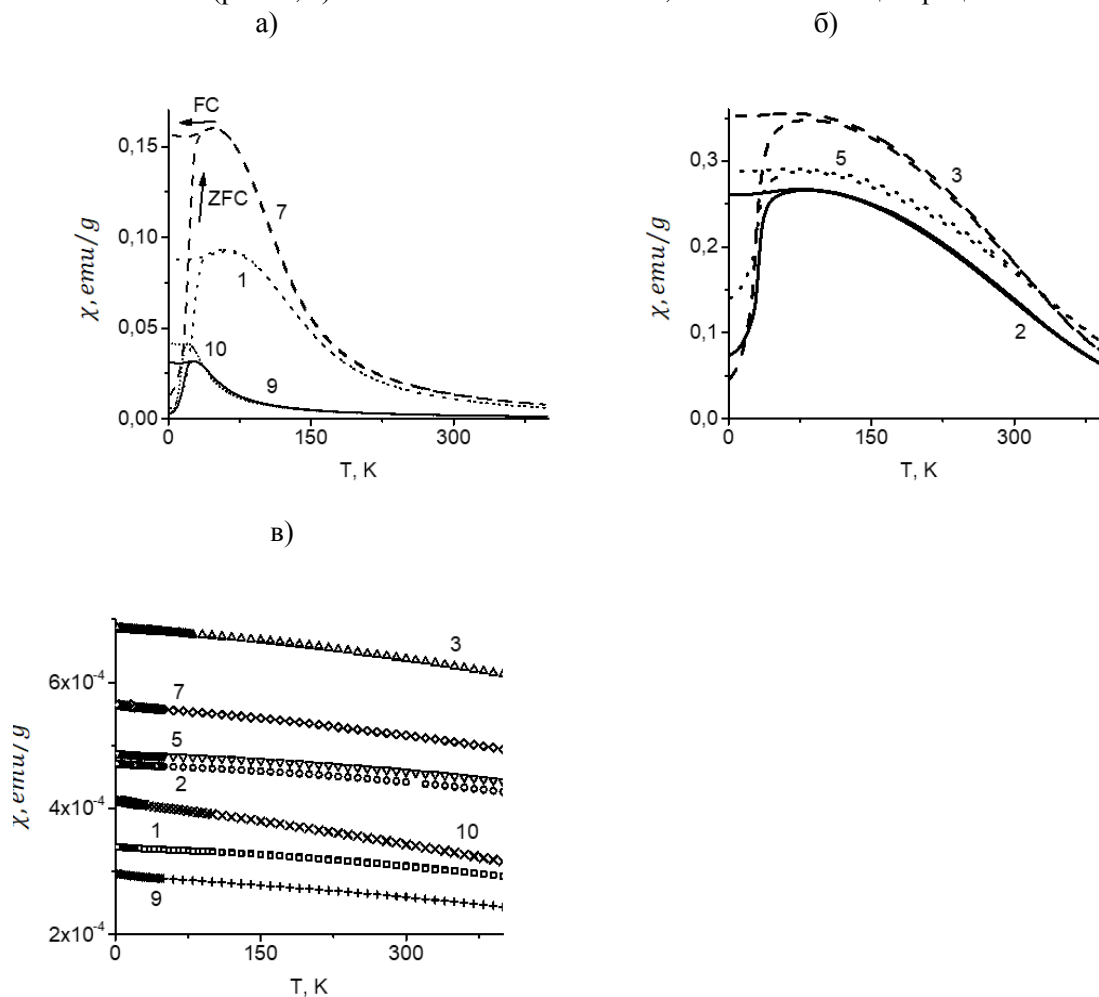


Рис. 2. Температурные зависимости магнитной восприимчивости композитных плёнок в магнитном поле 50 Э (а, б), и в магнитном поле 1 Тл (в): 1 –  $x = 0,46$ ; 2 – 0,49; 3 – 0,51; 5 – 0,52; 7 – 0,42; 9 – 0,35; 10 – 0,33. Номера кривых и плёнок совпадают. Стрелками указано направление движения по температуре при измерениях плёнок

