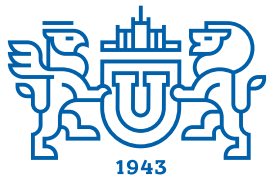


# ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**2024  
Т. 16, № 1**

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

**СЕРИЯ**

**«МАТЕМАТИКА.  
МЕХАНИКА.  
ФИЗИКА»**

**Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий**

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»**

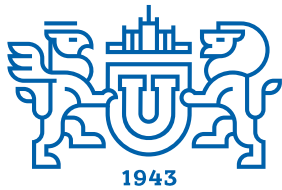
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

**Редакционная коллегия**

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)  
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)  
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)  
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)  
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

**Редакционный совет**

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)  
профессор **Гундетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)  
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)  
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)  
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)  
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)  
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)  
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)  
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)  
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)  
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)  
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)  
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)  
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)  
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)  
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



# BULLETIN

OF THE SOUTH URAL  
STATE UNIVERSITY

SERIES

2024

Vol. 16, no. 1

“MATHEMATICS.  
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)  
ISSN 2409-6547 (Online)

---

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

---

## South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

### Editorial Board

**S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**E.V. Golubev**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.P. Beskachko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**V.I. Zalyapin**, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**Yu.M. Kovalev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

### Editorial Council

**A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

**G.L. Brovko**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**V.D. Buchelnikov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

**D. Guidetti**, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy

**V.I. Zhukovsky**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**S.V. Zelik**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom

**A.I. Korotkii**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

**Jaewan Kim**, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

**Kisik Kim**, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea

**N.D. Kundikova**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

**V.V. Menshikh**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

**S.I. Pinchuk**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America

**Y.S. Puzyrev**, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

**N.K. Ravshanov**, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

**A.V. Trukhanov**, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

**L.V. Utkin**, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

**I. Verpoest**, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium

**V.A. Strauss**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

ЕГОРОВА А.Ю. Задача Коши для неоднородных параболических систем в анизотропных пространствах Зигмунда.....	5
КАЛАЧ А.В., БУГАЕВ Ю.В., НИКИТИН Б.Е. Методы поиска медианы Кемени для нестрогих и частичных упорядочений альтернатив .....	13
ЛАРКИН Е.В., СОЛДАТОВ Е.С., БОГОМОЛОВ А.В. Математическое обеспечение мониторинга состояния и управления режимами эксплуатации систем хранения криогенных продуктов.....	23
МЕНЬШИХ В.В., НИКИТЕНКО В.А. Оптимизация последовательности действий при совместном функционировании объектов или систем с учётом синергетических эффектов.....	32
РОЙТЕНБЕРГ В.Ш. Бифуркации сшитого тройного цикла кусочно-гладкой непрерывной динамической системы.....	39

### Физика

ОБАМБИ М.А., ЗАГРЕБИН М.А., БУЧЕЛЬНИКОВ В.Д. Электронные и магнитные свойства сплава Гейслера $Mn_2CrSn$ : первопринципные исследования.....	49
--	----

### Краткие сообщения

ГУРЕВИЧ С.Ю., КОЖЕВНИКОВ Д.Г., ГОЛУБЕВ Е.В. О корнях характеристического уравнения Рэлея при рациональных значениях параметра.....	56
--	----

### Информация

Серия «Математика. Механика. Физика». Краткий очерк истории (к 80-летию ЮУрГУ).....	60
Памяти Татьяны Юрьевны Винтиш .....	66
Памяти Валентина Федоровича Куропатенко.....	67

# CONTENTS

## Mathematics

EGOROVA A.Yu. The Cauchy Problem for Inhomogeneous Parabolic Systems in Anisotropic Zygmund Spaces.....	5
KALACH A.V., BUGAEV Yu.V., NIKITIN B.E. Methods of Searching for the Kemeny Median for Non-Strict and Partial Orderings of Alternatives .....	13
LARKIN E.V., SOLDATOV E.S., BOGOMOLOV A.V. Mathematical Support for Monitoring the Status and Control of Operating Modes of Cryogenic Storage Systems .....	23
MENSHIKH V.V., NIKITENKO V.A. The Optimization of Actions in the Joint Operation of Objects or Systems, Taking into Account Synergetic Effects .....	32
ROITENBERG V.Sh. Bifurcations of a Fused Triple Cycle of a Piecewise-Smooth Continuous Dynamical System .....	39

## Physics

OBAMBI M.A., ZAGREBIN M.A., BUCHELNIKOV V.D. Electronic and Magnetic Properties of the $Mn_2CrSn$ Heusler Alloy: first-principles investigations .....	49
--	----

## Short Communications

GUREVICH S.Yu., KOZHEVNIKOV D.G., GOLUBEV E.V. The Roots of the Rayleigh Characteristic Equation for Rational Values of the Parameter.....	56
--	----

## Information

Mathematics. Mechanics. Physics. A Brief History of the Series for the 80th Anniversary of SUSU.....	60
In memory of Tat'yana VINTISH.....	66
In memory of Valentin KUROPATENKO.....	67

## ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

**А.Ю. Егорова**

*Рязанский государственный университет, г. Рязань, Российская Федерация*

*E-mail: an\_batseva@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматривается задача Коши для параболической системы второго порядка, удовлетворяющей условию равномерной параболическости в смысле И.Г. Петровского, с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью. Начальное условие также может быть отличным от нуля. Шкала гладкости решений таких систем строится в анизотропных пространствах Зигмунда, которые являются аналогом параболических пространств Гельдера в случае целого показателя гладкости. Исследование свойств объемного потенциала для параболической системы проведено с помощью его представления через потенциал Пуассона. Оценки оператора, задаваемого потенциалом Пуассона, позволили установить оценки для объемного потенциала в параболических пространствах Зигмунда с весом. Полученные результаты используются для построения шкалы гладкости ограниченного решения задачи Коши для параболической системы второго порядка в весовых анизотропных пространствах Зигмунда.

*Ключевые слова:* параболическая система; задача Коши; потенциал Пуассона; объемный потенциал; анизотропные пространства Зигмунда.

### Введение

Основополагающие результаты в области исследования задачи Коши для уравнения теплопроводности получил А.Н. Тихонов. В работе [1] им были найдены условия, которые обеспечивают единственность решения задачи Коши в бесконечной области в некоторых классах экспоненциально растущих функций. Идеи этой работы А.Н. Тихонова получили развитие в трудах ряда математиков (О.А. Ладыженская [2], И.М. Гельфанд [3], Г.Н. Золотарёв [4] и другие). Е.А. Бадерко и С.И. Сахаров [5] установили существование классического решения задачи Коши для неоднородной параболической системы и ненулевого начального условия в полуограниченной области на плоскости. С.Г. Пятков [6] доказал существование и единственность решений задачи Коши для одномерного параболического уравнения в пространстве Соболева.

И.Г. Петровским в фундаментальной работе [7] был определен широкий класс параболических систем, которые являются обобщением уравнения теплопроводности. Им были установлены условия параболическости и получены точные оценки фундаментальных матриц решений таких систем. Для параболических систем произвольного порядка С.Д. Эйдельманом были установлены оценки в нормах анизотропных пространств Гельдера [8]. В работе [9] Е.А. Бадерко и С.И. Сахаровым были доказаны теоремы о единственности классического решения задачи Коши для параболической по И.Г. Петровскому системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини.

Для параболического уравнения второго порядка в анизотропных пространствах Зигмунда, в том числе весовых, А.Н. Конёнковым в работах [10, 11] была построена шкала гладкости решения задачи Коши и установлено существование обобщенного решения. В настоящей работе для параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами получены оценки объемного потенциала в анизотропных пространствах Зигмунда с весом  $H_m^{(-l)}(D)$ , которые используются для построения шкалы гладкости решений задачи Коши. Данная шкала гладкости решений задачи Коши аналогична шкале, полученной В.А. Солонниковым [12] для параболических систем в анизотропных пространствах Гельдера с нецелым показателем гладкости. В данной работе результаты В.А. Солонникова обобщаются для параболических пространств Зигмунда в

случае целого показателя гладкости. Кроме того, установлено, что, если  $l > 0$ , то в анизотропных пространствах Зигмунда  $H_l(D)$  существует обобщенное решение задачи Коши для параболической системы, если от правой части требуется только локальная ограниченность, и при  $l > 1$  существует классическое решение, если правая часть системы локально удовлетворяет условию Зигмунда.

## 1. Необходимые обозначения

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_x g(x) = g(x + \Delta x) - g(x), \quad \Delta_x^2 g(x) = g(x + 2\Delta x) - 2g(x + \Delta x) + g(x).$$

Аналогично определяются первая и вторая разности по аргументу  $t$ . Определим для вектор-функции  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  в пространстве Зигмунда  $H_0(D) = L_\infty(D)$  норму:  $|g|_{0,D} = \text{vrai sup}_D |g|$ .

$$\text{Обозначим } [g]_{1,D} = \sup_D \frac{|\Delta_x^2 g(x,t)|}{|\Delta x|} + \sup_D \frac{|\Delta_t g(x,t)|}{|\Delta t|^{\frac{1}{2}}}, \text{ и пусть для } \alpha = 1, 2 \quad \langle g \rangle_{\alpha,D} = \sup_D \frac{|\Delta_t^\alpha g(x,t)|}{\Delta t^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

В данном случае и далее точная верхняя грань берется по разностям, в которых все точки принадлежат  $D$ .

Для целых  $a \geq 2$  положим

$$[g]_{a,D} = \sum_{|k|+2s=a-1} \left| \partial_x^k \partial_t^s g(x,t) \right|_{1,D}, \quad \langle g \rangle_{a,D} = \sum_{|k|+2s=a-2} \left\langle \partial_x^k \partial_t^s g(x,t) \right\rangle_{2,D}.$$

В случае, когда  $a$  – натуральное,

$$|g|_{a,D} = \sum_{|k|+2s \leq a-1} \sup_D \left| \partial_x^k \partial_t^s g(x,t) \right| + [g]_{a,D} + \langle g \rangle_{a,D}.$$

Пространства Зигмунда функций  $g$ , которые определены в слое  $D$  и имеют в ней все производные  $\partial_x^k \partial_t^s g$ , причем  $|k|+2s < a$ , с конечной величиной  $|g|_{a,D}$  обозначим  $H_a(\bar{D})$ , а в локальном случае –  $H_a(D)$ .

Определим в слое  $D$  пространства Зигмунда с весом  $H_a^{(b)}(D)$ . Введем следующие обозначения:

$$|g|_{0,D}^{(b)} = \text{vrai sup}_D t^{\frac{\max(b,0)}{2}} |g|.$$

Для натуральных  $a$  и целых  $b \geq -a$  положим

$$[g]_{a,D}^{(b)} = \sum_{|k|+2s=a-1} \sup_{(x,t) \in D} t^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\Delta_x^2 \partial_x^k \partial_t^s g(x,t)|}{|\Delta x|} + \sum_{|k|+2s=a-1} \sup_{\substack{(x,t) \in D \\ 0 < \Delta t < T-t}} t^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\Delta_t \partial_x^k \partial_t^s g(x,t)|}{|\Delta t|^{\frac{1}{2}}},$$

$$\langle g \rangle_{1,D}^{(b)} = \sup_{\substack{(x,t) \in D \\ 0 < \Delta t < T-t}} t^{\frac{1+b}{2}} \frac{|\Delta_t g(x,t)|}{|\Delta t|^{\frac{1}{2}}},$$

$$\langle g \rangle_{a,D}^{(b)} = \sum_{|k|+2s=a-2} \sup_{\substack{(x,t) \in D \\ 0 < \Delta t < \frac{T-t}{2}}} t^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\Delta_t^2 \partial_x^k \partial_t^s g(x,t)|}{|\Delta t|}, \text{ при } a \geq 2,$$

$$|g|_{a,D}^{(b)} = \sum_{|k|+2s \leq a-1} \left| \partial_x^k \partial_t^s g \right|_{0,D}^{(|k|+2s+b)} + [g]_{a,D}^{(b)} + \langle g \rangle_{a,D}^{(b)}, \text{ при } b \geq 0,$$

$$|g|_{a,D}^{(b)} = |g|_{-b,D} + \sum_{-b < |k|+2s \leq a-1} \left| \partial_x^k \partial_t^s g \right|_{0,D}^{(|k|+2s+b)} + [g]_{a,D}^{(b)} + \langle g \rangle_{a,D}^{(b)}, \text{ при } b < 0.$$

Пространства функций  $g$ , определенных в слое  $D$  и имеющих в ней все производные  $\partial_x^k \partial_t^s g$ , где  $|k| + 2s < a$ , для которых величина  $|g|_{a,D}^{(-b)}$  конечна, обозначим  $H_a^{(b)}(D)$  в случае целых  $a \geq 0, b \geq -a$ . Нижний индекс  $a$  в этом обозначении указывает локальную гладкость, а величина  $(-b)$  – гладкость в шкале Зигмунда в замыкании слоя  $\bar{D}$ .

## 2. Оценки объемного потенциала

Для параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в слое  $D = R^n \times (0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ , рассмотрим задачу Коши:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,r=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i, u_i|_{t=0} = \psi_i, i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

В слое  $D$  система (1) удовлетворяет условиям равномерной параболичности в смысле И.Г. Петровского.

Пусть  $Z(x, t)$  – фундаментальная матрица решений системы (1) [13, гл. 1]. Элементы матрицы  $Z(x, t)$  определены и непрерывны в слое  $D$  и бесконечно дифференцируемы при  $t > 0$  и их производные по  $x$  и  $t$  удовлетворяют условию Гёльдера.

Для плотности  $\varphi(x, t) \in H_0(R^n)$  рассмотрим потенциал Пуассона вида

$$P\varphi(x, t) = \int_{R^n} Z(x - y, t) \varphi(y) dy. \quad (2)$$

Потенциал Пуассона (2) обладает следующим свойством: отображение  $P: \varphi \rightarrow P\varphi$  является ограниченным оператором из пространства  $H_l(R^n)$  в  $H_m^l(D)$ , где  $m$  и  $l$  – целые неотрицательные числа и  $m \geq l$  [14].

Для функции  $f \in H_0^{(1)}(D)$  рассмотрим объемный потенциал

$$Vf(M) = \int_D Z(x - y; t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau, (x, t) \in \bar{D}.$$

Введем следующие обозначения:  $u(x, t, \tau) = P[f(\cdot, \tau)](x, t - \tau)$ . Тогда объемный потенциал примет вид  $Vf(x, t) = \int_0^t u(x, t, \tau) d\tau$ . Это позволяет применить установленные ранее свойства потенциала Пуассона [14] для исследования объемного потенциала.

**Теорема 1.** Пусть  $m, l \in N$  и  $m \geq 2, l \leq m$ . Тогда отображение  $V: f \rightarrow Vf$  является ограниченным оператором из пространства  $H_{m-2}^{(2-l)}(D)$  в  $H_m^{(-l)}(D)$ .

**Доказательство.** Пусть  $m = 2$ . Тогда  $l = 1$  или  $l = 2$  и функция  $f(\cdot, \tau) \in L_\infty(R)$  для почти всех  $\tau \in (0, T)$  и справедлива оценка  $|f(\cdot, \tau)|_{0, R^n} \leq C \tau^{\frac{l-2}{2}}$  [10]. Используя оценки из теоремы 1 [10] в случае  $|k| \leq 1$ , получим

$$\left| \partial_x^k Vf(x, t) \right| \leq \int_0^t \left| \partial_x^k u(x, t, \tau) \right| d\tau \leq C \int_0^t (t - \tau)^{\frac{|k|}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau = C t^{\frac{l-|k|}{2}}. \quad (3)$$

Для упрощения записи оценок норма  $f$  входит в константу  $C$ . Далее для случая  $m = 2$  докажем оценки

$$\left| \Delta_x^2 \partial_x^k Vf(x, t) \right| \leq C |\Delta x| t^{\frac{l-2}{2}}, \quad |k| = 1, \quad (4)$$

$$\left| \Delta_t \partial_x^k Vf(x, t) \right| \leq C |\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-2}{2}}, \quad |k| = 1, \quad (5)$$

$$|\Delta_t^2 Vf(x,t)| \leq C|\Delta t| t^{\frac{l-2}{2}}. \quad (6)$$

Установим оценку (4). Если  $|\Delta x|^2 \geq \frac{t}{2}$ , то, используя (3), получим неравенство (4). При  $|\Delta x|^2 \leq \frac{t}{2}$

$$\Delta_x^2 \partial_x^k Vf(x,t) = \int_0^{t-|\Delta x|^2} \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau) d\tau + \int_{t-|\Delta x|^2}^t \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau) d\tau = I_1 + I_2.$$

Для оценки обоих слагаемых воспользуемся оценками потенциала Пуассона с плотностью  $f$  из соответствующего пространства Зигмунда [14].

Положим  $\xi = \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$ , тогда получим оценку интеграла  $I_1$

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^{t-|\Delta x|^2} \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau) d\tau \right| = \left| \int_0^{t-|\Delta x|^2} |\Delta x|^2 \int_0^1 \int_0^1 \partial_\xi^2 \partial_x^k u(x + \alpha \Delta x + \beta \Delta x, t, \tau) d\alpha d\beta d\tau \right| \leq \\ &\leq C|\Delta x|^2 \left[ \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^{t-|\Delta x|^2} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \right] \leq C|\Delta x| t^{\frac{l-2}{2}}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл  $I_2$ :

$$|I_2| = \int_{t-|\Delta x|^2}^t \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau) d\tau \leq C \int_{t-|\Delta x|^2}^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \leq C t^{\frac{l-2}{2}} \int_{t-|\Delta x|^2}^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = C|\Delta x| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Оценка (4) доказана.

Установим оценку (5). Пусть  $\Delta t > 0$ . При  $\Delta t \geq \frac{t}{2}$  неравенство (5) вытекает из (3). Если  $\Delta t < \frac{t}{2}$ , то

$$\Delta_t \partial_x^k Vf(x,t) = \int_0^{\Delta t} \int_0^t \partial_t \partial_x^k u(x,t+\alpha,\tau) d\alpha d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \partial_x^k u(x,t+\Delta t,\tau) d\tau = K_1 + K_2.$$

Установим оценки для обоих получившихся интегралов:

$$\begin{aligned} |K_1| &= \int_0^{\Delta t} \int_0^t |\partial_t \partial_x^k u(x,t+\alpha,\tau)| d\alpha d\tau \leq C \int_0^{\Delta t} \int_0^t (t+\alpha-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \leq \\ &\leq C \int_0^{\Delta t} \left[ \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau + t^{\frac{l-2}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t+\alpha-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \right] d\alpha \leq C|\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-2}{2}}. \end{aligned}$$

$$|K_2| = \int_t^{t+\Delta t} \partial_x^k u(x,t+\Delta t,\tau) d\tau \leq C \int_t^{t+\Delta t} (t+\Delta t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \leq C|\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Неравенство (5) доказано.

Для доказательства оценки (6) рассмотрим следующие случаи. При  $\Delta t \geq \frac{t}{2}$  неравенство (6) следует из (2):



$$|\Delta_t^2 Vf(x,t)| = \int_0^t |\Delta_t^2 \partial_x^k u(x,t,\tau)| d\tau \leq Ct^{\frac{l}{2}} \leq C|\Delta t|t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Если  $\Delta t < \frac{t}{2}$ , то

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 Vf(x,t) &= \int_0^t \Delta_t^2 u(x,t,\tau) d\tau = \left[ \int_0^{\frac{t}{2}} \Delta_t^2 u(x,t,\tau) d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \Delta_t^2 u(x,t,\tau) d\tau \right] + \\ &+ \int_t^{t+2\Delta t} u(x,t+2\Delta t,\tau) d\tau - 2 \int_t^{t+\Delta t} u(x,t+\Delta t,\tau) d\tau = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Для оценки первого и второго интегралов воспользуемся следующим фактом: функция  $p(x) = x \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$  не удовлетворяет условию Липшица, но удовлетворяет условию Зигмунда и для  $h > 0$  справедливо неравенство [11]

$$\Delta_h^2 p(x) = \int_0^h \int_0^h (x + \alpha + \beta)^{-1} d\alpha d\beta \leq \int_0^h \int_0^h (\alpha + \beta)^{-1} d\alpha d\beta = 2h \ln 2,$$

тогда

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \int_0^{\frac{t}{2}} \Delta_t^2 u(x,t,\tau) d\tau \right| = \left| \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \partial_t^2 u(x,t + \alpha + \beta, \tau) d\alpha d\beta d\tau \right| \leq \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (t + \alpha + \beta - \tau)^{-2} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau d\alpha d\beta \leq C \left(\frac{t}{2}\right)^{-2} |\Delta t|^2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} d\alpha d\beta \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \leq C|\Delta t|t^{\frac{l-2}{2}}. \\ |J_2| &= \left| \int_{\frac{t}{2}}^t \Delta_t^2 u(x,t,\tau) d\tau \right| = \left| \int_{\frac{t}{2}}^t \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \partial_t^2 u(x,t + \alpha + \beta, \tau) d\alpha d\beta d\tau \right| \leq \\ &\leq C \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{\frac{t}{2}}^t (t + \alpha + \beta - \tau)^{-2} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau d\alpha d\beta \leq Ct^{\frac{l-2}{2}} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left[ (\alpha + \beta)^{-1} - \left(\frac{t}{2} + \alpha + \beta\right)^{-1} \right] d\tau d\alpha d\beta \leq \\ &\leq Ct^{\frac{l-2}{2}} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\alpha + \beta)^{-1} d\alpha d\beta \leq C|\Delta t|t^{\frac{l-2}{2}}. \end{aligned}$$

Слагаемые  $J_3$  и  $J_4$  имеют следующие оценки:

$$|J_3| \leq C \int_t^{t+2\Delta t} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \leq C|\Delta t|t^{\frac{l-2}{2}}, \quad |J_4| \leq C \int_t^{t+\Delta t} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \leq C|\Delta t|t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Для  $m = 2$  теорема доказана.

Пусть  $m \geq 3$ . Заметим, что при  $|k| \leq l - 1$  справедливо неравенство  $|\partial_x^k Vf(x,t)| = |V[\partial_x^k f](x,t)| \leq C$ , то достаточно доказать утверждение теоремы для  $l = 1$ , то есть для  $f \in H_{m-2}^{(1)}(D)$ , которое в данном случае сводится к оценкам:

$$|\partial_x^k Vf(x,t)| \leq Ct^{\frac{|k|-1}{2}}, \quad |k| \leq m - 1, \tag{7}$$

$$\left| \Delta_x^2 \partial_x^k V f(x, t) \right| \leq C |\Delta x| t^{-\frac{m-1}{2}}, \quad |k| = m-1, \quad (8)$$

$$\left| \Delta_t \partial_x^k V f(x, t) \right| \leq C |\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{m-1}{2}}, \quad |k| = m-1, \quad (9)$$

$$\left| \Delta_t^2 \partial_x^k V f(x, t) \right| \leq C |\Delta t| t^{-\frac{m-1}{2}}, \quad |k| = m-2. \quad (10)$$

Доказательство оценок (7)–(10) строится на рассуждениях, аналогичных доказательству неравенств (3)–(6). При этом используются оценки производных  $\partial_x^k u(x, t, \tau)$  из леммы 1 [10] для доказательства неравенств (7), (8), а для (9) и (10) – из леммы 2 [10]. Теорема доказана.

Объемный потенциал с плотностью  $f \in H_{m-2}^{(2-l)}(D)$  при  $m \geq 3, 0 < l \leq m$  удовлетворяет системе (1) в слое  $D$ , так как такие функции локально непрерывны по Гёльдеру. Следовательно,  $u = \Pi \psi + V f \in C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D)$  является классическим решением задачи Коши (1). Тогда из свойств потенциала Пуассона и теоремы 1 следует:

**Теорема 2.** Пусть  $m \geq 3, 0 < l \leq m, f \in H_{m-2}^{(2-l)}(D)$  и  $\psi \in H_l(R^n)$ . Тогда существует единственное классическое решение  $u$  задачи Коши (1) из пространства  $H_m^{(-l)}(D)$  и справедлива оценка

$$|u|_{m;D}^{(-l)} \leq C \left( |f|_{m-2;D}^{(2-l)} + |\psi|_{l;R^n} \right).$$

Из теоремы 2 следует, что любое решение системы (1), где  $f \in H_l(D), l \geq 1$ , в слое  $D$  будет принадлежать пространству  $H_{l+2}(D)$ .

Любое обобщенное решение в слое  $D$  системы  $Lu = f \in L_\infty(D)$  совпадает в  $D$  с функцией из пространства  $H_2(D)$  и справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $l=1$  или  $l=2, f \in H_0^{(2-l)}(D)$  и  $\psi \in H_l(R^n)$ . Тогда существует обобщенное решение  $u$  задачи Коши (1) в пространстве  $L_\infty(D)$ , причем

$$|u|_{2;D}^{(-l)} \leq C \left( |f|_{0;D}^{(2-l)} + |\psi|_{l;R^n} \right).$$

Для случая  $f \in L_\infty(R^n), \psi \in L_\infty(R^n)$  существование обобщенного решения задачи Коши из пространства  $L_\infty(D^T)$  для любого  $T > 0$  и представление  $u = \Pi \psi + V f$  для уравнения теплопроводности установлены в [15, гл. 3]. Доказательство аналогично и в случае  $l=1$ , когда почти всюду в слое  $D$  вектор-функция  $f$  удовлетворяет неравенству  $|f(x, t)| \leq C t^{-1/2}$ . Требуемая гладкость обобщенных решений задачи Коши (1) вытекает из свойств потенциала Пуассона [14] и теоремы 2.

### Заключение

Таким образом, для объемного потенциала доказано, что отображение  $V : f \rightarrow V f$  является ограниченным оператором из пространства  $H_{m-2}^{(2-l)}(D)$  в  $H_m^{(-l)}(D)$ . Установлено, что ограниченное в слое  $D$  классическое решение задачи Коши параболической системы (1) и начальной плотности  $\psi \in H_l(R^n)$  принадлежит весовому пространству Зигмунда  $H_m^{(-l)}(D)$  при  $0 < l \leq m, m \geq 3$ . Полученные оценки можно применить для построения шкалы гладкости решений задачи Коши для параболической системы с переменными коэффициентами.

### Литература

1. Tychonoff, A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur / A. Tychonoff // Матем. сб. – 1935. – № 42 (2). – С. 199–216.
2. Ладыженская, О.А. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения / О.А. Ладыженская // Матем. сб. – 1950. – Т. 27 (69), № 2. – С. 175–184.

3. Гельфанд, И.М. О новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилор // ДАН. – 1955. – № 102(6). – С. 1065–1068.
4. Золотарев, Г.Н. О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И.Г. Петровского / Г.Н. Золотарев // Изв. вузов. Матем. – 1958. – № 2. – С. 118–135.
5. Бадерко, Е.А. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 10. – С. 1333–1343.
6. Пятков, С.Г. О разрешимости задачи Коши с данными на боковой поверхности прямоугольника для одномерного параболического уравнения / С.Г. Пятков // Успехи кибернетики. – 2022. – Т. 3, № 2. – С. 40–46.
7. Петровский, И.Г. О задаче Коши в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // УМН. – 1937. – № 3. – С. 234–238.
8. Эйдельман, С.Д. О задаче Коши для параболических систем / С.Д. Эйдельман // ДАН СССР. – 1954. – Т. 98, № 6. – С. 913–915.
9. Бадерко, Е.А. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 503, № 1. – С. 26–29.
10. Конёнков, А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 820–831.
11. Конёнков, А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 814–819
12. Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 1965. – Т. 83. – С. 3–163.
13. Эйдельман, С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
14. Егорова, А.Ю. Задача Коши для системы параболических уравнений в анизотропных пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова // Вестник БГУ. Математика, информатика. – 2023. – № 3. – С. 14–22.
15. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Поступила в редакцию 7 ноября 2023 г.

### Сведения об авторе

Егорова Анастасия Юрьевна – аспирант, кафедра математики, Рязанский государственный университет им С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация, e-mail: an\_batseva@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2024, vol. 16, no. 1, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph240101

## THE CAUCHY PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS PARABOLIC SYSTEMS IN ANISOTROPIC ZYGMUND SPACES

**A.Yu. Egorova**

*Ryazan State University named for S. A. Esenin, Ryazan, Russian Federation*

*E-mail: an\_batseva@mail.ru*

**Abstract.** This article deals with the Cauchy problem for a second-order parabolic system with constant coefficients and a non-zero right hand side which satisfy the condition of uniform parabolicity in the sense of Petrovsky. The initial condition can also be non-zero. Anisotropic Zygmund spaces which are analogous to parabolic Hölder spaces in the case of an integer smoothness index are used to construct a smoothness scale for solutions to such systems. The properties of the volume potential for a par-

abolic system were studied using their representation through the Poisson potential. Estimates of the operator given by the Poisson potential established estimates for the volume potential in weighted parabolic Zygmund spaces. The results are used to construct a smoothness scale for a bounded solution to the Cauchy problem for a second-order parabolic system in weighted anisotropic Zygmund spaces.

*Keywords: parabolic system; the Cauchy problem; Poisson potential; volume potential; anisotropic Zygmund spaces.*

### References

1. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Math. col.*, 1935, no. 42 (2), pp. 199–216.
2. Ladyzhenskaya O.A. On the Uniqueness of the Solution of Cauchy's Problem for a Linear Parabolic Equation. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1950, Vol. 27(69), no. 2, pp. 175–184.
3. Gel'fand I.M., Shilov G.E. O novom metode v teoremakh edinstvennosti resheniya zadachi Koshi (On a New Method in the Uniqueness Theorems for Solving the Cauchy Problem). *DAN*, 1955, no. 102(6), pp. 1065–1068. (in Russ.).
4. Zolotarev G.N. O edinstvennosti resheniya zadachi Koshi dlya sistem, parabolicheskikh v smysle I.G. Petrovskogo (On the Uniqueness of the Solution of the Cauchy Problem for Systems Parabolic in the Sense of I.G. Petrovsky). *Izv. vuzov. Matem.*, 1958, no. 2, pp. 118–135. (in Russ.).
5. Baderko E.A. Poisson Potential in the First Initial Boundary Value Problem for a Parabolic System in a Semi-Bounded Domain on a Plane. *Differential Equations*, 2022, Vol. 58, no. 10. pp. 1327–1337. DOI: 10.1134/S00122661220100044
6. Pyatkov S.G. Cauchy Problem Solvability with the Data Specified on the Rectangle Boundary for a One-Dimensional Parabolic Equation. *Russian Journal of Cybernetics*, 2022, Vol. 3, no. 2, pp. 40–46. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6
7. Petrovskii I.G. On the Cauchy Problem in a Domain of Non-Analytic Functions. *Uspekhi mat. nauk*, 1937, no. 3, pp. 234–238. (in Russ.).
8. Eidelman S.D. The Cauchy Problem for Parabolic Systems. *DAN USSR*, 1954, Vol. 98, no. 6, pp. 913–915. (in Russ.).
9. Baderko E.A., Sakharov S.I. Uniqueness of Solutions of Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems with Dini-Continuous Coefficients in Domains on the Plane. *Dokl. Math.*, 2022, Vol. 105, pp. 71–74. DOI: 10.1134/S1064562422020065
10. Kononkov A.N. The Cauchy Problem for the Heat Equation in Zygmund Spaces. *Differential Equations*, 2005, Vol. 41, no. 6, pp. 860–872. DOI: 10.1007/s10625-005-0225-z
11. Kononkov A.N. The Cauchy Problem for Parabolic Equations in Zygmund Spaces. *Differential Equations*, 2006, Vol. 42, no. 6, pp. 867–873. DOI: 10.1134/S0012266106060103
12. Solonnikov V.A. On Boundary Value Problems for Linear Parabolic Systems of Differential Equations of General Form. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova*, 1965, Vol. 83, pp. 3–163. (in Russ.).
13. Eidelman S.D. *Parabolicheskie sistemy* (Parabolic systems). Moscow, Nauka Publ., 1964, 443 p. (in Russ.).
14. Egorova A.Yu. The Cauchy Problem for Systems of Parabolic Equations in Anisotropic Zygmund Spaces. *Bulletin of BSU. Mathematics, computer science*, 2023, no. 3, pp. 14–22. DOI: 10.18101/2304-5728-2023-3-14-22
15. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1988, 512 p. (in Russ.).

