

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

СЕРИЯ

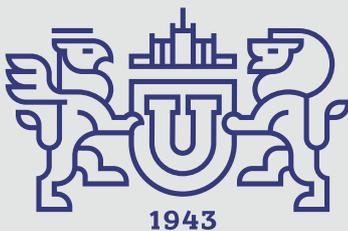
**МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА**

2024, том 16, № 3

SERIES

**MATHEMATICS.
MECHANICS.
PHYSICS**

2024, volume 16, no. 3



ВЕСТНИК



ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2024
Т. 16, № 3

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИННА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2024

Vol. 16, no. 3

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

- S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

- A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
G.L. Brovko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
A.V. Trukhanov, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

АСТАПОВ Н.С., НОЛАНД Н.К. Кубические уравнения, четырёхугольник Ньютона и геометрические построения	5
ГАЛЬМУКОВА И.А., РАСУЛОВ К.М. О решении краевой задачи типа Карлемана в классах обобщенных метааналитических функций в единичном круге	12
КАРАЧИК В.В. Бигармоническая задача Неймана с двойной инволюцией	18
КИТАЕВА О.Г. Инвариантные пространства стохастической системы уравнений Осколкова	27
КАМАЛЕТДИНОВА Д.И., ЛУКАЦУК В.О. Симметричный анализ уравнения типа Беллмана	32
МАРВИН С.В. Интегро-дифференциальные уравнения для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле с дефектом.....	38
SOLOVYOVA N.N., SOLDATOVA E.A., MEZAAL Y.A. On a New Liquid Filtration Model.....	45

Физика

ЗАГУЛЯЕВ Д.В., ИВАНОВ Ю.Ф., ТОЛКАЧЕВ О.С., ШЛЯРОВ В.В., ШЛЯРОВА Ю.А. Эволюция системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка», облученной импульсным электронным пучком	50
МАТЮНИНА М.В., ЗАГРЕБИН М.А., СОКОЛОВСКИЙ В.В., БУЧЕЛЬНИКОВ В.Д. Параметры магнитного обменного взаимодействия и температура Кюри в сплаве $Fe_{75}Ga_{25}$	62

CONTENTS

Mathematics

ASTAPOV N.S., NOLAND N.K. Cubic Equations, Newton Quadrilaterals, and Geometric Constructions.....	5
GALMUKOVA I.A., RASULOV K.M. Solutions of the Boundary Value Problem of the Carleman Type in Classes of Generalized Meta-Analytic Functions in a Unit Circle.....	12
KARACHIK V.V. The Biharmonic Neumann Problem with Double Involution.....	18
KITAEVA O.G. Invariant Spaces of Stochastic Systems of Oskolkov Equations.....	27
KAMALETDINOVA D.I., LUKASHCHUK V.O. Symmetry Analysis of the Bellman Equation	32
MARVIN S.V. Integro-Differential Equations for a Quasi-Stationary Electromagnetic Field in a Nonmagnetic Conductive Body with a Defect	38
SOLOVYOVA N.N., SOLDATOVA E.A., MEZAAL Y.A. On a New Liquid Filtration Model.....	45

Physics

ZAGULIAEV D.V., IVANOV Yu.F., TOLKACHEV O.S., SHLYAROV V.V., SHLYAROVA Yu.A. The Evolution of a Ti Film/Silumin Substrate System Irradiated by a Pulse Electron Beam.....	50
MATYUNINA M.V., ZAGREBIN M.A., SOKOLOVSKIY V.V., BUCHELNIKOV V.D. Magnetic Exchange Parameters and the Curie Temperature of $Fe_{75}Ga_{25}$ Alloy.....	62

КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК НЬЮТОНА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Н.С. Астапов, Н.К. Ноланд

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск,
Российская Федерация
E-mail: nika@hydro.nsc.ru, astapov47@mail.ru*

Аннотация. Обсуждается возможность построения циркулем и линейкой вписанного в полуокружность четырёхугольника. Показано, что задача построения равнобедренного треугольника по трём его биссектрисам равносильна трисекции угла. Приведены примеры параметрических семейств уравнений третьей и шестой степени, для которых все корни выражаются через квадратные радикалы. Найдено условие, при котором полином шестой степени факторизуется двумя полиномами третьей степени в каноническом виде. Все представленные факторизации справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами.

Ключевые слова: четырёхугольник Ньютона; трисекция угла; кубические уравнения; решение в квадратных радикалах; правильные многоугольники.

Введение

Три задачи древности на протяжении многих веков стимулировали развитие математики – задачи квадратуры круга, трисекции угла и удвоения куба. Задача удвоения куба сводится к построению с помощью циркуля и линейки действительного корня $\sqrt[3]{2}$ кубического уравнения $z^3 = 2$. Задача трисекции угла приводит к построению корня уравнения $4z^3 - 3z - \cos \theta = 0$. Лишь в XIX столетии было доказано, что эти задачи нельзя решить с помощью циркуля и линейки. Было доказано, что в общем случае корни кубического уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ не выражаются через квадратные радикалы из коэффициентов a , b и c и поэтому не могут быть построены циркулем и линейкой [1].

Однако в частных случаях, когда коэффициенты исходного уравнения связаны какими-либо дополнительными соотношениями, иногда удаётся выразить корни уравнения через коэффициенты существенно более просто, чем по формуле Кардано. Например, если в уравнении

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

коэффициенты p и q связаны соотношением

$$q = -2(p + 4), \tag{2}$$

то $x = 2$ является корнем уравнения (1), а остальные два корня выражаются в квадратных радикалах. Легко проверить, что в общем случае z является корнем уравнения (1), если $q = -z(p + z^2)$.

Четырёхугольник Ньютона

В книге [2] Ньютон посвятил 16 страниц анализу и различным способам вывода уравнения

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0, \tag{3}$$

связывающего стороны a , b , c и x четырёхугольника, вписанного в полуокружность (здесь x – диаметр окружности). Уравнение (3) является кубическим относительно x и квадратным относительно a , b , c . Очевидно, что если задан диаметр x и любые две из трёх сторон a , b , c четырёхугольника, то четвёртая сторона легко строится циркулем и линейкой. А из уравнения (3) видно, что любая сторона a , b , c четырёхугольника выражается в квадратных радикалах через оставшиеся три. Однако в общем случае для произвольно заданных длин трёх сторон a , b и c нельзя построить четвёртую сторону x четырёхугольника, то есть диаметр окружности [3].

Рассмотрим частный случай. Пусть для коэффициентов $p = -(a^2 + b^2 + c^2)$ и $q = -2abc$ уравнения (3) выполняется равенство (2). Например, если $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$, то получим уравнение $x^3 - (5 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 0$, которое имеет корень $x = 2$. А если $k = m = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $n = \sqrt{3}$, то получим уравнение

$$x^3 - (k^2 + m^2 + n^2)x - 2kmn = x^3 - (7 - 2\sqrt{3})x - 2(2\sqrt{3} - 3) = 0, \quad (4)$$

которое также имеет корень $x = 2$. Следовательно, четырёхугольник со сторонами a , b , c и $x = 2$ можно вписать в полуокружность диаметра 2, а в другую полуокружность вписать четырёхугольник со сторонами k , m , n и $x = 2$. Заметим, что длины сторон a , b , c и k , m , n выбраны так, что вершины этих четырехугольников лежат в вершинах правильного двенадцатиугольника. Причем выполняются равенства (3) и (4), где x – диаметр окружности. Вычитая из равенства (4) равенство (3), получим уравнение

$$(a^2 + b^2 + c^2 - k^2 - m^2 - n^2)x - 2(kmn - abc) = 0.$$

Отсюда находим длину диаметра

$$x = 2(kmn - abc) / (a^2 + b^2 + c^2 - k^2 - m^2 - n^2). \quad (5)$$

Задача. По сторонам a , b , c и k , m , n шестиугольника найти диаметр x описанной окружности, если известно, что ломаные \overline{abc} и \overline{kmn} опираются на диаметр.

Решение. В этом случае длина диаметра находится по формуле (5) при условии, что $a^2 + b^2 + c^2 - k^2 - m^2 - n^2 \neq 0$. Кроме того, если a , b , c и k , m , n выражаются через квадратные радикалы, то диаметр окружности можно построить циркулем и линейкой.

Замечание. В [3] дана рациональная параметризация a , b и c , для которой x также рационально. Можно построить бесконечно много уравнений вида (3), разрешимых в квадратных радикалах. Например, пусть z выражено в квадратных радикалах. Выберем два параметра b и c так: $0 < b < z$, $0 < c < \sqrt{z^2 - b^2}$. Тогда третью сторону положим равной $a = \left(-bc + \sqrt{b^2c^2 + z^2(z^2 - b^2 - c^2)} \right) / z$. Очевидно, что для таких чисел a , b и c уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах. Приведём еще две серии уравнений вида (3), разрешимых в квадратных радикалах. Для произвольных комплексных чисел a , b и c при условии $a^2 + b^2 + c^2 = 4a^2b^2c^2 - 1$ уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах потому, что имеет корень $2abc$. А при условии $a^2(2a^2 + b^2 + c^2) = 4b^2c^2$ уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах потому, что имеет корень $2bc/a$.

Построение треугольника по биссектрисам

Известно, что для любых заданных трёх положительных чисел l_a , l_b и l_c существует единственный треугольник со сторонами a , b и c , имеющий биссектрисы l_a , l_b и l_c . Однако в общем случае его построение циркулем и линейкой невозможно. Более того, даже построение циркулем и линейкой равнобедренного треугольника по трём его биссектрисам в общем случае невыполнимо. Рассмотрим уравнение [4]

$$y^3 - 2ty^2 - 3y/4 + t = 0, \quad (6)$$

связывающее длины биссектрис $l_a = l_b$, l_c и углы $A = B$ равнобедренного треугольника. В уравнении (6) $t = l_c / (2l_a)$, $y = \sin(A/2)$.

Решив кубическое уравнение (6), находим стороны $a = b$ и c по формуле для биссектрисы:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2ac}{a+c} \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2a2a \cos(A)}{a+2a \cos(A)} \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{4a \cos(A)}{1+2 \cos(A)} \cos\left(\frac{A}{2}\right).$$

Выражая $\cos(A)$ и $\cos(A/2)$ через $y = \sin(A/2)$, получим выражение для стороны a и аналогично для стороны $c = l_c 2 \operatorname{ctg}(A)$

$$a = l_a \frac{3 - 4y^2}{4(1 - 2y^2)\sqrt{1 - y^2}}, \quad c = l_c \frac{1 - 2y^2}{y\sqrt{1 - y^2}}. \quad (7)$$

Следовательно, если $y = \sin(A/2)$ выражается в квадратных радикалах, то и стороны $a = b$ и c выражаются в квадратных радикалах. И равнобедренный треугольник можно построить по его биссектрисам. В таблице приведены некоторые частные случаи, когда такое построение циркулем и линейкой возможно. В последней строке таблицы даны приближённые значения $a/l_a = b/l_b$ и c/l_c потому, что точные выражения через квадратные радикалы громоздки. Для сравнения заметим, что для равностороннего треугольника $a/l_a = b/l_b = c/l_c = 2/\sqrt{3} \approx 1,15$.

$l_c/(2l_a)$	$\sin(A/2)$	$A = B$	C	$a/l_a = b/l_b$	c/l_c
1/4	$(\sqrt{5} - 1)/4$	36°	108°	$(\sqrt{5} + 1)/\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$(6 + 2\sqrt{5})/\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
11/56	1/4	$\approx 83,6^\circ$	$\approx 12,8^\circ$	$33\sqrt{5}/20$	$\sqrt{5}/10$
23/84	1/3	$\approx 38,9^\circ$	$\approx 102,2^\circ$	$69\sqrt{2}/112$	$7\sqrt{2}/4$
11/6	2/3	$\approx 28,96^\circ$	$\approx 122,1^\circ$	$22\sqrt{15}/105$	$14\sqrt{15}/15$
$\sqrt{27/2}/4$	$\sqrt{6}/4$	$\approx 75,5^\circ$	$\approx 29^\circ$	$3\sqrt{10}/5$	$2/\sqrt{15}$
$\sqrt{27/2}/18$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	30°	120°	$\sqrt{6}/3$	$2\sqrt{3}$
$\approx 0,2826$	171/500	$\approx 40,0^\circ$	$\approx 100,0^\circ$	$\approx 0,879$	$\approx 2,38$
$\sqrt{27/2}/8$	$(\sqrt{102} - \sqrt{6})/16$	$\approx 57,1^\circ$	$\approx 65,8^\circ$	$\approx 1,09$	$\approx 1,29$

Трисекция угла

Пользуясь формулой $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ для косинуса тройного угла, запишем уравнение

$$4\cos^3(A/2) - 3\cos(A/2) - \cos(3A/2) = 0. \quad (8)$$

Для заданного угла $3A/2$ косинус угла $A/2$ находится из кубического уравнения (8). Следовательно, если уравнение (8) решается в квадратных радикалах, то трисекция угла $3A/2$ циркулем и линейкой возможна.

Воспользуемся тождеством $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и результатами предыдущего пункта. Так, если $A = 36^\circ$, то $\sin(A/2) = (\sqrt{5} - 1)/4$ и поэтому $\cos(A/2) = \sqrt{(5 + \sqrt{5})}/8$ является корнем уравнения (8), в котором $\cos(3A/2) = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2/4$. Следовательно, угол $3A/2 = 54^\circ$ можно разделить циркулем и линейкой на три равные части.

Известно, что трисекция угла $3A/2 = 60^\circ$ невозможна. Однако можно с любой точностью выбрать приближение $\sin(20^\circ)$ рациональным числом, например, положим $\sin(20^\circ) \approx 171/500$. Тогда $\approx \cos(20^\circ)$ является корнем уравнения (8), где $\cos(3A/2) = 33259\sqrt{220759}/31250000 \approx 0,50006$. Поэтому угол $3A/2 \approx 59,996^\circ$ можно разделить циркулем и линейкой на три равные части. Так получим приближённое решение задачи о трисекции угла 60° .

Теперь заметим, что если $y = \sin(A/2)$ выражается в квадратных радикалах, то $\cos(A/2)$ и $\cos(3A/2)$ выражаются в квадратных радикалах. Следовательно, если циркулем и линейкой

Математика

можно построить равнобедренный треугольник по трём его биссектрисам $l_a = l_b, l_c$, то можно выполнить трисекцию угла $3A/2$. И наоборот, если можно выполнить трисекцию угла $0 < 3A/2 < 135^\circ$, то $\cos(A/2)$ и $y = \sin(A/2)$ выражаются в квадратных радикалах. Затем находим биссектрисы $l_a = l_b$ и l_c , которые определяются равенством (6). И, наконец, строим треугольник, пользуясь выражениями (7). В этом смысле эти две задачи равносильны. А задача построения треугольника по произвольным трём биссектрисам оказывается сложнее задачи трисекции угла.

Правильные многоугольники

Задача трисекции угла связана и с построением правильного многоугольника. По теореме Гаусса–Ванцеля правильный n -угольник можно построить циркулем и линейкой, если $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$, где k – натуральное число или 0, p_i – различные простые числа Ферма (3, 5, 17, 257...). Следовательно, для таких чисел n можно построить $\sin(180^\circ/n) = a/(2R)$, где a – сторона правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R . Затем строим $\cos(180^\circ/n)$ и, пользуясь равенством (8), строим $\cos(3 \cdot 180^\circ/n)$. То есть задача трисекции угла $3 \cdot 180^\circ/n$ решена. Например, трисекция угла $3 \cdot 180^\circ/n$, где $n = 5, 10, 15, 17, 34, 51, \dots$ выполнима.