Как видно из рис. 3, для всех композитных плёнок с составами  $(\text{CoFeB}+\text{SiO}_2+\text{N}_2)$  наблюдается линейное увеличение удельной проводимости с ростом температуры от 80 до 380 К. Это свидетельствует о том, что композитные плёнки с составами  $(\text{CoFeB}+\text{SiO}_2+\text{N}_2)$  обладают полупроводниковым характером проводимости. Наибольшее значение проводимости  $300 (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$  наблюдается для плёнок № 3 с максимальной концентрацией металлического сплава  $x = 0,52$ . При уменьшении концентрации  $x$  от 0,52 до 0,33 наблюдается уменьшение максимальной проводимости композитных плёнок. Для плёнок с малой концентрацией  $x = 0,32-0,42$  проводимость на два порядка меньше, чем для плёнок при  $x = 0,52$ . Для пленок № 3 ( $x = 0,46$ ) наблюдается промежуточное значение проводимости между плёнками с  $x = 0,52$  и 0,42 и составляет 40 Ом. Кроме того, для плёнок № 10 с малой концентрацией  $x = 0,33$  проводимость растёт намного быстрее, чем для других плёнок.

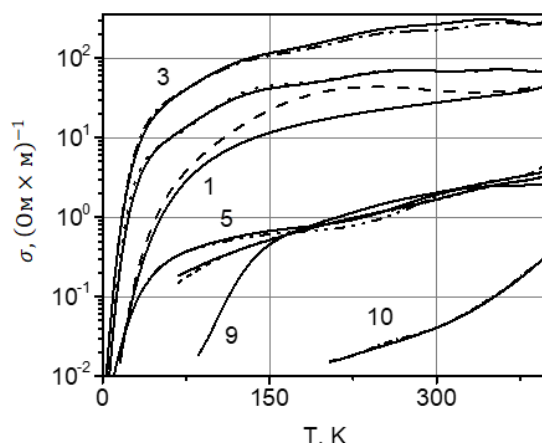


Рис. 3. Температурные зависимости удельной проводимости композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) без магнитного поля (сплошная линия) и в поле 1 Тл (пунктир): 1 –  $x = 0,46$ ; 2 –  $0,49$ ; 3 –  $0,52$ ; 5 –  $0,52$ ; 7 –  $0,42$ ; 9 –  $0,35$ ; 10 –  $0,33$