*Received November 7, 2023*

### Information about the author

Egorova Anastasia Yurievna is a Post-Graduate Student, Department of Mathematics, Ryazan State University named after S.A. Esenin, Ryazan, Russian Federation, e-mail: an\_batseva@mail.ru.

## МЕТОДЫ ПОИСКА МЕДИАНЫ КЕМЕНИ ДЛЯ НЕСТРОГИХ И ЧАСТИЧНЫХ УПОРЯДОЧЕНИЙ АЛЬТЕРНАТИВ

**А.В. Калач, Ю.В. Бугаев, Б.Е. Никитин**

*Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж,  
Российская Федерация*

*E-mail: A\_Kalach@mail.ru*

**Аннотация.** В рамках развития подходов к моделированию процессов, лежащих в основе принятия решений во всех сферах человеческой деятельности, приведено описание разработанного приближенного алгоритма нахождения медианы Кемени для набора нестрогих упорядочений альтернатив. Исследование осуществляли в рамках современной методологии выбора альтернатив, которая предполагает выбор обоснованного решения по окончании анализа и обобщения поступающей информации и достижения некоторого заданного порогового значения величины критерия принятия решения. Предложено обоснование выбора вариантов решений многокритериальных задач в сфере планирования и управления из существующего множества альтернатив с использованием экспертных оценок. В рамках современной методологии выбора альтернатив предложены два алгоритма поиска медианы Кемени при наличии нестрогих и частичных упорядочений в исходном профиле, а также при наличии альтернатив, не оцененных экспертами. Рассмотрены особенности построения медианы Кемени по предлагаемому алгоритму на конкретном численном примере. Показана обоснованность использования разработанного приближенного алгоритма для решения экспрессного по сравнению с традиционным точным алгоритмом. Отдельно отмечено, что в случае наличия нескольких решений алгоритм гарантирует нахождения варианта, достаточно близкого к какому-нибудь экспертному упорядочению рассматриваемого профиля экспертных оценок.

*Ключевые слова:* альтернативы; ранжирование; принцип Кондорсе; процедура Борда; медиана Кемени; алгоритм; эксперты.

### Введение

Роль информационной поддержки принятия эффективных по заданным критериям решений в различных сферах деятельности общества и государства неуклонно возрастает.

В современном мире моделирование процессов, лежащих в основе принятия решений, является одной из наиболее актуальных задач всех сфер человеческой деятельности [1–5].

Современная методология выбора альтернатив предполагает, что выбор обоснованного решения наступает в момент окончания анализа и обобщения поступающей информации и достижения некоторого порогового значения величины критерия принятия решения. Необходимо отметить, что информация в этом контексте, как правило, означает любые изменения в центральной нервной системе, которые преобразуют восприятие и познание в действие [6].

Традиционно такие модели применяют в психологических исследованиях, включающих варианты бинарного выбора, один из которых «правильный», а другой – «неправильный» в рамках конкретной решаемой задачи [7] для описания ситуаций выбора в азартных играх [2, 8].

В качестве примера в исследовании [9] данный подход был расширен до трех (и более) альтернативных вариантов выбора.

Следует отметить, что некоторые из разработанных моделей позволяют одновременно учитывать все три так называемых контекстных явления: эффект притяжения, эффект сходства и эффект компромисса [10].

Необходимо отметить, что в настоящее время актуальным является обоснование выбора вариантов решений многокритериальных задач в сфере планирования и управления из существующего множества альтернатив с использованием экспертных оценок.

### Приближенный метод поиска медианы Кемени для нестрогих предпочтений альтернатив

Рассмотрим построение итогового множества в некотором смысле лучших вариантов из имеющегося конечного множества альтернатив  $X$ , состоящего из  $t$  вариантов, оцениваемое

группой  $N$  экспертов. Материалы статьи являются логичным продолжением идеи, высказанной в рамках Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ» в Воронежском государственном техническом университете [11].

В рамках решения сформулированной задачи осуществляют многокритериальный выбор путем сужения исходного множества недоминируемых альтернатив для их дальнейшего более детального анализа или выбор альтернативы из предлагаемого набора  $X$  [12].

Известно, что при сужении исходного множества недоминируемых альтернатив результирующее предпочтение лица, принимающего решение (ЛПР), или экспертов представляет собой конусное бинарное отношение типа частичного порядка в пространстве критериев [13], при выборе альтернативы из предлагаемого набора решение представляет функцию ценности в пространстве критериев или линейного порядка на множестве  $X$  [12].

В теории экспертных оценок показана важная роль расстояния и медианы Кемени. В исследовании рассматривали задачу коллективного выбора второго типа в соответствии с процедурой, описанной в [14]. Необходимо отметить, что в настоящее время «медиана Кемени» является единственным строгим ранжирующим нейтральным, согласованным и кондорсетовым правилом коллективного выбора; удовлетворяет принципу выбора Кондорсе, не приводя к одноименному парадоксу; удовлетворяет четырем из пяти условий Эрроу [15].

Таким образом, возможно заключить, что медиане Кемени соответствуют самые корректные результирующие отношения.

Следует, однако, отметить недостатки как самого подхода к итоговому ранжированию в виде медианы, так и вычислительных алгоритмов ее поиска. Так, исследования [16, 17], проведенные авторами настоящей работы, показали, что при интерпретации экспертных оценок в виде случайных величин метод медианы Кемени для тестовых примеров с меньшей вероятностью находит истинное упорядочение, чем, например, процедуры Борда и Коупленда. Предлагаемый в [15] метод ветвей и границ позволяет найти итоговое строгое упорядочение за относительно небольшое число итераций. Однако необходимо учесть, что при значительном разбросе мнений экспертов велика вероятность того события, при котором найденное точным алгоритмом решение представляет собой «центр бублика» [18].

Иными словами, найденный вариант итогового упорядочения далек от всех экспертных ранжирований данного профиля и ему не близко ничье экспертное мнение. Среди приближенных методов поиска медианы Кемени следует отметить серию из 7 эвристических алгоритмов, предложенных В.Н. Жихаревым [19].

В пространстве перестановок, снабженного метрикой Кемени, строится система шаров некоторого радиуса  $R$  с центрами в точках (перестановках), совпадающими с элементами профиля  $\{P_i\}$  экспертного ранжирования. Объединение таких шаров называется  $R$ -окрестностью множества  $\{P_i\}$ . Постепенно увеличивая значение  $R$  и перебирая различными способами точки получающихся  $R$ -окрестностей, строится последовательность псевдомедиан Кемени для построенных множеств. Стабилизированная точка последовательности считается решением задачи итогового ранжирования. На наш взгляд, при сильном расхождении мнений экспертов для поиска удовлетворительного итогового упорядочения придется строить окрестность весьма большого значения  $R$ , что приведет к необходимости перебора значительного числа точек окрестности, сопоставимом с множеством всех возможных упорядочений [11].

Необходимо отметить, что спорным моментом метода медианы Кемени является обоснованность его применения при наличии эквивалентных или несравнимых альтернатив по В.Д. Ногину [13].

В этих условиях вместо навязывания решения в виде строгого упорядочения более логичным является поиск решения в виде нестрогого бинарного отношения. Так, например, пусть в полученном нестрогом решении оказалось  $x_i \sim x_j$ . Скорее всего, это означает, что существуют две оптимальные строгие ранжировки с упорядочениями  $x_i \succ x_j$  и  $x_j \succ x_i$  соответственно. Однако при больших предъявлениях нет возможности найти все итоговые упорядочения, и тогда факт одинаковой предпочтительности  $x_i$  и  $x_j$  не проявится.

Нестрогость итогового упорядочения может повлечь наличие в итоговом выборе нескольких одинаковых по предпочтению альтернатив. Фактически это будет означать недостаточную избирательную способность применяемого метода. В этом случае для принятия справедливого решения следует подвергнуть выбранные альтернативы более детальному анализу, что при получении строгой ранжировки сделано не будет.

Пары несравнимых альтернатив в графе соответствующего бинарного отношения должны быть изображены в виде изолированных вершин [20].

Для аналитического представления экспертных упорядочений авторы метода [14] предлагают использовать  $(-1, 0, 1)$  – матрицы, в которых полагают

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in P \\ 0, & \text{если } x_i \text{ эквивалентен } x_j \\ -1, & \text{если } (x_j, x_i) \in P \end{cases} \quad (1)$$

Там же показано, что для корректного представления отношения предпочтения  $P$  в виде матрицы (1) для любых  $i, j, k$  должны выполняться три условия:

I)  $A_{ij} = +1, 0$  или  $-1$ ;

II)  $A_{ij} = -A_{ji}$ ;

III) если  $A_{ij} \geq 0$  и  $A_{jk} \geq 0$ , то  $A_{ik} \geq 0$ , причем  $A_{ik} = 0$ , только если  $A_{ij} = A_{jk} = 0$ .

Условие III) эквивалентно требованию транзитивности  $P$ .

В представлении (1) не предусмотрен случай отсутствия отношения  $P$  между парой альтернатив. Это означает, что (1) предназначено лишь для связных транзитивных бинарных отношений.

В [20] приведено итоговое упорядочение сроков нововведений с помощью медианы Кемени для прогнозирования в космических технологиях. Для учета наличия неочевидных альтернатив «...было введено понятие ранжировки (раньше–позже) технологических нововведений. ... Для событий, которые не упоминались некоторыми экспертами, принималось, что технологическое нововведение может произойти в любой момент в течение века. Для них строка в матрице отношений заполнялась нулями». Для выполнения условия II) нулями заполнялся и столбец. Такое заполнение фактически означает, что неочевидные альтернативы считают эквивалентными всем остальным альтернативам в экспертном ранжировании.

Однако при заполнении только строки и столбца нарушается условие III), а для его выполнения пришлось бы заполнить нулями всю матрицу. Действительно, при наличии транзитивности существование альтернативы, эквивалентной всем остальным вариантам, означает эквивалентность всех альтернатив предъявления. Очевидно, такой подход не является корректным и может привести к противоречию.

В этих условиях наиболее подходящим типом итогового упорядочения является, по нашему мнению, полное транзитивное отношение. Известно, что оно также обладает свойством рефлексивности и негатранзитивности. В разных источниках его именуют нестрогим слабым порядком или линейным квазипорядком. Именно эти свойства обеспечивают отсутствие в итоговом упорядочении несравнимых альтернатив и противоречивых (нетранзитивных) предпочтений, присутствие которых сделало бы всю процедуру коллективного выбора бессмысленной. Наличие же в решении эквивалентных альтернатив не сведет результат на нет, а лишь укажет на необходимость дальнейших более тщательных исследований, значительно сузив при этом область поисков.

Исходя из рассмотренных выше примеров, возможно предположить, что в общем случае в качестве исходных упорядочений применимы использоваться следующие их виды:

а) кластеризованная ранжировка [18] – полное транзитивное отношение (нестрогий слабый порядок или линейный квазипорядок);

б) рефлексивное транзитивное бинарное отношение (квазипорядок или нестрогое частичное предпочтение); при этом предполагается, что соответствующий этому отношению граф является слабо связным т. е. не распадается на отдельные компоненты;

в) рефлексивное транзитивное бинарное отношение, но предполагается, что соответствующий этому отношению граф не является слабо связным, т. е. распадается на отдельные компо-

ненты; в частном случае в исходных упорядочениях могут присутствовать не оцененные альтернативы, т. е. некоторые вершины графа изолированы.

В случае а) результирующее упорядочение принадлежит тому же пространству, что и исходные. В случаях б) и в) пространства исходных и результирующего упорядочения различаются. В общем случае в исходном профиле могут одновременно присутствовать все указанные виды упорядочений.

В данной работе предлагаются точный (переборный) и приближенный алгоритмы нахождения такого решения, которые пригодны для всех описанных случаев экспертных предпочтений, и, на наш взгляд, лишены большинства перечисленных недостатков.

### Описание точного алгоритма

Расстояние Кемени удобно вычислять по матричному представлению исходных упорядочений. Авторы метода [14] предлагают для этого использовать матрицы (1). Однако при таком обозначении невозможно корректно представить отношения, содержащие несравнимые альтернативы, или такие, которые эксперты не смогли оценить. Поэтому более обоснованной является традиционная кодировка связей между альтернативами с помощью матрицы смежности, принятая в теории графов:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in P \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2)$$

В обозначениях (1) 0-матрица является представлением случая эквивалентности всех альтернатив ранжирования. В кодировке (2) ее аналогом следует считать матрицу, состоящую из единиц.

Доказательство справедливости вычислительной формулы для метрики Кемени [14] в представлении (2) почти буквально повторяет аналогичное доказательство для представления (1). Отличие появляется только в лемме 2 при рассмотрении начального пункта индукции для матриц размерности  $n=2$ . Единственная разница в формулах состоит в том, что для достижения минимального расстояния, равного 1, не надо делить сумму на 2, поскольку матрица (2), в отличие от (1), не является кососимметричной. Таким образом, если каждое упорядочение  $P$  задано в матричной форме (2), то расстояние от одного упорядочения, представленного матрицей  $A$ , до другого упорядочения, представленного матрицей  $B$ , вычисляется по формуле

$$d(A, B) = \sum_{i,j} |A_{ij} - B_{ij}|. \quad (3)$$

Пусть  $\{P_i\}$  – профиль экспертных упорядочений множества  $X$ . Рассмотрим некоторое множество  $\Lambda$  нестрогих упорядочений элементов множества  $X$ . Каждому упорядочению  $\lambda \in \Lambda$  приписывается числовая оценка  $\zeta(\lambda)$ , характеризующая степень близости  $\lambda$  ко всему множеству упорядочений из профиля  $\{P_i\}$ . Числа  $\zeta(\lambda)$  определяются следующим образом:

$$\zeta(\lambda) = \sum_i d(A^{(\lambda)}, B^{(i)}), \quad (4)$$

где  $A^{(\lambda)}$  – матрица упорядочения  $\lambda \in \Lambda$ ,  $B^{(i)}$  – матрица упорядочения  $P_i \in \{P_i\}$ . Результирующее упорядочение  $\lambda^* \in \Lambda$  выбирается из условия минимума  $\zeta(\lambda)$ . Если  $\Lambda$  является подмножеством множества всех нестрогих упорядочений, то в [20] для  $\lambda^*$  предлагается термин «псевдомедиана».

Алгоритм точного нахождения медианы Кемени при нестрогих упорядочениях имеет вычислительную сложность выше экспоненциальной, поэтому для организации выполнимого алгоритма важно максимально исключить генерацию «лишних» элементов, обусловленных повторением уже рассмотренных вариантов. Предлагаемый алгоритм состоит из двух циклов.

Во внешнем цикле в базовом наборе  $\{1, \dots, m\}$  номеров альтернатив выделяются возможные классы эквивалентности. Число вариантов таких классов определяется числами Стирлинга 2-го рода:  $S(m, k)$ ,  $k=0, \dots, m$ . Во внутреннем цикле перебираются все  $k!$  перестановок сформированных классов. Отсюда число возможных вариантов итогового упорядочения составляет

$$M = \sum_{k=0}^m k! S(m, k).$$



Для реализации внешнего цикла предлагается воспользоваться известным алгоритмом разбиения множества [21]. Для реализации внутреннего цикла предлагается быстрый алгоритм генерации перестановок, в котором каждый следующий вариант получается из предыдущего инверсией пары соседних элементов [22].

**Пример 1.** Исходный профиль состоит из двух строгих упорядочений:  $\{(A \succ B \succ C), (A \succ C \succ B)\}$ . Для  $m = 3$  существует 5 вариантов разбиений с выделением классов эквивалентности:

$$[A \sim B \sim C], ([A \sim B] \succ C), (A \succ B \succ C), (A \succ C \succ B), ([A \sim C] \succ B).$$

Теперь, считая каждый класс эквивалентности отдельным неделимым элементом, переберем все упорядочения полученных разбиений. Всего получаем 13 вариантов нестрогих упорядочений. Из них 3 варианта имеют наименьшее значение  $\xi(\lambda) = 2$ :  $(A \succ B \succ C)$ ,  $(A \succ C \succ B)$ ,  $(A \succ [B \sim C])$ . Они и являются решением задачи получения коллективного нестрогого упорядочения.

**Пример 2.** Исходный профиль содержит 3 частичных нестрогих упорядочения  $\{(C \succ D, A \succ [B \sim E]), (A \succ [B \sim E], A \succ C \succ D), (A \succ [B \sim E]) \succ D, A \succ C)\}$ . Для поиска решения надо рассмотреть 541 вариант упорядочений. Решением являются две кластеризованные ранжировки следующего вида:

$$(A \succ [B \sim E] \succ C \succ D) \text{ и } (A \succ C \succ [B \sim E] \succ D).$$

Для обоих решений сумма расстояний до элементов исходного профиля равна 13.

### Описание приближенного алгоритма нахождения медианы Кемени

Разработан приближенный алгоритм типа локальных вариаций для перебора вариантов, близких к исходным упорядочениям согласно метрике (3).

Введем следующее понятие: *k-вариацией* произвольного упорядочения, представленного матрицей вида (2), назовем упорядочение, полученное инверсией  $k$  элементов матрицы (2) и последующим преобразованием к виду а). Пусть, например, имеем упорядочение  $(A \succ [B \sim E], A \succ C \succ D)$ , матрица которого имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Инвертируем два элемента матрицы  $A_{35}$  и  $A_{53}$ , добавив тем самым в исходное упорядочение предпочтения  $C \succ E$  и  $D \succ E$ . Полученное таким образом отношение, однако, не является транзитивным. Поэтому построим для него транзитивное замыкание.

В результате получим отношение  $(A \succ C \succ D \succ [B \sim E])$  с матрицей

$$\overline{A^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

являющееся 2-вариацией исходного отношения.

Предлагаемый приближенный алгоритм нахождения медианы Кемени состоит из двух этапов.

Этап 1. Задается начальное значение параметра метода  $k_0$ . Для упорядочений входного профиля  $\{P_i\}$  строится окрестность  $\Lambda^{(0)}$ , элементами которой являются их  $k$ -вариации,  $1 \leq k \leq k_0$ . Если во входном профиле присутствуют только упорядочения вида а), то этап 1 опускается и полагается  $\Lambda^{(0)} = \{P_i\}$ .

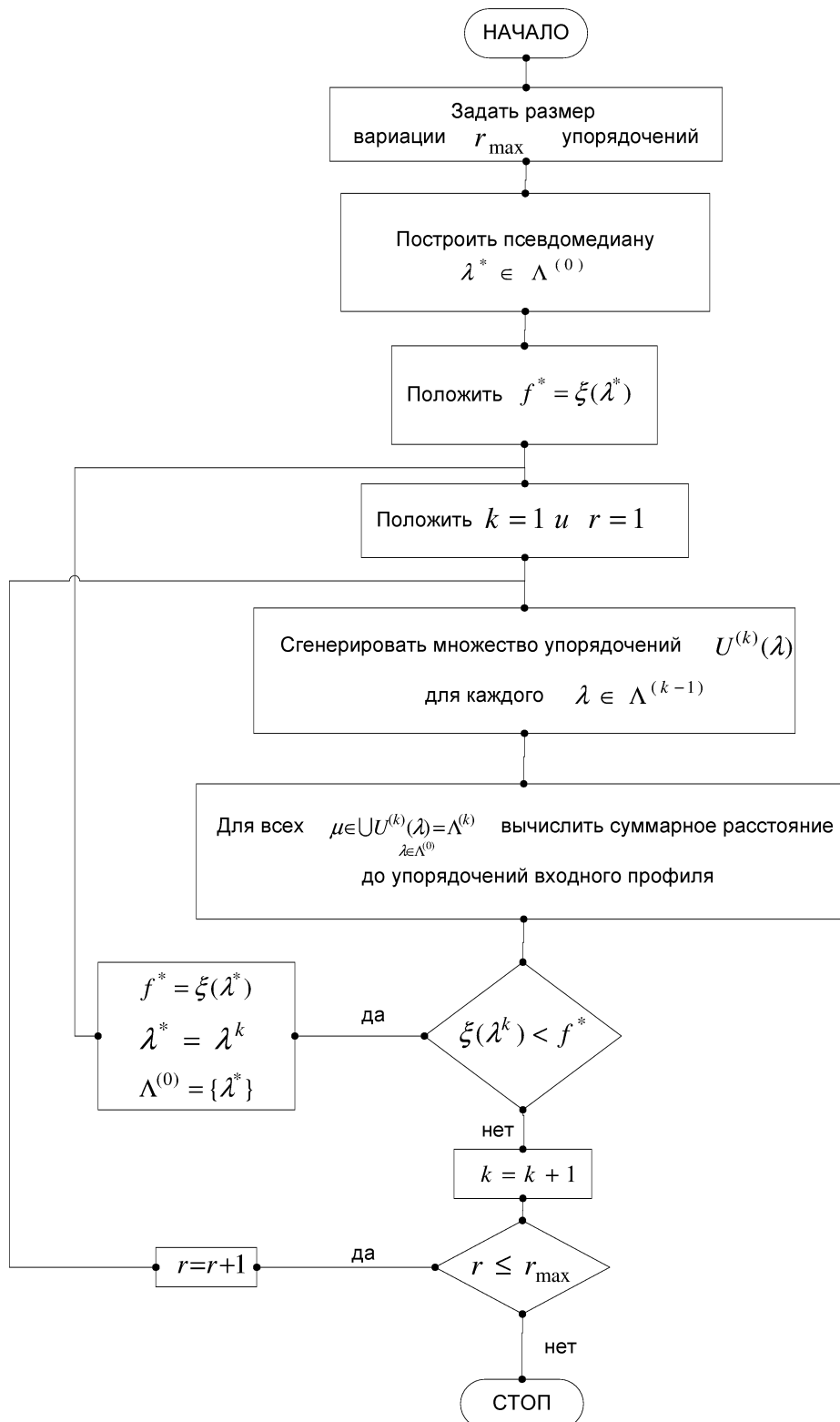


Схема алгоритма второго этапа приближенного алгоритма нахождения медианы Кемени

Этап 2. Строится система новых шаров, для которых все  $\lambda \in \Lambda^{(0)}$  рассматриваются как центры. Среди сгенерированных упорядочений ищутся элементы, наименее удаленные от профиля в смысле метрики (3). Из них формируется новое множество центров, и этап повторяется до момента прекращения улучшения сгенерированных решений.

На рисунке представлена укрупнённая схема алгоритма второго этапа.

Формирование  $k$ -вариаций возможно с использованием алгоритма генерации  $k$ -подмножеств [21], проверка транзитивности осуществима посредством алгоритма Уоршалла [22], а связность отношения проверяется с помощью анализа на слабую связность ориентированного графа упорядочения [22].

### Особенности численной реализации приближенного алгоритма нахождения медианы Кемени

Решим с помощью описанного алгоритма задачу примера 2.

На первом этапе получим окрестности всех упорядочений входного профиля. При этом ограничимся варьированием не более двух элементов соответствующих матриц и оставляя в наборе  $\Lambda^{(0)}$  упорядочения, отстоящие от центра окрестности не более чем на 8.

Например, варьируя по одному элементу матрицы упорядочения, получим следующие ранжирования. Для первого упорядочения были получены 1-вариации:  $(C \succ A \succ [B \sim E])$  (в исходное упорядочение добавилось предпочтение  $(D \succ A)$ );  $A \succ [B \sim E] \succ C \succ D$  (добавилось  $B \succ C$ ).

Для второго упорядочения получены:  $[A \sim B \sim E] \succ C \succ D$ , (добавилось  $(B \succ D)$ );  $[A \sim C \sim D] \succ [B \sim E]$  (добавилось  $(D \succ A)$ ) и т. д.

Окончательно был получен набор упорядочений, состоящий из 64 вариантов (вместо 541 при полном переборе). Среди них на втором этапе найдены все упорядочения с наименьшей суммой расстояний от элементов профиля. В результате получены оба решения, найденные ранее с помощью полного перебора.

### Выводы

Таким образом, предложен вариант обоснования выбора вариантов решений многокритериальных задач в сфере планирования и управления из существующего множества альтернатив с использованием экспертных оценок.

В рамках современной методологии выбора альтернатив предложены два алгоритма поиска медианы Кемени при наличии нестрогих и частичных упорядочений альтернатив в исходном профиле, а также при наличии альтернатив, не оцененных экспертами. Показано, что приближенный алгоритм находит решение значительно быстрее точного алгоритма.

Показано, что разработанный алгоритм гарантирует отсутствие эффекта «центра бублика», то есть при наличии нескольких решений алгоритм позволяет найти вариант альтернативы, достаточно близкий к какому-нибудь экспертному упорядочению.

Следует отметить, что при формировании исходного профиля корректно кодируются не оцененные альтернативы.

### Литература

1. Mallahi-Karai, K. Decision with Multiple Alternatives: Geometric Models in Higher Dimensions – the Cube Model / K. Mallahi-Karai, A. Diederich // *Journal of Mathematical Psychology*. – 2019. – Vol. 93. – P. 102294.
2. Diederich, A. Cube Model: Predictions and Account for Best–Worst Choice Situations with Three Choice Alternatives / A. Diederich, K. Mallahi-Karai // *Journal of Choice Modelling*. – 2023. – Vol. 49. – P. 100448.
3. Allen, R.E. Revealed Stochastic Choice with Attributes / R.E. Allen, J. Rehbeck // *Economic Theory*. – 2023. – Vol. 75. – P. 91–112.
4. Тиханьчев, О.В. О некоторых проблемах предметной области поддержки принятия решений / О.В. Тиханьчев // *Программные продукты и системы*. – 2016. – № 3. – С. 24–28.
5. Корнеенко, В.П. Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения / В.П. Корнеенко // *Управление большими системами*. – 2019. – Вып. 82. – С. 44–60.
6. Smith, P.L. Stochastic Dynamic Models of Response Time and Accuracy: A Foundational Primer / P.L. Smith // *Journal of Mathematical Psychology*. – 2000. – Vol. 44, Iss. 3. – P. 408–463.
7. Diffusion Decision Model: Current Issues and History / R. Ratcliff, L. Philip, S. Smith, D. Brown, G. McKoon // *Trends in Cognitive Sciences*. – 2016. – Vol. 20, Iss. 4. – P. 260–281.

8. Townsend, J. Decision Field Theory: A Dynamic-Cognitive Approach to Decision Making in an Uncertain Environment / J. Townsend // Psychological review. – 1993. – Vol. 100, Iss. 3. – P. 432–459.
9. Baker, S.A. Degenerate Boundaries for Multiple-Alternative Decisions / S.A. Baker, T. Griffith, N.F. Lepora // Nat Commun. – 2022. – Vol. 13. – P. 5066.
10. Kvam, P.D. A Geometric Framework for Modeling Dynamic Decisions among Arbitrarily Many Alternatives / P.D. Kvam // Journal of Mathematical Psychology. – 2019. – Vol. 91. – P. 14–37.
11. Бугаев, Ю.В. Приближенный метод поиска медианы Кемени для нестрогих предпочтений / Ю.В. Бугаев, Б.Е. Никитин // Математические методы в технологиях и технике. – 2021. – № 6. – С. 37–41.
12. Бугаев, Ю.В. Синтез моделей выбора на основе двухэтапных мажоритарных схем: дисс. ... д-ра физ-мат. наук / Ю.В. Бугаев. – Воронеж, 2005. – 343 с.
13. Ногин, В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В.Д. Ногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 176 с.
14. Кемени, Дж. Кибернетическое моделирование / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
15. Литвак, Б.Г. Экспертная информация. Методы получения и анализа / Б.Г. Литвак. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
16. Бугаев, Ю.В. Вероятностный метод анализа процедур построения коллективных экспертных оценок / Ю.В. Бугаев, М.С. Миронова, Б.Е. Никитин // Вестник Воронежского государственного университета. – 2011. – № 2. – С. 130–135.
17. Бугаев, Ю.В. Анализ вероятностных свойств процедур построения групповых экспертных оценок / Ю.В. Бугаев, Б.Е. Никитин, И.Ю. Шурупова // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2018. – № 2. – С. 84–94.
18. Орлов, А.И. Организационно-экономическое моделирование. Ч. 2. Экспертные оценки / А.И. Орлов. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 486 с.
19. Жуков, М.С. Задача исследования итогового ранжирования мнений экспертов с помощью медианы Кемени / М.С. Жуков, А.И. Орлов // Политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ. – 2016. – № 122(08). – С. 785–806.
20. Космонавтика XXI века. Попытка прогноза развития до 2101 года / под. ред. Б.Е. Чертока. – М.: РТСофт, 2010. – 864 с.
21. Липский, В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – М.: Мир, 1988. – 213 с.
22. Захарова, Л.Е. Алгоритмы дискретной математики: учебное пособие / Л.Е. Захарова. – М.: Моск. гос. ин-т электроники и математики, 2002. – 120 с.

*Поступила в редакцию 3 января 2024 г.*

### Сведения об авторах

Калач Андрей Владимирович – доктор химических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий, моделирования и управления, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>, e-mail: [a\\_kalach@mail.ru](mailto:a_kalach@mail.ru).

Бугаев Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий, моделирования и управления, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1043-7682>, e-mail: [y\\_bugaev52@mail.ru](mailto:y_bugaev52@mail.ru).

Никитин Борис Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий, моделирования и управления, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6508-8723>, e-mail: [nbe6419@gmail.com](mailto:nbe6419@gmail.com).

## METHODS OF SEARCHING FOR THE KEMENY MEDIAN FOR NON-STRICT AND PARTIAL ORDERINGS OF ALTERNATIVES

**A.V. Kalach, Yu.V. Bugaev, B.E. Nikitin**

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation

E-mail: A\_Kalach@mail.ru

**Abstract.** This article describes an approximate algorithm for finding the Kemeny median for a set of non-strict orderings of alternatives. The study was carried out for choosing alternatives involving making an informed decision on the completion of the analysis and generalization of incoming information and reaching a threshold value for the decision criterion. The article offers a justification for choosing solutions to multi-criteria tasks in planning and management from an existing set of alternatives using expert assessments. Two algorithms for searching for the Kemeny median are proposed in the presence of non-strict and partial orderings in the initial profile and in the presence of alternatives that have not been evaluated by experts. The article discusses constructing the Kemeny median according to the algorithm using a numerical example. The article shows the validity of using the approximate algorithm to solve the express algorithm in comparison with the traditional exact algorithm. It is separately noted that in the case of several solutions, the algorithm guarantees finding an option that is close enough to an expert ordering of the expert assessment profile under consideration.