Кубические уравнения

Кубическое уравнение

$$x^3 + wx^2 + px + q = 0, \quad (9)$$

где $w = -(n^3 q^2 + (n+1)p^3)/(n^2 pq)$, а параметры n, p и q – произвольные комплексные числа, имеет корень $x = nq/p$. Остальные два корня находятся из уравнения $x^2 - (n+1)p^2/(n^2 q)x - p/n = 0$. Следовательно, уравнение (9) является бесконечной трёхпараметрической серией уравнений, разрешимых в квадратных радикалах. Если $n = -3$, то получим двухпараметрическую серию уравнений

$$x^3 + (2p^3 + 27q^2)/(9pq)x^2 + px + q = (x + 3q/p)(x - x_2)(x - x_3) = 0, \quad (10)$$

где $x_{2,3} = \pm \frac{3q}{p} \cdot \frac{\sqrt{k+1} \pm 1}{k}$, $k = -\frac{27q^2}{p^3}$. Если в уравнении (10) $k = m(m+2)$, то $x_2 = \frac{3q}{mp}$,

$x_3 = \frac{-3q}{(m+2)p}$, то есть корни уравнения выражаются через коэффициенты рационально. Если в

уравнении (10) $k = -1$, то $m = -1$ и уравнение имеет трехкратный корень $x_{1,2,3} = -3q/p$.

Вот ещё несколько примеров кубических уравнений, разрешимых в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + 5p\sqrt{6p}/9 = 0$, где p – произвольное комплексное число, имеет корни $x_1 = -2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3} = \sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$, то есть разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + \sqrt{2-4p}/4 = 0$, где p – произвольное комплексное число, имеет корень $x_1 = -\sqrt{2-4p}/2$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + \sqrt{-p^3(6+3\sqrt{2})}/9 = 0$, где p – произвольное комплексное число, имеет корень $x_1 = 3p^2 q / (p^3 + 27q^2)$, поэтому также разрешимо в квадратных радикалах. Один из корней уравнения $x^3 + px + \sqrt{-2p^3} = 0$ равен $\sqrt{-2p}$ и это уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Интересно отметить, что пакет прикладных программ *Mathematica* генерирует для корней этого уравнения громоздкие выражения с использованием кубических радикалов. Ещё несколько разрешимых в квадратных радикалах кубических уравнений специального вида можно найти в [5].

Уравнения шестой степени

В общем случае алгебраические уравнения выше четвёртой степени неразрешимы в радикалах. Однако если коэффициенты уравнения связаны некоторыми дополнительными соотношениями, то это уравнение разрешимо в радикалах. Так, для произвольных комплексных чисел k, m, n и l справедливо тождество $x^8 + kx^6 - mx^4 + nx^3 + lx^2 + knx + k(km + l) = (x^2 + k) \times (x^6 - mx^2 + nx + l + km)$, которое при $l = -km - n^2/(4m)$ приводит к трёхпараметрическому разложению $(x^2 + k)(x^3 + \sqrt{m}x - n/(2\sqrt{m}))(x^3 - \sqrt{m}x + n/(2\sqrt{m}))$. То есть корни соответствующего полинома выражаются в радикалах. Например, при $k = -4, m = 9$ и $n = -30$ получим уравнение $(x^2 - 4)(x^3 + 3x + 5)(x^3 - 3x - 5) = 0$, разрешимое в радикалах.

Теорема. Полином шестой степени $x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ можно представить произведением двух полиномов третьей степени вида $x^3 + px + q$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $g(c^2 - 4e) - cdf + d^2e + f^2 = 0$. Эта факторизация имеет вид:

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = \left(x^3 + \frac{c+w}{2}x + \frac{d \mp v}{2}\right) \left(x^3 + \frac{c-w}{2}x + \frac{d \pm v}{2}\right), \quad (11)$$

где $f = (cd \pm vw)/2, v = \sqrt{d^2 - 4g}, w = \sqrt{c^2 - 4e}$.

Справедливость разложения (11) легко проверяется перемножением скобок [5]. Если $g = d^2/4$, то разложение (11) принимает вид

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + \frac{c^2}{4}x^2 + \frac{cd}{2}x + \frac{d^2}{4} = \left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d}{2}\right)^2$$

и полином имеет три двукратных корня. Если $g = d^2/4$ и $2c^3 + 27d^2 = 0$, то полином (11) имеет один двукратный и один четырехкратный корень. Тождество (11) является частным случаем факторизации многочлена на трёхчленные множители [6]:

$$x^{2m} + cx^{m+n} + dx^m + ex^{2n} + \frac{cd \pm vw}{2}x^n + g = \left(x^m + \frac{c+w}{2}x^n + \frac{d \mp v}{2}\right) \left(x^m + \frac{c-w}{2}x^n + \frac{d \pm v}{2}\right).$$

Если полиномы третьей степени в правой части тождества (11) можно факторизовать с помощью квадратных радикалов, то это алгебраическое уравнение шестой степени оказывается разрешимым в квадратных радикалах. Например, корни уравнения

$(x^3 + px + \sqrt{-p^3(6 + 3\sqrt{2})}/9)(x^3 + mx + \sqrt{-2m^3}) = 0$ можно выразить через коэффициенты p и m

с помощью квадратных радикалов. Для произвольных комплексных чисел p и m уравнение

шестой степени $\left(x^3 - \frac{p}{2}x + \sqrt{(p+1)/2}/2\right)\left(x^3 - \frac{m}{2}x + \sqrt{(m+1)/2}/2\right) = 0$ имеет корни

$-\sqrt{(p+1)/2}/2, -\sqrt{(m+1)/2}/2$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Пакет прикладных программ *Mathematica* не находит решения в квадратных радикалах этих двух уравнений шестой степени. Даже для численных значений коэффициентов $p = \sqrt{2}, m = \sqrt{3}$ пакет *Mathematica* выражает корни через кубические радикалы.

Заключение

Другие примеры разрешимых в квадратных радикалах алгебраических уравнений выше третьей степени и некоторые приложения к задачам механики можно найти в [5]. Заметим, что кубические уравнения нередко возникают и в физико-технических задачах. Например, уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа) является кубическим уравнением относительно объёма.

Литература

1. Курант, Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – М.: Просвещение, 1967. – 558 с.
2. Ньютон, И. Всеобщая арифметика или Книга об арифметических синтезах и анализе / И. Ньютон. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. – 440 с.
3. Hajja, M. Newton Quadrilaterals, the Associated Cubic Equations, and Their Rational Solutions / M. Hajja, J. Sondow // *The American Mathematical Monthly*. – 2019. – Vol. 126, Iss. 2. – P. 135–150.
4. Дроздов, В.Б. Задают ли биссектрисы треугольник? / В.Б. Дроздов // *Математика в школе*. – 2009. – № 6. – С. 59–62.
5. Астапов, Н.С. О решении в квадратных радикалах алгебраических уравнений малых степеней // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 5–16.
6. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // *Математические структуры и моделирование*. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.

Поступила в редакцию 15 мая 2024 г.

Сведения об авторах

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.

Ноланд Наталья Константиновна – старший инженер, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: astapov47@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 5–11*

DOI: 10.14529/mmph240301

CUBIC EQUATIONS, NEWTON QUADRILATERALS, AND GEOMETRIC CONSTRUCTIONS

N.S. Astapov, N.K. Noland

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: nika@hydro.nsc.ru, astapov47@mail.ru*

Abstract. This article discusses the possibility of constructing with a quadrilateral inscribed in a semicircle a ruler and compass. It shows that the problem of constructing an isosceles triangle from its three bisectors is equivalent to the trisection of an angle. Examples are given of parametric families of equations of the third and sixth degree, for which all roots are expressed through square radicals. A condition is identified under which a sixth-degree polynomial is factorized by third-degree polynomials in canonical form. All the factorizations are valid for polynomials with arbitrary complex coefficients.

Keywords: Newton quadrilaterals; trisection of an angle; cubic equations; solution in square radicals; regular polygons.

References

1. Courant R., Robbins H. *What is Mathematics? : An Elementary Approach to Ideas and Methods*. London: Oxford University Press, 1961, 521 p.
2. Newton I. *Arithmetica Universalis, Sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*. Lugduni Batavorum [Leyden]: Joh. et Herm. verbeek, 1732, 344 p.
3. Hajja M., Sondow J. Newton Quadrilaterals, the Associated Cubic Equations, and Their Rational Solutions. *The American Mathematical Monthly*, 2019, Vol. 126, Iss. 2, pp. 135–150. DOI: 10.1080/00029890.2019.1537426
4. Drozdov V.B. Zadayut li bissektrisy treugol'nik? (Do Bisectors Define a Triangle?). *Matematika v shkole*, 2009, no. 6, pp. 59–62. (in Russ.).

5. Astapov N.S. On the Solution of Algebraic Equations of Small Degrees by Square Radicals. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2022, Vol. 14, no. 3, pp. 5–16. DOI: 10.14529/mmph220301

6. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. Localization and Finding Solutions of Trinomial Algebraic Equations. *Mathematical Structures and Modeling*, 2020, no. 2(54), pp. 65–85. (in Russ.). DOI: 10.24147/2222-8772.2020.2.65-85

Received May 15, 2024

Information about the authors

Astapov Nikolay Stepanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Staff Scientist, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.

Noland Natal'ya Konstantinovna is Senior Engineer, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: astapov47@mail.ru.

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

И.А. Гальмукова¹, К.М. Расулов²

¹ Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации им. маршала Советского Союза А.М. Василевского, г. Смоленск, Российская Федерация

² Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Аннотация. Для полного качественного исследования краевых задач типа Карлемана в классах обобщенных метааналитических функций комплексного переменного существенное значение имеет проблема разрешимости этих задач в явном виде, то есть возможности построения общих решений рассматриваемых задач, используя лишь формулы решения классических краевых задач типа Карлемана для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений и/или линейных дифференциальных уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах. Рассматривается одна из основных краевых задач типа задачи Карлемана в классах обобщенных метааналитических функций в односвязных областях. Учитывая общее представление обобщенных метааналитических функций с помощью пары аналитических функций комплексного переменного, устанавливается конструктивный алгоритм явного метода решения рассматриваемой задачи в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность. Доказано, что решение исследуемой краевой задачи в единичном круге сводится к решению двух классических краевых задач типа Карлемана для аналитических функций и некоторой системы алгебраических уравнений. Кроме того, описана полная картина разрешимости рассматриваемой краевой задачи в единичном круге и получены условия ее нетеровости.

Ключевые слова: обобщенная метааналитическая функция; аналитические компоненты; краевая задача типа задачи Карлемана; картина разрешимости; условия нетеровости краевой задачи; единичный круг.

1. Об актуальности проблемы. Будем полагать, что \mathbb{C} – плоскость переменного $z = x + iy$, а T^+ – односвязная область на \mathbb{C} , границей которой выступает кривая Ляпунова L , причем $z = 0$ принадлежит T^+ .

Почти все основные термины и обозначения, используемые в данной работе, были приняты в монографии [1].

Комплексную функцию $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ переменного $z = x + iy$ будем называть *обобщенной метааналитической функцией* в T^+ , если она в этой области является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1(z) \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} + A_0(z) W(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а $A_0(z), A_1(z)$ – заданные голоморфные в T^+ функции.

Определяющим характеристическим свойством всякой обобщенной метааналитической в области T^+ функции $W(z)$ является то, что $W(z)$ можно представить в виде

$$W(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_0^+(z)] e^{\lambda_0(z) \bar{z}}, \text{ если } \lambda_0(z) \equiv \lambda_1(z) \text{ в } T^+ \quad (2)$$

или

$$W(z) = \varphi_0^+(z) e^{\lambda_0(z) \bar{z}} + \varphi_1^+(z) e^{\lambda_1(z) \bar{z}}, \text{ если } \lambda_0(z) \neq \lambda_1(z) \text{ в } T^+; \quad (3)$$

здесь $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ – так называемые голоморфные компоненты функции $W(z)$, являющиеся произвольными голоморфными функциями в T^+ , а $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ – корни уравнения

$$\lambda^2 + A_1(z)\lambda + A_0(z) = 0. \quad (4)$$

Функции вида (2) – обобщенные метааналитические функции первого типа, а функции вида (3) – обобщенные метааналитические функции второго типа.

Обозначим символом M_2 класс обобщенных метааналитических в T^+ функций вида (2) или (3), у которых голоморфные компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$, а также $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ принадлежат классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$.

Предлагается к исследованию следующая граничная задача K_M : среди всех функций класса $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ найти те функции $W(z)$, которые удовлетворяют на L условиям:

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t)\overline{F^+(t)} + g_0(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n} = G_1(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n}} + g_1(t), \quad (6)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внутренней нормали к L , $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура L , для которого выполняется тождество

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (7)$$

а $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=0,1$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$; здесь $G_k(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha'(t) \in H(L)$.

Предложенная выше задача K_M – одна из основных краевых задач типа Карлемана для функций из класса $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$.

В наиболее простом случае, когда $\alpha(t) \equiv t$, задача K_M впервые была поставлена и изучена в [1].

В общем случае получить решение граничных задач типа K_M в классах $M_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ удается лишь методом интегральных уравнений [1, 2]. Но при таком подходе невозможно провести качественное исследование рассматриваемой граничной задачи, так как он не позволяет описать полную картину разрешимости такого плана задач и устанавливать их нетеровость. В связи с этим в настоящее время остается актуальной проблема отыскания частных случаев, когда рассматриваемая граничная задача допускает исчерпывающее исследование в явном виде [3, 4].

В настоящей статье устанавливается, что если T^+ – единичный круг, то задача K_M может быть решена в явном виде, то есть можно получить полную картину ее разрешимости, а также установить ее нетеровость. Ввиду схожести предлагаемой логической схемы для построения общего решения задачи K_M в единичном круге как для функций вида (2), так и для функций вида (3) в данной статье мы ограничиваемся детальным исследованием задачи K_M в единичном круге лишь в классе функций вида (2).

2. Построение общего решения задачи K_M в классе функций вида (2) в случае, когда

$$T^+ = \{z: |z| < 1\}, L = \{t: |t| = 1\}$$

Во-первых, из представления (2) и соотношения [2, с. 304]

$$\frac{\partial}{\partial n} = i \left(t \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) = -t \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (8)$$

а также в силу выполнения тождества $\bar{t} = 1/t$ на $L = \{t: |t| = 1\}$ условия (5) и (6) можно соответственно записать в виде

$$[\alpha(t)]^3 \cdot \varphi_0^+[\alpha(t)] + [\alpha(t)]^2 \cdot \varphi_1^+[\alpha(t)] = G_{10}(t)[t^3 \cdot \varphi_0^+(t) + t^2 \cdot \varphi_1^+(t)] + g_{10}(t), \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & [\alpha(t)]^3 \frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + [\alpha(t)]^2 \frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} + \left([\alpha(t)]^2 \cdot \frac{d\lambda_0[\alpha(t)]}{dt} + \alpha(t) \cdot \lambda_0[\alpha(t)] \right) \varphi_0^+[\alpha(t)] + \\
 & \quad + \left(\alpha(t) \cdot \frac{d\lambda_0[\alpha(t)]}{dt} + \lambda_0[\alpha(t)] + \alpha(t) \right) \varphi_1^+[\alpha(t)] = \\
 & = G_{11}(t) \left\{ t^3 \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + t^2 \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \left(t^2 \cdot \frac{d\lambda_0(t)}{dt} + t \cdot \lambda_0(t) \right) \varphi_0^+(t) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(t \cdot \frac{d\lambda_0[\alpha(t)]}{dt} + \lambda_0(t) + t \right) \varphi_1^+(t) \right\} + g_{11}(t),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{10}(t) &= t^3 [\alpha(t)]^3 \cdot G_0(t) \cdot \exp\{t \cdot \overline{\lambda_0(t)} - \overline{\alpha(t)} \cdot \lambda_0[\alpha(t)]\}, \\
 G_{11}(t) &= t^2 [\alpha(t)]^2 \cdot G_1(t) \cdot \exp\{t \cdot \overline{\lambda_0(t)} - \overline{\alpha(t)} \cdot \lambda_0[\alpha(t)]\}, \\
 g_{10}(t) &= g_0(t) \cdot [\alpha(t)]^3 \cdot \exp\{-\overline{\alpha(t)} \cdot \lambda_0[\alpha(t)]\}, \quad g_{11}(t) = g_1(t) \cdot [\alpha(t)]^2 \cdot \exp\{-\overline{\alpha(t)} \cdot \lambda_0[\alpha(t)]\}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Во-вторых, введя вспомогательные голоморфные в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции вида

$$\Phi_0^+(z) = z^3 \varphi_0^+(z) + z^2 \varphi_1^+(z), \tag{12}$$

$$\Phi_1^+(z) = z^3 d \frac{\varphi_0^+(z)}{dz} + z^2 d \frac{\varphi_1^+(z)}{dz} + \left(z^2 \cdot \frac{d\lambda_0(z)}{dz} + z \lambda_0(z) \right) \varphi_0^+(z) + \left(z \cdot \frac{d\lambda_0(z)}{dz} + \lambda_0(z) + z \right) \varphi_1^+(z), \tag{13}$$

перепишем условия (9) и (10) следующим образом:

$$\Phi_0^+[\alpha(t)] = G_{10}(t) \overline{\Phi_0^+(t)} + g_{10}(t), t \in L, \tag{14}$$

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = G_{11}(t) \overline{\Phi_1^+(t)} + g_{11}(t), t \in L. \tag{15}$$

Выражение (14) – это граничное условие классической задачи типа Карлемана относительно функции $\Phi_0^+(z)$. Сразу отметим, что в силу формулы (12) для функции $\Phi_0^+(z)$ точка $z = 0$ является нулем не ниже 2-го порядка (то есть $II\{\Phi_0^+; 0\} \geq 2$). Выражение (15) является граничным условием классической задачи типа Карлемана относительно $\Phi_1^+(z)$ [5, с. 172].

