

ВЕСТНИК



ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2024
Т. 16, № 2

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

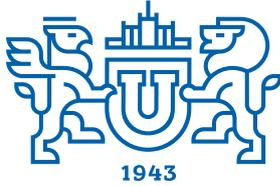
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гундетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

SERIES

2024

Vol. 16, no. 2

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Yu.M. Kovalev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation

G.L. Brovko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy

V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation

S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom

A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea

Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea

N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation

S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America

Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America

N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

A.V. Trukhanov, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium

V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

ДИЛЬМАН В.Л. Функциональные уравнения как математические модели задач сопряжения с циклическим сдвигом на сложных кривых	5
КАПУСТЯН С.Г., МЕЛЬНИК Э.В. Системный анализ требований и оптимизация состава группы роботов в задаче мониторинга окружающей среды.....	12
КОСТЮКОВ В.А., МЕДВЕДЕВ И.М., МЕДВЕДЕВ М.Ю., ПШИХОПОВ В.Х. Численное моделирование роевого алгоритма планирования пути в двумерной некартографированной среде	26
МЕЩЕРЯКОВ Р.В., ШИРОКОВ А.С. Постановка задачи гетерогенного группового взаимодействия роботов при решении задач умного сада.....	41
РОНЖИН А.Л., ЛЕ В.Н., ШУВАЛОВ Н. Оптимизация технологической карты допустимых системотехнических решений задачи видеоаналитики аквакультуры	50
ТАБАРИНЦЕВА Е.В. О решении нелокальной обратной задачи для параболического уравнения	59
ТУРСУНОВ Д.А., САДИЕВА А.С. Асимптотика решения одной задачи Валле-Пуссена с нестабильным спектром.....	72

Физика

SOKOLOVSKIY V.V., BUCHELNIKOV V.D., CONG D. Magnetic and Structural Properties of All- <i>d</i> Metal Mn-Ni-Ti Heusler Alloys	78
КОВАЛЕВ Ю.М., ШЕСТАКОВ М.А. Уравнения состояния для расчета температур ударно-волнового сжатия молекулярных кристаллов.....	86

CONTENTS

Mathematics

DIL'MAN V.L. Functional Equations as Mathematical Models of Cyclic Shift Coupling Problems on Complex Curves	5
KAPUSTYAN S.G., MELNIK E.V. Conceptual Aspects of Organizing the Operation of Mobile Components of Environmental Monitoring Systems.....	12
KOSTYUKOV V.A., MEDVEDEV M.Yu., MEDVEDEV I.M., PSHIKHOPOV V.Kh. Simulation of Swarm Algorithms for Path Planning in a Two-Dimensional Non-Mapped Environment.....	26
MESHCHERYAKOV R.V., SHIROKOV A.S. Setting the Task of Heterogeneous Group Interaction of Robots in Solving Smart Garden Tasks.....	41
RONZHIN A.L., LE V.N., SHUVALOV N. Optimization of Technological Map of Acceptable System Engineering Solutions for Aquaculture Video Analytics.....	50
TABARINTSEVA E.V. Solving an Ill-Posed Problem for a Nonlinear Differential Equation by Means of the Projection Regularization Method	59
TURSUNOV D.A., SADIEVA A.S. Asymptotics of the Solution of One Valley-Poussin Problem With an Unstable Spectrum	72

Physics

SOKOLOVSKIY V.V., BUCHELNIKOV V.D., CONG D. Magnetic and Structural Properties of All- <i>d</i> Metal Mn-Ni-Ti Heusler Alloys	78
KOVALEV Yu.M., SHESTAKOV M.A. Equations of State for Calculating Shock Wave Compression Temperatures of Molecular Crystal	86

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ СДВИГОМ НА СЛОЖНЫХ КРИВЫХ

В.Л. Дильман

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: diltmanvl@susu.ru

Аннотация. Рассматриваются линейные функциональные уравнения с функцией сдвига, имеющей ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, на произвольной кусочно-гладкой кривой. Такие уравнения изучаются в связи с теорией краевых задач для аналитических функций, являющихся математическим аппаратом при исследовании математических моделей теории упругости, в которых условия сопряжения содержат сдвиг по границе. Предполагается, что функция сдвига действует циклично на множестве простых кривых, образующих данную кривую, причем кроме концов простых кривых, нет периодических относительно функции сдвига точек. Цель работы – найти условия существования и единственности решения (а в случае неединственности мощности множества решений) таких уравнений в классах гельдеровских и первообразных от лебеговских функций с коэффициентом и правой частью из таких же классов.

Ключевые слова: линейные функциональные уравнения от одной переменной; классы первообразных от лебеговских функций, кусочно-гладкие кривые.

Введение. Линейные функциональные уравнения (ЛФУ)

$$(F_g(\psi))(t) \equiv \psi(\alpha(t)) - g(t)\psi(t) = h(t), \quad (1)$$

определенные на гладких кривых $\Gamma = [ab]$ комплексной плоскости, возникают при решении сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими особенностями, имеющими вид интегралов с ядром Коши с двумя переменными пределами [1]. Эти пределы зависят один от другого (обозначим эту зависимость α). Такие уравнения рассматриваются в связи с теорией краевых задач для аналитических функций, являющихся математическим аппаратом теории упругости, в которых условия сопряжения содержат сдвиг по границе [2–4].

С позиций [1] интерес представляет исследование инвариантности оператора $(F_g(\psi))^{-1}$ относительно гельдеровских, лебеговских классов функций, а также классов первообразных от таких функций, в том числе с некоторыми дополнительными условиями на концах кривых. При этом важно понять, как меняются параметры, характеризующие эти классы, под действием указанного оператора. Этим вопросам для уравнения (1) на простых гладких кривых посвящена работа [5] и другие работы (см. литературу в [5]).

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (1) и его обобщениями. В них изучались вопросы существования решений, условий единственности, описания общих решений, в основном в классах непрерывных функций [6–13].

В работах [11–13] рассматривались ЛФУ с функциями сдвига α , порождающими конечную группу относительно суперпозиции. Такие ЛФУ появляются при математическом моделировании методов защиты человека и окружающей среды при процессах переноса заряженных частиц и ионизированных излучений [13].

В работе [5] функция сдвига α имела в качестве периодических точек только 2 неподвижные точки – концы кривой. При изучении уравнения (1) на произвольной кусочно-гладкой кривой [14] приходится рассматривать варианты, когда концы простых дуг, образующих кривую, являются периодическими (не обязательно неподвижными) относительно α точками. Тогда некоторая степень отображения α действует на каждой простой дуге как автоморфизм, но не тождественный, как в [11–13], а имеющий бесконечный порядок. Статья посвящена исследованию

ЛФУ вида (1) на сложных гладких кривых с функциями сдвига α , имеющими циклическую группу периодических точек.

С позиции построения решения (например, в виде суммы сходящегося ряда) на простой дуге естественной областью задания уравнения (1) является кривая, содержащая один из концов и не содержащая другой: $[a; b)$ или $(a; b]$. Тогда можно получить решение (в некоторых случаях бесконечный класс решений), непрерывное на соответствующем конце. Непрерывное продолжение на другой конец не всегда возможно и требует дополнительных условий. Поэтому многие утверждения, относящиеся к свойствам решений уравнения (1), разбиваются на пары двойственных: одно относится к $[a; b)$, другое к $(a; b]$.

Обозначения и допущения. Пусть $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$, $\Gamma_j = [a_j; b_j]$, $j = \overline{1, n}$ – произвольная кусочно-гладкая кривая, $\Gamma_j = [a_j; b_j]$, $j = \overline{1, n}$ – простая разомкнутая гладкая дуга. Обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$ кривую Γ без концов $a_j; b_j$ дуг Γ_j ; через Γ^a кривую Γ без концов b_j ; через Γ^b кривую Γ без концов a_j . Будем пользоваться обозначениями работы [5] и их естественными обобщениями на Γ . В частности, если M – произвольный класс функций, заданных на Γ , $c_1, \dots, c_s \in \Gamma$, то пусть $h \in M(c_1^0, \dots, c_s^0)$, если $h \in M$ и $h(c_i) = 0$, $i = \overline{1; s}$. Запись $h \in M(c_1^*, \dots, c_s^*)$ или, подробнее, $h \in M(c_1^*, v_1, \dots, c_s^*, v_s)$, означает, что $\exists v_1, \dots, v_s$ такие, что $h(t)(t - c_j)^{v_j} \in M$, $i = \overline{1; s}$.

Степень определенного на Γ обратимого отображения $\alpha = \alpha(t)$, $t \in \Gamma$ обозначаем нижним индексом: $\alpha_0(t) \equiv t$, $\alpha_1(t) \equiv \alpha(t)$, $\alpha_n(t) \equiv \alpha(\alpha_{n-1}(t))$, $\alpha_{-1}(t)$ – отображение, обратное к α , $\alpha_{-n}(t) \equiv \alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$, $n = \overline{1, \infty}$. Заметим: $\alpha_n(\alpha_{-n}(t)) \equiv \alpha_{-n}(\alpha_n(t)) \equiv \alpha_0(t) \equiv t$.

Предположим, что α обладает следующими свойствами:

1) сужение функции α на Γ_j , $j = \overline{1, n}$ непрерывно, взаимно однозначно и с сохранением ориентации переводит дугу Γ_j на дугу Γ_{j+1} (дуга Γ_n переводится на Γ_1); под сохранением ориентации имеется в виду условие: $\alpha(a_j) = a_{j+1}$, $\alpha(b_n) = a_1$. Заметим, отображение α_n оставляет на месте периодические точки и определяет биекцию любой дуги Γ_j , $j = \overline{1, n}$ на себя с неподвижными концами $a_j; b_j$;

2) отображение α действует на $\overset{\circ}{\Gamma}$ взаимно однозначно и непрерывно и не имеет других периодических точек, кроме $a_j; b_j$, $j = \overline{1, n}$.

Пример. Γ – простой гладкий замкнутый контур, α непрерывно переводит Γ на себя с сохранением ориентации и имеет конечное число периодических точек. Промежутки между двумя соседними точками – это $\Gamma_j = [a_j; b_j]$, $j = \overline{1, n}$, где $a_{j+1} = b_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $a_1 = b_n$;

3) $\forall t \in \Gamma \exists \alpha'(t) \neq 0$, причем $\alpha' \in H_\theta$ на Γ , $\theta \in (0; 1]$;

4) $\forall j \in \overline{1, n} \prod_{j=1}^n |\alpha'(a_j)| \neq 1$, $\prod_{j=1}^n |\alpha'(b_j)| \neq 1$.

Это предположение является обобщением условия 4 из работы [5].

Как и в работе [5], будем считать, что буквами a_k и b_k обозначены соответственно притягивающие (п.н.т.) и отталкивающие (о.н.т.) неподвижные точки отображения α_n . Заметим, что п.н.т. отображением α переводятся друг в друга. То же относится к о.н.т. Условие 4, учитывая эту договоренность, можно записать в виде:

4'). $\forall j \in \overline{1, n} \prod_{j=1}^n |\alpha'(a_j)| < 1$, $\prod_{j=1}^n |\alpha'(b_j)| > 1$.

Вспомогательные утверждения. Рассмотрим на кривой Γ^a уравнение

$$\psi(\alpha_n(t)) - \tilde{g}(t)\psi(t) = \tilde{h}(t), \tag{2}$$

где

$$\tilde{g}(t) = \prod_{j=0}^{n-1} g(\alpha_j(t)), \quad \tilde{h}(t) = h(\alpha_{n-1}(t)) + \sum_{j=1}^{n-1} h(\alpha_{n-1-j}(t)) \prod_{k=1}^j g(\alpha_{n-k}(t)). \tag{3}$$

Будем предполагать, что

$$g(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Как известно [5], при выполнении условия (4) количество решений уравнения (1) на простой гладкой кривой зависит от $g(a)$, точнее, от выполнения одного из трех условий: 1) $g(a) = 1$; 2) $|g(a)| < 1$; 3) $|g(a)| \geq 1, g(a) \neq 1$.

Условия такого же типа (см. ниже формулы (10), (11) и (5)) по отношению к аналогичным параметрам уравнения (2) определяют количество решений уравнения (2).

Лемма 1. Уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Доказательство. Как следствие равенства (1), получаем:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_n(t)) - g(\alpha_{n-1}(t))\psi(\alpha_{n-1}(t)) &= h(\alpha_{n-1}(t)) \\ g(\alpha_{n-1}(t))\psi(\alpha_{n-1}(t)) - g(\alpha_{n-1}(t))g(\alpha_{n-2}(t))\psi(\alpha_{n-2}(t)) &= g(\alpha_{n-1}(t))h(\alpha_{n-2}(t)) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \prod_{k=1}^{n-1} g(\alpha_{n-k}(t))\psi(\alpha(t)) - \prod_{k=1}^{n-1} g(\alpha_{n-k}(t))\psi(t) &= \prod_{k=1}^{n-1} g(\alpha_{n-k}(t))h(t) \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, из (3) получим (2).

Лемма 2. Пусть $g \in C^{[a_j; b_j]}$ для $\forall j \in \overline{1, n}$. Если (условие 3-го типа)

$$\prod_{j=1}^n |g(a_j)| \geq 1, \quad \prod_{j=1}^n g(a_j) \neq 1, \tag{5}$$

то уравнения (1) и (2) равносильны в классе C^{Γ^a} .

Доказательство. Из определений (3) непосредственной проверкой получаются тождества:

$$g(t)\tilde{g}(\alpha(t)) = g(\alpha_n(t))\tilde{g}(t), \tag{6}$$

$$\tilde{h}(\alpha(t)) + h(t)\tilde{g}(\alpha(t)) = h(\alpha_n(t)) + g(\alpha_n(t))\tilde{h}(t). \tag{7}$$

Пусть выполняется условие (5). Надо показать, что если $h \in C^{[a_j; b_j]}$ для $j = \overline{1, n}$, то уравнение (1) следует из уравнения (2). Подставив вместо t в (2) $\alpha(t)$ и применив (6), получим:

$$\frac{\psi(\alpha(\alpha_n(t)))}{g(\alpha_n(t))} - \tilde{g}(t)\frac{\psi(\alpha(t))}{g(t)} = \frac{h(\alpha(t))}{g(\alpha_n(t))}.$$

Вычитая из этого равенства уравнение (2) и используя (7), получим:

$$\chi(\alpha_n(t)) - \tilde{g}(t)\chi(t) = 0, \tag{8}$$

где

$$\chi(t) = \frac{\psi(\alpha(t))}{g(t)} - \psi(t) - \frac{h(t)}{g(t)}. \tag{9}$$

Это уравнение распадается на n независимых уравнений, каждое из которых задано на простой дуге $[a_j; b_j]$, $j = \overline{1, n}$. Из условия (5) следует: для $\forall j \in \overline{1, n}$ $|\tilde{g}(a_j)| \geq 1, \tilde{g}(a_j) \neq 1$. Заметим, что в силу (3) из условия $g \in C^{[a_j; b_j]}$ следует условие $\tilde{g} \in C^{[a_j; b_j]}$ для $\forall j \in \overline{1, n}$. Это означает, что

решение уравнения (8) $\chi(t) \equiv 0 \quad \forall j \in \overline{1, n}$ на дуге $[a_j; b_j]$ (подробности в статье под номером 19 в списке литературы работы [5]). Тогда из (9) сразу следует, что имеет место равенство (1), то есть уравнения (1) и (2) равносильны в классе $C^{\Gamma^a}(a_j^0, j \in \overline{1, n})$.

Лемма 3. Пусть $g \in C^{[a_j; b_j]}$ для $\forall j \in \overline{1, n}$. Если (условие 1-го типа)

$$\prod_{j=1}^n g(a_j) = 1, \quad (10)$$

и дополнительно $h(a_j) = 0, j \in \overline{1, n}$, то уравнения (1) и (2) равносильны в классе $C^{\Gamma^a}(a_j^0, j \in \overline{1, n})$, то есть в классе функций, обращающихся в ноль в точках $a_j^0, j \in \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (10), то есть $\tilde{g}(a_j) = 1, \forall j \in \overline{1, n}$. Точно так же, как в лемме 1, показывается, что из (1) следует (2). Надо показать, что если $h \in C^{[a_j; b_j]}(a_j^0)$ для $j \in \overline{1, n}$ и выполняется (10), то уравнение (1) следует из уравнения (2). Заметим, что из (3) следует, что если $h(a_j) = 0, j \in \overline{1, n}$, то и $\tilde{h}(a_j) = 0, j \in \overline{1, n}$. Подставив $a_j, j \in \overline{1, n}$ в (9), получим $\chi(a_j) \equiv 0$. Если ψ – решение уравнения (1), то χ – решение уравнения (8). По лемме 3 (пункт 1) и теореме 1 (пункт 1) работы [5] для решения уравнения (8) выполняется альтернатива: либо $\chi(t) \equiv 0$ на каждой дуге $[a_j; b_j], j \in \overline{1, n}$, либо $\chi(a_j) \neq 0, j \in \overline{1, n}$. Поскольку показано, что второе не имеет места, то: $0 \equiv \frac{\psi(\alpha(t))}{g(t)} - \psi(t) - \frac{h(t)}{g(t)}$, что и требовалось.

Замечание 1. Что касается условия 2-го типа

$$\prod_{j=1}^p |g(a_j)| < 1, \quad (11)$$

см. ниже теорему 1.

Замечание 2. Уравнение (2) имеет то преимущество перед уравнением (1), что фактически распадается на n независимых уравнений, каждое из которых задано на простой дуге. Поэтому при выполнении условий 1-го и 3-го типа леммы 1–3 позволяют переносить результаты работы [5] на данный случай.

Теоремы существования и количества решений. Условие (11) является обобщением условий теоремы 1 из [5]. Докажем утверждение, аналогичное указанной теореме. Введем обозначения. Зафиксируем произвольную точку $c \in \overset{\circ}{\Gamma}$. Поскольку по условию эта точка непериодическая, это же верно для $\alpha_k(c)$, поэтому $\forall k \alpha_{k+n}(c) \neq \alpha_k(c)$. Положим, для любого целого k $I_k(c) = [\alpha_{k+n}(c); \alpha_k(c)]$. Заметим, что $I_k(c) \subseteq \Gamma_j \Leftrightarrow k \equiv j \pmod{n}$. Обозначим через $C_{c, g, h}$ класс функций f , непрерывных на $I_0(c) = [\alpha_n(c); c]$ и удовлетворяющих условию

$$f(\alpha_n(c)) - \tilde{g}(c)f(c) = \tilde{h}(c). \quad (12)$$

Пусть $\psi_0 \in C_{c, g, h}$, а в остальном произвольна. Если K – произвольный класс функций на $I_0(c)$, то положим по определению: $K_{c, g, h} = C_{c, g, h} \cap K$.

Теорема 1. 1) Пусть $h, g \in H^{\Gamma^a}$, выполняются (4) и (11). Тогда уравнение (1) разрешимо в классе C^{Γ^a} и имеет континуум линейно независимых решений. Общее решение определяется на $\overset{\circ}{\Gamma}$ формулой

$$\psi(a_j) = \frac{\tilde{h}(a_j)}{1 - \tilde{g}(a_j)}, \quad j \in \overline{1, n}; \tag{13}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{g}(\alpha_{j-n}(t)) \psi_0(\alpha_{-n}(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(\alpha_{k-n}(t)) \prod_{j=k+1}^{n-1} \tilde{g}(\alpha_{j-n}(t)), & t \in I_n(c), \quad n = 2; 3; \dots \\ \tilde{g}(\alpha_{-1}(t)) \psi_0(\alpha_{-1}(t)) + \tilde{h}(\alpha_{-1}(t)), & t \in I_1(c), \\ \psi_0(t), & t \in I_0(c), \\ \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{g}^{-1}(\alpha_{j-n}(t)) \psi_0(\alpha_n(t)) - \sum_{k=1}^n \tilde{h}(\alpha_{n-k}(t)) \prod_{j=k}^n \tilde{g}^{-1}(\alpha_{n-j}(t)), & t \in I_{-n}(c), \quad n = 1; 2; \dots \end{cases} \tag{14}$$

В частности, $\forall j \in \overline{1, p} \quad \psi(a_j) = 0 \Leftrightarrow \tilde{h}(a_j) = 0$.

2) Если $\psi_0 \in H_{c,g,h}$, то $\psi \in H^{\Gamma^a}$. Если $\psi_0 \in \tilde{A}_{c,g,h}$, $g, h \in \tilde{A}$, то $\psi \in \tilde{A}$.

Доказательство. 1) Формула (14) получается итерациями уравнения (1), поэтому является решением этого уравнения (проверку этого см. в [5, леммы 1 и 2, теорема 1]) для любой функции $\psi_0 \in C_{c,g,h}$. Поэтому (1) имеет континуум линейно независимых решений. Условие (12) обеспе-

чивает непрерывность функции (13), (14) на Γ . Условие (11) обеспечивает в силу [5, теорема 1] непрерывность решения (14) на Γ^a , то есть разрешимость в классе C^{Γ^a} . В точках a_j в силу леммы 1 значение решения уравнения (1) совпадает с соответствующим значением решения уравнения (2), а последнее в силу [5, теорема 1] находится по формуле (13).

2) По теореме 1 из [5] утверждения верны для уравнения (2). В силу леммы 1 они верны и для (1).

Теорема 2. 1) Пусть $h, g \in H^{\Gamma^a}$, $g(t) \neq 0$ на $[a_j; b_j]$ для $\forall j \in \overline{1, n}$ и выполняется (5). Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в классе C^{Γ^a} . Если $\prod_{j=1}^n |g(a_j)| > 1$, то

$$\psi(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\alpha_{nk}(t))}{\prod_{j=0}^k \tilde{g}(\alpha_{nj}(t))}. \tag{15}$$

Если $\prod_{j=1}^n |g(a_j)| = 1$, $\prod_{j=1}^n g(a_j) \neq 1$, то

$$\psi(t) = \frac{h(a)}{1 - g(a)} - \frac{1}{1 - g(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1 - g(a))h(\alpha_k(t)) - h(a)(1 - g(\alpha_k(t))))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}. \tag{16}$$

2) $\psi \in H^{\Gamma^a}$. Если $g, h \in \tilde{A}$, то $\psi \in \tilde{A}$.

Доказательство. 1) Из лемм 1 и 2 следует равносильность уравнений (1) и (2). Применяя теорему 2 из статьи под номером 19 в списке литературы работы [5] для отображения α_n к уравнению (2), получаем (15). Аналогично применение к уравнению (2) теоремы 4 из той же работы для отображения α_n приводит к (16).

Замечание. На результат – существование, единственность и количество решений – не влияют значения $g(a_j)$ по отдельности для $j \in \overline{1, n}$, а влияют только произведения этих чисел:

$\prod_{j=1}^n g(a_j)$, в соответствии с условиями (5), (10) и (11).

Литература

1. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p , $p > 1$ / В.Л. Дильман, Л.И. Чибрикова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.
2. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Dordrecht, 2012. – 378 p.
3. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Dordrecht, 2012. – 288 p.
4. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю.И. Карлович, В.Г. Кравченко, Г.С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.
5. Дильман, В.Л. Линейные функциональные уравнения в классах первообразных от лебеговских функций на отрезках кривых / В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова // Челябинский физико-математический журнал. – 2023. – Т. 8, вып. 1. – С. 5–17.
6. Kuczma, M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality / M. Kuczma. – Birkhäuser Basel, 2009. – 585 p.
7. Кравченко, В.Г. Об одном функциональном уравнении со сдвигом в пространстве непрерывных функций / В.Г. Кравченко // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 303–311.
8. Пелюх, Г.П. Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский. – Киев: Инст. мат. НАН, 2013.
9. Бродский Я.С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – Киев: Вища школа, 1983. – 86 с.
10. Антоневиц, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневиц. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 231 с.
11. Илолов, М. Об одном классе линейных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами / М. Илолов, Р. Аезов // Изв. Акад. наук Респ. Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2019. – № 4 (177). – С. 7–12.
12. Лихтарников, Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – СПб: Лань, 1997. – 156 с.
13. Чернявский, В.П. Однозначность решений при использовании линейного функционального уравнения в модели радиационной защиты / В.П. Чернявский // Глобальная ядерная безопасность. – 2019. – № 4 (33). – С. 18–26.
14. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Поступила в редакцию 12 марта 2024 г.

Сведения об авторе

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9197-3497>, e-mail: dilmanvl@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 5–11*

DOI: 10.14529/mmph240201

FUNCTIONAL EQUATIONS AS MATHEMATICAL MODELS OF CYCLIC SHIFT COUPLING PROBLEMS ON COMPLEX CURVES

V.L. Dil'man

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: dilmanvl@susu.ru*

Abstract. The paper considers linear functional equations with a shift function having a nonzero derivative satisfying the Helder condition on an arbitrary piecewise smooth curve. Such equations are studied in connection with the theory of boundary value problems for analytical functions, which are a

mathematical tool in the study of mathematical models of elasticity theory in which the conjugation conditions contain a boundary shift. The shift function acts cyclically on a set of simple curves forming a given curve, and except the ends of simple curves, there are no periodic points relative to the shift function. The purpose of the study is to find conditions for the existence and uniqueness of a solution (and in the case of non-uniqueness of the cardinality of the set of solutions) of such equations in the classes of Helder and primitive Lebesgue functions with a coefficient and the right part of the same classes.

Keywords: linear functional equations of one variable; Helder classes of functions, classes of primitive from Lebesgue functions, piecewise smooth curves.

References

1. Dil'man V.L., Chibrikova L.I. Solutions of an Integral Equation with Generalized Logarithmic Kernel in L_p , $p > 1$. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.
2. Litvinchuk, G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Springer Dordrecht, 2012, 378 p. DOI: 10.1007/978-94-011-4363-9
3. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Dordrecht, 2012, 288 p. DOI: 10.1007/978-94-011-1180-5
4. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's theory of singular integral operators with shift. *Soviet Mathematics*, 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.
5. Dil'man V.L., Komissarova D.A. Linear Functional Equations in the Class of Antiderivatives from the Lebesgue Functions on Curves Segments. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, Vol. 8, Iss. 1, pp. 5–17. (in Russ.). DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18101
6. Kuczma M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Birkhäuser Basel, 2009, 585 p. DOI: 10.1007/978-3-7643-8749-5
7. Kravchenko V.G. On a Functional Equation with a Shift in the Space of Continuous Functions. *Mathematical Notes*, 1977, Vol. 22, Iss. 2, pp. 660–665. DOI: 10.1007/BF01780978
8. Pelyuh G.P., Sharkovskiy A.N. *Metod invariantov v teorii funktsional'nykh uravneniy* (Method of Invariants in the Functional Equations Theory). Kiyev: Inst. of Math. NAS, 2013 (in Russ.).
9. Brodskiy Ya.S., Slipenko A.É. *Funktsional'nye uravneniya* (Functional Equations). Kiyev, Visha shkola, 1983, 86 p. (in Russ.).
10. Antonevich A.B. *Lineinye funktsional'nye uravneniya: operatornyi podhod* (Linear functional equations: an operator approach). Minsk, Izd-vo "Universitetskoye" Publ., 1988, 231 p. (in Russ.).
11. Ilolov M., Avezov R. On a Class of Linear Functional Equations with Constant Coefficients. *News of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences*, 2019, no. 4(177), pp. 7–12. (in Russ.).
12. Likhtarnikov L.M. *Elementarnoe vvedenie v funktsional'nye uravneniya* (An Elementary Introduction to Functional Equations). St. Petersburg, Lan' Publ., 1997, 156 p. (in Russ.).
13. Cherniavsky V.P. Unambiguity of Decisions when Using Linear Functional Equation in the Radiation Protection Model. *Global Nuclear Safety*, 2019, no. 4 (33), pp. 18–26. (in Russ.).
14. Mushelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equations) Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).

Received March 12, 2024

Information about the author

Dilman Valeriy Leyzerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9197-3497>, e-mail: dilmanvl@susu.ru.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕБОВАНИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВА ГРУППЫ РОБОТОВ В ЗАДАЧЕ МОНИТОРИНГА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

С.Г. Капустян, Э.В. Мельник

*Южный научный центр Российской академии наук, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
E-mail: kap56@mail.ru*

Аннотация. Для решения задач мониторинга удаленных больших территорий и областей целесообразно применение групп роботов как мобильных компонентов систем мониторинга. Рассматриваются концептуальные вопросы организации автономного функционирования таких групп роботов. Эффективность решения задач мониторинга группой роботов во многом определяется ее составом. Предлагается подход к решению задачи формирования состава групп роботов для решения задач мониторинга, базирующийся на принципах самоорганизации технических систем, технологиях мультиагентных систем и распределенного реестра.

Ключевые слова: система мониторинга; мобильный компонент; группа роботов; мультиагентная система; принципы самоорганизации; распределенный реестр; оптимальный состав группы.

Введение

Роботы находят все более широкое применение для решения задач мониторинга различных объектов и территорий и прежде всего в условиях опасных для человека, например, в зонах химического, бактериологического или радиационного заражения, а также когда непосредственное участие человека в процессе мониторинга связано со значительными затратами (финансовыми, энергетическими и др.) [1–4].

Наиболее широкое применение для этих целей нашли беспилотные летательные аппараты (БПЛА) [5]. Также применяются плавающие автономные необитаемые подводные аппараты (АНПА) [6] и беспилотные надводные корабли, например, для морских исследований и мониторинга акваторий, подводные шагающие аппараты, наземные колесные, гусеничные и шагающие роботы. Для мониторинга и диагностики состояния трубопроводов находят применение шагающие и ползающие роботы.

Однако одиночные роботы могут применяться для мониторинга относительно небольших объектов и территорий. Для решения задач мониторинга крупных и протяженных объектов, а также больших территорий и областей целесообразно применение групп роботов [7, 8].

Основными преимуществами группового применения роботов при выполнении сложного задания являются:

- сокращение времени выполнения задания вследствие возможности распределения отдельных его операций между роботами;
- повышение вероятности успешного выполнения задания, поскольку выход из строя отдельного робота не приводит к выходу из строя всей системы в целом, а операции, возложенные на этого робота, могут быть перераспределены между остальными роботами системы.

Здесь могут применяться как гомогенные, то есть состоящие из одинаковых по конструкции и функциональному назначению роботов, так и гетерогенные, то есть состоящие из различных по конструкции, функциональному назначению, а также по среде функционирования (наземные, воздушные, надводные и подводные) роботов. Для решения сложных задач, в том числе задач мониторинга сложных объектов, наиболее целесообразно применение гетерогенных групп роботов [9], так как такие группы, как правило, имеют расширенный набор функций.

При групповом использовании роботов различного назначения возникает ряд весьма сложных задач, в первую очередь, связанных с проблемой управления ими и организацией взаимодействия роботов группы между собой для наиболее эффективного достижения цели, поставленной перед группой. В особенности эта проблема относится к интеллектуальным роботам с автономной системой передвижения и навигации.

Задачу управления группой роботов, действия которых направлены на достижение общей групповой цели, называют задачей группового управления [10]. Суть задачи группового управления заключается в отыскании и реализации таких действий каждого отдельного робота группы, которые приводили бы к оптимальному, с точки зрения некоторого группового критерия, достижению общей групповой цели.

В общем случае задача группового управления роботами разбивается на ряд подзадач, среди которых можно выделить следующие подзадачи:

- определение состава группы, способного эффективно решать целевую задачу;
- распределение функций между роботами и/или планирование действий роботов для оптимального (или близкого к нему) решения целевой задачи [11];
- реализация функций отдельными роботами для достижения конечной цели.

Если целевая задача группы роботов одна и та же, заранее известна и должна решаться в одних и тех же заранее известных детерминированных стационарных условиях, то в этом случае задача группового управления не является сложной и решается тривиально. До начала функционирования можно определить состав группы, определить последовательность действий каждого робота группы, а далее каждый робот отрабатывает свою последовательность действий, даже не взаимодействуя друг с другом.

Задача группового управления роботами при мониторинге больших территорий естественной среды зачастую характеризуется наличием неопределенности на всех этапах ее решения, например, неточностью и неполнотой исходных данных как о целевой задаче, так и об условиях ее решения, в частности, условиях внешней среды и накладываемых ограничениях.

В области группового управления роботами исследования проводились и проводятся в направлении решения последних двух подзадач задачи группового управления. Это прежде всего управление одиночными роботами, функционирующими в составе группы, и управление группой роботов, в частности, это вопросы организации взаимодействия в группе и планирование групповых действий, в том числе и планирование траекторий движения [12, 13].

Практически во всех публикациях, посвященных задаче группового управления роботами, предполагается, что группа роботов уже сформирована, и рассматриваются вопросы распределения целей, планирования групповых действий, управления выполнением действий и т. п. Исключение, пожалуй, составляет работа [14], в которой рассматриваются концептуальные вопросы формирования состава группы робототехнических комплексов для решения специальных задач.

В то же время эффективность решения задач мониторинга во многом зависят от состава группы роботов и прежде всего от функциональных возможностей включаемых в группу роботов и их количества. Под эффективностью понимается достижение желаемого результата с минимально возможными издержками, затратами или получение максимально возможного объема результата.

В настоящей статье рассматривается один из возможных подходов к решению подзадачи формирования оптимального или близкого к оптимальному состава групп роботов, предназначенных для мониторинга больших территорий.

1. Формальная постановка задачи

Для того чтобы обеспечить возможность определения состава группы роботов в автоматическом режиме, то есть без участия человека, целевая задача должна быть определенным образом формализована: с одной стороны, она должна формулироваться пользователем (оператором) на языке, близком к естественному, и наглядно отображаться средствами системы управления, а с другой стороны, должна восприниматься средствами системы группового управления для распределения функций между роботами группы и формирования соответствующих команд управления роботами для реализации этих функций.

Основной задачей роботов, участвующих в мониторинге окружающей среды, является измерение так называемых показателей мониторинга в контрольных точках и/или контрольных областях контролируемой территории, их предварительная обработка и передача данных в систему мониторинга для последующей обработки и обобщения.

Под показателями мониторинга понимаются количественные или качественные характеристики/критерии, анализ которых позволяет оценить состояние объекта или процесса.

Под контрольной точкой понимается точка пространства, в которой производится измерение того или иного показателя мониторинга. Контрольная точка обычно задается координатами в некоторой системе координат (абсолютной или относительной) и при необходимости моментом времени (временным отсчетом), в который необходимо производить измерение показателя.

Контрольная область – это часть контролируемой территории, описываемая окружностью с заданными координатами центра и радиусом или многоугольником с заданными координатами вершин этого многоугольника. В контрольной области измерение некоторых показателей может осуществляться в одной или нескольких произвольных точках, принадлежащих этой области.

В общем случае задачу мониторинга некоторой территории группой роботов можно описать с помощью кортежа

$$\mathbf{T} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{I}, \mathbf{p}_I^p, \mathbf{p}_I^r, \mathbf{C} \rangle. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_L\}$ – положение контролируемой области в геометрическом пространстве, где \mathbf{x}_l ($l = \overline{1, L}$) – координата l -й вершины многоугольника, описывающего контролируемую область; $\mathbf{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_K\}$ – множество заданных показателей мониторинга контролируемой территории, где K – количество показателей; $\mathbf{p}_I^p = \{\mathbf{p}_1^p, \mathbf{p}_2^p, \dots, \mathbf{p}_m^p, \dots, \mathbf{p}_M^p\}$ – множество контрольных точек, где M – количество таких точек; $\mathbf{p}_I^r = \{\mathbf{p}_1^r, \mathbf{p}_2^r, \dots, \mathbf{p}_j^r, \dots, \mathbf{p}_J^r\}$ – множество контрольных областей, где J – количество контрольных областей; $\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_u, \dots, \mathbf{c}_U\}$ – множество параметров, характеристик, отражающих условия и ограничения при решении целевой задачи \mathbf{T} , где U – количество параметров, характеристик.

Например, это могут быть временные ограничения (время начала решения задачи мониторинга, длительность ее решения, периодичность, моменты времени или временные интервалы, в которые необходимо измерять те или иные показатели и др.), точность измерения показателей, условия среды функционирования (рельеф местности, характеристики подстилающей поверхности – для наземных роботов, карта течений для надводных и подводных роботов, условия видимости – для видео- и фотосъемки), периодичность передачи данных мониторинга в наземные центры обработки и т. п.

В свою очередь, каждая контрольная точка может быть описана кортежем

$$\mathbf{p}_m^p = \langle \mathbf{x}_m^p, \mathbf{I}_m \rangle, \quad m = \overline{1, M},$$

где \mathbf{x}_m^p – координаты m -й контрольной точки; $\mathbf{I}_m = \{\mathbf{I}_{m1}, \mathbf{I}_{m2}, \dots, \mathbf{I}_{mk_m}, \dots, \mathbf{I}_{mK_m}\}$ – множество показателей, измеряемых в m -й контрольной точке.

Множество показателей, измеряемых в m -й контрольной точке, является подмножеством множества \mathbf{I} , то есть $\mathbf{I}_m \subset \mathbf{I}$. Количество показателей K_m , измеряемых в m -й контрольной точке, может варьироваться от одного до K . Каждый показатель в одной и той же контрольной точке может измеряться несколько раз с заданной периодичностью.

Для этого каждый элемент множества \mathbf{I}_m представляется парой

$$\mathbf{I}_{mk_m} = \langle I_{mk_m}, t_{mk_m} \rangle, \quad m = \overline{1, M},$$

где I_{mk_m} – k_m -й показатель (его обозначение), измеряемый в m -й контрольной точке;

t_{mk_m} – периодичность измерения k_m -го показателя в m -й контрольной точке.

Каждая контрольная область (участок) может быть описана кортежем

$$\mathbf{p}_j^r = \langle \mathbf{x}_j^r, \mathbf{I}_j \rangle, \quad j = \overline{1, J},$$

где \mathbf{x}_j^r – координаты j -й контрольной области; $\mathbf{I}_j = \{\mathbf{I}_{j1}, \mathbf{I}_{j2}, \dots, \mathbf{I}_{jk_j}, \dots, \mathbf{I}_{jK_j}\}$ – множество показателей, измеряемых в j -й контрольной области.

Множество показателей, измеряемых в j -й контрольной области, является подмножеством множества \mathbf{I} , то есть $\mathbf{I}_j \subset \mathbf{I}$. Количество показателей K_j , измеряемых в j -й контрольной области, также может варьироваться от одного до K . Кроме того, некоторые показатели могут измеряться

в нескольких произвольных точках контрольной области. Для этого каждый элемент множества \mathbf{I}_j представляется тройкой

$$\mathbf{I}_{jk_j} = \langle I_{jk_j}, n_{jk_j}, t_{jk_j} \rangle, \quad j = \overline{1, J},$$

где I_{jk_j} – k_j -й показатель (его обозначение), измеряемый в j -й контрольной области; n_{jk_j} – количество измерений k_j -го показателя в j -й контрольной области; t_{jk_j} – периодичность измерения k_j -го показателя в j -й контрольной области.

Пусть имеется группа мобильных компонентов (роботов), предназначенных для осуществления мониторинга контролируемой территории, представляющая собой некоторое множество роботов, оснащенных средствами измерения различных показателей мониторинга, вычислительными устройствами для их обработки и средствами связи для обмена информацией:

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_N\},$$

где N – количество роботов в группе.

Каждый робот группы R_i может быть описан с помощью кортежа

$$\mathbf{R}_i = \langle \mathbf{I}_{R_i}, \mathbf{P}_{R_i}, \mathbf{F}_{R_i}, \mathbf{D}_{R_i} \rangle, \quad (2)$$

где $\mathbf{I}_{R_i} = \{I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{ik_i}, \dots, I_{iK_i}\}$ – множество показателей мониторинга, которые может измерять робот R_i с использованием установленного на его борту дополнительного оборудования, K_i – количество показателей, которые может измерять робот R_i ; \mathbf{P}_{R_i} – вектор состояния робота R_i в геометрическом пространстве; \mathbf{F}_{R_i} – вектор физических параметров состояния робота R_i ; \mathbf{D}_{R_i} – вектор физических параметров дополнительного оборудования (датчиков, средств связи, вычислительных устройств и т. д.).