**Keywords:** alternatives; ranking; Condorcet principle; Board procedure; Kemeny median; algorithm; experts.

### References

1. Mallahi-Karai K., Diederich A. Decision with Multiple Alternatives: Geometric Models in Higher Dimensions – the Cube Model. *Journal of Mathematical Psychology*, 2019, Vol. 93, p. 102294. DOI: 10.1016/j.jmp.2019.102294
2. Diederich A., Mallahi-Karai K. Cube Model: Predictions and Account for Best–Worst Choice Situations with Three Choice Alternatives. *Journal of Choice Modelling*. 2023, Vol. 49, p. 100448. DOI: 10.1016/j.jocm.2023.100448
3. Allen R.E., Rehbeck J. Revealed Stochastic Choice with Attributes. *Economic Theory*, 2016, Vol. 75, pp. 91–112. DOI: 10.1007/s00199-021-01405-1
4. Tihanychev O.V. О некоторых проблемах предметной области поддержки принятии решений (About some Problems of the Decision Support Domain). *Программные продукты и системы*, 2016, no. 3, pp. 24–28. (in Russ.). DOI: 10.15827/0236-235X.115.024-028
5. Korneenko V. Optimization Method of Selecting the Resulting Ranking of Objects Presented Inrank Scale of Measurement. *Large-Scale Systems Control*, 2019, Iss. 82, pp. 44–60. (in Russ.). DOI: 10.25728/ubs.2019.82.3.
6. Smith P.L. Stochastic Dynamic Models of Response Time and Accuracy: A Foundational Primer. *Journal of Mathematical Psychology*, 2000, Vol. 44, Iss. 3, pp. 408–463. DOI: 10.1006/jmps.1999.1260.
7. Ratcliff R., Brown D., McKoon G. Diffusion Decision Model: Current Issues and History. *Trends in Cognitive Sciences*, 2016, Vol. 20, Iss. 4, pp. 260–281. DOI: 10.1016/j.tics.2016.01.007.
8. Townsend J. Decision Field Theory: A Dynamic-Cognitive Approach to Decision Making in an Uncertain Environment. *Psychological review*, 1993, Vol. 100, Iss. 3, pp. 432–459. DOI: 10.1037/0033-295X.100.3.432
9. Baker S.A., Griffith T., Lepora N.F. Degenerate Boundaries for Multiple-Alternative Decisions. *Nat Commun.*, 2022, Vol. 13, p. 5066. DOI: 10.1038/s41467-022-32741-y

10. Kvam P.D. A Geometric Framework for Modeling Dynamic Decisions among Arbitrarily Many Alternatives. *Journal of Mathematical Psychology*, 2019, Vol. 91, pp. 14–37. DOI: 10.1016/j.jmp.2019.03.001.
11. Bugaev Yu.V., Nikitin B.E. An Approximate Method for Searching the Kemen's Median for Nonstrict Preferences. *Matematicheskie metody v tekhnologiiakh i tekhnike*, 2021, no. 6, pp. 37–41. (in Russ.). DOI: 10.52348/2712-8873\_MMTT\_2021\_6\_37
12. Bugaev Yu.V. Sintez modeley vybora na osnove dvukhetapnykh mazhoritarnykh skhem: diss. ... d–ra fiz.-mat. nauk (Synthesis of Choice Models based on Two-Stage Majority Schemes. Dr. phys. and math. sci. diss.). Voronezh, 2005, 343 p. (in Russ.).
13. Nogin V.D. *Priniatie reshenii v mnogokriterialnoi srede: kolichestvenny i podhod* (Decision Making in a Multicriteria Environment: a Quantitative Approach). Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005, 176 p. (in Russ.).
14. John G. Kemeny. *J. Mathematical models in the social sciences*. Blaisdell, New York, 1962, 145 p. (Reprinted by MIT Press, Cambridge, 1972).
15. Litvak B.G. *Ekspertnaya informatsiya. Metody polucheniya i analiza* (Expert Information. Methods of Obtaining and Analysis). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982, 184 p. (in Russ.).
16. Bugaev Yu.V., Mironova M.S., Nikitin B.E. Veroyatnostnyy metod analiza protsedur postroeniya kollektivnykh ekspertnykh otsenok (Probabilistic Method for Analyzing Procedures for Constructing Collective Expert Assessments). *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, no. 2, pp. 130–135. (in Russ.).
17. Bugaev Yu.V., Nikitin B.E., Shurupova I.Y. Analysis of Probabilistic Properties Rules of Construction Group Expert Estimations. *Iskustvennyy intellekt i prinyatie resheniy*, 2018, no. 2, pp. 84–94. (in Russ.). DOI 10.14357/20718594180207
18. Orlov A.I. *Organizatsionno-ekonomicheskoe modelirovanie. Ch. 2. Ekspertnye otsenki* (Organizational and Economic Modeling. Part 2. Expert assessments). Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2011, 486 p. (in Russ.).
19. Zhukov M. S., Orlov A. I. The Problem of Research of Final Ranking for Group of Experts by Means of Kemeny Median. *Scientific Journal of KubSAU*, 2016, no. 122(08), pp. 785–806. (in Russ.).
20. Chertok B.E. (Ed.) *Kosmonavtika XXI veka. Popytka prognoza razvitiya do 2101 goda* (Cosmonautics of the XXI century. An attempt to forecast development up to 2101). Moscow, RTSoft Publ., 2010, 864 p. (in Russ.).
21. Lipskiy V. *Kombinatorika dlya programmistov* (Combinatorics for Programmers). Moscow, Mir Publ. 1988, 213 p. (in Russ.).
22. Zakharova L.E. *Algoritmy diskretnoy matematiki: uchebnoe posobie* (Algorithms for Discrete Mathematics: Textbook). Moscow, Mosk. gos. in-t elektroniki i matematiki Publ., 2002, 120 p. (in Russ.).

*Received January 3, 2024*

### Information about the authors

Kalach Andrey Vladimirovich is Dr. Sc. (Chemistry), Professor, Head of the Department of Information Technology, Modeling and Management, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>, e-mail: a\_kalach@mail.ru.

Bugaev Yuriy Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Information Technology, Modeling and Management, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1043-7682>, e-mail: y\_bugaev52@mail.ru.

Nikitin Boris Egorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Information Technology, Modeling and Management, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6508-8723>, e-mail: nbe6419@gmail.com.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ РЕЖИМАМИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМ ХРАНЕНИЯ КРИОГЕННЫХ ПРОДУКТОВ

**Е.В. Ларкин<sup>1</sup>, Е.С. Солдатов<sup>2</sup>, А.В. Богомолов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация

E-mail: elarkin@mail.ru

<sup>2</sup> Научно-производственное предприятие «Топаз», г. Москва, Российская Федерация

E-mail: volshebnoekoltso@mail.ru

<sup>3</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: a.v.bogomolov@gmail.com

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы разработки математического обеспечения мониторинга состояния и управления режимами эксплуатации систем хранения криогенных продуктов, задачей которого является повышение безопасности и предотвращение потерь при хранении и транспортировке. Большое количество стационарных и транспортных систем хранения криопродуктов, эксплуатируемых на разнородных предприятиях, высокие требования по безопасности и скорости реакции системы на возникающие предаварийные ситуации обуславливают необходимость автоматизации процессов управления режимами хранения с применением технологий искусственного интеллекта. Представлена структура разработанной двухслойной нейронной сети мониторинга состояния и выбора режима хранения криогенных продуктов, включающей нейроны первого слоя, связанные с системой мониторинга, и нейроны второго слоя, выходы которых подключены к входам логических блоков выбора режима функционирования системы хранения. Предложены варианты обработки сигналов нейросети при помощи линейной фильтрации, а также с использованием фильтра, основанного на порядковых статистиках, применение которого целесообразно в условиях импульсных помех в каналах передачи данных от сенсоров к сети мониторинга. Приведено математическое описание процедуры, инициирующей запуск алгоритмов коррекции состояния объекта мониторинга. Разработанная схема может быть использована для широкого спектра стационарных и транспортных систем хранения, в том числе оборудованных холодильной машиной для реконденсации паров криопродуктов.

*Ключевые слова:* хранение криогенных продуктов; мониторинг систем хранения; управление режимами эксплуатации; нейронная сеть; конституента единицы; мониторинг термодинамических процессов; сжиженный природный газ.

## Введение

Вопросы обеспечения безопасности и снижения потерь являются доминирующими при хранении и транспортировке опасных веществ, находящихся в процессе стационарного хранения или перевозки в сжиженном состоянии. Разработка методов прогнозирования состояния продукта и способов сокращения потерь особенно актуальна для оборудования, в котором хранятся криогенные продукты (жидкий кислород, жидкий азот, сжиженный природный газ и др.). В последнее время отмечен устойчивый рост мирового рынка различных систем хранения криогенных продуктов (далее систем хранения), что обусловлено, главным образом, стабильным ростом производства и потребления сжиженного природного газа (СПГ). Для мирового рынка СПГ характерна устойчивая положительная динамика: в частности, рост по итогам 2021 года составил 5,4 %. При этом к 2035 году среднегодовой темп роста рассматриваемого рынка может возрасти вдвое [1].

Несмотря на наличие публикаций по теме бездренажного хранения криогенных продуктов, в том числе результатов компьютерного моделирования процессов тепломассообмена в различных

криогенных сосудах, практически отсутствуют исследования по системному применению полученных результатов для снижения потерь при хранении и транспортировке криогенных продуктов в масштабах промышленного кластера и страны в целом [2]. При этом важнейшей составляющей системного подхода к предотвращению потерь при хранении и транспортировке криогенных продуктов является организация дистанционного мониторинга тепломассообменных процессов в стационарных и транспортных системах хранения, подключенных к единой информационной системе. Речь идет как о вновь проектируемых системах хранения, так и об оборудовании, находящемся в эксплуатации, которое следует обеспечить современными техническими средствами мониторинга и управления [3, 4].

Диспетчеризация и принятие решений при работе с криогенным оборудованием осложнено расположением систем хранения на удаленных друг от друга разнородных предприятиях, часть из которых принадлежит промышленному производству, а остальные относятся ко многим другим отраслям экономики. Например, большое количество систем хранения жидкого кислорода расположено на территориях металлургических предприятий, а также на объектах здравоохранения. При этом такие же кислородные системы хранения часто применяются на заводах, использующих газовую сварку или резку металла, на объектах стекольного производства, на предприятиях, изготавливающих световое оборудование и пр., технический кислород в сжиженном состоянии хранится и используется на предприятиях военно-промышленного комплекса и на объектах космической инфраструктуры [5]. Аналогичная ситуация с расположением систем хранения на разнородных предприятиях характерна для СПГ и других криопродуктов. Также особого внимания требуют вопросы управления режимами эксплуатации систем хранения, оборудованных холодильной машиной для реконденсации паров криопродуктов [6].

Расположение объектов мониторинга на сильно удаленных друг от друга разнородных предприятиях, учитывая, помимо прочего, различный уровень квалификации и опыта обслуживающего персонала, обуславливает необходимость разработки математического обеспечения и технических средств для повышения эффективности мониторинга и коррекции режимов эксплуатации систем хранения. Приоритетным направлением решения этой задачи в настоящее время является применение технологий искусственного интеллекта [7–9].

### Функциональная схема системы контроля режимов хранения криогенного продукта

Функциональная схема рассматриваемой системы контроля режимов хранения криогенного продукта приведена на рис. 1.

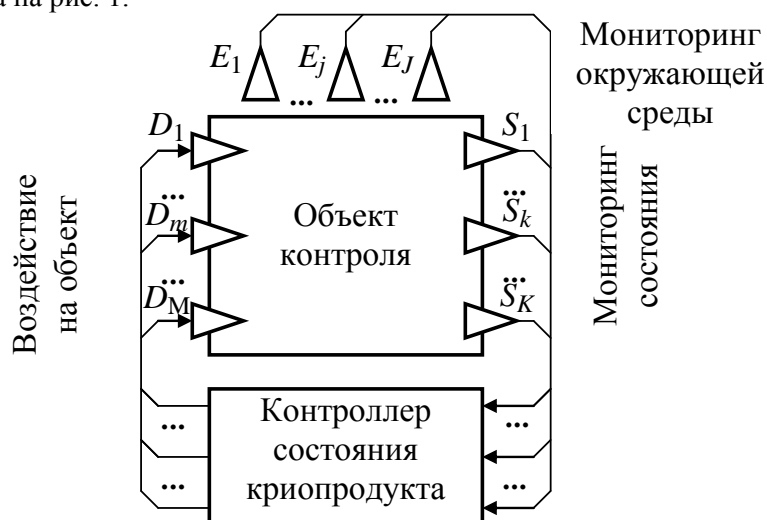


Рис. 1. Функциональная схема системы контроля состояния криопродукта

В состав системы входят собственно объект хранения и транспортировки, сенсорная подсистема, включающая датчики измерения состояния собственно объекта контроля (sensor)  $S_1, \dots, S_k, \dots, S_K$ , датчики измерения параметров окружающей среды (environment)  $E_1, \dots, E_j, \dots, E_J$ , средства воздействия на объект (drives)  $D_1, \dots, D_m, \dots, D_M$ .



Объект контроля представляет систему сосудов, контролируемо сообщаемых между собой, а также с напорной и дренажной магистралью. Сосуды и магистрали снабжены контрольно-измерительными приборами и запорно-регулирующей арматурой. В состав датчиков измерения состояния  $S_1, \dots, S_k, \dots, S_K$  собственно объекта контроля входят: датчики давления, температуры, уровней жидкой фазы внутри сосудов; концевые выключатели, идентифицирующие открытие/закрытие перепускных клапанов, а также клапанов, изолирующих сосуды от магистралей; датчики скоростей вращения валов, токи, напряжения, температуры электродвигателей приводов запорно-регулирующей аппаратуры, а также холодильной машины при ее наличии. При контроле параметров окружающей среды  $E_1, \dots, E_j, \dots, E_J$  в системе используются датчики температуры, влажности, давления, концентрации газа в рабочей зоне. Если сосуд, заполненный криопродуктом, размещен на подвижном носителе, то в состав  $E_1, \dots, E_j, \dots, E_J$  включаются датчики текущих линейных и угловых скоростей и ускорений носителя. Результат управления сводится к подаче управляющих воздействий  $D_1, \dots, D_m, \dots, D_M$  на приводы перепускных, входных и выходных клапанов.

### Нейронная сеть мониторинга состояния и выбора режима хранения криогенных продуктов

Большое количество контролируемых параметров от разных сосудов, высокие требования по безопасности и скорости реакции системы в целом на возникающие предаварийные ситуации предполагают интеллектуализацию процесса управления, например, за счет применения нейронной сети, обеспечивающей мониторинг состояния и установление режимов функционирования цифрового регулятора [10–12]. Структура нейронной сети приведена на рис. 2.

В нейронную сеть входят нейроны первого слоя  $v_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,\alpha}, \dots, v_{1,A})$ , связанные с системой мониторинга, нейроны второго слоя  $v_2 = (v_{2,1}, \dots, v_{2,\xi}, \dots, v_{2,\Xi})$ , выходы которых подключены к входам логических блоков  $\lambda_1, \dots, \lambda_\zeta, \dots, \lambda_Z$  выбора режима функционирования системы хранения.

На вход нейронной сети поступает обобщенный вектор измеряемых параметров состояния

$$X = (X_1, \dots, X_\alpha, \dots, X_A), \quad (1)$$

где  $X_\alpha \in (E_1, \dots, E_j, \dots, E_J, S_1, \dots, S_k, \dots, S_K)$ ;  $X_\alpha = [x_{1(\alpha)}, \dots, x_{\beta(\alpha)}, \dots, x_{B(\alpha)}]$  – кортеж из последовательно поступивших на обработку дискретных значений сигналов  $E_1, \dots, E_j, \dots, E_J$ ,  $S_1, \dots, S_k, \dots, S_K$ ;  $1 \leq \alpha \leq A$ ;  $A = J + K$ .

Кортежи  $X_\alpha$  представляются в пространственно-временных дискретных координатах, если сенсор формирует цифровой образ наблюдаемой сцены, или в дискретном времени, если сигнал формируется сенсорами другими типов. Номер элемента  $x_{\beta(\alpha)}$  кортежа обозначен индекс функцией  $\beta(\alpha)$ , где  $\alpha$  – номер элемента  $X_\alpha$  в векторе  $X$ . В случае линейной обработки, как это показано на рис. 2, выходные сигналы нейронной сети рассчитываются как свертка

$$\tilde{x}_{i(\alpha)} = \sum_{\beta(\alpha)=1}^{B(\alpha)} a_{\beta(\alpha)} x_{i(\alpha)-\beta(\alpha)}, \quad (2)$$

где  $\tilde{x}_{i(\alpha)} \in \tilde{X}_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq A$ ,  $\tilde{X}_\alpha$  – последовательность отсчетов, формируемая на выходе нейрона;  $[a_{1(\alpha)}, \dots, a_{\beta(\alpha)}, \dots, a_{B(\alpha)}]$  – дискретный импульсный отклик фильтра, подбираемый при настройке сети;  $B(\alpha)$  – размер апертуры фильтра, равный длине соответствующего кортежа и в общем случае неодинаковый для различных величин  $X_\alpha$ .

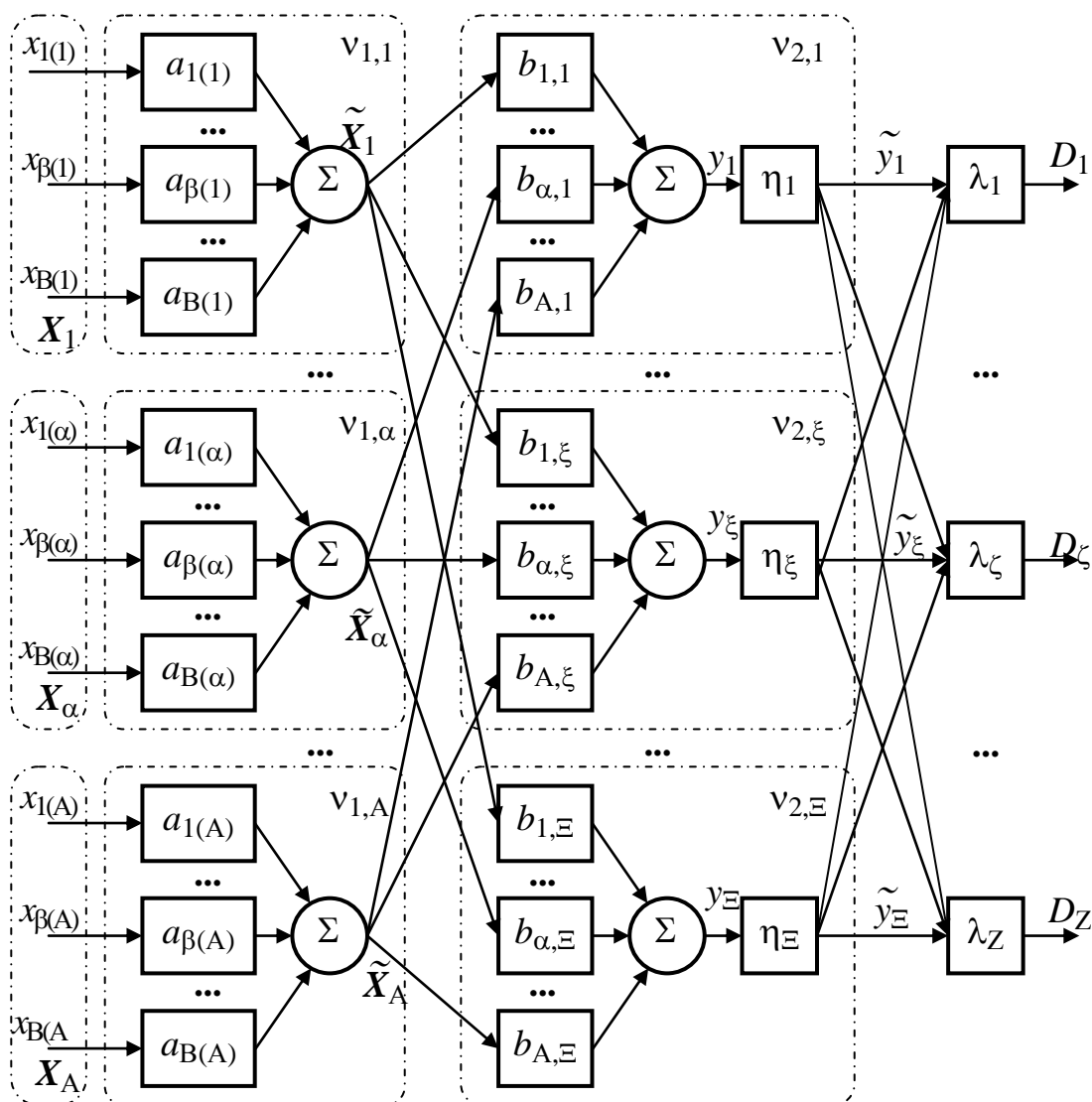


Рис. 2. Нейронная сеть мониторинга состояния и выбора режима хранения криогенных продуктов

Очевидно, что линейная фильтрация (2) не является единственно возможной для использования в нейронной сети. В ряде случаев, в частности в условиях импульсных помех в каналах передачи данных от сенсоров к сети мониторинга состояния и выбора режима хранения криогенных продуктов целесообразно применение фильтра, основанного на порядковых статистиках [13, 14]. В подобных фильтрах кортеж  $X_\alpha$ , упорядоченный по последовательности поступления величин  $x_{1(\alpha)}, \dots, x_{\beta(\alpha)}, \dots, x_{B(\alpha)}$  на обработку, переупорядочивается по возрастанию указанных величин, т. е.

$$X_\alpha \rightarrow X_{\alpha,inc} = [x_{1(\alpha,inc)}, \dots, x_{\beta(\alpha,inc)}, \dots, x_{B(\alpha,inc)}],$$

где  $x_{\beta(\alpha,inc)} \in X_\alpha, 1(\alpha) \leq \beta(\alpha) \leq B(\alpha); x_{1(\alpha,inc)} \leq \dots \leq x_{\beta(\alpha,inc)} \leq \dots \leq x_{B(\alpha,inc)}$ .

Далее из кортежа  $X_{\alpha,inc}$  выбирается элемент  $x_{\tilde{\beta}(\alpha,inc)}$  с заданным номером.  $\tilde{\beta}(\alpha,inc)$ , который включается в кортеж  $\tilde{X}_\alpha$  выходных величин слоя  $v_1$ . В случае, если  $\tilde{\beta}(\alpha,inc) = 1$ , то в процессе фильтрации выбирается наименьший элемент. В случае, если  $\tilde{\beta}(\alpha,inc) = B(\alpha)$ , то в процессе фильтрации всегда выбирается наибольший элемент. В случае если число  $B(\alpha)$  является нечетным и при фильтрации выбирается элемент с номером  $\tilde{\beta}(\alpha,inc) = [B(\alpha) - 1] / 2 + 1$ , то

фильтр является медианным. При настройке нейронной сети определяются размер апертуры  $V(\alpha)$  и номер  $\tilde{\beta}(\alpha, \text{inc})$  выбираемого элемента.

На выходе подсети  $v_1$  первого слоя формируется вектор кортежей  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_\alpha, \dots, \tilde{X}_A)$  в  $A$ -мерном пространстве оценок состояния системы хранения криогенных продуктов (рис. 3).

Привязка кортежей к единому дискретному времени, например к моменту  $\beta$ , позволяет сформировать вектор  $\tilde{x}(\beta) = [\tilde{x}_1(\beta), \dots, \tilde{x}_\alpha(\beta), \dots, \tilde{x}_A(\beta), \dots]$  текущих оценок состояния системы. Нейроны  $v_{2,1}, \dots, v_{2,\xi}, \dots, v_{2,\Xi}$  второго слоя формируют в рассматриваемом пространстве систему гиперплоскостей

$$\mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + c = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_\alpha, \dots, \tilde{x}_A)^\theta$  – координаты пространства оценок состояния;  $\mathbf{b} – \Xi \times A$  матрица коэффициентов;  $c = (c_1, \dots, c_\xi, \dots, c_\Xi)^\theta$  –  $\Xi$ -мерный вектор-столбец свободных членов;  $\theta$  – нулевой  $\Xi$ -мерный вектор-столбец;  $\theta$  – знак транспонирования;

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{\alpha,1} & \dots & b_{A,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1,\xi} & \dots & b_{\alpha,\xi} & \dots & b_{A,\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1,\Xi} & \dots & b_{\alpha,\Xi} & \dots & b_{A,\Xi} \end{pmatrix}.$$

Подстановка в (3) вектора  $\tilde{x}(\beta)$  текущих оценок позволяет определить его местоположение  $y(\beta)$  в пространстве относительно сформированной системы гиперплоскостей:

$$\mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(\beta) + c = y(\beta), \quad (4)$$

где  $y(\beta) = [y_1(\beta), \dots, y_\xi(\beta), \dots, y_\Xi(\beta)]^\theta$  – вектор оценок местоположения вектора  $\tilde{x}(\beta)$  в пространстве оценок состояния.

Основной задачей нейронной сети является отнесение текущего состояния объекта контроля к одному из определенных классов и генерация последовательности действий в том случае, если класс, к которому отнесено состояние, не соответствует ожидаемому. Поэтому с помощью блоков  $\eta_1, \dots, \eta_\xi, \dots, \eta_\Xi$  вектор координат  $y(\beta)$  преобразуется в вектор логических переменных

$\tilde{y}(\beta) = [\tilde{y}_1(\beta), \dots, \tilde{y}_\xi(\beta), \dots, \tilde{y}_\Xi(\beta)]^\theta$  следующим образом:

$$\tilde{y}_\xi(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{when } \tilde{y}_\xi(\beta) > 0; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5)$$

Физически логическая единица в (5) означает, что составляющая  $y_\xi(\beta)$  вектора  $y(\beta)$  находится над плоскостью  $\tilde{x} = b_{1,\xi}\tilde{x}_1, \dots, b_{\alpha,\xi}\tilde{x}_\alpha, \dots, b_{A,\xi}\tilde{x}_A + c_\xi = 0$ , а логический ноль – под ней.

Области  $\sigma_1, \dots, \sigma_\zeta, \dots, \sigma_Z$ , в которые должен попадать вектор  $\tilde{x}(\beta)$  текущих оценок состояния, с использованием логических переменных  $\tilde{y}_\xi(\beta)$  могут быть представлены в виде дизъюнктивных нормальных форм:

$$D_\zeta = \bigvee_i \left[ \bigwedge_{\xi=1}^{\Xi} \zeta_{\zeta,\xi,i}(\tilde{y}_\xi) \right], \quad 1 \leq \zeta \leq Z, \quad (6)$$

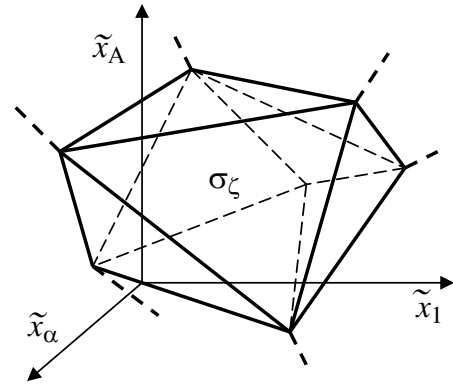


Рис. 3. Пространство оценок состояния системы хранения криогенных продуктов

где  $\bigwedge_{\xi=1}^{\Xi} \zeta_{\zeta, \xi, i}(\tilde{y}_{\xi})$  –  $i$ -я конstituента единицы  $\zeta$ -й нормальной формы;  $\zeta_{\zeta, \xi, i}(\tilde{y}_{\xi})$  – логическая функция переменной  $\tilde{y}_{\xi}$  при ее вхождении в  $i$ -ю конstituенту, определяющую соответствующую часть  $\xi$ -й области.

Справедливо следующее утверждение.

Любая конstituента задает выпуклый политоп в пространстве оценок состояния  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\alpha}, \dots, \tilde{x}_A$ . Под выпуклостью политопа понимается то его свойство, что между любой парой точек, расположенных в его внутренней области, можно провести отрезок прямой без пересечения с его внешними гранями.

*Доказательство.* Свойство достаточно просто доказывается методом математической индукции. Очевидно, что политопом, не имеющим внешних граней вообще, является неограниченное гиперпространство  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\alpha}, \dots, \tilde{x}_A$ , в котором между любыми двумя точками с координатами  $\tilde{x}_{1,1}, \dots, \tilde{x}_{\alpha,1}, \dots, \tilde{x}_{A,1}$  и  $\tilde{x}_{1,2}, \dots, \tilde{x}_{\alpha,2}, \dots, \tilde{x}_{A,2}$  может быть размещен отрезок прямой, не пересекающийся с гранями, которые в данном случае отсутствуют. Рассечем гиперпространство любой гиперплоскостью. Очевидно, что все отрезки, начинающиеся в точках, принадлежащих этой гиперплоскости, и имеющие продолжение по одну или по другую сторону от нее, не имеют других точек пересечения с ней, если эти отрезки не лежат на самой гиперплоскости. Другие отрезки, начальные и конечные точки которых лежат по одну сторону от рассекающей гиперплоскости, также ее не пересекают. Поэтому в этом случае обе части гиперпространства, которые могут рассматриваться как два непересекающихся политопа с единственной общей гранью, также являются выпуклыми.

Предположим, что после рассечения  $(k-1)$ -й гиперплоскостью гиперпространство  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\alpha}, \dots, \tilde{x}_A$  представляет собой объединение непересекающихся выпуклых политопов. Рассечем это пространство  $k$ -й гиперплоскостью и предположим, что сформированный предыдущими рассечениями  $l(k-1)$ -й выпуклый политоп рассекается на  $[l(k-1)^-]$ -й и  $[l(k-1)^+]$ -й политопы. Очевидно, что все отрезки, начинающиеся в точках, лежащих внутри  $l(k-1)$ -го политопа и оканчивающиеся внутри  $[l(k-1)^-]$ -го политопа, не имеют других точек пересечения с  $k$ -й гиперплоскостью, кроме начальной, если эти отрезки не лежат на самой гиперплоскости. Другие отрезки, начальные и конечные точки которых лежат по одну сторону от рассекающей гиперплоскости, также ее не пересекают. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для  $[l(k-1)^+]$ -го политопа.

Таким образом, для базы индукции утверждение выполняется, и из предположения, что оно выполняется для  $(k-1)$ -го шага индукции, доказано, что оно выполняется на  $k$ -м шаге тоже. С учетом того, что  $l(k-1)$ -й политоп, сформированный на  $(k-1)$ -м шаге, был выбран произвольно, утверждение можно считать доказанным.

Отметим, что выпуклые политопы, описание которых представлено в виде конstituент единицы, входящих в дизъюнктивные нормальные формы (6), покрывают все гиперпространство  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\alpha}, \dots, \tilde{x}_A$ . В общем случае каждая дизъюнктивная нормальная форма может описывать как выпуклый, так и невыпуклый многогранник  $\sigma_1, \dots, \sigma_{\zeta}, \dots, \sigma_Z$ , причем эти многогранники могут пересекаться между собой, если, например в групповые дизъюнкции входят одни и те же конstituенты единицы.

Попадание вектора оценок  $\tilde{x}(\beta)$  в область  $\sigma_{\zeta}$ , идентифицируемое по равенству единице  $D_{\zeta}$ , означает запуск  $\zeta$ -го алгоритма коррекции состояния объекта, который может включать выполнение следующих действий:

- открытие/закрытие дренажных клапанов;
- открытие/закрытие перепускных клапанов;

- коррекция скорости и направления движения транспортного средства с цистерной;
- запуск/остановка двигателя холодильной машины;
- коррекция режима работы холодильной машины;
- продолжение мониторинга без выполнения действий.

### Заключение

Таким образом, использование предложенного математического обеспечения, реализованного на основе нейронной сети, повышает эффективность производственных процессов за счет автоматизации и интеллектуализации мониторинга состояния и управления режимами эксплуатации систем хранения криогенных продуктов. Предложенная схема потенциально эффективна для широкого спектра стационарных и транспортных систем хранения, в том числе оборудованных холодильной машиной для реконденсации паров криопродуктов.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области в области науки и техники в 2023 г. (договор ДС/116 от 27.09.2023 г.)*

### Литература

1. Исмагилова, В.С. Транспортировка трубопроводного и сжиженного природного газа: сравнительный анализ достоинств и недостатков / В.С. Исмагилова, Т.В. Чекушина // Науки о Земле и недропользование. – 2023. – Т. 46, № 1 (82). – С. 61–71.
2. Солдатов, Е.С. Программное обеспечение моделирования и мониторинга процессов в резервуарах и цистернах при длительном хранении криогенных продуктов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 10. – С. 385–393.
3. Larkin, E. Discrete Model of Mobile Robot Assemble Fault-Tolerance / E. Larkin, A. Bogomolov, A. Privalov // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – Vol. 11659 LNAI. – P. 204–215.
4. Инерциально-спутниковая навигационная система управления транспортными средствами / В.Г. Макаренко, А.А. Подорожняк, С.В. Рудаков, А.В. Богомолов // Проблемы управления. – 2007. – Вып. 1. – С. 64–71.
5. Архаров, И.А. О необходимости возрождения криогенного машиностроения в России / И.А. Архаров // Вестник Международной академии холода. – 2023. – № 1. – С. 6–9.
6. Soldatov, E. Issues of Energy-Efficient Storage of Fuel in Multimodal Transport Units / E. Soldatov, A. Bogomolov // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2022. – Vol. 232. – P. 393–402.
7. Епихин, А.И. Мониторинг и прогнозирование расхода топлива судами с помощью нейронных сетей / А.И. Епихин, М.И. Фадеев, И.Ю. Васаган // Эксплуатация морского транспорта. – 2023. – № 2 (107). – С. 104–107.
8. Голосовский, М.С. Алгоритм настройки систем нечёткого логического вывода на основе статистических данных / М.С. Голосовский, А.В. Богомолов, Д.С. Тобин // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. – 2023. – № 1. – С. 1–9.
9. Nowak G. Using the Artificial Neural Network to Control the Steam Turbine Heating Process / G. Nowak, A. Rusin // Applied Thermal Engineering. – 2016. – Vol. 108. – P. 204–210.
10. Digital Control of Continuous Production with Dry Friction at Actuators / E. Larkin, A. Bogomolov, T. Akimenko, A. Privalov // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2022. – Vol. 232. – P. 427–436.
11. Large Scale Model Predictive Control with Neural Networks and Primal Active Sets / S.W. Chen, T. Wang, N. Atanasov *et al.* // Automatica. – 2022. – Vol. 135. – P. 109947.
12. Технология построения инерциально-спутниковой навигационной системы управления транспортными средствами с нейросетевой оптимизацией состава вектора измерений / В.Г. Макаренко, А.В. Богомолов, С.В. Рудаков, А.А. Подорожняк // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2007. – № 1. – С. 39–44.
13. Sutton R.S. Reinforcement Learning, second edition: An Introduction / R.S. Sutton, A.G. Barto. – MIT Press, 2018. – 552 p.
14. Application of Artificial Neural Networks in Condition Based Predictive Maintenance / J. Krenek, K. Kuca, P. Blazek, O. Krejcar, D. Jun // Recent Developments in Intelligent Information and Database Systems. Studies in Computational Intelligence book series (SCI, Vol. 642). – 2016. – P. 75–86.