Предположим, что задачи типа Карлемана (14) и (15) разрешимы и найдены их решения – функции $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_1^+(z)$. Тогда, в силу (12) и (13), для нахождения голоморфных компонент $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ искомой метааналитической функции $W(z) = [\varphi_0^+(z) + \overline{z} \varphi_1^+(z)] e^{\lambda_0(z)\overline{z}}$ (то есть для отыскания решения задачи K_M) нужно решить относительно $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ следующую систему:

$$\begin{cases} z^3 \varphi_0^+(z) + z^2 \varphi_1^+(z) = \Phi_0^+(z), \\ z^3 \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + z^2 \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + \left(z^2 \frac{d\lambda_0(z)}{dz} + z \lambda_0(z) \right) \varphi_0^+(z) + \left(z \frac{d\lambda_0(z)}{dz} + \lambda_0(z) + z \right) \varphi_1^+(z) = \Phi_1^+(z). \end{cases} \tag{16}$$

Решая систему (16), получаем:

$$\varphi_0^+(z) = -\frac{1}{2z^2} W_0^+(z), \quad z \in T^+, \tag{17}$$

$$\varphi_1^+(z) = \frac{1}{2z} W_1^+(z), \quad z \in T^+, \tag{18}$$

где

$$W_0^+(z) = \Phi_1^+(z) - \left(z \frac{d\lambda_0(z)}{dz} + \lambda_0(z) - z \right) \frac{\Phi_0^+(z)}{z^2} - \frac{d\Phi_0^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+, \tag{19}$$

$$W_1^+(z) = \Phi_1^+(z) - \left(z \frac{d\lambda_0(z)}{dz} + \lambda_0(z) - 3z \right) \frac{\Phi_0^+(z)}{z^2} - \frac{d\Phi_0^+(z)}{dz}, \quad z \in T^+. \tag{20}$$

Наконец, определим условия, при которых функции $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$, задаваемые по формулам (17), (18), будут голоморфными в $z=0$. Из формул (17) и (18) вытекает, что для этого голоморфная в круге T^+ функция $W_0^+(z)$ должна иметь в точке $z=0$ нуль не ниже 2-го порядка, а для функции $W_1^+(z)$ точка $z=0$ должна быть хотя бы простым нулем, то есть $\Pi\{W_0^+; 0\} \geq 2$, $\Pi\{W_1^+; 0\} \geq 1$.

Пусть функции $\Phi_0^+(z), \Phi_1^+(z)$ и $\lambda_0(z)$ имеют следующие разложения в точке $z=0$:

$$\Phi_0^+(z) = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \Phi_1^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad \lambda_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in T^+. \quad (21)$$

Подставляя вместо функций $\Phi_0^+(z), \Phi_1^+(z), \lambda_0(z)$ их разложения (21) в правые части формул (19) и (20), будем иметь:

$$W_0^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k - \left(z \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k - z \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) a_k z^{k+1},$$

$$W_1^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k - \left(z \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k - 3z \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) a_k z^{k+1}.$$

Из последних разложений видно, что условия $\Pi\{W_0^+; 0\} \geq 2$ и $\Pi\{W_1^+; 0\} \geq 1$ будут обеспечены, если выполняются равенства вида:

$$\begin{cases} b_0 - p_0 a_0 = 0, \\ b_1 - p_0 a_1 - (2p_0 - 1) a_0 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Тем самым, установлена достоверность следующей теоремы.

Теорема 1. Если $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ является единичным кругом, то решение задачи K_M в классе функций вида (2) сводится к решению двух классических задач типа Карлемана (14) и (15) относительно голоморфных в T^+ функций $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_1^+(z)$, причем задача K_M в единичном круге разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы вспомогательные задачи (14) и (15), а также выполняются условия (22).

3. О нетеровости задачи K_M в случае, когда $T^+ = \{z: |z| < 1\}$. Теорема 1 показывает, что картина разрешимости задачи K_M складывается из картин разрешимости задач (14) и (15).

В силу тождества (7) из краевого условия (14) можно получить равенство [5, с. 172]

$$(1 - G_{10}[\alpha(t)] \cdot \overline{G_{10}(t)}) \cdot \Phi_0^+(t) = G_{10}[\alpha(t)] \cdot \overline{g_{10}(t)} + g_{10}[\alpha(t)], \quad t \in L, \quad (23)$$

а из (15) – равенство

$$(1 - G_{11}[\alpha(t)] \cdot \overline{G_{11}(t)}) \cdot \Phi_1^+(t) = G_{11}[\alpha(t)] \cdot \overline{g_{11}(t)} + g_{11}[\alpha(t)], \quad t \in L. \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что если хотя бы при одном из значений параметра k ($k=0,1$) будем иметь $1 - G_{1k}[\alpha(t)] \cdot \overline{G_{1k}(t)} = 0$, но $G_{1k}[\alpha(t)] \cdot \overline{g_{1k}(t)} + g_{1k}[\alpha(t)] \neq 0$, то задача K_M неразрешима. Если же $1 - G_{1k}[\alpha(t)] \cdot \overline{G_{1k}(t)} \neq 0$ и $G_{1k}[\alpha(t)] \cdot \overline{g_{1k}(t)} + g_{1k}[\alpha(t)] \neq 0$ ($k=0,1$), то задачи (14) и (15) сводятся к задачам об аналитическом продолжении, а значит, не являются нетеровыми.

Но [5, с. 188] для того, чтобы обе вспомогательные краевые задачи типа Карлемана (14) и (15) были нетеровыми, необходимо и достаточно, чтобы функции $G_{1k}(t), g_{1k}(t)$ ($k=0,1$) на L удовлетворяли следующим условиям:

$$1 - G_{1k}[\alpha(t)] \cdot \overline{G_{1k}(t)} = 0 \text{ и } G_{1k}[\alpha(t)] \cdot \overline{g_{1k}(t)} + g_{1k}[\alpha(t)] = 0 \quad (k=0,1). \quad (25)$$

Следовательно, на основании теоремы 1 и представления (2) получаем такой результат:

Теорема 2. Если область T^+ является единичным кругом, то для нетеровости задачи K_M в классе функций вида (2) необходимо и достаточно выполнение условий (25).

Литература

1. Расулов, К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
2. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Гахов, Ф.Д. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Адуков, В.М. О явном и точном решении задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2011. – Т. 11, Вып. 2. – С. 9–20.
4. Расулов, К.М. О явном решении краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций в единичном круге / К.М. Расулов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 31–36.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

Поступила в редакцию 22 июня 2023 г.

Сведения об авторах

Гальмукова Ирина Аркадьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры естественно-научных дисциплин, Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации, г. Смоленск, Российская Федерация.

Расулов Карим Магомедович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация, e-mail: kahrimanr@yandex.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 12–17*

DOI: 10.14529/mmph240302

SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE CARLEMAN TYPE IN CLASSES OF GENERALIZED META-ANALYTIC FUNCTIONS IN A UNIT CIRCLE

I.A. Galmukova¹, K.M. Rasulov²

¹ *Military Academy of Military Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation, Smolensk, Russian Federation*

² *Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation*
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Abstract. This paper researches the boundary value problems of the Carleman type in classes of generalized meta-analytic functions of a complex variable and develops effective numerical methods to solve these problems. The explicit solution is of substantial significance. In other words there is the possibility of solving these problems with formulas of the classical Carleman problem for analytical functions and a finite number of linear algebraic equations and/or linear differential equations when the matrix of the system can be written in quadratures. The paper considers one of the main boundary value problems of the Carleman type in classes of generalized meta-analytic functions in simply connected domains. Using a representation of generalized meta-analytic functions using a pair of analytic functions of a complex variable, a constructive algorithm for an explicit method for solving the problem is established in the case when the unit circle is the carrier of the boundary conditions.

The paper proves that the solution of the boundary value problem in the unit circle is reduced to the solution of two classical boundary value problems of the Carleman type for analytic functions and some systems of algebraic equations. In addition, the paper describes the solvability of the boundary value problem in the unit circle and obtains conditions for its Noetherian property.

Keywords: *generalized meta-analytic function; analytic components; boundary value problem of the Carleman type; solvability picture; conditions for the boundary value problem to be Noetherian; unit circle.*

References

1. Rasulov K.M. *Kraevye zadachi dlya polianaliticheskikh funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* (Boundary Value Problems for Polyanalytic Functions and Some of their Applications). Smolensk: SGPU Publ., 1998, 343 p. (in Russ.).
2. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow: Nauka Publ., 1977. – 640 p. (in Russ.).
3. Adukov V.M., Patrushev A.A. On Explicit and Exact Solutions of the Markushevich Boundary Problem for Circle. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, Vol. 11, Iss. 2, pp. 9–20. DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-2-9-20
4. Rasulov K.M. On the Explicit Solution of the Boundary Value Problem of Neumann Type For The Generalized Analytic Functions in The Unit Circle. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2020, Vol. 12, no. 1, pp. 31–36. (in Russ.).
5. Litvinchuk G.S. *Kraevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom* (Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with a Shift). Moscow, Nauka Publ., 1977, 448 p. (in Russ.).

Received June 22, 2023

Information about the authors

Galmukova Irina Arkadevna is Cand. Sc. (Pedagogy), Associate Professor of the Department of Natural Sciences, Military Academy of Military Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation, Smolensk, Russian Federation.

Rasulov Karim Magomedovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Mathematical Analysis Department, Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation, e-mail: kahrimanr@yandex.ru.

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА С ДВОЙНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Исследуются вопросы разрешимости нового класса краевых задач с нелокальными условиями Неймана для бигармонического уравнения в шаре. Нелокальные условия задаются в виде связи значений искомой функции в различных точках границы. При этом граничный оператор определяется с помощью матриц отображений типа инволюции. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемой задачи и найдено интегральное представление решения рассматриваемой задачи

Ключевые слова: нелокальная задача Неймана; бигармоническое уравнение; условия разрешимости; функция Грина.

Введение. Краевые задачи, заданные в виде связи значений искомой функции в различных точках области или границы, принято называть задачами типа Бицадзе–Самарского или нелокальными задачами. Задача такого типа впервые была исследована в работе [1], а более подробно возникновение таких задач при математическом моделировании некоторых процессов в плазме изложено в [2]. Методы решения и приложения нелокальных краевых задач типа Бицадзе–Самарского к прикладным задачам различных отраслей науки изложены в [3]. Нелокальные краевые задачи для различных дифференциальных уравнений исследованы в работах [4–8]. Отметим, что, наверное, впервые краевые задачи с преобразованными аргументами в двумерном случае были рассмотрены D. Przeworska-Rolewicz в [9]. Нелокальные краевые задачи с инволюциями в n -мерном случае были изучены в работах [10, 11]. В [12] исследовалась задача Неймана для бигармонического уравнения с простой инволюцией. В работах [13, 14] для нелокального уравнения Пуассона и нелокального бигармонического уравнения изучены основные краевые задачи с отображениями вида S^k , где S – ортогональная матрица. Настоящая работа является продолжением исследований, приведенных в работе [12] в случае двойной инволюции.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, а $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера. Пусть также S_1, S_2 – две действительные коммутативные ортогональные $n \times n$ матрицы такие, что $S_i^{l_i} = I, l_i \in N, i = 1, 2$, где $l_1, l_2 \in N \cup \{0\}$. Обозначим $\ell = l_2 l_1$ и рассмотрим последовательность действительных чисел $a_0, \dots, a_{l_1-1}, a_1, \dots, a_{2l_1-1}, \dots, a_{(l_2-1)l_1-1}, \dots, a_{\ell-1}$, которую обозначаем через \mathbf{a} . Если записать индекс суммирования i в форме $i = (i_2, i_1) \equiv i_2 l_1 + i_1$, где $i_k = 0, 1, \dots, l_k - 1$, где $k = 1, 2$, тогда компоненты \mathbf{a} могут быть записаны в виде

$$a_{(0,0)}, \dots, a_{(0,l_1-1)}, a_{(1,0)}, \dots, a_{(1,l_1-1)}, \dots, a_{(l_2-2,l_1-1)}, \dots, a_{(l_2-1,l_1-1)}.$$

Ясно, что если $0 \leq i < \ell$, то тогда $i_1 = \{i / l_1\}, i_2 = [i / l_1]$, где $[.]$ и $\{.\}$ являются целыми и дробными частями числа соответственно. Далее последовательность \mathbf{a} будем также рассматривать как вектор $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{\ell-1})$.

Замечание 1. Очевидно, что $|x|^2 = (S_i^T S_i x, x) = (S_i x, S_i x) = |S_i x|^2$. Поэтому верны утверждения $x \in \Omega \Rightarrow S_i x \in \Omega$ и $y \in \partial\Omega \Rightarrow S_i y \in \partial\Omega$. Введем нелокальный оператор, образованный вектором \mathbf{a} :

$$B_{\mathbf{a}} u(x) = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x),$$

где $x \in \partial\Omega$. Отметим, что в работах [15, 16] исследовались собственные функции для оператора Лапласа с двойной и множественной инволюцией.

Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу.

Задача Неймана. Найти функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C^2(\partial\Omega)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

и нелокальным граничным условиям

$$B_a \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = h_0(x), \quad B_c \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega} = h_1(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где n – внешняя нормаль к единичной сфере $\partial\Omega$.

Вспомогательные утверждения. Для изучения приведенной выше задачи (1), (2) нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Введем функцию

$$v(x) = B_a u(x) = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x), \tag{3}$$

где $x \in \Omega$ или $x \in \partial\Omega$, а суммирование ведется в порядке возрастания по индексу $i = (i_2, i_1) \equiv i_2 \cdot l_1 + i_1$ в следующем порядке

$$(0,0), \dots, (0, l_1 - 1), (1,0), \dots, (1, l_1 - 1), \dots, (l_2 - 2, l_1 - 1), \dots, (l_2 - 1, l_1 - 1).$$

Из равенства (3), учитывая, что $S_2^{l_2} = S_1^{l_1} = I$, легко заключить, что функции вида $v(S_2^{j_2} S_1^{j_1} x)$, где $j = 0, \dots, \ell - 1$, можно линейно выразить через функции $u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x)$. Если рассмотреть следующие векторы порядка ℓ

$$U(x) = \left(u(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x) \right)_{i=0, \dots, \ell-1}^t, \quad V(x) = \left(v(S_2^{i_2} S_1^{i_1} x) \right)_{i=0, \dots, \ell-1}^t, \tag{4}$$

то эта зависимость имеет вид $V(x) = \left(a_{i,j} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1} U(x)$ и ее можно представить в матричном виде

$$V(x) = A_{(2)} U(x), \tag{5}$$

где $A_{(2)} = \left(a_{i,j} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1}$ – соответствующая матрица порядка $\ell \times \ell$. Нижний индекс у $A_{(2)}$ означает, что матрица порождается двумя коммутативными инверсиями S_1, S_2 . Из (3) следует (5). Верно и обратное, поскольку первая строка (5) и есть (3).