Вектор состояния робота R_i в геометрическом пространстве описывается кортежем

$$\mathbf{P}_{R_i} = \langle \mathbf{x}_{R_i}, \dot{\mathbf{x}}_{R_i}, \ddot{\mathbf{x}}_{R_i} \rangle, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\mathbf{x}_{R_i}, \dot{\mathbf{x}}_{R_i}, \ddot{\mathbf{x}}_{R_i}$ – вектор текущего положения, текущей скорости и текущего ускорения робота R_i в геометрическом пространстве соответственно.

Вектор \mathbf{F}_{R_i} качественных и количественных физических параметров состояния платформы робота R_i представляет собой набор параметров, определяющих его возможности и выполняемые им функции. К качественным физическим параметрам состояния, например, можно отнести тип платформы робота (наземный, воздушный, надводный, подводный) и тип движителей (колесные, гусеничные, шагающие, комбинированные). К количественным показателем можно отнести: массогабаритные характеристики, максимальную скорость движения, запас энергоресурса, удельный расход энергоресурса, максимальную высоту полета, максимальную глубину плавания под водой.

Вектор \mathbf{F}_{R_i} может быть описан с помощью кортежа

$$\mathbf{F}_{R_i} = \langle Type_i, Mover_i, m_i, \mathbf{g}_i, v_i^{\max}, e_i, \Delta e_i, h_i \rangle, \quad i = \overline{1, N},$$

где $Type_i$ – тип платформы робота R_i (код, условное обозначение); $Mover_i$ – тип движителя (код, условное обозначение); m_i – масса робота R_i ; \mathbf{g}_i – габариты робота R_i ; v_i^{\max} – максимальная скорость движения робота R_i ; e_i – запас энергоресурса (заряд батареи) робота R_i ; Δe_i – удельный расход энергоресурса (на единицу расстояния); h_i – прочие характеристики (максимальная высота полета, максимальная глубина плавания и др.).

Вектор \mathbf{D}_{R_i} качественных и количественных физических параметров дополнительного оборудования представляет перечень оборудования, с помощью которого осуществляется мониторинг контролируемой территории, в том числе получение данных об измеряемых показателях, их обработка и передача информации другим роботам группы и в центры обработки.

$$\mathbf{D}_{R_i} = \langle \mathbf{L}_i^{sd}, \mathbf{L}_i^c, \mathbf{L}_i^{cd} \rangle, \quad i \in \overline{1, N},$$

где $\mathbf{L}_i^{sd} = \{\mathbf{O}_{i,1}^{sd}, \mathbf{O}_{i,2}^{sd}, \dots, \mathbf{O}_{i,n_i^{sd}}^{sd}, \dots, \mathbf{O}_{i,N_i^{sd}}^{sd}\}$ – список (множество) сенсорных устройств, предназначенных для измерения показателей мониторинга, N_i^{sd} – количество сенсорных устройств, установленных на борту робота R_i ; $\mathbf{L}_i^c = \{\mathbf{O}_{i,1}^c, \mathbf{O}_{i,2}^c, \dots, \mathbf{O}_{i,n_i^c}^c, \dots, \mathbf{O}_{i,N_i^c}^c\}$ – список (множество) вычислительных устройств, предназначенных для приема, обработки, хранения и передачи сенсорных данных, N_i^c – количество вычислительных устройств, установленных на борту робота R_i ; $\mathbf{L}_i^{cd} = \{\mathbf{O}_{i,1}^{cd}, \mathbf{O}_{i,2}^{cd}, \dots, \mathbf{O}_{i,n_i^{cd}}^{cd}, \dots, \mathbf{O}_{i,N_i^{cd}}^{cd}\}$ – список (множество) устройств связи для обмена данными между роботами группы и передачи данных в наземные центры обработки, N_i^{cd} – количество устройств связи, установленных на борту робота R_i .

Каждый элемент $\mathbf{O}_{i,n_i^{sd}}^{sd}$ списка \mathbf{L}_i^{sd} представляет собой вектор качественных и количественных параметров каждого сенсорного устройства

$$\mathbf{O}_{i,n_i^{sd}}^{sd} = \langle f_{i,n_i^{sd}}^{sd}, d_{i,n_i^{sd}}^{sd}, a_{i,n_i^{sd}}^{sd}, p_{i,n_i^{sd}}^{sd} \rangle, \quad i \in \overline{1, N}, \quad n_i^{sd} \in \overline{1, N_i^{sd}},$$

где $f_{i,n_i^{sd}}^{sd}$ – тип сенсорного устройства, измеряемый физический параметр (температура, давление, скорость ветра, скорость течения и т.д.) – код, условное обозначение; $d_{i,n_i^{sd}}^{sd}$ – диапазон измерения физического параметра; $a_{i,n_i^{sd}}^{sd}$ – точность измерения, разрешение сенсорного устройства; $p_{i,n_i^{sd}}^{sd}$ – производительность сенсорного устройства, например, количество измерений в единицу времени.

С помощью этих параметров можно определить объем информации, получаемой данным сенсорным устройством за один цикл измерения, который должен поступить на вход вычислительного устройства для последующей обработки.

Каждый элемент $\mathbf{O}_{i,n_i^c}^c$ списка \mathbf{L}_i^c представляет собой вектор качественных и количественных параметров каждого вычислительного устройства робота R_i , предназначенного для обработки данных от сенсорных устройств:

$$\mathbf{O}_{i,n_i^c}^c = \langle f_{i,n_i^c}^c, bd_{i,n_i^c}^c, p_{i,n_i^c}^c, V_{i,n_i^c}^c \rangle, \quad i \in \overline{1, N}, \quad n_i^c \in \overline{1, N_i^c},$$

где $f_{i,n_i^c}^c$ – тип (код, условное обозначение); $bd_{i,n_i^c}^c$ – разрядность n_i^c -го вычислительного устройства, предназначенного для обработки данных мониторинга, получаемых от сенсорных устройств (бит); $p_{i,n_i^c}^c$ – производительность n_i^c -го вычислительного устройства (объем информации, обрабатываемой в единицу времени); $V_{i,n_i^c}^c$ – объем памяти n_i^c -го вычислительного устройства для хранения данных мониторинга.

С помощью этих параметров и параметров сенсорных устройств, подключенных к данному вычислительному устройству, можно оценить время обработки поступающих на вход вычислительного устройства данных мониторинга от сенсорных устройств и других роботов группы, объем сохраняемых обработанных данных, длительность их хранения.

Каждый элемент $\mathbf{O}_{i,n_i^{cd}}^{cd}$ списка \mathbf{L}_i^{cd} представляет собой вектор качественных и количественных параметров каждого устройства связи:

$$\mathbf{O}_{i,n_i^{cd}}^{cd} = \langle f_{i,n_i^{cd}}^{cd}, d_{i,n_i^{cd}}^{cd}, q_{i,n_i^{cd}}^{sd} \rangle, \quad i \in \overline{1, N}, \quad n_i^{cd} \in \overline{1, N_i^{cd}},$$

где $f_{i,n_i^{cd}}^{cd}$ – тип n_i^{cd} -го устройства связи (физический принцип: оптический, радио, акустический, проводной и т. д.); $d_{i,n_i^{cd}}^{cd}$ – дальность действия n_i^{cd} -го устройства связи; $q_{i,n_i^{sd}}^{sd}$ – пропускная способность канала связи (бит в секунду или байт в секунду).

С помощью данных параметров можно оценить время передачи данных мониторинга и определить те роботы группы, которые смогут обмениваться информацией в процессе решения задачи мониторинга контролируемой территории.

Как правило, для решения задач мониторинга используются малоразмерные роботы, способные нести весьма ограниченное количество дополнительного оборудования, и, как правило поэтому множество показателей мониторинга \mathbf{I}_{R_i} , которые может измерять робот R_i с использованием установленного на его борту дополнительного оборудования, меньше чем множество заданных показателей мониторинга контролируемой территории \mathbf{I} , что усложняет подзадачу формирования группы роботов.

Задача заключается в том, чтобы на основе информации о целевой задаче (1), а также функциональных возможностях и текущем состоянии робота (2) сформировать группу роботов таким образом, чтобы обеспечивалось измерение показателей мониторинга с заданными параметрами и характеристиками (точность, периодичность и т. д.) и при этом минимизировались временные и/или энергетические затраты.

2. Предлагаемый подход

Научным коллективом лаборатории информационных технологий и процессов управления была предложена концепция распределенной высоконадежной реконфигурируемой системы мониторинга с мобильными компонентами в сочетании с распределенным реестром, Интернетом вещей и методами интеллектуального анализа данных [15–17]. В такой системе обмен данными между ее компонентами может осуществляться через распределенное хранилище данных в виде распределенного реестра [18, 19], в котором могут храниться не только данные измерения показателей мониторинга и результаты их обработки, но и исходные данные задачи мониторинга (1) для группы роботов, информация о текущем состоянии каждого робота, а также данные о его характеристиках и функциональных возможностях (2). При этом все компоненты системы будут получать одну и ту же информацию, независимо от того, от какого узла распределенного реестра они ее получают. При этом достаточно проработаны вопросы организации информационных обменов между компонентами системы, в том числе мобильными [19], с использованием распределенного реестра. Однако задача группового управления роботами как мобильными компонентами системы и, в частности, подзадача формирования состава группы в полной мере в настоящее время не решена.

Проблема состоит в том, чтобы по исходным данным задачи мониторинга и по данным о функциональных возможностях и текущему состоянию роботов определить те, которые наиболее эффективно смогут решить поставленную задачу. При этом необходимо учитывать возможную неопределенность, связанную с неполнотой и неточностью данных.

Идея предлагаемого подхода к решению данной проблемы была подсказана учеными научной школы Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, возглавляемого З.В. Нагоевым. В связи с этим авторы выражают признательность З.В. Нагоеву и его коллегам, а также считают своим приятным долгом поздравить Залимхана Вячеславовича Нагоева с юбилеем.

В работах [20–22] и других нашими коллегами из Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук было предложено решение подобных задач с использованием интеллектуальных мультиагентных систем, основу которых составляют интеллектуальные программные агенты. При этом в работе [20] предложено использовать два типа агентов – управляющих и исполняющих.

Управляющие агенты производят контроль над исполнением задачи и обрабатывают полученные результаты [20], а каждый агент-исполнитель решает свою задачу. Для получения общего результата управляющими агентами производится композиция, интеграция частных результатов.

Для решения задачи группового управления роботами при мониторинге больших территорий также предлагается использовать мультиагентную систему, в состав которой входят агент задачи (управляющий агент), представляющий пользователя, формирующего задачу мониторинга, заин-

тересованного в результатах мониторинга, и агенты роботов, представляющие «интересы» роботов как исполнительных компонентов системы мониторинга.

Суть предлагаемого подхода заключается в следующем.

Как отмечалось выше, при использовании малоразмерных роботов для мониторинга территорий, как правило, устанавливаемое на них дополнительное оборудование позволяет измерять один–два показателя. Если же мониторинг территории требует измерения гораздо большего количества показателей, то целесообразным представляется декомпозиция задачи (1) мониторинга \mathbf{T} контролируемой территории на подзадачи, каждая из которых связана с измерением одного из множества показателей \mathbf{I} , каждая из которых связана с измерением одного из показателей мониторинга, то есть

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_k, \dots, \mathbf{T}_K\}. \quad (3)$$

В этом случае каждая подзадача \mathbf{T}_k может быть представлена кортежем

$$\mathbf{T}_k = \langle \mathbf{p}_k^p, \mathbf{p}_k^r, \mathbf{C}_k \rangle, k \in \overline{1, K}, \quad (4)$$

где $\mathbf{p}_{I_k}^p = \{\mathbf{p}_{k1}^p, \mathbf{p}_{k2}^p, \dots, \mathbf{p}_{km_k}^p, \dots, \mathbf{p}_{kM_k}^p\}$ – множество контрольных точек, в которых измеряется k -й показатель, M_k – количество таких точек; $\mathbf{p}_{I_k}^r = \{\mathbf{p}_{k1}^r, \mathbf{p}_{k2}^r, \dots, \mathbf{p}_{kj_k}^r, \dots, \mathbf{p}_{kJ_k}^r\}$ – множество контрольных областей, в которых измеряется k -й показатель, J_k – количество контрольных областей; $\mathbf{C}_k = \{\mathbf{c}_{k1}, \mathbf{c}_{k2}, \dots, \mathbf{c}_{ku_k}, \dots, \mathbf{c}_{kU_k}\}$ – множество параметров, характеристик, отражающих условия и ограничения при измерении k -го показателя (точность измерения, периодичность, время измерения, приоритет (степень важности) показателя), J_k – количество параметров, характеристик.

Каждая контрольная точка $\mathbf{p}_{km_k}^p$ задается ее координатами в пространстве, а каждая контрольная область $\mathbf{p}_{kj_k}^r$ задается координатами вершин многоугольника, описывающего данную область.

В этом случае задача заключается в том, чтобы в состав группы включить те роботы, которые могут решить подзадачи наиболее эффективно. При этом одна подзадача может решаться как одним, так и несколькими роботами, а каждый робот может участвовать в решении как одной подзадачи, так и нескольких (если позволяет дополнительное оборудование).

Декомпозицию задачи, то есть преобразование (1) в (3), предлагается, как и в работе [20], возложить на агента задачи (управляющего агента).

Агенты роботов на основе исходных данных определяют, в решении каких подзадач и с какой эффективностью (или затратами) могут участвовать роботы, которых они представляют. Исходными данными являются все данные о подзадаче (4), данные о функциональных возможностях (так называемые паспортные данные) роботов и установленного на них дополнительного оборудования, а также данные о текущем состоянии роботов (текущие координаты, параметры движения, запас энергоресурса и т. д.).

Упрощенная организационная схема решения задачи группового управления роботами мультиагентной системой представлена на рис. 1.

Предлагаемый подход работает следующим образом.

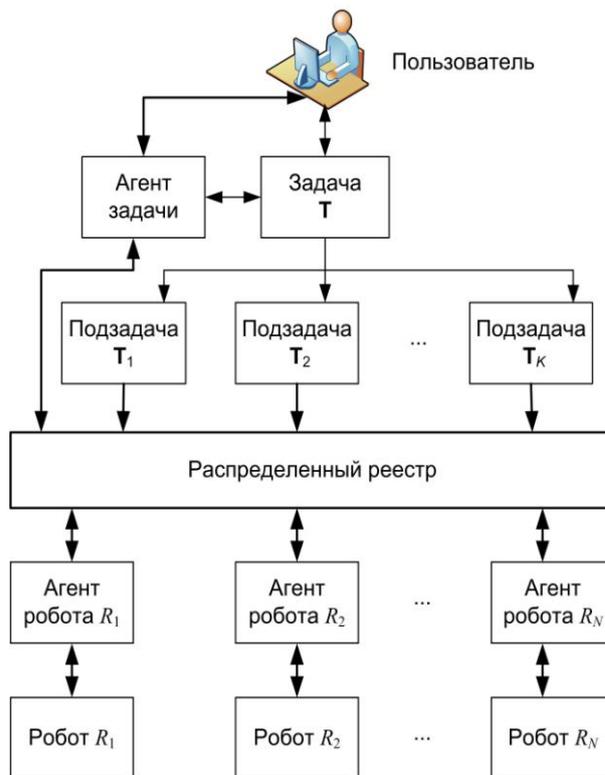


Рис. 1. Организационная схема решения задачи группового управления роботами

Пользователь с помощью специального приложения формирует целевую задачу (1), используя графические и текстовые редакторы. При этом он задает границы контролируемой территории, используя, например, цифровые карты, определяет перечень показателей мониторинга, для каждого показателя определяет контрольные точки и задает их координаты, также задает границы контрольных областей, определяет временные параметры (начало мониторинга, длительность и т. д.), определяет другие условия решения задачи, а также условия среды функционирования и т. д.

После того как задача сформирована, инициируется работа агента задания, который может взаимодействовать и с приложением, с помощью которого формируется задача, и с агентами роботов через распределенный реестр. Агент задачи преобразует задачу (1) к виду (3) и (4), размещает необходимую информацию в распределенном реестре и там же размещает информацию о готовности задачи и основные параметры задачи (начало решения и длительность). Агенты роботов периодически обращаются к распределенному реестру, запрашивая информацию о готовности какой-либо задачи. Как только они получают такую информацию, в первую очередь каждый из них определяет, сможет ли их робот принять участие в решении задачи в заданных временных рамках, то есть будет ли он свободен к началу решения задачи. Далее в формировании группы участвуют только те агенты, роботы которых будут свободны.

Формирование состава группы предлагается осуществлять в два этапа. На первом этапе формируются списки роботов-претендентов, а на втором осуществляется оптимизация состава.

При этом претендентами на включение в состав группы могут являться только те роботы, для которых выполняется условие

$$I_{R_i} \cap I \neq \emptyset, \quad (5)$$

то есть, другими словами, только те роботы, которые могут измерять хотя бы один показатель мониторинга.

Если условие (5) выполняется, то проверяется, можно ли измерять показатели с заданными параметрами (точность, периодичность, время измерения и т. д.). Для этого используются паспортные данные дополнительного оборудования и требования к измерению параметров, заданные при формировании целевой задачи. В этом случае претендентами на включение в состав группы могут являться только те роботы, оборудование которых может измерять хотя бы один показатель с параметрами не хуже заданных.

Далее для каждого робота-претендента необходимо определить затраты, например, временные или энергозатраты, на решение тех подзадач, на которые он претендует, а также определить часть каждой подзадачи, которую он способен выполнить.

Данные функции возлагаются на агентов роботов. Задача определения затрат на выполнение тех или иных подзадач, особенно в условиях обозначенной выше неопределенности, является сложной и зачастую не может иметь численного решения.

Наиболее целесообразным представляется использование в качестве агентов роботов так называемых интеллектуальных агентов на основе искусственных нейронных сетей (ИНС) [23], также могут использоваться, например, агенты, функционирующие на основе продукционных [24] или нечетко-продукционных [25] моделей.

При использовании агентов на основе ИНС на вход сети подаются все исходные данные, содержащиеся в (4) и (2), результатом является оценка возможности участия робота в решении подзадачи, полнота решения подзадачи (то есть робот способен полностью решить подзадачу за отведенное время или только ее часть и какую), а также оценка затрат на ее решение. Если робот может решать подзадачу за отведенное время хотя бы частично, агент робота направляет через распределенный реестр агенту задачи заявку на включение в состав группы, содержащую номер подзадачи, номер робота и полученное с помощью ИНС решение.

Ввиду ограниченного объема статьи мы не будем приводить подробное описание алгоритмов функционирования агентов, ограничимся кратким описанием основных этапов решения подзадачи формирования состава группы и основных действий агентов. Также не будем рассматривать вопросы обучения ИНС.

После того как все агенты роботов сформировали заявки, агент задачи формирует списки претендентов. В первый список включаются только те роботы, которые способны решить хотя

бы одну подзадачу полностью. Во второй список включаются роботы, которые могут решать хотя бы одну подзадачу, но частично.

Далее агент задачи проверяет, могут ли все роботы из первого списка решить все подзадачи, то есть измерить все показатели за отведенное время. Если да, то в дальнейшем в процессе формирования состава группы участвуют только роботы из этого списка. Если роботов из первого списка недостаточно для решения всех подзадач, то для решения оставшихся подзадач агент задачи из второго списка выбирает те роботы, которые могут участвовать в их решении и обеспечивают их решение в полном объеме. Если и во втором списке нет роботов, которые бы обеспечили решение оставшихся подзадач, то агент задачи извещает пользователя, сформировавшего целевую задачу, о невозможности ее решения при заданных параметрах. Требуется ее корректировка, например, сдвиг времени начала решения, или увеличение длительности, или уменьшение количества контрольных точек и/или контрольных областей, или уменьшение количества показателей, а следовательно, и подзадач.

Если роботов достаточно для решения целевой задачи в полном объеме, то реализуется второй этап – оптимизация состава. На данном этапе может использоваться несколько модифицированный метод, предложенный в [26], который мы также не будем подробно описывать. Фактически на этом этапе решаются сразу две подзадачи задачи группового управления роботами – формирование состава группы и распределение подзадач задачи мониторинга между роботами группы.

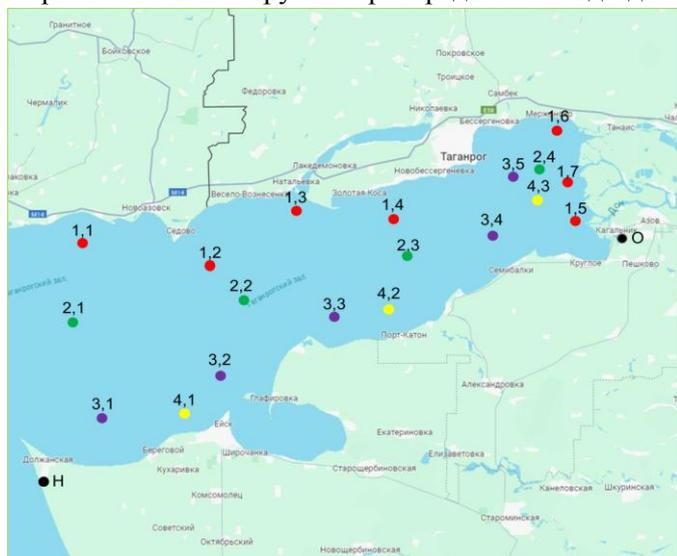


Рис. 2. Сформированная пользователем задача мониторинга

Рассмотрим работу предлагаемого подхода на простом модельном примере.

Пусть в некоторой заданной области в рамках задачи мониторинга нужно измерить четыре показателя в заданных контрольных точках в заданной последовательности, причем первый показатель – в семи точках, второй – в четырех, третий – в пяти и четвертый – в трех.

На рис. 2 представлена сформированная пользователем задача мониторинга. Здесь на карте обозначены контрольные точки, каждая из которых обозначена цифрами. Первая цифра – это номер показателя, а вторая – порядковый номер точки, определяющий последовательность измерения показателя.

На этапе формирования списков в претенденты попало четыре робота. Причем все роботы-претенденты могут полностью решать одну или несколько подзадач, то есть измерять один или несколько показателей. Например, первый из роботов может измерять только показатель 1, второй – показатели 3 и 1 (в порядке возрастания затрат, например, энергозатрат), третий – показатели 2 и 4 и четвертый – показатель 4.

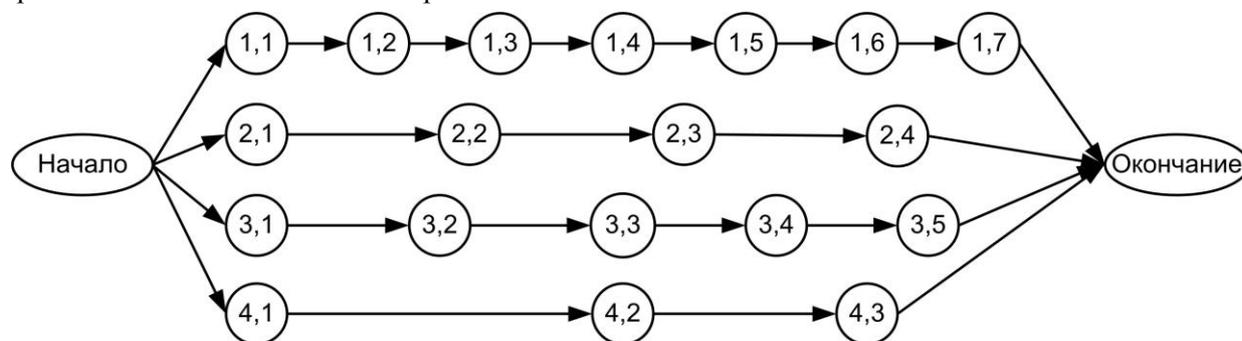


Рис. 3. Распределение подзадач между роботами без оптимизации

Без оптимизации состава распределение подзадач между роботами-претендентами может выглядеть, как на рис. 3.

После этапа оптимизации по критерию суммарных энергозатрат распределение подзадач между роботами группы представлено на рис. 4. В результате реализации второго этапа в составе группы осталось три робота, способных с меньшими суммарными энергозатратами решить целевую задачу.

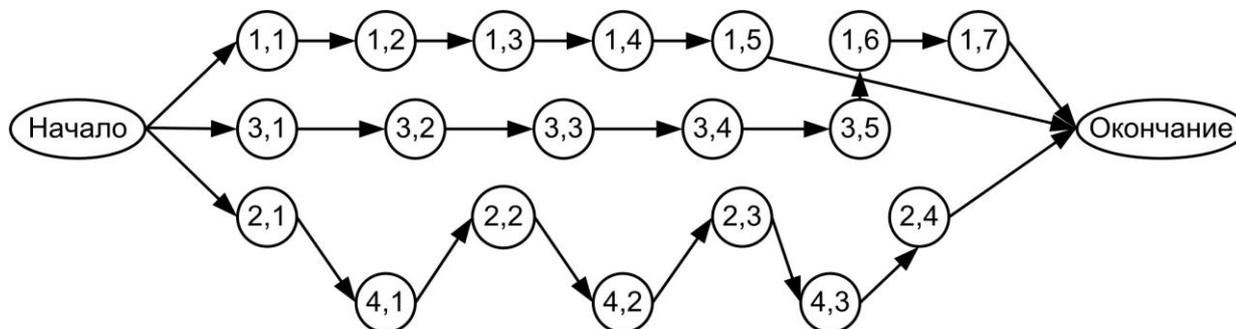


Рис. 4. Распределение подзадач между роботами после оптимизации

Заключение

Таким образом, предложен подход к решению задачи группового управления мобильными компонентами систем мониторинга, в частности, к решению подзадачи формирования оптимального или близкого к оптимальному состава группы мобильных компонентов (роботов) систем мониторинга для различных областей применения.

Предложенный подход базируется на принципах самоорганизации технических систем, технологиях мультиагентных систем и распределенного реестра.

Данный подход позволяет на основе исходных данных о поставленной задаче, условиях среды функционирования и функциональных возможностях имеющихся роботов автономно, т. е. без непосредственного участия человека сформировать группу роботов, способную эффективно решить поставленную перед ней задачу.

При этом предложенный подход позволяет обеспечить преимущественно использование тех роботов, которые могут измерять максимально возможное количество показателей, с использованием установленного на борту оборудования, то есть участвовать в решении максимально возможного количества подзадач.

Исследование проведено в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН, № гр. проекта 122020100270-3.

Литература

1. Катун, Е.С. Основные виды роботов и направления их дальнейшего развития / Е.С. Катун // Материалы XXXVIII Международной научно-практической конференции «Научные открытия 2018». – 2018. – С. 60–64.
2. Поляков, Р.Ю. Робот-инсектоптер для мониторинга окружающей среды / Р.Ю. Поляков, С.В. Ефимов, С.Ф. Яцун // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. – Вып. 3(15). – 2015. – С. 48–51.
3. Vogue, R. The role of robots in environmental monitoring / R. Vogue // Industrial Robot. – 2023. – Vol. 50, no. 3. – P. 369–375.
4. Давид, Б. Роботы для мониторинга окружающей среды: эффективные инструменты для контроля и охраны природы // URL <https://nauchniestati.ru/spravka/roboty-dlya-monitoringa-okruzhayushhej-sredy/> (дата обращения: 25.02.2024).
5. Шевченко, О.Ю. Использование беспилотных летательных аппаратов для ведения мониторинга использования территорий / О.Ю. Шевченко, А.Б. Боричевский // Экономика и экология территориальных образований. – 2015. – № 3. – С. 150–152.
6. Опыт использования АНПА типа МТ-2010 для экологических исследований в бухте Золотой Рог / А.В. Инзарцев, А.А. Борейко, А.И. Боровик и др. // Экологические системы и приборы. – 2018. – № 12. – С. 38–45.
7. Разработка группы мобильных роботов для мониторинга окружающей среды / И.О. Берестнев, Д.В. Зезюлин, Д.Ю. Тюгин и др. // Транспортные системы. – 2018. – № 2(8). – С. 19–24.

8. Сафаров, Д.И. Мониторинг гидросферы группой роботов / Д.И. Сафаров, С.В. Ефимов, С.Ф. Яцун // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2021). Сборник трудов по материалам VII Международной конференции и молодежной школы. Том 3. г. Самара, 20–24 сентября 2021 г. – Самара, 2021. – Т. 3. – С. 33753.

9. Куличенко, А.Д. Исследование возможностей применения гетерогенной группы роботов для поиска и локализации источников ионизирующего излучения / А.Д. Куличенко, Е.Ю. Смирнова // Экстремальная робототехника. – 2018. – № 1 (29). – № 1. – С. 171–179.

10. Каляев, И.А. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян. – М.: ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2009. – 280 с.

11. Каляев, И.А. Самоорганизующиеся системы группового управления интеллектуальными роботами / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 12. – С. 47–52.

12. Попов, С.Г. Исследование алгоритма обследования местности гетерогенной группой автономных мобильных роботов / С.Г. Попов, А.С. Крашенников, М.В. Чуватов // Робототехника и техническая кибернетика. – Т. 7, № 4. – 2019. – С. 278–290.

13. Дивеев, А.И. Применение эволюционного алгоритма «серого волка» для решения задачи оптимального мониторинга местности группой роботов / А.И. Дивеев, Е.Ю. Шмалько // *Cloud of science*. – 2018. – Т. 5, № 4. – С. 638–648.

14. Концепция формирования оперативной группы РТК / В.Х. Пшихопов, А.Р. Гайдук, М.Ю. Медведев и др. // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2020. – № 1 (211). – С. 6–16.

15. Orda-Zhigulina, M.V. Combined Method of Monitoring and Predicting of Hazardous Phenomena / M.V. Orda-Zhigulina, E.V. Melnik, D.Y. Ivanov *et al.* – In: Silhavy, R. (eds) *Software Engineering Methods in Intelligent Algorithms. CSOC 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*. – Vol. 984. – Springer, Cham, 2019. – P. 55–61.

16. Комбинированный подход к построению средств мониторинга и прогнозирования опасных природных явлений / М.В. Орда-Жигулина, Э.В. Мельник, Д.Я. Иванов и др. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 9. – С. 107–116.

17. Применение когнитивного анализа при построении имитационной модели системы мониторинга и прогнозирования поведения гидрозкосистемы / Г.В. Горелова, Э.В. Мельник, М.В. Орда-Жигулина, С.Г. Капустян // Системный анализ в проектировании и управлении: сборник научных трудов XXVI Международной научно-практической конференции, 13–14 октября 2022 года: [в 3 частях]. – СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. – 2023. – Ч. I. – С. 205–215.

18. Помазкова, Е.Е. Сравнительный анализ блокчейна и альтернативных технологий распределенного реестра / Е.Е. Помазкова // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2019. – № 4–2. – С. 43–50.

19. Мельник, Э.В. Метод обеспечения функционирования мобильных компонентов для систем мониторинга и диагностики на базе распределенного реестра / Э.В. Мельник, М.В. Орда-Жигулина // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – Вып. 2. – С. 36–41.

20. Разработка распределенной архитектуры поиска в задачах оптимизации / З.В. Нагоев, А.Н. Дуккардт, М.И. Анчеков и др. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2015. – № 1 (63). – С. 16–22.

21. Multi-agent Neurocognitive Architecture of an Intelligent Agent Pattern Recognition System / Z. Nagoev, I. Pshenokova, K. Bzhikhatlov *et al.* // *Procedia Computer Science*. – 2022, Vol. 213. – P. 504–509.

22. Формальная модель мультиагентного поиска оптимального плана поведения интеллектуального агента на основе самоорганизации распределенных нейрокогнитивных архитектур / З.В. Нагоев, И.А. Пшенокова, С.А. Канкулов и др. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2021. – № 3(101). – С. 21–31.

23. Иванов, Д.Я. Искусственные нейронные сети в группах микророботов / Д.Я. Иванов, В.Б. Шабанов // Вестник науки и образования. – 2019. – № 20-2 (74). – С. 23–29.

24. Косарев, Н.И. Продукционная модель представления знаний в системах поддержки принятия решения / Н.И. Косарев // Вестник Сибирского юридического института ФСКН России. – 2012. – №2(13). – С. 136–140.

25. Талипов, Н.Г. Методы построения и оценки нечётко-продукционной модели распределения заданий в системе электронного документооборота Роскомнадзора / Н.Г. Талипов, А.С. Каташёв, А.П. Кирпичников // Вестник Казанского технологического университета. – 2017. – Т. 20, № 2. – С. 100–106.

26. Kalyaev, I.A. Multiagent Management of Smart Internet Production / I.A. Kalyaev, A.A. Dyachenko, L.Zh. Usachev, S.G. Kapustyan // Proceedings of 2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC). IEEE. – 2018. – P. 1–8.

Поступила в редакцию 6 марта 2024 г.

Сведения об авторах

Капустян Сергей Григорьевич – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Южного научного центра РАН, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация, e-mail: kap56@mail.ru.

Мельник Эдуард Всеволодович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Южного научного центра РАН, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация, e-mail: evm17@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 12–25

DOI: 10.14529/mmph240202

CONCEPTUAL ASPECTS OF ORGANIZING THE OPERATION OF MOBILE COMPONENTS OF ENVIRONMENTAL MONITORING SYSTEMS

S.G. Kapustyan, E.V. Melnik

Southern Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation
E-mail: kap56@mail.ru

Abstract. To solve the problems of monitoring large remote areas and regions, it is advisable to use groups of mobile robots as mobile components of monitoring systems. The article discusses conceptual issues of organizing the autonomous functioning of such groups of robots. The effectiveness of solving monitoring problems by a group of mobile robots is largely determined by its composition. The paper proposes an approach to solving the problem of group control of mobile robots and, in particular, solving the subtask of forming the composition of groups of mobile robots for monitoring large areas, based on the principles of self-organization of technical systems, technologies of multi-agent systems and a distributed registry. The study demonstrates that to solve this problem, intelligent multi-agent systems can be used, which include task agents and mobile robot agents. The application of the proposed approach makes it possible to form, if not optimal, then close to optimal, a group composition capable of effectively solving the problems of monitoring large areas.

Keywords: *monitoring system; mobile component; group of mobile robots; multi-agent system; principles of self-organization; distributed registry; optimal group composition.*

References

1. Katun E.S. Osnovnye vidy robotov i napravleniya ikh dal'neyshego razvitiya (The Main Types of Robots and the Directions of their Further Development). *Materialy XXXVIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Nauchnye otkrytiya 2018"* (Proc. XXXVIII International Scientific and Practical Conference "Scientific Discoveries 2018"), 2018, pp. 60–64. (in Russ.).

2. Polyakov R.Yu., Efimov S.V., Yatsun S.F. Robot-Inscope for Environmental Monitoring. *Vestnik Voronezhskogo Instituta GPS MChS Rossii*, Iss. 3(15), 2015, pp. 48–51. (in Russ.).

3. Bogue R. The Role of Robots in Environmental Monitoring. *Industrial Robot*, 2023, Vol. 50, no. 3, pp. 369–375. DOI: 10.1108/IR-12-2022-0316
4. David B. *Robots for Environmental Monitoring: Effective Tools for Nature Control and Protection*. URL <https://nauchniestati.ru/spravka/roboty-dlya-monitoringa-okruzhayushhej-sredy/>
5. Shevchenko O.Yu., Borichevskiy A.B. Ispol'zovanie bespilotnykh letatel'nykh apparatov dlya vedeniya monitoringa ispol'zovaniya territoriy (The use of unmanned aerial vehicles to monitor the use of territories). *Ekonomika i ekologiya territorial'nykh obrazovaniy*, 2015, no. 3, pp. 150–152. (in Russ.).
6. Inzartsev A.V., Boreyko A.A., Borovik A.I., Vaulin Yu.V., Kamornyy A.V., L'vov O.Yu., Matvienko Yu.V., Sidorenko A.V., Sporyshev M.S., Shcherbatyuk A.F. Opyt ispolzovaniya avtonomnogo neobitaemogo podvodnogo apparata tipa mt-2010 dlya ekologicheskikh issledovaniy v bukhte Zolotoy Rog (Experience of the Ecological Investigation in Zolotoy Rog Bay using AUV of MT-2010 Type). *Ecological Systems and Devices*, 2018, no. 12, pp. 38–45. (in Russ.). DOI: 10.25791/esip.12.2018.306
7. Beresnev P.O., Zezyulin D.V., Tyugin D.Yu., Makarov V.S., Kuzin V.D., Kolenik M.R., Belyakov V.V., Kurkin A.A. Razrabotka gruppy mobil'nykh robotov dlya monitoringa okruzhayushchey sredy (Development of a Group of Mobile Robots for Environmental Monitoring). *Transportnye sistemy*, 2018, no. 2(8), pp. 19–24. (in Russ.).
8. Safarov D.I., Efimov S.V., Yatsun S.F. Monitoring gidrosfery gruppy robotov (Monitoring of the Hydrosphere by a Group of Robots). *Informatsionnye tekhnologii i nanotekhnologii (ITNT-2021). Sbornik trudov po materialam VII Mezhdunarodnoy konferentsii i molodezhnoy shkoly*. Tom 3. g. Samara, 20–24 sentyabrya 2021 g (Information technology and Nanotechnology (TNT-2021). Collection of works based on the materials of the VII International Conference and Youth School. Vol. 3. Samara, September 20–24, 2021), Samara, 2021, Vol. 3, p. 33753. (in Russ.).
9. Kulichenko A.D., Smirnova E.U. Possible Application of Heterogeneous Robot Group to Search and Localization of Ionizing Radiation Sources. *Ekstremal'naya robototekhnika (Extreme Robotics)*, 2018, Vol. 1, no. 1, pp. 171–179. (in Russ.).
10. Kalyaev I.A., Gayduk A.R., Kapustyan S.G. *Modeli i algoritmy kollektivnogo upravleniya v gruppakh robotov (Models and Algorithms of Collective Management in Groups of Robots)*. Moscow, OOO Izdatel'skaya firma “Fiziko-matematicheskaya literatura”, 2009, 280 p. (in Russ.).
11. Kaliaev I.A., Gaiduk A.R., Kapustyan S.G. Self-Organizing Systems of Group Control by Intelligent Robots. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2010, no. 12, pp. 47–52. (in Russ.).
12. Popov S., Krasheninnikov A., Chuvatov M. The Study of the Survey Algorithm of the Heterogeneous Group of Autonomous Mobile Robots. *Robotics and Technical Cybernetics*, 2019, Vol. 7, no. 4, pp. 278–290. (in Russ.). DOI: 10.31776/RTCJ.7404
13. Diveev A.I., Shmalko E.Yu. Application of the Evolutionary Algorithm of “Gray Wolf” to Solve the Problem of Optimal Area Monitoring by a Group of Robots. *Cloud of science*, 2018, Vol. 5, no. 4, pp. 638–648. (in Russ.).
14. Pshikhopov V.Kh., Gaiduk A.R., Medvedev M.Yu., Gontar D.N., Solovjev V.V., Martyanov O.V. Concept of a Robot Group Calculation. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2020, no. 1 (211), pp. 6–16. (in Russ.). DOI: 10.18522/2311-3103-2020-1-6-16
15. Orda-Zhigulina M.V., Melnik E.V., Ivanov D.Y., Rodina A.A., Orda-Zhigulina D.V. Combined Method of Monitoring and Predicting of Hazardous Phenomena. In: Silhavy, R. (eds) *Software Engineering Methods in Intelligent Algorithms. CSOC 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 984*. Springer, Cham, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-19807-7_6
16. Orda-Zhigulina M.V., Melnik E.V., Ivanov D.Ya., Rodina A.A., Orda-Zhigulina D.V. Combined Approach to Building Monitoring Facilities of Dangerous Phenomenon. *Izvestiya Tula State University (Izvestiya TulGU)*, 2018, no. 9, pp. 107–116. (in Russ.).
17. Gorelova G.V., Mel'nik E.V., Orda-Zhigulina M.V., Kapustyan S.G. Primenenie kognitivnogo analiza pri postroenii imitatsionnoy modeli sistemy monitoringa i prognozirovaniya povedeniya gidroekosistemy (Application of cognitive analysis in the construction of a simulation model of a system for monitoring and predicting the behavior of a hydroecosystem). *Sistemnyy analiz v proektirovanii i upravlenii: sbornik nauchnykh trudov XXVI Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, 13–14 oktyabrya 2022 goda: [v 3 chastyakh] (System analysis in design and management: Proc. XXVI In-

ternational Scientific and Practical Conference, October 13–14, 2022: [in 3 parts]. Saint-Petersburg: POLITEKh-PRESS Publ., 2023, Part I, pp. 205–215. (in Russ.).