На рис. 4 приведены графики температурной зависимости относительной магнитной проводимости композитных плёнок  $\Delta\sigma/\sigma_0$ , где  $\Delta\sigma = \sigma_0 - \sigma_B$ ,  $\sigma_0$  и  $\sigma_B$  – проводимость плёнок без поля и в магнитном поле с индукцией 1 Тл. Как видно из рис. 4, максимальная относительная положительная магнитная проводимость (ПМП) характерна для плёнок № 1 ( $x = 0,46$ ), то есть для плёнок с тонкой гранулированной структурой (см. рис. 1) и составляет 1,2, то есть 120 %. По-видимому, такое большое значение ПМП может быть связано с наличием обменного взаимодействия между металлическими гранулами, которое возрастает в больших постоянных магнитных полях. В больших постоянных магнитных полях происходит выстраивание магнитных моментов в металлических гранулах и магнитные границы между гранулами исчезают. Кроме того, для магнитной проводимости плёнки № 1 с  $x = 0,46$  наблюдается максимум при температуре  $T = 220$  К. Наличие максимума может быть связано с конкуренцией двух процессов, которые дают вклад в магнитную проводимость и зависят от температуры. Это суммарный магнитный момент (намагниченность) и концентрация свободных носителей заряда в металлических гранулах плёнки. Поскольку концентрация свободных носителей заряда определяется удельной проводимостью, которая линейно растёт с температурой (см. рис. 3), то и она линейно должна увеличиваться с ростом температуры. С другой стороны, намагниченность плёнки уменьшается с ростом температуры как  $T^{-0,7}$  (см. рис. 2, в). Если считать, что магнитная проводимость определяется противоположными температурными зависимостями намагниченности и концентрацией свободных носителей заряда, то на температурной зависимости магнитной проводимости должен наблюдаться максимум. Для плёнки № 2 ( $x = 0,51$ ), наблюдаются очень малые значения ПМП (около 0,1) в широком интервале температур 50–380 К. Это связано с тем, что в плёнках № 2 ( $x = 0,51$ ) имеются большие области скопления металлических гранул (см. рис. 1), которые дают вклад в отрицательную магнитную проводимость (ОМП) и тем самым уменьшают значение ПМП плёнки. Для плёнки с максимальной  $x = 0,52$  наблюдается увеличение ПМП при росте температуры от 320 до 380 К (кривая 5, рис. 4, а). ПМП достигает максимального значения 0,8 при  $T = 380$  К. В остальном интервале температур 2–270 К плёнка № 5 ( $x = 0,52$ ) (см. рис. 4, а) наблюдаются малые значения ОМП со значением  $-0,2$  при температуре 220 К. Для плёнок № 7 ( $x = 0,42$ , кривая 7, рис. 4, б) наблюдается незначительная ПМП (около 0,08) при температурах 100–200 К, а в интервале температур 10–80 К наблюдается рост ОМП с понижением температуры от 70 до 40 К. Это свидетельствует о наличии в структуре плёнки № 7 двух областей с наногранулированной и перколяционной структурой (см. рис. 1). Для всех остальных плёнок с номерами № 7, 9, 10 в плёнках имеется наногранулированная и перколяционная структура (см. рис. 1) и для них наблюдаются очень малые значения ПМП и ОМП в широком интервале температур. Все температурные зависимости магнитной проводимости, показанные на рис. 4, свидетельствует о том, что в композитных плёнках с составами (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>), имеются гранулированные и перколяционные структуры, которые занимают разные объёмы плёнок.



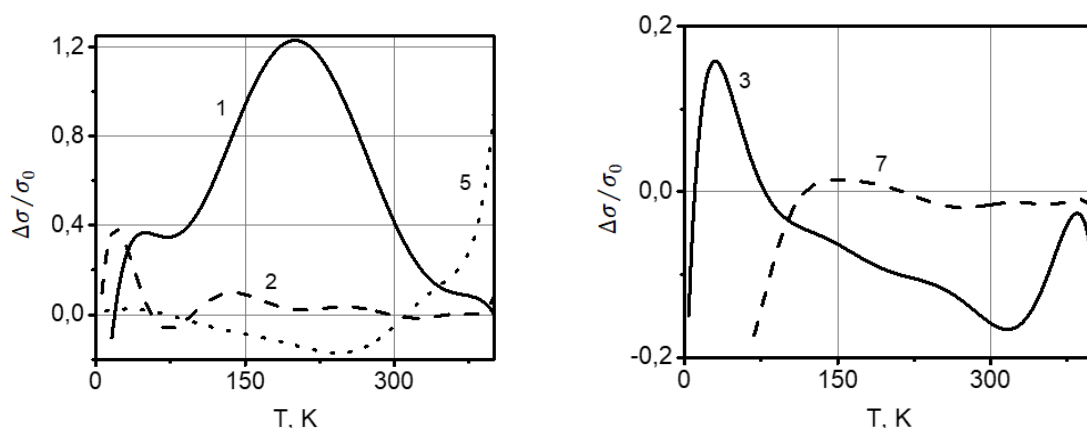


Рис. 4. Температурные зависимости удельной магнитной проводимости композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>): 1 –  $x = 0,46$ ; 2 –  $0,49$ ; 3 –  $0,52$ ; 5 –  $0,52$ ; 7 –  $0,42$