Для описания свойств матрицы $A_{(2)}$ рассмотрим операцию сложения индексов коэффициентов матрицы в следующем смысле:

$$i \oplus j = (i_2, i_1) \oplus (j_2, j_1) \equiv ((i_2 + j_2 \bmod l_2), (i_1 + j_1 \bmod l_1)),$$

где (i_2, i_1) – это представление индекса i , как указано выше. Ясно, что \oplus является коммутативной и ассоциативной операцией над $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$. Определим

$$i \ominus j = (i_2 - j_2 \bmod l_2, i_1 - j_1 \bmod l_1).$$

Например, если $l_1 = 2, l_2 = 3$, то $\ominus(2,1) = (1,1)$ или $\ominus 5 = 3$. Распространим операции \oplus и \ominus на все числа вида (i_2, i_1) , полагая $(i_2, i_1) \equiv (i_2 \bmod l_2, i_1 \bmod l_1)$. Например, если $l_1 = 2, l_2 = 3$, то $(1, -1) = (1,1)$ и $(5, -3) = (2,1)$.

Теорема 1. [15, теорема 1]. Матрица $A_{(2)}$ из равенства (5) может быть представлена как

$$A_{(2)} \equiv \left(a_{i,j} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1} = \left(a_{j \ominus i} \right)_{i,j=0, \dots, \ell-1}. \tag{6}$$

Линейная комбинация матриц вида (6) является матрицей вида (6).

Нам будут необходимы следующие следствия из этой теоремы.

Следствие 1. Матрица $A_{(2)}$ однозначно определяется своей первой строкой $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{\ell-1})$.

Следствие 2. Матрица $A_{(2)}$ имеет структуру матрицы, состоящей из $l_2 \times l_2$ квадратных блоков, каждый из которых является матрицей размера $l_1 \times l_1$ и типа $A_{(1)}$.

Если представить вектор \mathbf{a} в виде векторов $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{l_2-1})$, где $\mathbf{a}_{j_2} = (a_{j_2 l_1}, \dots, a_{(j_2+1)l_1-1})$ тоже вектор, и обозначить $A_{(1)}^{(j_2)} = A_{(1)}(\mathbf{a}_{j_2})$, тогда верно равенство

$$A_{(2)}(\mathbf{a}) = A_{(1)}(A_{(1)}^{(0)}, A_{(1)}^{(1)}, \dots, A_{(1)}^{(l_2-1)}) \equiv \begin{pmatrix} A_{(1)}^{(0)} & A_{(1)}^{(1)} & \dots & A_{(1)}^{(l_2-1)} \\ A_{(1)}^{(l_2-1)} & A_{(1)}^{(0)} & \dots & A_{(1)}^{(l_2-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{(1)}^{(1)} & A_{(1)}^{(2)} & \dots & A_{(1)}^{(0)} \end{pmatrix},$$

где блочная матрица повторяет структуру матрицы $A_{(1)}$ размера $l_2 \times l_2$.

Следствие 3. Транспонированная матрица $A_{(2)}^t(\mathbf{a})$ имеет структуру матрицы $A_{(2)}^t$ и, кроме того, $A_{(2)}^t(\mathbf{a}) = A_{(2)}(\mathbf{c})$, где $\mathbf{c} = (a_{(-j_2, -j_1)})_{(j_2, j_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)}$, а обе компоненты $-j_2$ и $-j_1$ берутся по mod l_2 и mod l_1 соответственно.

Теорема 2. [15, теорема 2]. Произведение матриц вида (6) является снова матрицей вида (6) и верно равенство $A_{(2)}(\mathbf{a})A_{(2)}(\mathbf{d}) = A_{(2)}(\mathbf{d})A_{(2)}(\mathbf{a})$.

Следующая теорема дает представление о собственных векторах и собственных значениях матриц вида $A_{(2)}$ из (6). Из [15, теорема 3] следует следующее утверждение.

Теорема 3. Собственные векторы матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{(k_2, k_1)} = (\mathbf{e}_{k_1}, \lambda_{k_2} \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \lambda_{k_2}^{l_2-1} \mathbf{e}_{k_1})^t, \quad \mathbf{e}_{k_1} = (1, \lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_1}^{l_1-1})^t,$$

где $\lambda_{k_1} = e^{i2\pi \frac{k_1}{l_1}}$ – корень степени l_1 из единицы, $k_1 = 0, \dots, l_1 - 1$ и $\lambda_{k_2} = e^{i2\pi \frac{k_2}{l_2}}$ – корень степени l_2 из единицы, $k_2 = 0, \dots, l_2 - 1$.

Обозначим $\lambda_k^j \equiv \lambda_{(k_2, k_1)}^{(j_2, j_1)} = \lambda_{k_2}^{j_2} \lambda_{k_1}^{j_1}$. Тогда из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Собственный вектор матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$ с номером $k = (k_2, k_1) = 0, \dots, \ell - 1$, где $k_1 = 0, \dots, l_1 - 1$, $k_2 = 0, \dots, l_2 - 1$ можно представить в виде

$$\mathbf{e}_k = (\lambda_k^j)_{j=0, \dots, \ell-1}^t \equiv (\lambda_{k_2}^{j_2} \lambda_{k_1}^{j_1})_{(j_2, j_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)}^t, \quad (7)$$

а собственное число, соответствующее этому собственному вектору, определяется из равенства

$$\mu_k(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{\ell-1} a_j \lambda_k^j = \sum_{(j_2, j_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(j_2, j_1)} \lambda_{k_2}^{j_2} \lambda_{k_1}^{j_1} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t. \quad (8)$$

Замечание 2. Если положить $\mathbf{S}^j = S_2^{j_2} S_1^{j_1}$, то оператор $B_{\mathbf{a}}$ можно переписать в виде

$$B_{\mathbf{a}}(u)(x) = \sum_{j=0}^{\ell-1} a_j u(\mathbf{S}^j x).$$

Теорема 4. Пусть $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t \neq 0$ при $k = 0, \dots, \ell - 1$, где собственные вектора \mathbf{e}_k находятся из (7). Тогда существует матрица обратная к матрице $A_{(2)}(\mathbf{a})$ и она имеет вид

$$A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\ell} \mathbf{M} \text{diag}^{-1}(\mu_0, \dots, \mu_{\ell-1}) \overline{\mathbf{M}}, \quad (9)$$

где $\mathbf{M} = (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{\ell-1})$. Матрица \mathbf{M} является симметричной и ортогональной.

Доказательство. Поскольку \mathbf{e}_k – собственный вектор матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$, то верно равенство $A_{(2)}(\mathbf{a})\mathbf{M} = (\mu_0 \mathbf{e}_0, \dots, \mu_{\ell-1} \mathbf{e}_{\ell-1})$, и значит

$$A_{(2)}(\mathbf{a})\mathbf{M} \text{diag}^{-1}(\mu_0, \dots, \mu_{\ell-1}) = (\mu_0 \mathbf{e}_0, \dots, \mu_{\ell-1} \mathbf{e}_{\ell-1}) \text{diag}(\mu_0^{-1}, \dots, \mu_{\ell-1}^{-1}) = (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{\ell-1}) = \mathbf{M}.$$

Отсюда следует, что

$$A_{(2)}(\mathbf{a})M \operatorname{diag}(\mu_0^{-1}, \dots, \mu_{\ell-1}^{-1})\overline{M} = M\overline{M}.$$

Пусть $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{(j_2, j_1)}$ и $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{(i_2, i_1)}$ – два разных столбца матрицы M , т. е. $j \neq i$. Тогда из (7), используя равенства $\lambda_{j_2} \bar{\lambda}_{i_2} = \lambda_{j_2-i_2}$ и $\lambda_{j_1} \bar{\lambda}_{i_1} = \lambda_{j_1-i_1}$, запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j \bar{\mathbf{e}}_i &= \mathbf{e}_{(j_2, j_1)} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{(i_2, i_1)} = \left(\lambda_{j_2}^{k_2} \lambda_{j_1}^{k_1} \right)_{(k_2, k_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)} \cdot \left(\bar{\lambda}_{i_2}^{k_2} \bar{\lambda}_{i_1}^{k_1} \right)_{(k_2, k_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)} = \\ &= \sum_{(k_2, k_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} \lambda_{j_2}^{k_2} \lambda_{j_1}^{k_1} \bar{\lambda}_{i_2}^{k_2} \bar{\lambda}_{i_1}^{k_1} = \sum_{(k_2, k_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} (\lambda_{j_2} \bar{\lambda}_{i_2})^{k_2} (\lambda_{j_1} \bar{\lambda}_{i_1})^{k_1} = \sum_{(k_2, k_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} \lambda_{j_2-i_2}^{k_2} \lambda_{j_1-i_1}^{k_1} = \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \lambda_{j_2-i_2}^{k_2} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \lambda_{j_1-i_1}^{k_1}. \end{aligned}$$

Пусть $j_2 - i_2 \neq 0$, тогда $\lambda_{j_2-i_2} \neq 1$, и по простому комбинаторному тождеству находим

$$\sum_{k_2=0}^{l_2-1} \lambda_{j_2-i_2}^{k_2} = \frac{\lambda_{j_2-i_2}^{l_2} - 1}{\lambda_{j_2-i_2} - 1} = 0.$$

Если же $j_2 - i_2 = 0$, тогда $\lambda_{j_2-i_2} = 1$, и значит, $\sum_{k_2=0}^{l_2-1} \lambda_{j_2-i_2}^{k_2} = l_2$. Поэтому

$$\mathbf{e}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \sum_{k=0}^{\ell-1} \lambda_j^k \bar{\lambda}_i^k = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \ell & j = i \end{cases}. \quad (10)$$

Матрица M симметрична. Действительно, поскольку $\lambda_{i_2}^{j_2} = \lambda_{j_2}^{i_2}$ и $\lambda_{i_1}^{j_1} = \lambda_{j_1}^{i_1}$, то

$$\begin{aligned} M^t &= \left(\lambda_{j_2}^{i_2} \lambda_{j_1}^{i_1} \right)_{(i_2, i_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)}^t = \left(\lambda_{i_2}^{j_2} \lambda_{i_1}^{j_1} \right)_{(i_2, i_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)} = \\ &= \left(\lambda_{j_2}^{i_2} \lambda_{j_1}^{i_1} \right)_{(j_2, j_1)=0, \dots, (l_2-1, l_1-1)} = \left(\lambda_j^i \right)_{i, j=0, \dots, \ell-1} = M. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что i -я строка матрицы M имеет вид \mathbf{e}_i^t . Это означает, что

$$M\overline{M} = \left(\mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j \right)_{i, j=0, \dots, \ell-1} = \ell I.$$

Используя полученное равенство, можно записать

$$A_{(2)}(\mathbf{a}) \frac{1}{\ell} M \operatorname{diag}^{-1}(\mu_0, \dots, \mu_{\ell-1}) \overline{M} = \frac{1}{\ell} \ell I = I.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть матрица $A_{(2)}(\mathbf{a})$ не особенная, тогда обратная к ней матрица имеет вид

$$A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) = A_{(2)}(\mathbf{b}), \text{ где}$$

$$b_j = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\bar{\lambda}_k^j}{\mu_k}, \quad j = 0, \dots, \ell-1. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть матрица $A_{(2)}(\mathbf{a})$ обратима, тогда ее собственные числа, находимые из (8), отличны от нуля, т. е. $\mu_k \neq 0$, и поэтому применима теорема 4. Обозначим элементы обратной матрицы как $b_{i,j} = \left(A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) \right)_{i,j}$ при $i, j = 0, \dots, \ell-1$. Тогда по формуле (9), используя симметричность M , найдем

$$b_{i,j} = \frac{1}{\ell} \left(M \operatorname{diag}^{-1}(\mu_0, \dots, \mu_{\ell-1}) \overline{M} \right)_{i,j} = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\lambda_i^k}{\mu_k} \lambda_j^{-k} = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\lambda_{i-j}^k}{\mu_k} = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\lambda_k^{i-j}}{\mu_k} = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\bar{\lambda}_k^{-j-i}}{\mu_k}.$$

Если воспользоваться обозначением (11), то имеем $b_{i,j} = b_{j \ominus i}$, где b_j определяется из (11).

Значит, по теореме 1 $A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) = \left(b_{j \ominus i} \right)_{i, j=0, \dots, \ell-1} = A_{(2)}(\mathbf{b})$. При $i=0$ получаем первую строку $A_{(2)}(\mathbf{b})$, что доказывает равенство (11). Теорема доказана.

Следствие 5. Нетрудно видеть, что согласно (10) и (11)

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_k^t = \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{1}{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\bar{\lambda}_j^i}{\mu_j} \lambda_k^i = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{\mu_j} \frac{1}{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} \bar{\lambda}_j^i \lambda_k^i = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\delta_{j,k}}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_k}.$$

Кроме того, вектор \mathbf{b} можно найти по формуле $\mathbf{b} = \frac{1}{\ell} \mu_- \bar{\mathbf{M}}$, где $\mu_- = (\mu_k^{-1})_{k=0, \dots, \ell-1}$. Будем считать, что $\mathbf{a}^* = \mathbf{b}$.

Следствие 6. Если матрица $A_{(2)}(\mathbf{a})$ не особенная, то собственные векторы матрицы $A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a})$ равны \mathbf{e}_k , $k = 0, \dots, \ell - 1$, а собственные значения имеют вид $\mu_k^{-1}(\mathbf{a})$.

Задача Неймана. Сформулируем основной результат. Обозначим через $G_4(x, \xi)$ функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре [17] и $\Lambda u = \sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}$.

Теорема 6. Пусть $h_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $h_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k^t \neq 0$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_k^t \neq 0$ при $k = 0, \dots, \ell - 1$, где собственные векторы \mathbf{e}_k находятся из (7). Тогда решение задачи Неймана (1), (2) существует и единственно с точностью до константы при выполнении условия

$$\frac{1}{\mu_0(\mathbf{a})} \int_{\partial\Omega} h_0(\xi) ds_\xi - \frac{1}{\mu_0(\mathbf{c})} \int_{\partial\Omega} h_1(\xi) ds_\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\xi|^2 - 1) f(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Это решение можно представить в виде $u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t}$, где

$$v(x) = \frac{1+|x|^2}{2} B_{\mathbf{a}^*} \hat{v}_0(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Lambda B_{\mathbf{a}^*} \hat{v}_0(x) - \frac{1-|x|^2}{2} B_{\mathbf{c}^*} \hat{v}_1(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_4(x, \xi) (\Lambda + 4) f(\xi) d\xi, \quad (13)$$

а функции $\hat{v}_0(x)$, $\hat{v}_1(x)$ – гармонические в Ω и такие, что $\hat{v}_0|_{\partial\Omega} = h_0$, $\hat{v}_1|_{\partial\Omega} = h_1$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5. Из нее вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Граничные условия (2) могут быть преобразованы к виду

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{a}^*} h_0(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{c}^*} h_1(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (14)$$

Доказательство. В начале предыдущего раздела было установлено, что (3) \Leftrightarrow (5). Обозначим вектор \mathbf{b} , находимый по вектору \mathbf{a} из следствия 5, как $\mathbf{b} = \mathbf{a}^*$. Тогда, в соответствии с обозначениями из (4),

$$V(x) = A_{(2)}(\mathbf{a})U(x) \Rightarrow U(x) = A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a})V(x) = A_{(2)}(\mathbf{b})V(x),$$

откуда следует, что $u(x) = B_{\mathbf{a}^*} v(x)$ и значит, $v(x) = B_{\mathbf{a}} u(x) \Rightarrow u(x) = B_{\mathbf{a}^*} v(x)$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{a}^*} B_{\mathbf{a}} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{a}^*} h_0(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{c}^*} B_{\mathbf{c}} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{c}^*} h_1(x).$$

Лемма доказана.