18. Pomazkova E.E. Sravnitel'nyy analiz blokcheyna i al'ternativnykh tekhnologiy raspredelenno reestra (Comparative analysis of blockchain and alternative distributed ledger technologies). *Mezhdunarodnyy zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2019, no. 4–2, pp. 43–50. DOI: 10.24411/2500-1000-2019-10749

19. Melnik E.V., Orda-Zhigulina M.V. Metod obespecheniya funktsionirovaniya mobil'nykh komponentov dlya sistem monitoringa i diagnostiki na baze raspredelenno reestra (A Method for Ensuring the Functioning of Mobile Components for Monitoring and Diagnostic Systems Based on a Distributed Registry). *Izvestiya Tula State University (Izvestiya TulGU)*, 2023, Iss. 2, pp. 36–41. (in Russ.).

20. Dukkardt A.N., Anchekov M.I., Nagoev Z.V., Zammoev A.U., Nagoeva O.V., Hamukov Yu.Kh. Razrabotka raspredelennoy arkhitektury poiska v zadachakh optimizatsii (Development of a distributed search architecture for optimization tasks). *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS*, 2015, no. 1(63), pp. 16–22. (in Russ.).

21. Nagoev Z., Pshenokova I., Bzhikhatlov K., Kankulov S., Atalikov B. Multi-agent neurocognitive architecture of an intelligent agent pattern recognition system. *Procedia Computer Science*, 2022, Vol. 213, pp. 504–509. 10.1016/j.procs.2022.11.097

22. Nagoev Z.V., Pshenokova I.A., Kankulov S.A., Atalikov B.A., Airan A.A. Multi-agent Search Formal Model for an Intelligent Agent Optimal Behavior Plan Based on Distributed Neurocognitive Architectures Self-Organization. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2021, no. 3, pp. 21–31. (in Russ.). DOI: 10.35330/1991-6639-2021-3-101-21-31

23. Ivanov D.Ya., Shabanov V.B. Artificial Neural Networks in Micro-Robot Groups. *Vestnik nauki i obrazovaniya*, 2019, no. 20-2 (74), pp. 23–29. (in Russ.).

24. Kosarev N.I. Produktsionnaya model' predstavleniya znaniy v sistemakh podderzhki prinyatiya resheniya (The Production Model of Knowledge Representation in Decision Support Systems). *Vestnik Sibirskogo yuridicheskogo instituta FSKN Rossii*, 2012, no. 2(13), pp. 136–140. (in Russ.).

25. Talipov N.G., Katasyev A.S., Kirpichnikov A.P. Metody postroeniya i otsenki nechetko-produktsionnoy modeli raspredeleniya zadaniy v sisteme elektronno dokumentooborota Roskomnadzora (Methods for constructing and evaluating a fuzzy production model of assignment distribution in the Roskomnadzor electronic document management system). *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta*, 2017, Vol. 20, no. 2, pp. 100–106. (in Russ.).

26. Kalyaev I.A., Dyachenko A.A., Usachev L.Z., Kapustyan S.G. Multiagent Management of Smart Internet Production. *2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC)*, Chelyabinsk, Russia, 2018, pp. 1–8. DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570119.

Received March 6, 2024

Information about the authors

Kapustyan Sergey Grigorievich is Dr. Sc. (Engineering), Leading Scientist of the Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation, e-mail: kap56@mail.ru.

Melnik Eduard Vsevolodovich is Dr. Sc. (Engineering), Chief Scientist, Head of Laboratory, Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation, e-mail: evm17@mail.ru.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОЕВОГО АЛГОРИТМА ПЛАНИРОВАНИЯ ПУТИ В ДВУХМЕРНОЙ НЕКАРТОГРАФИРОВАННОЙ СРЕДЕ

В.А. Костюков, И.М. Медведев, М.Ю. Медведев, В.Х. Пшихопов

Южный федеральный университет, г. Таганрог, Российская Федерация

E-mail: medvmihal@sfnedu.ru

Аннотация. Исследуется эффективность роевых алгоритмов планирования пути в двумерной некартографированной среде. В качестве критериев эффективности используется число итераций в процессе поиска пути и оценка вероятности успешного достижения цели. В ходе исследования изменяется максимальная скорость перемещения роя и максимальное число итераций, в течение которых допускается отсутствие уменьшения расстояния до цели. Предполагается, что каждая частица может определять состояние среды в некоторой локальной области. Под определением состояния имеется в виду определение наличия препятствия в ячейке среды. Для решения проблемы локальных минимумов предлагается вводить виртуальное препятствие в точке локального минимума. Данный подход в целом известен. Новизна этого подхода заключается в том, что решается задача обнаружения локального минимума роем частиц. При одиночном движении обнаружение локального минимума тривиально и сводится к проверке движения к ранее посещенным ячейкам. В групповом случае требуется новое решение задачи обнаружения локального минимума. В данной статье приводится обзор и анализ задачи планирования пути, формулировка проблемы, постановка задачи, математическое описание алгоритмов глобального роевого планирования пути с предложенными модификациями, псевдокоды алгоритмов планирования и результаты численного исследования. В ходе численных исследований определены критерии эффективности планирования пути в среде размером 100×100 ячеек со случайно размещаемыми препятствиями.

Ключевые слова: роевые алгоритмы; двумерная среда; локальный минимум; виртуальные препятствия; локальный поиск; виртуальное препятствие.

Введение

Большинство известных алгоритмов планирования пути базируются на известной карте среды [1, 2]. При отсутствии карты среды высокую эффективность показывают алгоритмы, заимствованные в живой природе [3]. Можно выделить несколько наиболее популярных алгоритмов, используемых в задачах планирования пути. К ним относятся алгоритмы роя частиц (particle swarm optimization – PSO) [4], муравьиный алгоритм [5], пчелиный алгоритм [6], нейросетевые алгоритмы [7], эволюционные алгоритмы [8].

Нейросетевые алгоритмы планирования пути достаточно активно разрабатываются в настоящее время. В работах ведущей научной школы профессора З.В. Нагоева детально обсуждаются проблемы создания нейрокогнитивных мультиагентных систем, рассматриваются модели нейрокогнитивных систем управления роботом, методы и алгоритмы учета контекста диалога, методы и алгоритмы обучения рассматриваемых архитектур, методы и алгоритмы учета неявных знаний и фактов [9–13]. Авторы выражают признательность профессору З.В. Нагоеву за плодотворные дискуссии и считают своим приятным долгом поздравить профессора З.В. Нагоева с юбилеем.

Наиболее эффективные результаты в области планирования пути получены с применением нейронной сети, называемой визуальным трансформером. Однако такая нейронная сеть требует значительного объема вычислений. Кроме того, для обучения трансформера требуется значительный объем данных, который может достигать миллиардов примеров. Относительно простые нейронные сети, независимо от того, обучаются они с подкреплением или с учителем, не обеспечивают высокой надежности. Так, результаты многочисленных работ [14–17] показывают, что

для большинства простых относительно нейронных сетей вероятность успешного достижения целевой точки не превышает 80–90 %. В этой связи такие нейросетевые планировщики дополняются алгоритмами устранения коллизий и выхода из локальных минимумов.

Эволюционные алгоритмы обладают значительно меньшей вычислительной сложностью. В этой связи они также применяются в задачах планирования пути. Наиболее известны генетические алгоритмы, которые представляют собой оптимизационную процедуру, основанную на сочетании случайного поиска и эволюционных способах отбора наилучших особей. Генетические алгоритмы могут применяться как для планирования пути одиночных подвижных объектов [18, 19], так и для построения маршрутов групп роботов [20]. Так, в работе [18] решена задача оптимизации траектории движения космического аппарата по критерию минимальных затрат энергии при переходе от одной орбиты к другой. Для решения задачи нахождения оптимального управления использован генетический алгоритм, с помощью которого осуществлен расчет числа активных участков движения космического аппарата. В работе [19] разработан генетический алгоритм, который применен для планирования пути в динамической среде. Однако в данной статье отсутствуют оценки времени планирования пути, что не дает оценить эффективность примененного алгоритма для динамической среды. В статье [19] рассмотрена задача планирования пути группы беспилотных летательных аппаратов. Проблема сформулирована в виде множественной задачи коммивояжера, для решения которой предложен генетический алгоритм. Эволюционные подходы, в частности генетические алгоритмы, показывают высокую эффективность в статических задачах, характеризуемых большим числом вариантов решений. Однако они, как и другие методы случайного поиска, не гарантируют нахождение глобального оптимума.

Роевые алгоритмы поисковой оптимизации относятся к наиболее часто применяемым алгоритмам среди современных биоэвристик. На них приходится около половины всех ссылок в международных базах данных [21].

Так, в работе [22] предложен метод планирования глобального пути по критерию его длины и гладкости, который базируется на сочетании алгоритма PSO для планирования глобального пути и алгоритма вероятностных дорожных карт [1] для планирования локального пути. Такой подход позволяет устранить основной недостаток алгоритма PSO – попадание в локальные минимумы. Данная проблема является одной из наиболее распространенных при планировании пути [23, 24]. Показано, что предложенный метод способен функционировать в среде с невыпуклыми препятствиями. Однако метод сравнивался только с алгоритмом Дейкстры, который не предназначен для получения гладкого пути и не отличается высокой вычислительной эффективностью.

Для выпуклых препятствий метод PSO применяется более широко в задачах планирования пути. Так, в работе [25] производится сравнение метода PSO с бактериальным методом. Методами численного моделирования в неопределенной среде с несколькими выпуклыми препятствиями показано, что бактериальный алгоритм показывает более высокое быстродействие.

В статье [26] алгоритм PSO также используется для нахождения кратчайшего пути в плоской среде, разбитой на ячейки. Путем моделирования показано, что в простой среде с несколькими препятствиями, занимающими по одной ячейке, алгоритм PSO находит оптимальный по длине путь. Однако рассмотрена среда размерами 10×10 ячеек с одним и тремя препятствиями, что не дает возможности обобщить полученные результаты на более общий случай.

Более сложные среды рассмотрены в работах [27, 28]. В статье [27] рассмотрена среда размером 500×500 клеток, содержащая множество прямоугольных препятствий, расставленных в шахматном порядке. Препятствия не пересекаются друг с другом и не образуют тупики или углы. Для такой относительно простой среды численно исследован глобальный роевой алгоритм при различном числе частиц в рое. Основным отличием алгоритма, исследуемого в работе [27], является учет сенсорной системы, которая позволяет обнаруживать препятствия. Исследована сходимость алгоритма поиска пути при различных дистанциях системы обнаружения препятствий. В статье [28] рассмотрена более сложная среда, в которой препятствия могут образовывать тупики и углы. Используется алгоритм PSO с инерционным коэффициентом, который адаптируется во время движения. В процессе инициализации роя предлагается использовать хаотический подход, заимствованный из нелинейной динамики. Численные исследования показали, что предложенный алгоритм позволяет снизить число итераций для нахождения пути.

В последнее время появились работы по планированию пути для беспилотных летательных аппаратов, базирующиеся на алгоритме PSO. Кроме повышения размерности в трехмерной среде более сложные управляемые объекты [3, 29–31].

Так, в работе [32] исследуется задача планирования движения беспилотного летательного аппарата на основе алгоритма PSO. В статье использован стандартный алгоритм с инерциальным весом. При численном исследовании учтены наличие лидара на борту и модель кинематики движения, которая редуцирована до двумерного случая, т. е. планировалось движение в горизонтальной плоскости. Аналогично в статье [33] рассматривается задача планирования пути беспилотного летательного аппарата в горизонтальной плоскости. При этом начальный путь генерируется с использованием диаграмм Вороного и алгоритма Дейкстры, а алгоритм PSO с инерциальным коэффициентом используется для оптимизации начального пути в динамической конфликтной среде. Проведенное численное исследование показало эффективность предлагаемого подхода. Однако подчеркнем, что рассмотрена фактически двумерная среда и запрещенные области являются выпуклыми.

В работах [34, 35] рассмотрена задача планирования пути в трехмерной среде. В статье [34] используется стандартный алгоритм PSO, который модифицируется с целью улучшения сходимости и вычислительной сложности. Предложенный алгоритм позволяет проводить параллельный поиск по всем трем координатам и учитывает ограничения на скорости. При численном исследовании рассмотрены статические трехмерные среды с препятствиями, описываемыми прямоугольными параллелепипедами. Предложенные улучшения метода PSO позволили существенно в несколько раз уменьшить время нахождения траектории. В работе [35] исследуются различные варианты реализации алгоритма PSO в задаче планирования пути беспилотного летательного аппарата в трехмерной среде. Учитываются запретные области в виде вертикальных цилиндров, а также рельеф поверхности. Вокруг беспилотного летательного аппарата вводятся области опасности и коллизии. Предлагается версия алгоритма, названная сферическим PSO. Предложенный вариант сравнивается с другими версиями PSO в различных трехмерных средах. Путем численных исследований показано, что предлагаемый алгоритм PSO обеспечивает в среднем наименьшее число итераций при планировании пути. Также приводятся результаты натуральных экспериментов.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что наиболее исследованным алгоритм PSO является в средах с выпуклыми препятствиями. Вопрос функционирования алгоритма PSO в средах с локальными минимумами проработан недостаточно. В этой связи в данной статье предлагаются:

- а) алгоритм обнаружения локального минимума роением частиц;
- б) алгоритм устранения локальных минимумов путем введения виртуальных препятствий.

1. Постановка задачи

Рассматривается глобальный алгоритм роя частиц [36] в пространстве второго порядка. Обозначим как N число частиц, положение и скорость которых в момент t описывается векторами $x_i(t) = [x_{i1}, x_{i2}]$ и $v_i(t) = [v_{i1}, v_{i2}]$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Изменение положения частицы описывается уравнениями кинематики материальной точки:

$$x_{i1}(t+1) = x_{i1}(t) + v_{i1}(t), x_{i2}(t+1) = x_{i2}(t) + v_{i2}(t). \quad (1)$$

Скорости v_{i1} , v_{i2} в выражении (1) являются управлением, они определяются выражением [37]:

$$v_{ij}(t+1) = wv_{ij}(t) + k_1 r_{1j}(t) [x_{ij}^L(t) - x_{ij}(t)] + k_2 r_{2j}(t) [x_j^G(t) - x_{ij}(t)], \quad (2)$$

здесь $j = 1, 2$ – номер координаты; $x_{ij}^L(t)$ – значение j -й координаты, соответствующее наилучшему значению целевой функции J , достигнутому i -й частицей к моменту времени t ; $x_j^G(t)$ – значение j -й координаты, соответствующее наилучшему значению целевой функции J , достигнутому всем роением; k_1 и k_2 – положительный коэффициенты, определяющие важность локальной и глобальной компонент; $r_{1j}, r_{2j} [0,1]$ – случайные числа, вносящие элемент хаотичности в движение роя; w – весовой коэффициент инерции.

Скорости $v_{ij}(t)$ ограничены по величине максимальным значением, т. е.:

$$\begin{cases} v_{ij}(t+1) = (2), \text{ если } v_{ij}(t+1) < v_{\max}, \\ v_{\max}, \text{ если } v_{ij}(t+1) \geq v_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве целевой функции J в задачи движения в целевую точку используется Евклидово расстояние от текущего положения частицы роя до целевой точки:

$$J_i = \sqrt{(x_{i1} - x_{t1})^2 + (x_{i2} - x_{t2})^2}, \quad (4)$$

где x_{t1} , x_{t2} – координаты целевой точки.

Коэффициенты r_{1j}, r_{2j} вычисляются в соответствии с выражениями

$$r_{1j} = \text{rand}(0,1), r_{2j} = 1 - r_{1j}, \quad (5)$$

где $\text{rand}(0,1)$ – функция генерации случайного равномерно распределенного в диапазоне (0, 1) числа.

В качестве критерия останова алгоритма используется выполнение одного из двух условий:

$$J_i < \varepsilon, \quad (6)$$

$$k_{it} > k_{\max}, \quad (7)$$

где k_{it} – требуемая точность достижения целевой точки; k_{\max} – максимально допустимое число итераций. При этом неравенство (6) должно выполняться для одного из $i = 1, 2, \dots, N$. Иными словами, цель считается достигнутой, если любая из частиц достигает целевой точки.

Требуется решить следующие задачи:

- предложить и исследовать алгоритм обнаружения локального минимума роем частиц;
- предложить и исследовать алгоритмы выхода из обнаруженного локального минимума;
- исследовать влияние параметров роевого алгоритма, размер роя, весовой коэффициент инерции w и коэффициенты k_1, k_2 на число итераций, необходимых для достижения целевой точки.

2. Описание алгоритмов

Глобальный алгоритм роя частиц может быть описан ПСЕВДОКОДОМ 1, представленным ниже.

ПСЕВДОКОД 1. Глобальный роевой алгоритм

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ: число частиц N , целевая функция J , координаты целевой точки (x_{t1} , x_{t2}), координаты начальной точки (x_{01} , x_{02}), значения коэффициентов w, k_1, k_2 , максимальное значение скорости v_{\max} , требуемая точность достижения целевой точки, максимально допустимое число итераций k_{\max} .

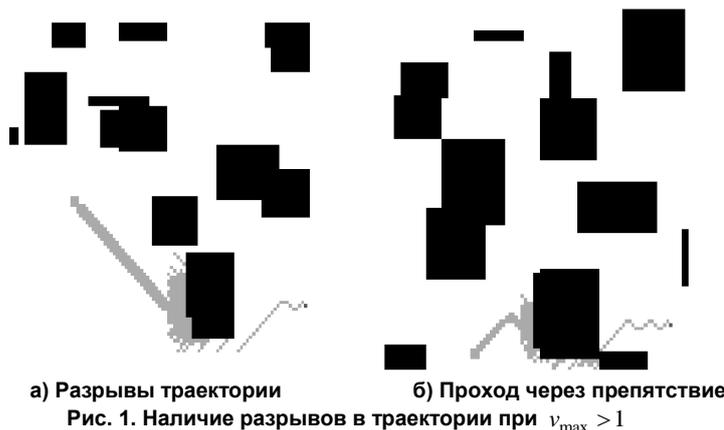
ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ: Массив координат x_{ij} .

1. СОЗДАНИЕ РОЯ N ЧАСТИЦ.
2. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ J_i , ЛОКАЛЬНОЙ x_{ij}^L И ГЛОБАЛЬНОЙ x_j^G ЛУЧШИХ ПОЗИЦИЙ.
3. В ЦИКЛЕ ПОКА НЕ ВЫПОЛНЕНО (6) ИЛИ (7):
 - 3.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ k_1, k_2 .
 - 3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ v_{i1}, v_{i2} .
 - 3.3. ЕСЛИ СЛЕДУЮЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ НЕ ЗАНЯТО ПРЕПЯТСТВИЕМ, ТО ОБНОВЛЕНИЕ x_{ij} КООРДИНАТ СОГЛАСНО (1).
 - 3.4. ЕСЛИ ОБНАРУЖЕН ЛОКАЛЬНЫЙ МИНИМУМ, ТО ВЫПОЛНЕНИЕ АЛГОРИТМА ВЫХОДА
 - 3.5. ОБНОВЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ $J_i, x_{ij}^L(t), x_j^G(t)$.
 - 3.6. ОБНОВЛЕНИЕ КООРДИНАТ x_{ij} .
 - 3.7. УВЕЛИЧЕНИЕ СЧЕТЧИКА ИТЕРАЦИЙ.
 - 3.8. КОНЕЦ ЦИКЛА.

4. КОНЕЦ АЛГОРИТМА.

Предварительное исследование алгоритма, описанного в ПСЕВДОКОДЕ 1, методами численного моделирования привело к следующим модификациям и условиям реализации алгоритма роя частиц.

Реализация алгоритма произведена для дискретного случая. Среда разбита на отдельные ячейки. Для получения непрерывного следа, оставляемого роем при движении от начальной в целевую точку, необходимо, чтобы перемещение частицы на одном шаге осуществлялось в соседнюю ячейку. Отсюда следует, что максимальная скорость перемещения равна $v_{max} = 1$. Нарушение указанного условия может приводить к разрывам в траектории и эффекту пробития препятствий, которые показаны на рис. 1.



При условии, что значения координат x_{ij} и скоростей v_{ij} изменяются дискретно и ограничены единицей на одном такте, более эффективным является аддитивное добавление случайных вариаций в алгоритм вычисления скоростей (2). В данной работе предложена следующая форма уравнений (1), (2):

$$x_{i1}(t+1) = x_{i1}(t) + v_{i1}(t) + r_{1j}(t), \quad x_{i2}(t+1) = x_{i2}(t) + v_{i2}(t) + r_{2j}(t), \quad (8)$$

$$v_{ij}(t+1) = wv_{ij}(t) + k_1[x_{ij}^L(t) - x_{ij}(t)] + k_2[x_j^G(t) - x_{ij}(t)], \quad (9)$$

где r_{1j}, r_{2j} – случайные числа, принимающие значения $-1, 0$ или 1 с равной вероятностью.

Для адаптивной корректировки коэффициенты k_1, k_2 предлагается выбирать в виде функций времени и отдельно настраивать их для каждого элемента роя. Тогда эти коэффициенты обозначаются как $k_{ij}^L(t)$ и $k_{ij}^G(t)$, $j = 1, 2$ для каждого i -го элемента роя на t -шаге. Для их вычисления предлагается следующая процедура. Предположим, что эти коэффициенты нормированы к единице:

$$k_{ij}^L(t) + k_{ij}^G(t) = 1. \quad (10)$$

Пусть $b_{ij}^L(t) = |x_{ij}^L(t) - x_{ij}(t)|$, $b_{ij}^G(t) = |x_j^G(t) - x_{ij}(t)|$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, N$ есть абсолютные отклонения наилучших достигнутых на данной итерации t локальных и глобальных координат от соответствующих значений координат целевой точки.

Введем следующие величины, характеризующие динамику изменения локальных и глобальных координат для i -го элемента на данном t -шаге:

$$\Delta b_{ij}^L(t) = b_{ij}^L(t) - b_{ij}^L(t-1), \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

$$\Delta b_{ij}^G(t) = b_{ij}^G(t) - b_{ij}^G(t-1), \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Заметим, что при уменьшении величины b_{ij}^L , т. е. когда выполнено $\Delta b_{ij}^L(t) < 0$, локальное движение i -й частицы роя происходит успешно, причем тем лучше, чем меньше $\Delta b_{ij}^L(t)$. Анало-

гично при $\Delta b_{ij}^G(t) < 0$ глобальное движение роя как целого происходит успешно, причем тем лучше, чем меньше $\Delta b_{ij}^G(t)$.

Для сопоставления обоих факторов рассмотрим для некоторого i -го элемента роя следующее условие:

$$\Delta b_{ij}^G(t) \geq \Delta b_{ij}^L(t). \quad (13)$$

Если условие (13) выполнено, тогда скажем, что локальное перемещение i -го элемента роя по j -й координате на данный момент t происходит не менее успешно, чем соответствующее глобальное. При этом целесообразно увеличить коэффициент влияния локального перемещения $k_{ij}^L(t) \rightarrow k_{ij}^L(t+1) \geq k_{ij}^L(t)$. Тогда в силу условия (10) заключаем, что коэффициент k_{ij}^G должен уменьшиться, причем по модулю на ту же величину, на которую увеличился коэффициент k_{ij}^L . Аналогично, если выполнено условие, обратное (13), тогда будем говорить, что глобальное перемещение i -го элемента роя по j -й координате на данный момент t происходит более успешно, чем соответствующее локальное.

Чтобы удовлетворить всем указанным выше условиям, можно предложить следующий закон адаптивной корректировки коэффициентов k_{ij}^L и k_{ij}^G :

$$k_{ij}^L(t+1) = \begin{cases} k_{ij}^L(t) + \mu_{ij}^L(t)k_{ij}^G(t), & \text{если } \Delta b_{ij}^G(t) \geq \Delta b_{ij}^L(t); \\ k_{ij}^L(t)(1 - \mu_{ij}^G(t)), & \text{иначе;} \end{cases} \quad (14)$$

$$k_{ij}^G(t+1) = \begin{cases} k_{ij}^G(t)(1 - \mu_{ij}^L(t)), & \text{если } \Delta b_{ij}^G(t) \geq \Delta b_{ij}^L(t); \\ k_{ij}^G(t) + \mu_{ij}^G(t)k_{ij}^L(t), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

Величины $\mu_{ij}^L(t)$ и $\mu_{ij}^G(t)$ заданы следующими выражениями, изменяющимися на единичном отрезке $[0, 1]$:

$$\mu_{ij}^L(t) = \text{th} [0, 5\eta \hat{\Delta} b_{ij}(t)], \quad (16)$$

$$\mu_{ij}^G(t) = \text{th} [-0, 5\eta \hat{\Delta} b_{ij}(t)], \quad (17)$$

где th – функция гиперболического тангенса.

В выражениях (16), (17) введено обозначение:

$$\hat{\Delta} b_{ij}(t) = \Delta b_{ij}^G(t) - \Delta b_{ij}^L(t). \quad (18)$$

Также принято, что η – некоторый коэффициент, имеющий размерность обратной длины и характеризующий степень нарастания $\mu_{ij}^L(t)$ / спада $\mu_{ij}^G(t)$ с ростом $\hat{\Delta} b_{ij}(t)$. Коэффициент η подбирается эмпирически.

В частности, в этот коэффициент можно внести элемент случайности, свойственный роевым алгоритмам. Тогда он становится функцией j и t . Один из простейших случаев сделать это следующий:

$$\eta = \eta_j(t) = \eta_{min} + r_j(t)(\eta_{max} - \eta_{min}), \quad (19)$$

где $r_j(t)$ – есть случайное число с равномерным распределением в интервале $[0, 1]$ и генерируемое для каждого i -го элемента на временном шаге t , а η_{min} , $\eta_{max} > \eta_{min}$ – некоторые заданные положительные числа – пределы изменения параметра $\eta_j(t)$.

Выполнение ПСЕВДОКОДА 1 требует наличия алгоритма обнаружения локального минимума и алгоритма выхода из этого локального минимума.

Наиболее простым способом выхода из локальных минимумов является внесение случайных вариаций в движение роя. Как следует из выражений (8), (9), такие случайные вариации присутствуют в самом алгоритме роя частиц. В данной статье предлагается числа r_{1j}, r_{2j} приравнять к нулю при движении в свободной области пространства. При попытке движения в ячейку, заня-

тую препятствием, числа r_{1j}, r_{2j} генерируются случайной процедурой. Как показали результаты численных исследований, случайного поиска в локальной области недостаточно для выхода из локальных препятствий. Например, на рис. 2 представлены результаты моделирования, при которых наблюдается попадание в локальный минимум.

При одиночном планировании движения детерминированными алгоритмами обнаружение локального минимума не представляет проблемы. Достаточно обнаружить движение в уже посещенную ячейку, чтобы сделать вывод о наличии локального минимума в текущем положении.

В рассматриваемом случае роя частиц задача осложнена двумя факторами. Первый фактор заключается в наличии компоненты, обусловленной случайными вариациями коэффициентов k_1 и k_2 . Второй фактор заключается в наличии роя.

В данной статье исследуется для обнаружения локального минимума предлагается эвристический алгоритм, определяющий отсутствие изменений в координатах $x_j^G(t)$, $j = 1, 2$. Данный алгоритм содержит настроечный параметр n_{lm} , означающий число итераций, в течение которых координаты, соответствующие наилучшему значению целевой функции J , достигнутому всем роем, не изменяются. При этом точкой локального минимума считается точка $[x_1^G(t), x_2^G(t)]$.

Для выхода из локального минимума предлагается вводить виртуальное препятствие, положение которого совпадает с точкой локального минимума. Виртуальные препятствия активно используются для различных задач обхода препятствий, выхода из локальных минимумов, учета ограничений на маневренность подвижных объектов [24, 37].

Предлагаемый вариант выхода из локального минимума описывается ПСЕВДОКОДОМ 2, представленным ниже.

ПСЕВДОКОД 2. Вариант 1 выхода из локального минимума.

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ: значение n_{lm} , координаты глобального минимума $x_j^G(t)$, $j = 1, 2$, текущие координаты частиц роя x_{ij} .

1. ЕСЛИ КООРДИНАТЫ $x_j^G(t) = x_j^G(t-1)$, $j = 1, 2$, ТО ИНКРЕМЕНТ ДЕТКЕТОРА ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА $d_{lm} = d_{lm} + 1$. ИНАЧЕ $d_{lm} = 1$.

2. ЕСЛИ $d_{lm} > n_{lm}$, ТО:

2.1. ДОБАВЛЕНИЕ ВИРТУАЛЬНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ В ТОЧКУ $x_j^G(t)$.

2.2. СЛУЧАЙНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ ЧАСТИЦ, НАХОДЯЩИХСЯ В ЛОКАЛЬНОМ МИНИМУМЕ.

2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ $x_{ij}^L(t)$.

2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОВОГО ЗНАЧЕНИЯ $x_j^G(t)$.

3. КОНЕЦ АЛГОРИТМА.

Численное исследование алгоритмов, описанных в ПСЕВДОКОДЕ 1 и ПСЕВДОКОДЕ 2, показывает, что данный способ детектирования и выхода из локальных минимумов чувствителен к параметру n_{lm} . При небольшом значении параметра n_{lm} алгоритм может устанавливать препятствие наиболее перспективной для движения роя точке. Например, на рис. 3 приведен пример, на котором из-за случайных флуктуаций рой временно остановился у края препятствия. При этом алгоритм при $n_{lm} = 3$, установил виртуальное препятствие, отмеченное окружностью. Данная проблема решается путем увеличения параметра n_{lm} , однако при этом число циклов при выходе из тупиков и углов значительно возрастает.

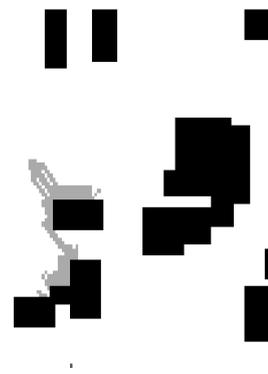


Рис. 2. Попадание роевого алгоритма в локальный минимум

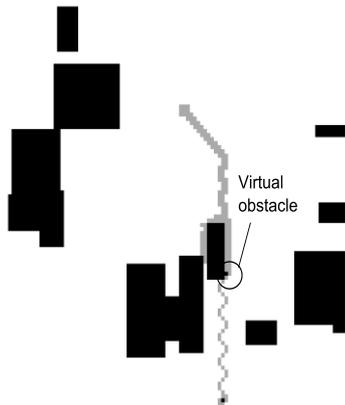


Рис. 3. Установка виртуального препятствия, мешающего движению

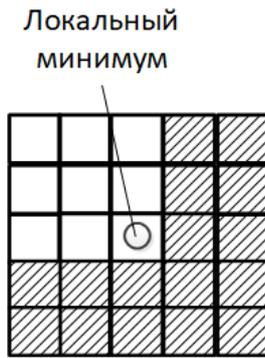


Рис. 4. Анализируемая окрестность локального минимума. Заштрихованы ячейки, занятые препятствиями

В связи с выявленными недостатками алгоритм выхода из локального минимума дополняется анализом локальной области вокруг частицы, находящейся в точке $[x_1^G(t), x_2^G(t)]$. В ходе данного анализа рассматривается область, включающая ближайшие к обнаруженному локальному минимуму 24 ячейки пространства, представленные на рис. 4. Основная цель проводимого анализа – обнаруживать углы, после чего в область локального минимума добавляются виртуальные препятствия.

3. Результаты численного моделирования предложенных алгоритмов и обсуждение

Вначале исследуем исходный роевой алгоритм, описанный в разделе 1. При исследовании будем определять два параметра – среднее число шагов для достижения цели и процент успешного достижения цели.

Моделирование проводилось при объеме экспериментов $N_{\text{э}} = 100$. Размеры моделируемой среды составляют 100×100 ячеек. В среде присутствует 15 препятствий. Минимальные ширина и высота препятствий составляют 1 ячейку. Максимальная ширина и высота препятствий равны 25 ячейкам. Положение нижнего левого угла, ширина и высота прямоугольных препятствий генерируются случайным образом. Максимально допустимое число итераций алгоритма составляет 1200.

Положение начальной и целевой точки, между которыми должен быть проложен путь, также задаются случайным образом. При этом они генерируются таким образом, чтобы расстояние до препятствий было не менее 2 ячеек.

Число частиц роя $N = 9$. Начальное положение частиц роя генерируется следующим образом. Первая частица генерируется в начальной точке траектории. Остальные частицы располагаются в ближайших 8 ячейках, расположенных вокруг начальной точки траектории.

Значения коэффициентов k_1 и k_2 , определяющих веса локальной и глобальной компонент, равны 0,5. Инерционный весовой коэффициент равен $w = 1,0$. Число итераций, при котором не наблюдается уменьшение расстояния до целевой точки и фиксируется локальный минимум, равно $n_{lm} = 5$.

Результаты численного исследования исходного роевого алгоритма представлены в табл. 1. При исследовании в алгоритме использовались случайные коэффициенты r_{1j}, r_{2j} , аддитивно добавляемые в уравнения обновления положений (8). При этом указанные коэффициенты изменяются в соответствии с выражениями

$$r_{ij}(t) = \text{round}(-r_{\max} + r_{\max} \text{rand}), \quad (20)$$

где r_{\max} – максимальное число ячеек, на которые может быть осуществлено перемещение по одной координате за один такт; round – операция округления до ближайшего целого числа; rand – генератор случайного числа, равномерно распределенного в диапазоне $[0, 1]$.

Таблица 1

Исследование исходного роевого алгоритма			
Значение r_{\max}	1	2	4
Среднее число шагов	183	210	155
Доля успешных запусков	90 %	88 %	90 %

В ходе исследования предложенного в данной статье алгоритма изменялся параметр $n_{lm} = 5$. Результаты исследования представлены в табл. 2.

Исследование модифицированного роевого алгоритма

Значение n_{lm}	5	7	10
Среднее число шагов	159	100	93
Доля успешных запусков	94 %	98 %	96 %

Анализ результатов моделирования показывает, что в исходном роевом алгоритме для рассматриваемой среды среднее число шагов для достижения цели равно 183. С ростом параметра r_{max} уменьшается число шагов на достижение цели, что связано с большим разнообразием возможных случайных движений. Средний процент успешности достижения целевой точки составил 89,33 %. Анализ причин непопадания в целевую точку показывает, что при $r_{max} = 1$ это попадание в локальный минимум. При $r_{max} = 2$ большую часть (10 %) составило попадание в локальный минимум, и 2 % – разрывы в траекториях. При $r_{max} = 4$ –60 % составили разрывы в траектории, а 40 % – попадания в локальный минимум. Таким образом увеличение параметра r_{max} является неэффективным для решения проблемы локальных минимумов.

Анализ результатов моделирования предложенного модифицированного роевого алгоритма планирования показывает, что среднее число шагов на достижение цели составляет 118 шагов. Таким образом, число шагов для получения траектории снижено примерно на 35,5 % по сравнению с исходным алгоритмом. Процент успешного попадания в целевую точку составил 96 %, что на 6,67 % выше, чем для исходного алгоритма. На рис. 5 представлены некоторые результаты моделирования предложенных алгоритмов с успешным попаданием в целевую точку

На рис. 5 можно заметить, что в области локальных минимумов наблюдаются достаточно разнообразные движения, что позволяет их успешно преодолевать. Разнообразие движений обусловлено как случайными составляющими, так и изменением значений весовых коэффициентов k_1 , k_2 . На рис. 5 также отдельно показаны виртуальные препятствия, добавленные модифицированным алгоритмом.

Виртуальные препятствия

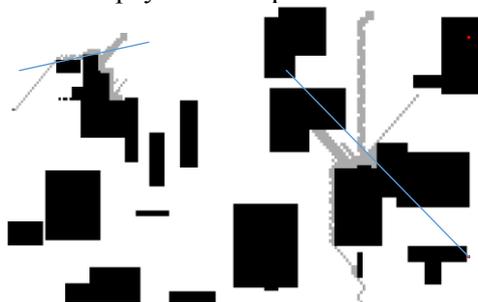


Рис. 5. Результаты моделирования предложенного алгоритма

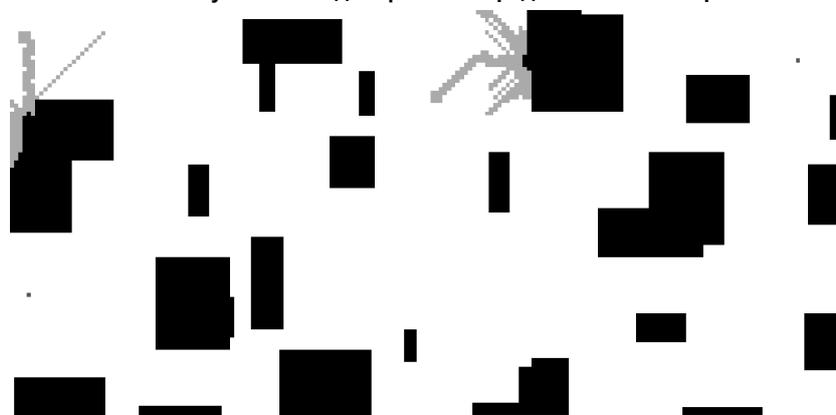


Рис. 6. Примеры попадания предложенного алгоритма в локальные минимумы

Примеры попадания в локальный минимум процедуры планирования с использованием предложенного алгоритма представлен на рис. 6.

На рис. 6 показан локальный минимум, обусловленный глубоким тупиком, и локальный минимум в виде длинной стенки, расположенной поперек движения роя. При максимально допустимом числе итераций, равном 1200, алгоритм не смог выйти из указанных локальных минимумов.

Заключение

В данном исследовании предложена модификация роевого алгоритма поиска пути из заданной начальной точки в заданную целевую точку в некартографированной среде. Сформулирована основная проблема алгоритма, заключающаяся в попадании в локальные минимумы.

Предложены модификации, заключающиеся в новых алгоритмах определения выхода из локального минимума. Для определения локального минимума предложено использовать отсутствие уменьшения целевого функционала – расстояния до целевой точки в течение некоторого количества итераций. При обнаружении локального минимума в него добавляется виртуальное препятствие, что позволяет решить указанную проблему. Дополнительным механизмом выхода из локальных минимумов является предложенный в статье алгоритм изменения весовых коэффициентов. Данный алгоритм позволяет уменьшать влияние ранее обнаруженных текущих «оптимальных» положений роя на выбор следующих направлений движения.

Исследование встроеного в роевой алгоритм механизма случайного выхода из локальных минимумов показало, что при увеличении области случайного поиска возрастает риск получить граф, состоящий от нескольких не связанных друг с другом подграфов. В этом случае требуется дополнительная процедура связывания отдельных подграфов в единый граф.

Исследование предложенного алгоритма показало, что полностью устранить проблему локальных минимумов не удалось, по крайней мере, в пределах заданного максимального числа итераций. В некоторых случаях, например, в глубоких тупиках, выйти из локального минимума не удастся. Одним из возможных направлений решения указанной проблемы является использование поэлементного анализа и выхода из локальных минимумов, а также применение алгоритмов, которые в таких ситуациях более часто добавляют локальные минимумы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-19-00063, «Теоретические основы и методы группового управления безэкипажными подводными аппаратами», <https://rscf.ru/project/24-19-00063/> на базе ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Литература

1. Казаков, К.А. Обзор современных методов планирования движения / К.А. Казаков, В.А. Семенов // *Труды ИСП РАН*. – 2016. – Т. 28, № 4. – С. 241–294.
2. Generalized Sampling-Based Motion Planners / S. Chakravorty, S. Kumar // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. – 2011. – Vol. 41, no. 3. – P. 855–866.
3. Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах / Д.А. Белоглазов, А.П. Гайдук, Е.Ю. Косенко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 305 с.
4. Reynolds, C. Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model / C. Reynolds // *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. – Vol. 21, Iss. 4. – P. 25–34.
5. Dorigo, M. Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents / M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Coloni // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*. – 1996. – Vol. 26, no. 1. – P. 29–41.
6. Karaboga, D. An Idea Based On Honey Bee Swarm for Numerical Optimization. Technical Report-TR06 / D. Karaboga. – Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
7. Pomerleau, D.A. ALVINN: An Autonomous Land Vehicle in a Neural Network / D.A. Pomerleau // *NeurIPS Proceedings*. – 1988. – P. 305–313.
8. Гладков, Л.А. Генетические алгоритмы / Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. – М.: Физматлит, 2010. – 365 с.
9. Архитектура САПР распределенного искусственного интеллекта на основе самоорганизующихся нейрокогнитивных архитектур / З.В. Нагоев, З.А. Сундуков, И.А. Пшенокова, В.А. Денисенко // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. – 2020. – № 2(94). – С. 40–47.
10. Автономный синтез пространственных онтологий в системе принятия решений мобильного робота на основе самоорганизации мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры / З.В. Нагоев, К.Ч. Бжихатлов, И.А. Пшенокова и др. // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. – 2020. – № 6 (98). – С. 68–79.