*Поступила в редакцию 13 января 2024 г.*

### Сведения об авторах

Ларкин Евгений Васильевич – доктор технических наук, профессор, профессор-консультант Тульского государственного университета, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: elarkin@mail.ru.

Солдатов Евгений Сергеевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Научно-производственного предприятия «Топаз», г. Москва, Российская Федерация, e-mail: volshebnoekoltso@mail.ru.

Богомолов Алексей Валерьевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a.v.bogomolov@gmail.com.

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2024, vol. 16, no. 1, pp. 23–31

---

DOI: 10.14529/mmph240103

## MATHEMATICAL SUPPORT FOR MONITORING THE STATUS AND CONTROL OF OPERATING MODES OF CRYOGENIC STORAGE SYSTEMS

**E.V. Larkin<sup>1</sup>, E.S. Soldatov<sup>2</sup>, A.V. Bogomolov<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Tula State University, Tula, Russian Federation

E-mail: elarkin@mail.ru

<sup>2</sup> Research and Production Enterprise "Topaz", Moscow, Russian Federation

E-mail: volshebnoekoltso@mail.ru

<sup>3</sup> Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

E-mail: a.v.bogomolov@gmail.com

**Abstract.** This article considers the development of mathematical support for monitoring and controlling operating modes of cryogenic storage systems which increases their safety and prevent losses during storage and transportation. A large number of stationary and transport cryogenic storage systems have strict requirements for safety and the speed of a system's response to emerging pre-emergency situations which necessitate the automation of managing storage modes using artificial intelligence (AI). The structure of the two-layer neural network for monitoring the state and selecting the storage mode of cryogenic products is presented, including first-layer neurons associated with the monitoring system and second-layer neurons whose outputs are connected to the inputs of logical blocks for selecting the operating mode of the storage system. Options are proposed for processing neural network signals using linear filtering and using a filter based on order statistics – the use of which is advisable in conditions of impulse noise in data transmission channels from the sensors to the monitoring network. A mathematical description of the procedure which initiates the algorithms for correcting the state of the monitoring object is given. The scheme can be used for a wide range of stationary and transport storage systems, including those equipped with refrigeration for recondensing cryogenic vapors.

**Keywords:** storage of cryogenic products; monitoring of storage systems; control of operating modes; neural network; constituent unit; monitoring of thermodynamic processes; liquefied natural gas.

### References

1. Ismagilova V.S., Chekushina T.V. Transportation of Pipeline and Liquefied Natural Gas: Comparative Analysis of Pros and Cons. *Earth Sciences and Subsoil Use*, 2023, Vol. 46, no. 1 (82), pp. 61–71. DOI: 10.21285/2686-9993-2023-46-1-61-71.
2. Soldatov E.S. Modeling Software and Monitoring of Processes in Reservoirs and Tanks for Long Storage of Cryogenic Products. *News of Tula State University. Technical Science*, 2019, no. 10, pp. 385–393. (in Russ.).

3. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A. Discrete Model of Mobile Robot Assemble Fault-Tolerance. In: Ronzhin, A., Rigoll, G., Meshcheryakov, R. (eds) Interactive Collaborative Robotics. ICR 2019. *Lecture Notes in Computer Science (LNAI)*, Vol. 11659, Springer, Cham, 2019, DOI: 10.1007/978-3-030-26118-4\_20
4. Makarenko V.G., Podorozhnyak A.A., Rudakov S.V., Bogomolov A.V. An Inertial-Satellite Navigation Control System for Vehicles. *Probl. Upr.*, 2007, no. 1, pp. 64–71. (in Russ.).
5. Arkharov I.A. On the Need for the Revival of Cryogenic Engineering in Russia. *Bulletin of the International Academy of Refrigeration*, 2023, no. 1, pp. 6–9. (in Russ.).
6. Soldatov E., Bogomolov A. Issues of Energy-Efficient Storage of Fuel in Multimodal Transport Units. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2022, Vol. 232, pp. 393–402. DOI: 10.1007/978-981-16-2814-6\_34
7. Epikhin A.I., Fadeev M.I., Vasagan I.Yu. Monitoring and Forecasting of Fuel Consumption by Vessels using Neural Networks. *Operation of maritime transport*, 2023, no. 2 (107), pp. 104–107. DOI: 10.34046/aumsuomt107/17.
8. Golosovsky M.S., Bogomolov A.V., Tobin D.S. Algorithm for Setting up Fuzzy Logical Inference Systems based on Statistical Data. *Scientific and Technical Information. Series 2: Information Processes and Systems*, 2023, no. 1, pp. 1–9. DOI: 10.36535/0548-0027-2023-01-1
9. Nowak G., Rusin, A. Using the Artificial Neural Network to Control the Steam Turbine Heating Process. *Applied Thermal Engineering*, 2016, Vol. 108, pp. 204–210. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.07.129
10. Larkin E., Bogomolov A., Akimenko T., Privalov A. Digital Control of Continuous Production with Dry Friction at Actuators. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2022, Vol. 232, pp. 427–436. DOI: 10.1007/978-981-16-2814-6\_37
11. Chen S.W., Wang T., Atanasov N., Kumar V., Morari M. Large Scale Model Predictive Control with Neural Networks and Primal Active Sets. *Automatica*, 2022, Vol. 135, pp. 109947. DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109947
12. Makarenko V.G., Bogomolov A.V., Rudakov S.V., Podorozhnyak A.A. Technique of Construction of an Inertia-Satellite Navigational Control System of Vehicles with Neuron Network by Optimization of a Structure of Vector of Gaugings. *Mechatronics, automation, control*, 2007, no. 1, pp. 39–44. (in Russ.).
13. Sutton R.S. Barto A.G. *Reinforcement Learning, second edition: An Introduction*. MIT Press, 2018, 552 p.
14. Krenek J., Kuca K., Blazek P., Krejcar O., Jun D. Application of Artificial Neural Networks in Condition Based Predictive Maintenance. Recent Developments in Intelligent Information and Database Systems. *Studies in Computational Intelligence, vol 642*. Springer, Cham., 2016, pp. 75–86. DOI: 10.1007/978-3-319-31277-4\_7

Received January 13, 2024

### Information about the authors

Larkin Evgeniy Vasilievich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Consulting Professor at the Tula State University, Tula, Russian Federation, e-mail: elarkin@mail.ru.

Soldatov Evgeniy Sergeevich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Researcher, Research and Production Enterprise “Topaz”, Moscow, Russian Federation, e-mail: volshebnoekoltso@mail.ru.

Bogomolov Alexey Valer’evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Leading Researcher at the Federal Research Center “Informatics and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: a.v.bogomolov@gmail.com.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ОБЪЕКТОВ ИЛИ СИСТЕМ С УЧЁТОМ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

**В.В. Меньших, В.А. Никитенко**

*Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация*

*E-mail: menshikh@list.ru*

**Аннотация.** Разрабатывается модель координации действий объектов или систем в условиях их совместного взаимодействия, приводящего к возникновению синергетических эффектов на основе общей автоматной модели данных объектов или систем. Описание общей автоматной модели осуществляется на основе агрегирования отдельных составляющих, представляющих собой отдельные объекты или системы, которым также соответствуют автоматные модели. Как частный пример рассматривается описание действий силовых подразделений, которые участвуют в ликвидации чрезвычайных обстоятельств. На основе общей автоматной модели и описания действий подразделений разработан численный метод оптимизации последовательности действий, в основе которого лежит схема ветвей и границ, корректность которой подтверждается тем, что при взаимодействии отдельных объектов или систем могут возникать альтернативные действия и, следовательно, полный перебор является не целесообразным.

*Ключевые слова:* совместное функционирование объектов; автоматная модель; чрезвычайное обстоятельство; последовательность действий; синергетические эффекты; модель оптимизации, схема ветвей и границ; оценка частных решений.

### Введение

При решении многих практических задач может возникать необходимость совместного использования нескольких однородных или разнородных объектов или систем. При этом действия одних объектов или систем и их последовательность могут существенно влиять на действия других [1]. Примером такой задачи является использование подразделений силовых ведомств при ликвидации чрезвычайных обстоятельств (ЧО) [2, 3].

При функционировании сразу нескольких взаимодействующих систем или объектов могут возникать ситуации конфликта, безразличия или содействия, приводящие к появлению как положительных, так и отрицательных синергетических эффектов [1]. В ряде случаев удаётся получить численные оценки этих эффектов. В частности, в [4] построена модель оценки влияния взаимодействия подразделений силовых ведомств при возникновении ЧО на величину предотвращённого ущерба. Указанная величина зависит от времени начала выполнения действия каждым подразделением и имеющегося ресурса.

В [5] показано, что процесс функционирования подразделений силовых ведомств при ликвидации ЧО является динамической системой и, следовательно, эффективным аппаратом моделирования действий таких подразделений является теория конечных автоматов [6]. В связи с необходимостью моделирования координации действия сразу нескольких подразделений следует использовать общую автоматную модель, агрегирующую отдельные модели функционирования всех взаимодействующих подразделений. Для этого могут использоваться операции последовательной и/или параллельной композиции автоматных моделей отдельных подразделений [7]. Численный метод агрегирования автоматных моделей с использованием алгебры символьных матриц описан в [8].

В связи с этим возникает задача координации действий объектов и систем в условиях их взаимодействия, приводящего к возникновению синергетических эффектов. Настоящая работа посвящена разработке численного метода решения данной задачи на примере моделирования действий подразделений силовых ведомств при ликвидации ЧО с использованием автоматных моделей.



### Автоматные модели агрегирования совместных действий объектов или систем

Агрегируемые в процессе моделирования отдельные взаимодействующие объекты или системы будем называть составляющими. Рассмотрим автомат, описывающий действия отдельной  $b$ -й составляющей общей модели:

$$A_b = (X_b, Y_b, Q_b, F_b), \quad (1)$$

где  $X_b$  – входной алфавит, описывающий входные воздействия на объект (систему),  $Y_b$  – выходной алфавит,  $Q_b$  – множество состояний, в которые могут переходить составляющие общей модели в результате поступления входных символов из  $X_b$ ,  $F_b$  – оператор, описывающий переходы из состояния в состояние и соответствующие им выходы в зависимости от поступающих входов, представляемый в следующем виде:

$$\left\{ F_b q_b^i = \left\{ q_b^{i_1} \left( x_b^{j_1} / y_b^{k_1} \right), \dots, q_b^{i_2} \left( x_b^{j_2} / y_b^{k_2} \right), \dots, q_b^{i_n} \left( x_b^{j_n} / y_b^{k_n} \right) \right\}, i = \overline{1, |Q_b|} \right\}.$$

Запись  $q_b^{i_l} \left( x_b^{j_l} / y_b^{k_l} \right) \in F_b q_b^i$  означает, что если автомат находится в состоянии  $q_b^i$  и на вход поступил символ  $x_b^{j_l}$ , то автомат переходит в состояние  $q_b^{i_l}$  и выходным символом является  $y_b^{k_l}$ .

Моделирующий совместное функционирование  $m$  объектов или систем автомат

$$A = (X, Y, Q, F) \quad (2)$$

представляет собой композицию  $m$  автоматов вида (1), численный метод его построения описан в [8]. Элементы автомата (2) определяются следующим образом:

$X$  – входной алфавит, элементы которого  $x^j \in X$  имеют вид  $x^j = \left\{ x_{b_1}^{j_1}, \dots, x_{b_s}^{j_s} \right\}, s = |x^j| \leq n$ ,

где каждый  $x_{b_l}^{j_l}$  представляет собой действие автомата  $A_{b_l}$ ;

$Y$  – выходной алфавит, элементы которого  $y^k \in Y$  имеют вид  $y^k = \left\{ y_{b_1}^{k_1}, \dots, y_{b_s}^{k_s} \right\}, s = |y^k| \leq n$ ,

где каждый  $y_{b_l}^{k_l}$  представляет собой результат выполнения действия автомата  $A_{b_l}$ ;

$Q$  – множество состояний, элементы которого  $q^i \in Q$  имеют вид  $q^i = \left\{ q_{b_1}^{i_1}, \dots, q_{b_n}^{i_n} \right\}$ , где  $q_{A_{b_l}}^{i_l}$

состояние, в котором находится автомат  $A_{b_l}$ , при этом исключены недопустимые с точки зрения предметной области комбинации состояний;

$F$  – оператор, описывающий переходы из состояния в состояние и соответствующие им выходы в зависимости от поступающих входов.

В автомате (2) могут возникать возможности альтернативного выбора комбинаций действий отдельных составляющих, и, следовательно, возникает задача оптимизации выбора комбинаций действий. Однако эта задача может быть решена только при конкретизации описаний результатов действий отдельных составляющих. Приведём такое описание применительно к действиям подразделений силовых ведомств при ликвидации ЧО [2, 4].

### Описание результатов действий подразделений при ликвидации чрезвычайных обстоятельств

Общий предотвращенный ущерб на протяжении всего времени выполнения действий по ликвидации ЧО монотонно возрастает [2, 4, 9]. Действительно, чем дольше осуществляется ликвидация ЧО, тем большее количество людей можно эвакуировать из зоны ЧО и сохранить больший объём материальных ценностей. Вместе с тем, чем позже будет выполнено какое-либо конкретное действие по ликвидации ЧО, тем оно будет менее эффективным и, следовательно, приведёт к меньшему значению предотвращённого ущерба. Поэтому каждое действие каждого подразделения силовых ведомств характеризуется величиной предотвращенного ущерба в зоне ЧО в момент начала совершения этого действия.

Кроме того, предотвращенный ущерб зависит от момента начала действия, т. е. если подразделение находится в некотором состоянии  $q^i$ , то предотвращенный ущерб от совершения одного

и того же действия в моменты времени  $t^j$  и  $t^j + \Delta t$  может быть различен [9]. Для пояснения рассмотрим пример эвакуации граждан и материальных ценностей из зоны ЧО: при первом и втором этапе эвакуации её объём может быть различен в силу изменения обстоятельств [4].

Для совершения каждого действия подразделения расходуют определённый ресурс, который для каждого подразделения описывается ограниченной функцией времени [4]. При переходах из состояния в состояние подразделения расходуют или восполняют определенное количество ресурсов. Время является ограниченным параметром.

Каждое действие подразделения в состоянии  $q_b^i$  при поступлении на вход  $x_b^j$  охарактеризуется тремя параметрами [4, 9]:

$p_b^k = \{p_{b1}^k, \dots, p_{bf_p}^k\}$  – предотвращенным ущербом ( $f_p$  – количество категорий предотвращенного ущерба);

$r_b^k = \{r_{b1}^k, \dots, r_{bf_r}^k\}$  – ресурсы ( $f_r$  – количество категорий ресурса);

$t_b^k$  – время.

Таким образом, элементы  $y_b^k \in Y_b$  представляют собой кортеж

$$y_b^k = \langle p_b^k, r_b^k, t_b^k \rangle. \quad (3)$$

В таком случае в автомате (2), моделирующем совместное функционирование подразделений, элемент  $y^k \in Y$  имеет вид  $y^k = \{y_{b1}^{k1}, \dots, y_{b_s}^{ks}\}$ ,  $s = |y^k| \leq n$ , где каждый  $y_{b_i}^{ki}$  представляет собой кортеж вида (3).

Описанные свойства параметров выходных символов могут быть использованы для оптимизации последовательности действий подразделений при ликвидации ЧО.

## Модель оптимизации последовательности действий подразделений при ликвидации чрезвычайных обстоятельств

Процесс ликвидации ЧО должен быть организован таким образом, чтобы максимизировать предотвращенный ущерб в зоне ЧО при ограничениях  $R$  и  $T$  – соответственно на выделенные ресурсы и отведённое время для ликвидации ЧО, что достигается оптимизацией последовательности действий подразделений, которая может быть описана как модель оптимизации выбора последовательности входных символов  $X^* = (x^{*i_1}, \dots, x^{*i_n})$  автомата (2). При этом величина  $n$  априори неизвестна, так как времена перехода из одного состояния в другое в общем случае различаются.

Для поиска данной последовательности введем функции  $p\left(q^{i_s}, x^{j_s}, \sum_{h=0}^{s-1} \tau(q^{i_h}, x^{j_h})\right)$  и  $R\left(q^{i_s}, x^{j_s}, \sum_{h=0}^{s-1} \tau(q^{i_h}, x^{j_h})\right)$ , где  $\tau(q^{i_h}, x^{j_h})$  – время, необходимое для перехода из состояния  $q^{i_h}$  при входе  $x^{j_h}$ . Данные функции отображают величину предотвращенного ущерба и количество ресурсов соответственно от действий подразделений в соответствии с входным символом  $x^{j_s}$  при нахождении автомата (2) в состоянии  $q^{i_s}$  в момент времени  $\sum_{h=0}^{s-1} \tau(q^{i_h}, x^{j_h})$ . При этом  $R(q^{i_s}, x^{j_s}, 0)$  – начальное количество ресурсов у подразделений.

В этом случае решаемая задача имеет вид нахождения

$$X^* = \underset{X}{\operatorname{Argmax}} \left( \sum_{s=1}^N p\left(q^{i_s}, x^{j_s}, \sum_{h=0}^{s-1} \tau(q^{i_h}, x^{j_h})\right) \right), \quad (4)$$

при ограничениях:

$$0 \leq R \left( q^{i_s}, x^{j_s}, \sum_{h=0}^{s-1} \tau(q^{i_h}, x^{j_h}) \right) + r(q^{i_s}, x^{j_s}) \leq R, \quad (5)$$

$$\sum_{s=1}^n \tau(q^{i_s}, x^{j_s}) \leq T, \quad (6)$$

$$q^{i_{l+1}}(x^{j_l} / y^{k_l}) \in Fq^i, l=1, \dots, n-1. \quad (7)$$

Условия (5) и (6) описывают требования по выполнению ограничений на соответственно ресурс и время; в частности, в (5)  $r(q^{i_s}, x^{j_s})$  – вектор значений изменения ресурсов при переходе из состояния  $q^{i_s}$  автомата (2) по входу  $x^{j_s}$ . Условие (7) определяет корректность последовательности смены состояний в автомате (2).

### Описание численного метода

Нахождение точного решения задачи за приемлемое время не гарантировано в связи с её большой размерностью в практически интересных случаях. В связи с этим целесообразно применять итерационные методы, например, использующие схему ветвей и границ, позволяющую получать решение с помощью ограниченного перебора. Её преимуществом является получение приближённого решения на первой итерации, а дальнейшие итерации не ухудшают полученное решение. Следовательно, в случае ограничения по времени полученное на любой итерации решение можно использовать как решение всей задачи.

Задачи, решаемые с использованием схемы ветвей и границ, различаются тремя составляющими: способом построения дерева частичных решений, методом оценки частичных решений и обходом построенного дерева решений. В данной работе описываются только указанные составляющие, считая известной общую схему [8, 9].

Под частичными решениями будем понимать подмножества возможных решений, в которых фиксированы части последовательности действий, удовлетворяющие условию (7):

$$X^t = (x^{i_1}, \dots, x^{i_t}), \quad (8)$$

Указанные подмножества образуют дерево частичных решений, вершинами которого являются последовательности вида (8), а дуги направлены от  $X^t$  к  $X^{t+1}$ , причём принимается, что  $X^0$  содержит все возможные последовательности.

Оценка частичных решений производится по формуле

$$\Phi(X^t) = \sum_{s=1}^t p \left( q^{i_s}, x^{j_s}, \sum_{h=0}^{s-1} \tau(q^{i_h}, x^{j_h}) \right) + \max_{x^j \in X} p \left( q^i, x^j, \sum_{h=0}^t \tau(q^{i_h}, x^{j_h}) \right) \left[ \frac{T - \sum_{h=0}^t \tau(q^{i_h}, x^{j_h})}{\min_{x^j \in X} \tau(q^{i_h}, x^{j_h})} \right],$$

где  $\left[ \frac{T - \sum_{h=0}^t \tau(q^{i_h}, x^{j_h})}{\min_{x^j \in X} \tau(q^{i_h}, x^{j_h})} \right]$  – максимальное количество итераций, которое может совершить автомат (2) за оставшееся время.

Оценки частичных решений должны обладать следующими свойствами: быть минимальными и монотонно не возрастать при спуске по дереву решений. Очевидно, этими свойствами обладает приведённая оценка в силу описанных свойств предотвращённого ущерба.

На первом шаге обхода дерева частичных решений производится поиск начального решения. Спуск по дереву осуществляется до тех пор, пока выполняются условия (5)–(7). Если условия (5), (6) или (7) не выполняются, то обход дерева решений по данной ветви не продолжается и происходит подъем на один уровень. Когда пройдена вся ветвь, также происходит подъем на один уровень. Окончание первого шага наступает, когда достигнута конечная вершина дерева решений или невозможно достичь конечной вершины, т. е. задача не имеет решения. В последнем случае следует пересмотреть ограничения (5) и (6).

После того как достигнута конечная вершина, соответствующее ей решение  $X^t$  представляет собой начальное решение и называется рекордом. Соответствующие ей оценки обозначим  $\Phi^t$ .

Последующие шаги будут направлены на улучшение начального решения. Они повторяют первый шаг со следующими изменениями:

- 1) обход будет начинаться с вершины, находящейся на уровень выше начального решения;
- 2) к условию (5)–(7) добавляется условие

$$\Phi(X^t) > \Phi^t$$

При выполнении следующих шагов могут возникнуть следующие ситуации:

1) если  $\Phi(X^t) > \Phi^t$  и выполняются условия (5)–(7), то соответствующая вершина становится рекордной, а ее оценка – новым временным рекордом;

2) если  $\Phi(X^t) \leq \Phi^t$ , то спуск по дереву решений прекращается и осуществляется подъем на один уровень.

Если на очередном шаге не удастся достичь конечной вершины, то выполнение алгоритма заканчивается и решением задачи (4)–(7) объявляется последний рекорд.

### Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации последовательности действий взаимодействующих объектов или систем в других предметных областях, если они могут быть представлены автоматными моделями и получено описание возникающих при совместном функционировании синергетических эффектов.

### Литература

1. Новосельцев, В.И. Системный анализ: современные концепции / В.И. Новосельцев. – Воронеж: Издательство «Кварт», 2003. – 359 с.
2. Математическое моделирование действий органов внутренних дел в чрезвычайных обстоятельствах / В.В. Меньших, А.Ф. Самороковский, В.В. Горлов и др. – Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2016. – 186 с.
3. Меньших, В.В. Структурные модели взаимодействия подразделений силовых ведомств при возникновении чрезвычайных ситуаций техногенного характера / В.В. Меньших, А. В. Корчагин // Труды Академии управления МВД России. – 2015. – № 2(34). – С. 54–58.
4. Меньших, В.В. Учёт синергетических эффектов при композиции автоматных моделей действий подразделений силовых ведомств, участвующих в ликвидации чрезвычайных обстоятельств / В.В. Меньших, В.В. Горлов, В.А. Никитенко // Вестник Воронежского института МВД России. – 2023. – № 2. – С. 60–68.
5. Меньших, В.В. Обоснование выбора математического аппарата для моделирования действий органов внутренних дел при возникновении чрезвычайных обстоятельств / В.В. Меньших, В.В. Горлов, В.А. Никитенко // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2022. – № 4. – С. 135–141.
6. Калман, Р.Э. Очерки по математической теории систем / Р.Э. Калман, П.Л. Фалб, М.А. Арбиб. – М.: УРСС, 2004. – 398 с.
7. The Unknown Component Problem: Theory and Applications / T. Villa, N. Yevtushenko, R.K. Brayton *et al.* – New York: Springer, 2012. – 311 p.
8. Меньших, В.В. Численный метод агрегирования автоматных моделей с использованием алгебраических операций над автоматами / В.В. Меньших, В.А. Никитенко // Проблемы управления. – 2023. – № 6. – С. 66–75.
9. Меньших, В.В. Структурно-параметрическая модель ликвидации чрезвычайного обстоятельства / В.В. Меньших, В.А. Никитенко // Вестник Воронежского института МВД России. – 2022. – № 2. – С. 47–54.

*Поступила в редакцию 20 января 2024 г.*

**Сведения об авторах**

Меньших Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9235-4997>, e-mail: menshikh@list.ru.

Никитенко Виталий Алексеевич – преподаватель кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-1948-3817>, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com.

**THE OPTIMIZATION OF ACTIONS IN THE JOINT OPERATION OF OBJECTS OR SYSTEMS, TAKING INTO ACCOUNT SYNERGETIC EFFECTS**

**V.V. Menshikh, V.A. Nikitenko**

*Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation*

*E-mail: menshikh@list.ru*

**Abstract.** This article develops a model for coordinating the actions of objects or systems in joint interaction leading to synergetic effects based on a common automatic model of these objects or systems. The description of the general automaton model is carried out based on the aggregation of individual components representing separate objects or systems, which also correspond to automaton models. As a special example, the actions of law enforcement units that participate in emergency situations is considered. On the basis of a general automaton model and a description of the actions of units, a numerical method for optimizing the sequence of actions has been developed based on a scheme of branches and boundaries. The effectiveness is confirmed by the fact that alternative actions may occur during the interaction of individual objects or systems and, therefore, a complete search is not advisable.

**Keywords:** *the joint functioning of objects; automatic model; emergency; sequence of actions; synergetic effects; optimization model; scheme of branches and boundaries; the evaluation of partial solutions.*

**References**

1. Novosel'tsev V.I. *Sistemnyy analiz: sovremennye kontseptsii* (System Analysis: Modern Concepts), Voronezh: Izdatel'stvo "Kvarta" Publ., 2003, 359 p. (in Russ.).
2. Men'shikh V.V., Samorokovskiy A.F., Gorlov V.V. *Matematicheskoe modelirovanie deystviy organov vnutrennikh del v chrezvychaynykh obstoyatel'stvakh* (Mathematical Modeling of Police Actions in Emergency Situations). Voronezh: Voronezhskiy institut MVD Rossii Publ., 2016, 187 p. (in Russ.).
3. Menshikh V.V., Korchagin A.V. *Strukturnye modeli vzaimodeystviya podrazdeleniy silovykh vedomstv pri vozniknovenii chrezvychaynykh situatsiy tekhnogennogo kharaktera* (Structural Models of Interaction the Power Departments Divisions in Emergencies Manmade). *Trudy Akademii upravleniya MVD Rossii*, 2015, no. 2(34), pp. 54–58.
4. Men'shikh V.V., Gorlov V.V., Nikitenko V.A. *Uchet sinergeticheskikh effektov pri kompozitsii avtomatnykh modeley deystviy podrazdeleniy silovykh vedomstv, uchastvuyushchikh v likvidatsii chrezvychaynykh obstoyatel'stv* (Consideration of Synergetic Effects in the Composition of Automatic Models of Actions of Law Enforcement Agencies Involved in the Elimination of Emergencies). *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii*, 2023, no. 2, pp. 60–68. (in Russ.).
5. Menshikh V.V., Gorlov V.V., Nikitenko V.A. *Obosnovanie vybora matematicheskogo apparata dlya modelirovaniya deystviy organov vnutrennikh del pri vozniknovenii chrezvychaynykh obstoyatel'stv* (Justification of the Choice of Mathematical Apparatus for Modeling the Actions of Inter-

nal Affairs bodies in the Event of Emergency Circumstances). *Vestnik Voronezhskogo instituta FSIN Rossii*, 2022, no. 4, pp. 135–141. (in Russ.).

6. Kálmán R., Falb P., Arbib M. *Topics in Mathematical System Theory*. New York, McGraw-Hill, 1969, 358 p.

7. Villa T., Yevtushenko N., Brayton R.K., Mishchenko A., Petrenko A., Sangiovanni Vincentelli A.L. *The Unknown Component Problem: Theory and Applications*. New York: Springer, 2012, 311 p. DOI: 10.1007/978-0-387-68759-9

8. Men'shikh V.V., Nikitenko V.A. Chislennyy metod agregirovaniya avtomatnykh modeley s ispol'zovaniem algebraicheskikh operatsiy nad avtomatami (A numerical Method for Aggregating Automaton Models using Algebraic Operations on Automata). *Control Sciences*, 2023, no. 6, pp. 66–75. (in Russ.). DOI: 10.25728/pu.2023.6.6

9. Menshikh V.V., Nikitenko V.A. Structural-Parametric Model of Emergency Response (Strukturno-parametricheskaya model' likvidatsii chrezvychnogo obstoyatel'stva). *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii*, 2022, no. 2, pp. 47–54. (in Russ.).

*Received January 20, 2024*

### Information about the authors

Menshikh Valery Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Mathematical and Modeling System Department, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9235-4997>, e-mail: menshikh@list.ru.

Nikitenko Vitaly Alekseevich is Assistant of the Mathematical and Modeling System Department, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-1948-3817>, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com.

# БИФУРКАЦИИ СШИТОГО ТРОЙНОГО ЦИКЛА КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**В.Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация  
E-mail: vroitenberg@mail.ru

**Аннотация.** Исследование бифуркаций динамических систем, задаваемых кусочно-гладкими непрерывными векторными полями, интересно с теоретической точки зрения и полезно для приложений. Нелокальные бифуркации в типичных однопараметрических семействах таких систем на плоскости уже описаны. В настоящей работе рассматривается типичное двухпараметрическое семейство кусочно-гладких непрерывных векторных полей на плоскости. При нулевых значениях параметров предполагается, что у векторного поля есть негрубая устойчивая замкнутая траектория  $\Gamma$ , имеющая с линией переключения поля простое касание. Получена бифуркационная диаграмма семейства – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на множества, для элементов которых соответствующие векторные поля семейства имеют одинаковое число и тип замкнутых траекторий в некоторой фиксированной окрестности траектории  $\Gamma$ . В частности, показано, что максимальное число замкнутых траекторий, рождающихся из  $\Gamma$  при изменении параметров, равно трем.

**Ключевые слова:** кусочно-гладкое непрерывное векторное поле; динамическая система; замкнутая траектория; бифуркационная диаграмма.

**Введение.** При математическом моделировании реальных процессов с переключениями используются как кусочно-гладкие разрывные векторные поля (дифференциальные уравнения) [1–3], так и кусочно-гладкие непрерывные векторные поля [3, 4].

Для кусочно-гладких непрерывных векторных полей на плоскости получены достаточные условия грубости, выделяющие в соответствующем функциональном пространстве открытое всюду плотное множество [5]. В книге [4] дана классификация возможных локальных бифуркаций в типичных одно- и двухпараметрических семействах таких полей.

В типичном однопараметрическом семействе кусочно-гладких непрерывных векторных полей могут происходить и нелокальные бифуркации рождения цикла. В [6] описана бифуркация рождения цикла из петли сепаратрисы сшитого седло-узла – аналог известной бифуркации рождения цикла из петли сепаратрисы седло-узла гладкого векторного поля [3, с. 177]. Других нелокальных бифуркаций рождения цикла в таких семействах, «новых» по сравнению с бифуркациями гладких векторных полей, нет.