В соответствии с леммой 1 задача Неймана (1)–(2) сводится к задаче Неймана (1)–(14). Далее, как показано в [18, 19], задача Неймана (1)–(14) преобразуется к задаче Дирихле

$$\Delta^2 v(x) = (\Lambda + 4) f(x), \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$v|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{a}^*} h_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{a}^*} h_0(x) + B_{\mathbf{c}^*} h_1(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (16)$$

причем решение $u(x)$ задачи Неймана (1)–(14) существует, только если $v(0) = 0$ и это решение

имеет вид $u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t}$.

Лемма 2. Решение следующей нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = B_{\mathbf{a}} g(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (17)$$

записывается в виде $u(x) = B_{\mathbf{a}} \hat{u}(x)$, где $\hat{u}(x)$ – решение обычной задачи Дирихле

$$\Delta \hat{u} = 0, x \in \Omega, \quad \hat{u}|_{\partial\Omega} = g(x), x \in \partial\Omega. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим ядро Пуассона задачи Дирихле (18) в шаре Ω как

$$P(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n}.$$

С учетом замечания 1 имеем $|\mathbf{S}^j x - \mathbf{S}^j \xi| = |\mathbf{S}^j(x - \xi)| = S_2^{j_2} S_1^{j_1}(x - \xi) = |x - \xi|$, а поэтому $P(\mathbf{S}^j x, \mathbf{S}^j \xi) = P(x, \xi)$. В силу [15, лемма 4.1] справедливо равенство

$$\int_{\partial\Omega} g(\mathbf{S}^j \xi) ds_\xi = \int_{\partial\Omega} g(\xi) ds_\xi.$$

Тогда решение задачи (17) записывается в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} P(x, \xi) B_a g(\xi) ds_\xi = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} \int_{\partial\Omega} P(x, \xi) g(\mathbf{S}^i \xi) ds_\xi = \\ &= \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} \int_{\partial\Omega} P(\mathbf{S}^i x, \mathbf{S}^i \xi) g(\mathbf{S}^i \xi) ds_\xi = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(i_2, i_1)} \int_{\partial\Omega} P(\mathbf{S}^i x, \xi) g(\xi) ds_\xi = B_a \hat{u}(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В силу [12, 20], поскольку $h_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $h_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$, то $B_{a^*} h_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $B_{c^*} h_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, а значит, решение задачи Дирихле (15)–(16) можно представить в форме

$$v(x) = v_0(x) + \frac{1 - |x|^2}{2} \Lambda v_0(x) - \frac{1 - |x|^2}{2} v_1(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_4(x, \xi) (\Lambda + 4) f(\xi) d\xi,$$

где $v_0(x), v_1(x)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при граничных условиях $v_0|_{\partial\Omega} = B_{a^*} h_0(x)$, $v_1|_{\partial\Omega} = B_{a^*} h_0(x) + B_{c^*} h_1(x)$, а $G_4(x, \xi)$ – функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре [17]. В силу леммы 2

$$v_0(x) = B_{a^*} \hat{v}_0(x), \quad v_1(x) = B_{a^*} \hat{v}_0(x) + B_{c^*} \hat{v}_1(x),$$

где гармонические функции $\hat{v}_0(x), \hat{v}_1(x)$ такие, что $\hat{v}_0|_{\partial\Omega} = h_0$, $\hat{v}_1|_{\partial\Omega} = h_1$. Поэтому функция $v(x)$ примет вид (13). Найдем значение $v(0)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} v_0(0) &= B_{a^*} \hat{v}_0(x) = \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a^*_{(i_2, i_1)} \int_{\partial\Omega} P(0, \xi) h_0(\xi) ds_\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} h_0(\xi) ds_\xi \sum_{(i_2, i_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a^*_{(i_2, i_1)} = \frac{\mu_0(\mathbf{a}^*)}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} h_0(\xi) ds_\xi = \frac{1}{\mu_0(\mathbf{a}) \omega_n} \int_{\partial\Omega} h_0(\xi) ds_\xi, \end{aligned}$$

поскольку по формуле (8) имеем

$$\mu_0(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{\ell-1} a_j \lambda_0^j = \sum_{(j_2, j_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(j_2, j_1)} \lambda_0^{j_2} \lambda_0^{j_1} = \sum_{(j_2, j_1)=0}^{(l_2-1, l_1-1)} a_{(j_2, j_1)}$$

и по следствию 5 $\mu_0(\mathbf{a}^*) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_0^t = 1 / \mu_0(\mathbf{a})$. Кроме того, $\Lambda(B_{a^*} \hat{v}_0)(0) = 0$, поскольку гармоническая функция $\Lambda B_{a^*} \hat{v}_0(x)$ не имеет в своем разложении в окрестности нуля свободного члена. Аналогично найдем значение $v_1(0)$. Таким образом, находим

$$v(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0(\mathbf{a}) \omega_n} \int_{\partial\Omega} h_0(\xi) ds_\xi - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0(\mathbf{c}) \omega_n} \int_{\partial\Omega} h_1(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_4(0, \xi) (\Lambda + 4) f(\xi) d\xi.$$

В силу [12, лемма 3] справедливо равенство

$$\int_{\Omega} G_4(0, \xi) (\Lambda + 4) f(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \frac{1 - |\xi|^2}{4} f(\xi) d\xi$$

и значит,

$$v(0) = \frac{1}{2\omega_n} \left(\frac{1}{\mu_0(\mathbf{a})} \int_{\partial\Omega} h_0(\xi) ds_\xi - \frac{1}{\mu_0(\mathbf{c})} \int_{\partial\Omega} h_1(\xi) ds_\xi + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 - |\xi|^2) f(\xi) d\xi \right).$$

Поэтому условие разрешимости $v(0) = 0$ задачи (15), (16), а значит, и задачи (1), (2) принимает вид (12). Само решение записывается в виде $u(x) = \int_0^1 v(tx) \frac{dt}{t}$, где функция $v(x)$ находится из (13). Теорема доказана.

Литература

1. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739–740.
2. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
3. Skubachevskii, A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems I / A.L. Skubachevskii // J. Math. Sci. – 2008. – Vol. 155. – P. 199–334.
4. Solvability and Volterra Property of Nonlocal Problems for Mixed Fractional-Order Diffusion-Wave Equation / N. Adil, A.S. Berdyshev, B.E. Eshmatov, Z.D. Baishemirov // Bound. Value Probl. – 2023. – Vol. 2023. – Article number: 47.
5. Ashyralyev, C. On the Stable Difference Scheme for Source Identification Nonlocal Elliptic Problem / C. Ashyralyev // Math Meth Appl Sci. – 2023 – Vol. 46, Iss. 2. – P. 2488–2499.
6. Assanova, A.T. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type / A.T. Assanova, R. Uteshova // Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 165, Part 2. – p. 112816.
7. Zhou, L. Error Estimate of a High Accuracy Difference Scheme for Poisson Equation with two Integral Boundary Conditions / L. Zhou, H. Yu // Adv. Differ. Equ. – 2018. – Article number: 225.
8. Li, C. Uniqueness of a Nonlinear Integro-Differential Equation with Nonlocal Boundary Condition and Variable Coefficients / C. Li // Bound Value Probl. – 2023. – Vol. 2023. – Article number: 26.
9. Przeworska-Rolewicz, D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument / D. Przeworska-Rolewicz // Comment. Math. Helv. – 1974. – no. 17. – P. 451–457.
10. Karachik, V. Solvability of one Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation / V. Karachik, B. Turmetov // Novi Sad J. Math. – 2020. – Vol. 50, no. 1. – P. 67–88.
11. Turmetov, B. Solvability of Nonlocal Dirichlet Problem for Generalized Helmholtz Equation in a Unit Ball / B. Turmetov, V. Karachik // Complex Var. Elliptic Equ. – 2023. – Vol. 68, no. 7. – P. 1204–1218.
12. Турметов, Б.Х. Задача Неймана для нелокального бигармонического уравнения / Б.Х. Турметов, В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 51–58.
13. Karachik, V.V. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation / V.V. Karachik, A.M. Sarsenbi, B.K. Turmetov // Turk. J. Math. – 2019. – Vol. 43. – P. 1604–1625.
14. Turmetov, B. On a Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation with Multiple Involution / B. Turmetov, V. Karachik // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, Iss. 17. – 2020.
15. Turmetov, B. Construction of Eigenfunctions to One Nonlocal Second-Order Differential Operator with Double Involution / B. Turmetov, V. Karachik // Axioms. – 2022. – Vol. 11, no. 10. – 543.
16. Turmetov, B. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution / B. Turmetov, V. Karachik // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, no. 10. – 1781.
17. Karachik, V.V. On Green's Function of the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 6. – 543.
18. Карачик, В.В. Достаточные условия разрешимости одного класса задач типа Неймана для полигармонического уравнения / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 8. – С. 1295–1308.
19. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 61–74.
20. Карачик, В.В. Представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре через функцию Грина / В.В. Карачик // Челябинский физико-математический журнал. – 2020. – Т. 5, № 4-1. – С. 391–399.

Поступила в редакцию 16 марта 2024 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математический анализ и методика преподавания математики», старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 18–26*

DOI: 10.14529/mmph240303

THE BIHARMONIC NEUMANN PROBLEM WITH DOUBLE INVOLUTION

V.V. Karachik

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: karachik@susu.ru

Abstract. This paper studies the solvability of a new class of boundary value problems with nonlocal Neumann conditions for a biharmonic equation in a sphere. Non-local conditions are specified in the form of a connection between the values of the desired function at different points of the boundary. In this case, the boundary operator is determined using matrices of involution-type mappings. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proved and the integral representation of the solution to the problem under consideration is found.

Keywords: *nonlocal Neumann problem; biharmonic equation; solvability conditions; Green's function.*

References

1. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. Some Elementary Generalizations of Linear Elliptic Boundary Value Problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, Vol. 185, no. 4, pp. 739–740. (in Russ.).
2. Samarskii A.A. Some Problems of the Theory of Differential Equations. *Differ. Uravn.*, 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. (in Russ.).
3. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems I. *J. Math. Sci.*, 2008, Vol. 155, pp. 199–334. DOI: 10.1007/s10958-008-9218-9
4. Adil N., Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Baishemirov Z.D. Solvability and Volterra Property of Nonlocal Problems for Mixed Fractional-Order Diffusion-Wave Equation. *Bound Value Probl.*, 2023, Vol. 2023, Article number: 47. DOI: 10.1186/s13661-023-01735-0
5. Ashyralyyev C. On the Stable Difference Scheme for Source Identification Nonlocal Elliptic Problem. *Math Meth Appl Sci.*, 2023, Vol. 46, Iss. 2, pp. 2488–2499. DOI: 10.1002/mma.8656
6. Assanova A.T., Uteshova R. Solution of a Nonlocal Problem for Hyperbolic Equations with Piecewise Constant Argument of Generalized Type. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, Vol. 165, Part 2, p. 112816. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112816
7. Zhou, L., Yu, H. Error Estimate of a High Accuracy Difference Scheme for Poisson Equation with Two Integral Boundary Conditions. *Adv. Differ. Equ.*, 2018, Article number: 225.
8. Li C. Uniqueness of a Nonlinear Integro-Differential Equation with Nonlocal Boundary Condition and Variable Coefficients. *Bound Value Probl.*, 2023, Vol. 2023, Article number: 26. DOI: 10.1186/s13661-023-01713-6
9. Przeworska-Rolewicz D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument. *Comment. Math. Helv.*, 1974, no. 17, p. 451–457.
10. Karachik V., Turmetov B. Solvability of One Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation. *Novi Sad J. Math.*, 2020, Vol. 50, no. 1, pp. 67–88. DOI: 10.30755/NSJOM.08942
11. Turmetov B., Karachik V. Solvability of Nonlocal Dirichlet Problem for Generalized Helmholtz Equation in a Unit Ball. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2023, Vol. 68, no. 7, pp. 1204–1218. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040021
12. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. Neumann Boundary Condition for a Nonlocal Biharmonic Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2022, Vol. 14, no. 2, pp. 51–58. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph220205

13. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.K. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation. *Turk. J. Math.*, 2019, Vol. 43, pp. 1604–1625. DOI: 10.3906/mat-1901-71
14. Turmetov B., Karachik V. On a Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation with Multiple Involution. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, Iss. 17, 2020. DOI: 10.3390/math9172020
15. Turmetov B., Karachik V. Construction of Eigenfunctions to One Nonlocal Second-Order Differential Operator with Double Involution. *Axioms*, 2022, Vol. 11, no. 10, 543. DOI: 10.3390/axioms11100543
16. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution. *Symmetry*, 2021, Vol. 13, no. 10, 1781. DOI: 10.3390/sym13101781
17. Karachik V.V. On Green's Function of the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in the Ball. *Axioms*, 2023, Vol. 12, no. 6, p. 543. DOI: 10.3390/axioms12060543
18. Karachik, V.V. Sufficient Conditions for Solvability of One Class of Neumann-Type Problems for the Polyharmonic Equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, Vol. 61, no. 8, pp. 1276–1288. DOI: 10.1134/s0965542521040059
19. Karachik V.V. On Solvability Conditions for the Neumann Problem for a Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, Vol. 8, no. 1, pp. 63–75. DOI: 10.1134/S1990478914010074
20. Karachik V.V. Presentation of Solution of the Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Unit Ball through the Green Function. *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2020, Vol. 5, no. 4(1), pp. 391–399. (in Russ.).

Received March 16, 2024

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

О.Г. Китаева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: kitaevaog@susu.ru

Аннотация. Рассматривается линейная стохастическая система уравнений Осколкова, которая моделирует течение вязкоупругой несжимаемой жидкости. Изучается вопрос об устойчивости решений этой системы. Для этого стохастическая система уравнений Осколкова рассматривается в виде стохастического линейного уравнения соболевского типа. В качестве искомой величины выступает стохастический процесс, который не имеет производной по Ньютону–Лейбницу ни в одной точке. Поэтому мы используем производную стохастического процесса в смысле Нельсона–Гликлиха. Показано, что при определенных значениях параметров, характеризующих упругие и вязкие свойства жидкости, существование неустойчивого и устойчивого инвариантных пространств стохастической системы уравнений Осколкова.

Ключевые слова: стохастическая система уравнений Осколкова; производная Нельсона–Гликлиха; инвариантные пространства.

Введение

Рассмотрим систему Осколкова

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \nu \nabla^2 u - p, \nabla u = 0, \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial D \times \mathbb{R}, u(x, 0) = u_0, x \in D,$$

где $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ и p характеризуют вектор скоростей и градиент давления. Система (1) является линеаризацией системы

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \nu \nabla^2 u - (u \cdot \nabla) - \nabla p, \nabla u = 0,$$

которая была получена А.П. Осколковым [1] для описания течения вязких жидкостей, обладающих свойством упругости.

Мы будем исследовать вопрос об устойчивости решений системы (1) со стохастическими начальными данными. В качестве начального условия выберем случайную величину

$$\eta(0) = \eta_0 \quad (2)$$

и систему (1) будем рассматривать в виде стохастического уравнения соболевского типа [2–5]

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta. \quad (3)$$

Решением стохастического уравнения является стохастический процесс, который не дифференцируем ни в одной точке. Поэтому в качестве производной стохастического процесса η будем рассматривать производную Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}$ [6].

Исследование разрешимости детерминированной системы Осколкова начато в [1] при условии, что параметры $\lambda, \nu \in \mathbb{R}_+$. В работе [7] вопрос о существовании решений решался с помощью метода фазового пространства при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \nu \in \mathbb{R}_+$. Было показано существование экспоненциальной дихотомии решений.

Нашей целью является изучение устойчивости решений стохастической системы (1) в терминах устойчивых и неустойчивых инвариантных пространств. Статья состоит из двух частей. В первой части рассматривается система (1) в пространствах случайных K -величин, показана разрешимость стохастической системы (1). Во второй части доказывается существование устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств.