11. Разработка интеллектуальной интегрированной системы «умное поле» / З.В. Нагоев, В.М. Шуганов, А.У. Заммоев и др. // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2022. – № 1 (225). – С. 81–91.
12. Классификация и условия применения алгоритмов автоматической онтологизации пространства состояний агента общего искусственного интеллекта под управлением нейрокогнитивной архитектуры / З.В. Нагоев, И.А. Пшенокова, М.И. Анчёков и др. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2023. – № 6 (116). – С. 210–225.
13. Формальная модель генома агента общего искусственного интеллекта на основе мультиагентных нейрокогнитивных архитектур / М.И. Анчёков, А.З. Апшев, К.Ч. Бжихатлов и др. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2023. – № 5 (115). – С. 11–24.
14. Нейросетевая система управления группой роботов в неопределенной двумерной среде / А.Р. Гайдук, О.В. Мартьянов, М.Ю. Медведев и др. // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 8. – С. 470–479.
15. End to End Learning for Self-Driving Cars / M. Bojarski, D.D. Testa, D. Dworakowski *et al.* // arXiv:1604.07316v1.
16. Off-Road Obstacle Avoidance through End-to-End Learning / Y. LeCun, U. Muller, J. Ben *et al.* // Part of Advances in Neural Information Processing Systems 18 (NIPS 2005). – P. 739–746.
17. Urban Driving with Conditional Imitation Learning / J. Hawke, R. Shen, C. Gurau *et al.* // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Paris, France. – 2020. – P. 251–257.
18. Панкратов, И.А. Генетический алгоритм оптимизации затрат энергии на переориентацию плоскости орбиты космического аппарата / И.А. Панкратов // Мехатроника, Автоматизация, Управление. – 2022. – Т. 23, no. 5. – С. 256–262.
19. Elshamli, A. Genetic Algorithm for Dynamic Path Planning / A. Elshamli, H.A. Abdullah, S. Areibi // Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2004 (IEEE Cat. No.04CH37513). Niagara Falls, ON, Canada. – 2004. – Vol. 2. – P. 677–680.
20. Планирование маршрутов полета БПЛА в задачах группового патрулирования протяженных территорий / А.Б. Филимонов, Н.Б. Филимонов, Т.К. Нгуен, К.Ф. Фам // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2023. – Т. 24, № 7. – С. 374–381.
21. Родзин, С.И. Современное состояние биоэвристик: классификация, бенчмаркинг, области применения / С.И. Родзин // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2023. – № 2. – С. 280–298.
22. Masehian, E. A Multi-Objective PSO-based Algorithm for Robot Path Planning / E. Masehian, D. Sedighizadeh // 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology, Via del Mar, Chile. – 2010. – P. 465–470.
23. Костюков, В.А. Алгоритм планирования пути в двухмерной среде с полигональными препятствиями на классе кусочно-ломаных траекторий / В.А. Костюков, М.Ю. Медведев, В.Х. Пшихопов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2023. – № 5(235). – С. 34–48.
24. Алгоритмы планирования траекторий в двумерной среде с препятствиями / В.Х. Пшихопов, М.Ю. Медведев, В.А. Костюков и др. // Информатика и автоматизация. – 2022. – Вып. 21(3). – С. 459–492.
25. Nandanwar, M. Implementation and Comparison between PSO and BAT Algorithms for Path Planning with Unknown Environment / M. Nandanwar, A. Nandanwar // *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science (IJLTEMAS)*. – 2017. – Vol. 6, Iss. 8S. – P. 67–72.
26. Shortest Path Planning Algorithm – A Particle Swarm Optimization (PSO) Approach / P.I. Adamu, J.T. Jegede, H.I. Okagbue, P.E. Oguntunde // Proceedings of the World Congress on Engineering 2018 Vol I, WCE 2018, July 4–6, 2018. – P. 19–24.
27. Nandanwar, M.K. Path Planning through BAT Algorithm in Complex Environments / M.K. Nandanwar, A.S. Zadagaonkar, D.A. Shukla // *International Journal of Computer Science Trends and Technology (IJCTST)*. – 2016. – Vol. 4, Iss. 1. – P. 79–86.
28. An Improved PSO-GWO Algorithm With Chaos and Adaptive Inertial Weight for Robot Path Planning / X. Cheng, J. Li, C. Zheng *et al.* // *Front. Neurobot.* – 2021. – Vol. 15. – 770361.
29. Qu, Y. A Global Path Planning Algorithm for Fixed-wing UAVs / Y. Qu, Y. Zhang, Y. Zhang // *J. Intell. Robot. Syst.* – 2018. – Vol. 91. – P. 691–707.

30. Автономный подводный аппарат «Скат» для решения задач поиска и обнаружения затонувших объектов / В.Х. Пшихопов, С.Я. Суконкин, Д.Ш. Нагучев и др. // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 3(104). – С. 153–163.

31. Position-Trajectory Control System for Unmanned Robotic Airship / V.Kh. Pshikhopov, M.Yu. Medvedev, A.R. Gaiduk. *et al.* // IFAC Proceedings Volumes. – 2014. – Vol. 47, Iss. 3. – P. 8953–8958.

32. A Real-Time Path Planning Algorithm for AUV in Unknown Underwater Environment Based on Combining PSO and Waypoint Guidance / Z. Yan, J. Li, Y. Wu, G. Zhang // Sensors. – 2018. – Vol. 19, Iss. 1. – P. 20.

33. Shin, J.J. UAV Path Planning under Dynamic Threats Using an Improved PSO Algorithm / J.J. Shin, H. Bang // International Journal of Aerospace Engineering. – 2020. – Article ID 8820284 (17 pages).

34. A 3D Path Planning Algorithm Based on PSO for Autonomous UAVs Navigation / A. Mirshamsi, S. Godio, A. Nobakhti // Bioinspired Optimization Methods and Their Applications. BIOMA 2020. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 12438. – Springer, Cham, 2020.

35. Phung, M.D. Safety-Enhanced UAV Path Planning with Spherical Vector-Based Particle Swarm Optimization / M.D. Phung, Q.P. Ha // Applied Soft Computing. – 2021. – Vol. 107. – Article ID 107376.

36. Скобцов, Ю.А. Эволюционные вычисления / Ю.А. Скобцов, Д.В. Сперанский. – М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. – Текст: электронный // ЭБС «Консультант студента»: [сайт]. – URL : https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_406.html (дата обращения: 29.01.2024).

37. Костюков, В.А. Алгоритмы планирования сглаженных индивидуальных траекторий движения наземных роботов / В.А. Костюков, М.Ю. Медведев, В.Х. Пшихопов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2022. – Т. 23, № 11. – С. 585–595.

Поступила в редакцию 16 февраля 2024 г.

Сведения об авторах

Костюков Владимир Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, научно-конструкторское бюро робототехники и систем управления, Южный федеральный университет, г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: wkost-einheit@yandex.ru.

Медведев Илья Михайлович – студент, Южный федеральный университет, г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: imedvede@sfedu.ru.

Медведев Михаил Юрьевич – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник НИИ робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет, г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: medvmihal@sfedu.ru.

Пшихопов Вячеслав Хасанович – доктор технических наук, профессор, директор НИИ робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет, г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: pshichop@rambler.ru.

**SIMULATION OF SWARM ALGORITHMS FOR PATH PLANNING
IN A TWO-DIMENSIONAL NON-MAPPED ENVIRONMENT**

V.A. Kostyukov, I.M. Medvedev, M.Yu. Medvedev, V.Kh. Pshikhopov
Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation
E-mail: medvmihal@sfedu.ru

Abstract. This paper examines the effectiveness of swarm path planning algorithms in a two-dimensional unmapped environment. The efficiency criteria are the number of iterations in the path finding process and an assessment of the probability of successfully achieving the goal. During the study, the maximum speed of movement of the swarm and the maximum number of iterations during which it is allowed that the distance to the target does not decrease are changed. It is assumed that each particle can determine the state of the environment in a certain local region. By determining the state we mean determining the presence of an obstacle in a cell of the environment. To solve the problem of local minima, it is proposed to introduce a virtual obstacle at the local minimum point. This approach is generally known. The novelty of this approach lies in the fact that it solves the problem of detecting a local minimum by a swarm of particles. With a single movement, detecting a local minimum is trivial and comes down to checking the movement to previously visited cells. In the group case, a new solution to the problem of detecting a local minimum is required. This article provides a review and analysis of the path planning problem, problem formulation, problem statement, mathematical description of global swarm path planning algorithms with proposed modifications, pseudo-codes of planning algorithms and the results of a numerical study. In the course of numerical studies, the paper presents the criteria for the efficiency of path planning in an environment of 100×100 cells with randomly placed obstacles.

Keywords: *swarm algorithms; two-dimensional environment; local minimum; virtual obstacles; local search; virtual obstacle.*

References

1. Kazakov K.A., Semenov V.A. Reviews of Modern Path Planning Methods. *Proceedings of ISP RAS*, 2016, Vol. 28, no. 4, pp. 241–294.
2. Chakravorty S., Kumar S. Generalized Sampling-Based Motion Planners. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, June 2011, Vol. 41, no. 3, pp. 855–866. DOI: 10.1109/TSMCB.2010.2098438
3. Beloglazov D., Gaiduk A., Kosenko E., Medvedev M., Pshikhopov V., Soloviev V., Titov A., Finaev V., Shapovalov I. *Gruppovoe upravlenie podvizhnymi ob"ektami v neopredelennykh sredakh* (Group Control of Vehicles in Uncertain Environments). Moscow, FIZMATLIT Publ., 2015, 305 p. (in Russ.).
4. Reynolds C. Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model. *CACM SIGGRAPH Computer Graphics*, Vol. 21, Iss. 4, p. 25–34. DOI: 10.1145/37402.37406
5. Dorigo M., Maniezzo V., Colomi A. Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 1996, Vol. 26, no. 1, p. 29–41. DOI: 10.1109/3477.484436
6. Karaboga D. *An Idea Based On Honey Bee Swarm for Numerical Optimization. Technical Report-TR06*. Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
7. Pomerleau D.A. ALVINN: An Autonomous Land Vehicle in a Neural Network. *NeurIPS Proceedings*, 1988, pp. 305–313.
8. Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M. *Geneticheskie algoritmy* (Genetic Algorithms), Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 365 p. (in Russ.).

9. Nagoev Z.V., Sundukov Z.A., Pshenokova I.A., Denisenko V.A. Architecture of CAD for Distributed Artificial Intelligence Based on Self-Organizing Neuro-Cognitive Architectures. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS*, 2020, no. 2(94), pp. 40–47. (in Russ.). DOI: 10.35330/1991-6639-2020-2-94-40-47

10. Nagoev Z.V., Bzhikhatlov K.Ch., Pshenokova I.A., Nagoeva O.V., Atalikov B.A., Chechenova N.A., Malyshev D.A. Autonomous Formation of Spatial Ontologies in the Intelligent Decision-Making System of a Mobile Agricultural Robot Based on the Self-Organization of Multi-Agent Neurocognitive Architectures. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS*, 2020, no. 6(98), pp. 68–79. (in Russ.). DOI: 10.35330/1991-6639-2020-6-98-68-79

11. Nagoev Z.V., Shuganov V.M., Zammoev A.U., Bzhikhatlov K.Ch., Ivanov Z.Z. Development of Intelligent Integrated System for “Smart” Agricultural Production. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2022, no. 1 (225), pp. 81–91. (in Russ.). DOI: 10.18522/2311-3103-2022-1-81-91

12. Nagoev Z.V., Pshenokova I.A., Anchekov M.I., Bzhikhatlov K.Ch., Atalikov B.A., Kankulov S.A., Enes A.Z. Classification and Conditions of Application of Algorithms for Automatic Ontologization of the State Space of a General Artificial Intelligence Agent under the Control of Neurocognitive Architecture. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS*, 2023, no. 6(116), pp. 210–225. (in Russ.). DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-210-225

13. Anchekov M.I., Apshev A.Z., Bzhikhatlov K.Ch., Kankulov S.A., Nagoev Z.V., Nagoeva O.V., Pshenokova I.A., Khamov A.A., Enes A.Z. Formal Genome Model of a General Artificial Intelligence Agent Based on Multi-Agent Neurocognitive Architectures. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS*, 2023, no. 5(115), pp. 11–24. (in Russ.). DOI: 10.35330/1991-6639-2023-5-115-11-24

14. Gaiduk A.R., Martjanov O.V., Medvedev M.Yu., Pshikhopov V.Kh., Hamdan N., Farhood A. Neural Network Based Control System for Robots Group Operating in 2-d Uncertain Environment. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2020, Vol. 21, no. 8, pp. 470–479. DOI: 10.17587/mau.21.470-479

15. Bojarski M., Testa D.D., Dworakowski D., Firner B., Flepp B., Goyal P., Jackel L.D., Monfort M., Muller U., Zhang J., Zhang X., Zhao J., Zieba K. End to End Learning for Self-Driving Cars. *arXiv: 1604.07316v1*. DOI: 10.48550/arXiv.1604.07316

16. LeCun Y., Muller U., Ben J., Cosatto E., Flepp B. Off-road obstacle avoidance through end-to-end learning. *Part of Advances in Neural Information Processing Systems 18 (NIPS 2005)*, pp. 739–746.

17. Hawke J., Shen R., Gurau C., Sharma S., Reda D., Nikolov N., Mazur P., Micklethwaite S., Griffiths N., Shah A., and Kendall A. Urban Driving with Conditional Imitation Learning. *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Paris, France, 2020, pp. 251–257. DOI: 10.1109/ICRA40945.2020.9197408.

18. Pankratov I. Genetic Algorithm for Optimizing Energy Costs for Reorienting the Orbital Plane of a Spacecraft. *Mekhatronika avtomatizatsiya upravlenie*, 2022, Vol. 23, no. 5, pp. 256–262. DOI: 10.17587/mau.23.256-262

19. Elshamli A., Abdullah H.A., Areibi S. Genetic Algorithm for Dynamic Path Planning. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2004 (IEEE Cat. No.04CH37513), Niagara Falls, ON, Canada, 2004, Vol. 2, pp. 677–680. DOI: 10.1109/CCECE.2004.1345203

20. Filimonov A.B., Filimonov N.B., Nguyen T.K., Pham Q.P. Planning of UAV Flight Routes in the Problems of Group Patrolling of the Extended Territories. *Mekhatronika avtomatizatsiya upravlenie*, 2023, Vol. 24, no. 7, pp. 374–381. DOI: 10.17587/mau.24.374-381.

21. Rodzin S. Current State of Bio Heuristics: Classification, Benchmarking, Application Areas. *Izvestiya SFedU. Engineering sciences*, 2023, no. 2, pp. 280–298. DOI: 10.18522/2311-3103-2023-2-280-298

22. Masehian E., Sedighizadeh D. A Multi-Objective PSO-based Algorithm for Robot Path Planning. *2010 IEEE International Conference on Industrial Technology, Via del Mar, Chile*, 2010, pp. 465–470. DOI: 10.1109/ICIT.2010.5472755

23. Kostyukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. An Algorithm for Path Planning in a Two-Dimensional Environment With Polygonal Obstacles on a Class of Piecewise Polyline Trajectories. *Izvestiya SFedU. Engineering sciences*, 2023, no. 5(235), pp. 34–48. DOI: 10.18522/2311-3103-2023-5-34-48

24. Pshikhopov V., Medvedev M., Kostyukov V., Hussein F., Kadim A. Trajectory Planning Algorithms in Two-Dimensional Environment with Obstacles. *Informatics and Automation*, 2022, Iss. 21(3), pp. 459–492. DOI: 10.15622/ia.21.3.1
25. Nandanwar M., Nandanwar A. Implementation and Comparison between PSO and BAT Algorithms for Path Planning with Unknown Environment. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science (IJLTEMAS)*, 2017, Vol. 6, Iss. 8S, pp. 67–72.
26. Adamu P.I., Jegede J.T., Okagbue H.I., Oguntunde P.E. Shortest Path Planning Algorithm – A Particle Swarm Optimization (PSO) Approach. *Proc. World Congress on Engineering 2018 Vol I*, WCE 2018, July 4–6, 2018, pp. 19–24.
27. Nandanwar M.K., Zadagaonkar A.S., Shukla D.A. Path Planning through PSO Algorithm in Complex Environments. *International Journal of Computer Science Trends and Technology (IJCTST)*, 2016, Vol. 4, Iss. 1, pp. 79–86.
28. Cheng X., Li J., Zheng C., Zhang J., Zhao M. An Improved PSO-GWO Algorithm With Chaos and Adaptive Inertial Weight for Robot Path Planning. *Front. Neurobot.*, 2021, Vol. 15, 770361. DOI: 10.3389/fnbot.2021.770361
29. Qu Y., Zhang Y., Zhang Y. A Global Path Planning Algorithm for Fixed-wing UAVs. *J. Intell. Robot. Syst.*, 2018, Vol. 91, pp. 691–707. DOI: 10.1007/s10846-017-0729-9
30. Pshihopov V.H., Sukonkin S.Ya., Naguchev D.Sh., Strakovich V.V., Medvedev M.Ju., Gurenko B.V., Kostukov V.A., Voloshchenko Yu.P. Autonomous Underwater Vehicle “Skat” for Search and Detection Silty Object Tasks. *Izvestiya SfedU*, 2010, no. 3(104), pp. 153–163. (in Russ.).
31. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gaiduk A.R., Fedorenko R.V., Krukhmalev V.A., Gurenko B.V. Position-Trajectory Control System for Unmanned Robotic Airship. *IFAC Proceedings Volumes*, 2014, Vol. 47, Iss. 3, P. 8953–8958. DOI: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.00393
32. Yan Z., Li J., Wu Y., Zhang G. A Real-Time Path Planning Algorithm for AUV in Unknown Underwater Environment Based on Combining PSO and Waypoint Guidance. *Sensors*, 2018, Vol. 19, Iss. 1, p. 20. DOI: 10.3390/s19010020
33. Shin J.J., Bang H. UAV Path Planning under Dynamic Threats Using an Improved PSO Algorithm. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2020, Article ID 8820284, 17 pages. DOI: 10.1155/2020/8820284
34. Mirshamsi A., Godio S., Nobakhti A., Primatesta S., Dovis F., Guglieri G. A 3D Path Planning Algorithm Based on PSO for Autonomous UAVs Navigation. In: Filipič, B., Minisci, E., Vasile, M. (eds) *Bioinspired Optimization Methods and Their Applications. BIOMA 2020. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 12438, Springer, Cham, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-63710-1_21
35. Phung M.D., Ha Q.P. Safety-Enhanced UAV Path Planning with Spherical Vector-Based Particle Swarm Optimization. *Applied Soft Computing*, 2021, Vol. 107, Article ID 107376. DOI: 10.1016/j.asoc.2021.107376
36. Skobcov Yu., Speransky D. *Evolutsionnye vychisleniya (Evolutionary Calculations)*. Moscow, National Open University, 2016. URL: https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_406.html.
37. Kostjukov V.A., Medvedev M.Y., Pshikhopov V.Kh. Algorithms for Planning Smoothed Individual Trajectories of Ground Robots. *Mekhatronika avtomatizatsiya upravlenie*, 2022, Vol. 23, no. 11, pp. 585–595. DOI: 10.17587/mau.23.585-595

Received February 16, 2024

Information about the authors

Kostyukov Vladimir Aleksandrovich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Researcher, Joint-Stock Company “Robotics and Control Systems”, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: wkost-einheit@yandex.ru.

Medvedev Ilya Mikhailovich is student, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: imedvede@sfedu.ru.

Medvedev Mikhail Yurjevich is Dr. Sc. (Engineering), Leading Researcher, R&D Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: medvmihal@sfedu.ru.

Pshikhopov Viacheslav Khasanovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Director, R&D Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: pshichop@rambler.ru.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГЕТЕРОГЕННОГО ГРУППОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РОБОТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УМНОГО САДА

Р.В. Мещеряков, А.С. Широков

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: mrv@ipu.ru*

Аннотация. Рассмотрена задача гетерогенного группового взаимодействия различных робототехнических комплексов воздушного и наземного базирования. Предложена концептуальная модель распределения задач между функционально разными робототехническими комплексами, предложена соответствующая математическая формулировка задачи с итоговым функционалом по критерию эффективности, которая сводится к поиску вариантов, удовлетворяющих функциональным критериям. Окончательное решение о структуре и функциях группировки робототехнических комплексов принимается с учетом функции затрат всего жизненного цикла обработки умного сада. Подчеркивается важность автоматизации и интеллектуализации процессов обработки умного сада, сбора урожая и сокращения времени на выполнение технологических операций, которым посвящены исследования передовых отечественных коллективов. Обсуждаются первичные данные для определения количества и функций робототехнических комплексов для решения комплексной задачи обработки умного сада. Проведены вычислительные эксперименты и собраны типовые сценарии применения робототехнических комплексов воздушного базирования и различных по функционалу роботов наземного базирования: транспортеры, сборщики, обработчики и другие. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку частных алгоритмических решений для конкретных образцов робототехнических комплексов и экспериментальные исследования на базе полигонов с последующей коррекцией разработанных математических моделей для разных типов умного сада и проработкой технологических карт для типизации выбранных сценариев поведения гетерогенной группы робототехнических комплексов.

Ключевые слова: системный анализ; робототехника; умный сад; робототехнический комплекс; беспилотный летательный аппарат; технологии искусственного интеллекта.

1. Постановка задачи

Целью данного исследования являлась формализация постановки задач формирования гетерогенной группы робототехнических комплексов для выполнения различных технологических операций.

Известно, что в сельском хозяйстве ручной труд является одним из основных компонентов затрат. Значительная часть садовых хозяйств при сборе урожая плодовых растений вынуждена прибегать к использованию труда большого числа сезонных работников и добровольцев. При таком подходе наблюдается существенный недобор, доходящий почти до половины урожая [1, 2]. Очевидно, что переход к технологиям «умных садов» с использованием современных технологий робототехники и искусственного интеллекта позволит существенно повысить эффективность садового хозяйства.

Активное развитие в настоящее время приобретают технологии искусственного интеллекта, которые направлены на использование интеллектуальных систем машинного зрения для определения местоположения плодов, степени их зрелости и наличия/отсутствия повреждений. Другим применением интеллектуальных систем технического зрения является картографирование сельскохозяйственных угодий и классификация их для различных технологических операций – обработка средствами защиты растений, внесение удобрений, борьба с сорняками и другими [3, 4]

Вместе с тем необходимо учитывать, что интеллектуальная система технического зрения должна функционировать на некоторой платформе. В качестве платформы могут выступать как существующие технические средства – трактора, транспортеры под управлением водителя, так и беспилотные средства – беспилотные трактора, беспилотные летательные аппараты с различной степенью автономности. Очевидно, что применение робототехнических комплексов для сбора урожая может позволить увеличить его скорость и эффективность, а также снизить затраты на ручной труд.

Активное развитие систем технического зрения и других сенсорных подсистем позволяет использовать уже в едином пространстве традиционные и современные методы обработки сельскохозяйственных культур [5, 6]. Как правило, находят баланс между применением ручного труда и применением высокотехнологичных средств с учетом затрат на их использование [5–9].

Отметим, что полное замещение ручного труда не всегда является экономически целесообразным, так как ряд операций при роботизированном выполнении имеет значительно более высокую сложность и требует соответствующее ресурсное обеспечение, например, при близком расположении стволов деревьев, при углах наклонов склонов, которые сложно преодолеваются беспилотными транспортными средствами. Единовременное введение большого парка техники требует больших затрат материальных средств, может приводить к сложностям при внедрении и в том числе дополнительно требовать расходы на их устранение.

В качестве основы для постановки задачи рассматривается садовая плантация плодовых деревьев, персонал которой лишь частично заменен робототехническим комплексом, т. е. сбором урожая занимаются как работники, так и роботы-сборщики в различных рабочих пространствах. Но предполагается, что в дальнейшем без изменения архитектуры системы РТК может быть расширен на все пространство сада. Схема работы такого комплекса совместно с людьми представлена на рис. 1.

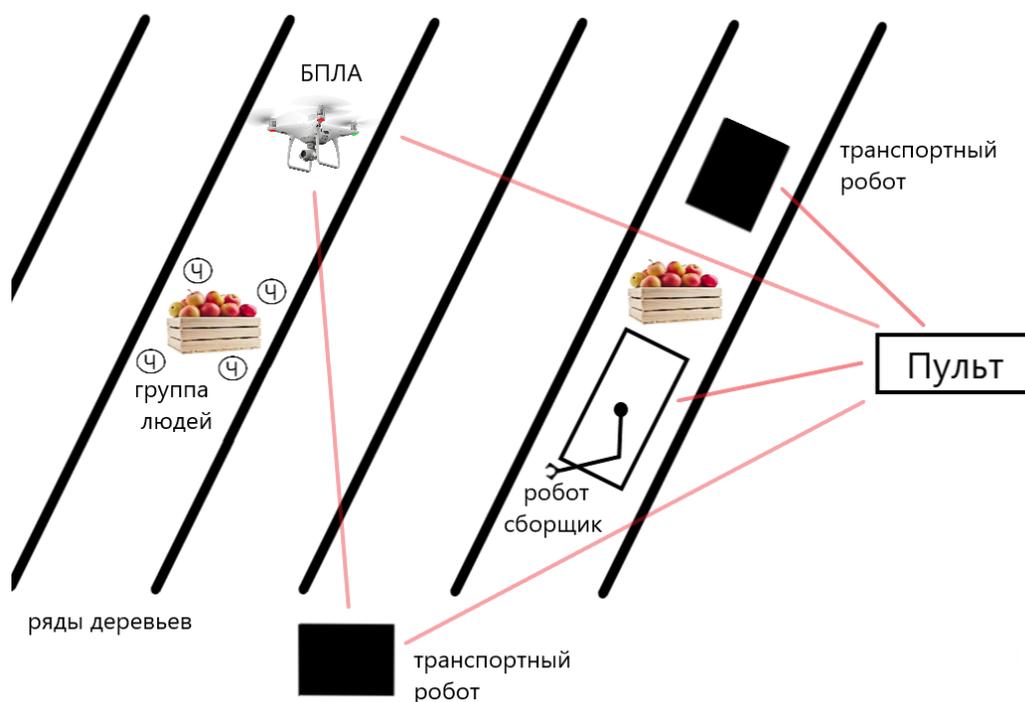


Рис. 1. Схема работы РТК и людей в саду

Функция транспортировки собранного урожая на склад и доставки к месту сбора пустых контейнеров лежит на транспортных роботах. Стоит отметить, что расстояние между рядами деревьев в большинстве садов невелико, из-за чего два робота или робот и контейнер не могут поместиться между двумя соседними рядами, что накладывает ограничение на возможность передвижения роботов. Определение зон плодового сада будет производиться на основании полученной от беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) информации при мониторинге состояния и

готовности плодов к сбору. Во время сбора урожая БПЛА помимо мониторинга состояния сада осуществляют контроль за процессом сбора, заполнением контейнеров и движением роботов, что может быть определено согласованными действиями [10].

Центром робототехнического комплекса, включающего наземные роботы и БПЛА, является наземный пульт управления (НПУ). На указанном НПУ оператор (или команда операторов) сможет отслеживать состояние роботов комплекса и выполняемые ими задачи. При необходимости оператор с использованием НПУ имеет возможность менять задание и контролировать работоспособность/поведение роботов. Структура робототехнического комплекса представляет собой иерархическую структуру, в которой стратегическое планирование / формирование и распределение задач осуществляется на НПУ, мониторинг осуществляют БПЛА, наземные роботы двух типов: сборщики урожая и транспортные роботы, которые осуществляют выполнение своих функций. Оператор ставит задачу роботам, а конкретные функции роботы выполняют в соответствии с текущими заданиями.

2. Система управления

В рамках исследований рассматривается вопрос логистики автономной гетерогенной группы робототехнических комплексов. В таком случае поставленным перед группой общим заданием принимается перемещение наземных роботов (НР) в задаваемые пультом управления (ПУ) точки сада и контроль их положения и перемещения с беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Динамически изменяемый список задач располагается в памяти ПУ. Изменение списка происходит по трем причинам:

- 1) изменение состояния робототехнической группы;
- 2) изменение условий окружающей среды;
- 3) вмешательство оператора.

Появляющиеся в списке новые задачи либо предназначаются конкретным членам группы, которые и приступают к их выполнению немедленно или после завершения своего текущего, либо распределяются между свободными, не занятыми в выполнении задач членами группы, если таковые имеются.

Рабочей областью группы является сад, который можно представить в виде сети дорог двух типов и воздушного пространства над ним. Количество НР и БПЛА N_n и N_l соответственно и в общем случае не одинаково.

Роботы, НР и БПЛА рассматриваются как материальные точки с возможностями движения с ограничением на перемещения в соответствии с используемой средой. БПЛА в своем перемещении ограничен только выделенными эшелонами полета, в то время как НР способен перемещаться только по пространству дорог D . Дороги делятся на два типа – узкие, $D1$, по которым может проехать только один робот, и широкие $D2$, на которых могут одновременно проехать два робота в разных направлениях. Дороги $D1$ могут иметь три состояния: 1) свободна, НР может беспрепятственно проехать; 2) забронирована, в данный момент НР может по ней проехать, но из-за маршрута или расположения заданной точки другой НР будет на дороге через некоторый промежуток времени, 3) занята, на дороге в данный момент присутствует НР.

Карта располагается у ПУ и обновляется при выполнении задач и поступлении отчетов от роботов. Роботы при планировании своего движения запрашивают актуальную карту со статусом дорог, при необходимости запрашивают у других НР, забронировавших или занявших узкие дороги, их время и место пребывания на несвободной дороге и, сравнивая со своим местоположением, принимают решение о выбранном маршруте и бронируют себе требуемые узкие дороги. Изменение статуса «занято» на дороге происходит по сообщению НР, которое тот передает как при въезде на дорогу, так и при съезде с неё.

БПЛА не имеют ограничения на дороги, поэтому для задач с проверкой обстановки в точке могут перемещаться из своего положения по прямой, отклоняясь только в случае необходимости избегания столкновения с другим БПЛА. Для задач же со следованием за одним из НР БПЛА вообще нет необходимости в долгосрочном планировании траектории движения.

Для упрощения избегания столкновений БПЛА можно использовать 2 эшелона движения – один для непосредственного ведения цели, а второй – для точечного наблюдения и перемещения.

3. Математическая постановка задачи (сад)

Группа роботов R состоит из N роботов трех типов – робот рабочий (Rp), робот транспортник (Rm), робот наблюдатель (Rn). Количество роботов каждого типа соответственно Np, Nm, Nn . $R = \{Rp, Rm, Rn\}$ – множество роботов.

Каждый тип роботов из-за своего строения обладает набором функций, которые может выполнять. Для каждого типа набор функций различен. Множества Pp, Pm, Pn определяют доступные роботам функции.

Состояние каждого робота можно записать вектор-столбцом X , причем для каждого типа роботов вектор-столбец X будет отличным, т. е. $Xp = \{xp_1, xp_2 \dots xp_{np}\}^T$, $Xm = \{xm_1, xm_2 \dots xm_{nm}\}^T$, $Xn = \{xn_1, xn_2 \dots xn_{nn}\}^T$. np, nm, nn – количество параметров, определяющих состояние робота.

Задания перед группой и требования к ним задаются матрицей P .

Множество известных группе роботов данных о себе и окружающей среде (актуальная карта, характеристики, параметры связи) – S . В начальный момент времени имеет вид $S0$ и изменяется в процессе активности РТК. Причем информация s_i , которой располагает отдельный робот, может не соответствовать в общем случае общей информации группы S .

Введем L – множество ограничений, в которых присутствуют ограничения, накладываемые на доступные для посещения роботами зоны рабочей области, условия движения в определенных ситуациях, а также изменение работы робота при обнаружении людей в зоне доступности сенсоров. Введем K – требования к выполнению работы / критерии оптимизации. Область непосредственного интереса роботов задается вместе с заданиями. Например, для задачи сбора плодовых растений в саду роботы вместе с этой задачей получают те зоны сада, где необходимо произвести сбор. При этом роботы могут не обладать информацией о том, почему другая часть сада не задействована в сборе.

Таким образом, определим целевую функцию, подлежащую минимизации, как

$$\Phi(P, K | R, S, L).$$

Возможность прохождения по пути, габаритные размеры рассматриваются уже на этапе траекторного управления и отработки конкретных сценариев и режимов движения по конкретному саду. Также следует отметить, что на этапе формирования общего сценария можно пренебречь динамической и статической проходимостью, а также изменением ускорений и скоростей.

Определим, что РТ – колесные роботы, имеют одинаковую маневренность при движении вперед и назад. Они способны:

- перемещаться/двигаться между заданными точками или между точками и РР или по заданным траекториям. Перемещение может быть ограничено условиями местности, конструкцией роботов или предполагаемым заданием;
- перевозить с собой или на себе грузы с объектами, необходимыми для работы РО РР или получаемыми в процессе работы РР;
- определять окружающую обстановку с помощью сенсоров (лидары, камеры и пр.) с необходимой для выполнения задания точностью;
- определять свое положение и положение относительно препятствий и ключевых объектов;
- связываться с другим членами группы.

РР – колесные роботы, имеют одинаковую маневренность вперед и назад. Характеристики подвижности постоянно или только во время работы РО ниже, чем у РТ. Оснащены рабочим органом (РО). Работа РО может требовать каких-либо ресурсов/объектов, которые способен доставить РТ или, наоборот, может производить какие-либо ресурсы/объекты для дальнейшей их транспортировки РТ. Осуществляет работу РО в определенных областях и перемещается между ними. Они способны:

- определять окружающую обстановку с помощью сенсоров (лидар, камеры) с необходимой для выполнения задания точностью;

- определять свое положение и положение относительно препятствий и ключевых объектов;

- связываться с другим членами группы.

Заключительный тип из гетерогенной группы РН – беспилотные летательные аппараты мультикоптерного типа. Они способны:

- перемещаться/двигаться между заданными точками в пространстве или по заданным траекториям. На них не действуют ограничения передвижения наземных роботов, но их движение ограничено другими факторами местности;

- находить и распознавать объекты;

- осуществлять наблюдение за какими-либо объектами;

- способны передавать получаемые с камер данные в необработанном или обработанном виде наземным роботам или на ПУ;

- определять свое положение и положение относительно наземных и/или ключевых объектов;

- связываться с другим членами группы.

Оператор, находящийся за пультом управления (ПУ), ставит перед группой первоначальное задание и осуществляет наблюдение за её работой в процессе выполнения. Поставленные задачи группа выполняет в автономном режиме. В случае возникновения нештатной или экстренной ситуации оператор может взять на себя управление и изменить задачи, поставленные перед группой роботов.

Главная задача группы – выполнение полезных действий РО, расположенного на РР.

1-й уровень:

- определение ключевых объектов;

- правильное размещение РР;

- применение РО;

- контроль оператором.

2-й уровень:

- навигация роботов;

- транспортная функция РТ, для обеспечения работы РО РР;

- передача информации между роботами.

Рассмотрим область действий группы в виде плодового сада – *Сад*.

В такой задаче ПУ обладает большими вычислительными мощностями по сравнению с роботами. ПУ ставит задания перед группой – область работы РР, пункты назначения РТ, объекты наблюдения РН. Задания существуют в виде динамически изменяемого списка в памяти ПУ. Изменение списка происходит по трем причинам:

- 1) изменение состояния робототехнической группы;

- 2) изменение условий окружающей среды;

- 3) вмешательство оператора.

Появляющиеся в списке новые задачи либо предназначаются конкретным членам группы, которые и приступают к их выполнению немедленно или после завершения своего текущего, либо распределяются между свободными, не занятыми в выполнении задач, членами группы, если таковые имеются.

Наборы функций, которые могут быть определены для конкретных робототехнических комплексов в рамках работы гетерогенной группы:

- 1) коммуникация;

- 2) навигация;

- 3) индивидуальные действия;

- 4) вычисления и логика;

- 5) составные/сложные;

- 6) другое.

Приведем список функций с разбиением по группам:

- 1) Коммуникация:

- получение задания от оператора;

- получение информации от оператора;
 - передача информации оператору;
 - получение информации от других членов группы;
 - получение приказов/команд от других членов группы;
 - передача информации другим членам группы;
 - передача приказов/команд другим членам группы.
- 2) Навигация:
- определение/идентификация препятствий, объектов и других роботов и людей;
 - определение своего абсолютного положения (GPS);
 - определение своего положения относительно препятствий/окружающих объектов;
 - определение положения препятствий/окружающих объектов относительно робота;
 - определение своего положения относительно положения других роботов;
 - определение положения других роботов относительно своего положения;
 - планирование траектории движения роботом;
 - избегание столкновений.
- 3) Индивидуальные действия:
- движение;
 - перемещение в заданную точку/область (координаты);
 - применение РО;
 - 4/2 контроль позиционирования и состояния РО;
 - 4/2 изменение позиционирования и состояния РО;
 - 4/5 определение/идентификация целей применения РО;
 - передача рабочих ресурсов между TP и PP;
 - изменение области видимости.
- 4) Вычисления и логика:
- прекращение действий;
 - отчет о выполнении перед оператором;
 - отсутствие действий/ожидание/сон;
 - обработка (и проверка) поступающей информации;
 - хранение полезной информации;
 - запись логов;
 - преобразование информации;
 - сравнение поступающих заданий и приказов с текущими;
 - изменение своего поведения в соответствии с поступающими приказами;
 - изменение последовательности действий робота.
- 5) Составные/сложные:
- следование за объектом или роботом;
 - 6/3 перемещение с заданными условиями/ограничениями;
 - 4/1 выполнение команд ручного управления от оператора.
- б) Другое:
- получение информации с сенсоров/датчиков.

Таким образом, представленный перечень выполняемых функций позволяет формировать сценарии работы гетерогенной группы при реализации концепции умного сада. Следует отметить, что вопросами автоматизации и интеллектуализации технологических процессов сельского хозяйства активно занимаются в ведущей научной школе З.В. Нагоева. Представленные результаты интеллектуального принятия решений на основе самоорганизации мультиагентных когнитивных архитектур и оригинальные наземные роботы сельскохозяйственного назначения являются чрезвычайно важными и имеют значительные перспективы реализации в виде конкретных образцов [11–14]. Авторы выражают признательность за предоставленную возможность регулярного общения с Залимханом Вячеславовичем Нагоевым. Авторы поздравляют с юбилеем и желают научных успехов в научной деятельности.

Заключение

Представленная в настоящей статье формализация гетерогенной группы робототехнических комплексов для реализации концепции умного сада позволит исследователям использовать формализацию для постановок частных задач составления миссий и достижения целей повышения эффективности садовых хозяйств.

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку математического, методического-алгоритмического и программного обеспечения по реализации предложенной постановки задачи и оптимизации вариантов технологической карты функционирования системы умного сада.