### Заключение

Получены экспериментальные графики температурных зависимостей магнитной восприимчивости, удельной проводимости и удельной магнитной проводимости композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) с концентрациями металлического сплава  $x = 0,33–0,52$  в широком интервале температур 2–400 К и магнитных полей 0–5 Тл. В композитных пленках с разной концентрацией металлического сплава  $x = 0,33–0,52$  одновременно наблюдается положительная и отрицательная магнитная проводимость (МП). Соотношение положительной и отрицательной магнитной проводимости зависит от исследуемого интервала температур и от концентрации металлического сплава  $x$  в композитных плёнках. Концентрация металлического сплава выбрана такой, что для плёнок характерна околоперколяционная структура, которая не возникает из-за напыления плёнок в атмосфере азота. Проведённые расчёты толщины азотных прослоек (около 1–3 нм) между металлическими гранулами в композитных плёнках (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) показывают, что большая относительная положительная магнитная проводимость (около 1,2) характерна для наногранулированных композитных метал-диэлектрических плёнок с тонкой (единицы нанометров) толщиной диэлектрических азотных прослоек между металлическими гранулами. Гигантская отрицательная магнитная проводимость возникает в композитных метал-диэлектрических плёнках, имеющих протяжённые (более нескольких микрометров) металлические области скопления металлических гранул.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 21-72-20048).*

### Литература

1. Спинтроника полупроводниковых, металлических, диэлектрических и гибридных структур (к 100-летию Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН) / П.Г. Баранов, А.М. Калашников, В.И. Козуб, и др. // УФН. – 2019. – Т. 189, № 8. – С. 849–880.
2. Ларионов, К.В. Исследование плёнок многоатомной толщины / К.В. Ларионов, П.Б. Сорокин // УФН. – 2021. – Т. 191, № 1. – С. 30–51.
3. Influence of Annealing on Magnetic, Relaxation and Structural Properties of Composite and Multilayer Films / L.N. Kotov, V.S. Vlasov, V.K. Turkov *et al.* // J. of Nanoscience and Nanotechnology. – 2012. – Vol. 12, no. 2. – P. 1696–1699.
4. Влияние магнитного поля на СВЧ импеданс композитных пленок (FeCoB + SiO<sub>2</sub>) / Л.Н. Котов, М.П. Ласёк, В.С. Власов и др. // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2022. – Т. 86, № 5. – С. 705–709.
5. Magnetic Conductivity of Composite Films (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) in Temperature Range 2–400 K / L.N. Kotov, A.A. Utkin, V.S. Vlasov *et al.* // VIII Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism”. *Book abstracts*, Russian, Kazan – 2022. – Vol. 1. – P. 127–128.

6. Магнитная проводимость композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>), напылённых в атмосфере азота / А.А. Уткин, Л.Н. Котов, М.П. Ласёк и др. // ИТ АРКТИКА. – 2023. – № 3. – С. 35–48.

7. Особенности гранулированной структуры и магнитные свойства композитных плёнок (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>), напылённых в атмосфере азота / А.А. Уткин, В.А. Устюгов, Л.Н. Котов и др. // ИТ АРКТИКА. – 2023. – № 3. – С. 27–34.

Поступила в редакцию 12 октября 2023 г.

### Сведения об авторах

Котов Леонид Нафанаилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра радиофизики и электроники, Сыктывкарский государственный университет, г. Сыктывкар, Российская Федерация, e-mail: kotovln@mail.ru.

Уткин Александр Андреевич – старший преподаватель, кафедра радиофизики и электроники, Сыктывкарский государственный университет, г. Сыктывкар, Российская Федерация, e-mail: utychg@gmail.com.

Калинин Юрий Егорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра физики твёрдого тела, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация, e-mail: kalinin48@mail.ru.