1. Система Осколкова в пространствах случайных K -величин

Систему (1) будем рассматривать в пространствах случайных K -величин. Для этого обозначим $H^2 = (W_2^2(D))^n$, $L^2 = (L_2(D))^n$, где D – ограниченная область с гладкой границей (класса C^∞). Замыкание линейала $\{u \in C^\infty : \nabla u = 0\}$ обозначим H_σ , причем существует расщепление $L^2 = H_\sigma \oplus H_\pi$, где H_π – ортогональное дополнение к H_σ , а Π – отропроектор соответствующий этому дополнению. Обозначим $\Sigma = I - \Pi$.

Положим $\mathcal{U} = H_\sigma^2 \times H_\pi^2 \times H_\pi$ и $\mathfrak{F} = H_\sigma \times H_\pi \times H_\pi$. Элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид $u = (u_\sigma, u_\pi, p)$. В [7] показано, что оператор $A = (-\nabla^2)^n$ является линейным непрерывным оператором, причем $\sigma(A)$ положительный и дискретный, сгущающийся к $+\infty$.

Пространства $W_2^2(D)$, $L_2(D)$ – сепарабельные гильбертовы пространства, поэтому пространства \mathcal{U} , \mathfrak{F} являются сепарабельными гильбертовыми пространствами как их конечные произведения. Через $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ обозначим базис в \mathcal{U} и \mathfrak{F} . Построим пространства $U_K L_2$ и $F_K L_2$. Выберем последовательность равномерно ограниченных случайных величин $\{\xi_k\} \in L_2$ и $K = \{\lambda_k\}$ – монотонная последовательность такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$. Здесь L_2 – пространство случайных K -величин ξ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Элементами пространств $U_K L_2$ и $F_K L_2$ являются векторы

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k, \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \psi_k.$$

Операторы $L, M : U_K L_2 \rightarrow F_K L_2$ зададим следующими формулами:

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma(\lambda I + A) & O & O \\ O & P(\lambda I + A) & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -\nu \Sigma A & O & O \\ O & -\nu P A & -P \\ O & -\nu P B & O \end{pmatrix}.$$

Тогда стохастическую систему уравнений (1) можно рассматривать в виде стохастического линейного уравнения (3). Очевидно, что операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, причем $\text{im } L = H_\sigma^2 \oplus H_\pi^2 \oplus \{0\}$, $\ker L = \{0\} \oplus \{0\} \oplus H_\pi$. В [8] показано, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, тогда и только тогда, когда оператор $A \in \mathcal{L}(U_K L_2, F_K L_2)$. Поэтому $L, M \in \mathcal{L}(U_K L_2, F_K L_2)$. В работе [7] показано, что оператор M $(L, 1)$ -ограничен, если операторы $L, M : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$.

Лемма 1. Операторы $L, M \in \mathcal{L}(U_K L_2, F_K L_2)$, причем оператор M $(L, 1)$ -ограничен при $\lambda \in R \setminus \sigma(A), \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Решением уравнения (3) назовем стохастический K -процесс $\eta \in C^1(\mathfrak{F}; U_K L_2)$, если при подстановке его (3) он почти наверное обращает уравнение в тождество (\mathfrak{S} – некоторый промежуток из \mathbb{R} , \mathbb{R} – множество действительных чисел, наделенных борелевой σ -алгеброй). Стохастическим фазовым пространством уравнения (3) назовем множество $P \in U_K L_2$, если почти наверное каждая траектория решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (3) лежит в P , для почти всех $\eta_0 \in P$ существует решение уравнения (3), удовлетворяющее условию (2).

Фазовое пространство стохастической системы Осколкова имеет вид

$$U_K^1 L_2 = \{\eta \in U_K L_2 : P\eta = 0, P\nu \Sigma \eta = p\}.$$

Пусть $\{\nu_k\}$ – спектр оператора $\tilde{A} : H_\pi^2 \rightarrow H_\pi^2$, являющегося сужением оператора A на H_π^2 . Разрешающую группу можно представить в виде

$$U^t = \begin{pmatrix} \sum_{\nu_k \neq \lambda} e^{\frac{\nu \nu_k}{\nu_k - \lambda} t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A), \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и при любой случайной величине $\eta_0 \in U_K^1 L_2$ существует решение стохастической системы уравнений (1) с начальным условием (3), которое имеет вид $\eta(t) = U^t \eta_0, t \in \mathfrak{J}$.

2. Инвариантные пространства стохастической системы уравнений Осколкова

Определение 1. Инвариантное пространство I_+ называется *устойчивым (неустойчивым) инвариантным пространством* уравнения (3), если существуют такие положительные константы $N_{1(2)}, m_{1(2)}$, что выполнено

$$\|\eta^1(t)\|_{U_K L_2} \leq N_1 e^{-m_1(s-t)} \|\eta^1(s)\|_{U_K L_2}, s \geq t, \left(\|\eta^2(t)\|_{U_K L_2} \leq N_2 e^{-m_2(t-s)} \|\eta^2(s)\|_{U_K L_2}, t \geq s, \right),$$

где $\eta^1 \in I_+, (\eta^2 \in I_-)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Относительный спектр стохастической системы Осколкова имеет вид

$$\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cap \sigma_2^L(M),$$

где

$$\sigma_1^L(M) = \left\{ \frac{\nu \nu_k}{\nu_k - \lambda}, \lambda > \nu_k \right\}, \sigma_2^L(M) = \left\{ \frac{\nu \nu_k}{\nu_k - \lambda}, \lambda < \nu_k \right\}.$$

Рассмотрим пространства

$$I^1 = \{\eta \in U_K^1 L_2 : \lambda > \nu_k\}, I^2 = \{\eta \in U_K^1 L_2 : \lambda < \nu_k\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Если $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A), \lambda > \nu_1$ и $\nu > 0$ ($\nu < 0$), то I^1 является устойчивым инвариантным пространством и I^2 является неустойчивым инвариантным пространством стохастической системы уравнений (1).

Доказательство. Если $\nu > 0$ ($\nu < 0$), тогда $\sigma_1^L(M)$ ($\sigma_2^L(M)$) лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости, а $\sigma_2^L(M)$ ($\sigma_1^L(M)$) – в правой полуплоскости комплексной плоскости. Поэтому в силу результатов [9] пространство I^1 (I^2) является устойчивым инвариантным пространством, пространство I^2 (I^1) является неустойчивым инвариантным пространством.

Заключение

В дальнейшем планируется продолжить исследования по изучению устойчивости и неустойчивости решений для стохастических полулинейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором [8]. Следуя работам [9–11], предполагается провести численные эксперименты по нахождению устойчивого и неустойчивого решений стохастической системы (1).

Литература

1. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
2. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

3. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Radial Operators in Space of “Noises” / G.A. Sviridiuk, M.A. Sagadeeva // *Mediterranean Journal of Mathematics*. – 2016. – Vol. 13, no. 6. – P. 4607–4621.
4. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyayeva // *Communications on Pure and Applied Analysis*. – Springer, 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196
5. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2018. – Vol. 2018, no. 128. – P. 1–10.
6. Gliklikh, Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics* / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y. – 2011. – 436 p.
7. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // *Дифференц. уравнения*. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.
8. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // *Доклады Академии наук СССР*. – 1991. – Т. 318, № 4. – С. 828–831.
9. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies of a Non-Classical Equations of Differential Forms on a Two-Dimensional Torus with “Noises” / O.G. Kitaeva // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2019. – Vol. 6, no. 3. – P. 26–38.
10. Kitaeva, O.G. Stable and Unstable Invariant Spaces of One Stochastic Non-Classical Equation with a Relatively Radial Operator on a 3-Torus / O.G. Kitaeva // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2020. – Vol. 7, no. 2. – P. 40–49.
11. Kitaeva, O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Equation / O.G. Kitaeva // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2023. – Vol. 10, no. 1. – P. 21–29.

Поступила в редакцию 15 июля 2024 г.

Сведения об авторе

Китаева Ольга Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 3, pp. 27–31*

DOI: 10.14529/mmph240304

INVARIANT SPACES OF STOCHASTIC SYSTEMS OF OSKOLKOV EQUATIONS

O.G. Kitaeva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: kitaevaog@susu.ru

Abstract. This paper considers a linear stochastic system of Oskolkov equations, which models the flow of a viscoelastic incompressible fluid and studies the stability of the solutions of this system. For this purpose, the stochastic system of Oskolkov equations is considered in the form of a Sobolev-type stochastic linear equation. The desired value is a stochastic process that does not have a Newton–Leibniz derivative at any point. Therefore, we use the derivative of the stochastic process in the sense of Nelson–Gliklich. It is shown that for certain parameter values characterizing the elastic and viscous properties of a liquid there are unstable and stable invariant spaces of a stochastic system of Oskolkov equations.

Keywords: *stochastic system of Oskolkov equations; Nelson-Gliklich equation; invariant spaces.*

References

1. Oskolkov A.P. Nelokal'nye problemy dlya odnogo klassa nelineynykh operatornykh uravneniy, vznikayushchikh v teorii uravneniy tipa S.L. Soboleva (Nonlocal Problems for One Class of Nonlinear Operator Equations that Arise in the Theory of Sobolev Type Equations). *Zapiski nauch. seminarov LOMI*, 1991, Vol. 198, pp. 31–48. (in Russ.).

2. Favini A., Sviridiuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of “noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410

3. Favini A., Sviridiuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Radial Operators in Space of “Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, Vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x

4. Favini A., Sviridiuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185

5. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridiuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

7. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The Phase Space of The Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System. *Differential Equations*, 1996, Vol. 32, no. 11, pp. 1535–1540.

8. Sviridyuk G.A. Semilinear Equations of the Sobolev Type with Relatively Bounded Operators. *Soviet Math. Dokl.*, 1992, Vol. 43, no. 3, pp. 797–801.

9. Kitaeva O.G. Exponential Dichotomies of a Non-Classical Equations of Differential Forms on a Two-Dimensional Torus with “Noises”. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, Vol. 6, no. 3, pp. 26–38. DOI: 10.14529/jcem190303

10. Kitaeva O.G. Stable and Unstable Invariant Spaces of One Stochastic NonClassical Equation with a Relatively Radial Operator on a 3-Torus. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, Vol. 7, no. 2, pp. 40–49. DOI: 10.14529/jcem200204

11. Kitaeva O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, Vol. 10, no. 1, pp. 21–29. DOI: 10.14529/jcem230103

Received July 15, 2024

Information about the author

Kitaeva Olga Gennadevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕЛЛМАНА

Д.И. Камалетдинова¹, В.О. Лукащук²

¹ ООО ИК «СИБИНТЕК», г. Уфа, Российская Федерация

² Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Российская Федерация

E-mail: voluks@gmail.com

Аннотация. Исследуется уравнение с квадратичной нелинейностью, которое является частным случаем дифференциального уравнения типа Беллмана. В результате решения задачи групповой классификации установлено, что в случае произвольного вида двух функций, входящих в нелинейные члены, уравнение допускает четырехпараметрическую группу преобразований, которая расширяется до пятипараметрической и шестипараметрической в случае параметрической и линейной зависимости функций. Построены некоторые инвариантные решения.

Ключевые слова: уравнение типа Беллмана; группа точечных преобразований; инвариантное решение.

Введение

Уравнение Беллмана [1] является одним из основных инструментов теории оптимального управления и динамического программирования. Оно широко используется в технических науках и экономике, является ключевым элементом многих алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта.

Одной из актуальных задач теории управления является задача оптимальной коррекции траектории движения материальной точки при малых возмущениях. Согласно подходу академика Ф.Л. Черноушко [2, 3], исследование таких процессов может быть сведено к решению краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных второго порядка (уравнения типа Беллмана).

Характерной особенностью уравнения, существенно усложняющей его аналитическое исследование, является его многомерность: даже в простейшей постановке оно содержит три независимые переменные – временную и две пространственные. Одним из эффективных методов анализа нелинейных уравнений является групповой анализ [4]. Данный метод позволяет не только установить ряд качественных свойств уравнения, но и найти его частные решения уравнения. Его преимущество при решении задач оптимального управления лазером, например, подробно описаны в работе [5]. Групповой анализ применяется и в задачах об оптимальном управлении пограничным слоем [6].

В работе рассматривается уравнение с квадратичной нелинейностью, которое является частным случаем дифференциального уравнения Беллмана, вида [7, с. 259]

$$u_t u_x - f(t) u_x u_{yy} - g(t) (u_y)^2 = 0, \quad (1)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – произвольные функции, $f(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$. Решается задача групповой классификации относительно функций $f(t)$ и $g(t)$ по допускаемым этим уравнением однопараметрическим группам Ли точечных преобразований. Также строятся некоторые инвариантно-групповые решения уравнения (1).

Следуя работе [8], в дальнейшем используется обозначение $\partial/\partial t = \partial_t$.

1. Групповая классификация

Будем искать для уравнения (1) допускаемую группу преобразований с оператором вида

$$X = \tau(t, x, y, u) \partial_t + \xi(t, x, y, u) \partial_x + \zeta(t, x, y, u) \partial_y + \eta(t, x, y, u) \partial_u. \quad (2)$$

Действуя вторым продолжением оператора (2) на уравнение (1), получаем определяющее уравнение

$$X \left(u_t u_x - f(t) u_x u_{yy} - g(t) (u_y)^2 \right) \Big|_{(1)} = 0.$$

Расщепляя его по независимым переменным u_x, u_y, u_{xy}, \dots , приходим к довольно громоздкой определяющей системе, большая часть уравнений которой легко решается. В результате находим

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = C_1 x + C_2, \quad \zeta = C_3 y + C_4, \quad \eta = C_5 u + C_6, \quad (3)$$

где C_i – произвольные постоянные, $i = 1, \dots, 6$, а из нерешенных в определяющей системе останутся лишь следующие два уравнения:

$$\begin{cases} g \tau' + g' \tau = (2C_3 - C_1)g, \\ f \tau' + f' \tau = 2C_3 f. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, задача групповой классификации сводится к решению классифицирующей системы на функции $f(t)$ и $g(t)$, построенной на основе системы (4)

$$\begin{cases} g(t) w'(t) + g'(t) w(t) = (2A - B)g(t), \\ f(t) w'(t) + f'(t) w(t) = 2A f(t), \end{cases}$$

где A, B – произвольные постоянные, $w(t)$ – произвольная функция. Поскольку $f(t) \neq 0, g(t) \neq 0$, разделим первое уравнение системы на $g(t)$, а второе – на $f(t)$. Переходя к логарифмам функций

$$\hat{f}(t) = \ln|f(t)|, \quad \hat{g}(t) = \ln|g(t)|,$$

имеем систему

$$\begin{cases} w'(t) + \hat{g}'(t) w(t) = 2A - B, \\ w'(t) + \hat{f}'(t) w(t) = 2A. \end{cases} \quad (5)$$

Вычитая первое уравнение из второго, приходим к соотношению

$$(\hat{f}' - \hat{g}') w = B. \quad (6)$$

Случай 1. Пусть $\hat{f}' \neq \hat{g}'$, тогда из (6)

$$w = \frac{B}{\hat{f}' - \hat{g}'}$$

Вычисляя производную $w(t)$ и подставляя в систему (5), получаем уравнение

$$B \hat{f}' (\hat{f}' - \hat{g}') - B (\hat{f}'' - \hat{g}'') = 2A (\hat{f}' - \hat{g}')^2, \quad (7)$$

которое связывает функции $\hat{f}(t), \hat{g}(t)$ и постоянные A, B .