Здесь мы рассмотрим бифуркацию в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких непрерывных векторных полей на плоскости, при которой из устойчивой замкнутой траектории, касающейся линии переключения, рождается до трех замкнутых траекторий.

**1. Непрерывные кусочно-гладкие векторные поля на плоскости.** Пусть  $M$  – область на плоскости  $\mathbf{R}^2$  с  $C^\infty$ -гладкой границей,  $S_1, \dots, S_l$  – непересекающиеся между собой одномерные  $C^\infty$ -подмногообразия в  $M$  – линии переключения,  $S := \bigcup_{i=1}^l S_i$ ,  $D = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$  – разбиение множества  $M \setminus S$  на компоненты связности. Пусть  $V^r(\overline{M}_i)$  – множество  $C^r$ -векторных полей на  $\overline{M}_i$ ,  $r \geq 1$ . Обозначим  $PSCV^r(M, D)$  множество непрерывных векторных полей  $X$  на  $M$  таких, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$   $X^i := X|_{\overline{M}_i} \in V^r(\overline{M}_i)$ .

Поскольку векторное поле  $X \in X^r(M, D)$  удовлетворяет условию Липшица, то для любой точки  $x^0 \in M$  однозначно определена траектория поля, выходящая из этой точки. Пусть замкнутая траектория  $\Gamma$  не касается линий переключения, а  $\eta: (-1, 1) \rightarrow M \setminus S$ ,  $\eta(0) \in \Gamma$ ,  $C^r$  – вложение, трансверсальное траекториям поля. Тогда при  $u$ , достаточно близких к нулю, определено

отображение последования по траекториям  $\eta(u) \mapsto \eta(f(u))$ , где  $f(\cdot) \in C^r$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(u) > 0$ . Если  $f'(0) < 1$  (соотв.  $f'(0) > 1$ ), то  $\Gamma$  называется *устойчивой* (соотв. *неустойчивой*) *гиперболической замкнутой траекторией* (предельным циклом). Если  $f'(0) = 1$ , а  $f''(0) \neq 0$ , то  $\Gamma$  называется *седло-узловой замкнутой траекторией* или *двойным циклом*.

**2. Сшитый тройной цикл.** Будем рассматривать семейство полей  $X_\varepsilon \in \text{PSCV}^r(M, D)$ , зависящих от параметра  $\varepsilon$ , меняющегося в некоторой окрестности  $E$  точки  $0 \in \mathbf{R}^2$ , и считать, что векторы  $X_\varepsilon(z) \in C^r$ -гладко зависят от  $(z, \varepsilon) \in \overline{M}_\pm \times E$ ,  $r \geq 3$ .

Предположим, что

(Y<sub>1</sub>) У поля  $X_0$  есть замкнутая траектория  $\Gamma_0$ , имеющая в точке  $O_0 \in S$  простое касание с  $S$  и трансверсальная  $S$  в остальных точках.

Выберем окрестность  $V$  точки  $O_0$  и  $C^\infty$ -координаты  $(x, y)$  в ней так, чтобы точка  $O_0$  имела нулевые координаты,  $S \cap V$  задавалось уравнением  $y = 0$ , точки с координатами  $y < 0$  ( $y > 0$ ) принадлежали одному элементу разбиения  $D$ , который обозначим  $M_-$  ( $M_+$ ); при этом  $\Gamma_0 \cap V \subset \overline{M}_+$ . Согласно [7, с. 594] векторные поля  $X_\varepsilon^\pm := X_\varepsilon|_{M_\pm}$  продолжаются до векторных полей  $\overline{X}_\varepsilon^\pm$  на некоторой окрестности множества  $\overline{M}_\pm$  в  $M$  так, что отображения  $(z, \varepsilon) \mapsto \overline{X}_\varepsilon^\pm(z)$  принадлежат классу  $C^r$ . Мы можем считать, что в выбранных координатах

$$\overline{X}_\varepsilon^\pm(z) = P^\pm(x, y, \varepsilon)\partial/\partial x + Q^\pm(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y,$$

где  $P^+(x, 0, \varepsilon) \equiv P^-(x, 0, \varepsilon)$ ,  $Q^+(x, 0, \varepsilon) \equiv Q^-(x, 0, \varepsilon)$ ,

$$P^\pm(0, 0, 0) > 0, Q^\pm(0, 0, 0) = 0, \partial Q^\pm(0, 0, 0)/\partial x > 0. \quad (1)$$

Из (1) по теореме о неявной функции получаем, что при  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, уравнение  $Q^\pm(x, 0, \varepsilon) = 0$  имеет единственное решение  $x = \tilde{x}(\varepsilon)$ , такое, что  $\tilde{x}(\varepsilon) \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , при этом  $\tilde{x}(\cdot) \in C^r$ .

Пусть  $\eta: (-1, 1) \rightarrow M_+ - C^r$ -вложение, трансверсальное полю  $X_0^+$ , такое, что  $\eta(0) \in \Gamma_0$ , а дуга  $\eta(-1, 0)$  находится с той же стороны от  $\Gamma_0$ , что и дуга  $x = 0, 0 < y < y_1$  при достаточно малом  $y_1 > 0$ . Для  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, положительная (отрицательная) полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , начинающаяся в точке  $O(\varepsilon)$  с координатами  $x = \tilde{x}(\varepsilon), y = 0$ , пересекает трансверсаль  $\eta(-1, 1)$  в точке  $\eta(u_+(\varepsilon))$  ( $\eta(u_-(\varepsilon))$ ), где  $u_\pm(\cdot) \in C^r$ ,  $u_\pm(0) = 0$ . Обозначим  $\Delta(\varepsilon) := u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon)$ . Если число  $\bar{u} > 0$  и окрестность нуля  $E'$  на плоскости параметров выбраны достаточно малыми, то определены отображения  $\eta(u_-(\varepsilon) + u) \mapsto \eta(u_-(\varepsilon) + \tilde{f}(u, \varepsilon))$ ,  $u \in [-\bar{u}, 0]$ , последования по траекториям векторных полей  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in E'$  такие, что  $\tilde{f} \in C^r$ ,  $\tilde{f}'_u(u, \varepsilon) > 0$ ,  $\tilde{f}(0, 0) = 0$ ,  $\tilde{f}(0, \varepsilon) = \Delta(\varepsilon)$ . Введем также функцию расхождения  $\tilde{d}(u, \varepsilon) := \tilde{f}(u, \varepsilon) - u$ .

Предположим, что выполняется и условие

$$(Y_2) \quad \tilde{d}'_u(0, 0) = \tilde{f}'_u(0, 0) - 1 = 0, \tilde{d}''_{uu}(0, 0) = \tilde{f}''_{uu}(0, 0) > 0.$$

Ясно, что условие (Y<sub>2</sub>) не зависит от произвола в выборе  $\eta$ . Из него следует, что при достаточно малом  $\bar{u} > 0 \quad \forall u \in [-\bar{u}, 0) \quad \tilde{f}(u, 0) > u$ , и потому все траектории поля  $X_0$ , пересекающие трансверсаль  $\eta[-\bar{u}, 0)$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_0$ .

Из (1) и выбора отображения  $\eta$  согласно [8] следует

**Лемма 1.** *Существуют такие число  $\bar{v} > 0$  и окрестность нуля  $E'' \subset E'$  на плоскости параметров, что  $\forall \varepsilon \in E''$  положительная (отрицательная) полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , начинающаяся в точке линии переключения с координатами  $(\tilde{x}(\varepsilon) + v, 0)$ ,  $v \in (-\bar{v}, 0]$  ( $(\tilde{x}(\varepsilon) + w, 0)$ ,  $w \in [0, \bar{v})$ ) пересекает трансверсаль  $\eta(-1, 1)$  в точке  $\eta(u_-(\varepsilon) + f_-(v, \varepsilon))$  ( $\eta(u_-(\varepsilon) + f_+(w, \varepsilon))$ ), где  $f_\pm \in C^r$ ,*

$$f_-(0, \varepsilon) = 0, f_+(0, \varepsilon) = \Delta(\varepsilon), \quad (2)$$

$$(f_-)'_v(0, \varepsilon) = (f_+)'_w(0, \varepsilon) = 0, (f_-)'_v(v, \varepsilon) < 0 \text{ при } v \in (-\bar{v}, 0), (f_+)'_w(w, \varepsilon) > 0 \text{ при } w \in (0, \bar{v}), \quad (3)$$



$$(f_-)''_{vv}(0,0) > 0, (f_+)''_{vv}(0,0) > 0. \quad (4)$$

Нам также понадобится

**Лемма 2** [1, с. 177]. *Существуют такие число  $\bar{v} > 0$  и окрестность нуля  $E''$  на плоскости параметров, что  $\forall \varepsilon \in E''$  положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon^-$ , выходящая из точки с координатами  $(\tilde{x}(\varepsilon) + v, 0)$ ,  $v \in (-\bar{v}, 0]$ , кончается в точке с координатами  $(\tilde{x}(\varepsilon) + \sigma(v, \varepsilon), 0)$ , где*

$$\sigma \in C^r, \sigma(0, \varepsilon) = 0, \sigma'_v(0, \varepsilon) = -1, \sigma''_{vv}(0, 0) = \frac{4}{3} \left( \frac{(P^-)'_x - (Q^-)'_y}{P^-} - \frac{(Q^-)''_{xx}}{2(Q^-)'_x} \right) (0, 0, 0). \quad (5)$$

Будем считать, что числа  $\bar{v} > 0$  и окрестности нуля  $E''$ , о которых идет речь в леммах 1 и 2, выбраны одни и те же.

При достаточно малых  $\bar{v} \in (0, \bar{v})$  и окрестности нуля  $E''' \subset E''$  при  $\varepsilon \in E'''$  определены функция расхождения  $d(v, \varepsilon) := f_+(\sigma(v, \varepsilon), \varepsilon) - f_-(v, \varepsilon)$ ,  $v \in [-\bar{v}, 0]$  и функция последования

$$f(u, \varepsilon) := f_+(\sigma(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = u + d(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon), \quad u \in [0, \bar{u}],$$

где  $f_-^{-1}(\cdot, \varepsilon)$  – функция, обратная к  $f_-(\cdot, \varepsilon)$ , а  $0 < \bar{u} < f_-(-\bar{v}, \varepsilon)$ . Через точку  $\eta(u_-(\varepsilon) + u)$  проходит замкнутая траектория  $\Gamma(u)$  поля  $X_\varepsilon$ , тогда и только тогда, когда  $d(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon) = 0$ . Поскольку  $f'_u(u, \varepsilon) = 1 + d'_v(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon) / (f_-)'_u(u, \varepsilon)$ , то эта траектория является устойчивым (неустойчивым) гиперболическим предельным циклом, если производная  $d'_v(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon)$  положительна (отрицательна). Если  $d'_v(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon) = 0$ , то  $f''_{uu}(u, \varepsilon) = d''_{vv}(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon) / [(f_-)'_u(u, \varepsilon)]^2$ , и потому  $\Gamma(u)$  – двойной цикл тогда и только тогда, когда  $d''_{vv}(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$ .

Из (2), (3) и (5) получаем, что

$$\forall \varepsilon \in E''' \quad d(0, \varepsilon) = \Delta(\varepsilon), \quad d'_v(0, \varepsilon) = 0. \quad (6)$$

и, в частности,  $d(0, 0) = d'_v(0, 0) = 0$ .

В достаточно малой окрестности  $V_*$  цикла  $\Gamma_0$  рассмотрим векторное поле  $X_\varepsilon^*$ , полученное из поля  $X_\varepsilon|_{V_*}$  заменой векторов  $X_0^-(z)$  на  $\bar{X}_0^+(z)$  в точках  $z \in V_* \cap M_-$ . Мы можем выбрать  $\bar{u}$  и  $E'''$  столь малыми, что  $\forall \varepsilon \in E'''$  определено отображение  $\eta(u) \mapsto \eta(f_*(u, \varepsilon))$ ,  $u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$ , последования по траекториям поля  $X_\varepsilon^*$ , где  $f_* \in C^r$ ,  $f_*(u, \varepsilon) = \tilde{f}(u, \varepsilon)$  при  $u \leq 0$ .

Поскольку  $f_*(u, \varepsilon) := f_+(\sigma_*(f_-^{-1}(u, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$ , где  $\sigma_*(0, \varepsilon) = 0$ ,  $(\sigma_*)'_v(0, \varepsilon) = -1$ , то

$$(f_*)'_u(u, \varepsilon) = \frac{(f_+)'_w(\sigma_*(v, \varepsilon), \varepsilon)(\sigma_*)'_v(v, \varepsilon)}{(f_-)'_v(v, \varepsilon)}, \quad \text{где } v = f_-^{-1}(u, \varepsilon).$$

Учитывая, что  $(f_-)'_v(0, \varepsilon) = (f_+)'_w(0, \varepsilon) = 0$ , а  $((\sigma_*)'_v(0, \varepsilon))^2 = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} (f_*)'_u(0, \varepsilon) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(f_+)'_w(\sigma_*(v, \varepsilon), \varepsilon)(\sigma_*)'_v(v, \varepsilon)}{(f_-)'_v(v, \varepsilon)} \Big|_{v = f_-^{-1}(u, \varepsilon)} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(f_+)'_w(\sigma_*(v, \varepsilon), \varepsilon)(\sigma_*)'_v(v, \varepsilon)}{(f_-)'_v(v, \varepsilon)} = \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{((f_+)'_w(\sigma_*(v, \varepsilon), \varepsilon)(\sigma_*)'_v(v, \varepsilon))'_v}{((f_-)'_v(v, \varepsilon))'_v} = \frac{(f_+)'_{ww}(0, \varepsilon)}{(f_-)'_{vv}(0, \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку  $(f_*)'_u(0, 0) = \tilde{f}'_u(0, 0) = 1$ , то  $(f_+)'_{ww}(0, 0) = (f_-)'_{vv}(0, 0)$ . Отсюда и из равенства

$$d''_{vv}(v, \varepsilon) = (f_+)'_{ww}(\sigma(v, \varepsilon), \varepsilon)(\sigma'_v(v, \varepsilon))^2 + (f_+)'_w(\sigma(v, \varepsilon), \varepsilon)\sigma''_{vv}(v, \varepsilon) - (f_-)'_{vv}(v, \varepsilon) \quad (8)$$

получаем  $d''_{vv}(0, 0) = 0$ .

Предположим, что выполняется и условие

$$(Y_3) \quad d'''_{vvv}(0, 0) > 0.$$

Из равенств  $d(0, 0) = d'_v(0, 0) = d''_{vv}(0, 0) = 0$  и условия  $(Y_3)$  следует, что число  $\bar{u}$  можно считать столь малым, что  $\forall u \in (0, \bar{u}] \quad d(f_-^{-1}(u, 0), 0) < 0$  и потому  $f(u, 0) < u$ . Тем самым все траектории поля  $X_0$ , пересекающие трансверсаль  $\eta(0, \bar{u}]$ , а в силу доказанного выше и пересекающие трансверсаль  $\eta[-\bar{u}, \bar{u}]$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_0$ . Далее будет показано, что при значениях параметра

$\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, поле  $X_\varepsilon$  может иметь в окрестности  $\Gamma_0$  до трех замкнутых траекторий. Поэтому  $\Gamma_0$  можно назвать устойчивым *шистым* тройным циклом.

Существование векторных полей с циклом, удовлетворяющим условиям  $(Y_1)$ – $(Y_3)$ , неочевидно и будет доказано ниже. Нетрудно построить гладкое поле  $\tilde{X}_0 = \tilde{P}\partial/\partial x + \tilde{Q}\partial/\partial y$ ,  $\tilde{P}(0,0) > 0$ ,  $\tilde{Q}(0,0) = 0$ ,  $\tilde{Q}'_x(0,0) > 0$ , имеющее двойным циклом окружность  $\Gamma_0$ , лежащую в верхней полуплоскости, касающуюся в начале координат оси  $x$ , к которой  $\omega$ -предельны траектории из внутренней полукрестности  $\Gamma_0$ . Рассмотрим его как поле из  $\text{PSCV}^r(\mathbf{R}^2, D)$ , где  $D$  – разбиение на верхнюю –  $M_+$  и нижнюю –  $M_-$  полуплоскости. Для поля  $X_0 \in \text{PSCV}^r(\mathbf{R}^2, D)$ , где  $P^+(x, y) = \tilde{P}(x, y)$ ,  $Q^+(x, y) = \tilde{Q}(x, y)$  при  $y \geq 0$ ,  $P^-(x, y) = \tilde{P}(x, y)$ ,  $Q^-(x, y) = \tilde{Q}(x, y) + ky$  при  $y \leq 0$ , окружность  $\Gamma_0$  – цикл и выполняются условия  $(Y_1)$  и  $(Y_2)$ .

Так как

$$d'''_{vv}(v, \varepsilon) = (f_+'''_{vvv}(\sigma(v, \varepsilon), \varepsilon)(\sigma'_v(v, \varepsilon))^3 + 3(f_+''_{vv}(\sigma(v, \varepsilon), \varepsilon)\sigma'_v(v, \varepsilon)\sigma''_{vv}(v, \varepsilon) + (f_+)'_v(\sigma(v, \varepsilon), \varepsilon)\sigma'''_{vvv}(v, \varepsilon) - (f_-)'''_{vvv}(v, \varepsilon),$$

то

$$d'''_{vv}(0, 0) = -(f_+'''_{vvv}(0, 0) - 3(f_+''_{vv}(0, 0)\sigma''_{vv}(0, 0) - (f_-)'''_{vvv}(0, 0)). \tag{9}$$

Из (5) получаем

$$\sigma''_{vv}(0, 0) = \frac{4}{3} \left( \frac{\tilde{P}'_x - \tilde{Q}'_y - k}{\tilde{P}} - \frac{\tilde{Q}''_{xx}}{2\tilde{Q}'_x} \right) (0, 0).$$

Из этого равенства видно, что число  $k$  можно подобрать так, чтобы производная  $\sigma''_{vv}(0, 0)$  была отрицательной со сколь угодно большой абсолютной величиной. Поэтому из (9) и (5) следует, что  $k$  можно выбрать так, чтобы выполнялось условие  $(Y_3)$ .

**3. Перестройки фазовых портретов при двухпараметрической деформации векторного поля с тройным циклом.** Теперь мы можем сформулировать условие

$(Y_4)$  Производные  $\tilde{d}'_\varepsilon(0, 0)$  и  $\tilde{d}''_{uc}(0, 0)$  линейно независимы.

Если это условие выполняется, то в некоторой окрестности  $E_* \subset E''$  нуля на плоскости параметров можно выбрать  $C^{r-1}$ -координаты  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  так, что

$$\tilde{d}(0, \varepsilon) = \Delta(\varepsilon) = \varepsilon_2, \quad \tilde{d}'_u(0, \varepsilon) = \varepsilon_1. \tag{10}$$

Будем отождествлять точку  $\varepsilon \in E_*$  с координатной строкой:  $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  и считать  $E_* = (-\delta_*, \delta_*)^2$ .

**Теорема.** Пусть семейство векторных полей  $X_\varepsilon \in \text{PSCV}^r(M, D)$ ,  $\varepsilon \in E$ , удовлетворяет условиям  $(Y_1)$  –  $(Y_4)$ . Тогда существуют число  $\delta \in (0, \delta_*)$ , окрестность  $U$  цикла  $\Gamma_0$  и разбиение области  $(-\delta, \delta)^2$  параметров на множества  $B_0 = \{(0, 0)\}$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $E_1$  и  $E_2$ , где  $B_k = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\}$ ,  $\beta_k : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$ ,  $\beta_k \in C^{r-1}$ ,  $\beta_k(+0) = \beta'_k(+0) = 0$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\beta_2(\varepsilon_1) < 0 < \beta_1(\varepsilon_1)$ ,  $E_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\}$ ,  $E_2 = (-\delta, \delta)^2 \setminus (E_1 \cup B_0 \cup B_1 \cup B_2)$  (см. рисунок) со следующими свойствами:

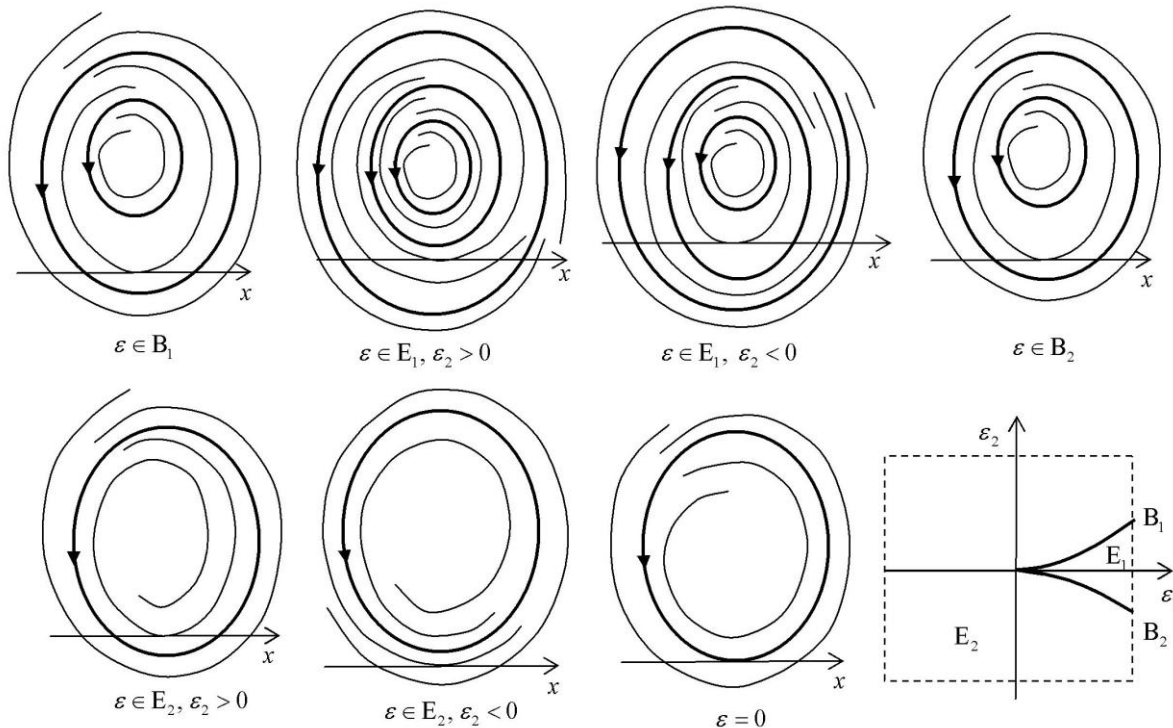
1) Положительные полутраектории векторного поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , начинающиеся в точках  $U$ , не выходят из  $U$ .

2) Векторные поля  $X_\varepsilon$  имеют в  $U$  при  $\varepsilon = 0$  единственный (устойчивый) предельный цикл  $\Gamma_0$ ; при  $\varepsilon \in E_1$  два устойчивых гиперболических предельных цикла и один неустойчивый предельный цикл, гиперболический при  $\varepsilon_2 \neq 0$  и касающийся  $S$  при  $\varepsilon_2 = 0$ ; при  $\varepsilon \in E_2$  один устойчивый предельный цикл, гиперболический при  $\varepsilon_2 \neq 0$  и касающийся  $S$  при  $\varepsilon_2 = 0$ ; при  $\varepsilon \in B_1$  и  $\varepsilon \in B_2$  один устойчивый гиперболический предельный цикл и один двойной цикл.

**Доказательство.** Продолжим функцию расхождения  $\tilde{d}$  до  $C^r$ -функции на  $(-\bar{u}, \bar{u}) \times E'$ , которую также будем обозначать  $\tilde{d}$ . Вследствие (10)

$$\tilde{d}(u, \varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 u + a(\varepsilon)u^2 + o(u^2), \quad \tilde{d}'_u(u, \varepsilon) = \varepsilon_1 + 2a(\varepsilon)u + o(u), \tag{11}$$

где по условию  $(Y_2)$   $a(0) = \tilde{d}''_{uu}(0,0)/2 > 0$ .



Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов векторных полей  $X_\varepsilon$

При достаточно малых  $\tilde{u} \in (0, \bar{u}]$  и  $\bar{\delta} \in (0, \delta_*]$

$$\forall u \in [-\tilde{u}, 0) \quad \tilde{d}(u, 0) > 0, \tag{12}$$

$$\forall (u, \varepsilon) \in [-\tilde{u}, \tilde{u}] \times (-\bar{\delta}, \bar{\delta})^2 \quad \tilde{d}''_{uu}(u, \varepsilon) > 0. \tag{13}$$

Так как определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{d}'_{\varepsilon_2}(0,0) & \tilde{d}''_{u\varepsilon_2}(0,0) \\ \tilde{d}'_u(0,0) & \tilde{d}''_{uu}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a(0) \end{vmatrix} = 2a(0) \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции получаем существование таких чисел  $\tilde{\delta}_0 \in (0, \bar{\delta}]$  и  $u_* \in (0, \tilde{u}]$ , что для любого  $\varepsilon_1 \in (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0)$  система уравнений  $\tilde{d}(u, \varepsilon) = 0, \tilde{d}'_u(u, \varepsilon) = 0$  относительно неизвестных  $(\varepsilon_2, u) \in (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0) \times (-u_*, u_*)$  имеет единственное решение  $\varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1), u = \hat{u}(\varepsilon_1)$ , при этом  $\beta_1, \hat{u} \in C^{r-1}$ ,

$$\beta_1(\varepsilon_1) = (1/4a(0))\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2), \quad \hat{u}(\varepsilon_1) = -(1/2a(0))\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1). \tag{14}$$

Фиксируем число  $u_*$ . Выберем число  $u_{**}$ , удовлетворяющее неравенству  $\tilde{f}(-u_*, 0) < -u_{**} < 0$ . Из (12) и (14) следует, что  $\tilde{\delta}_0$  можно выбрать столь малым, что

$$\forall \varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0)^2 \quad \forall u \in [-u_*, -u_{**}] \quad \tilde{d}(u, \varepsilon) > 0, \tag{15}$$

$$\forall \varepsilon_1 \in (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0) \quad \text{sgn} \hat{u}(\varepsilon_1) = -\text{sgn} \varepsilon_1, \quad 0 < \beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_1, \quad \text{если } \varepsilon_1 \neq 0.$$

Для векторного поля  $X_\varepsilon, \varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0)^2$  получаем, что при  $\varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$ , дугу  $T_\varepsilon^- := \eta[u_-(\varepsilon) - u_*, u_+(\varepsilon)]$  пересекает единственная замкнутая траектория – двойной цикл, проходящий через точку  $\eta(u_+(\varepsilon) + \hat{u}(\varepsilon_1))$ , а при остальных  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  с  $\varepsilon_2 \neq 0$  эту дугу могут пересе-

катель только гиперболические замкнутые траектории. Из (11) следует, что  $u_*$  и  $\tilde{\delta}_0$  можно считать столь малыми, что  $\tilde{d}'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) \geq 1/2$  при  $(u, \varepsilon) \in (-u_*, u_*) \times (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0)^2$ . Отсюда и из (15), (10) и (13) получаем, что при  $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$ ,  $\beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \tilde{\delta}_0$  замкнутые траектории не пересекают  $T_\varepsilon^-$ , при  $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$ ,  $0 < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)$   $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon)$  имеет два простых нуля, принадлежащих интервалу  $(-u_*, 0)$ , то есть дугу  $T_\varepsilon^-$  пересекают два грубых цикла, а при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\delta}_0) \times (-\tilde{\delta}_0, 0)$   $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon)$  имеет один нуль  $u_0 \in (-u_*, 0)$ , в котором  $\tilde{d}'_u(u_0, \varepsilon) < 0$ , то есть дугу  $T_\varepsilon^-$  пересекают одна замкнутая траектория – устойчивый гиперболический цикл.

При  $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$ ,  $\varepsilon_2 = 0$   $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon)$  имеет два нуля  $u_1 \in (-u_*, 0)$ , в котором  $\tilde{d}'_u(u_1, \varepsilon) < 0$  и  $u_2 = 0$ . Тем самым дугу  $T_\varepsilon^-$  пересекает устойчивый гиперболический цикл  $\Gamma_1(\varepsilon)$ , проходящий через точку  $\eta(u_-(\varepsilon) + u_1)$ , к которому  $\omega$ -предельны все траектории, пересекающие дугу  $\eta[u_-(\varepsilon) - u_*, u_-(\varepsilon)]$ , и замкнутая траектория  $\Gamma_2(\varepsilon)$ , проходящая через точку  $\eta(u_+(\varepsilon))$  и касающаяся  $S$  в точке  $O(\varepsilon)$ , к которой  $\alpha$ -предельны траектории, проходящие через точки дуги  $\eta(u_-(\varepsilon) + u_1, u_-(\varepsilon))$ .

При  $\varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, 0] \times (0, \tilde{\delta}_0)$   $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon)$  не имеет нулей на  $[-u_*, 0]$ , а поле  $X_\varepsilon$  не имеет замкнутых траекторий, пересекающих дугу  $T_\varepsilon^-$ . Действительно, поскольку имеем неравенства  $\tilde{d}(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 > 0$ ,  $\tilde{d}'_u(0, \varepsilon) = \varepsilon_1 < 0$  и (15), то в противном случае получаем, что максимум и минимум  $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon)$  достигается в точках интервала  $(-u_*, 0)$ , и потому  $\tilde{d}'_u(\cdot, \varepsilon)$  имеет по меньшей мере два нуля, что противоречит (13). При  $\varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, 0] \times (-\tilde{\delta}_0, 0)$  из неравенства  $\tilde{d}(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$ , из (15) и (13) следует, что  $\tilde{d}(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $[-u_*, 0]$  единственный нуль  $u_0 \in (-u_*, 0)$ , при этом  $\tilde{d}'_u(u_0, \varepsilon) < 0$ . Поле  $X_\varepsilon$  имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу  $T_\varepsilon^-$  – устойчивый гиперболический цикл. При  $\varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, 0) \times \{0\}$  аналогично получаем, что через точки  $\eta(u_\pm(\varepsilon))$  и  $O(\varepsilon)$  проходит замкнутая траектория, к которой  $\omega$ -предельны все остальные траектории, пересекающие дугу  $T_\varepsilon^-$ .

Функцию расхождения  $d$ , которая была определена на  $(-\bar{v}, 0] \times E_*$ , продолжим с сохранением гладкости на  $(-\bar{v}, \bar{v}) \times E_*$ . Поскольку  $(f_*)'_u(0, \varepsilon) = \tilde{f}'_u(0, \varepsilon) = 1 + \tilde{d}'_u(0, \varepsilon) = 1 + \varepsilon_1$ , то из (7) получаем  $(f_+)'_{vv}(0, \varepsilon) = (1 + \varepsilon_1)(f_-)'_{vv}(0, \varepsilon)$ . Отсюда, из (2), (3), (10), (6), (8) и определения функции  $d$  следует, что

$$d(v, \varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 b(\varepsilon)v^2 + c(\varepsilon)v^3 + o(v^3), \text{ где } b(0) = (f_-)'_{vv}(0, 0) > 0, c(0) = d'''_{vv}(0, 0)/6 > 0. \quad (16)$$

Тогда  $d'_v(v, \varepsilon) = v\hat{d}(v, \varepsilon)$ , где  $\hat{d} \in C^{r-2}$ ,  $\hat{d}(v, \varepsilon) := 2\varepsilon_1 b(\varepsilon) + 3c(\varepsilon)v + o(v)$ .