Ситников Александр Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики твёрдого тела, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация, e-mail: sitnikov04@mail.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 85–92

---

DOI: 10.14529/mmph230410

## MAGNETIC, CONDUCTING, AND MAGNETIC CONDUCTING PROPERTIES OF COMPOSITE FILMS (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) IN THE TEMPERATURE RANGE 2–400 K AND MAGNETIC FIELDS OF 0, 1, AND 5 T

L.N. Kotov<sup>1</sup>, A.A. Utkin<sup>1</sup>, Yu.E. Kalinin<sup>2</sup>, A.V. Sitnikov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia

<sup>2</sup> Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

E-mail: kotovln@mail.ru

Abstract. Composite films with compositions [(CoFeB)<sub>x</sub>(SiO<sub>2</sub>)<sub>(1-x)</sub>+N<sub>2</sub>],  $x = 0,33–0,52$ ] were obtained by ion-beam sputtering using metal alloy and dielectric targets in a nitrogen atmosphere. The thickness and content of atomic elements, and the concentration of metal alloy  $x$  composite films were found using a TESCAN MIRA3 electron microscope. Images of the magnetic phase contrast of the surface of composite films were obtained using magnetic force microscopy (Integra Prima atomic force microscope NT-MDT, Russia) with an MFM10 cantilever. Magnetic phase contrast images of  $x = 0,48–0,52$  films were studied. All the composite films have granular and percolation structures, the volume ratio of these structures varies depending on  $x$ . The percolation structure of films with high concentrations  $x > 0,48$  manifested in the presence of extended isolated areas (more than 1  $\mu\text{m}$ ) of the accumulation of metal granules. The temperature dependences of magnetic susceptibility, specific conductivity, and specific magnetic conductivity of the composite films with metal alloy concentrations  $x = 0,33–0,52$  were studied in a temperature range of 2–400 K and in magnetic fields of 0 T, 1 T, and 5 T. All measurements of magnetic susceptibility and electrical resistance of the composite films in this temperature and magnetic field range were carried out at the center for diagnostics of functional materials for medicine, pharmacology, and nanoelectronics at St. Petersburg State University. In composite film No. 1 ( $x = 0,46$ ) in the temperature range 100–300 K, the highest positive magnetic conductivity had a value of 1,2 at 200 K. The highest positive magnetic conductivity (about 1,2) was observed in composite granular films with small granule sizes. The results of temperature studies of the magnetic conductivity of the

composites show that the ratio of positive and negative magnetic conductivity depends on the temperature of the film and on the concentration of the metal alloy  $x$ , which sets the ratio of the granular and percolation structures. Large negative magnetic conductivity (about  $-0,2$ ) occurs in composite films No. 3 and 5, the structure of which, along with the granular structure, includes extended (more than several micrometers) metallic areas of metal granules.

*Keywords: composite metal-dielectric films; granular structure; magnetic susceptibility; electrical resistance; magnetic conductivity.*