Если $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$ – произвольные функции, то условие (7) выполняется при $A = B = 0$. Возвращаясь к системе уравнений (4), получаем, что $C_1 = 0, C_3 = 0, \tau = 0$. Следовательно, уравнение (1) допускает оператор (2) с координатами

$$\tau = 0, \quad \xi = C_2, \quad \zeta = C_4, \quad \eta = C_5 u + C_6.$$

Пусть $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$ удовлетворяют условию (7). Выясним их общий вид, когда $A \neq 0, B \neq 0$. Обозначим

$$\lambda = \frac{2A}{B}, \quad h(t) = \hat{f}(t) - \hat{g}(t),$$

причем $h'(t) \neq 0$. Условие (7) переписывается в виде

$$\hat{f}' h' - h'' = \lambda h'^2,$$

откуда

$$\hat{f} = \lambda h + \ln h' + \ln b, \quad \hat{g} = (\lambda - 1)h + \ln h' + \ln b,$$

где b – произвольная постоянная, $b \neq 0$. Получаем общий вид функций $f(t)$ и $g(t)$, которые удовлетворяют условию (7) в параметрическом виде:

$$f = b h' e^{\lambda h}, \quad g = b h' e^{(\lambda - 1)h}.$$

Подставляя функции $f(t)$ и $g(t)$ в систему (4), находим $\tau = \frac{C_1}{h'(t)}, C_3 = \frac{\lambda}{2} C_1$. Следовательно, в

этом случае уравнение (1) допускает оператор (2) с координатами

$$\tau = \frac{C_1}{h'(t)}, \quad \xi = C_1x + C_2, \quad \zeta = \frac{\lambda}{2}C_1y + C_4, \quad \eta = C_5u + C_6.$$

Случай 2. Пусть $\hat{f}' = \hat{g}'$, тогда функции линейно зависимы: $g(t) = k f(t)$, где $k \neq 0$ – произвольная постоянная. Из системы (4) получаем $C_1 = 0$ и находим функцию τ , а координаты допускаемого оператора (2) будут иметь вид

$$\tau = \frac{2C_3 \int f(t)dt + C_7}{f(t)}, \quad \xi = C_2, \quad \zeta = C_3y + C_4, \quad \eta = C_5u + C_6.$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение. В зависимости от вида функций $f(t)$ и $g(t)$ уравнение типа Беллмана (1) допускает четырех-, пяти- или шестипараметрическую группу Ли точечных преобразований. А именно,

1) если $f(t), g(t)$ – произвольного вида, $f(t) \neq 0, g(t) \neq 0$, то уравнение (1) допускает четырехпараметрическую группу Ли G_4 с операторами

$$G_4: \quad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_u, \quad X_4 = u\partial_u,$$

2) если $f = b h' e^{\lambda h}, g = b h' e^{(\lambda-1)h}$, где $h(t)$ – произвольная функция, $h(t) \neq \text{const}$, b, λ – произвольные постоянные, $b \neq 0, \lambda \neq 0$, то группа Ли G_4 расширяется до пятипараметрической оператором

$$X_5 = \frac{1}{h'(t)}\partial_t + x\partial_x + \frac{\lambda}{2}y\partial_y,$$

3) если $g(t) = k f(t)$, где $k \neq 0$ – произвольная постоянная, то группа Ли G_4 расширяется до шестипараметрической операторами

$$X_5 = \frac{1}{f(t)}\partial_t, \quad X_6 = \frac{2 \int f(t)dt}{f(t)}\partial_t + y\partial_y.$$

2. Инвариантные решения

Построим некоторые инвариантные решения уравнения (1). Общий инвариант для оператора X_2 есть функция $I(t, x, u)$. Анзац на решение $u = \varphi(t, x)$ приводит к двум возможным инвариантным решениям уравнения (1) вида

$$u = \varphi(t), \quad u = \psi(x).$$

Для абелевой подалгебры с базисными операторами X_1, X_2 инвариантное решение тоже имеет вид произвольной функции от переменной x : $u = \varphi(x)$. Если взять за основу решения инвариант линейной комбинации операторов $aX_2 - bX_1$, где a, b – произвольные постоянные, то, предполагая, что решение имеет вид $u = \varphi(t, ax + by)$, получим линейное редуцированное уравнение

$$a\varphi_t = ab^2 f(t)\varphi_{zz} + b^2 g(t)\varphi_z,$$

где $z = ax + by$.

Рассмотрим двумерную подалгебру $L_2 = \{X_1 + aX_3, X_2 + bX_3\}$, где a, b – произвольные постоянные. Из общего инварианта имеем анзац на решение $u = ax + by + \varphi(t)$, подставляя который в уравнение (1), получим редуцированное уравнение

$$a\varphi' = b^2 g(t),$$

которое легко интегрируется. В результате находится инвариантное решение в виде

$$u = ax + by + \frac{b^2}{a} \int g(t)dt + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотрим другую двумерную подалгебру $\{X_1 + aX_4, X_2 + bX_4\}$, из общего инварианта которой имеем анзац на решение вида $u = e^{ax+by}\varphi(t)$. В результате решения редуцированного уравнения получаем инвариантное решение

$$u = Ce^{ax+by+b^2\int\left(\frac{f(t)+\frac{g(t)}{a}}{a}\right)dt},$$

где C – произвольная постоянная.

Для оператора X_5 , в случае параметрической зависимости функций f и g , анзац на решение имеет вид $u = \varphi\left(xe^{-h(t)}, ye^{-\frac{\lambda h(t)}{2}}\right)$, а уравнение (1) редуцируется в уравнение с двумя переменными

$$z\varphi_z^2 + \frac{\lambda}{2}v\varphi_z\varphi_v + b\varphi_z\varphi_{vv} + b\varphi_v^2 = 0,$$

где $z = xe^{-h(t)}, v = ye^{-\frac{\lambda h(t)}{2}}$.

В случае линейной зависимости функций f и g для оператора X_5 получаем инвариантное решение $u = \varphi(x, y)$, где φ удовлетворяет редуцированному уравнению

$$\varphi_{yy}\varphi_x + k\varphi_y^2 = 0.$$

Для оператора X_6 инвариантное решение ищется в виде $u = \varphi\left(x, \frac{1}{y^2}\int f(t)dt\right)$, а редуцированное уравнение меньшей размерности по пространству имеет вид

$$4kz^2\varphi_z^2 + (6z-1)\varphi_z\varphi_x + 4z^2\varphi_x\varphi_{zz} = 0,$$

где $z = \frac{1}{y^2}\int f(t)dt$.

Заключение

В работе исследованы симметричные свойства уравнения типа Беллмана. Установлено, что в случае произвольного вида функций от времени, стоящих при первых производных по пространству, допускаемая группа преобразований для исследуемого уравнения является четырехпараметрической. Если функции связаны через параметрическое соотношение, то группа расширяется до пятипараметрической. В случае, когда функции пропорциональны, группа расширяется до шестипараметрической. Для некоторых допускаемых операторов и на их двумерных подалгебрах построены инвариантные решения, которые могут быть использованы в дальнейшем, например, при решении уравнения (1) с помощью численных методов для тестирования вычислительных программ. С помощью ряда операторов удалось понизить порядок уравнения (1) и выписать соответствующие редуцированные уравнения.

Литература

1. Ванько, В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 488 с.
2. Черноусько, Ф.Л. Автомодельные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений / Ф.Л. Черноусько // ПММ. – 1971. – Т. 35, № 2. – С. 333–342.
3. Черноусько, Ф.Л. Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановский. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
4. Ибрагимов, Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Физматлит, 2012. – 332 с.
5. Полякевич, А.С. Преимущества группового анализа дифференциальных уравнений при решении задач оптимального управления лазерными системами / А.С. Полякевич, Б.Н. Пойзнер // Оптика атмосферы и океана. – 1995. – Т. 8, № 11. – С. 1697–1699.

6. Гараев, К.Г. Инвариантные краевые задачи оптимально управляемого пограничного слоя / К.Г. Гараев, В.А. Овчинников // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, № 1 (257). – С. 33–38.

7. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.

8. Овсянников, Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 238 с.

Поступила в редакцию 19 декабря 2023 г.

Сведения об авторах

Камалетдинова Дарья Ильшатовна – специалист управления информационных систем Лехема, ООО ИК «СИБИНТЕК», г. Уфа, Российская Федерация.

Лукашук Вероника Олеговна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Российская Федерация, e-mail: voluks@gmail.com.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 32–37*

DOI: 10.14529/mmph240305

SYMMETRY ANALYSIS OF THE BELLMAN EQUATION

D.I. Kamaletdinova¹, V.O. Lukashchuk²

¹ *SIBINTEK IC LLC, Ufa, Russian Federation*

² *Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation*

e-mail: voluks@gmail.com

Abstract. The optimal correction of a material point's trajectory under small perturbations is an important problem in control theory. The study of such processes can be reduced to solving a boundary value problem for a special nonlinear second-order partial differential equation known as the Bellman equation. This paper deals with a partial differential equation with quadratic nonlinearity, which is a special case of the Bellman equation. The equation contains three independent variables—one temporal and two spatial, and two arbitrary time-dependent functions as multipliers. Multidimensionality is a distinctive feature of this equation, which significantly complicates its analytical study. Therefore, we use Lie group analysis which is an effective technique to analytically study nonlinear partial differential equations. It allows the investigation of not only the symmetry properties of equations, but also to find their particular solutions. The problem of group classification for this Bellman equation is solved with respect to two arbitrary time-dependent functions. It is established that in the case of the arbitrariness of these functions, the equation admits a four-parameter group of point transformations. This group expands to five-parameter and six-parameter groups for the parametric representation and linear dependency of the functions, respectively. Several invariant solutions are also constructed.

Keywords: Bellman type equation; group of point transformations; invariant solution.

References

1. Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. *Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* (Calculus of Variations and Optimal Control). Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2006, 488 p. (in Russ.).

2. Chernousko F.L. Self-Similar Solutions of the Bellman Equation for Optimal Correction of Random Disturbances. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1971, Vol. 35, no. 2, pp. 333–342. (in Russ.).

3. Chernous'ko F.L., Kolmanovskiy V.B. *Optimal'noe upravlenie pri sluchaynykh vozmushcheniyakh* (Optimal Control for Random Disturbances). Moscow, Nauka Publ., 1978, 351 p. (in Russ.).

4. Ibragimov N.Kh. *Prakticheskiy kurs differentsial'nykh uravneniy i matematicheskogo modelirovaniya* (A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modeling). Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 332 с. (in Russ.). [Ibragimov N.H. A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modeling. Higher Education Press Limited Company, 2009, 364 p.]

5. Polyakevich A.S., Poizner B.N. Advantages of Group Analysis of Differential Equations in Solution of Some Problems of Laser System Optimum Control. *Optika atmosfery i okeana*, 1995, Vol. 8, no. 11, pp. 1697–1699. (in Russ.).

6. Garaev K.G., Ovchinnikov V.A. Invariantnye kraevye zadachi optimal'no upravlyаемого pogranichnogo sloya (Invariant Boundary Value Problems of an Optimally Controlled Boundary Layer). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2003, Vol. 44, no. 1 (257), pp. 33–38. (in Russ.).

7. Polyenin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* (Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 256 p. (in Russ.).

8. Ovsyannikov L.V. *Grupповые свойства differentsial'nykh uravneniy* (Group Properties of Differential Equations). Novosibirsk, SO AN SSSR Publ., 1962, 238 p. (in Russ.).

Received December 19, 2023

Information about the authors

Kamaletdinova Daria Ilshatovna is Specialist, Department of Information Systems Management Lexema, Sibintek, Ufa, Russian Federation.

Lukashchuk Veronika Olegovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of High Performance Computing Technologies and Systems, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation, e-mail: voluks@gmail.com.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕМАГНИТНОМ ПРОВОДЯЩЕМ ТЕЛЕ С ДЕФЕКТОМ

С.В. Марвин

Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении применительно к случаю неферромагнитного проводящего тела, находящегося в поле стороннего тока. Предполагается, что тело неоднородно по своим проводящим свойствам и, кроме того, содержит в себе объемный дефект в виде полости (непроводящую подобласть). Задача рассматривается в классической постановке: напряженности электрического и магнитного полей предполагаются непрерывно-дифференцируемыми вне границ раздела проводящих и непроводящих областей и непрерывным образом продолжаемыми на границы этих областей; при этом границы областей являются поверхностями Ляпунова. На этих поверхностях напряженности электрического и магнитного поля удовлетворяют обычным условиям сопряжения: их тангенциальные компоненты непрерывны; кроме того, на бесконечности напряженности достаточно быстро убывают. На основе указанных допущений выводятся интегро-дифференциальные уравнения для напряженностей электрического и магнитного поля; полученные интегро-дифференциальные уравнения учитывают как предполагаемую неоднородность проводника, так и наличие указанного объемного дефекта в нем. Доказывается равносильность полученных интегро-дифференциальных уравнений и исходной начально-краевой задачи для уравнений Максвелла: как для электромагнитного поля внутри проводника, так и снаружи проводящего тела.

Ключевые слова: начально-краевая задача; уравнения Максвелла; квазистационарное приближение; интегро-дифференциальные уравнения; объемный потенциал; потенциал простого слоя.

Введение

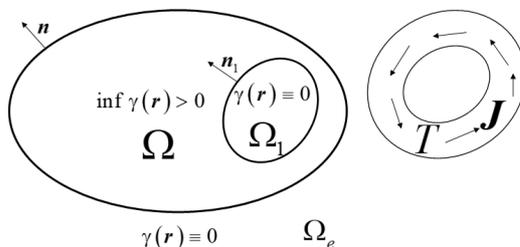
Краевые и начально-краевые задачи электродинамики применительно к проводящим средам имеют существенную прикладную значимость для электротехники, радиотехники и неразрушающего контроля. Уравнения электродинамики в интегро-дифференциальной форме более удобны, чем дифференциальные уравнения Максвелла (как для исследований общего характера, так и для конкретных численных расчетов). Поэтому не теряет актуальность вывод, исследование и решение интегро-дифференциальных уравнений для различных пространственных комбинаций материальных сред (в том числе для задач вихретоковой дефектоскопии).

Ранее были выведены и исследованы интегро-дифференциальные уравнения для неферромагнитного проводника с объемным дефектом [1–3]. Но в этих уравнениях не была использована квазистационарность, типичная для вихретоковых методов неразрушающего контроля. Для квазистационарного электромагнитного поля в неферромагнитных проводящих телах тоже были получены интегро-дифференциальные уравнения, но применительно к случаям бездефектных проводников [4, 5]. Однако в контексте вихретоковой дефектоскопии немалый интерес представляет случай неоднородного проводника с объемным дефектом-полостью – в представленной работе получена соответствующая система интегро-дифференциальных уравнений.

Вывод интегро-дифференциальных уравнений

Предположим, что проводящее тело с полостью занимает ограниченную область Ω в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 ; введем обозначение $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Полость занимает область Ω_1 , замы-

кание которой включается в Ω : $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Сторонний ток протекает только в ограниченной области T ; замыкания Ω и T не пересекаются: $\bar{\Omega} \cap \bar{T} = \emptyset$. Будем считать, что $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$ и ∂T являются поверхностями Ляпунова (символ ∂ для множества обозначает его границу). Кроме того, предположим, что $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ гомеоморфны сфере; из этого, в частности, следует, что Ω и Ω_1 объемно и поверхностно односвязны. ∂T гомеоморфна тору; из этого вытекает, что T объемна, но не поверхностно односвязна (см. рисунок).



Проводящее тело с объемным дефектом и сторонний ток

Удельная электропроводность γ проводящей подобласти $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ не зависит от времени t . Как функция пространственных координат $r = (x_1, x_2, x_3)$, $\gamma(r)$ равномерно непрерывна в $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ вместе со своими первыми производными. Кроме того, $\inf_{r \in \Omega / \bar{\Omega}_1} \gamma(r) > 0$. В точках, внешних по отношению к проводящей подобласти $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, то есть в $\Omega_1 \cup \Omega_e$, $\gamma(r) \equiv 0$ и диэлектрическая проницаемость равна 1. Рассматриваются исключительно немагнитные среды, поэтому магнитная проницаемость равна 1 во всем пространстве. Относительно плотности стороннего тока $J(r, t)$ будем предполагать, что это непрерывно дифференцируемая векторная функция $t \in [0; +\infty)$ и $r \in \bar{T}$. Кроме того, $\text{div} J \equiv 0$ и $J_n|_{\partial T} = 0$, где индекс n обозначает нормальную компоненту.