При  $\varepsilon_2 \neq 0$  система уравнений  $d(v, \varepsilon) = d'_v(v, \varepsilon) = 0$  равносильна системе уравнений

$$d(v, \varepsilon) = \hat{d}(v, \varepsilon) = 0. \quad (17)$$

Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} d'_{\varepsilon_2}(0, 0) & \hat{d}'_{\varepsilon_2}(0, 0) \\ d'_v(0, 0) & \hat{d}'_v(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3c(0) \end{vmatrix} = 3c(0) \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции получаем существование таких  $\delta_0 \in (0, \delta_*]$  и  $v_* \in (0, \bar{v}]$ , что  $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_0, \delta_0)$  система уравнений (17) относительно  $(\varepsilon_2, v) \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-v_*, v_*)$  имеет единственное решение  $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ ,  $v = \hat{v}(\varepsilon_1)$ , при этом  $\beta_2, \hat{v} \in C^{r-2}$ ,

$$\beta_2(\varepsilon_1) = -(4b^3(0)/27c^2(0))\varepsilon_1^3 + o(\varepsilon_1^3), \hat{v}(\varepsilon_1) = -(2b(0)/3c(0))\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1).$$

Отсюда и из (16) следует, что  $v_*$  и  $\delta_0$  можно считать столь малыми, что

$$\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_0, \delta_0) \operatorname{sgn} \hat{v}(\varepsilon_1) = -\operatorname{sgn} \varepsilon_1, \forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_0) -\varepsilon_1 < \beta_2(\varepsilon_1) < 0, d''_{vv}(\hat{v}(\varepsilon_1), \varepsilon_1, \beta_2(\varepsilon_1)) > 0, \quad (19)$$

а при всех  $v \in (-v_*, v_*)$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$

$$d_{vvv}'''(v, \varepsilon) > 0, \quad (20)$$

$$d'_{\varepsilon_2}(v, \varepsilon) \geq 1/2. \quad (21)$$

Фиксируем  $v_*$ . Ввиду (4)  $u^* := f_-(-v_*, 0) > 0$ . Так как  $f(u^*, 0) < u^*$ , то найдется число  $v_{**} > 0$  такое, что  $-v_* < f_-^{-1}(f(u^*, 0), 0) < -v_{**} < 0$ . Уменьшив при необходимости  $\delta_0$ , будем иметь

$$\forall \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \quad d(v, \varepsilon) < 0, \text{ если } v \in [-v_*, -v_{**}] \quad d''_{vv}(-v_*, \varepsilon) < 0. \quad (22)$$

Из (19) следует, что поле  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$  имеет негиперболическую замкнутую траекторию, пересекающую дугу  $T_\varepsilon^+ = \eta[u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon) + u^*]$ , только при  $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ ; эта траектория проходит через точку  $\eta(u_-(\varepsilon) + f_-(\hat{v}(\varepsilon_1), \varepsilon))$  и является двойным циклом. Из (22), (20) и неравенства  $d(0, \varepsilon) = \beta_2(\varepsilon_1) < 0$  следует, что других замкнутых траекторий, пересекающих  $T_\varepsilon^+$ , в этом случае нет.

При  $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ ,  $\beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 \leq 0$  из (21) и равенства  $d(\hat{v}(\varepsilon_1), \varepsilon_1, \beta_2(\varepsilon_1)) = 0$  получаем, что при некотором  $v' \in (-v_*, 0)$   $d(v', \varepsilon) > 0$ . Отсюда из (22) и неравенства  $d(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$  следует, что  $d(\cdot, \varepsilon)$  имеет на интервале  $(-v_*, 0)$  четное число  $N$  (простых) нулей. Предположение о том, что  $N \geq 4$  вследствие теоремы Ролля противоречит неравенству (20). Таким образом,  $N = 2$ , то есть дугу  $T_\varepsilon^+$  пересекают два гиперболических цикла. При  $\varepsilon_2 = 0$  получаем, что  $d(\cdot, \varepsilon)$  имеет на интервале  $(-v_*, 0)$  единственный нуль  $v^0$ , в котором  $d'_v(v^0, \varepsilon) > 0$ , и, соответственно, дугу  $\eta(u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon) + u^*)$  пересекает единственная замкнутая траектория – устойчивый гиперболический цикл  $\Gamma_3(\varepsilon)$ . Кроме того,  $d(0, \varepsilon) = 0$  и  $d(v, \varepsilon) > 0$  при  $v \in (v^0, 0)$ , то есть к циклу  $\Gamma_2(\varepsilon)$ , проходящему через точку  $O(\varepsilon)$ ,  $\alpha$ -предельны траектории, пересекающие дугу  $\eta(u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon) + u^0)$ , где  $u^0 := f_-(v^0, \varepsilon)$ . Поскольку траектории, проходящие через точки  $\eta(u)$ ,  $u \in (u_-(\varepsilon) + u_1, u_-(\varepsilon))$ , дуги  $T_\varepsilon^-$ , также  $\alpha$ -предельны к  $\Gamma_2(\varepsilon)$ , то  $\Gamma_2(\varepsilon)$  – неустойчивый цикл.

Поскольку при  $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ ,  $-v_* \leq v \leq 0$   $d(v, \varepsilon) \leq 0$ , то из (21) следует, что при  $-\delta_0 < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ ,  $-v_* \leq v \leq 0$   $d(v, \varepsilon) < 0$ , и потому замкнутые траектории не пересекаются с  $T_\varepsilon^+$ .

Считая  $\delta_0$  достаточно малым, из (16) получаем

$$d(0, \varepsilon) > 0 \text{ при всех } \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (0, \delta_0). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что  $d(\cdot, \varepsilon)$  имеет на интервале  $(-v_*, 0)$  нечетное число  $N$  (простых) нулей. Если  $N \geq 3$ , то по теореме Ролля  $d'_v(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $(-v_*, 0)$  не менее двух нулей, а на  $(-v_*, 0]$ , не менее трех нулей. По теореме Ролля  $d'''_{vvv}(\cdot, \varepsilon)$  имеет нуль, что противоречит (20). Таким образом,  $d(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $(-v_*, 0)$  единственный нуль  $v_0 \in (-v_*, 0)$ , а  $d'_v(v_0, \varepsilon) > 0$ . Соответственно, дугу  $T_\varepsilon^+$  при  $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (0, \delta_0)$  пересекает единственная замкнутая траектория – устойчивый гиперболический предельный цикл.

Покажем, что при  $\varepsilon \in (-\delta_0, 0] \times (-\delta_0, 0)$  дуга  $T_\varepsilon^+$  не пересекается с замкнутыми траекториями. Предположим противное: при  $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) \in (-\delta_0, 0] \times (-\delta_0, 0)$  дуга  $T_{\varepsilon^*}^+$  пересекается с замкнутой траекторией. Пусть  $I = (-\delta_0, -\varepsilon_2^*) \times \{\varepsilon_2^*\}$ . Если замкнутая траектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in I$ , пересекает  $T_{\varepsilon^*}^+$  в точке  $\eta(u_p)$ , то  $v_p = f_-^{-1}(u_p, \varepsilon) \in (-v_*, 0)$ ,  $d(v_p, \varepsilon) = 0$ ,  $d'_v(v_p, \varepsilon) \neq 0$ . По теореме о неявной функции при всех  $\tilde{\varepsilon} \in I$ , достаточно близких к  $\varepsilon$ ,  $d(\cdot, \tilde{\varepsilon})$  также имеет нуль. Поэтому множество тех  $\varepsilon \in I$ , при которых дуга  $T_\varepsilon^+$  пересекается с замкнутыми траекториями, непустое и открытое в  $I$ . Множество тех  $\varepsilon \in I$ , при которых дуга  $T_\varepsilon^+$  не пересекается с замкнутыми траекториями, задается условием  $d(v, \varepsilon) < 0$  для всех  $v \in [-v_*, 0]$  и потому также непустое и открытое в  $I$ . Но

это невозможно, поскольку  $I$  связно. Поэтому сделанное предположение неверно, и дуга  $T_\varepsilon^+$  не пересекается с замкнутыми траекториями.

При  $\varepsilon \in (-\delta_0, 0] \times \{0\}$   $d(\cdot, \varepsilon)$  имеет на  $[-v_*, 0]$  единственный нуль  $v = 0$ . Действительно, если бы существовал еще нуль  $v_c$ , то тогда  $v_c \in (-v_*, 0)$ ,  $d'_v(v_c, \varepsilon) \neq 0$ , и по теореме о неявной функции  $d(\cdot, \tilde{\varepsilon})$  имела бы нуль при некотором  $\tilde{\varepsilon} \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta_0, 0)$ , что невозможно. Учитывая (22), получаем  $d(u, \varepsilon) < 0$  при всех  $v \in [-v_*, 0)$ , и потому все траектории, пересекающие  $T_\varepsilon^+$ ,  $\omega$ -предельны к замкнутой траектории, проходящей через точку  $O(\varepsilon)$ .

Так как  $\tilde{f}(u, 0) > u$ , при  $u \in [-u_*, 0)$ , а  $f(u, 0) < u$  при  $u \in (0, u^*]$ , то из [9, с. 100] следует, что через точку  $\eta(\tilde{f}(-u_*, 0))$  ( $\eta(f(u^*, 0))$ ) дуги  $T_0^-$  ( $T_0^+$ ) можно провести замкнутую  $C^1$ -кривую  $\gamma_-$  ( $\gamma_+$ ) так, что  $\gamma_- \cup \gamma_+$  – граница  $\partial U$  окрестности  $U$  цикла  $\Gamma_0$ , в точках которой поле  $X_0$  не касается  $\partial U$  и направлено внутрь  $U$ ; при этом все траектории поля  $X_0$ , начинающиеся в точках  $U$ , пересекают дугу  $\eta(-u_*, u^*)$ ,  $\omega$ -предельны к  $\Gamma_0$ , а при убывании времени выходят из  $U$ . Выбрав число  $0 < \delta < \min\{\delta_0, \tilde{\delta}_0\}$  достаточно малым, получим, что при всех  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  поле  $X_\varepsilon$  направлено внутрь  $U$ , дуга  $\eta[u_-(\varepsilon) - u_{**}, u_-(\varepsilon) + u^{**}]$  принадлежит  $U$ , а любая траектории поля, начинающаяся в точках  $U$ , пересекает дугу  $\eta[u_-(\varepsilon) - u_*, u_-(\varepsilon) + u^*] = T_\varepsilon^- \cup T_\varepsilon^+$ . Вследствие неравенств (15) и (22) любая замкнутая траектория поля  $X_\varepsilon$ , пересекающая дугу  $T_\varepsilon^- \cup T_\varepsilon^+$ , пересекает и дугу  $\eta[u_-(\varepsilon) - u_{**}, u_-(\varepsilon) + u^{**}]$ , а потому принадлежит  $U$ .

Определив теперь множества  $V_i$  и  $E_j$  так, как это сделано в формулировке теоремы, из доказанного выше получаем все утверждения теоремы.

**4. Бифуркации в случае  $d'''_{vv}(0, 0) < 0$ .** В этом случае  $\Gamma$  – полуустойчивая траектория, бифуркационная кривая двойных циклов  $B_2$  задается уравнением  $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ , где теперь  $\beta_2: (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$ ,  $\beta_2(-0) = \beta'_2(-0) = 0$ , кривая  $B = B_1 \cup B_0 \cup B_2$  –  $C^1$ -гладкая,  $(-\delta, \delta)^2 \setminus B$  имеет две компоненты  $E_1$  и  $E_2$ , векторные поля  $X_\varepsilon$  при  $\varepsilon \in E_1$  ( $\varepsilon \in E_2$ ) в окрестности  $\Gamma$  имеют две замкнутые траектории (не имеют замкнутых траекторий). Таким образом,  $\Gamma$  бифурцирует аналогично двойному циклу при типичных двухпараметрических возмущениях. В этом случае  $\Gamma$  можно назвать сшитым двойным циклом.

## Литература

1. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. Piecewise-smooth Dynamical Systems / M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A. R. Caprney, P. Kowalczyk. – London: Springer, 2008. – 483 p.
3. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
4. Simpson, D.J.W. Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Dynamical Systems / D.J.W. Simpson. – World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. Vol. 69. New-Jersey: World Scientific, 2010. – 238 p.
5. Ройтенберг, В.Ш. О грубых непрерывных кусочно-гладких динамических системах на плоскости / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. – 2021. – № 4. – С. 24–29.
6. Ройтенберг, В.Ш. О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы сшитого седлоузла / В.Ш. Ройтенберг // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, вып. 2. – С. 159–168.
7. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 1. – 607 с.

8. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. – Ярославль: Изд. ЯГТУ, 2014. – С. 54–67.

9. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

Поступила в редакцию 31 октября 2023 г.

### Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, e-mail: vroitenberg@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2024, vol. 16, no. 1, pp. 39–48

DOI: 10.14529/mmph240105

## BIFURCATIONS OF A FUSED TRIPLE CYCLE OF A PIECEWISE-SMOOTH CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEM

**V.Sh. Roitenberg**

*Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation*

*E-mail: vroitenberg@mail.ru*

**Abstract.** The study of bifurcations of dynamic systems defined by piecewise-smooth continuous vector fields is interesting from a theoretical and practical point of view. Nonlocal bifurcations in generic one-parameter families of such systems on a plane have already been described. In this paper, we consider a generic two-parameter family of piecewise-smooth continuous planar vector fields. At zero values of the parameters, it is assumed that the vector field has a smooth stable closed trajectory  $\Gamma$ , which has a simple tangency with the field switching line. A bifurcation diagram of a family is obtained – a partition of the neighborhood of zero on the parameter plane into sets, for whose elements the corresponding vector fields of the family have the same number and type of closed trajectories in some fixed neighborhood of  $\Gamma$ . In particular, we show that the maximum number of closed trajectories born from  $\Gamma$  when the parameters change is three.

**Keywords:** *piecewise-smooth continuous vector field; dynamical system; closed trajectory; bifurcation diagram.*

### References

1. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side). Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p. (in Russ.).
2. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems*. London: Springer, 2008, 483 p. (Applied Mathematical Sciences, Vol. 163). DOI: 10.1007/978-1-84628-708-4
3. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* (Methods and Techniques for a Qualitative Study of Dynamical Systems on a Plane). Moscow, Nauka, 1976, 496 p. (in Russ.).
4. Simpson D.J.W. Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Dynamical Systems. *World scientific series on nonlinear science, Series A*, Vol. 69, New-Jersey: World Scientific, 2010, 238 p. DOI: 10.1142/7612
5. Roitenberg V.Sh. On Structurally Stable Continuous Piecewise-Smooth Dynamical Systems on the Plane. *The Bulletin of the Adyge State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences*, 2021, no. 4, pp. 24–29. (in Russ.). DOI: 10.53598/2410-3225-2021-4-291-24-29

6. Roitenberg V.Sh. On Generation of a Limit Cycle from a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, Vol. 22, Iss. 2, pp. 159–168 (in Russ.). DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168

7. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Differential and Integral Calculus Course). Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, Vol. 1, 607 p. (in Russ.).

8. Roitenberg V.Sh. On Bifurcations of a Sewing Triple Cycle. Mathematics and mathematical education. *Theory and practice: inter-higher school coll. of Sci. Papers, Iss. 9*, Yaroslavl: YaSTU Publ., 2014, pp. 54–67. (in Russ.) URL: <https://www.ystu.ru/information/university/nauka/>

9. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. New York, J. Wiley; Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1973, 524 p.

*Received October 31, 2023*

### Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich is Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, e-mail: vroitenberg@mail.ru.



## ЭЛЕКТРОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВА ГЕЙСЛЕРА $Mn_2CrSn$ : ПЕРВОПРИНЦИПНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

М.А. Обамби, М.А. Загребин, В.Д. Бучельников

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
e-mail: miczag@mail.ru

**Аннотация.** С помощью теории функционала плотности исследованы электронные и магнитные свойства стехиометрического сплава Гейслера  $Mn_2CrSn$  в зависимости от приложенного давления. Показано, что в сплаве могут существовать два магнитных состояния с низким (LMS) и высоким (HMS) магнитным моментом при меньшем и большем объеме элементарной ячейки, разделенные энергетическим барьером. При приложении всестороннего давления 1 ГПа данные состояния вырождаются по энергии. Фаза LMS характеризуется полуметаллическим состоянием, тогда как фаза HMS обладает металлическими свойствами. Константы магнитного обменного взаимодействия, а также температура Кюри в фазе LMS принимают меньшие значения, чем в фазе HMS.

*Ключевые слова:* сплавы Гейслера; спинтроника; полуметаллические ферромагнетики; обменные взаимодействия; температура Кюри.

### Введение

В последние годы ферромагнитные сплавы Гейслера на основе  $Mn_2$  привлекают особое внимание благодаря их полуметаллическим свойствам и потенциальному применению в области спинтроники в качестве спиновых инжекторов для магнитной оперативной памяти, а также устройств переноса спинового магнитного момента [1–4]. За последние несколько десятилетий было проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований металлических сплавов  $Mn_2YZ$ , содержащих  $3d$ ,  $4d$  и  $5d$  переходные металлы  $Y$ , с целью найти и предсказать новые функциональные полуметаллические соединения. Большинство этих исследований посвящено изучению электронной структуры, магнитных, механических и полуметаллических свойств сплавов Гейслера в рамках расчетов *ab initio*. Многие из них теоретически предсказаны как полуметаллические ферро- или ферромагнетики с псевдощелью в одном из двух спиновых каналов, что делает их пригодными для технических приложений. Целью данной работы является исследование электронных и магнитных свойств сплава Гейслера  $Mn_2CrSn$ , в зависимости от приложенного внешнего всестороннего давления.

### Детали вычислений

Расчеты свойств сплава  $Mn_2CrSn$  выполнены с использованием присоединенных проекционных плоских волн (*Projector augmented wave* – PAW) и гриновских функций Корринга–Кона–Ростокера, реализованных в программных пакетах VASP (*Vienna Ab initio Simulation Package*) [5, 6] и SPR-KKR (*a Spin Polarized Relativistic Korringa-Kohn-Rostoker code*) [7] соответственно. В качестве обменно-корреляционного функционала использовалось приближение обобщенного градиента электронной плотности в параметризации Пердью–Бурке–Эрнцерхофа [8].

Исследуемый сплав моделировался с помощью 16-атомной кубической элементарной ячейки регулярной структуры Гейслера  $L2_1$  (прототип  $Cu_2MnAl$ ), которая состоит из четырех взаимопроникающих ГЦК-подрешеток: две из которых в равной степени заняты атомами Mn в позиции Вайкоффа  $8c$  ( $1/4, 1/4, 1/4$ ) и ( $3/4, 3/4, 3/4$ ), а атомы Sn и Cr занимают позиции  $4a$  ( $0, 0, 0$ ) и  $4b$  ( $1/2, 1/2, 1/2$ ) соответственно. Следует отметить, что, как было показано в работе [9], инверсная структура ХА (прототип  $Hg_2CuTi$ ) не является выгодной для данного сплава.

В основном магнитном состоянии для соединения  $Mn_2CrSn$  энергетически выгодной является ферримагнитная (ФМ) конфигурация [10]. Упорядочение ФМ отвечает спиновой конфигурации с обратным магнитным моментом атомов Cr по отношению к Mn.

Оптимизированные с помощью программного пакета VASP параметры кристаллической решетки в дальнейшем использовались для расчета констант магнитного обменного взаимодействия ( $J_{ij}$ ), плотностей электронных состояний (ПЭС), магнитных моментов и температуры Кюри с использованием пакета SPR-KKR.

**Результаты**

В результате проведения геометрической оптимизации кристаллической структуры сплава  $Mn_2CrSn$  получено, что в отсутствие давления на зависимостях энтальпии от параметра решетки наблюдается наличие глобального и локального минимумов, соответствующих магнитным состояниям с малым целым и высоким дробным магнитным моментом при меньшем и большем объеме кристаллической структуры  $L_{21}$  (рис. 1). Состояние с низким магнитным моментом (*low magnetic state* – LMS) характеризуется полуметаллическими свойствами, тогда как состояние с высоким магнитным моментом (*high magnetic state* – HMS) – металлическими свойствами (рис. 2).

В отсутствие давления глобальный минимум энтальпии соответствует фазе HMS с большим равновесным параметром решетки ( $a_0 \approx 6,31 \text{ \AA}$ ), в то время как локальный минимум отвечает фазе LMS с меньшим  $a_0$  ( $6,02 \text{ \AA}$ ). При приложении всестороннего давления разница энтальпии между фазами LMS и HMS уменьшается и при давлении 1 ГПа фазы становятся вырожденными. Дальнейшее увеличение давления приводит к тому, что в качестве глобального минимума становится фаза LMS (см. рис. 1). Аналогичные результаты были получены в работе [10] для других сплавов Гейслера. Таким образом, внешнее давление позволяет управлять разницей энтальпии между фазами HMS и LMS и достичь вырожденных состояний.

Парциальные и полные ПЭС для фаз LMS и HMS в отсутствие давления представлены на рис. 2, а при наличии давления – на рис. 3.

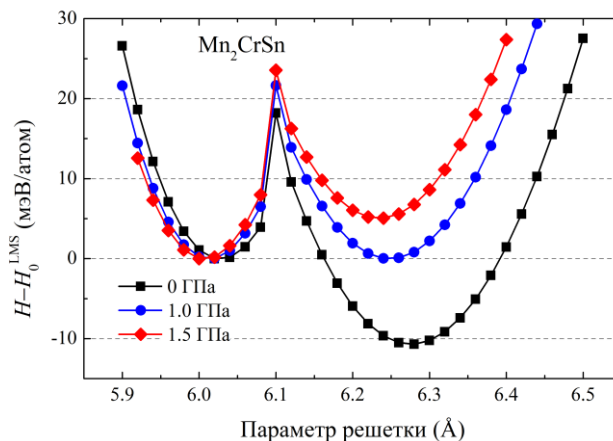


Рис. 1. Изменение энтальпии  $\Delta H$  как функции параметра решетки для сплава Гейслера  $Mn_2CrSn$  относительно минимума энтальпии при меньшем объеме

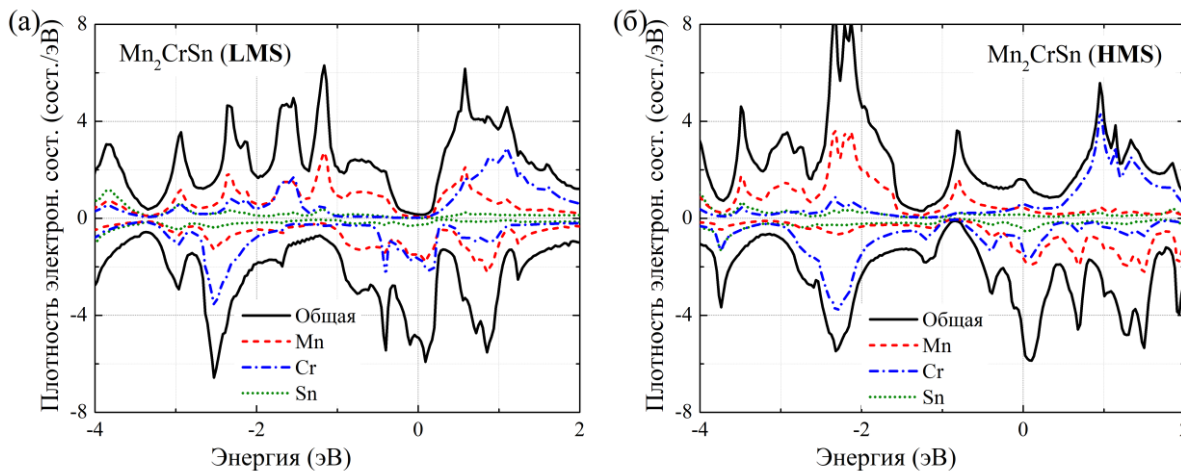


Рис. 2. Плотности электронных состояний сплава  $Mn_2CrSn$  при нормальном давлении в фазе (а) LMS и (б) HMS

Рассмотрим случай состояния LMS более подробно (рис. 2, а). Состояния между  $-4$  и  $-2,2$  эВ обусловлены в основном  $d$ -электронами атомов Mn и Cr, которые гибридизируются друг с дру-

гом. Полные ПЭС от  $\approx -2,2$  эВ до  $E_F$  обусловлены в основном  $d$ -состояниями атомов Mn.  $d$ -состояния Cr также вносят вклад в суммарные ПЭС, но не так сильно, как атомы Mn. По мере приближения к уровню Ферми в сплаве  $Mn_2CrSn$  появляется энергетическая псевдощель в состоянии с проекцией спина «вверх» с наименьшей заселенностью носителей вблизи уровня Ферми  $E_F$ , а состояния с проекцией спина «вниз» полностью заняты. Таким образом, можно предположить, что состояние LMS  $Mn_2CrSn$  характеризуется почти полуметаллическим поведением. Что касается ПЭС-состояния HMS, то видно, что ПЭС для этих состояний имеет вид, характерный для металлов (рис. 2, б).

Рассмотрим далее, какое влияние оказывает внешнее давление на ПЭС как в LMS- и HMS-состояниях. На рис. 3 представлены ПЭС, вычисленные для давлений 0 и 1,5 ГПа. Из рис. 3 видно, что давление не оказывает существенного влияния на профиль ПЭС как в состоянии LMS, так и в HMS. Данная тенденция хорошо видна на зависимости спиновой поляризации от давления.

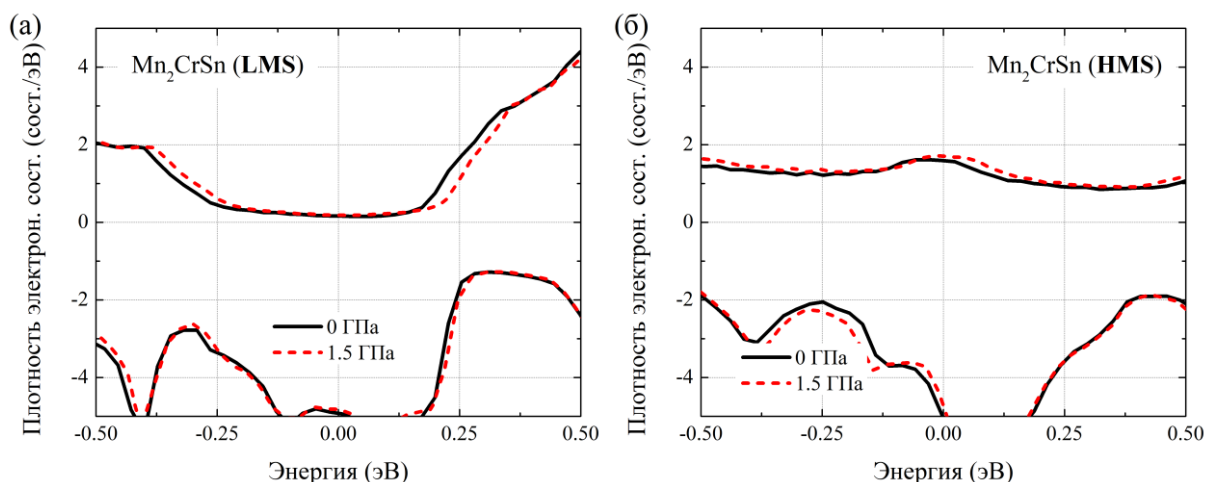


Рис. 3. Плотности электронных состояний сплава  $Mn_2CrSn$  в фазах (а) LMS и (б) HMS при нормальном давлении и давлении 1,5 ГПа вблизи уровня Ферми

В фазе LMS спиновая поляризация при нормальном давлении составляет 93 % и слабо убывает с приложением внешнего давления. Это говорит о том, что сплав сохраняет свое полуметаллическое состояние. Полученные ПЭС для состояния HMS свидетельствуют о заполнении уровня Ферми, характерного для металла. Спиновая поляризация оценена с использованием следующего выражения:

$$P = \frac{N \uparrow(E_F) - N \downarrow(E_F)}{N \uparrow(E_F) + N \downarrow(E_F)} \times 100\%. \quad (1)$$

Здесь  $N \uparrow(E_F)$ ,  $N \downarrow(E_F)$  – значения ПЭС на уровне Ферми для электронов с проекцией спина «вверх» и спина «вниз», соответственно. Значения спиновой поляризации представлены в табл. 1. Видно, что давление слабо влияет на степень спиновой поляризации в обеих фазах. Такое поведение обусловлено малыми значениями давления.

Таблица 1  
Спиновая поляризация в фазах LMS и HMS сплава  $Mn_2CrSn$  при различных значениях внешнего давления

Давление	0 ГПа	1,0 ГПа	1,5 ГПа
LMS	93,7	92,9	92,4
HMS	52,6	47,7	46,9

На рис. 4 представлены рассчитанные параметры магнитного обменного взаимодействия  $J_{ij}$  для фаз LMS и HMS в зависимости от приложенного давления. Видно, что все взаимодействия имеют осциллирующий характер и также слабо зависят от приложенного давления. В фазе LMS обменные взаимодействия между ближайшими соседними атомами Mn малы и составляют  $\approx 1,5$  мэВ в третьей координационной сфере. В фазе HMS обменные взаимодействия Mn-Mn в первой координационной сфере значительно больше по сравнению с фазой LMS и составляют около 30 мэВ. С увеличением расстояния, начиная с 8-й координационной сферы, значения обменных взаимодействий становятся близкими к нулевым. Взаимодействие между атомами Mn и Cr в первой координационной сфере составляет  $\approx 6$  и 9 мэВ в фазах LMS и HMS соответственно.

Что касается взаимодействия между атомами Cr, то здесь можно отметить, что во второй координационной сфере в фазе HMS обменное взаимодействие больше в 3 раза по сравнению с таковым в фазе LMS. Увеличение обменного взаимодействия в фазе HMS по сравнению с LMS связано с большим значением магнитного момента. Отметим, что аналогичное поведение обменного взаимодействия в фазах LMS и HMS было показано для серии сплавов  $Mn_2YSn$  ( $Y = Sc, Ti, V$ ) в работе [10].

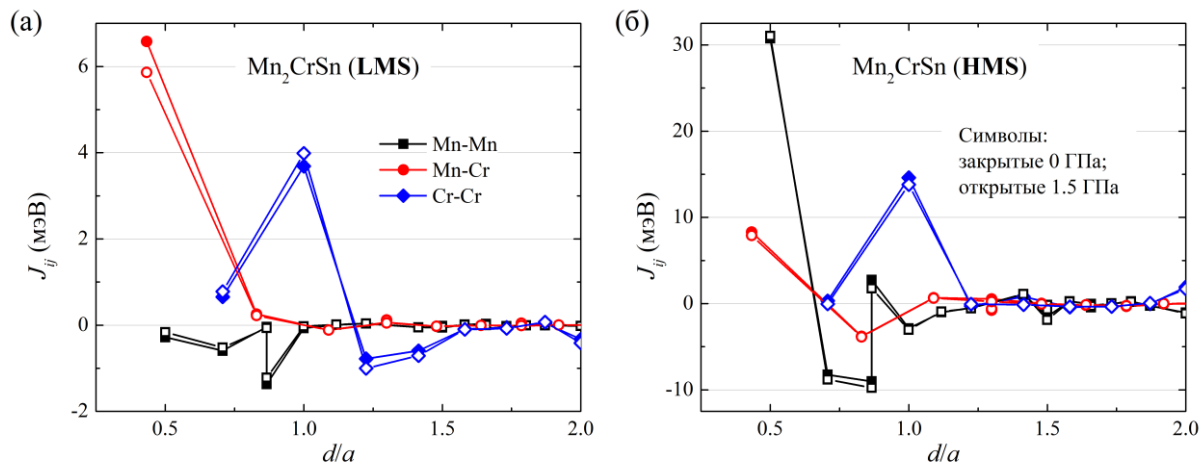


Рис. 4. Параметры магнитного обменного взаимодействия в зависимости от расстояния между парами атомов сплава  $Mn_2CrSn$  в фазах (а) LMS и (б) HMS при нормальном давлении и давлении 1,5 ГПа

Расчитанные обменные интегралы использовались для оценки температуры Кюри  $T_C$  в модели Гейзенберга в рамках приближения среднего поля (mean field approximation) [11]. Отметим, что значения, полученные с помощью приближения молекулярного поля, обычно завышены по сравнению с экспериментальными значениям, но качественно повторяют наблюдаемые экспериментально зависимости от внешнего давления [12]. В табл. 2 приведены рассчитанные значения полного магнитного момента и температуры Кюри при различной величине внешнего давления. Видно, что фаза HMS характеризуется более высокой  $T_C$  (более чем в 3 раза) по сравнению с фазой LMS. Большие значения  $T_C$  в фазе HMS объясняются большими суммарными магнитными моментами и параметрами магнитного обменного взаимодействия  $J_{ij}$ . Приложение давления приводит к уменьшению температуры Кюри.