### References

1. Baranov P.G., Kalashnikova A.M., Kozub V.I., Korenev V.L., Kusrayev Yu.G., Pisarev R.V., Sapega V.F., Akimov I.A., Bayer M., Scherbakov A.V., Yakovlev D.R. Spintronics of Semiconductor, Metallic, Dielectric, and Hybrid Structures (100th Anniversary of the Ioffe Institute). *Phys. Usp.*, 2019, Vol. 62, pp. 795–822. DOI: 10.3367/UFNe.2018.11.038486
2. Larionov K.V., Sorokin P.B. Investigation of Atomically thin Elms: State of the Art. *Physics–Uspekhi*, 2021, Vol. 64, № 1, pp. 28–47. DOI: 10.3367/UFNe.2020.03.038745
3. Kotov L.N., Vlasov V.S., Turkov V.K., Kalinin Y.E., Sitnikov A.V. Influence of Annealing on Magnetic, Relaxation and Structural Properties of Composite and Multilayer Films. *J. of Nanoscience and Nanotechnology*, 2012, Vol. 12, no. 2, pp. 1696–1699. DOI: 10.1166/jnn.2012.4701
4. Kotov L.N., Lasek M.P., Vlasov V.S., Utkin A.A., Kalinin Yu.E., Sitnikov A.V., Temnov V.V. Effect of Magnetic Fields on the Microwave Impedance of FeCoB + SiO<sub>2</sub> Composite Films. *Bulletin of the RAS: Physics*, 2022, Vol. 86, no. 5, pp. 588–591. DOI: 10.3103/S1062873822050136
5. Kotov L.N., Utkin A.A., Vlasov V.S., Sitnikov A.V., Kalinin Yu.E. Magnetic conductivity of composite films (CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>) in temperature range 2–400 K. *Proc. VIII Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism”*, Russian, Kazan, 2022, Vol. 1, pp. 127–128.
6. Utkin A.A., Kotov L.N., Lasek M.P., Kovalev P.D., Zavarin D.V. *Magnetic Conductivity of Composite Films Sprayed in a Nitrogen Atmosphere. IT ARCTICA*, 2023, no. 3, pp. 35–48.
7. Utkin A.A., Ustyugov V.A., Kotov L.N., Kovalev P.D., Turkov V.K., Blinov Z.N. *Features of Granulated Structure and Magnetic Properties of Composite Films [CoFeB+SiO<sub>2</sub>+N<sub>2</sub>] Sprayed in a Nitrogen Atmosphere. IT ARCTICA*, 2023, no. 3, pp. 27–34.

*Received October 12, 2023*

### Information about the authors

Kotov Leonid Nafanailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Radiophysics and Electronics Department, Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russian Federation, e-mail: kotovln@mail.ru.

Utkin Alexander Andreevich is Senior Lecturer, Radiophysics and Electronics Department, Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russian Federation, e-mail: utychg@gmail.com.

Kalinin Yuri Egorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Solid State Physics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: kalinin48@mail.ru.

Sitnikov Alexander Viktorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Solid State Physics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: sitnikov04@mail.ru.



# Персоналии

## СЛАВИН ОЛЕГ АНАТОЛЬЕВИЧ – К 60-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

19 августа 2023 года исполнилось 60 лет со дня рождения главного научного сотрудника Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук доктора технических наук, доцента Олега Анатольевича Славина.

О.А. Славин родился и вырос в г. Москве. После окончания средней школы поступил в Московский институт радиотехники, электроники и автоматики. Во время обучения проявил склонность к научной работе, освоил несколько языков программирования, разработал ряд информационных систем, успешно применявшихся для решения задач распознавания образов.

Получив высшее образование, Олег Анатольевич несколько лет проработал в организациях оборонно-промышленного комплекса, с 1992 года работает в Институте системного анализа Российской академии наук (ныне – ФИЦ ИУ РАН), пройдя путь от инженера до главного научного сотрудника.

О.А. Славин является известным ученым в области распознавания образов и информационных технологий. Он автор (соавтор) более 200 публикаций, из них 2 монографии, 3 учебных пособия, 132 научные статьи, 64 патента на изобретения и полезные модели

Под руководством и при непосредственном участии О.А. Славина успешно выполнены исследования по многим научно-исследовательским и опытно-конструкторским работам, в рамках государственного задания, а также исследования по ряду грантов Российского фонда фундаментальных исследований. В 2000 году он защитил кандидатскую диссертацию «Комбинированные алгоритмы в задачах распознавания текстов, а в 2011 году – докторскую диссертацию «Адаптивное распознавание и его применение к системе ввода печатного текста».