Литература

1. Bechar, A. Agricultural robots for field operations: Concepts and components / A. Bechar, C. Vigneault // *Biosystems Engineering*. – 2016. – Vol. 149. – P. 94–111.
2. Design and implementation of an aided fruitharvesting robot (AgriBot) / R. Ceres, J. Pons, A. Jimenez *et al.* // *Industrial Robot*. – 1998. – Vol. 25, no. 5. – P. 337–346.
3. Шевченко, А.В. Обзор состояния мирового рынка робототехники для сельского хозяйства. Ч. 1. Беспилотная агротехника / А.В. Шевченко, Р.В. Мещеряков, А.Н. Мигачев // *Проблемы управления*. – 2019. – № 5. – С. 3–18.
4. Шевченко, А.В. Обзор состояния мирового рынка робототехники для сельского хозяйства. Ч. 2. Беспилотные летательные аппараты и роботизированные фермы / А.В. Шевченко, Р.В. Мещеряков, А.Н. Мигачев // *Проблемы управления*. – 2019. – № 6. – С. 3–10.
5. Ронжин, А.Л. Математические модели и средства многомодального взаимодействия с робототехническими и киберфизическими системами / А.Л. Ронжин, М.М. Бизин, С.В. Солёный // *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ*. – 2016. – № 8(90). – С. 107–111.
6. Кузнецова, А.А. Применение сверточных нейронных сетей для обнаружения плодов роботами для сбора урожая / А.А. Кузнецова, Т.В. Малеева, В.И. Соловьев // *Международный сельскохозяйственный журнал*. – 2020. – Том 63, № 5 (377). – С. 39–41.
7. Робототехнические системы в агропроизводстве / Д.С. Стребков, В.А. Королев, С.А. Воротников, В.А. Польский // *Вестник Башкирского государственного аграрного университета*. – 2014. – № 3 (31). – С. 68–71.
8. Зобнин А. Н. Агророботы в сельском хозяйстве // *Академическая публицистика*. – 2018. – № 5. – С. 85–87.
9. Широков А.С. К вопросу об использовании робототехнического комплекса для сбора урожая плодовых деревьев / А.С. Широков // *Труды III Международной научно-практической конференции «Цифровизация агропромышленного комплекса», 25–27 октября 2022 г., г. Тамбов*. – Тамбов: Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ». – 2022. – Т. 1. – С. 342–344.
10. Chueshev, A. Cloud Robotic Platform on Basis of Fog Computing Approach / A. Chueshev, O. Melekhova, R. Meshcheryakov // *Interactive Collaborative Robotics. ICR 2018. Lecture Notes in Computer Science*. – Springer, Cham., 2018. – Vol. 11097. – С. 34–43.
11. Multi-agent Algorithms for Building Semantic Representations of Spatial Information in a Framework of Neurocognitive Architecture / Z. Nagoev, O. Nagoeva, I. Gurtueva, V. Denisenko // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – 2020. – Vol. 948. – P. 379–386.
12. Nagoev, Z. Multi-Agent Neurocognitive Models of Semantics of Spatial Localization of Events / Z. Nagoev, O. Nagoeva, I. Gurtueva // *Cognitive Systems Research*. – 2020. – Vol. 59. – P. 91–102.
13. Нагоев, З.В. Извлечение знаний из многомодальных потоков неструктурированных данных на основе самоорганизации мультиагентной когнитивной архитектуры мобильного робота / З.В. Нагоев, О.В. Нагоева // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. – 2015. – № 6-2 (68). – С. 145–152.
14. Автономный синтез пространственных онтологий в системе принятия решений мобильного робота на основе самоорганизации мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры / З.В. Нагоев, К.Ч. Бжихатлов, И.А. Пшенокова и др. // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. – 2020. – № 6 (98). – С. 68–79.

Поступила в редакцию 1 марта 2024 г.

Сведения об авторах

Мещеряков Роман Валерьевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории киберфизических систем, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1129-8434>, e-mail: mrv@ipu.ru.

Широков Александр Сергеевич – аспирант лаборатории киберфизических систем, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8049-851X>, e-mail: shiras@ipu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 41–49

DOI: 10.14529/mmph240204

SETTING THE TASK OF HETEROGENEOUS GROUP INTERACTION OF ROBOTS IN SOLVING SMART GARDEN TASKS

R.V. Meshcheryakov, A.S. Shirokov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
E-mail: mrv@ipu.ru

Abstract. The article considers the problem of heterogeneous group interaction of various robotic air and ground-based complexes. It proposes a conceptual model of the distribution of tasks between functionally different robotic complexes, and an appropriate mathematical formulation of the problem with the final functional according to the efficiency criterion, which boils down to the search for options that meet functional criteria. The presented final decision on the structure and functions of the grouping of robotic complexes takes into account the cost function of the entire life cycle of smart garden processing. The paper emphasizes the importance of automation and intellectualization during processing a smart garden, harvesting and reducing the time to perform technological operations, which are devoted to the research of advanced domestic. It discusses the primary data to determine the number and functionality of robotic complexes for solving the complex task of developing a smart garden. The paper highlights the computational experiments and collects typical scenarios for the use of air-based robotic complexes and ground-based robots of various functionality: transporters, collectors, handlers and others. Further research will be aimed at developing specific algorithmic solutions for specific samples of robotic complexes and experimental studies based on polygons, followed by the correction of developed mathematical models for different types of smart gardens and elaboration of technological maps to typify selected behavior scenarios of a heterogeneous group of robotic complexes.

Keywords: *system analysis; robotics; smart garden; robotic complex; unmanned aerial vehicle; artificial intelligence technologies.*

References

1. Bechar A., Vigneault C. Agricultural robots for field operations: Concepts and components. *Biosystems Engineering*, 2016, Vol. 149, pp. 94–111. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2016.06.014
2. Ceres R., Pons J., Jimenez A., Martin J., Calderon L. Design and Implementation of an Aided Fruitharvesting Robot (AgriBot). *Industrial Robot*, 1998, Vol. 25, no. 5, pp. 337–346. DOI: 10.1108/01439919810232440
3. Shevchenko A.V., Meshcheryakov R.V., Migachev A.N. Review of the World Market of Agriculture Robotics. Part 1. Unmanned Vehicles for Agriculture. *Control sciences*, 2019, no. 5, pp. 3–18. (in Russ.). DOI: 10.25728/pu.2019.5.1
4. Shevchenko A.V., Meshcheryakov R.V., Migachev A.N. Review of the State of the Global Market for Robotics for Agriculture. Part 2. Unmanned Aerial Vehicles and Robotic Farms. *Control sciences*, 2019, no. 6, pp. 3–10. (in Russ.). DOI: 10.25728/pu.2019.6.1

5. Ronzhin A.L., Bizin M.M., Soleny S.V. Matematicheskie modeli i sredstva mnogomodal'nogo vzaimodeystviya s robototekhnicheskimi i kiberfizicheskimi sistemami (Mathematical Models and Means of Multi-Modal Interaction with Robotic and Cyberphysical Systems). *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT*, 2016, no. 8(90), pp. 107–111. (in Russ.).

6. Kuznetsova A.A., Maleva T.V., Soloviev V.I. Modern Fruit Detection Approaches in Harvesting Robots. *International Agricultural Journal*, 2020, Vol. 63, no. 5 (377), pp. 39–41. DOI: 10.24411/2587-6740-2020-15089

7. Strebkov D., Korolev V., Vorotnikov S., Polsky V. Robots in the Agrarian Production. *Vestnik BSAU*, 2014, no. 3 (31), pp. 68–71. (in Russ.).

8. Zobnin A.N. Agroroboty v sel'skom khozyaystve (Agricultural Robots in Agriculture). *Akademicheskaya publitsistika*, 2018, no. 5, pp. 85–87. (in Russ.).

9. Shirokov A.S. K voprosu ob ispol'zovanii robototekhnicheskogo kompleksa dlya sbora urozhaya plodovykh derev'ev (On the Issue of using a Robotic Complex for Harvesting Fruit Trees). *Trudy III Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskaya konferentsiya "Tsifrovizatsiya agropromyshlennogo kompleksa"*, 25–27 oktyabrya 2022 g., g. Tambov (Proc. III International Scientific and practical Conference “Digitalization of the agro-industrial complex”, October 25-27, 2022, Tambov, Tambov, Izdatel'skiy tsentr FGBOU VO “TGTU” Publ., 2022, Vol. 1, pp. 342–344. (in Russ.).

10. Chueshev A., Melekhova O., Meshcheryakov R. Cloud Robotic Platform on Basis of Fog Computing Approach. In: Ronzhin, A., Rigoll, G., Meshcheryakov, R. (eds) *Interactive Collaborative Robotics. ICR 2018. Lecture Notes in Computer Science*, Vol 11097. Springer, Cham., 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-99582-3_4

11. Nagoev Z., Nagoeva O., Gurtueva I., Denisenko V. Multi-agent Algorithms for Building Semantic Representations of Spatial Information in a Framework of Neurocognitive Architecture. In: Samsonovich, A. (eds) *Biologically Inspired Cognitive Architectures 2019. BICA 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 948. Springer, Cham., 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-25719-4_49

12. Nagoev Z., Nagoeva O., Gurtueva I. Multi-Agent Neurocognitive Models of Semantics of Spatial Localization of Events. *Cognitive Systems Research*, 2020, Vol. 59, pp. 91–102. DOI: 10.1016/j.cogsys.2019.09.01

13. Nagoev Z.V., Nagoeva O.V. Extraction of Knowledge from Multimodal Flows of Unstructured Data on the Basis of Self-Organization of Multi-Agent Cognitive Architecture of the Mobile Robot. *News of the Kabardin-Balkar scientific center of RAS*, 2015, no. 6-2, p. 145–152. (in Russ.).

14. Nagoev Z.V., Bzhikhatlov K.Ch., Pshenokova I.A., Nagoeva O.V., Atalikhov B.A., Chechenova N.A., Malyshev D.A., Autonomous Formation of Spatial Ontologies in the Intelligent Decision-Making System of a Mobile Agricultural Robot based on the Self-Organization of Multi-Agent Neurocognitive Architectures. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2020, no. 6, pp. 68–79. (in Russ.). DOI: 10.35330/1991-6639-2020-6-98-68-79

Received March 1, 2024

Information about the authors

Mescheryakov Roman Valerievich is Professor, Dr. Sc. (Engineering), Chief Scientist of Cyber-Physical Laboratory, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1129-8434>, e-mail: mrv@ipu.ru.

Shirokov Aleksander Sergeevich is Post-graduate Student, Cyber-Physical Laboratory, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8049-851X>, e-mail: shiras@ipu.ru.

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ КАРТЫ ДОПУСТИМЫХ СИСТЕМОТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ВИДЕОАНАЛИТИКИ АКВАКУЛЬТУРЫ

А.Л. Ронжин, В.Н. Ле, Н. Шувалов

*Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: ronzhin@ijas.spb.su*

Аннотация. Системно рассмотрена задача видеоаналитики гидробионтов в рыбоводных промышленных комплексах. Предложена концептуальная модель задачи видеоаналитики, предложена соответствующая математическая формулировка задачи с поиском подмножества допустимых вариантов технологической карты, которая сводится к поиску вариантов, удовлетворяющих функциональным критериям. Окончательное решение о структуре и функциях программно-аппаратного обеспечения видеоаналитики принимается с учетом стоимостных затрат всего жизненного цикла оборудования. Подчеркивается важность автоматизации и интеллектуализации технологических процессов сельского хозяйства, наиболее актуальных современных задач, которым посвящены исследования передовых отечественных коллективов. Обсуждаются первичные данные для разработки и внедрения системы видеоаналитики при решении задачи подсчета рыбы, ее массы при пересадках, отгрузке, приеме в цех переработки, полученные в рамках сотрудничества с компанией «Остров», специализирующейся на выращивании форели и уделяющей серьезное внимание внедрению современных технологий автоматизации и искусственного интеллекта в технологические процессы промышленной аквакультуры. Проведены натурные эксперименты и собраны корпуса изображений рыб в прозрачной узкой трубе, направляемой потоком воды, и на воздухе при движении на конвейере. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку модельно-алгоритмического и программного обеспечения, необходимого для апробации предложенных математических моделей и оптимизации вариантов технологической карты функционирования системы видеоаналитики.

Ключевые слова: системный анализ; многокритериальное оценивание; техническое зрение; видеоаналитика; технологии искусственного интеллекта; робототехника; искусственные нейронные сети.

1. Постановка задачи

Целью данного исследования являлась формализация технологического процесса – видеомониторинга гидробионтов в рыбоводных промышленных комплексах – на основе анализа специфики и ограничений водной среды, применимых сенсорных устройств, характера задачи, объема водных емкостей, числа содержащихся гидробионтов и других факторов, влияющих на точность, скорость и стоимость получения результатов видеоаналитики. Современные работы в области высокотехнологичной аквакультуры, водных биологических ресурсов фокусируются на цифровой трансформации производства путем формализации экспертных междисциплинарных знаний по ихтиологии, экологии, робототехнике и машинному обучению, другим технологиям искусственного интеллекта и разработке фундаментальных и технологических основ высокопродуктивного и экологически чистого рыбоводства, прогнозирования и проактивного управления полного жизненного цикла производства аквакультуры [1–6].

Видеоаналитика считается наиболее перспективным инструментом для решения задач мониторинга, прогнозирования и проактивного управления технологическими процессами промышленной аквакультуры, так как обладает рядом достоинств [7–10]. Во-первых, бесконтактность съема данных о гидробионтах и среде. Это обеспечивает неинвазивность, не вносит возмущающих факторов в жизненные процессы рыб. Также устраняются риски внесения патогенов, что не исключено при обследовании объектов аквакультуры ветеринарами. Во-вторых, изображения и

видеоряд дают наиболее полную визуальную информацию о каждом покрове, одиночном и групповом поведении рыб. В-третьих, накапливаемые первичные данные, размеченные корпуса и аналитическая информация для корректировки алгоритмов управления техническим оборудованием производства аквакультуры являются отдельным ценным ресурсом, в том числе позволяющим уточнять и имеющиеся теоретические знания в области ихтиологии.

Последующая структура статьи сформирована следующим образом. Далее описана концептуальная модель предметной области исследования, обсуждаются наиболее актуальные задачи аквакультуры, решаемые на основе видеоаналитики, проанализированы основные ограничения и требуемые ресурсы. Рассмотрены особенности разработки технологической карты для задачи расчета биомассы рыб, приведены предварительные результаты экспериментальной проверки системы видеоаналитики на рыбноводном предприятии.

Наиболее актуальными задачами в аквакультуре, потенциально решаемыми на основе видеоаналитики, выделяют следующие: подсчет числа рыб, распознавание типов рыб, оценивание биомассы, идентификация каждой особи, выявление аномального поведения, распознавание заболевших, диагностика заболеваний [11–14].

На рис. 1 представлена концептуальная модель предметной области видеоаналитики аквакультуры с введенными основными сущностями. Процесс выбора параметров технологической карты начинается с определения типа задачи W^k , ее входных W_{InP}^k и выходных W_{OutP}^k данных, а также конкретных свойств оборудования для регистрации входных данных $W_{InP}^k = \{Fnc_{InPEq}^k, Acc_{InPEq}^k, Spd_{InPEq}^k, Cst_{InPEq}^k\}$ и свойств оборудования для их обработки и формирования выходных данных: $W_{OutP}^k = \{Fnc_{OutEq}^k, Acc_{OutEq}^k, Spd_{OutEq}^k, Cst_{OutEq}^k\}$, образующих матрицу W_P^k .

Затем производится анализ требований, характерных для задачи W^k : R_{PT}^k – место и время; R_{VEq}^k – оборудование видеосъемки; R_{SenEq}^k – дополнительное сенсорное оборудование; R_{CNAEq}^k – вычислительное, сетевое, силовое оборудование; W_{Tim}^k – расписание видеосъемки; R_{WP}^k – множество необходимых специалистов. Также учитываются основные ограничения предметной области и накладываемые технические и технологические требования к оборудованию и процессу видеосъемки: L_{WE}^k – факторы водной среды, L_{FB}^k – поведение рыб, L_{UC}^k – условия эксплуатации, L_{wv}^k – характеристики водного резервуара, L_{wC}^k – характеристики погодных условий, L_{CC}^k – характеристики климатических условий.

Основными ограничениями, характерными для всех задач, являются факторы водной среды (мутность, низкая освещенность), поведение рыб (относительно высокая скорость, инстинкты), условия эксплуатации (повышенная влажность, механические воздействия) и другие.

При описании требований к решению задач следует уточнять место и время видеосъемки (наименование технологического процесса, место видеосъемки, время видеосъемки, длительность видеосъемки, ракурс видеосъемки) оборудование видеосъемки (спектральный диапазон регистрируемых частот, частота кадров, дополнительное освещение и др.), вычислительное и сетевое оборудование (характеристики вычислительного модуля для подключения видеокамеры и записи данных, управления осветительным оборудованием и характеристики маршрутизатора для передачи видеоданных в облачное хранилище (WiFi, GSM)), вычислительный сервер для обработки видеоданных, а также необходимый обсуживающий персонал (ветеринар-ихтиолог, инженер-системотехник, инженер-технолог, инженер по машинному обучению и компьютерному зрению и др.).

Математическую формулировку задачи поиска подмножества допустимых вариантов технологической карты можно записать в следующем виде. Обозначим множество вариантов технологической карты:

$$TM = \{TM_{UEq}^1, TM_{VHs}^1, TM_{EqSh}^1, TM_{PSh}^1, \dots, TM_{UEq}^i, TM_{VHs}^i, TM_{EqSh}^i, TM_{PSh}^i, \dots, TM_{UEq}^N, TM_{VHs}^N, TM_{EqSh}^N, TM_{PSh}^N\},$$

где каждый вариант карты описан набором характеризующих параметров, заданных числовыми значениями. Характеристики используемого в варианте технологической карты TM^i оборудования $TM_{UEq}^i = \{Fnc_{UEq}^i, Acc_{UEq}^i, Spd_{UEq}^i, Cst_{UEq}^i\}$ соответственно по функциональности, точности,

Математика

скорости и стоимости. TM^i_{VSh} – расписание видеосъемки; TM^i_{EqSh} – расписание вспомогательного оборудования; TM^i_{PSh} – график работы специалистов.

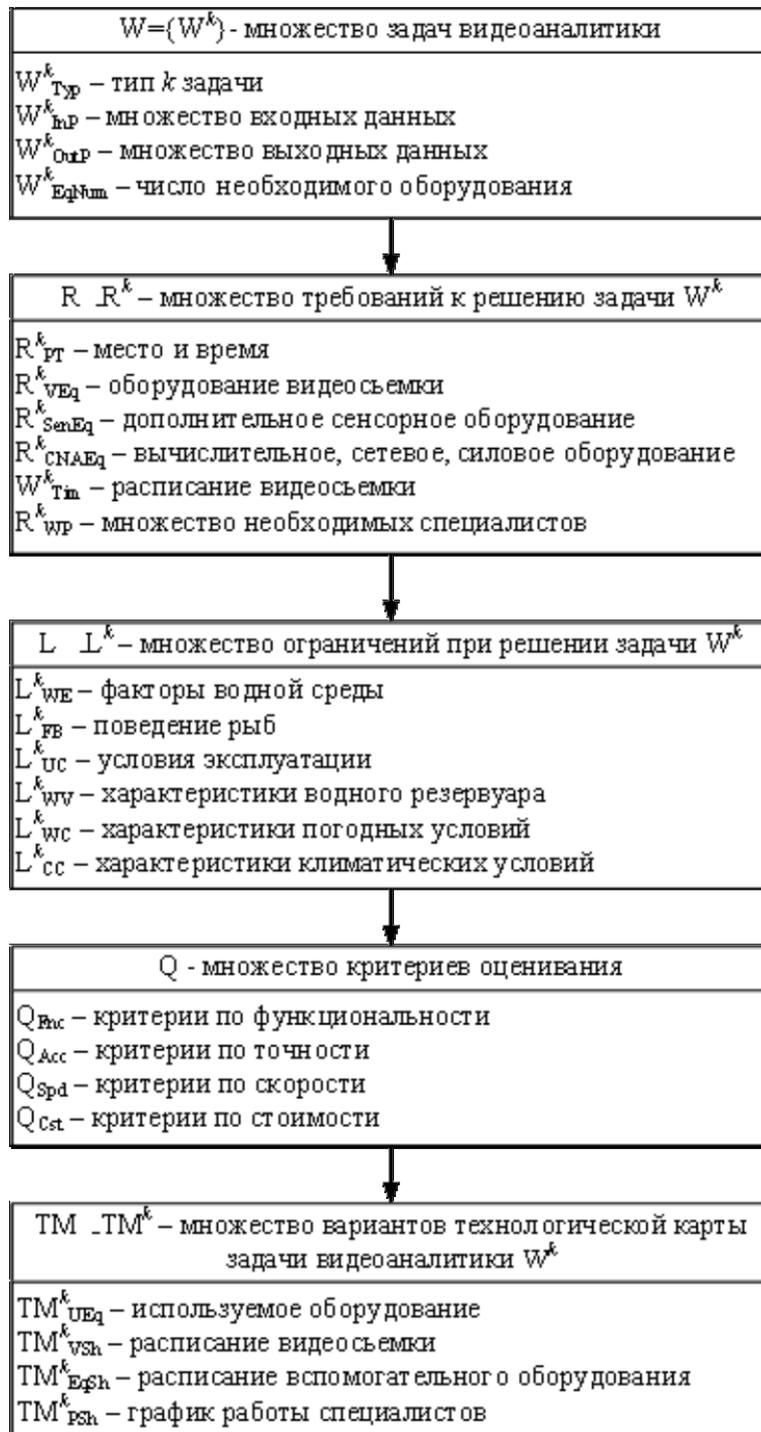


Рис. 1. Концептуальная модель задачи видеоаналитики аквакультуры

Таким образом, для решения задачи W^k на основе критериев Q необходимо выделить подмножество вариантов технологической карты $TM^k \in TM$ с набором параметров используемого оборудования, идентичным по функциональности, точности, скорости свойствам оборудования для регистрации входных данных, обработки и формирования выходных данных, содержащихся в описании задачи W^k . Предполагается, что количество типов оборудования в вариантах техноло-

гической карты и описании задачи одинаковое и равно W_{EqNum}^k , а оборудование отличается только количественными значениями функциональных характеристик.

В рамках поставленных условий в варианте технологической карты TM^i можно однозначно оценить соответствие характеристик используемого оборудования TM_{UEq}^i , учитывая две компоненты. Во-первых, соответствие характеристик оборудования видеосъемки $\{Fnc_{VEq}^i, Acc_{VEq}^i, Spd_{VEq}^i\}$, дополнительного сенсорного оборудования $\{Fnc_{SenEq}^i, Acc_{SenEq}^i, Spd_{SenEq}^i\}$ свойствам требуемого оборудования для регистрации входных данных $\{Fnc_{ImpEq}^k, Acc_{ImpEq}^k, Spd_{ImpEq}^k\}$.

Во-вторых, соответствие характеристик вычислительного, сетевого, силового оборудования $\{Fnc_{CNAEq}^i, Acc_{CNAEq}^i, Spd_{CNAEq}^i\}$ свойствам требуемого оборудования для обработки и формирования выходных данных $\{Fnc_{OutEq}^k, Acc_{OutEq}^k, Spd_{OutEq}^k\}$.

При сравнении характеристик оборудования формируются бинарные оценки применимости вариантов технологической карты, в положительном случае сохраняется суммарная стоимость требуемого оборудования:

$$TM^i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{WkEqNum} Cst_{UEq}^i, & \text{если } TM_{UEq}^i = W_P^k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

После этого в экспертном режиме рассматриваются варианты, имеющие более низкую стоимость. При оценивании стоимости используемого сервиса видеоаналитики следует учесть затраты на приобретение и установку специализированного программно-аппаратного обеспечения, оплаты работы экспертов, участвующих в ручной обработке изображений, и другие расходы.

Вопросы автоматизации и интеллектуализации технологических процессов сельского хозяйства являются наиболее актуальными современными задачами, им посвящены исследования передовых отечественных коллективов. В работах ведущей научной школы З.В. Нагоева детально обсуждаются проблемы интеллектуального принятия решений на основе самоорганизации мультиагентных когнитивных архитектур и созданы оригинальные наземные роботы сельскохозяйственного назначения [15–18]. Авторы выражают признательность за плодотворные дискуссии и считают своим приятным долгом поздравить Залимхана Вячеславовича Нагоева с юбилеем.

Проблема выбора оптимального варианта технологической карты и проектирования допустимых системотехнических решений программно-аппаратного комплекса видеоаналитики сводится к поиску конструктивных путей формирования вариантов, удовлетворяющих функциональным и временным критериям. Окончательное решение о структуре и функциях программно-аппаратного обеспечения видеоаналитики, необходимом для его реализации, принимается с учетом стоимостных затрат всего жизненного цикла индустриальной аквакультуры [19].

3. Результаты экспериментов по видеоаналитике на производстве

Первичные данные для разработки и внедрения системы видеоаналитики при решении задачи подсчета рыбы, ее массы при пересадках, отгрузке, приеме в цех переработки были получены в рамках сотрудничества компании «Остров», специализирующейся на выращивании форели и уделяющей серьезное внимание внедрению современных технологий автоматизации и искусственного интеллекта в технологические процессы индустриальной аквакультуры.

Раз в неделю рыбоводная служба производит операцию навески рыбы, для этого устанавливается специальная емкость, предварительно наполненная водой, на весы и с помощью сачка в эту емкость перекладывается рыба партиями по 10 особей за одну итерацию. После каждой итерации производится запись показания весов, после чего повторяют эту операцию 4 раза. Затем общая масса делится на количество рыб и среднее значение используется в качестве значения массы рыбы в бассейне для дальнейшей корректировки прогнозов и плана кормления. При посадке рыбы компания знает количество полученного малька с заявления поставщика и производит раз в неделю по мере роста свои навески, а также ведет учет отходов, но реальные значения

Математика

не известны до момента потрошения рыбы в цеху. Метод навески рыбы имеет значительную погрешность из-за множества факторов, таких как:

- навески производятся до и после кормления;
- навеска производится с поверхности бассейна из одного места;
- в емкость для навески попадает дополнительная вода с сачка и рыбы, которая влияет на конечные данные измерения;
- выборка из 40 особей при общем их количестве более 3 000 – слишком мала.

Вследствие этих факторов анализируемая выборка получается неоднородной и часто не представительной, поэтому задача автоматизации расчета биомассы рыб с минимизацией ручного труда и снижением влияния факторов инстинктивного поведения рыб является актуальной для рыбоводных предприятий. Примеры изображений показаны на рис. 2.



Рис. 2. Примеры изображений рыб: слева) в прозрачной трубе в водном потоке; справа) на конвейере и разделочной доске

Проведенные ранее компанией исследовательские работы по обработке изображений, снятых под водой, не дали положительных результатов, поэтому более детально были проанализированы процессы съемки рыбы в прозрачной узкой трубе, направляемой потоком воды, и на воздухе при движении на конвейере.

В первом случае были выявлены следующие негативные факторы, препятствующие регистрации качественного изображения. Рыба, действуя инстинктивно, плывет против течения, тем самым создавая заторы; из-за наложений друг на друга и невозможности даже человеческим глазом определить, где закончилась первая, а где начинается следующая рыба, невозможно правильно их пересчитать. Помимо этого, создается сильная вибрация, которая, в свою очередь, приводит к смазанным изображениям. Труба была не заполнена водой полностью, поэтому возникают волны, пузыри, брызги, и съемка рыбы получается в двух средах, что усложняет последующую обработку изображений. При движении рыбы по течению ее скорость становится достаточно высокой, что требует применения видеокамер с большей частотой кадров (60, 120 Гц).

Во втором случае съемка рыб производится на воздухе на конвейере в цехе переработки, также делались качественные снимки на разделочной доске с двух сторон в подвижном состоянии. Собран корпус из 20 000 изображений на конвейере и фотографий 1500 особей форели с двух сторон, необходимый для обучения моделей и оптимизации их параметров под разные виды задач видеоаналитики.

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку модельно-алгоритмического и программного обеспечения, необходимого для апробации предложенных математических моделей и оптимизации вариантов технологической карты функционирования системы видеоаналитики.

Литература

1. Bekarev, A. Aquaculture Digitalization: Polling Karelian Fish Farmers / A. Bekarev, E. Ivashko, V. Ivashko // Agriculture Digitalization and Organic Production. Proceedings of the Third International Conference on Agriculture Digitalization and Organic Production (ADOP 2023). Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2023. – Vol. 362. – P. 363–372.
2. Недоступ, А.А. Обоснование масштабов подобия световых величин установок замкнутого водоснабжения для выращивания гидробионтов / А.А. Недоступ, А.О. Ражев, Е.И. Хрусталёв // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Рыбное хозяйство. – 2020. – № 3. – С. 61–69.
3. Барулин, Н. Интенсивная аквакультура / Н. Барулин // Наука и инновации. – 2021. – № 8 (222). – С. 36–40.
4. О теоретических основах аэролимнологии: изучение пресных водоемов и прибрежных территорий с применением воздушных робототехнических средств / Д.С. Дудакова, В.М. Анохин, М.О. Дудаков, А.Л. Ронжин // Информатика и автоматизация. – 2022. – Вып. 21(6). – С. 1359–1393.
5. Коллаборативная селекционная система на основе консорциума гетерогенных интеллектуальных агентов / М.И. Анчёков, З.И. Боготова, И.А. Пшенокова, З.В. Нагоев, Б.Р. Шوماхов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2022. – № 5 (109). – С. 25–37.
6. Рекомендации по выращиванию рыбопосадочного материала радужной форели в рыбноводных промышленных комплексах (с временными нормативами) / Н.В. Барулин, М.С. Лиман, Е. Г. Новикова и др. – Горки: БГСХА, 2016. – 180 с.
7. Abudalfa, S. Evaluation of Skeletonization Techniques for 2D Binary Images / S. Abudalfa // Informatics and Automation. – 2023. – Vol. 22, Iss. 5. – P. 1152–1176.
8. Building an Online Learning Model Through a Dance Recognition Video Based on Deep Learning / N. Hung, T. Loi, N. Binh *et al.* // Informatics and Automation. – 2024. – Vol. 23, no. 1. – P. 101–128.
9. Разработка интеллектуальной интегрированной системы «умное поле» / З.В. Нагоев, В.М. Шуганов, А.У. Заммоев, К.Ч. Бжихатлов, З.З. Иванов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2022. – № 1 (225). – С. 81–91.
10. Mahamudul Hashan, A. Apple Leaf Disease Classification Using Image Dataset: a Multilayer Convolutional Neural Network Approach / A. Mahamudul Hashan, R. Md Rakib Ul Islam, K. Avinash // Informatics and Automation. – 2022. – Vol. 21, no. 4. – P. 710–728.
11. Ahmed, M.S. Fish Disease Detection using Image Based Machine Learning Technique in Aquaculture / M.S. Ahmed, T.T. Aurpa, M.A.K. Azad // Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences. – 2022. – Vol. 34, Iss. 8, Part A. – P. 5170–5182.
12. An Advanced Bangladeshi Local Fish Classification System based on the Combination of Deep Learning and the Internet of Things (IoT) / M.A. Ahmed, M.S. Hossain, W. Rahman *et al.* // Journal of Agriculture and Food Research. – 2023. – Vol 14. – 100663.
13. Нагоев, З.В. Алгоритм нейрокогнитивного обучения мультиагентной системы эволюционного моделирования экспрессии генов по данным ПЦР-анализа растений / З.В. Нагоев, М.И. Анчёков, Ж.Х. Курашев, А.А. Хамов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2023. – № 6 (116). – С. 179–192.
14. Ле, В.Н. Обзор интеллектуальных систем управления и робототехнических задач в производстве аквакультуры / В.Н. Ле, А.Л. Ронжин // Морские интеллектуальные технологии. – 2024. (в печати).
15. Nagoev, Z. Multi-Agent Neurocognitive Models of Semantics of Spatial Localization of Events / Z. Nagoev, O. Nagoeva, I. Gurtueva // Cognitive Systems Research. – 2020. – Vol. 59. – P. 91–102.
16. Нагоев, З.В. Извлечение знаний из многомодальных потоков неструктурированных данных на основе самоорганизации мультиагентной когнитивной архитектуры мобильного робота /

З.В. Нагоев, О.В. Нагоева // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2015. – № 6-2 (68). – С. 145–152.

17. Multi-agent Algorithms for Building Semantic Representations of Spatial Information in a Framework of Neurocognitive Architecture / Z. Nagoev, O. Nagoeva, I. Gurtueva, V. Denisenko // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2020. – Vol. 948. – P. 379–386.

18. Автономный синтез пространственных онтологий в системе принятия решений мобильного робота на основе самоорганизации мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры / З.В. Нагоев, К.Ч. Бжихатлов, И.А. Пшенокова и др. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2020. – № 6 (98). – С. 68–79.

19. Методы и алгоритмы синтеза технологий и программ управления реконфигурацией бортовых систем маломассоразмерных космических аппаратов / В.Н. Калинин, А.Ю. Кулаков, А.Н. Павлов и др. // Информатика и автоматизация. – 2021. – Т. 20, № 2. – С. 236–269.

Поступила в редакцию 17 февраля 2024 г.

Сведения об авторах

Ронжин Андрей Леонидович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории технологий больших данных социкиберфизических систем, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8903-3508>, e-mail: ronzhin@ias.spb.su.

Ле Ван Нгиа – соискатель лаборатории автономных робототехнических систем, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-8848-0341>, e-mail: lenghia18071999@gmail.com.

Шувалов Никита – аспирант лаборатории интеллектуальных систем, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-1240-1561>, e-mail: nikita@chouvalov.com.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 50–58*

DOI: 10.14529/mmph240205

OPTIMIZATION OF TECHNOLOGICAL MAP OF ACCEPTABLE SYSTEM ENGINEERING SOLUTIONS FOR AQUACULTURE VIDEO ANALYTICS

A.L. Ronzhin, V.N. Le, N. Shuvalov

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

E-mail: ronzhin@ias.spb.su

Abstract. The paper considers the problem of video analytics of aquatic organisms in fish farming industrial complexes. It proposes a conceptual model of the video analytics problem, and a corresponding mathematical formulation of the problem with the search for a subset of acceptable options for the technological map, which boils down to the search for options that satisfy functional criteria. The final decision on the structure and functions of video analytics hardware and software takes into account the cost of the entire life cycle of the equipment. The study emphasizes the importance of automation and intellectualization of technological processes in agriculture, the most pressing modern problems, which are the main focus of the research of advanced teams. The paper discusses primary data for the development and implementation of a video analytics system when solving the problem of counting fish and their mass during transplantation, shipment, and reception into the processing shop. The data were obtained in the framework of cooperation with the Ostrov company, specializing in trout cultivation and paying serious attention to the implementation of modern means of automatization and artificial intelli-

gence in technological processes of industrial aquaculture. Full-scale experiments were carried out and images of fishes were collected in a transparent narrow pipe directed by a stream of water, and in air while moving on a conveyor belt. Further research will be aimed at developing model-algorithmic and software necessary for testing the proposed mathematical models and optimizing options for the technological map of video analytics system.

Keywords: systems analysis; multi-criteria assessment; technical vision; video analytics; artificial intelligence technologies; robotics; artificial neural networks.

References

1. Bekarev A., Ivashko E., Ivashko V. Aquaculture Digitalization: Polling Karelian Fish Farmers. In: Ronzhin, A., Kostyaev, A. (eds) Agriculture Digitalization and Organic Production. ADOP 2023. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, Vol 362, Springer, Singapore, 2023. DOI: 10.1007/978-981-99-4165-0_33

2. Nedostup A.A., Razhev A.O., Khrustalyov E.I. Substantiation of Scales of Light Values Similarity of Recirculating Aquatic Systems for Growing Hydrobionts. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: fishing Industry*, 2020, Iss. 3, pp. 61–69. (in Russ.). DOI: 10.24143/2073-5529-2020-3-61-69

3. Barulin N. Intensivnaya akvakul'tura (Intensive Aquaculture). *Nauka i innovatsii*, 2021, no. 8 (222), pp. 36–40. (in Russ.).

4. Dudakova D., Anokhin V., Dudakov M., Ronzhin A. On Theoretical Foundations of Aerolimnology: Study of Fresh Water Bodies and Coastal Territories Using Air Robot Equipment. *Informatics and Automation*, 2022, № 6 (21), pp. 1359–1393. (in Russ.). DOI: 10.15622/ia.21.6.10

5. Anchekov M.I., Bogotova Z.I., Pshenokova I.A., Nagoev Z.V., Shomakhov B.R. Collaborative Breeding System based on a Consortium of Heterogeneous Intelligent Agents. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2022, no. 5 (109), pp. 25–37. DOI: 10.35330/1991-6639-2022-5-109-25-37

6. Barulin N.V., Liman M.S., Novikova E.G., Shumskiy K.L., Atroshchenko L.O., Rogovtsov S.V., Surovets N.A., Nekrylov A.V., Plavskiy V.Yu. *Rekomendatsii po vyrashchivaniyu ryboposadochnogo materiala raduzhnoy foreli v rybovodnykh industrial'nykh kompleksakh (s vremennymi normativami)* (Recommendations for the Cultivation of Rainbow Trout Fish Planting Material in Fish-Breeding Industrial Complexes (with Temporary Standards)), Gorki, BGSKhA, 2016, 180 p. (in Russ.).

7. Abudalfa S. Evaluation of Skeletonization Techniques for 2D Binary Images. *Informatics and Automation*, 2023, Vol. 22, Iss. 5, pp. 1152–1176. DOI: 10.15622/ia.22.5.7

8. Hung N., Loi T., Binh N., Nga N., Huong T., Luu D. Building an Online Learning Model Through a Dance Recognition Video Based on Deep Learning. *Informatics and Automation*, 2024, Vol. 23, no. 1, pp. 101–128. DOI: 10.15622/ia.23.1.4

9. Nagoev Z.V., Shuganov V.M., Zammoev A.U., Bzhikhatlov K.C., Ivanov Z.Z. Development of Intelligent Integrated System for “Smart” Agricultural Production. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2022, no. 1 (225), pp. 81–91.

10. Mahamudul Hashan A., Md Rakib Ul Islam R., Avinash K. Apple Leaf Disease Classification Using Image Dataset: a Multilayer Convolutional Neural Network Approach. *Informatics and Automation*, 2022, Vol. 21, no. 4, pp. 710–728. DOI 10.15622/ia.21.4.3

11. Ahmed M.S., Aurpa T.T., Azad M.A.K. Fish Disease Detection using Image based Machine Learning Technique in Aquaculture. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 2022, Vol. 34, Iss. 8, Part A, P. 5170–5182. DOI: 10.1016/j.jksuci.2021.05.003

12. Ahmed M.A., Hossain M.S., Rahman W., Uddin A.H., Islam M.T. An Advanced Bangladeshi Local Fish Classification system Based on the Combination of Deep Learning and the Internet of Things (IoT). *Journal of Agriculture and Food Research*. 2023, Vol 14, 100663. DOI: 10.1016/j.jafr.2023.100663

13. Nagoev Z.V., Anchyekov M.I., Kurashev Zh.Kh., Khamov A.A. Algoritm nejrokognitivnogo obuchenija mul'tiagentnoj sistemy jevoljucionnogo modelirovanija jekspressii genov po dannym pcr-analiza rastenij (The Algorithm of Neurocognitive Training of a Multi-Agent System of Evolutionary Modeling of Gene Expression Based on Plant PCR Analysis). *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2023, no. 6(116), pp. 179–192. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-6-116-179-192

14. Le V.N., Ronzhin A.L. Review of Intelligent Control Systems and Robotic Tasks in Aquaculture Production. *Marine intellectual technologies*, 2024 (to be published).
15. Nagoev Z., Nagoeva O., Gurtueva I. Multi-Agent Neurocognitive Models of Semantics of Spatial Localization of Events. *Cognitive Systems Research*, 2020, Vol. 59, pp. 91–102. DOI: 10.1016/J.COGLYSYS.2019.09.015
16. Nagoev Z.V., Nagoeva O.V. Extraction of Knowledge from Multimodal Flows of Unstructured Data on the Basis of Self-Organization of Multi-Agent Cognitive Architecture of the Mobile Robot. *News of the Kabardin-Balkar scientific center of RAS*, 2015, no. 6-2, pp. 145–152. (in Russ.).
17. Nagoev Z., Nagoeva O., Gurtueva I., Denisenko V. Multi-agent Algorithms for Building Semantic Representations of Spatial Information in a Framework of Neurocognitive Architecture. In: Samsonovich, A. (eds) *Biologically Inspired Cognitive Architectures 2019. BICA 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 948, Springer, Cham, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-25719-4_49
18. Nagoev Z.V., Bzhikhatlov K.Ch., Pshenokova I.A., Nagoeva O.V., Atalikov B.A., Chechenova N.A., Malyshev D.A. Autonomous Formation of Spatial Ontologies in the Intelligent Decision-Making System of a Mobile Agricultural Robot based on the Self-Organization of Multi-Agent Neurocognitive Architectures. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2020, no. 6, pp. 68–79. DOI: 10.35330/1991-6639-2020-6-98-68-79
19. Kalinin V., Kulakov A., Pavlov A., Potryasaev S., Sokolov B. Methods and Algorithms for the Synthesis of Technologies and Programs for Controlling the Reconfiguration of On-board Systems of Small-Sized Spacecrafts. *Informatics and Automation*, 2021, Vol. 20, no. 2, pp. 236–269. DOI: 10.15622/ia.2021.20.2.1

Received February 17, 2024

Information about the authors

Ronzhin Andrey Leonidovich is Professor, Dr. Sc. (Engineering), Chief Scientist of Laboratory of Big Data Technologies of Socio-Cyber-Physical Systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8903-3508>, e-mail: ronzhin@iias.spb.su.