Таблица 2  
Значения полного магнитного момента  $\mu_{полн.}$  ( $\mu_B$ ) и температуры Кюри  $T_C$  (К) в фазах LMS и HMS сплава  $Mn_2CrSn$  при различных значениях внешнего давления

Фаза	LMS		HMS		
	Давление	$\mu_{полн.}$ ( $\mu_B$ )	$T_C$ (К)	$\mu_{полн.}$ ( $\mu_B$ )	$T_C$ (К)
	0 ГПа	-0,585	292,4	2,076	689,0
	1,0 ГПа	-0,595	274,2	3,181	651,9
	1,5 ГПа	-0,603	258,3	3,122	625,9

### Заключение

В данной работе с помощью теории функционала плотности и метода функций Грина теоретически исследованы электронные и магнитные свойства сплава Гейслера  $Mn_2CrSn$ . Показано, что в сплаве могут иметь место две магнитные фазы с разной величиной магнитного момента и электронной структурой при разных объемах кристаллической решетки. Фаза с меньшим объемом решетки обладает малым магнитным моментом (фаза LMS), тогда как фаза при большем объеме решетки – большим магнитным моментом (фаза HMS). При нормальном давлении фаза HMS является стабильной (имеет глобальный минимум на зависимости энергии от параметра решетки), а фаза LMS – метастабильной (локальный минимум). Минимумы разнесены по энергии на  $\approx 10$  мэВ. Анализ плотностей электронных состояний вблизи уровня Ферми показывает, что фаза LMS имеет ферромагнитное полуметаллическое поведение с практически 100 % степенью спиновой поляризации, в то время как HMS-состояние характеризуется металлическим поведением. Приложение внешнего гидростатического давления приводит к уменьшению разности

энтальпии между фазами LMS и HMS и при давлении 1 ГПа наблюдается вырождение фаз. Дальнейшее увеличение давления делает LMS-фазу выгодной, а HMS-фазу – метастабильной. Расчеты параметров обменного взаимодействия показали, что в металлической фазе HMS они имеют более высокие значения, чем в LMS-фазе. В связи с этим температура Кюри в HMS-фазе выше, чем в LMS-состоянии. Внешнее гидростатическое давление слабо влияет на параметры магнитного обменного взаимодействия и температуру Кюри.

Полученные результаты показывают, что индуцированный давлением механизм переключения между полуметаллическим и металлическим состояниями с различной намагниченностью и температурой Кюри может быть перспективным для разработки устройств спинтроники, таких как спиновые фильтры, датчики и переключатели.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (Проект № 22-12-20032, <https://rscf.ru/project/22-12-20032/>, Челябинский государственный университет, Челябинская область).

### Литература

1. Doping of  $Mn_2VAl$  and  $Mn_2VSi$  Heusler Alloys as a Route to Half-Metallic Anti-Ferromagnetism / I. Galanakis, K. Özdoğan, E. Şaşıoğlu, B. Aktaş // *Physical Review B*. – 2007. – Vol. 75, Iss. 9. – P. 092407.
2. Design of Compensated Ferrimagnetic Heusler Alloys for Giant Tunable Exchange Bias / A.K. Nayak, M. Nicklas, S. Chadov *et al.* // *Nature Materials*. – 2015. – Vol. 14. – P. 679–684.
3. Basics and Prospective of Magnetic Heusler Compounds / C. Felser, L. Wollmann, S. Chadov *et al.* // *APL Materials*. – 2015. – Vol. 3. – P. 041518.
4. Marchenkov, V.V. Unusual Kinetic Properties of Usual Heusler Alloys / V.V. Marchenkov, V.Yu. Irkhin, A.A. Semiannikova // *J. Supercond Nov. Magn.* – 2022. – Vol. 35. – P. 2153–2168.
5. Kresse, G. Efficient Iterative Schemes for Ab Initio Total-Energy Calculations using a Plane-Wave Basis Set / G. Kresse, J. Furthmüller // *Physical Review B*. – 1996. – Vol. 54, Iss. 16. – P. 11169.
6. Kresse, G. From Ultrasoft Pseudopotentials to the Projector Augmented-Wave Method / G. Kresse, D. Joubert // *Physical Review B*. – 1999. – Vol. 59. – P. 1758.
7. Ebert, H. Calculating Condensed Matter Properties using the KKR-Green's Function Method – Recent Developments and Applications / H. Ebert, D. Ködderitzsch, J. Minár // *Reports on Progress in Physics*. – 2011. – Vol.74, no. 9. – P. 096501.
8. Perdew, J.P. Generalized Gradient Approximation Made Simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // *Physical Review Letters*. – 1996. – Vol.77. – P. 3865–3868. (Erratum *Phys. Rev. Lett.* 78, 1396 (1997)).
9. Prediction of a Heusler Alloy with Switchable Metal-to-Half-Metal Behavior / V.D. Buchelnikov, V.V. Sokolovskiy, O.N. Miroshkina *et al.* // *Physical Review B*. – 2021. – Vol. 103, Iss. 5. – P. 054414.
10. Sokolovskiy, V. *Ab Initio* Prediction of Coexistence of Two Magnetic States in  $Mn_2YSn$  ( $Y=Sc, Ti, \text{ and } V$ ) Heusler Alloys Under Applied Pressure / V. Sokolovskiy, M. Zagrebina, D. Baigutlin, V. Buchelnikov // *Computational Materials Science*. – 2023. – Vol. 228. – P. 112365.
11. Anderson, P.W. Theory of Magnetic Exchange Interactions: Exchange in Insulators and Semiconductors / P.W. Anderson // *Solid State Physics*. – 1963. – Vol. 14. – P. 99–214.
12. *Ab Initio* Studies of Phase Transformations in  $Fe_{100-x}Si_x$  / M.A. Zagrebina, M.V. Matyunina, A.B. Koshkin *et al.* // *Physics of the Solid State*. – 2020. – Vol. 62, no. 5. – P. 739–743.

Поступила в редакцию 24 января 2024 г.

### Сведения об авторах

Обамби Мишэ Антипас – студент, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Загребин Михаил Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедра радиофизики и электроники, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: miczag@mail.ru.

Бучельников Василий Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики конденсированного состояния, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: buche@csu.ru.

## ELECTRONIC AND MAGNETIC PROPERTIES OF THE $Mn_2CrSn$ HEUSLER ALLOY: FIRST-PRINCIPLES INVESTIGATIONS

**M.A. Obambi, M.A. Zagrebin, V.D. Buchelnikov**  
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
e-mail: miczag@mail.ru

**Abstract.** This work studies the electronic and magnetic properties of the stoichiometric Heusler alloy  $Mn_2CrSn$  depending on the applied pressure, using density functional theory. It is shown that two magnetic states with a low (LMS) and high (HMS) magnetic moment can exist in the alloy at a smaller and larger unit cell volume, separated by an energy barrier. When a confining pressure of 1 GPa is applied, these states become degenerate in energy. The LMS phase is characterized by pseudo semi-metallic and metallic behavior, while the HMS phase has metallic properties. The magnetic exchange interaction constants, and the Curie temperature in the LMS phase take lower values than in the HMS phase.

**Keywords:** Heusler alloys; spintronics; half-metallic ferromagnets; exchange interactions; Curie temperature.

### References

1. Galanakis I., Özdoğan K., Şaşıoğlu E., Aktaş B. Doping of  $Mn_2VAl$  and  $Mn_2VSi$  Heusler Alloys as a Route to Half-Metallic Anti-Ferromagnetism. *Phys. Rev. B*, 2007, Vol. 75, Iss. 9, p. 092407. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.092407
2. Nayak A.K., Nicklas M., Chadov S., Khuntia P., Shekhar C., Kalache A., Baenitz M., Skourski Y., Guduru V.K., Puri A., Zeitler U., Coey J.M.D., Felser C. Design of Compensated Ferrimagnetic Heusler Alloys for Giant Tunable Exchange Bias. *Nature Mater.*, 2015, Vol. 14, pp. 679–684. DOI: 10.1038/nmat4248
3. Felser C., Wollmann L., Chadov S., Fecher G.H., Parkin S.S.P. Basics and Prospective of Magnetic Heusler Compounds. *APL Mater.*, 2015, Vol. 3, p. 041518. DOI: 10.1063/1.4917387
4. Marchenkov V.V., Irkhin V.Yu., Semiannikova A.A. Unusual Kinetic Properties of Usual Heusler Alloys. *J. Supercond Nov. Magn.*, 2022, Vol. 35, pp. 2153–2168. DOI: 10.1007/s10948-022-06342-1
5. Kresse G., Furthmüller J. Efficient Iterative Schemes for Ab Initio Total-Energy Calculations using a Plane-Wave Basis Set. *Phys. Rev. B*, 1996, Vol. 54, Iss. 16, p. 11169. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.11169
6. Kresse G., Joubert D. From Ultrasoft Pseudopotentials to the Projector Augmented-Wave Method. *Phys. Rev. B*, 1999, Vol. 59, Iss. 3, p. 1758. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.1758
7. Ebert H., Ködderitzsch D., Minár J. Calculating Condensed Matter Properties using the KKR-Green's Function Method – Recent Developments and Applications. *Reports on Progress in Physics*, 2011, Vol. 74, no. 9, p. 096501. DOI: 10.1088/0034-4885/74/9/096501
8. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized Gradient Approximation Made Simple. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, Vol. 77, Iss. 18, pp. 3865–3868. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3865. (Erratum *Phys. Rev. Lett.* 78, 1396 (1997)).
9. Buchelnikov V.D., Sokolovskiy V.V., Miroshkina O.N., Baigutlin D.R., Zagrebin M.A., Barbiellini B., Lähderanta E. Prediction of a Heusler Alloy with Switchable Metal-to-Half-Metal Behavior. *Phys. Rev. B*, 2021, Vol. 103, Iss. 5, p. 054414. DOI: 10.1103/PhysRevB.103.054414
10. Sokolovskiy V., Zagrebin M., Baigutlin D., Buchelnikov V. *Ab initio* Prediction of Coexistence of Two Magnetic States in  $Mn_2YSn$  ( $Y=Sc, Ti, \text{ and } V$ ) Heusler Alloys under Applied Pressure. *Comp. Mater. Sci.*, 2023, Vol. 228, p. 112365. DOI: 10.1016/j.commatsci.2023.112365.

11. Anderson P.W. Theory of Magnetic Exchange Interactions: Exchange in Insulators and Semiconductors. *Solid State Phys.*, 1963, Vol. 14, pp. 99–214. DOI: 10.1016/S0081-1947(08)60260-X

12. Zagrebin M.A., Matyunina M.V., Koshkin A.B., Buchelnikov V.D., Sokolovskiy V.V. *Ab Initio* Studies of Phase Transformations in  $Fe_{100-x}Si_x$ . *Phys. Solid State*, 2020, Vol. 62, pp. 739–743. DOI: 10.1134/S1063783420050327

*Received January 24, 2024*

### Information about the authors

Obambi Miché is Student, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Zagrebin Mikhail Aleksandrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, Department of Radiophysics and Electronics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: miczag@mail.ru.

Buchelnikov Vasily Dmitrievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Condensed Matter Physics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: buche@csu.ru.

## О КОРНЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ ПРИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

**С.Ю. Гуревич, Д.Г. Кожевников, Е.В. Голубев**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
e-mail: golubev@susu.ru

**Аннотация.** Получен ряд корней характеристического уравнения для поверхностных волн в предположении, что квадрат отношения скоростей объемных волн представляет собой рациональное число. Точные формулы для найденных корней содержат минимум радикалов и рациональных чисел.

*Ключевые слова:* поверхностные волны; скорость волны Рэлея; корни характеристического уравнения; точные формулы.

Скорость волны Рэлея в задачах акустики однородных упругих сред может быть найдена с помощью выражения  $c_r = c_t \sqrt{x}$ , где  $x$  – единственный действительный корень, принадлежащий интервалу  $[0,1)$ , уравнения [1, с. 136]:

$$x^3 - 8x^2 + 8x(3 - 2u^2) - 16(1 - u^2) = 0, \quad (1)$$

где сделана замена  $x = \xi^2$  и введены обозначения:  $u^2 = (c_t/c_l)^2$ ,  $c_r, c_t, c_l$  – скорости поверхностных, поперечных и продольных волн соответственно.

Аналитическое выражение для вычисления корня уравнения (1) в общем случае, полученное в [2, см. (10) и (6)], дает довольно громоздкую конечную формулу. Однако в работе [3] представлены значения корней для некоторых значений  $u^2$  в виде простых дробей. В нашей работе мы продолжим поиск значений  $u^2$ , которым соответствуют корни, допускающие простую запись.

При решении акустической задачи для скоростей акустических волн берут экспериментальные значения, которые содержат конечное число знаков. Следовательно, параметр  $u^2$  является рациональным числом. Поставим простую обратную задачу нахождения рациональных значений параметра  $u^2$ , которым соответствуют корни, формулы для вычисления которых содержат минимум радикалов и рациональных чисел.

Будем искать решения в виде  $x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$ , где  $i, j, k$  – целые числа, что продиктовано формой записи некоторых случайно найденных ранее корней (например,  $3 - \sqrt{5}$  для  $u^2 = 1/2$ ). Для этого выразим  $u^2$  из (1):

$$u^2 = \frac{x^3 - 8x^2 + 24x - 16}{16(x - 1)} \quad (2)$$

и, подставляя  $x_{ijk}$ , будем искать значения  $u^2$ , представимые в виде отношения целых чисел  $l$  и  $m$ . Корни в количестве 19 шт., найденные простым перебором  $i, j, k, l$  и  $m$ , значения которых не превышает 1000, помечены звездочкой (\*) и представлены в таблице, где введено обозначение  $\sigma = (2u^2 - 1)/2(u^2 - 1)$  для коэффициента Пуассона. Поскольку  $\sigma \in [-1, 1/2]$ , то рассматриваются  $x_{ijk}$  такие, что  $u^2 \leq 0,75$ . В таблице приведены только простейшие формулы для корней, остальные легко получить по значениям  $i, j, k$ .



Таблица корней характеристического уравнения (1)

$\sigma$		$u^2$		$i$	$j$	$k$	$x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$	
114/235 <sup>[3]</sup>	0,4851064	7/242*	0,0289256	10	0	11	10/11	0,9090909
55/136 <sup>[3]</sup>	0,4044118	13/81*	0,1604938	8	0	9	8/9	0,8888889
20/69 <sup>[3]</sup>	0,2898551	29/98*	0,2959184 <sup>1)</sup>	6	0	7	6/7	0,8571429
116/441	0,2630385	209/650	0,3215385	11	593/13	5		0,8492168
57/217	0,2626728	103/320	0,321875	9	157/5	4		0,8491074
205/781	0,2624840	371/1152	0,3220486	13	125/2	6		0,849051
22/85	0,2588235	41/126	0,3253968	7	139/7	3		0,8479549
93/368	0,2527173	91/275	0,3309091	12	664/11	5		0,8461192
1/4 <sup>[4]</sup>	0,25	1/3*	0,3333333 <sup>2)</sup>	6	12	3	$2(3 - \sqrt{3})/3$	0,8452995
5/21	0,2380952	11/32*	0,34375	5	11	2	$(5 - \sqrt{11})/2$	0,8416876
328/1455	0,2254296	799/2254	0,3544809	13	1171/23	7		0,8378089
203/923	0,2199350	517/1440	0,3590278	11	179/5	6		0,836115
62/287	0,2160278	163/450	0,3622222	13	701/9	5		0,8349064
114/539	0,2115028	311/850	0,3658824	9	397/17	5		0,8335024
77/365 <sup>[3]</sup>	0,2109589	211/576*	0,3663194	5	0	6	5/6	0,8333333
55/279	0,1971326	169/448	0,3772321	7	95/7	4		0,8290145
11/56	0,1964286	17/45*	0,3777778	40	760	15	$(40 - 2\sqrt{190})/15$	0,8287935
279/1504	0,1855053	473/1225	0,3861224	12	968/25	7		0,8253515
20/119	0,1680672	79/198	0,3989899	5	71/11	3		0,8198068
19/115	0,1652174	77/192	0,4010417	11	179/3	4		0,818895
341/2261	0,1508182	1579/3840	0,4111979	13	631/15	8		0,8142647
29/204	0,1421569	73/175	0,4171429	14	692/7	5		0,8114614
77/552	0,1394928	199/475	0,4189474	8	296/19	5		0,8105965
190/1513	0,1255783	1133/2646	0,4281935	11	775/27	7		0,8060595
377/3212	0,1173724	1229/2835	0,4335097 <sup>3)</sup>	14	1604/35	9		0,8033689
3/28 <sup>[3]</sup>	0,1071429	11/25*	0,44	4	0	5	4/5	0,8
3/35	0,0857143	29/64*	0,453125	3	2	2	$(3 - \sqrt{2})/2$	0,7928932
154/3151	0,0488734	2843/5994	0,4743076	13	1321/37	9		0,7805362
55/1476	0,0372629	683/1421	0,4806474	10	604/29	7		0,7766107
8/533	0,0150094	517/1050	0,492381 <sup>4)</sup>	7	209/21	5		0,7690521
0	0	1/2*	0,5	3	5	1	$3 - \sqrt{5}$	0,7639320
-13/2163	-0,0060102	2189/4352	0,5029871	11	409/17	8		0,7618776
-5/123 <sup>[3]</sup>	-0,0406504	133/256*	0,5195313	3	0	4	3/4	0,75
-5/112	-0,0446429	61/117	0,5213675	4	40/13	3		0,748628
-323/4077	-0,0792249	4723/8800	0,5367045	13	349/11	10		0,7367303
-132/1387	-0,0951694	1651/3038	0,5434496	9	467/31	7		0,7312424
-35/328	-0,1067073	199/363*	0,5482094	8	0	11	8/11	0,7272727
-589/5340	-0,1102996	3259/5929	0,5496711	14	1772/49	11		0,7260373
-35/253	-0,1383399	323/576	0,5607639	5	41/9	4		0,7164063
-496/2825	-0,1755752	3817/6642	0,5746763	11	893/41	9		0,7036714
-99/476	-0,2079832	337/575	0,586087	6	148/23	5		0,6926625
-209/799	-0,2615770	1217/2016	0,6036706	7	61/7	6		0,6746672
-2/7 <sup>[3]</sup>	-0,2857143	11/18*	0,6111111	2	0	3	2/3	0,6666667
-377/1240	-0,3040323	997/1617	0,6165739	8	376/33	7		0,6606441
-615/1817	-0,3384700	3047/4864	0,6264391	9	275/19	8		0,6494463
-935/2548	-0,3669545	2209/3483	0,6342234	10	772/43	9		0,640316
-1349/3451	-0,3909012	6149/9600	0,6405208	11	131/6	10		0,6327385
-1869/4544	-0,4113116	4141/6413	0,6457196	12	1384/53	11		0,6263538
-261/584	-0,4469178	553/845*	0,6544379	8	0	13	8/13	0,6153846
-133/267	-0,4981273	533/800*	0,66625	3	0	5	3/5	0,6
-11/21	-0,5238095	43/64*	0,671875	13	113	4	$(13 - \sqrt{113})/4$	0,5924635
-55/92	-0,5978261	101/147*	0,6870748	4	0	7	4/7	0,5714286
-2/3	-0,6666667	7/10*	0,7	5	5	5	$(5 - \sqrt{5})/5$	0,5527864
-15/17 <sup>[3]</sup>	-0,8823529	47/64*	0,734375	1	0	2	1/2	0,5

Значения  $u^2$  для реальных веществ, рассчитанные по данным [6]: 1) олово (кристалл) – 0,298091, железо – 0,304855; 2) цинк – 0,334012; 3) германий (кристалл) – 0,431349; 4) бериллий – 0,494211.

## Краткие сообщения

В целях оптимизации несложной, но длительной процедуры поиска, установим связь между  $i$ ,  $j$  и  $k$ , подставив в (1) вид искомым корней  $x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$ :

$$u^2 = \frac{1}{16} \left[ x^2 - 7x + 17 + \frac{1}{x-1} \right] = \frac{1}{16} \left[ 17 + \frac{-k^3 - 7ik^2 + (8j + 8i^2)k - 3ij - i^3 + \sqrt{j}(7k^2 - 16ik + j + 3i^2)}{k^2(k-i + \sqrt{j})} \right].$$

Очевидно, что результат будет рациональным числом, если выполнено условие

$$\frac{-k^3 - 7ik^2 + (8j + 8i^2)k - 3ij - i^3}{k-i} = 7k^2 - 16ik + j + 3i^2.$$

Для  $j$  и  $u^2$  в этом случае получаем выражения

$$j = \frac{8k^3 - 16ik^2 + 11i^2k - 2i^3}{7k - 2i}, \quad u^2 = \frac{22k^3 - 22ik^2 + 8i^2k - i^3}{2k^2(7k - 2i)}. \quad (3)$$

Для увеличения списка возможных корней мы ослабим первоначальное требование и будем считать, что  $j$  – неотрицательное рациональное число. Задавая произвольные положительные числа  $i$  и  $k$ , с помощью (3) мы находим корень  $x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$  и соответствующее ему  $u^2$ . Например, для  $i=5$ ,  $k=5$  находим  $j=5$ , что соответствует уже найденному перебором значению (см. таблицу). Для  $i=12$  и  $k=5$  находим  $j=664/11$ , что дает новый корень для  $u^2 = 91/275 \approx 0,331$ . Таким образом мы дополнили таблицу корнями с  $i, k \leq 25$  и  $l, m \leq 10000$ .

Есть еще один корень, содержащий другую степень в выражении  $x = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3 = (8 - \sqrt[3]{152})/3 \approx 0,888$  [4, 5], который соответствует рациональному значению  $u^2 = 1/6$ . Обозначив  $x_{ijk} = (i - \sqrt[3]{j})/k$ , мы провели аналогичное исследование и получили, что рациональные значения для  $u^2$  можно получить только при  $3i = 8k$  и  $j = 152k^3/27$ , что означает его единственность ( $k=1$ ), поскольку при  $k > 1$  значение  $u^2 > 3/4$ .

Полученные результаты могут использоваться на практике для приближенных вычислений. Так, многие горные породы в сейсмологии характеризуются значениями  $u^2$  в диапазоне примерно от 0,16 (песчаник, мел) до 0,37 (гранит, метаморфические породы). Также среди ряда полученных значений, есть близкие к расчетным данным для олова, железа, цинка, германия и берилля (см. сноски к таблице). К сожалению, точных корней, соответствующих  $u^2 < 0,3$  и удовлетворяющих условиям, принятым в постановке задачи, немного, а именно такие значения получаются для многих металлов [6]. Мы можем предположить, что корни в этом диапазоне имеют другую простую форму записи, отличную от предполагаемой в работе. Лучшим будет для таких значений  $u^2$  использовать точное значение корня [2].

### Литература

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
2. Malischewsky, P.G. A Note on Rayleigh-Wave Velocities as a Function of the Material Parameters / P.G. Malischewsky // Geofisica Internacional. – 2004. – Vol. 43, no. 3. – P. 507–509.
3. Pichugin, A. Approximation of the Rayleigh Wave Speed / A. Pichugin // People.Brunel.Ac.Uk (Unpublished draft). – 2008. <http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf>
4. Malischewsky, P.G. Comment to “A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves” by D. Nkemzi [Wave Motion 26 (1997) 199–205] / P.G. Malischewsky // Wave Motion. – 2000. – Vol. 31. – P. 93–96.
5. Mechkour, H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation / H. Mechkour // Proceedings of the 2-nd International Colloquium of Mathematics in Engineering and Numerical Physics (MENP-2) April 22–27, 2002, Bucharest, ROMANIA. – P. 96–104.
6. Кикоин, И.К. Таблицы физических величин. Справочник / И.К. Кикоин. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.

Поступила в редакцию 12 ноября 2023 г.

**Сведения об авторах**

Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1042-0303>, e-mail: [gurevichsi@susu.ru](mailto:gurevichsi@susu.ru).

Кожевников Дмитрий Григорьевич – старший преподаватель, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>, e-mail: [golubev@susu.ru](mailto:golubev@susu.ru).

DOI: 10.14529/mmph240107

## THE ROOTS OF THE RAYLEIGH CHARACTERISTIC EQUATION FOR RATIONAL VALUES OF THE PARAMETER

**S.Yu. Gurevich, D.G. Kozhevnikov, E.V. Golubev**  
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
e-mail: [golubev@susu.ru](mailto:golubev@susu.ru)

**Abstract.** The roots of the Rayleigh characteristic equation for surface waves are obtained under the assumption that the square of the ratio of the velocities of volume waves is a rational number. The exact formulas for the roots contain a minimum of radicals and rational numbers.

**Keywords:** surface waves; Rayleigh wave velocity; roots of the characteristic equation; exact formulas.

### References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity* (3rd ed.). Oxford, England: Butterworth Heinemann, 1986, 204 p.
2. Malischewsky P.G. A Note on Rayleigh-Wave Velocities as a Function of the Material Parameters. *Geofísica Internacional*, 2004, Vol. 43, no. 3, pp. 507–509.
3. Pichugin A.V. Approximation of the Rayleigh Wave Speed. *Unpublished draft*, 2008, <http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf>
4. Malischewsky P.G. Comment to “A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves” by D. Nkemzi [Wave Motion 26 (1997) 199–205]. *Wave Motion*, 2000, Vol. 31, pp. 93–96.
5. Mechkour H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation. *BSG Proceedings* 8, Geometry Balkan Press, 2003, pp. 96–104.
6. Kikoin I.K. *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* (Tables of Physical Quantities. Guide). Moscow, Atomizdat Publ., 1976, 1005 p. (in Russ.).

*Received November 12, 2023*

### Information about the authors

Gurevich Sergey Yur'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1042-0303>, e-mail: [gurevichsi@susu.ru](mailto:gurevichsi@susu.ru).

Kozhevnikov Dmitriy Grigor'evich is Senior Lecturer, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>, e-mail: [golubev@susu.ru](mailto:golubev@susu.ru).

# Информация

## СЕРИЯ «МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА». КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ (К 80-ЛЕТИЮ ЮУрГУ)

### Введение

Публикация результатов исследований ученого – важная составляющая творческого процесса. Автор доводит тем самым до широкой общественности свои достижения и получает возможность обсудить с коллегами вероятные пути дальнейших исследований, устранить имеющиеся неточности и недостатки своей работы. Публикационный процесс является главным механизмом распространения знаний во всех областях человеческой деятельности: в науке, образовании, производстве и в гуманитарной сфере.

Формы передачи научной информации изменялись вместе с развитием технологий ее представления на различных носителях – от глиняных табличек и папирусов до модулей памяти современных компьютеров. Развитие науки и вызванный этим рост объема информации привел к необходимости систематизации научных знаний и их «упаковке» в «блоки» по принадлежности к тому или иному виду научной деятельности – к определенной дисциплине или научному направлению. Один из первых научных журналов был издан Лондонским королевским обществом в 1665 году под названием *Philosophical transactions*<sup>1</sup>. Выпуск этого журнала решил и другую задачу – обеспечил доступ к знаниям не только членам упомянутого общества, но и всем, кто в этих знаниях был заинтересован. Такая форма фиксации, накопления и распространения знаний постепенно развивалась и вот уже более 200 последних лет является основной формой обмена информацией как в сообществах ученых, так и за пределами этих сообществ – с бизнесом, общественными организациями и государственными структурами.

В настоящее время наряду с «классическими» журналами существуют и другие формы хранения и обмена научной информацией: препринты, тематические сборники трудов, тезисы докладов и труды научных конференций и т. п.

### Предшественники

Первые три тематических сборника научных трудов появились в ЮУрГУ (тогда ЧПИ) в 1953 году и были посвящены исследованиям в области металлургии и машиностроения. Вслед за ними стали появляться сборники практически по всем направлениям научной деятельности университета, как техническим (по большей части), так и гуманитарным. К 1980 году общее число сборников превысило 250, и в них достаточно полно был представлен научный портрет нашего университета. Среди статей в этих сборниках нередко встречались и статьи, авторами или соавторами которых были представители естественнонаучных и математических кафедр. Конечно, в своем большинстве это были исследования прикладного характера, мотивированные какой-либо технической проблемой, для решения которой нужно было использовать специфические математические или физические подходы.

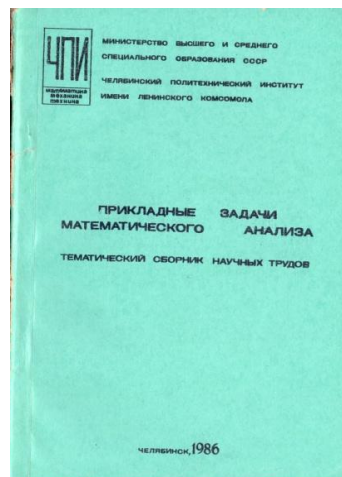
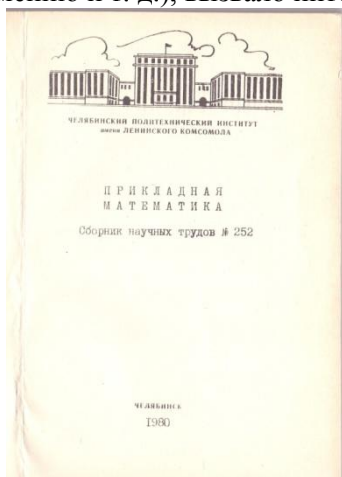
В то же время к 60-м годам прошлого столетия в ЧПИ уже сложился коллектив представителей точных и естественных наук (математики, механики, физики, химии), который не только обеспечивал процесс обучения этим наукам студентов инженерных и инженерно-экономических специальностей и поддержку научных исследований их преподавателей, но и занимался исполнением своих «прямых обязанностей» – развитием упомянутых наук как таковых вне связи с учебным процессом или техническими задачами. Такие исследования не укладывались в рамки тематических сборников, издаваемых факультетами и кафедрами института, особенно если они касались «чистой» математики (топологии, алгебры, функционального анализа и пр.) или разделов физики, польза от которых в народном хозяйстве не очевидна (теория относительности, квантовая механика, статистическая физика). Кроме того, публикации в «непрофильных» изданиях не доходили до своего компетентного читателя и не получали должного отклика со стороны научной общественности.

К концу 70-х годов назрела необходимость в создании университетской профессиональной публикационной среды.

<sup>1</sup> Стоит отметить, что к философии в современном понимании этого слова он не имел (и не имеет) никакого отношения.

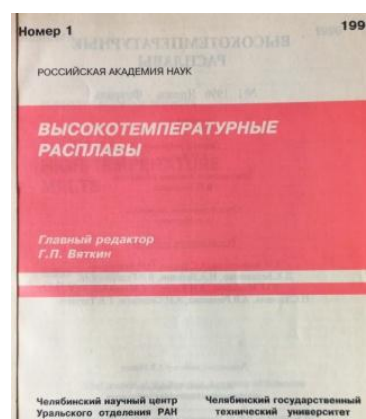
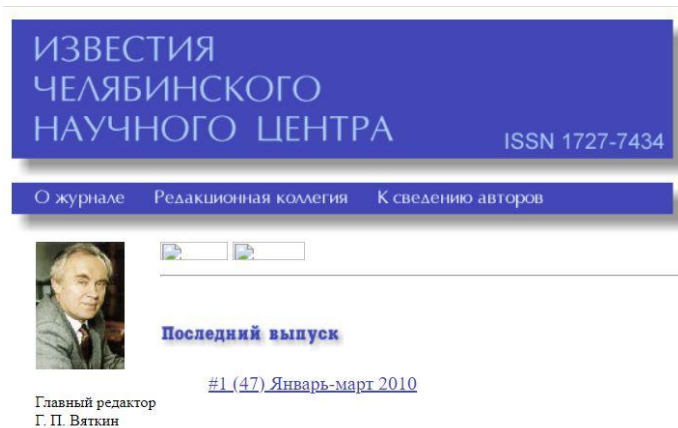
Первая такая попытка была осуществлена в 1979 году, когда НИЧ ЧПИ запланировала издание сборника математических трудов сотрудников вуза под названием *ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА. Сборник научных трудов № 252 (под редакцией к.ф.-м.н. доцента Л.М. Белякова, заведовавшего в то время кафедрой высшей математики № 2)*. В формировании сборника приняли участие 24 сотрудника различных кафедр ЧПИ. Тематика работ была обширной – охватывала проблемы анализа, алгебры, геометрии, топологии, теории управления, вычислительной математики и т. п. Работы, включенные в сборник, не рецензировались, но был получен положительный отзыв от коллег из ЧГПИ на сборник в целом.