К числу наиболее значимых научных достижений О.А. Славина, успешно внедренных в практику, относятся:

эффективные алгоритмы распознавания оцифрованных документов, идентифицирующих личность для различных процессорных архитектур, в том числе для отечественной архитектуры Эльбрус-2000;

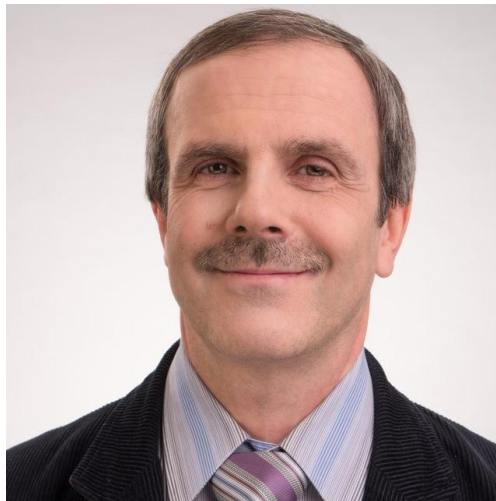
модели системы технического зрения роботов на базе микропроцессоров Эльбрус для решения задач обнаружения, классификации и сегментации в бортовых системах;

концепция защиты объектов интеллектуальной собственности с помощью технологий виртуальной и дополненной реальности;

эффективные алгоритмы классификации и обнаружения объектов для автономных беспилотных летательных аппаратов.

Результаты научных исследований О.А. Славина неоднократно представлялись на профильных научных конференциях мирового уровня, более 10 лет он является членом технического комитета международной конференции International Conference on Machine Vision. Длительное время он является членом редакционных коллегий ведущих рецензируемых научных изданий, экспертом государственных научных фондов и рецензентом трудов научных конференций.

Большое внимание О.А. Славин уделяет подготовке научных работников, в том числе научных кадров высшей квалификации. В настоящее время он является членом двух советов по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук. С 2014 года является членом экспертного совета Высшей аттестационной комиссии



*Лучше быть уверенным в хорошем результате, чем надеяться на отличный.*

*Уоррен Баффет*

## Персоналии

---

при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации по управлению, компьютерным и информационным наукам, в течение восьми лет успешно выполнял обязанности ученого секретаря этого экспертного совета.

С 2015 года О.А. Славин ведет педагогическую деятельность на кафедре «Когнитивные технологии» Московского физико-технического института. Под его научным руководством защищены 2 кандидатские диссертации и 7 выпускных квалификационных работ.

Достижения Олега Анатольевича в научной и образовательной деятельности неоднократно отмечались руководством. В 1999 году ему объявлена благодарность Президента РАН, в 2020 году он награжден почетной грамотой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, в 2023 году – нагрудным знаком «Ветеран» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Жизнь, работа, отношение к людям, неистощимая тяга к новому, креативность мышления, высокая эрудиция, доброжелательность и высокая работоспособность О.А. Славина являются примером служения науке.

Желаем Олегу Анатольевичу счастья, крепкого здоровья, новых творческих свершений, креативных научных результатов, долгих лет активной плодотворной жизни!

*С.Л. Чернышев, А.В. Богомолов, Т.И. Булдакова, С.В. Гаврилов,  
А.А. Галяев, В.В. Грибова, А.А. Грушо, В.А. Горелик, Е.Г. Жилияков,  
С.А. Загребина, А.В. Замятин, А.Ф. Каперко, А.И. Кибзун,  
В.Н. Козлов, С.В. Кулешов, Е.В. Ларкин, Т.М. Леденёва,  
Г.М. Мартинов, В.В. Меньших, Р.А. Мунасыпов, А.А. Назаров,  
Д.В. Пащенко, А.К. Петренко, Ю.Э. Плешивцева, А.Л. Ронжин,  
Е.Я. Рубинович, В.И. Ряжских, И.В. Саенко, К.Е. Самуйлов,  
П.В. Сараев, Г.А. Свиридюк, Д.Н. Сидоров, В.Б. Сулимов,  
Г.А. Угольницкий, М.В. Ульянов, А.В. Хоперсков, В.П. Хранилов,  
В.Н. Четвериков, Т.Б. Чистякова, Ю.А. Шичкина*

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 15, № 4  
2023

16+

Редактор *С.И. Уварова*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 31.10.2023. Дата выхода в свет 07.11.2023.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,16.

Тираж 500 экз. Заказ 367/411. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.