Le Van Nghia is applicant for the Laboratory of Autonomous Robotic Systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-8848-0341>, e-mail: lenghia18071999@gmail.com.

Shuvalov Nikita is Post-graduate Student, Laboratory of Intelligent Systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-1240-1561>, e-mail: nikita@chouvalov.com.

О РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. Табаринцева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: eltab@rambler.ru

Аннотация. Исследуется задача с обратным временем для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. Исследуемая задача возникает, например, при математическом моделировании процесса внешнего геттерирования пластин кремния при создании полупроводниковых приборов. Как правило, математические модели интенсивных диффузионных и тепловых процессов учитывают также эффекты, связанные с нелинейностью процесса. Предлагается подход к построению численного решения задачи с обратным временем. Приближенное решение, устойчивое по Адамару, строится с помощью метода регуляризации, основанного на добавлении к финальному условию переопределения слагаемого с малым параметром. Для получения оценки точности численного решения в постановке задачи используется дополнительная (априорная) информация, характеризующая точное решение. Получена оценка погрешности приближенного решения при заданной априорной информации.

Ключевые слова: обратная задача; параболическое уравнение; метод регуляризации; математическая модель; оценка точности приближенного решения.

Вводные замечания

Тепловые и диффузионные процессы, как правило, моделируются параболическими уравнениями в частных производных.

При исследовании таких математических моделей часто приходится учитывать неустойчивость модели по отношению к малым возмущениям исходных данных.

В настоящей работе предлагается метод приближенного решения нелокальной задачи с обратным временем для полулинейного параболического уравнения. Оценка точности предложенного метода доказывается с применением заданной дополнительной информации о точном решении.

Обозначим через $u(x, t)$ решение следующей полулинейной задачи с интегральными условиями переопределения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u); 0 < x < 1; t_0 < t < T \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0; t_0 \leq t \leq T; u(x, t_0) = \psi(x); 0 < x < 1; p(t)u(t, 1) + \int_0^1 u(x, t) dx = 0.$$

Задача с интегральным условием переопределения в линейном случае была поставлена и впервые исследована А.А. Самарским [1].

В обратной задаче требуется определить функцию $\psi(x) = u(x, t_0) \in L_2[0, 1]$ ($0 < t_0 < t$), если известна функция $\chi(x) = u(x, T) \in L_2[0, 1]$.

Пусть $A_0 : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ – оператор, действующий по правилу

$$A_0 \psi(x) = \chi(x). \quad (2)$$

Обратную задачу можно сформулировать в виде операторного уравнения (2).

Обратная задача может быть сформулирована также в форме задачи оптимизации. Рассматривается проблема минимизации функционала $J(\psi) = \int_0^1 |u(x, T) - \chi(x)|^2 dx$ для функции $u(x, T, \psi)$ – решения задачи (1). Здесь $T > 0$ и $\chi(x) \in W_2^1[0, 1]$ заданы и удовлетворяют условиям $\chi(0) = 0$ и $\int_0^1 \chi(x) dx = 0$.

Эта задача возникает, в частности, при математическом моделировании технологических процессов, применяемых для очистки кремнивых плат от примесей. В этом случае $\psi(x)$ – распределение примеси в плате ($0 < x < 1$) в начальный момент времени $t = t_0$, а $u(x, t)$ – распределение примеси в момент времени t . Коэффициент диффузии $k(t)$ в этом процессе может зависеть от температуры [2, 3].

Исследование нелокальных задач для уравнений в частных производных вызвано необходимостью построения адекватных математических моделей и получения надежных результатов численных расчетов на основе построенных математических моделей в различных областях естествознания и технологий, таких как физика плазмы [1], авиационная и космическая техника, биология и медицина. Методику решения нелокальной задачи теории теплопроводности разработал Н.И. Ионкин. Этот прием основан на разложении функций в ряд по биортогональной системе [4, 5]. В дальнейшем вопросы корректности краевой задачи с нелокальными данными в различных, в том числе более общих постановках, изучались многими авторами [6–16]. Задачи, сочетающие локальные и интегральные условия для параболических уравнений второго порядка, исследуются такими методами, как метод потенциалов, метод Фурье, метод энергетических неравенств и другие. Приведем некоторые работы, содержащие важные результаты в исследовании нелокальных прямых и обратных задач. В работе [6] получен ряд результатов о разрешимости краевых задач для операторного уравнения вида $But - Lu = f(t \in (0, \infty))$.

В статье [7] изучается разрешимость нелокальных по пространственной переменной краевых задач для одномерных параболических уравнений, а также для некоторых уравнений соболевского типа. В статьях [8, 9] изучаются нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского – Ионкина по пространственной переменной, для которых доказаны теоремы существования и единственности решения. В статье [10] рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения. Доказано существование и единственность обобщенного решения.

В работах [11, 12] рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении коэффициентов многомерного параболического уравнения с нелокальными условиями. Исследованы вопросы корректности постановки задачи в слабой топологии пространства управлений. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности. В работе [13] рассмотрена краевая задача для одномерного параболического уравнения, в которой оба краевых условия являются интегральными. Установлены условия существования и единственности классического решения данной задачи путем сведения ее к эквивалентной первой краевой задаче для того же уравнения.

В статье [14] изучается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части для параболического уравнения со старшим коэффициентом, зависящим и от временной и от пространственной переменной, при условии интегрального переопределения по времени. Найдено два типа условий, достаточных для локальной разрешимости рассмотренной обратной задачи, а также исследована так называемая фредгольмова разрешимость данной обратной задачи. В работе [15] исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения. В работе [16] рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной краевой задачи для трехмерного неоднородного интегродифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка с вырожденным ядром. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных.

В настоящей работе предложен метод приближенного решения нелокальной обратной задачи в классической постановке и получена оценка погрешности приближенного решения.

Приведем необходимые определения [17].

Пусть U и F – метрические пространства, $M \subset U$, а $C[U, F]$ – пространство непрерывных отображений U в F .

Рассмотрим операторное уравнение, частным случаем которого является уравнение (2).

$$A_0\psi = \chi; \psi \in U; \chi \in F, \quad (3)$$

где $A_0 \in C[U, F]$ – взаимно-однозначный оператор, отображающий U в F .

Предположим, что при $\chi = \chi_0$ существует единственное точное решение ψ_0 уравнения (3), которое принадлежит множеству M , но точное значение правой части нам не известно, а вместо него даны приближенное значение $\chi_\delta \in F$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\rho(\chi_0, \chi_\delta) \leq \delta$. Требуется по исходным данным задачи χ_δ и δ определить приближенное решение уравнения (3) и оценить его отклонение от точного решения для $\chi_0 \in M$.

Определение 1. Семейство операторов $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M , если для любого $\delta \in (0; \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство F в U и $T_\delta \chi_\delta \rightarrow \chi_0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на множестве M при условии $\rho(A_0 \psi_0, \chi_\delta) \leq \delta$.

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ на множестве M :

$$\Delta_\delta(T_\delta) = \sup\{\rho(u, T_\delta \chi_\delta) : \psi \in M, \rho(A_0 \psi, \chi_\delta) \leq \delta\}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \sup\{\rho(\psi_1, \psi_2) : \psi_1, \psi_2 \in M, \rho(A_0 \psi_1, A_0 \psi_2) \leq \tau\}$$

модуль непрерывности оператора, обратного к A_0 , на множестве $A_0 M$.

Определение 2. Метод $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на множестве M , если существует число c такое, что для любого $\delta \in (0; \delta_0]$

$$\Delta_\delta(T_\delta) \leq c \omega_1(2\delta; M).$$

Для численного решения некорректно поставленных задач, как правило, необходима дополнительная информация о точном решении [18]. В классической постановке задачи в качестве дополнительного условия известно множество M , содержащее точное решение [17].

Обратная задача с нелокальным граничным условием для уравнения (1) сводится к интегральному уравнению. Основным приемом аналитического исследования задачи является разложение суммируемых с квадратом функций в ряд по собственным функциям несамосопряженной краевой задачи, образующим биортогональный базис.

Вспомогательная (регуляризованная) задача также сводится к интегральному уравнению

В этом случае также используется разложение функций в ряд по биортогональной системе собственных функций нелокальной краевой задачи.

Применяя интегральное представление для решений нелинейной задачи, можно получить неравенства для решений линейной и нелинейной задач. Используя полученные неравенства, можно оценить точность регуляризованного решения нелинейной задачи на классе корректности M . Методы приближенного решения некоторых обратных задач для полулинейного параболического уравнения с локальными краевыми условиями исследовались в работах [19, 20].

Задача с обратным временем

В этом разделе будет сформулирована и исследована обратная задача с финальным условием переопределения.

Линейная задача с обратным временем

Сформулируем линейную задачу с обратным временем для линейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (x < 1, t_0 < t < T); \quad (4)$$

$$v(0, t) = 0 (t_0 < t < T); \quad (5)$$

$$v(x, T) = \chi(x); \int_0^1 v(x, t) dx = 0; v(x, t) \in C(W_2^{2,0}[0, 1]; [t_0; T]) \cap C^1(L_2[0, 1]; (t_0; T)),$$

$v(x, t_0) = \psi(x) \in L_2[0, 1]$ требуется определить. Выполняя элементарные преобразования,

$$\int_0^1 v_t(x, t) dx = \int_0^1 v_{xx}(x, t) dx = v_x(1, t) - v_x(0, t) = 0,$$

убедимся, что задачу (4)–(5) можно сформулировать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t_0 < t < T); \quad (6)$$

$$v(0, t) = 0; v(x, T) = \chi(x) \quad (0 < x < 1, t_0 < t < T); \quad (7)$$

$$v_x(1, t) - v_x(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T).$$

2.2. Точное решение нелокальной линейной задачи

Решая линейную задачу (4) методом разделения переменных, получим следующую задачу на собственные функции и собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < 1)$$

$$X(0) = 0; X'(0) = X'(1).$$

Собственными значениями полученной задачи являются

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, k = 0, 1, \dots$$

Нормированными собственными функциями и присоединенными собственными функциями, соответствующими собственному значению λ_k , являются

$$X_0(x) = x, X_{2k-1} = x \cos(2\pi kx), X_{2k} = \sin(2\pi kx) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Нормированные собственные функции и присоединенные функции сопряженной задачи, соответствующие собственному значению λ_k , имеют вид

$$Y_0(x) = 2, Y_{2k-1} = 4 \cos(2\pi kx), Y_{2k} = 4(1-x) \sin(2\pi kx). \quad (9)$$

Функции семейств (8) и (9) обладают свойством биортогональности, т. е. для всех i, j

$$(X_i, Y_j) = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера.

Далее произвольную функцию $\varphi(x) \in L_2[0, 1]$ можно разложить в ряд по собственным функциям и присоединенным функциям:

$$\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k} X_{2k}(x) + \varphi_{2k-1} X_{2k-1}(x),$$

где $\varphi_0, \varphi_{2k}, \varphi_{2k-1}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, которые вычисляются по формулам

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx; \quad \varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{2k}(x) dx; \quad \varphi_{2k-1} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{2k-1}(x) dx.$$

Для любой функции $\varphi(x) \in L_2[0, 1]$ выполняются неравенства

$$A_1 \|\varphi\|_{L_2[0,1]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \leq A_2 \|\varphi\|_{L_2[0,1]}, \quad (10)$$

и $A_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = 16$. Здесь $\varphi_0, \varphi_{2k}, \varphi_{2k-1}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$

В работе [4] доказана следующая теорема:

Теорема [4, теорема 2] Если функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(1),$$

то линейная нелокальная задача (4)–(5) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k} X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k-1} (X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k} t X_{2k}(x))] e^{-\lambda_k t}.$$

Пусть функция χ имеет непрерывную производную на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\chi(0) = 0, \chi'(0) = \chi'(1)$$

и представлена суммой ряда

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_{2k} X_{2k}(x)] + \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_{2k-1} (X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k} t X_{2k}(x))],$$

в котором $\chi_0 = \int_0^1 \chi(x) dx = \int_0^1 v(x, T) dx = 0$.

Выполняются равенства

$$\varphi_{2k-1} = \chi_{2k-1} e^{\lambda_k T}, \varphi_{2k} = \chi_{2k} e^{\lambda_k T} + 2\sqrt{\lambda_k} T \chi_{2k-1} e^{\lambda_k T}. \tag{11}$$

Следовательно, если линейная задача с обратным временем имеет решение для заданной функции $\chi(x) \in L_2[0, 1]$, то это решение может быть представлено в виде

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_{2k} X_{2k}(x) + \chi_{2k-1} X_{2k-1}(x)] e^{\lambda_k (T-t_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} [\sqrt{\lambda_k} (T-t_0) X_{2k}(x)] e^{\lambda_k (T-t_0)}.$$

В дальнейшем будем рассматривать метод приближенного решения задачи с обратным временем и равномерную оценку погрешности построенного метода.

Для получения равномерных оценок точности методов приближенного решения некорректно поставленных задач рассматриваются множества равномерной регуляризации (множества, на которых равномерную оценку для данной задачи возможно получить [2]).

Рассмотрим следующий пример такого множества.

Определим классическое множество равномерной регуляризации для задачи (6)–(7) следующим образом.

Предположим, что для заданной функции $\chi(x) \in L_2[0, 1]$ задача (6)–(7) имеет решение $v(x, t)$. Предположим также, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет условиям (6)–(7) при $t \in [0, T]$, таким образом мы можем продолжить точное решение обратной задачи, определив решение для значений переменной t из промежутка $0 \leq t \leq T$. Обозначим $\varphi(x) = v(x, 0)$.

Множество равномерной регуляризации имеет вид

$$M = \left\{ \psi(x) = v(x, t_0) : \|\varphi(x)\|_{L_2[0,1]}^2 \leq r^2 \right\}.$$

Предположим, что существует точное решение обратной задачи для заданной функции, но точные значения заданной функции $\chi(x)$ не известны. Вместо точных значений известны значения функции χ_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|\chi_\delta - \chi\| < \delta$ и δ достаточно мало. Требуется построить приближенное решение исходной обратной задачи и оценить его отклонение от точного решения.

Полулинейная задача с обратным временем

Рассмотрим нелокальную задачу для полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) (0 < x < 1, t_0 < t < T); \tag{12}$$

$$u(0, t) = 0 (t_0 < t < T); \tag{13}$$

$$u(x, T) = \chi(x) (0 < x < 1); \int_0^1 u(x, t) dx = 0 (t_0 < t < T);$$

$u(x, t_0) = \Psi(x) \in L_2[0, 1]$ требуется определить. Здесь $f : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица (например, заданное с помощью непрерывной функции).

Далее, задача (12)–(13) может быть записана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (0 < x < 1, t_0 < t < T); \tag{14}$$

$$u(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T);$$

$$u(x, T) = \chi(x) \quad (0 < x < 1); \tag{15}$$

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0,$$

$$u(x, t) \in C(W_2^{2,0}; C[t_0; T]) \cap C^1(L_2[0; 1]; (t_0; T)),$$

$u(x, t_0) = \Psi(x) \in L_2[0, 1]$ требуется определить.

Из представления решения неоднородной линейной задачи, полученного в [21], следует, что нелинейная задача (12)–(13) сводится к интегральному уравнению

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k} X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k-1} (X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k} t X_{2k}(x))] e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^i \int_0^t [f_{2k} X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^i \int_0^t [f_{2k-1} X_{2k-1}(x) + 2\sqrt{\lambda_k}(\tau-t) X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau. \tag{16}$$

Здесь

$$f_0(u, \tau) = \int_0^1 f(u(x, \tau)) Y_0(x) dx; \quad f_{2k}(u, \tau) = \int_0^1 f(u(x, \tau)) Y_{2k}(x) dx; \quad f_{2k-1}(u, \tau) = \int_0^1 f(u(x, \tau)) Y_{2k-1}(x) dx.$$

В задаче с обратным временем (14)–(15) требуется определить функцию $\Psi(x) = u(x, t_0)$, если известны значения функции $\chi(x) = u(x, T)$.

3. Метод регуляризации нелокальных обратных задач

В этом разделе мы построим регуляризованное решение линейной задачи (6)–(7) и полулинейной задачи (14)–(15) и оценим точность регуляризованного решения.

3.1. Приближенное решение линейной задачи

Для построения приближенного решения линейной обратной задачи (6)–(7) рассмотрим задачу с малым параметром в условии переопределения, т. е. рассмотрим задачу восстановления функции $\psi_\delta^\varepsilon(x) = v_\delta^\varepsilon(x, t_0)$, где $\psi_\delta^\varepsilon(x) \in L_2$, $v_\delta^\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1; t_0 < t < T); \tag{17}$$

$$v_\delta^\varepsilon(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T); \tag{18}$$

$$\varepsilon v_\delta^\varepsilon(x, 0) + v_\delta^\varepsilon(x, T) = \chi_\delta(x) \quad (0 < x < 1); \quad \int_0^1 v_\delta^\varepsilon(x, t) dx = 0 \quad (t_0 < t < T).$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – параметр регуляризации, который требуется выбрать, используя подходящую зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$.

Обозначим $v_\delta^\varepsilon(x, t)$ решение задачи (17)–(18) для приближенно заданной функции $\chi_\delta(x)$. Будем рассматривать функцию $\psi_\delta^\varepsilon(x) = v_\delta^\varepsilon(x, t_0)$ в качестве приближенного решения исходной линейной задачи (6)–(7).

Дифференцируя интегральное условие (18) по переменной t , получим

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial t} \right) dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2} (x, t) dx = \frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial x} (1, t) - \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2} (0, t) = 0.$$

Следовательно, смешанная краевая задача (17)–(18) сводится к задаче

$$\frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1; t_0 < t < T), \tag{19}$$

$$v_\delta^\varepsilon(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T); \tag{20}$$

$$\varepsilon v_\delta^\varepsilon(x, 0) + v_\delta^\varepsilon(x, T) = \chi_\delta(x) \quad (0 < x < 1), \quad \frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial x}(1, t) - \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T).$$

3.2. Решение вспомогательной задачи

Решая регуляризованную задачу (19)–(20) методом разделения переменных и исследуя стандартным способом сходимость соответствующих рядов, убедимся, что вспомогательная задача (19)–(20) имеет единственное решение, представимое суммой ряда

$$v_\delta^\varepsilon(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k}^{\varepsilon, \delta} X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k-1}^{\varepsilon, \delta} (X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k} t X_{2k}(x))] e^{-\lambda_k t}. \tag{21}$$

Подставляя соотношение (21) в условие переопределения с малым параметром (20), найдем связь между коэффициентами разложения полученного решения и заданной функции:

$$\varphi_{2k}^{\varepsilon, \delta} = \frac{\chi_{2k-1}^\delta e^{\lambda_k T}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} + \frac{2\sqrt{\lambda_k} T \chi_{2k-1}^\delta e^{\lambda_k T}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda_k T})^2}, \quad \varphi_{2k-1}^{\varepsilon, \delta} = \frac{\chi_{2k-1}^\delta e^{\lambda_k T}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), убедимся, что для любой функции $\chi(x) \in L_2[0, 1]$ решение вспомогательной задачи представимо в виде

$$\begin{aligned} \psi_\delta^\varepsilon(x) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\chi_{2k}^\delta X_{2k}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\sqrt{\lambda_k} T \chi_{2k-1}^\delta X_{2k}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda_k T})^2} \right] \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\chi_{2k-1}^\delta X_{2k-1}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\sqrt{\lambda_k} t_0 \chi_{2k-1}^\delta X_{2k}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} \right]. \end{aligned} \tag{23}$$

3.3. Оценка погрешности приближенного решения линейной задачи

Определим величину, которую будем использовать в качестве характеристики точности регуляризованного решения.

Пусть $\psi(x)$ – решение линейной обратной задачи (6)–(7). Рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon, \delta) = \sup \{ \|\psi_\delta^\varepsilon - \psi\| : \psi \in M; \|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta \},$$

характеризующую точность построенного приближенного решения на множестве M .

Зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выберем так, чтобы величина $\Delta(\varepsilon, \delta)$ была минимальна.

Очевидная оценка следует из неравенства треугольника

$$\Delta(\varepsilon, \delta) \leq \Delta_1(\varepsilon, \delta) + \Delta_2(\varepsilon, \delta),$$

где

$$\Delta_2(\varepsilon, \delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta} \|\psi_\delta^\varepsilon - \psi^\varepsilon\|; \quad \Delta_1(\varepsilon) = \sup_{\varphi \in M} \|\psi_\varepsilon - \psi\|.$$

Здесь через ψ_ε обозначено решение регуляризованной задачи (19)–(20), построенное по точно заданному финальному условию.

Оценим величину $\Delta_2(\varepsilon, \delta)$. Из (22) следует, что решения регуляризованной задачи (17)–(18) с точными и приближенными данными удовлетворяют равенству

$$\psi_\delta^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\chi_{2k}^\delta - \chi_{2k}) X_{2k}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\sqrt{\lambda_k} T (\chi_{2k-1}^\delta - \chi_{2k-1}) X_{2k}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda_k T})^2} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\chi_{2k-1}^\delta - \chi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\sqrt{\lambda_k} t_0 (\chi_{2k-1}^\delta - \chi_{2k-1}) X_{2k}(x) e^{\lambda_k(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} \right]. \quad (24)$$

Оценим дробь

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}}.$$

Обозначим $s = e^{\lambda T}$, $s \geq 1$. Вычислим наибольшее значение функции.

$$F(s) = \frac{s^{\frac{T-t_0}{T}}}{1 + \varepsilon s}.$$

Критической точкой функции $F(s)$ является

$$s_0 = \frac{T-t_0}{t_0} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее $F(1) = \frac{1}{1 + \varepsilon}$, $F(s_0) = \frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$.

Следовательно,

$$\alpha = \sup_{\lambda \geq 0} F(\lambda) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}, C_1 = \left(\frac{T-t_0}{t_0} \right)^{\frac{T-t_0}{T}} \frac{t_0}{T}. \quad (25)$$

Оценим дробь $G(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda} e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}}, \lambda \geq 0$.

Заметим, что для любого $\tau > 0$, $\lambda > 0$ $\sqrt{\lambda} \leq e^{\lambda \tau}$.

Следовательно,

$$G(\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(T+\tau-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} = \frac{e^{\lambda(T-t_1)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}}, \quad (26)$$

где $t_1 = t_0 - \tau$. Заменяя в оценке (25) t_0 на $t_1 = t_0 - \tau$, имеем неравенство

$$G(\lambda) \leq \left(\frac{T-t_1}{t_1} \right)^{\frac{T-t_1}{T}} \frac{t_1}{T} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{T-t_1}{T}}} = \left(\frac{T-(t_0-\tau)}{t_0-\tau} \right)^{\frac{T-(t_0-\tau)}{T}} \frac{t_0-\tau}{T} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{T-(t_0-\tau)}{T}}}. \quad (27)$$

Так как $\tau > 0$ – произвольное число, то из неравенства (27) следует

$$\gamma = \sup_{\lambda \geq 0} G(\lambda) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}. \quad (28)$$

Так как для всех $\lambda \geq 0$ $\frac{\sqrt{\lambda} e^{\lambda(T-t_0)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda T})^2} \leq \frac{\sqrt{\lambda} e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}}$, то

$$\sup_{\lambda \geq 0} \frac{\sqrt{\lambda} e^{\lambda(T-t_0)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda T})^2} \leq \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\sqrt{\lambda} e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} = \gamma \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}.$$

Используя равенство (24) и неравенства (25), (28), (10), получаем оценку

$$\Delta_2(\varepsilon, \delta) \leq \frac{4C_1\delta}{3\varepsilon T} \tag{29}$$

Оценим величину Δ_1 .

Воспользуемся равенствами (11) для коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$ и равенствами (22) для коэффициентов Фурье вспомогательной задачи. Записывая равенства (22) с учетом (11), убедимся, что решение вспомогательной задачи может быть представлено суммой ряда

$$\psi^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{2k}^\varepsilon X_{2k}(x) + \psi_{2k-1}^\varepsilon X_{2k-1}(x)),$$

где

$$\psi_{2k-1}^\varepsilon = \frac{\varphi_{2k-1}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}}; \quad \psi_{2k}^\varepsilon = \frac{\varphi_{2k}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} - \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}T\varphi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda T})^2}.$$

Далее, для разности точного и приближенного решений имеем разложение

$$D^\varepsilon(x) = \psi(x) - \psi^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k}^\varepsilon X_{2k}(x) + d_{2k-1}^\varepsilon X_{2k-1}(x),$$

где

$$d_{2k-1}^\varepsilon = \frac{\varepsilon\varphi_{2k-1}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}}; \quad d_{2k}^\varepsilon = \frac{\varepsilon\varphi_{2k}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} - \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}t_0\varepsilon\varphi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} + \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}T\varepsilon\varphi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda T})^2}.$$

Следовательно, в силу (10)

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi^\varepsilon\|_{L_2[0,1]}^2 &\leq A_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(d_{2k}^\varepsilon)^2 + (d_{2k-1}^\varepsilon)^2 \right] \leq 3\varepsilon^2 A_1 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}^2 \left(\frac{e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} \right)^2 + \\ &3\varepsilon^2 A_1 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1}^2 \left[\left(\frac{e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} \right)^2 + 2t_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda(T-t_0)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda T}} \right)^2 + 2T \left(\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda(T-t_0)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda T})^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Из неравенства (30) с учетом (25), (28), (10) следует оценка

$$\Delta_1(\varepsilon) \leq 6rC_1 \left(1 + 4(T^2 + t_0^2) \right) \varepsilon \frac{T-t_0}{T}. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\Delta(\varepsilon, \delta) \leq C\varepsilon \frac{T-t_0}{T} + \frac{C\delta}{\varepsilon T}, \tag{32}$$

где $C = 6rC_1 \left(1 + 4(T^2 + t_0^2) \right)$. Выберем параметр регуляризации $\varepsilon = \varepsilon^*(\delta)$ так, чтобы полученная оценка погрешности была минимальной. Вычисляя наименьшее значение функции в правой части (32), получим соотношение

$$\frac{T-t_0}{\varepsilon T} = \frac{C\delta}{\varepsilon T}. \tag{33}$$

Из (33) следует, что

$$\varepsilon^*(\delta) = \delta. \tag{34}$$

Здесь $C = 6rC_1 \left(1 + 4(T^2 + t_0^2) \right)$ – постоянная, не зависящая от δ .

С помощью соотношения (34) запишем оценку погрешности построенного приближенного решения: $\Delta(\varepsilon^*, \delta) \leq C \delta \frac{T-t_0}{T}$.

3.4. Приближенное решение полулинейной задачи

Чтобы получить устойчивое приближенное решение полулинейной задачи (14)–(15), рассмотрим задачу, которая содержит малый параметр в условии переопределения, то есть вспомогательная задача состоит в восстановлении функции $\Psi_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x, t_0)$, где $\Psi_\varepsilon(x) \in L_2[0, 1]$ и $u_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2} + f(u_\delta^\varepsilon) \quad (0 < x < 1, t_0 < t < T); \tag{35}$$

$$u_\delta^\varepsilon(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T); \tag{36}$$

$$\varepsilon u_\delta^\varepsilon(x, 0) + u_\delta^\varepsilon(x, T) = \chi_\delta(x) \quad (0 < x < 1); \quad \int_0^1 u_\delta^\varepsilon(x, t) dx = 0 \quad (t_0 < t < T).$$

Необходимо также выбрать параметр регуляризации $\varepsilon(\delta)$. Обозначим $u_\delta^\varepsilon(x, t)$ решение регуляризованной задачи (35)–(36). Будем рассматривать функцию $\Psi_\delta^\varepsilon(x) = u_\delta^\varepsilon(x, t_0)$ в качестве приближенного решения задачи (14)–(15).

Вспомогательная задача (35)–(36) может быть записана в виде

$$\frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2} + f(u_\delta^\varepsilon) \quad (0 < x < 1, t_0 < t < T); \tag{37}$$

$$u_\delta^\varepsilon(0, t) = 0 \quad (t_0 < t < T); \tag{38}$$

$$\varepsilon u_\delta^\varepsilon(x, 0) + u_\delta^\varepsilon(x, T) = \chi_\delta(x) \quad (0 < x < 1). \quad \frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial x}(1, t) - \frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(0, t) = 0.$$

Параметр регуляризации $\varepsilon > 0$ выбирается с использованием подходящей зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$.

Применяя разложение в ряд по системе собственных и присоединенных функций соответствующей линейной задачи, убедимся, что вспомогательная задача сводится к интегральному уравнению

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_{2k}^\varepsilon X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_{2k-1}^\varepsilon (X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_n} t X_{2k}(x))] e^{-\lambda_k t} + \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t [f_{2k} X_{2k}(x)] e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t [f_{2k-1} (X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_n} t X_{2k}(x))] e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

Здесь

$$f_0(u, \tau) = \int_0^1 f(u(\tau)) Y_0(x) dx; \quad f_{2k}(u, \tau) = \int_0^1 f(u(\tau)) Y_{2k}(x) dx; \quad f_{2k-1}(u, \tau) = \int_0^1 f(u(\tau)) Y_{2k-1}(x) dx.$$

Существование и единственность решения вспомогательной задачи могут быть доказаны стандартным способом с применением принципа сжимающих отображений.

Таким образом, решение вспомогательной задачи может быть представлено суммой ряда

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{2k}^\varepsilon X_{2k}(x) + \Psi_{2k-1}^\varepsilon X_{2k-1}(x)),$$

где

$$\Psi_{2k-1}^\varepsilon = \frac{\chi_{2k-1} e^{\lambda_k T}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} + \int_0^T \frac{f_{2k-1}(u(x, \tau)) e^{\lambda_k(\tau)}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} d\tau,$$

$$\Psi_{2k}^\varepsilon = \frac{\chi_{2k-1} e^{\lambda_k T}}{1 + \varepsilon e^{\lambda_k T}} + \frac{(\chi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} \chi_{2k-1}) e^{\lambda_k T}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda_k T})^2} +$$

$$2\varepsilon \sqrt{\lambda_k} \int_0^T \frac{f_{2k-1}(u(x, \tau)) e^{\lambda_k(\tau)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda_k T})^2} d\tau + \varepsilon \int_0^T \frac{(f_{2k}(u(x, \tau)) + 2\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(u(x, \tau))) e^{\lambda_k(\tau)}}{(1 + \varepsilon e^{\lambda_k T})^2} d\tau.$$

Литература

1. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
2. Муравей, Л.А. Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Матем. сб. – 1991. – Т. 182, № 10. – С. 1479–1512.
3. Муравей, Л.А. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Мат. заметки. – 1993. – Т. 54, № 4. – С. 98–116.
4. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.
5. Ионкин, Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 1279–1283.
6. Егоров, И.Е. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 335 с.
7. Пятков, С.Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / С.Г. Пятков, Н.Л. Абашеева // Сиб. матем. журнал – 2000 – Т. 41, № 6. – С. 1419–1435.
8. Кожанов, А.И. Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений. А.И. Кожанов / Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2023 – Т. 509. – С. 50–53.
9. Кожанов, А.И. Пространственно–нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для квазипараболических уравнений / А.И. Кожанов, А.М. Абдрахманов // Сиб. электрон. матем. изв. – 2023 – Т. 20, № 1. – С. 110–123.
10. Пулькина, Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Матем. заметки – 2001 – Т. 70, № 1 – С. 88–95.
11. Тагиев, Р.К. Вариационная постановка коэффициентной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли / Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. – Т. 212 – С. 92–99.
12. Тагиев, Р.К. Вариационная постановка одной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли / Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020 – Т. 12, № 3 – С. 34–40.
13. Иванчов, Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Н.И. Иванчов / Дифференц. уравнения – 2024 – Т. 40, № 4 – С. 547–564.
14. Камынин, В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения / В.Л. Камынин // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, № 4. – С. 522–534.
15. Данилкина, О.Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием / О.Ю. Данилкина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2007. – Т. 1, № 14. – С. 5–9.
16. Юлдашев, Т.К. Нелокальная краевая задача для линейного псевдопараболического уравнения высокого порядка / Т.К. Юлдашев, Н.А. Суюнова // Журнал математики и информатики. – 2023. – Т. 3, № 2. – С. 69–78.
17. Иванов, В.К. Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
18. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 261 с.

19. Табаринцева, Е.В. Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2018. – Т. 21, № 3. – С. 293–313.

20. Табаринцева, Е.В. О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 231–337.

21. Исмати, М. (Исматов, М.) О некоторых несамосопряженных смешанных задачах теории теплопроводности / М. Исмати // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 382–395.

Поступила в редакцию 30 января 2024 г.

Сведения об авторе

Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического обеспечения информационных технологий, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: eltab@rambler.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 59–71*

DOI: 10.14529/mmph240206

SOLVING AN ILL-POSED PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION BY MEANS OF THE PROJECTION REGULARIZATION METHOD

E.V. Tabarintseva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: eltab@rambler.ru

Abstract. The article investigates a problem with inverse time for a semilinear parabolic equation equipped with nonlocal boundary conditions. The problem under study arises, for example, in the mathematical modeling of the process of external gettering of silicon wafers in the creation of semiconductor devices. At the same time, when developing a mathematical model in the case of a high-intensive diffusion process, it is necessary to take into account the effects associated with the nonlinearity of the process. The paper suggests an approach for constructing a numerical solution to the problem with the inverse time, stable with respect to small perturbations of the initial data. The numerical solution is constructed using the regularization method based on adding a term with a small parameter to the overdetermination (final) condition. To obtain an approximate solution, the problem statement must recon in supplementary (a priori) information characterizing the exact solution. We obtain an error estimate for the approximate solution under the given a priori information.

Keywords: inverse problem; nonlinear differential equation; approximate method; error estimate.

References

1. Samarskii A.A. Some Problems of the Theory of Differential Equations. *Differ. Uravn.*, 1980, Vol. 16, Iss. 11, pp. 1925–1935. (in Russ.).
2. Muravei L.A., Filinovskii A.V. On a Problem with Nonlocal Boundary Condition for a Parabolic Equation. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1993, Vol. 74, Iss. 1, pp. 219–249. DOI: 10.1070/SM1993v074n01ABEH003345
3. Muravei L.A., Filinovskii A.V. On the Non-Local Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation. *Mathematical Notes*, 1993, Vol. 54, Iss. 4, pp. 1045–1057. DOI: 10.1007/BF01210424
4. Ionkin N.I. The Solution of a Certain Boundary Value Problem of the Theory of Heat Conduction with a Nonclassical Boundary Condition. *Differ. Uravn.*, 1977, Vol. 13, no. 2, pp. 294–304. (in Russ.).
5. Ionkin N.I. The Stability of a Problem in the Theory of Heat Conduction with Nonclassical Boundary Conditions. *Differ. Uravn.*, 1979, Vol. 15, Iss. 7, pp. 1279–1283. (in Russ.).

6. Egorov I.E., Pyatkov S.G., Popov S.V. Neklassicheskie operatorno-differentsial'nye uravneniya (Non-classical Operator-Differential Equations), Novosibirsk, Nauka Publ., 2000, 335 p. (in Russ.).
7. Pyatkov S.G., Abasheeva N.L. Solvability of Boundary Value Problems for Operator-Differential Equations of Mixed Type. *Siberian Mathematical Journal*, 2000, Vol. 41, Iss. 6, pp. 1174–1187. DOI: 10.1023/A:1004888707894
8. Kozhanov A.I. Nonlocal Problems with Generalized Samarskii–Ionkin Condition for Some Classes of Nonstationary Differential Equations. *Doklady Mathematics*, 2023, Vol. 107, Iss. 1, pp. 40–43. DOI: 10.1134/S106456242370045X
9. Kozhanov A.I., Abdrakhmanov A.M. Spatially-Nonlocal Boundary Value Problems with the generalized Samarskii–Ionkin condition for quasi-parabolic equations. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2023, Vol. 20, Iss. 1, pp. 110–123. DOI: 10.33048/semi.2023.20.010
10. Pul'kina L.S. A Nonlocal Problem with Integral Conditions for the Quasilinear Hyperbolic Equation. *Mathematical Notes*, 2001, Vol. 70, Iss. 1, pp. 79–85. DOI: 10.1023/A:1010226002462
11. Tagiyev R.K., Maharramli Sh.I. Variational Statement of a Coefficient Inverse Problem for a Multidimensional Parabolic Equation. *Geometry, Mechanics, and Differential Equations, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 212, VINITI, Moscow, 2022, pp. 92–99. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-92-99
12. Tagiev R.K., Maharramli Sh.I. Variational Formulation of an Inverse Problem for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2020, Vol. 12, no. 3, pp. 34–40. DOI: 10.14529/mmph200305
13. Ivanchov N.I. Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Differential Equations*, 2004, Vol. 40, Iss. 4, pp. 591–609. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44
14. Kamynin V.L. On the Inverse Problem of Determining the Right-Hand Side of a Parabolic Equation under an Integral Overdetermination Condition. *Mathematical Notes*, 2005, Vol. 77, Iss. 4, pp. 482–493. DOI: 10.1007/s11006-005-0047-6
15. Danilkina O.Yu. On One Nonlocal Problem for the Heat Equation with an Integral Condition. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2007, Iss. 1(14), pp. 5–9. DOI: 10.14498/vsgtu480
16. Yuldashev T.K., Suyunova N.A. Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya lineynogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka (A Non-Local Boundary Value Problem for a High-Order Nonlinear Pseudoparabolic Equation). *Journal of Mathematics and Informatics*, 2023, Vol. 3, no. 2, pp. 69–78.
17. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektno postavlennykh zadach i ee prilozheniya* (The Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications). Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).
18. Vasin V.V., Ageev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoy informatsiey* (Incorrect Tasks with A Priori Information). Ekaterinburg, Nauka Publ., 1993, 261 p. (in Russ.).
19. Tabarintseva E.V. Estimating the Accuracy of a Method of Auxiliary Boundary Conditions in Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Equation. *Numerical Analysis and Applications*, 2018, Vol. 11, Iss. 3, pp. 236–255. DOI: 10.1134/S1995423918030059
20. Tabarintseva E.V. An Approach to Solving an Ill-Posed Problem for a Nonlinear Differential Equation. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2015, Vol. 21, no. 1, pp. 231–237. (in Russ.).
21. Ismati (Ismatov) M. On Some Nonself-Adjoint Mixed Problems in Heat Theory. *Differential Equations*, 2005, Vol. 41, Iss. 3, pp. 401–415. DOI: 10.1007/s10625-005-0172-8

Received January 30, 2024

Information about the author

Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: eltab@rambler.ru.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

Д.А. Турсунов, А.С. Садиева

Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика

E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Аннотация. Дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и ее производными. Такие связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике, социологии, океанологии и др. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром используются при моделировании процессов различной природы. Обычно при моделировании отбрасывают малые факторы, чтобы получилась более простая модель, с которой можно было бы извлечь нужную информацию. Практика доказала, что малые факторы надо не учитывать не в уравнениях, а в решениях. Уравнения, содержащие малые факторы, называют возмущенными. Теория возмущений получила широкое применение в современной прикладной математике. С ее помощью исследователи отвечают на вопросы влияния различных факторов на течение процесса, об устойчивости полученных решений, близости процессов, описываемых полученными решениями, реальным исследуемым объектам.