Издание вышло в свет в 1980 г., было отреферировано в РЖ в разделе «Математика и механика» и, несмотря на достаточно непритязательное полиграфическое оформление (ротапринтная печать, формулы в текст вписывались от руки, причем каждый автор делал это по своему собственному разумению и т. д.), вызвало интерес у коллег.



Следующая попытка опубликовать результаты своих исследований была предпринята сотрудниками математических кафедр ЧПИ в 1984 году. Совет по математике ЧПИ направил соответствующую петицию, поддержанную научно-исследовательской частью ЧПИ, в РИО ЧПИ, и издание было запланировано на 1986 год. В формировании сборника, которому было присвоено название *ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. Тематический сборник научных трудов (под редакцией доц. В.И. Заляпина)*, приняло участие более 20 сотрудников. Сборник рецензировался, рецензентами выступили ставший к этому моменту доктором наук и профессором БашГУ С.И. Пинчук и доцент ЧелГУ В.Н. Павленко. Издание это было столь же бедно оформлено полиграфически, как и предыдущее, но здесь уже присутствовал индекс УДК, работы реферировались и авторефераты работ были опубликованы в РЖ.

В начале 90-х годов был образован Челябинский научный центр Уральского отделения РАН. Председателем президиума центра был избран член-корреспондент РАН Герман Платонович Вяткин (одновременно ректор ЧГТУ (ЮУрГУ)), а Главным ученым секретарем назначен Гельчинский Борис Рафаилович (одновременно профессор кафедры Общей и теоретической физики ЧГТУ), обладавший большим опытом научной, организационной и инновационной работы в структурах АН СССР, РАН и международных организациях. По инициативе Б.Р. Гельчинского и при активной поддержке Г.П. Вяткина в 1995 году были учреждены и должным образом лицензированы два совместных (ЧНЦ УрО РАН и ЧГТУ) научных журналов на электронных носителях «*Высокотемпературные расплавы*» и «*Динамика, прочность и износостойкость машин*», первые выпуски которых вышли в свет в начале 1996 г. Вскоре вслед за этими журналами (в 1997 году) появились «*Известия Челябинского научного центра*», где в отличие от только что упомянутых изданий публиковались работы ученых Челябинской области по самой широкой тематике – как естественнонаучной, так и гуманитарной. Редакционная коллегия «*Известий*» состояла из авторитетных, активно работающих ученых, представляющих широкий спектр научных направлений – от математиков, физиков и химиков до археологов, медиков и педагогов. Благодаря Интернету в то время в мире уже появились журналы на электронных носителях, в России же издания такого рода были одними из первых. Журнал выходил четыре раза в год и был рецензируемым изданием.



Он выходил с 1997 по 2010 год, после чего прекратил свое существование<sup>2</sup>. Следует отметить, что ученые самых разных направлений охотно отдавали свои работы для публикации в этом издании.

### Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Физика. Химия»

В связи с обретением нашим вузом статуса классического государственного университета по примеру ведущих университетов Российской Федерации было решено начать издание многопрофильного научного журнала для представления широкой общественности результатов научных исследований сотрудников вуза. Журнал получил название Вестник ЮУрГУ, и каждое значимое научное направление исследований было в нем представлено отдельной серией. Естественнонаучное направление представляла серия «Математика, физика, химия», первый выпуск которой вышел в свет в 2001 году.

Редколлегию серии возглавили проф. Г.Г. Михайлов (ответственный редактор) и проф. В.П. Бескачко (отв. секретарь). Физика была представлена профессорами С.Ю. Гуревичем и В.П. Бескачко, математика – проф. В.И. Заляпиным и проф. Л.Д. Менихесом, химия – проф. А.А. Лыкасовым и проф. А.Г. Рябухиным. С 2003 года работы, претендующие на публикацию, начали проходить обязательный этап рецензирования, были сформулированы правила для авторов. В 2005 году в состав редколлегии был введен доцент, к.ф.-м.н. Е.В. Голубев, который стал бессменным ответственным секретарем серии и остается в этой должности и по сей день. В том же 2005 году ответственным редактором стал В.П. Бескачко. По 2006 год журнал выпускался, только когда набиралось достаточное количество статей. Регулярный выход (2 выпуска в календарном году) начался с 2007 года, тогда же журнал был включен в каталог «Пресса России» и начал распространяться по подписке. Серия «Математика, физика, химия» по 2006 год была рекомендована ВАК для публикации результатов диссертационных исследований в области математики, физики и химии (с июля 2007 года – только по физике). Всего было подготовлено и издано 11 выпусков этой серии. Серия эта издавалась вплоть до 2009 года, всего 12 выпусков, содержащих 293 работы.



<sup>2</sup> Скорее всего потому, что к этому моменту появилось несколько авторитетных печатных изданий (в первую очередь Вестник ЮУрГУ и Вестник ЧелГУ), которые для авторов оказались более привлекательными по наукометрическим резонам.

## Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». Начало

В конце 2009 года на недавно образованном Химическом факультете было решено выпустить серию *Химия*, в связи с чем наш журнал стал более узкоспециализированным.

Было принято решение об издании новой серии, посвященной публикации работ физико-математической тематики, к которой были отнесены и работы по механике и прикладной механике. Новой серии было дано имя *Вестник ЮУрГУ. Серия Математика. Механика. Физика*, под которым она выходит по настоящее время. Соответственно, претерпела изменения редколлегия серии – отсюда были выведены химики и введены механики, профессора О.С. Садаков, С.Б. Сапожников и А.О. Чернявский. Нумерация выпусков была обновлена, и выпуски новой серии стали нумероваться естественным образом начиная с № 1.

До 2013 года серия выходила с периодичностью два выпуска в год. Первые три выпуска (1-й – 2009, 2-й, 3-й – 2010) не входили в список ВАКовских изданий, однако с октября 2010 года серия была вновь включена в упомянутый список. Начиная с 7-го выпуска (2012), в журнал была добавлена рубрика *Краткие сообщения*.

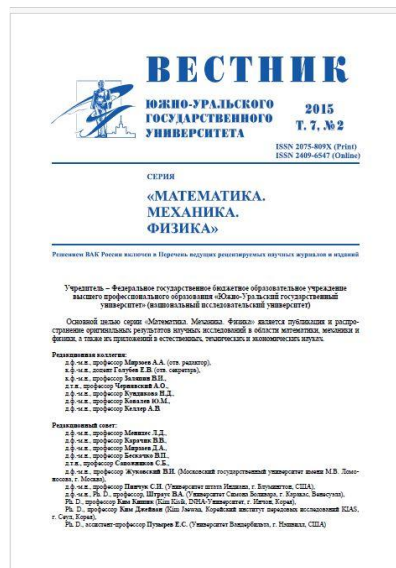
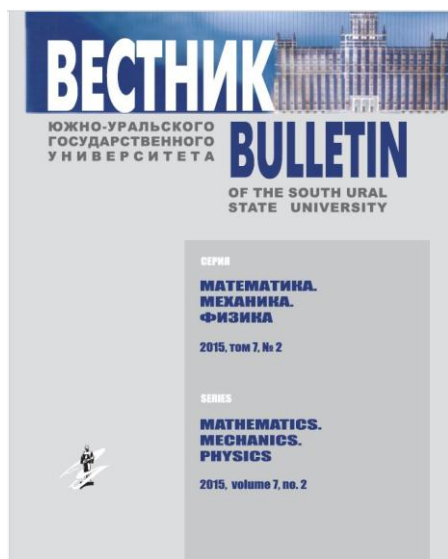
## Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». Обновление

С 2013 года нумерация выпусков серии была изменена – теперь указывался номер тома Вестника, привязанный к году выпуска (2013 – том 5, 2014 – том 6 и т.д.) и далее (начиная с № 1) – номера выпусков серии в этом году.

В этом же году (начиная со второго выпуска) претерпела изменения редакционная коллегия серии. Ответственным редактором был назначен проф. А.А. Мирзоев, а редколлегия была расширена за счет введения в неё профессоров Д.А. Мирзаева, Н.Д. Кундиковой, Ю.М. Ковалева и А.В. Келлер.

Поскольку в это время повсеместно были повышены требования к наукометрическим параметрам изданий, были приняты некоторые меры по продвижению нашего журнала в этой области (приказ ректора от 8 мая 2013 года). Стало практиковаться добавление к тексту работы приставочной информации на английском языке, было начато сотрудничество с общероссийским математическим порталом MathNet, который с 2014 года стал публиковать все выпуски нашего издания. Кроме того, был организован *международный редакционный Совет серии*, в который вошли профессор В.И. Жуковский (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ), профессор В.В. Карачик (ЮУрГУ, Челябинск, РФ), профессор С.И. Пинчук (Университет Индианы, Блумингтон, США), профессор В.А. Штраус (Университет Симона Боливара, Каракас, Венесуэла), профессор Ким Кишик (INHA-university, Инчон, Корея), профессор Ким Джейван (KIAS, Сеул, Корея) и профессор Е.С. Пузырев (Университет Вандербильта, Нэшвилл, США).

С 2014 года серия *Математика. Механика. Физика* стала выходить с периодичностью 4 выпуска в год. Сформировался и полиграфический дизайн серии, соответствующий дизайну Вестника ЮУрГУ.



## Информация

### Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». Современность

В 2015 году (приказ ректора № 139 от 22 апреля 2015 г.) ответственным редактором<sup>3</sup> серии становится д.ф.-м.н. С.А. Загребина, предпринявшая меры по упорядочению функционирования редколлегии и редакционного Совета, согласованию и разделению их полномочий. С тех пор и по настоящее время в редколлегию серии входят: С.А. Загребина (главный редактор), Е.В. Голубев (отв. секретарь, отвечающий за верстку, подготовку макета журнала и связь с авторами), В.П. Бескачко (отв. за рецензирование работ по физической тематике), В.И. Заляпин (отв. за рецензирование работ математической тематики), Ю.М. Ковалев (отв. за рецензирование работ механической тематики). Редколлегия предпринимает меры по развитию и совершенствованию функционирования редакционного Совета, привлекая для работы в Совете высококвалифицированных и авторитетных специалистов в области математики, механики и физики. В разные годы в редакционный Совет серии входили член-корреспондент РАН, проф. Б.Я. Зельдович (Университет Центральной Флориды, г. Орlando, США), проф. Г.Л. Бровко (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ), профессор А.И. Короткий (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург), профессор И. Ферпуст (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия), профессор Н.К. Равшанов (Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан), профессор А.В. Богомолов (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва), профессор В.Д. Бучельников (Челябинский государственный университет, г. Челябинск), профессор Гуидетти Д. (Болонский университет, г. Болонья, Италия), профессор И.В. Заляпин (Университета Невады, г. Рино, США), профессор С.В. Зелик (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания), профессор В.В. Меньших (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж), профессор Л.В. Уткин (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург) и др.

Основной целью серии *Математика. Механика. Физика* редакционная коллегия и редакционный совет серии считают публикацию оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

### Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». Тематика публикаций

За свою недолгую историю журнал приобрел репутацию серьезного и стабильного научного издания и пользуется известностью среди российских и зарубежных авторов, публикуя оригинальные статьи, обзоры и краткие сообщения по всему спектру физико-математических наук.

Тематика публикуемых журналом работ весьма обширна. Некоторое представление о ней можно составить по приведенному ниже краткому перечню.

**МАТЕМАТИКА.** Теория чисел. Алгебра. Топология. Геометрия. Математический анализ. Теория функций действительного переменного. Теория функций комплексных переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения с частными производными. Интегральные уравнения. Дифференциальные и интегральные уравнения математических моделей естественных наук. Вариационное исчисление и математическая теория оптимального управления. Функциональный анализ. Вычислительная математика. Численные методы. Теория вероятностей и математическая статистика.

**МЕХАНИКА.** Математические методы механики. Общая механика. Механика точки, системы и твердого тела. Колебания механических систем. Механика жидкости и газа. Идеальная несжимаемая жидкость. Теория волн и колебания жидкости. Вязкая жидкость. Нелинейные явления и турбулентность. Пограничный слой. Газовая динамика. Тепломассоперенос. Механика деформируемого твердого тела. Теория упругости. Колебания упругих тел. Устойчивость. Пластичность. Ползучесть. Реология. Теория дислокаций. Разрушение. Магнитная гидродинамика.

**ФИЗИКА.** Математические методы теоретической физики. Квантовая механика. Физика газов и жидкостей. Термодинамика и статистическая физика. Физика твердых тел и теория конденсированного состояния. Колебания и волны. Оптика и лазерная физика. Акустика, упругие колебания и волны. Механика. Механика жидкости, газа, деформируемого твердого тела. Теория упругости, прочность, пластичность и ползучесть.

<sup>3</sup> С 2017 года – главный редактор серии, приказ ректора № 322 от 04.09.2017.



**Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». Планы**

В настоящее время журнал включен в список ВАК, имеет категорию К2, индексируется в специализированной базе данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), в Научной Электронной Библиотеке (РУНЭБ) (elibrary.ru), в сети MathNet, в КиберЛенинке, в БД Russian Science Citation Index (RSCI), в БД zbMATH Open (Zentralblatt MATH), в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям Ulrich's Periodicals Directory.

Межведомственная рабочая группа<sup>4</sup> Минобрнауки создала т. н. *белый список* научных журналов, публикация в которых признается, с точки зрения создателей, достойной и вызывающей доверие. *Белый список* – перечень наиболее авторитетных научных журналов, в него входят около 30 тысяч российских и международных изданий. Предполагается его использовать для задач мониторинга и оценки публикационной активности российских ученых. Все издания, включенные в список, распределены по категориям – с первой по четвертую в порядке престижности издания. Утвержденное рабочей группой ранжирование должно стать стимулом для российских исследователей публиковаться в отечественных научных изданиях и повысить уровень конкуренции и качества журналов. Наш журнал вошел в этот список и получил четвертую категорию. Первый и второй уровни смогли получить сегодня только 350 отечественных изданий. Первоочередной задачей редколлегии и редсовета журнала на ближайшие годы должна стать задача повышения престижности публикаций нашего издания.

Издание *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»* является молодым, динамично развивающимся журналом, публикующим научные работы российских и зарубежных исследователей. Всего к настоящему моменту выпущено 49 выпусков серии «Математика. Механика. Физика», опубликовано 584 работы. В январе 2024 года выходит юбилейный – пятидесятый – выпуск нашего журнала.

Поздравляем авторов и читателей с этим знаменательным событием!

*В.П. Бескачко, Е.В. Голубев, С.А. Загребина, В.И. Заляпин*

---

<sup>4</sup> В Межведомственную рабочую группу входят более 30 человек, в том числе представители общественно-экспертного совета по национальному проекту «Наука и университеты», Российской академии наук, Российского центра научной информации (ранее РФФИ), представители крупнейших российских научных институтов, университетов и реального сектора экономики.

## ПАМЯТИ ТАТЬЯНЫ ЮРЬЕВНЫ ВИНТИШ



27 декабря 2023 года ушла из жизни Татьяна Юрьевна Винтиш – выдающийся методист, талантливый преподаватель математических дисциплин в системе высшего образования, популяризатор математического образования в Челябинской области, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации. Татьяна Юрьевна была много лет членом предметных комиссий по математике при проведении государственной итоговой аттестации в Челябинской области, за многолетнюю и добросовестную работу она была награждена медалью ФГБОУ ВПО «ЧПУ» «За трудовые заслуги» III степени.

Коллеги, бывшие ученики выражают свои искренние *соболезнования* родным, близким. Глубоко скорбим о невозполнимой утрате. Память о Татьяне Юрьевне Винтиш навсегда сохранится в сердцах тех, кому посчастливилось знать этого талантливого педагога и душевного человека.

*С.А. Загребина*

## ПАМЯТИ ВАЛЕНТИНА ФЕДОРОВИЧА КУРОПАТЕНКО

18 декабря 2023 года исполнилось бы 90 лет со дня рождения Валентина Федоровича Куропатенко, крупного учёного атомной отрасли, доктора физико-математических наук, профессора, специалиста в области высокоточных моделей поведения сплошных сред и методов математического моделирования динамических процессов в них.

Куропатенко Валентин Федорович родился 18 декабря 1933 года в г. Речица Гомельской области. В 1951 году поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. После окончания университета он был направлен на работу в НИИ-1011, в математическое отделение, возглавляемое Николаем Николаевичем Яненко.

Работа в НИИ-1011 (ныне это Российский федеральный ядерный центр всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е.И. Забабахина) началась в августе 1956 года со стажировки в ОПМ МИАН (отделение прикладной математики математического института им. В.А. Стеклова, теперь ИПМ РАН им. М.В. Келдыша). В ОПМ в это время уже работала отечественная ЭВМ «СТРЕЛА», для которой сотрудниками ОПМ были созданы программы, позволяющие рассчитывать характеристики ядерных зарядов (ЯЗ).

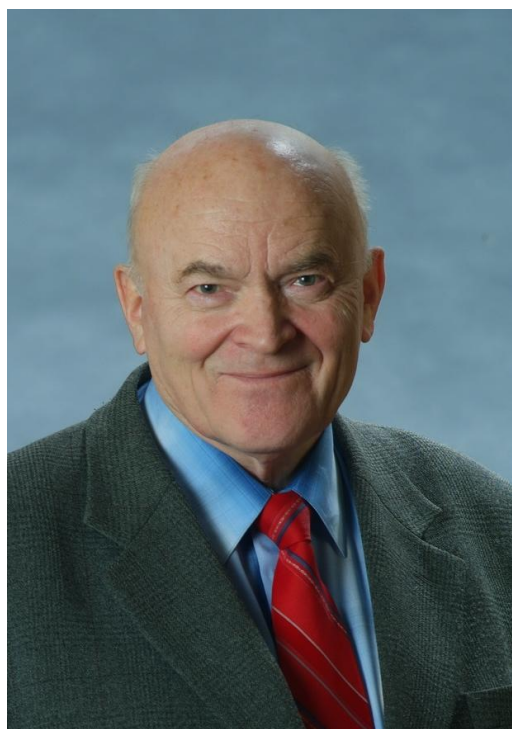
ОПМ можно назвать второй после университета альма-матер для молодых специалистов НИИ-1011, с которыми сотрудники ОПМ щедро делились своими знаниями и опытом. Куропатенко попал в отдел газодинамики, возглавляемый К.А. Семендяевым. Яркий учёный, отмеченный тремя орденами Ленина, лауреат Сталинской премии, один из авторов метода характеристик, он был ещё и мудрым учителем и сумел пробудить в своих подопечных большой интерес к сложным проблемам расчёта ядерных зарядов.

После стажировки в декабре 1956 года Валентин Фёдорович приехал на Урал, вооружённый знанием методик и технологии расчёта по методу Годунова газодинамической стадии работы ЯЗ в одномерной постановке. Изучая публикации в советских и зарубежных журналах и анализируя под руководством Н.Н. Яненко результаты расчётов слоистых сферических систем, Куропатенко обнаружил рост энтропии при схождении ударной волны к центру. Поиски новых подходов, которые позволили бы убрать этот недостаток, привели Валентина Фёдоровича к созданию нового однородного метода расчёта газодинамической стадии работы ядерных зарядов.

Метод Куропатенко, основанный на оригинальном механизме диссипации энергии, обладал преимуществами по сравнению с известными в мире методами расчёта ударных волн (методы Д. Неймана–Рихтмайера, П. Лакса и С.К. Годунова) и стал широко использоваться для практических расчётов ЯЗ.

В 1964 году В.Ф. Куропатенко защитил кандидатскую диссертацию и в 1965 году был назначен начальником математического отдела. Опыт проведённых исследований, тесное общение с Н.Н. Яненко и с физиками-теоретиками привели Валентина Фёдоровича к пониманию того, что общая точность расчётов конструкции, особенно расчётов первого узла ядерных зарядов, определяется:

- точностью численного метода решения системы законов сохранения для конденсированного состояния;
- точностью уравнений состояния взрывчатые вещества – продукты взрыва, конструкционных и радиоактивных материалов;



*Для духовного развития необходимы три условия: большие цели, большие препятствия, большие примеры.*

*В.Ф. Куропатенко*

## Информация

---

– точностью описания физических процессов, происходящих в материалах ядерных зарядов (детонация, откольное разрушение, проявление тензорных свойств среды).

Методично, шаг за шагом Валентин Фёдорович развернул широким фронтом работы в отделе по всем этим направлениям.

В 1965 году В.Ф. Куропатенко разработал неоднородный метод расчета нестационарных движений сплошных сред с ударными волнами, волнами разрежения, контактными разрывами и фазовыми переходами, в котором выделяются все разрывы. Метод до сих пор не имеет мировых аналогов. Комплекс программ, использующих новый неоднородный метод и получивший название «ВОЛНА» [1], стал известен не только в институте, но и за его пределами.

5 августа 1963 года в Москве министрами иностранных дел Великобритании, Советского Союза и Соединённых Штатов Америки был подписан договор о запрещении испытаний ядерного оружия в атмосфере, под водой и в космосе. Осталась единственная возможность проведения испытаний – подземные взрывы. С марта 1964 года в СССР начались регулярные подземные испытания.

Не все методики определения результатов воздушных испытаний оказались применимы для взрывов под землёй. Появилась необходимость в разработке методов определения мощности подземного ядерного взрыва.

Для подземных взрывов в Советском Союзе использовался метод грунтового шара (МГШ), основанный на связи энергии взрыва с интенсивностью ударно-волновых течений в горной породе, окружающей место взрыва. Расчёты по комплексу «ВОЛНА» были положены в основу МГШ, с помощью которого и определялась мощность ядерного заряда при подземном испытании. За создание этого метода В.Ф. Куропатенко в составе авторского коллектива был удостоен звания лауреата Государственной премии СССР 1968 года.

В 1974 году между СССР и США были заключены так называемые пороговые договоры об ограничении мощности испытываемых под землёй ядерных зарядов. Американская сторона высказывала сомнение в возможности технических средств контроля за выполнением договора об ограничении мощности. В результате ряда совещаний было принято решение о проведении натурного эксперимента для отработки механизмов контроля пороговых договоров СССР и США. В августе–сентябре 1988 года на Невадском и Семипалатинском полигонах были проведены совместные эксперименты (СЭК) для контроля мощности подземных взрывов.

Реализация неоднородного метода Куропатенко обеспечила необходимую точность при измерениях основного параметра ЯЗ в ходе подземных испытаний. Уточнённый расчёт параметров ударной волны подземного ядерного взрыва при интерпретации данных по динамике взрывной ударной волны в ходе СЭК проводился с помощью комплекса «ВОЛНА». Предложенные В.Ф. Куропатенко методы построения уравнений состояния были эффективно использованы для построения УРС-грунтов в СЭК.

В программный комплекс «ВОЛНА» было внедрено переданное американской стороной табличное уравнение состояния SESAM. Проведённые с ним расчёты позволили повысить точность оценки параметров ударной волны по американской технологии, которая оказалась недостаточной. Фактически СЭК продемонстрировал, что, несмотря на огромное преимущество американцев в вычислительных мощностях, российские теоретические подходы им не уступают, а математические модели и методы расчётов, предложенные В.Ф. Куропатенко, оказались более точными и эффективными.

Интересные направления работ отдела В.Ф. Куропатенко возникли после прямых контактов с предприятиями военно-промышленного комплекса (ВПК). При расчёте механического импульса, возникающего при разогреве преграды под действием излучения, в этих организациях и в ряде институтов АН СССР использовались инженерные методики. Руководство ВНИИТФ признало необходимость внедрения более точной методики. Поэтому начались работы по внесению новых возможностей в программу «ВОЛНА». Разогрев преграды брался из расчётов методом Монте-Карло по программе РАФ. Получившийся в результате комплекс «РАФ плюс ИМПУЛЬС», позволяющий рассчитывать ударно-волновые процессы в преграде под воздействием излучения в весьма точной постановке, был передан в несколько организаций ВПК.

Эта работа получила серьёзное продолжение в начале 80-х годов. При 12 ЦНИИ Министерства обороны был создан Межведомственный координационный научно-технический совет

(МКНТС). По инициативе В.Ф. Куропатенко в рамках межведомственной темы «Персей-80» был создан комплекс методик и программ «Приз», включающий расчёты ударно-волновых процессов в преграде под воздействием излучения в уточнённой постановке. Комплекс «Приз» был утверждён МКНТС в качестве нормативных технических материалов, обязательных для исполнения на предприятиях Министерств среднего и общего машиностроения и АН СССР при проведении расчётов на завершающей стадии разработки ЯЗ.

С началом «перестройки» осложнилась общая обстановка и в стране, и в институте: снижались объёмы гособоронзаказа, по линии государственного бюджета финансирование было сокращено, средства поступали нерегулярно, в течение длительного времени сотрудники не получали зарплату, не было средств на модернизацию оборудования, появилась реальная угроза ухода специалистов.

Именно в этой кризисной ситуации собрание коллектива математического отделения РФЯЦ–ВНИИТФ в декабре 1988 года выбрало Валентина Фёдоровича Куропатенко своим руководителем.

После избрания начальником отделения главной целью В.Ф. Куропатенко стало не просто сохранение математического коллектива в условиях перестройки и катастрофического снижения финансирования, но и развитие вычислительной базы и разворачивание новых направлений работ. Оптимизм и здравый смысл при выборе решений проблем, присущие Валентину Фёдоровичу, помогали ему находить силы справляться с текущими делами в отделении и продолжать личную научную работу.

Отрывая время от сна и отдыха, он уже два года работал совместно с сотрудниками ВНИИЭФ Б.Л. Глушаком и С.А. Новиковым над написанием монографии «Исследование прочности материалов при динамических нагрузках», выпуск которой предполагался в издательстве «Наука» Сибирского отделения АН СССР. Само издательство тоже переживало не лучшие времена, фактически бедствовало, но благодаря редактору выпуска Л.П. Голышевой и поддержке директора ИТПМ академика В.М. Фомина книга была издана в 1992 году [2]. Она и сегодня у многих сотрудников ВНИИТФ и ВНИИЭФ является настольной.

Несмотря на большую загруженность решением административных задач, Валентин Фёдорович не оставлял без внимания научную работу. Его ученики достойно продолжали развитие направлений, которые им были сформулированы: велись работы по уравнениям состояния, расширялась предложенная Валентином Фёдоровичем кинетическая модель релаксации напряжений в сплошных и пористых твёрдых телах, развивался двумерный комплекс, совершенствовались разностные схемы в программах.

Понимая, что учёт в математических программах сложного внутреннего строения и взаимного влияния компонентов гетерогенных материалов является необходимым, Валентин Фёдорович начал работать над созданием моделей многокомпонентных сред. В моделях неравновесных многокомпонентных сред В.Ф. Куропатенко предложил новую универсальную форму обмена импульсом и энергией между компонентами. Созданные им модели позволяют описывать тиксотропию многокомпонентных сред. Им получено также эволюционное уравнение для объёмных концентраций, которое вместе с уравнением состояния замыкает систему уравнений без каких-либо ограничений на агрегатное или фазовое состояние компонент. Для понимания ударно-волновых процессов в многокомпонентных многофазных средах В.Ф. Куропатенко построены аналитические решения задач о распространении волн разрежения и ударных волн в двухкомпонентной среде. Построены также аналитические решения о разрушении мгновенно прогретого материала, о разрушении вещества при взаимодействии двух волн разрежения, о кумуляции энергии при схлопывании полостей в сжимаемых жидкостях, об ударной волне, сходящейся к оси или центру симметрии в сосуде с непроницаемой стенкой.

29 февраля 1996 г. математическое отделение приказом директора ВНИИТФ было расформировано. В.Ф. Куропатенко был переведён на должность главного научного сотрудника научно-теоретического отделения 1 (НТО-1), где он работал до конца своих дней. В этот период своей деятельности он развивал теорию многокомпонентных многоскоростных многофазных течений, выступал с докладами на международных и российских конференциях, работал с молодыми сотрудниками отделения.

## Информация

---

В.Ф. Куропатенко уделял большое внимание подготовке научных кадров. Он был прекрасным педагогом и наставником. Умение рассказывать о довольно сложных вопросах понятным языком – большое искусство, и Валентин Фёдорович владел этим искусством мастерски. Его учениками защищено 14 кандидатских и две докторские диссертации. В течение продолжительного времени он читал курс лекций «Методы решения задач механики сплошной среды» в отделении № 6 МИФИ. С 1992 год работал (по совместительству) профессором в ЧелГУ, а позднее – в ЮУрГУ. Продолжая читать лекции в ЧелГУ и ЮУрГУ, Валентин Фёдорович выпускает две монографии: «Модели механики сплошных сред» (2007) [3] и «Основы численных методов механики сплошной среды» в соавторстве с Е.С. Шестаковской (2017) [4].

Во многих НИИ, университетах, предприятиях Росатома и Министерства обороны В.Ф. Куропатенко был известен как строгий, но справедливый и доброжелательный оппонент. Широкая эрудиция позволяла ему глубоко разобраться в представленной диссертации и сделать объективную оценку работы. Он был оппонентом по 42 диссертациям, 30 из которых составляли диссертации на соискание степени доктора наук. В его активе более 250 открытых публикаций, в том числе 7 монографий и глав в монографиях, и более 180 закрытых специальных научно-исследовательских отчётов.

В.Ф. Куропатенко был постоянным экспертом Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Российского научного фонда (РНФ) по математике, механике, информатике.

В.Ф. Куропатенко – доктор физико-математических наук (1977), заслуженный деятель науки Российской Федерации (2002), член Национального комитета по теоретической и прикладной механике (2004), действительный член Международной академии информатизации (1993) и Петровской академии наук и искусств (1995), почётный гражданин города Снежинска. Награждён орденом Трудового Красного Знамени, медалями.

В 2013 году по инициативе самого Валентина Фёдоровича был создан сайт <http://kurapatenko.ru/>, на котором аккумулируются все его открытые научные труды, интервью, воспоминания, биографические сведения и видеоматериалы. Он полагал, что это будет удачная современная форма передачи его идей и накопленных знаний молодым учёным, которая поможет им найти новые подходы к решению научных и жизненных проблем.

В 2021 году увидела свет книга «Жизнь на гребне «ВОЛНЫ», в которую вошли воспоминания и рассказы многих коллег и учеников, родных и друзей, создающие яркий образ и самого Валентина Куропатенко, и оживляя годы становления и возмужания Российского федерального ядерного центра «Всероссийского НИИ технической физики». Книга доступна для прочтения в электронной библиотеке Истории Росатома: [http://elib.biblioatom.ru/text/kurapatenko\\_zhizn-nagrebne-volny\\_2021/go,1/?bookhl=](http://elib.biblioatom.ru/text/kurapatenko_zhizn-nagrebne-volny_2021/go,1/?bookhl=)

В 2017 году Валентин Фёдорович Куропатенко завершил свой земной путь, но он оставил богатое научное наследие, которое будут развивать его ученики и ученики его учеников во многих поколениях. И это лучшая память о В.Ф. Куропатенко, как о Человеке, Учёном, Патриоте – достойном Гражданине своей Родины!

*С.А. Загребина, Н.Л. Клиначева, Ю.М. Ковалев, Э.С. Куропатенко, И.Р. Макеева, В.К. Мустафин, Г.А. Свиридюк, Е.С. Шестаковская*

### Литература

1. Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, В.И. Кузнецова, Г.В. Коваленко и др. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1989. – Вып. 2. – С. 9–25.
2. Глушак, Б.Л. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках / Б.Л. Глушак, В.Ф. Куропатенко, С.А. Новиков. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1992. – 291 с.
3. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Изд-во Челябинского государственного университета, 2007. – 303 с.
4. Куропатенко, В.Ф. Основы численных методов механики сплошной среды / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2017. – 253 с.

## ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: [mmph@susu.ru](mailto:mmph@susu.ru)

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

## СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК  
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Серия  
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»  
Том 16, № 1  
2024

16+

Редактор *С.И. Уварова*  
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 29.01.2024. Дата выхода в свет 02.02.2024.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,37.

Тираж 500 экз. Заказ 9/26. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.