Исследуется задача Валле-Пуссена для системы неоднородных линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого отрезка. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи, модифицируя классический метод пограничных функций.

Ключевые слова: малый параметр; сингулярно возмущенная задача Валле-Пуссена; нестабильный спектр; бисингулярная задача; гладкое внешнее решение; пограничная функция; пограничный слой.

Введение. Дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и ее производными. Такие связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике, социологии, океанологии и др. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром используются при моделировании процессов различной природы. Обычно при моделировании отбрасывают малые факторы, чтобы получилась более простая модель, с которой можно было бы извлечь нужную информацию. Практика доказала, что малые факторы надо бросить не в уравнениях, а в решениях. Уравнения, содержащие малые факторы, называют возмущенными. Теория возмущений получила широкое применение в современной прикладной математике. С ее помощью исследователи отвечают на вопросы влияния различных факторов на течение процесса, об устойчивости полученных решений, близости процессов, описываемых полученными решениями, реальным исследуемым объектам [1–3].

В статье исследуется задача Валле-Пуссена [4] для системы неоднородных линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого отрезка. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи. Новизна работы заключается в том, что предлагается сравнительно удобный и легкий алгоритм построения асимптотического решения задач Валле-Пуссена, модифицируя классический метод пограничных функций. Ранее в работе [5] доказана разрешимость задачи Валле-Пуссена для сингулярных дифференциальных уравнений n -го порядка. А в работах [6, 7] методом регуляризации С.А. Ломова построены асимптотические решения сингулярно возмущенных задач Валле-Пуссена.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Валле-Пуссена

$$\varepsilon Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$B_1 Y(0) + B_2 Y(x_0) + B_3 Y(1) = Y^0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – скалярный малый параметр, квадратная матрица-функция $A(x)$ размерности 3×3 с простым спектром, $F(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x))^T$ – известная вектор-функция, $A, F \in C^\infty[0,1]$, $Y^0 = (y_1^0 \ y_2^0 \ y_3^0)^T$ – заданный постоянный вектор, $x_0 \in (0,1)$, $Y(x) = (y_1(x) \ y_2(x) \ y_3(x))^T$ – искомая вектор-функция, зависящая от скалярного малого параметра ε , а матрицы B_1, B_2, B_3 – диагональные матрицы вида:

$$B_1 = \text{diag}\{1,0,0\}, B_2 = \text{diag}\{0,1,0\}, B_3 = \text{diag}\{0,0,1\},$$

причем $B_1 + B_2 + B_3 = E_3$ – единичная матрица третьего порядка.

Пусть выполняется условие:

U_1 . Спектр $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)\}$ матрицы-функции $A(x)$ имеет вид:

$$\lambda(x) = \{-x, x_0 - x, 1 - x\}.$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи Валле-Пуссена на отрезке $x \in [0,1]$ при стремлении малого параметра к нулю справа.

Отметим **особенности** задачи:

- присутствие малого параметра при производной;
- необратимость матрицы-функции $A(x)$ в точках $x = 0, x = x_0$ и $x = 1$.

По условию ε – малый положительный параметр, асимптотика решения задачи (1)–(2) строится при стремлении малого параметра к нулю. Все входящие в задаче (1)–(2) матрицы-функции достаточно гладкие. Поэтому решение задачи (1)–(2) тоже должно быть достаточно гладким на рассматриваемом отрезке. Однако, если считать, что $\varepsilon = 0$, то получим вырожденное уравнение:

$$A(x)Y(x) + F(x) = 0, \quad (3)$$

решение которого негладкое в точках $x = 0, x = x_0$ и $x = 1$. В таких случаях задачу называют би-сингулярной [8].

Решение задачи. Для изложения сути основной идеи рассмотрим простой случай, когда матрица-функция $A(x)$ чисто диагональная, т. е.

$$A(x) = \text{diag}\{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)\}.$$

Как всегда, сначала строим внешнее решение задачи, потому что оно дает нам возможность определить размерность слоев, т. е. преобразование.

Внешнее решение $U(x)$ строим методом малого параметра:

$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) + \dots + \varepsilon^n U_n(x) + \dots \quad (4)$$

Подставляя ряд (4) в систему (1), имеем:

$$\varepsilon\{U'_0(x) + \varepsilon U'_1(x) + \dots + \varepsilon^n U'_n(x) + \dots\} = A(x)\{U_0(x) + \varepsilon U_1(x) + \dots + \varepsilon^n U_n(x) + \dots\} + F(x),$$

по идее метода малого параметра получим

$$A(x)U_0(x) + F(x) = 0, \quad A(x)U_n(x) = U'_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

отсюда имеем:

$$U_0(x) = -A^{-1}(x)F(x), \quad U_n(x) = A^{-1}(x)U'_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В итоге нами формально определены все члены внешнего разложения. Внешнее решение также можем записать в скалярном виде:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f_1(x)x^{-1} + \varepsilon \tilde{u}_{11}(x)x^{-3} + \varepsilon^2 \tilde{u}_{12}(x)x^{-5} + \dots + \varepsilon^k \tilde{u}_{1k}(x)x^{-(2k+1)} + \dots, \\ u_2(x) &= f_2(x)(x_0 - x)^{-1} + \varepsilon \tilde{u}_{21}(x)(x_0 - x)^{-3} + \dots + \varepsilon^k \tilde{u}_{2k}(x)(x_0 - x)^{-(2k+1)} + \dots, \\ u_3(x) &= f_3(x)(1 - x)^{-1} + \varepsilon \tilde{u}_{31}(x)(1 - x)^{-3} + \dots + \varepsilon^k \tilde{u}_{3k}(x)(1 - x)^{-(2k+1)} + \dots, \end{aligned}$$

где $u_{ij} \in C^\infty[0,1], i = 1, 2, 3; j \in \mathbb{N}$.

Заметим, что внешнее решение (4) не удовлетворяет условиям Вале-Пуссена (2) и теряет асимптотический характер в окрестностях особых точек соответственно.

Однако здесь мы получаем информацию о масштабе внутреннего растяжения. Пусть $x = \mu\tau$, где $\mu = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда $u_1(x)$ примет вид

$$u_1(\tau) = \frac{1}{\mu\tau} \{f_1(\mu\tau) + \frac{\tilde{y}_{11}(\mu\tau)}{\tau^2} + \frac{\tilde{y}_{12}(\mu\tau)}{\tau^4} + \dots + \frac{\tilde{y}_{1k}(\mu\tau)}{\tau^{2k}} + \dots\}.$$

Ряд в фигурной скобке сходится и является асимптотическим рядом при $\tau > 1$. Поэтому в окрестности особой точки $x = 0$ растяжение координаты произведем по соотношению $x = \mu\tau$. Аналогично в окрестностях особых точек $x = x_0$ и $x = 1$ соответственно: $x_0 - x = \mu\eta$ и $1 - x = \mu t$.

Для построения асимптотического разложения решения задачи Валле-Пуссена, включающей точки $x = 0$, $x = x_0$ и $x = 1$, используем метод обобщенных пограничных функций [9].

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x) + H - H, \quad x \in [0,1], \quad (5)$$

где $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots + \varepsilon^n H_n + \dots$, H_n – пока неизвестные векторы $H_n = (h_{1,n} \ h_{2,n} \ h_{3,n})^T$, $n = 0,1,2,\dots$

Решение задачи (5), (2) будем искать в виде

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi_k(x), \quad (6)$$

где $U_k(x) = (u_{1,k}(x) \ u_{2,k}(x) \ u_{3,k}(x))^T$, $\Pi_k(x) = (\pi_{1,k}(x) \ \pi_{2,k}(x) \ \pi_{3,k}(x))^T$.

Подставляя (6) в систему (5), имеем:

$$\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U'_k(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi'_k(x) \right) = A(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi_k(x) \right) + F(x) + H - H, \quad x \in [0,1].$$

Полученное равенство запишем в виде двух уравнений:

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U'_k(x) = A(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x) + F(x) - H, \quad (7)$$

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi'_k(x) = \frac{1}{\mu} A(x) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi_k(x) + H. \quad (8)$$

Из (7) имеем

$$U_0(x) = -A^{-1}(x)(F(x) - H_0),$$

здесь есть у нас возможность выбора постоянного вектора H_0 так, чтобы вектор $U_0(x)$ был достаточно гладким [9].

Пусть $H_0 = (f_1(0) \ f_2(x_0) \ f_3(1))^T$, тогда $U_0 \in C^\infty[0,1]$.

Аналогично имеем:

$$U_n(x) = A^{-1}(x)(U'_{n-1}(x) + H_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

пусть $H_n = -(u'_{1,n-1}(0) \ u'_{2,n-1}(x_0) \ u'_{3,n-1}(1))^T$, тогда $U_n \in C^\infty[0,1]$.

Таким образом, мы определили все члены рядов:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(x) \quad \text{и} \quad H = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k.$$

Перейдем теперь к определению членов ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Pi_k(x)$. В уравнении (8) значение вектора H нам известно. Учитывая условие Валле-Пуссена (2) для погранфункций, получаем следующие условия:

$$\pi_1(0) = \mu(y_1^0 - u_1(0)); \quad \pi_2(x_0) = \mu(y_2^0 - u_2(x_0)); \quad \pi_3(1) = \mu(y_3^0 - u_3(1)).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \pi_{1,0}(0) = 0, \quad \pi_{1,1}(0) = y_1^0 - u_{1,0}(0), \quad \pi_{1,2n}(0) = 0, \quad \pi_{1,2n+1}(0) = -u_{1,n}(0); \\ \pi_{2,0}(x_0) = 0, \quad \pi_{2,1}(x_0) = y_2^0 - u_{2,0}(x_0), \quad \pi_{2,2n}(x_0) = 0, \quad \pi_{2,2n+1}(x_0) = -u_{2,n}(x_0); \\ \pi_{3,0}(1) = 0, \quad \pi_{3,1}(1) = y_3^0 - u_{3,0}(1), \quad \pi_{3,2n}(1) = 0, \quad \pi_{3,2n+1}(1) = -u_{3,n}(1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача (8)–(9) расщепляется на три задачи относительно $\pi_{1,k}(x)$, $\pi_{2,k}(x)$ и $\pi_{3,k}(x)$:

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi'_{1,k}(x) = -\frac{x}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{1,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} h_{1,k}, \quad (10)$$

$$\pi_{1,0}(0) = 0, \quad \pi_{1,1}(0) = y_1^0 - u_{1,0}(0), \quad \pi_{1,2n}(0) = 0, \quad \pi_{1,2n+1}(0) = -u_{1,n}(0), \quad n \in N; \quad (11)$$

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi'_{2,k}(x) = -\frac{x-x_0}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{2,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} h_{2,k}, \quad (12)$$

$$\pi_{2,0}(x_0) = 0, \quad \pi_{2,1}(x_0) = y_2^0 - u_{2,0}(x_0), \quad \pi_{2,2n}(x_0) = 0, \quad \pi_{2,2n+1}(x_0) = -u_{2,n}(x_0), \quad n \in N; \quad (13)$$

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi'_{3,k}(x) = \frac{1-x}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_{3,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} h_{3,k}. \quad (14)$$

$$\pi_{3,0}(1) = 0, \quad \pi_{3,1}(1) = y_3^0 - u_{3,0}(1), \quad \pi_{3,2n}(1) = 0, \quad \pi_{3,2n+1}(1) = -u_{3,n}(1), \quad n \in N. \quad (15)$$

Каждую из этих задач (10)–(11); (12)–(13); (14)–(15) можно рассматривать отдельно. Достаточно исследовать одну из этих трех задач, так как остальные исследуются аналогичным образом.

Рассмотрим задачу (10)–(11). Пусть $x = \mu\tau$, где $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, $\tau \in [0, \infty)$. Тогда получаем:

$$\pi'_{1,0}(\tau) = -\tau\pi_{1,0}(\tau) + h_{1,0}, \quad \tau \in [0, \infty), \quad \pi_{1,0}(0) = 0, \quad (16)$$

$$\pi'_{1,1}(\tau) = -\tau\pi_{1,1}(\tau), \quad \tau \in [0, \infty), \quad \pi_{1,1}(0) = y_1^0 - u_{1,0}(0), \quad (17)$$

$$\pi'_{1,2n}(\tau) = -\tau\pi_{1,2n}(\tau) + h_{1,n}, \quad \tau \in [0, \infty), \quad \pi_{1,2n}(0) = 0, \quad (18)$$

$$\pi'_{1,2n+1}(\tau) = -\tau\pi_{1,2n+1}(\tau), \quad \tau \in [0, \infty), \quad \pi_{1,2n+1}(0) = -u_{1,n}(0), \quad n \in N. \quad (19)$$

Решения задач (16)–(19) существуют и единственны. Кроме этого, решения задач (16) и (18) степенным характером $O(\tau^{-1})$ $\tau \rightarrow \infty$, а решения задач (17) и (19) экспоненциально убывают вне пограничных слоев соответственно [8, 9].

Для обоснования построенного формального асимптотического разложения рассмотрим остаточную функцию $R_n(x) = Y(x) - G_n(x)$, где $R_n(x) = (R_{1,n}(x) \ R_{2,n}(x) \ R_{3,n}(x))^T$, $Y(x)$ – решение задачи (1)–(2), а $G_n(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k U_k(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k \Pi_k(x)$.

Для остаточного члена получим следующую задачу:

$$\varepsilon R'_n(x) = A(x)R_n(x) + \varepsilon^{n+1} \tilde{F}(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$B_1 R_n(0) + B_2 R_n(x_0) + B_3 R_n(1) = 0,$$

для решения, которой справедлива асимптотическая оценка [9]:

$$R_n(x) = O(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Мы искали решение задачи (1)–(2) в виде формального асимптотического ряда (6), определили все члены и оценили остаточный член этого ряда. На основании этого мы можем утверждать справедливость следующей теоремы:

Теорема. Для решения задачи Валле-Пуссена (1)–(2) на отрезке $[0, 1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$Y(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k U_k(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k \Pi_k(x) + O(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заключение. В статье исследована задача Валле-Пуссена для системы линейных неоднородных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Особенность исследуемой нами задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого отрезка. Обобщенным методом пограничных функций, т. е. модифицируя классический метод пограничных функций А.Б. Васильевой, построено полное равномерное асимптотическое разложение решения с любой степенью точности по малому параметру.

Литература

1. Wasow, W.R. Linear Turning Point Theory / W.R. Wasow. – Springer-Verlag, 1985. – 246 p.

2. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques / A.H. Nayfeh. – New York, Toronto, 1981. – 519 p.
3. Van Dyke, M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics / M. Van Dyke. – Stanford, California, 1975. – 271 p.
4. de la Vallée-Poussin Ch. J. Sur l'Équation Différentielle du Second Ordre. Détermination d'une Intégrale par Deux Valeurs Assignées. Extension aux équations d'ordre n . / Ch. J. de la Vallée-Poussin // J. Math. pures et appl. – 1929. – Vol. 8, no. 2. – P. 125–144.
5. Kiguradze, I. On the Vallée-Poussin Problem for Singular Differential Equations with Deviating Arguments / I. Kiguradze, B. Půža // Archivum Mathematicum. – 1997. – Vol. 33, Iss. 1. – P. 127–138.
6. Бобочко, В.Н. Сингулярно возмущенная задача Валле–Пуссена с двумя точками спектра, обращающимися в нуль / В.Н. Бобочко // Украинский математический журнал. – 1983. – Т. 35, № 5. – С. 545–551.
7. Бобочко, В.Н. Задача Валле–Пуссена для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с нестабильным спектром / В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем. – 1988. – № 6. – С. 15–24.
8. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – Москва: Физматлит, 2009 (Чебоксары: Чебоксарская типография). – 248 с.
9. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Д.А. Турсунов, Э.А. Турсунов // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. – 2017. – № 1(38). – С. 33–41.

Поступила в редакцию 14 февраля 2024 г.

Сведения об авторах

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, профессор, директор Высшей школы международных образовательных программ, Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика, e-mail: dtursunov@oshsu.kg.

Садиева Акбермет Сайиповна – аспирант, Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика, e-mail: asadieva@oshsu.kg.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 72–77*

DOI: 10.14529/mmph240207

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF ONE VALLEY-POUSSIN PROBLEM WITH AN UNSTABLE SPECTRUM

D.A. Tursunov, A.S. Sadiyeva

Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Abstract. A differential equation describes the relationship between an unknown function and its derivatives. Such connections are sought in various fields of knowledge: mechanics, physics, chemistry, biology, economics, sociology, oceanology, etc. Systems of ordinary differential equations with a small parameter are used in modeling processes of various natures. Typically, when modeling, small factors are discarded in order to obtain a simpler model from which the necessary information can be extracted. Practice has proven that small factors should be included not in equations, but in solutions. Equations containing small factors are called perturbed. Perturbation theory has been widely used in modern applied mathematics. With its help, researchers answer questions about the influence of various factors on the course of the process, about the stability of the obtained solutions, the proximity of the processes described by the obtained solutions to the real objects under study.

The article studies the Vallée-Poussin problem for a system of inhomogeneous linear singularly perturbed ordinary differential equations of the first order. The peculiarity of the problem under consideration is that the spectrum of the matrix, which is the coefficient of the linear part of the system, is unsta-

ble at three points of the segment under consideration. It is required to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to the problem, modifying the classical method of boundary functions.

Keywords: small parameter; singularly perturbed Vallée-Poussin problem; unstable spectrum; bisingular problem; smooth external solution; boundary function; boundary layer.

References

1. Wasow W.R. *Linear Turning Point Theory*. Springer-Verlag, 1985, 246 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1090-0
2. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, Toronto, 1981, 519 p.
3. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Stanford, California, 1975, 271 p.
4. de la Vallée-Poussin Ch. J. Sur l'Équation Differentielle du Second Ordre. Détermination d'une Intégrale par Deux Valeurs Assignées. Extension aux Équations d'Ordre n. *J. Math. pures et appl.*, 1929, Vol. 8, no. 2, pp. 125–144.
5. Kiguradze I., Půža B. On the Vallée-Poussin Problem for Singular Differential Equations with Deviating Arguments. *Archivum Mathematicum*, 1997, Vol. 33, Iss. 1, pp. 127–138.
6. Bobochko V.N. A Singularly Perturbed de la Vallée-Poussin Problem with Two Vanishing Points of the Spectrum. *Ukr. Mat. Zh.*, 1983, Vol. 35, no. 5, pp. 545–551.
7. Bobochko V.N. The Vallée-Poussin Problem for a System of Singularly Perturbed Differential Equations with Nonstable Spectrum. *Sov. Math.*, 1988, Vol. 32, no. 6, pp. 16-28
8. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic Methods in Analysis). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. (in Russ.).
9. Tursunov D.A., Tursunov E.A. The Asymptotic Solution of a Bisingular Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations. *Vestnik VolGU. Seriya 1. Matematika. Fizika (Mathematical Physics and Computer Simulation)*, 2017, no. 1(38), pp. 33–41. (in Russ.).

Received February 14, 2024

Information about the authors

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director of Higher School of International Education Programs, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: dtursunov@oshsu.kg.

Sadieva Akbermet Sayipovna is Post-graduate Student, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: asadieva@oshsu.kg.

MAGNETIC AND STRUCTURAL PROPERTIES OF ALL-D METAL MN-NI-TI HEUSLER ALLOYS

V.V. Sokolovskiy¹, V.D. Buchelnikov¹, D. Cong²

¹Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

²Beijing University of Science and Technology, Beijing, China

E-mail: vsokolovsky84@mail.ru

Abstract. The paper presents a theoretical study of the effect of different atomic and magnetic orderings on the structural and magnetic properties of $Mn_2Ni_{1+x}Ti_{1-x}$ alloys, which are composed entirely of transition metals. Using the density functional theory, we predict the structural ground states and magnetic reference states of compounds with $x = 0, 0,25, 0,5,$ and $0,75$ in both cubic austenite and tetragonal martensite phases. Partial substitution of Ti atoms with Ni leads to an increase in the energy barrier between structural phases, to a change from a layered atomic ordering to an alternating staggered order, and to a change from antiferromagnetic to ferromagnetic spin alignment in the cubic phase. All compounds with tetragonally distorted structures reveal the out-of-plane spin configuration and easy axis magnetocrystalline anisotropy except tetragonal $L1_0$ phase of Mn_2NiTi . For the latter structure, easy-plane magnetic anisotropy is observed. The calculated values of anisotropy are comparable with those of tetragonal $L1_0$ -FeNi.

Keywords: *ab initio calculations; all-d metal Heusler alloys; atomic arrangement; magnetocrystalline anisotropy.*

Introduction

In recent years, Ni-Mn ferromagnetic shape memory alloys have been extensively researched for commercial applications owing to their diverse multifunctional characteristics, including the magnetic shape memory effect, magnetocaloric effect, and magnetoresistance arising from temperature- or magnetic field-induced martensitic transformations [1–6]. However, challenges related to poor mechanical durability and significant hysteresis losses during phase transitions limit their practical application.

Recently, Heusler alloys have been developed that contain all d -transition metal elements based on nickel (Ni), manganese (Mn), and titanium (Ti) [7–9]. In these alloys, Ti replaces the elements from the p -block, and it has been shown that the d -block Ti metal provides stabilization of the Heusler structure through d - d hybridization with its nearest neighbor element [10]. These alloys exhibit an ordered $L2_1$ structure and a partially disordered B2 structure, and they undergo a phase transition from B2 to $L2_1$, which is accompanied by a change in structural order and a martensitic transformation at a lower temperature. In the B2 phase, some Mn atoms exchange positions with Ti atoms, leading to a strong antiferromagnetic interaction between Mn atoms located at different crystallographic sites.

A distinguishing feature of all- d metal Heusler alloys is their large relative volume change during the martensitic transformation process, which is significantly greater than in any other ferromagnetic shape memory alloy. This characteristic indicates a notable sensitivity of the transformation to applied mechanical stresses, particularly hydrostatic pressure. This makes these materials well-suited for demonstrating significant barocaloric effects. For example, Wei *et al.* [11] showed that a compressive stress of 900 MPa results in a deformation of approximately 3,9 % and an adiabatic temperature change of 10,7 K in $Ni_{50}Mn_{32}Ti_{18}$ alloy. Yan *et al.* [12] observed large deformations of approximately 13 % in the $Ni_{50}Mn_{31,75}Ti_{18,25}$ alloy under a compressive stress of 1,1 GPa. Due to the weaker d - d orbital hybridization in transition metal elements, there is a notable enhancement in mechanical properties, particularly improved plasticity, compared to conventional Heusler alloys that contain main group elements in combination with a strong p - d orbital interaction.

In this paper, we paid attention to the theoretical study of the effect of atomic ordering on the structural and magnetic characteristics of $Mn_2Ni_{1+x}Ti_{1-x}$ alloys within the framework of density functional theory.

1. Details of calculations

The calculations presented in this paper were performed within the framework of density functional theory, using the projection-augmented wave (PAW) method, which is implemented in the VASP software package [13, 14]. A series of $\text{Mn}_2\text{Ni}_{1+x}\text{Ti}_{1-x}$ Heusler alloys, consisting entirely of transition metals, were selected as the objects of study. The exchange-correlation energy approximation was realized using the generalized gradient approximation for electron density in the Perdew–Burke–Ernzerhof parametrization [15]. The following valence electron configurations were considered in the PAW potentials: $3s^23p^64s^23d^5$ for Mn, $3p^63d^84s^2$ for Ni, and $3s^23p^64s^23d^2$ for Ti. The plane wave basis cutoff energy was set at 450 eV, and a Monkhorst-Pack grid with a size of $8 \times 8 \times 8$ was used for integration over the Brillouin zone. Geometric optimization of the 16 atom cells with cubic ($L2_1$, $Fm\bar{3}m$, No. 225, and XA, $F\bar{4}3m$, No. 216) and tetragonal (T^p , $P4/nmm$, No. 129) symmetries was performed using atomic position relaxation at constant volume and cell shape, with convergence criteria for energy and force equal to 10^{-6} eV and 10^{-2} eV/Å, respectively. Nonstoichiometric compounds were created by sequentially replacing Ti atoms with Ni. The following magnetic configurations were considered for the spin ordering of Mn atoms (see fig. 1): FM (ferromagnetic state), AFM (antiferromagnetic state with staggered arrangement of magnetic moments), and AFM* (antiferromagnetic layer-like arrangement of magnetic moments).

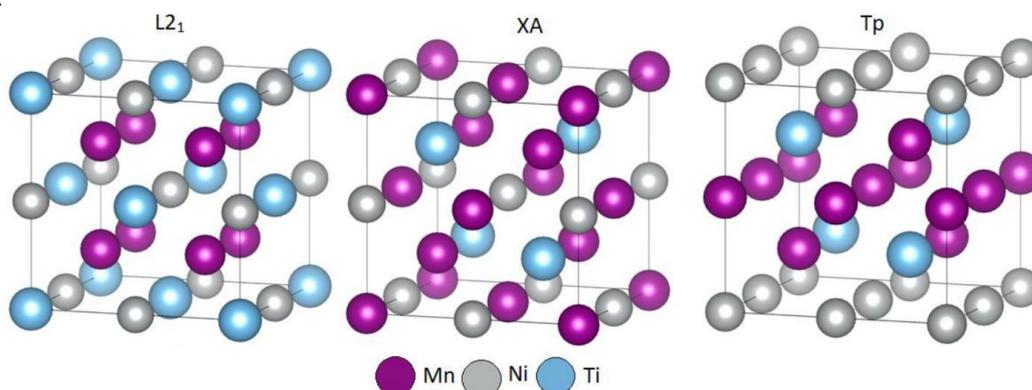


Fig. 1. The crystal structures of Mn_2NiTi Heusler alloy with cubic ($L2_1$, $Fm\bar{3}m$, #225, and XA, $F\bar{4}3m$, #216) and tetragonal (T^p , $P4/nmm$, #129) symmetry. The $L2_1$ and XA structures differ due to the placement of Mn atoms in equivalent and non-equivalent positions, respectively. The T^p structure is based on the XA structure and composed of layers of Mn and Ni atoms alternating along the [001] direction [16, 17]

The magnetocrystalline anisotropy energy (MAE) was calculated by performing successive self-consistent calculations that took into account spin-orbit interaction for structures with magnetic moment orientations along [001] and [100]. The MAE was then determined using the wave functions obtained from the self-consistent calculations. To obtain the MAE, the difference between energies E_{100} and E_{001} was evaluated. Here E_{100} and E_{001} are the total energies of the compounds with the corresponding magnetic moment orientations. A negative MAE value indicates easy plane anisotropy, while a positive value corresponds to easy axis anisotropy.

2. Results and discussions

This section discusses the results obtained for a set of $\text{Mn}_2\text{Ni}_{1+x}\text{Ti}_{1-x}$ alloys ($x = 0, 0.25, 0.5$ and 0.75). The procedure of geometrical optimization of Heusler crystal structures of $L2_1$, XA and T^p types was performed, taking into account their different magnetic ordering, to establish the energetically preferable structure for each compound. We would like to note that the T^p structure has been originally proposed by Neibecker *et al.* [16].

Fig. 2 clearly demonstrates the variations in total energy of the cubic structures based on their degree of tetragonal distortion c/a . It should be noted that the presence of a stable martensitic tetragonal phase in the alloy is indicated by a global energy minimum on the curve $E(c/a)$ at $c/a \neq 1$.

As can be seen from Fig. 2, *a*, for the stoichiometric compound Mn_2NiTi , layered atomic ordering of Ni and Mn is energetically favorable, thereby pointing to the T^p structure as the ground state of the austenite phase ($c/a \approx 1$), despite the fact that each of the structures exhibits pseudo-martensitic behavior at $c/a > 1$. The magnetic reference state of T^p structure is characterized by AFM* (layer-by-layer) ordering of the Mn spin moments. The energy difference between the T^p and XA, $L2_1$ structures with AFM* ordering is about 12.8 and 24.9 meV/atom, respectively. The FM solution for Mn_2NiTi is located signifi-

cantly higher on the energy scale, indicating its disadvantage. It should be noted that the XA and L2₁ structures have been experimentally observed in Heusler alloys, whereas the theoretical T^P structure has not been yet experimentally confirmed. Several theoretical papers [17-19] have reported the energetic favorability of the T^P structure for Fe- and Co-based Heusler alloys.

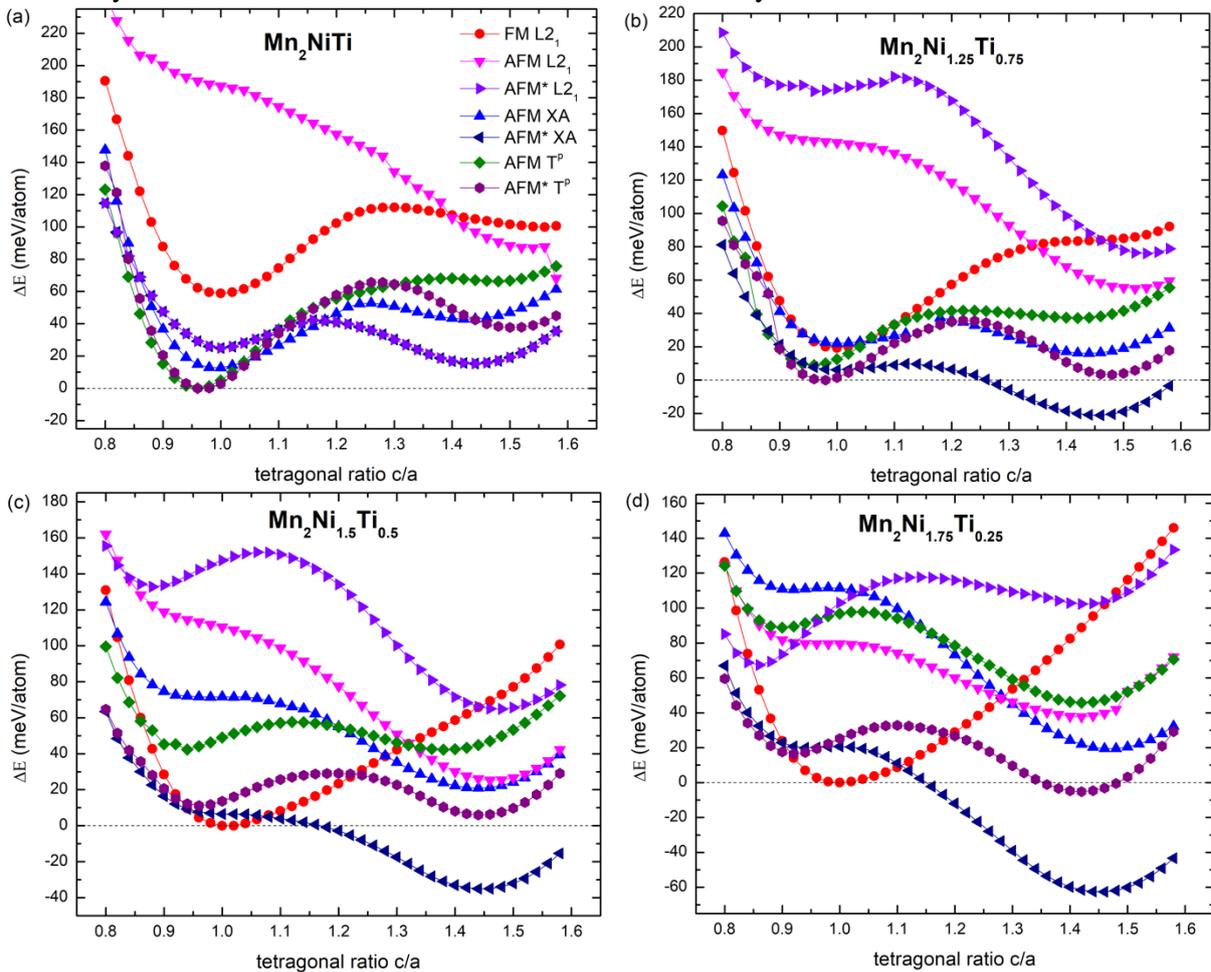


Fig. 2. Variation of the total energy of the cubic crystal structures L2₁, XA and T^P taking into account FM and AFM ordering as a function of the degree of their tetragonal distortion for Mn₂Ni_{1+x}Ti_{1-x} alloys

Partial substitution of Ti atoms with excess Ni atoms results in a stable tetragonal phase with atomic ordering of the XA structure type (see Figs. 2, *b–d*). The layered antiferromagnetic ordering of Mn magnetic moments is energetically favorable in the martensitic phase for all non-stoichiometric compounds. In this case, the Mn atoms are located in two non-equivalent sublattices and are at the closest distance to the other atoms. It should be noted that an increase in the Ni content leads to a change in the ground state of the austenitic phase ($c/a = 1$). Thus, Fig. 2, *b* demonstrates that the T^P structure remains stable for the compound with $x = 0,25$, despite the smaller energy difference, $\Delta E \approx 6,42$ meV/atom, between the AFM* T^P and AFM* XA structures compared to the value of $\Delta E \approx 12,8$ meV/atom for Mn₂NiTi. Further increase in Ni content ($x > 0,25$) results in the instability of T^P structure for austenite phase. Similar finding has been reported recently for FeNi_{2+x}Al_{1-x} alloys [17]. It is obvious from Fig. 2, *c, d* that an increase in x changes the atomic and magnetic ordering of the cubic austenite phase from AFM* T^P to FM L2₁ one. For the L2₁ structure, Mn atoms occupy equivalent positions at a greater distance ($d = 0,5a_0$) compared to the case of the T^P structure ($d = \sqrt{3}/4a_0$). An increase in the distance between Mn atoms causes a change in the nature of the magnetic interaction from AFM to FM.

The $E(c/a)$ curves for the Mn₂Ni_{1+x}Ti_{1-x} compositions indicate that the martensitic transition temperature T_m will increase with increasing Ni content. This is a result of the heightened energy barrier between the cubic and tetragonal phases. Replacing Ti atoms with Ni atoms increases the concentration of valence electrons (e/a) per atom, resulting in a corresponding increase in the energy barrier with concentration x . This observation is consistent with the experimentally established linear dependence $T_m(e/a)$

[1–6]. The martensitic transition temperature can be roughly estimated using the relation: $\Delta E \approx k_B T_m$, where k_B is the Boltzmann constant. The temperature T_m for compositions with $x = 0,25, 0,5$ and $0,75$ or with $e/a = 7,375, 7,75$ and $8,125$, respectively, is calculated to be $245,9, 407,16$, and $726,16$ K, assuming ΔE of $21,2, 35,1$, and $62,6$ meV/atom, respectively.

Table 1 summarizes the equilibrium lattice parameters, total and elemental magnetic moments for the energetically favorable crystal structures of the compounds $Mn_2Ni_{1+x}Ti_{1-x}$, taking into account a magnetic reference ordering. The table clearly demonstrates that the equilibrium parameter of crystal structures in the austenitic phase increases as the Ni content increases. This is due to the larger atomic radius of Ni atoms compared to Ti atoms. However, the tetragonal structure parameters of the martensitic phase with XA ordering exhibit an ambiguous behavior that is dependent on the Ni content.

Table 1

Equilibrium lattice parameters (a and c), tetragonal ratio (c/a), total and elemental magnetic moments (μ_{tot} and μ_i) in [$\mu_B/f.u.$] and [$\mu_B/at.$], respectively, for $Mn_2Ni_{1+x}Ti_{1-x}$ alloys in cubic austenite and tetragonal martensitic phases. All parameters are presented for energetically favorable structures and magnetic configurations: AFM* T^P ($x = 0$ and $0,25$), FM L2₁ ($x = 0,5$ and $0,75$) for austenite; AFM* XA ($x = 0,25, 0,5$ and $0,75$) for martensite

Compound	Parameters	$x = 0$	$x = 0,25$	$x = 0,50$	$x = 0,75$
austenite ($c/a = 1$)	a	5,805	5,82	5,88	5,86
	μ_{tot}	3,275	2,657	6,87	7,817
	μ_{Mn1}	-0,282	-0,842	3,10	3,323
	μ_{Mn2}	2,975	2,992	3,10	3,323
	μ_{Ni}	0,475	0,434	0,796	0,821
martensite ($c/a \neq 1$)	a		5,130	5,136	5,113
	c		7,490	7,396	7,464
	c/a		1,46	1,44	1,46
	μ_{tot}		0,425	0,238	0,176
	μ_{Mn1}		2,509	2,688	2,981
	μ_{Mn2}		-2,217	-2,534	-2,865
	μ_{Ni}		0,027	0,032	0,009

The behavior of magnetic moments shows a clear trend: the total magnetization decreases for compositions with T^P structure and AFM* ordering of Mn₁ and Mn₂ atoms. This is a result of the increased magnetic moment of Mn₁ atoms located in the (002) plane, while Mn₂ atoms occupy tetrahedral positions in the T^P structure (see Fig. 1). Compounds with L2₁ ordering in the austenitic phase ($x = 0,5$ and $0,75$) exhibit an increase in total magnetization. This is attributed to the growth of the element-by-element magnetic moments of Ni, Mn₁, and Mn₂ atoms. It is worth noting that the difference between Mn₁ and Mn₂ is purely conventional, as these atoms occupy equivalent positions in two interpenetrating FCC sublattices (refer to Fig. 1). The data clearly shows that as the Ni content increases, the total magnetization of the martensitic phase with XA ordering decreases significantly. This is due to the antiferromagnetic orientation of the magnetic moments of Mn₁ and Mn₂, which are located in non-equivalent positions (0, 0, 0) and (0,25, 0,25, 0,25) respectively (see Fig. 1). It is also worth noting that the magnetic moment of Ni atoms is suppressed. The binary compound Ni-Mn, resulting from the substitution of Ti for Ni, exhibits antiferromagnetism with a Neel temperature of around 1000 K [3, 20].

To calculate MAE, we chose the magnetic states of tetragonally distorted structures XA, L1₀, and T^P of $Mn_2Ni_{1+x}Ti_{1-x}$ compounds, as presented in Fig. 2, due to their close energy levels. Our selection of these structures was based on their energy levels and their suitability for accurate calculations. For the $x = 0$, we have considered the AFM* T^P ($c/a = 0,96$), and AFM* L1₀ ($c/a = 1,44$) structures. For the $x = 0,25$, we have taken the AFM* XA ($c/a = 1,46$), and AFM* T^P ($c/a = 0,98$) structures. Finally, for the $x = 0,5$ and $x = 0,75$, we have considered the AFM* XA ($c/a = 1,44$ and $1,46$), and AFM* T^P ($c/a = 1,44$ and $1,42$) structures, correspondingly.

Fig. 3 shows the histograms of MAE calculated for crystal structures mentioned above. Here, the negative sign of MAE indicates the energetically favorable in-plane spin direction and easy plane MAE, and vice versa the out-of-plane spin direction and easy axis MAE. For all compounds with tetragonally distorted AFM* XA and T^P structures, the easy-axis-type anisotropy is observed except Mn₂NiTi with tetragonal L1₀ structure, where the easy-plane-type anisotropy is preferable. In a case of compounds with $x = 0$ and $0,25$, T^P structure with nearly cubic parameters ($c/a = 0,96$ and $0,98$) demonstrates a considerable MAE, which is comparable with that of compounds with tetragonal structures ($x = 0,5$ and

0,75). The largest MAE value is calculated to be 0,4 MJ/m³ for AFM* XA structure ($c/a = 1,46$) of Mn₂Ni_{1,25}Ti_{0,75}. However, for compounds with $x = 0,5$ and $0,75$, the T^P structure reveals a larger values of MAE as compared to the XA structure. We would like to mentioned that the calculated values of MAE are comparable to those of L1₀-FeNi (0,22 – 0,48 MJ/m³ [21–24]), which is the most intensely discussed candidate for high-performance rare-earth-free permanent magnets.

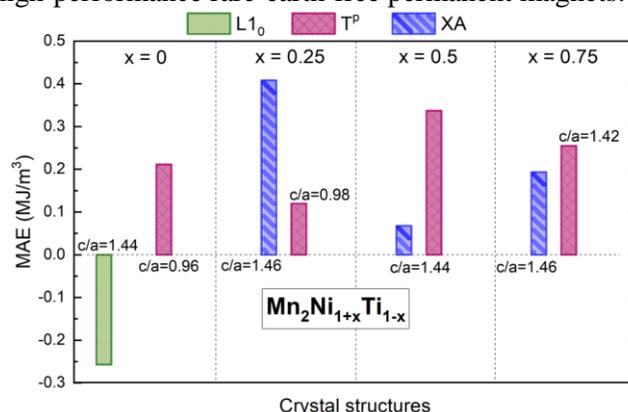


Fig. 3. Magnetocrystalline anisotropy energy diagram for tetragonally distorted L1₀, XA, and T^P structures of Mn₂Ni_{1+x}Ti_{1-x} alloys ($x = 0, 0,25, 0,5, \text{ and } 0,75$) with the favorable magnetic configurations

Conclusions

In summary, we have performed the *ab initio* investigations of the influence of atomic and magnetic ordering on the ground state energy and magnitude of magnetocrystalline anisotropy for Heusler alloys of the Mn-Ni-Ti family, which consist entirely of transition *d* metals. For stoichiometric compound Mn₂NiTi, an energetically favorable structure T^P with nearly cubic lattice parameters and layer-by-layer ordering of Mn and Ni atoms is predicted. This structure is characterized by the antiferromagnetic spin alignment of Mn magnetic moments. Furthermore, this structure demonstrates an easy-axis magnetocrystalline anisotropy of about 0,2 MJ/m³, which is not typical of cubic phases. When Ti atoms are partially substituted with Ni, stable tetragonal structures T^P and XA emerge, which are ordered antiferromagnetically. An increase in Ni content results in a higher energy barrier between cubic and tetragonal phases, indicating a rise in the martensitic transition temperature. It was found that the Mn₂Ni_{1,25}Ti_{0,75} compound in the tetragonal XA structure with c/a ratio of 1,46 exhibits the highest MAE value of 0,4 MJ/m³. Nevertheless, for compounds with $x = 0,5$ and $0,75$, the tetragonal T^P structure also exhibits larger MAE values compared to the XA structure. Overall, the MAE values obtained are comparable to those of tetratenite L1₀-FeNi, which is an alternative to rare-earth-free permanent magnets.

This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF), Project No. 24-12-20016.

References

1. Krenke T., Duman E., Acet M., Wassermann E. F., Moya X., Mañosa L., Planes A. Inverse Magnetocaloric Effect in Ferromagnetic Ni–Mn–Sn Alloys. *Nat. Mater.*, 2005, Vol. 4, pp. 450–454. DOI: 10.1038/nmat1395.
2. Kainuma R., Imano Y., Ito W., Sutou Y., Morito H., Okamoto S., Kitakami O., Oikawa K., Fujita A., Kanomata T., Ishida K. Magnetic-Field-Induced Shape Recovery by Reverse Phase Transformation. *Nature*, 2006, Vol. 439, pp. 957–960. DOI: 10.1038/nature04493.
3. Entel P., Buchelnikov V.D., Gruner M.E., Hucht A., Khovailo V.V., Nayak S.K., Zayak A.T. Shape Memory Alloys: A Summary of Recent Achievements. *Mater. Sci. Forum*, 2008, Vol. 583, pp. 21–41. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.583.21.
4. Buchelnikov V.D., Vasiliev A.N., Koledov V.V., Taskaev S.V., Khovaylo V.V., Shavrov V.G. Magnetic Shape-Memory Alloys: Phase Transitions and Functional Properties. *Phys.-Uspekhi*, 2006, Vol. 49, p. 871. DOI: 10.1070/PU2006v049n08ABEH006081.
5. Graf T., Felser C., Parkin S.S.P. Simple Rules for the Understanding of Heusler Compounds. *Prog. Solid State Chem.*, 2011, Vol. 39, Iss. 1, pp. 1–50. DOI: 10.1016/j.progsolidstchem.2011.02.001.
6. Tavares S., Yang K., Meyers M.A. Heusler alloys: Past, Properties, New Alloys, and Prospects. *Prog. Mater. Sci.*, 2022, Vol. 132, p. 101017. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2022.101017.

7. de Paula V.G., Reis M.S. All-*d*-Metal Full Heusler Alloys: A Novel Class of Functional Materials. *Chem. Mater.*, 2021, Vol. 33, P. 5483–5495. DOI: 10.1021/acs.chemmater.1c01012.
8. Bachagha T., Suñol J.J. All-*d*-Metal Heusler Alloys: A Review. *Metals*, 2023, Vol. 13, Iss. 1, p. 111. DOI: 10.3390/met13010111.
9. Ahn K. Ni-Mn Based Conventional Full Heusler Alloys, All-*d*-Metal Full Heusler Alloys, and Their Promising Functional Properties to Solid State Cooling by Magnetocaloric Effect. *J. Alloys. Compd.*, 2024, Vol. 978, p. 173378. DOI: 10.1016/j.jallcom.2023.173378.
10. Wei Z.Y., Liu E.K., Li Y., Han X.L., Du Z.W., Luo H.Z., Liu G.D., Xi X.K., Zhang H.W., Wang W.H., Wu G.H. Magnetostructural Martensitic Transformations with Large Volume Changes and Magnetostrains in All-*d*-Metal Heusler Alloys. *Appl. Phys. Lett.*, 2016, Vol. 109, P. 071904. DOI: 10.1063/1.4961382.
11. Wei Z.Y., Sun W., Shen Q., Shen Y., Zhang Y. F., Liu E. K., Liu J. Elastocaloric Effect of All-*d*-Metal Heusler NiMnTi(Co) Magnetic Shape Memory Alloys by Digital Image Correlation and Infrared Thermography. *Appl. Phys. Lett.*, 2019, Vol. 114, Iss. 10, p. 101903. DOI: 10.1063/1.5077076.
12. Yan H.L., Wang L.D., Liu H.X., Huang X.M., Jia N., Li Z.B., Yang B., Zhang Y.D., Esling C., Zhao X., Zuo L. Giant Elastocaloric Effect and Exceptional Mechanical Properties in an All-*d*-Metal Ni–Mn–Ti alloy: Experimental and Ab-Initio Studies. *Mater. Des.*, 2019, Vol. 184, p. 108180. DOI: 10.1016/j.matdes.2019.108180.
13. Kresse G., Furthmüller J. Efficient Iterative Schemes for *Ab Initio* Total-Energy Calculations using a Plane-Wave Basis Set. *Phys. Rev. B*, 1996, Vol. 54, Iss. 14, p. 11169. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.11169.
14. Kresse G., Joubert D. From Ultrasoft Pseudopotentials to the Projector Augmented-Wave Method. *Phys. Rev. B*, 1999, Vol. 59, Iss. 3, p. 1758. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.1758.
15. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized Gradient Approximation Made Simple. *Phys. Rev. B*, 1996, Vol. 77, Iss. 18, p. 3865. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3865.
16. Neibecker P., Gruner M. E., Xu X., Kainuma R., Petry W., Pentcheva R., Leitner M. Ordering Tendencies and Electronic Properties in Quaternary Heusler Derivatives. *Phys. Rev. B*, 2017, Vol. 96, Iss. 16, p. 165131. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.165131.
17. Sokolovskiy V., Miroshkina O. N., Buchelnikov V. D., Gruner M.E. Impact of Local Arrangement of Fe and Ni on the Phase Stability and Magnetocrystalline Anisotropy in Fe-Ni-Al Heusler Alloys. *Phys. Rev. Mater.*, 2022, Vol. 6, Iss. 2, p. 025402. DOI: 10.1103/PhysRevMaterials.6.025402.
18. Miroshkina O.N., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V. D., Gruner M.E. Electronic and Vibrational Properties of Fe₂NiAl and Co₂NiAl full Heusler Alloys: A First-Principles Comparison. *IEEE Trans. Magn.*, 2022, Vol. 58, Iss. 8, p. 2700105. DOI: 10.1109/TMAG.2022.3142849.
19. Sokolovskiy V., Miroshkina O.N., Sanosyan A., Baigutlin D., Buchelnikov V., Gruner M.E. Magnetic and Structural Properties of Co-Ni-Z (Z = Al, Ga, In, Sn) Heusler alloys: Effect of structural Motives and Chemical Disorder. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2022, Vol. 546, p. 168728. DOI: 10.1016/j.jmmm.2021.168728.
20. Kren E., Nagy E., Pal L., Szabo P. Structures and Phase Transformations in the Mn-Ni System Near Equiatomic Concentration. *J. Phys. Chem. Sol.*, 1968, Vol. 29, Iss. 1, pp. 101–108. DOI: 10.1016/0022-3697(68)90259-X.
21. Edström A., Chico J., Jakobsson A., Bergman A., Ruzs J. Electronic Structure and Magnetic Properties of L10 Binary Alloys. *Phys. Rev. B*, 2014, Vol. 90, Iss. 1, P. 014402. DOI: 10.1103/PhysRevB.90.014402.
22. Werwinski M., Marciniak W. *Ab Initio* Study of Magnetocrystalline Anisotropy, Magnetostriction, and Fermi Surface of L10 FeNi (Tetrataenite). *J. Phys. D*, 2017, Vol. 50, no. 49, P. 495008. DOI: 10.1088/1361-6463/aa958a.
23. Wu R., Freeman A. Spin-orbit Induced Magnetic Phenomena in Bulk Metals and their Surfaces and Interfaces. *J. Magn. Magn. Mater.*, 1999, Vol. 200, Iss. 1-3, P. 498. DOI: 10.1016/S0304-8853(99)00351-0.
24. Miura Y., Ozaki S., Kuwahara Y., Tsujikawa M., Abe K., Shirai M. The Origin of Perpendicular Magneto-Crystalline Anisotropy in L10-FeNi under Tetragonal Distortion. *J. Phys. Condens. Matter.*, 2013, Vol. 25, P. 106005. DOI: 10.1088/0953-8984/25/10/106005.

Received April 11, 2024

Information about the authors

Sokolovskiy Vladimir Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: vsokolovsky84@mail.ru.

Buchelnikov Vasilii Dmitrievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: buche@csu.ru.

Cong Daoyong is Professor, Beijing University of Science and Technology, Beijing, People's Republic of China, e-mail: dycong@ustb.edu.cn.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 78–85*

УДК 538.911

DOI: 10.14529/mmph240208

МАГНИТНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ ГЕЙСЛЕРА MN-NI-TI, ПОЛНОСТЬЮ СОСТОЯЩИХ ИЗ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

В.В. Соколовский¹, В.Д. Бучельников¹, Д. Конг²

¹Челябинский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация

²Пекинский научно-технический университет, Пекин, Китайская Народная Республика

E-mail: vsokolovsky84@mail.ru

Аннотация. Представлены теоретические исследования влияния различного атомного и магнитного упорядочения на структурные и магнитные свойства сплавов $Mn_2Ni_{1-x}Ti_{1-x}$, полностью состоящих из переходных металлов. Используя теорию функционала плотности, мы предсказываем основные структурные и магнитные состояния соединений с $x = 0, 0,25, 0,5$ и $0,75$ как в кубических аустенитных, так и в тетрагональных мартенситных фазах. Обнаружено, что частичное замещение атомов Ti на Ni приводит к увеличению энергетического барьера между структурными фазами, к смене слоевого атомного упорядочения на чередующееся шахматное, а также к переходу от антиферромагнитного к ферромагнитному упорядочению спинов в кубической фазе. Все соединения с тетрагонально искаженной структурой демонстрируют конфигурацию спинов вне плоскости и магнитокристаллическую анизотропию типа «легкая ось», за исключением тетрагональной фазы $L1_0 Mn_2NiTi$. Для последней структуры наблюдается магнитная анизотропия типа «легкая плоскость». Рассчитанные значения анизотропии сравнимы с таковыми для тетрагонального $L1_0-FeNi$.

Ключевые слова: ab initio вычисления; сплавы Гейслера полностью состоящие из переходных металлов; атомное расположение; магнитокристаллическая анизотропия

Литература

1. Inverse Magnetocaloric Effect in Ferromagnetic Ni–Mn–Sn Alloys / T. Krenke, E. Duman, M. Acet *et al.* // Nat. Mater. – 2005. – Vol. 4. – P. 450–454.
2. Magnetic-Field-Induced Shape Recovery by Reverse Phase Transformation / R. Kainuma, Y. Imano, W. Ito *et al.* // Nature. – 2006. – Vol. 439. – P. 957–960. DOI: 10.1038/nature04493.
3. Shape Memory Alloys: A Summary of Recent Achievements / P. Entel, V.D. Buchelnikov, M.E. Gruner *et al.* // Mater. Sci. Forum. – 2008. – Vol. 583. – P. 21–41.
4. Магнитные сплавы с памятью формы: фазовые переходы и функциональные свойства / В.Д. Бучельников, А.Н. Васильев, В.В. Коледов // УФН. – 2006. – Т. 176, Вып.4. – С. 900–906.
5. Graf, T. Simple Rules for the Understanding of Heusler Compounds / T. Graf, C. Felser, S.S.P. Parkin // Prog. Solid State Chem. – 2011. – Vol. 39, Iss. 1. – P. 1–50.
6. Tavares, S. Heusler Alloys: Past, Properties, New Alloys, and Prospects / S. Tavares, K. Yang, M.A. Meyers // Prog. Mater. Sci. – 2022. – Vol. 132. – P. 101017.
7. de Paula, V.G. All-d-Metal Full Heusler Alloys: A Novel Class of Functional Materials / V.G. de Paula and M.S. Reis // Chem. Mater. – 2021. – Vol. 33. – P. 5483–5495.

8. Bachagha, T. All-*d*-Metal Heusler Alloys: A Review / T. Bachagha, J.J. Suñol // *Metals*. – 2023. – Vol. 13, Iss. 1. – P. 111.
9. Ahn, K. Ni-Mn Based Conventional Full Heusler Alloys, All-*d*-Metal Full Heusler Alloys, and Their Promising Functional Properties to Solid State Cooling by Magnetocaloric Effect / K. Ahn // *J. Alloys. Compd.* – 2024. – Vol. 978. – P. 173378.
10. Magnetostructural Martensitic Transformations with Large Volume Changes and Magnetostrains in All-*d*-Metal Heusler Alloys / Z.Y. Wei, E.K. Liu, Y. Li *et al.* // *Appl. Phys. Lett.* – 2016. – Vol. 109. – P. 071904.
11. Elastocaloric Effect of All-*d*-Metal Heusler NiMnTi(Co) Magnetic Shape Memory Alloys by Digital Image Correlation and Infrared Thermography / Z.Y. Wei, W. Sun, Q. Shen *et al.* // *Appl. Phys. Lett.* – 2019. – Vol. 114, Iss. 10. – P. 101903.
12. Giant Elastocaloric Effect and Exceptional Mechanical Properties in an All-*d*-Metal Ni–Mn–Ti alloy: Experimental and Ab-Initio Studies / H.L. Yan, L.D. Wang, H.X. Liu *et al.* // *Mater. Des.* – 2019. – Vol. 184. – P. 108180.
13. Kresse, G., Furthmüller J. Efficient Iterative Schemes for *Ab Initio* Total-Energy Calculations using a Plane-Wave Basis Set / G. Kresse, J. Furthmüller // *Phys. Rev. B.* – 1996. – Vol. 54, Iss. 14. – P. 11169.
14. Kresse, G. From Ultrasoft Pseudopotentials to the Projector Augmented-Wave Method / G. Kresse, D. Joubert // *Phys. Rev. B.* – 1999. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 1758.
15. Perdew, J.P. Generalized Gradient Approximation Made Simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // *Phys. Rev. B.* – 1996. – Vol. 77, Iss. 18. – P. 3865.
16. Ordering Tendencies and Electronic Properties in Quaternary Heusler Derivatives / P. Neibecker, M.E. Gruner, X. Xu *et al.* // *Phys. Rev. B.* – 2017. – Vol. 96, Iss. 16. – P. 165131.
17. Impact of Local Arrangement of Fe and Ni on the Phase Stability and Magnetocrystalline Anisotropy in Fe-Ni-Al Heusler Alloys / V. Sokolovskiy, O.N. Miroshkina, V.D. Buchelnikov, M.E. Gruner // *Phys. Rev. Mater.* – 2022. – Vol. 6, Iss. 2. – P. 025402.
18. Electronic and Vibrational Properties of Fe₂NiAl and Co₂NiAl full Heusler Alloys: A First-Principles Comparison / O.N. Miroshkina, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov, M.E. Gruner // *IEEE Trans. Magn.* – 2022. – Vol. 58, Iss. 8. – P. 2700105.
19. Magnetic and Structural Properties of Co-Ni-Z (Z = Al, Ga, In, Sn) Heusler alloys: Effect of Structural Motives and Chemical Disorder / V. Sokolovskiy, O.N. Miroshkina, A. Sanosyan *et al.* // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2022. – Vol. 546. – P. 168728.
20. Structures and Phase Transformations in the Mn-Ni System Near Equiatomic Concentration / E. Kren, E. Nagy, L. Pal, P. Szabo // *J. Phys. Chem. Sol.* – 1968. – Vol. 29, Iss. 1. – P. 101–108.
21. Electronic Structure and Magnetic Properties of L10 Binary Alloys / A. Edström, J. Chico, A. Jakobsson *et al.* // *Phys. Rev. B.* – 2014. – Vol. 90, Iss. 1. – P. 014402.
22. Werwinski, M. *Ab Initio* Study of Magnetocrystalline Anisotropy, Magnetostriction, and Fermi Surface of L10 FeNi (Tetrataenite) / M. Werwinski, W. Marciniak // *J. Phys. D.* – 2017. – Vol. 50, no. 49. – P. 495008.
23. Wu, R. Spin-orbit Induced Magnetic Phenomena in Bulk Metals and their Surfaces and Interfaces / R. Wu, A. Freeman // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1999. – Vol. 200, Iss. 1-3. – P. 498.
24. The Origin of Perpendicular Magneto-Crystalline Anisotropy in L10-FeNi under Tetragonal Distortion / Y. Miura, S. Ozaki, Y. Kuwahara *et al.* // *J. Phys. Condens. Matter.* – 2013. – Vol. 25. – P. 106005.

Поступила в редакцию 11 апреля 2024 г.

Сведения об авторах

Соколовский Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, доцент, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: vsokolovsky84@mail.ru.

Бучельников Василий Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: buche@csu.ru.

Конг Даюнь – профессор, Пекинский научно-технический университет, г. Пекин, Китайская Народная Республика, e-mail: dycong@ustb.edu.cn.

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУР УДАРНО-ВОЛНОВОГО СЖАТИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Ю.М. Ковалев, М.А. Шестаков

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: yum_kov@mail.ru

Аннотация. Проведен анализ уравнений состояния энергетических материалов, которые являются молекулярными кристаллами, с целью определения оптимального вида уравнения состояния, позволяющего определять температуры ударно-волнового сжатия данных материалов. Анализ холодной составляющей давления показал, что ее форма позволяет с высокой точностью воспроизводить известные экспериментальные данные для триаминотринитробензола (ТАТБ) и пентаэритриттетранитрата (ТЭНа). В силу того, что для энергетических материалов при ударно-волновом сжатии происходит инициирование детонации построить ударную адиабату в широком диапазоне давлений не представляется возможным, в представленной работе был апробирован алгоритм построения ударных адиабат по экспериментальным данным изотермического сжатия ТАТБ и ТЭНа. Сравнение экспериментальных и расчетных ударных адиабат для ТЭНа показало их совпадение с точностью погрешности эксперимента. В работе на примере ТАТБ и ТЭНа предлагается подход к определению температур ударно-волнового сжатия энергетических материалов путем расчета распространения в них стационарной ударной волны. Предлагаемый подход позволяет построить ударные адиабаты энергетических материалов и провести анализ влияния различных выражений для описания зависимости теплоемкости при постоянном объеме от температуры на величину температуры ударно-волнового сжатия энергетических материалов.

Ключевые слова: ударное сжатие; ударная адиабата; изотермическое сжатие; температура.

Введение

Исследования закономерностей энерговыделения в конденсированных энергетических веществах (ЭВ) под действием ударных волн проводятся с целью выяснения механизмов инициирования и развития реакции взрывчатого превращения, кинетика которого тесно связана с температурой ударно-волнового разогрева, получения информации, необходимой для прогнозирования ударно-волновых и детонационных процессов [1].

В настоящее время для получения детальной информации при анализе экспериментальных данных все чаще применяется подход, связанный с математическим моделированием механизмов инициирования и развития реакции взрывчатого превращения. Для получения достоверной информации в результате математического моделирования и проведения расчетов требуются надежные уравнения состояния ЭВ. Однако для ЭВ построить надежную ударную адиабату очень часто не представляется возможным. Это связано с возможностью развития в ЭВ детонационных процессов. Поэтому целью данного исследования является построение уравнений состояния кристаллических ЭВ ТАТБ и ТЭНа, позволяющих определять ударно-волновой разогрев кристаллических ТАТБ и ТЭНа.

Метод расчета температур ударного сжатия

Для расчета температур ударного сжатия рассмотрим распространение стационарной ударной в ТАТБ и ТЭНе. Система уравнений газовой динамики, описывающая распространение ударной волны, в лагранжевых переменных h, t имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right) = 0; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial h}\right) = 0; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) + \frac{p}{\rho_0} \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right) = 0; \quad (3)$$

где ρ_0 является начальной плотностью, u – скорость частиц, V – удельный объем, p – давление в направлении распространения и E – внутренняя энергия. Данная система законов сохранения замыкается уравнениями состояния, которые имеют следующий вид [2, 3]:

$$P = \frac{MRT\gamma_D(V)}{V} D(x_D) + P_x, \quad P_x = P_C + P_M + \frac{3}{8} MRT\gamma_D(V)\theta_D/V, \quad (4)$$

$$P_C = -\frac{\partial U_C}{\partial V}, \quad P_M = -\frac{\partial U_M}{\partial V}, \quad E = U_C + U_M + E_0 + E_T, \quad (5)$$

где M – количество деформационных колебаний, метод определения описан в работе [4], R – универсальная газовая постоянная, поделенная на молекулярную массу ЭВ, T – температура, γ_D – коэффициент Грюнайзена, $D(x_D)$ – функция Дебая, x_D – безразмерная характеристическая температура Дебая, U_C – межмолекулярная (упругая) составляющая внутренней энергии, которая определяет энергию не валентных взаимодействий атомов между молекулами, U_M – внутримолекулярная составляющая внутренней энергии, определяющая энергию взаимодействия атомов внутри молекулы, E_0 – энергия нулевых колебаний, E_T – тепловая составляющая внутренней энергии, P_x – «холодная» составляющая давления. Выражения для «холодных» составляющих, входящих в уравнения состояния (4) и (5), были определены в работах [2, 3] и имеют следующий вид:

$$P_C = 3K_{T0} \left(x^{-(n+4/3)} - x^{-(n+1)} \right), \quad (6)$$

$$U_C = -\frac{3K_{T0}}{\rho_0} \int \left[x^{-(n+4/3)} - x^{-(n+1)} \right] dx = \frac{3K_{T0}}{\rho_0} \left[\frac{1}{(n+1/3)} x^{-(n+1/3)} - \frac{1}{n} x^{-n} \right], \quad (7)$$

где $K_{T0} = c_T^2 \rho_0$ – изотермический модуль объемного сжатия, c_T – изотермическая скорость звука, ρ_0 – начальная плотность, $x = \rho_0 / \rho$. Часть холодного давления P_M является постоянной величиной и определяется из условия равенства давления величине P_0 при нормальных условиях. Для апробации уравнений (6) и (7) были проведены расчеты значений изотермического сжатия $x_{расч}$ по известным экспериментальным значениям давления. Результаты расчетов для ТАТБ [4] и ТЭНа [5] представлены в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

№	$x_{эксп.}$	$P_{эксп.}$, ГПа	$x_{расч.}$	$\rho_{расч.}$, кг/м ³
1	0,9581–0,9635	0,56	0,9683	2,0004
2	0,9466–0,9530	0,85	0,9551	2,0281
3	0,9355–0,9439	1,20	0,9410	2,0584
4	0,9227–0,9313	1,66	0,9249	2,0943
5	0,9104–0,9192	1,95	0,9158	2,1151
6	0,9003–0,9105	2,42	0,9026	2,1460
7	0,8776–0,8892	3,29	0,8818	2,1966
8	0,8509–0,8651	4,95	0,8506	2,2772
9	0,8038–0,8230	8,18	0,8077	2,3982
10	0,7946–0,8144	8,53	0,8039	2,4095
11	0,7833–0,8053	9,53	0,7938	2,4402
12	0,7749–0,7989	10,17	0,7879	2,4584
13	0,7581–0,7833	11,64	0,7753	2,4984
14	0,7427–0,7731	13,22	0,7633	2,5377

Таблица 2

№	$x_{\text{экс.}}$	$P_{\text{экс.}}, \text{ ГПа}$	$x_{\text{расч.}}$	$\rho_{\text{расч.}}, \text{ кг/м}^3$
1	0,9414–0,9460	0,68	0,9466	1,8741
2	0,9150–0,9186	1,28	0,9153	1,9382
3	0,8729–0,8797	2,25	0,8789	2,0184
4	0,8565–0,8623	2,90	0,8601	2,0626
5	0,8389–0,8431	3,65	0,8420	2,1069
6	0,8164–0,8186	4,98	0,8161	2,1738
7	0,8149–0,8177	5,00	0,8157	2,1749
8	0,8021–0,8063	5,86	0,8019	2,2122
9	0,7786–0,7850	7,45	0,7805	2,2729
10	0,7701–0,7759	8,11	0,7728	2,2955
11	0,7647–0,7695	8,40	0,7696	2,3051
12	0,7586–0,7632	9,16	0,7617	2,3290
13	0,7502–0,7548	10,12	0,7525	2,3575
14	0,7481–0,7529	10,45	0,7495	2,3669

При определении величины $x_{\text{расч.}}$ в расчетах давления по уравнению (6) были использованы значения $K_{T0} = 15,14$ ГПа для ТАТБ и $K_{T0} = 9,62$ ГПа для ТЭНа и показатели степени $n = 3,177$ для ТАТБ и $n = 3,432$ для ТЭНа [2, 3]. Анализ табл. 1 и 2 показывает, что значения $x_{\text{расч.}}$ попадает в погрешность эксперимента, представленную во втором столбце.

В силу того, что для большинства энергетических материалов не удается определить экспериментальную ударную адиабату, в работах [3] и [6] был предложен алгоритм пересчета экспериментальных данных по изотермическому сжатию на ударную адиабату. В результате была получена формула, которая имеет следующий вид:

$$P_S(V) = \frac{aP_T(x) + \int P_T(x)dx + b(1-x)}{a - (1-x)/2}, \quad a = C_V \rho_0 / (\alpha K_{T0}), \quad b = \alpha K_{T0} T_0. \quad (8)$$

Здесь $P_T(x)$, $P_S(x)$ – экспериментальные значения давления при изотермическом сжатии и ударно-волновом сжатии соответственно. Как было показано в работе [3] экспериментальные данные, представленные в работе [7], аппроксимируются зависимостью

$$D = 2680 + 1,89u, \quad (9)$$

что позволило определить давление в ударной волне для ТЭНа, представленное в табл. 3.

Таблица 3

№	x	$P_T(x), \text{ ГПа (экс.)}$	$P_S(x), \text{ ГПа (экс.)}$	$P_S(x), \text{ ГПа}$
1	0,9466	0,68	0,73	0,72
2	0,9153	1,28	1,53	1,36
3	0,8789	2,25	2,59	2,39
4	0,8601	2,90	3,29	3,08
5	0,8420	3,65	4,09	3,89
6	0,8161	4,98	5,51	5,32
7	0,8157	5,00	5,53	5,35
8	0,8019	5,86	6,45	6,29
9	0,7805	7,45	8,25	8,04
10	0,7728	8,11	8,76	8,77
11	0,7696	8,40	9,21	9,10
12	0,7617	9,16	9,93	9,95
13	0,7525	10,12	11,01	11,03
14	0,7495	10,45	11,39	11,40

Результаты, представленные в четвертом и пятом столбцах табл.3, показывают, что значения давления в ударной волне, распространяющейся в ТЭНе, рассчитанные по формулам (8) и (9),

совпадают с точностью до 1–2 %. В работе [3] было показано, что давление ударно-волнового сжатия ТЭНа, полученное по алгоритму пересчета, предложенному в работе [6], ниже экспериментальных значений давления во фронте ударной волны [7].

Значения давления во фронте ударной волны ТАТБ, рассчитанные по алгоритму пересчета [3] представлены в табл. 4.

Таблица 4

№	x	$P_T(x)$, ГПа (эксп.)	$P_S(x)$, ГПа
1	0,9683	0,56	0,57
2	0,9551	0,85	0,87
3	0,9410	1,20	1,23
4	0,9249	1,66	1,70
5	0,9158	1,95	2,00
6	0,9026	2,42	2,48
7	0,8818	3,29	3,38
8	0,8506	4,95	5,10
9	0,8077	8,18	8,48
10	0,8039	8,53	8,85
11	0,7938	9,53	9,91
12	0,7879	10,17	10,59
13	0,7753	11,64	12,15
14	0,7633	13,22	13,85

Уравнение внутренней энергии (3) в результате простых преобразований можно представить следующим образом:

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} + (P_T + P_x + (\frac{\partial(U_C + U_M + E_0)}{\partial V})_T) \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad P_T = \alpha K_{T_0} T + P_0,$$

или же

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} + P_T \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

где C_V – теплоемкость при постоянном объеме, α – коэффициент объемного расширения. Значения давлений ударно-волнового сжатия $P_S(x)$ из табл. 3 и 4 определяются граничными условиями для системы дифференциальных уравнений (1), (2), (10).

Система уравнений (1), (2), (10) решалась методом Неймана–Рихтмайера. При проведении расчетов для теплоемкости при постоянном объеме были использованы два выражения – через частоты нормальных колебаний [8]:

$$C_V = MRD_C(x_D) + R \sum_{i=M+1}^{3N} \frac{x_i^2 \exp(x_i)}{(\exp(x_i) - 1)^2}. \tag{11}$$

и через аппроксимационную зависимость [8, 9]:

$$C_V / C_{VH} = 1 - (1 - C_V^0 / C_{VH}) \exp[-(T - T_0) / T_c], \tag{12}$$

где x_i – безразмерная характеристическая температура внутримолекулярных колебаний, $D_c(x_D)$ – функция теплоемкости Дебая, $C_{VH} = 3NR$, N – количество атомов в молекуле, C_V^0 – значение теплоемкости при постоянном объеме при начальной температуре, T_c – параметр, определенный в работе [9], для ряда органических соединений.

Контроль выполнения условий Гюгонио во фронте ударной волны осуществлялся путем сравнения значений изменения внутренней энергии, полученной в расчетах на ударной адиабате:

$$\Delta E_{SH} = 0,5P(1-x) / \rho_0,$$

и уравнениями состояния:

$$\Delta E = 3K_{T_0} \left(\frac{1}{(n+1/3)} (x^{-(n+1/3)} - 1) - \frac{1}{n} (x^{-n} - 1) \right) / \rho_0 - (\alpha K_{T_0} T_0 - P_0)(1-x) / \rho_0 + \Delta E_{Ti},$$

$$\Delta E_{T1} = C_{VH}(T - T_0) + T_c(C_{VH} - C_V^0)(\exp(-(T - T_0) / T_c) - 1),$$

$$\Delta E_{T_2} = MR(T - T_0) + RT \sum_{i=M+1}^{3N} \frac{x_i}{\exp(x_i) - 1} - E_{T_0}, \quad E_{T_0} = RT_0 \sum_{i=M+1}^{3N} \frac{x_i^0}{\exp(x_i^0) - 1}, \quad x_i^0 = \theta_i / T_0.$$

Результаты расчетов температур ударно-волнового сжатия ТЭНа и ТАТБ для разных выражений теплоемкости при постоянном давлении приведены в табл. 5 и 6 соответственно.

Таблица 5

P_s , ГПа	u , км/с	ρ_x	T_1 , К	T_2 , К
0,725	147,3	0,9468	313,2	313,5
1,360	254,3	0,9155	328,0	328,4
2,388	403,3	0,8790	351,6	352,4
3,081	492,5	0,8601	368,4	369,4
3,885	588,0	0,8419	388,9	390,1
5,325	743,3	0,8156	428,0	429,7
5,346	745,4	0,8153	428,6	430,3
6,286	838,3	0,8013	455,5	457,6
7,563	956,7	0,7850	493,7	496,2
8,039	998,8	0,7795	508,2	510,9
8,773	1061,7	0,7716	530,8	533,8
9,097	1088,9	0,7683	541,0	544,0
9,947	1158,5	0,7602	567,9	571,2
11,028	1243,6	0,7507	602,7	606,2
11,400	1272,1	0,7477	614,8	618,4

Таблица 6

P_s , ГПа	u , км/с	ρ_x	T_1 , К	T_2 , К
0,574	96,8	0,9684	301,4	301,4
0,871	142,1	0,9551	305,3	305,3
1,229	193,5	0,9410	309,9	310,0
1,700	256,7	0,9249	316,0	316,2
1,997	294,5	0,9159	320,1	320,3
2,480	353,0	0,9027	326,9	327,2
3,376	453,9	0,8818	340,8	341,3
5,095	627,1	0,8505	371,4	372,6
8,478	918,4	0,8073	443,2	446,4
8,847	947,3	0,8035	451,7	455,1
9,906	1028,1	0,7934	476,7	480,8
10,587	1078,3	0,7873	493,1	497,8
12,155	1189,4	0,7746	531,9	537,7
13,849	1303,5	0,7624	575,1	582,1

Результаты, представленные в табл. 5 и 6, показывают, что различие между температурами ударно-волнового сжатия ТЭНа и ТАТБ, рассчитанными по различным выражениям для теплоемкости, составляет не более четырех градусов. Поэтому при расчетах температур ударно-волнового сжатия энергетических материалов целесообразно использовать выражение (12), не привлекая сложные квантово-химические методы для расчета внутримолекулярных частот нормальных колебаний, входящих в выражение для теплоемкости при постоянном объеме (11).

Литература

1. Ударно-волновые явления в конденсированных средах / Г.И. Канель, С.В. Разоренов, А.В. Уткин, В.Е. Фортов. – Москва: Янус-К, 1996. – 407 с.
2. Ковалев, Ю.М. Уравнения состояния для описания изотермического сжатия некоторых молекулярных кристаллов нитросоединений / Ю.М. Ковалев // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 1. – С. 229–239.

3. Ковалев, Ю.М. Уравнения состояния для расчета давлений ударно-волнового сжатия пентаэритриттетранитрата (ТЭНа) / Ю.М. Ковалев, Е.В. Помыкалов // Инженерно-физический журнал. – 2023. – Т. 96, № 4. – С. 1053–1061.

4. Hydrostatic Compression Curve for Triamino - Trinitrobenzene Determined to 13,0 GPa with Powder X- Ray Diffraction / L.L. Stevens, N. Velisavljevic, D.E. Hooks, D.M. Dattelbaum // Propellants, Explos. Pyrotech. – 2008 – Vol. 33, no. 4. – P. 286–295.

5. Cady, H.H. The Crystal Structure of 1,3,5 - triamino - 2,4,6 - trinitrobenzene / H.H. Cady, A.C. Larson // Acta Cryst. – 1965. – Vol. 18. – P. 485–496.

6. Olinger, B. The isothermal linear and volume compression of pentaerythritol tetranitrate (PETN) at 10 GPa (100 kbar) and the calculated shock compression / B. Olinger, P.M. Halleck, H.H. Cady // J. Chem. Phys. – 1975. – Vol. 62, Iss. 11. – P. 4480 – 4483.

7. Marsh, S.P. Lash Shock Hugoniot Data (Los Alamos Scientific Laboratory Series on Dynamic Material Properties) / S.P. Marsh. – University of California Press, 1980, Vol. 5.

8. Ковалев, Ю.М. Определение температурной зависимости теплоемкости для некоторых молекулярных кристаллов нитросоединений / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, № 2. – С. 297–306.

9. Щетинин, В.Г. Расчет теплоемкости органических веществ в ударных и детонационных волнах / В.Г. Щетинин // Химическая физика. – 1999. – Т. 18, № 5 – С. 90–95.

Поступила в редакцию 26 февраля 2024 г.

Сведения об авторах

Ковалев Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: yum_kov@mail.ru.

Шестаков Михаил Александрович – аспирант, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 86–92*

DOI: 10.14529/mmph240209

EQUATIONS OF STATE FOR CALCULATING SHOCK WAVE COMPRESSION TEMPERATURES OF MOLECULAR CRYSTAL

Yu. M. Kovalev, M.A. Shestakov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: yum_kov@mail.ru

Abstract. The paper analyzes the equations of state of energy-related materials, which are molecular crystals, to define the optimal equation of state for determining the shock wave compression temperatures of these materials. The analysis of the cold pressure component showed that its form allows reproducing the known experimental data for triaminotrinitrobenzene (TATB) and pentaerythritol tetranitrate (PETN) with high accuracy. No shock adiabat can be constructed in a wide range of pressures because detonation is initiated for energy-related materials during shock wave compression. The paper tests an algorithm for constructing shock adiabats using experimental data on TATB and PETN isothermal compression. A comparison of experimental and calculated shock adiabats for PETN showed their alignment with the accuracy of the experimental error. The paper uses the example of TATB and PETN to propose an approach for determining the shock wave compression temperatures of energy-related materials by calculating the propagation of a steady shock wave in them. The proposed approach allows constructing shock adiabats of energy-related materials and analyzing the influence of various expressions to describe the dependence of heat capacity at constant volume on temperature by the value of the shock wave compression temperature of energy-related materials.

Keywords: shock compression; shock adiabat; isothermal compression; temperature.

References

1. Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. *Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh* (Shock-Wave Phenomena in Condensed Media). Moscow, Yanus-K, 1996, 407 p. (in Russ.).
2. Kovalev Y.M. Equations of State to Describe Isothermal Compression of Certain Molecular Nitro Compound Crystals. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, Vol. 93, no. 1, pp. 223–233. DOI: 10.1007/s10891-020-02112-9
3. Kovalev Yu.M., Pomykalov E.V. Equations of State for Calculating the Pressures of Shock-Wave Compression of Pentaerythritol Tetranitrate (PETN). *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2023, Vol. 96, no. 4, pp. 1052–1059. DOI 10.1007/s10891-023-02769-y.
4. Stevens L.L., Velisavljevic N., Hooks D.E., Dattelbaum D.M. Hydrostatic Compression Curve for Triamino - Trinitrobenzene Determined to 13,0 GPa with Powder X-Ray Diffraction. *Propellants, Explos. Pyrotech.* 2008, Vol 33, no. 4, pp. 286–295. DOI: 10.1002/prop.200700270.
5. Cady H.H., Larson A.C. The Crystal Structure of 1,3,5 – triamino – 2,4,6 – trinitrobenzene *Acta Cyst.*, 1965, Vol. 18, pp. 485–496. DOI: 10.1107/S0365110X6500107X
6. Olinger B., Halleck P.M., Cady H.H. The Isothermal Linear and Volume Compression of Pentaerythritol Tetranitrate (PETN) t 10 GPa (100 kbar) and the Calculated Shock Compression. *J. Chem. Phys.*, 1975, Vol. 62, Iss. 11, pp. 4480–4483. DOI: 10.1063/1.430355
7. Marsh S.P. *Lasl Shock Hungoniot Data* (Los Alamos Scientific Laboratory Series on Dynamic Material Properties), University of California Press, 1980, Vol. 5.
8. Kovalev Y.M., Kuropatenko V.F. Determination of the Temperature Dependence of Heat Capacity for Some Molecular Crystals of Nitro Compounds. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, Vol. 91, no. 2, pp. 278–287. DOI: 10.1007/s10891-018-1747-6
9. Shchetinin V.G. Calculation of the Heat Capacity of Organic Substances in Shock and Detonation Waves (Raschet teploemkosti organicheskikh veshchestv v udarnykh i detonatsionnykh volnakh). *Khimicheskaya fizika*, 1999, Vol. 18, no. 5, pp. 90–95. (in Russ.).

Received February 26, 2024

Information about the authors

Kovalev Yuri Mikhailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Computational Mechanics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: yum_kov@mail.ru.

Shestakov Mikhail Alekandrovich is Post-graduate Student, Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 16, № 2
2024

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 22.04.2024. Дата выхода в свет 02.05.2024.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,16.

Тираж 500 экз. Заказ 99/181. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.