Заметим, что при отсутствии проводника в области Ω квазистационарное электромагнитное поле определялось бы по известным формулам через объемный векторный потенциал от заданного источника $J(r, t)$; такое поле называется первичным [5]. Напряженность первичного электрического поля E_0 непрерывно дифференцируема по пространственным координатам при $r \in \mathbb{R}^3$. Напряженность первичного магнитного поля H_0 непрерывна при $r \in \mathbb{R}^3$, но ее производные терпят разрыв на ∂T . Появление проводника в области Ω равносильно появлению вторичных источников в $\bar{\Omega}$, что не должно сказаться на непрерывности и гладкости итоговых напряженностей в Ω_e . Поэтому при постановке задачи от напряженности электрического поля E и напряженности магнитного поля H при $r \in \Omega_e$ мы будем требовать наличие тех же свойств непрерывности и дифференцируемости.

Кроме того, E и H должны быть непрерывно дифференцируемыми векторными функциями пространственных координат при $r \in \Omega_1$ и $r \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, а также должны быть непрерывным образом продолжаемыми на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ с каждой стороны поверхности (хотя при переходе через поверхности раздела сред могут быть разрывы). Кроме того, E и H непрерывно дифференцируемы по времени. То есть речь идет о классическом решении.

В квазистационарном случае, за пределами проводящей подобласти [4]:

$$\begin{cases} \text{div} E = 0 \\ \text{rot} E = -\mu_0 \dot{H} \\ \text{rot} H = J(r, t), r \in T \\ \text{rot} H = 0, r \in \Omega_1 \cup \Omega_e \setminus \bar{T} \end{cases}, \tag{1}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; точка над функцией обозначает ее дифференцирование по времени.

В проводящей подобласти ($r \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$) нет необходимости в уравнении с дивергенцией, потому что выводы для $\operatorname{div} E$ непосредственно вытекают из уравнений с роторами [4]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E = -\mu_0 \dot{H} \\ \operatorname{rot} H = \gamma(r) E \end{cases} \quad (2)$$

E и H на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ должны удовлетворять следующим условиям сопряжения [4]:

$$\begin{cases} E_{\tau, \text{int}} = E_{\tau, \text{ext}} \\ H_{\tau, \text{int}} = H_{\tau, \text{ext}} \end{cases}, \quad (3)$$

где индекс τ обозначает касательную компоненту вектора; индексы «int» и «ext» обозначают предельное значение соответственно изнутри и снаружи области.

Также E должна удовлетворять следующему интегральному условию на $\partial\Omega$ [4]:

$$\int_{\partial\Omega} E_{n, \text{ext}} dS = 0, \quad (4)$$

где dS – элемент площади поверхности.

Кроме того, E и H должны удовлетворять следующим предельным условиям на бесконечности:

$$\begin{cases} E = O(1/r^2), r \rightarrow +\infty \\ H = O(1/r^2), r \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad (5)$$

где $r = |r|$.

Также в постановке задачи должны фигурировать начальные условия для H :

$$H(r, 0) = h(r). \quad (6)$$

Вектор начальной напряженности электромагнитного поля $h(r)$ из физических соображений должен удовлетворять условию соленоидальности: $\operatorname{div} h(r) = 0$; тогда из уравнений (1) и (2) вытекает, что при всех $t \in [0; +\infty)$ $\operatorname{div} H(r, t) \equiv 0$ [4].

Решение начально-краевой задачи (1)–(6) – единственное, что доказывается теми же методами, которые были использованы ранее для случая однородного бездефектного проводника [4] (здесь следует обратить внимание на важную роль степеней r в условиях (5)). Кроме того, из (1)–(6) вытекают следующие равенства для H в \mathbb{R}^3 и E в $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ [6]:

$$H(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left[\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{\gamma(r') E(r', t)}{|r - r'|} dV' + \int_T \frac{J(r', t)}{|r - r'|} dV' \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E(r, t) = & -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{\gamma(r') \dot{E}(r', t)}{|r - r'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_T \frac{j(r', t)}{|r - r'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{E(r', t) \operatorname{grad} \gamma(r')}{|r - r'| \gamma(r')} dV' - \\ & - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \operatorname{grad} \oint_{\partial\Omega} \frac{\sigma(r')}{|r - r'|} dS' - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \operatorname{grad} \oint_{\partial\Omega_1} \frac{\sigma_1(r')}{|r - r'|} dS', \end{aligned} \quad (8)$$

где dV – элемент объема; штрих указывает на переменную, по которой производится интегрирование; ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; σ и σ_1 – поверхностная плотность вторичных источников, соответственно, на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$. Заметим, что слагаемые в (7) и (8), содержащие интегралы от J , определяют напряженности первичного поля H_0 и E_0 соответственно. Также заметим, что в силу (7) H , по существу, является исключенной неизвестной: H выражается через E . А систему уравнений следует решать для E , σ и σ_1 .

Уравнения для σ и σ_1 можно вывести, исходя из граничных условий [4], которые, как следствие, вытекают из (1)–(3): $n E_{\text{int}} = 0$ и $n_1 E_{\text{ext}} = 0$, где n и n_1 – внешние единичные нормали со-

ответственно для $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ (см. рисунок). В силу формул для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя [6]:

$$\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\gamma(r') n(r) \dot{E}(r', t)}{|r-r'|} dV' + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \int_T \frac{n(r) \dot{J}(r', t)}{|r-r'|} dV' + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{E(r', t) \text{grad } \gamma(r')}{|r-r'|^3 \gamma(r')} (r-r') n(r) dV' -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\sigma(r')}{|r-r'|^3} (r-r') n(r) dS' - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega_1} \frac{\sigma_1(r')}{|r-r'|^3} (r-r') n(r) dS' + \sigma(r) = 0, r \in \partial\Omega; \quad (9)$$

$$\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\gamma(r') n_1(r) \dot{E}(r', t)}{|r-r'|} dV' + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \int_T \frac{n_1(r) \dot{J}(r', t)}{|r-r'|} dV' + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{E(r', t) \text{grad } \gamma(r')}{|r-r'|^3 \gamma(r')} (r-r') n_1(r) dV' -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\sigma(r')}{|r-r'|^3} (r-r') n_1(r) dS' - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega_1} \frac{\sigma_1(r')}{|r-r'|^3} (r-r') n_1(r) dS' - \sigma_1(r) = 0, r \in \partial\Omega_1. \quad (10)$$

В знаках (9) и (10) учтено, что для $\partial\Omega$ речь идет о пределе изнутри, а для $\partial\Omega_1$ – снаружи. В отличие от ранее полученных уравнений для немагнитных бездефектных проводников [4, 5], в (8)–(10) совокупно учтены неоднородность и дефектность (присутствуют соответствующие объемные и поверхностные вторичные источники), и одновременно с этим исключена H , что, очевидно, упрощает решение. Непосредственным дифференцированием, с использованием свойств объемных и поверхностных потенциалов, доказывається, что решение (7)–(10) удовлетворяет не только уравнениям (2) при $r \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, но также уравнениям (1) при $r \notin \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ и граничным условиям (3).

Условие (4) для nE_{ext} равносильно следующему:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma dS = 0. \quad (11)$$

У σ и σ_1 есть конкретный физический смысл: это поверхностные плотности зарядов, индуцируемых на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ соответственно (делитель $4\pi\varepsilon_0$ в (8) делает это соответствие не пропорциональным, а буквальным). Таким образом, условие (4) – это условие электронейтральности внешней поверхности проводника $\partial\Omega$ (заметим, что для $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ и для $\partial\Omega_1$ электронейтральность следует из самих уравнений и граничных условий, так что ее не нужно отдельно требовать). Уравнения (8) и (9) сами по себе содержат неоднозначность, связанную с σ [7]: к σ можно прибавить любое равновесное распределение зарядов на $\partial\Omega$ – условие (11) эту неоднозначность устраняет.

Из (2) и (6) следуют начальные условия для E в $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$:

$$E(r, 0) = \frac{1}{\gamma(r)} \text{rot } h(r). \quad (12)$$

Уравнения (8)–(10) удобны тем, что их достаточно решить для $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ при условиях (11) и (12): тогда E в Ω_1 и Ω_e определяется из (8) прямым интегрированием (можно найти E , например, на каком-либо измерительном контуре в Ω_e). Так как $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ являются поверхностями Ляпунова, на (8)–(10) распространяются все основные теоремы, касающиеся интегральных уравнений со слабой особенностью [7]. Н можно найти прямым интегрированием в (7).

Заметим, что выражение (8) для E содержит не только производные от объемных потенциалов и потенциалов простого слоя, но и непродифференцированные объемные потенциалы (первая пара слагаемых в правой части). В общем случае при $r \rightarrow +\infty$ для объемного потенциала гарантирована асимптотика $O(1/r)$, но не $O(1/r^2)$. Покажем, что тем не менее условие (5) для (8) выполняется (в ранее рассмотренных случаях бездефектных проводников [4, 5] этому внимание не уделялось).

По условию J как функция пространственных координат имеет нулевую дивергенцию в T и нулевую нормальную составляющую на границе T ; очевидно, такими же свойствами обладает

\dot{J} . γE и $\gamma \dot{E}$ обладают аналогичными свойствами в $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. Для односвязных областей с гладкими границами, гомеоморфными сфере или тору, доказано, что любое такое поле представимо в виде $\text{rot } w$, где $\text{div } w = 0$ и на границе области $w_\tau = 0$ [8]. Преобразуем интеграл из второго слагаемого в правой части (8) (для первого слагаемого преобразования выполняются аналогично):

$$\begin{aligned} \int_T \frac{\dot{J}(r', t)}{|r-r'|} dV' &= \int_T \frac{\text{rot}_{r'} w(r', t)}{|r-r'|} dV' = \int_T \text{rot}_{r'} \left(\frac{w(r', t)}{|r-r'|} \right) dV' - \int_T \left[\text{grad}_{r'} \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \times w(r', t) \right] dV' = \\ &= \oint_{\partial T} \frac{[n_T(r) \times w_\tau(r', t)]}{|r-r'|} dS' + \int_T \left[\text{grad}_r \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \times w(r', t) \right] dV' = \int_T \text{rot}_r \left(\frac{w(r', t)}{|r-r'|} \right) dV' = \text{rot} \int_T \frac{w(r', t)}{|r-r'|} dV', \end{aligned}$$

где индекс у дифференциальной операции указывает на переменную, по которой происходит дифференцирование; n_T – внешняя единичная нормаль к T . Таким образом, рассматриваемый интеграл может быть представлен, как ротор от объемного потенциала, и тогда асимптотика $O(1/r^2)$ гарантирована.

Заключение

Несомненную актуальность представляет обобщение полученных результатов, во-первых, на ферромагнитные проводники и, во-вторых, на проводящие тела с негладкими границами (с возможным переопределением функциональных классов, в которых ставится задача, с отказом от классического решения и переходом к решению обобщенному). Это станет предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Дякин, В.В. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле / В.В. Дякин, В.А. Сандовский. – Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. – 389 с.
2. Марвин, С.В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела / С.В. Марвин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 1. – С. 105–117.
3. Марвин, С.В. Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока / С.В. Марвин // Дефектоскопия. – 2016. – № 2. – С. 42–54.
4. Тозони, О.В. Расчет трехмерных электромагнитных полей / О.В. Тозони, И.Д. Маергойз. – Киев: Техника, 1974. – 352 с.
5. Тозони, О.В. Метод вторичных источников в электротехнике / О.В. Тозони. – М.: Энергия, 1975. – 295 с.
6. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
7. Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 416 с.
8. Быховский, Э.Б. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / Э.Б. Быховский, Н.В. Смирнов // Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости: сборник работ, Тр. МИАН СССР. – 1960. – Т. 59. – М.–Л.: Изд-во АН СССР. – С. 5–36.

Поступила в редакцию 9 февраля 2024 г.

Сведения об авторе

Марвин Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент департамента информационных технологий и автоматизации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: s.v.marvin@yandex.ru.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR A QUASI-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD IN A NONMAGNETIC CONDUCTIVE BODY WITH A DEFECT**S.V. Marvin**Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg,
Russian Federation

E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

Abstract. The initial-boundary value problem (IBVP) for the system of Maxwell's equations for a quasi-stationary approximation is considered in relation to a non-ferromagnetic conductive body in the field of an external current. It is assumed, that the body is not homogeneous in its conductive properties and includes a volume defect in the form of a cavity (a non-conductive subdomain). The IBVP is considered in the classical formulation: the tensions of the electric and magnetic fields are supposed to be continuously derivatively outside the boundary between conductive and non-conductive domains, and continuous at the boundaries of these domains; in this case, the boundaries of the domains are Lyapunov surfaces. On these surfaces, the usual boundary conditions for the tensions of electric and magnetic field must be satisfied: their tangential components are continuous. In addition, tensions decrease quickly at infinity. Based on these assumptions, integro-differential equations for the tensions of electric and magnetic field are derived. These equations take into account the inhomogeneity of the conductor and the presence of the internal defect. The equivalence of the integro-differential equations and the IBVP for the system of Maxwell's equations is proved for the electromagnetic field inside and outside the conductor.

Keywords: initial-boundary value problem; Maxwell's equations; quasi-stationary approximation; volume potential; simple layer potential.

References

1. Dyakin V.V., Sandovskiy V.A. *Zadachi elektrodinamiki v nerazrushayushchem kontrole* (Electrodynamics Problems in the Nondestructive Testing). Ekaterinburg, IFM UrO RAN Publ., 2008, 389 p. (in Russ.).
2. Marvin S.V. Existence and the Uniqueness of Solution of Initial-Boundary Problem for the Uniform System of Equations of Maxwell in the Case of Nonferromagnetic Defective Metallic Body. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 105–117. (in Russ.).
3. Marvin S.V. An Initial-boundary Value Problem of Structurescopy of a Nonferromagnetic Metal Solid with Foreign Dielectric Inclusions using the Residual Field of an Instantaneously Cut-off Extraneous Current. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2016, Vol. 52, no. 2, pp. 85–94. DOI: 10.1134/S1061830916020054
4. Tozoni O.V., Maergoyz I.D. *Raschet trekhmernykh elektromagnitnykh poley* (Calculation of Three-Dimensional Electromagnetic Fields). Kiev, Tekhnika Publ., 1974, 352 p. (in Russ.).
5. Tozoni O.V. *Metod vtorichnykh istochnikov v elektrotekhnike* (Secondary Sources Method in the Electrical Engineering). Moscow, Energiya Publ., 1975, 295 p. (in Russ.).
6. Kochin N.E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya* (The Vector Calculus and Basics of the Tensor Calculus). Moscow, Nauka Publ., 1965, 426 p. (in Russ.).
7. Gyunter N.M. *Teoriya potentsiala i ee primeneniye k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki* (The Theory of Potential and its Applications in Problems of the Mathematical Physics). Moscow, GITTL Publ., 1953, 416 p. (in Russ.).
8. Bykhovskiy E.B., Smirnov N.V. Ob ortogonal'nom razlozhenii prostranstva vektor-funktsiy, kvadrachno summiruemykh po zadannoy oblasti, i operatorakh vektornogo analiza (About Vector-Functions Space Orthogonal Decomposition, which Quadratically Summed in a Specified Domain, and

Математика

the Vector Analysis Operators). Matematicheskie voprosy gidrodinamiki i magnitnoy gidrodinamiki dlya vyazkoj neszhimaemoy zhidkosti: sbornik rabot, Tr. MIAN SSSR, 1960, Vol. 59, Moscow, Leningrad: Izd-vo AN SSSR Publ., pp. 5–36. (in Russ.).

Received February 9, 2024

Information about the author

Marvin Sergey Vladimirovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Information Technologies and Automation, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: s.v.marvin@yandex.ru.

ON A NEW LIQUID FILTRATION MODEL

N.N. Solovyova¹, E.A. Soldatova¹, Y.A. Mezaal²

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

² Al-mustansiriya university, Baghdad, Iraq

E-mail: solovevann@susu.ru

Abstract. This paper studies the model of blood circulation in human lower extremities by Penkovsky and Korsakova. To more precisely study the dynamics, the common case of a mathematical model was considered without neglecting vessel elasticity, and taking into account different vascular conductivity. The model was adapted to new conditions by taking into account additional factors and adding new variables. The analogy between the mathematical model and the mathematical elastic-filtration hydraulic seam fracture model is emphasized. The mathematical apparatus for hydraulic flow design is also applicable to the description of blood flow. The important role of positive solutions was taken into account in the model. Such characteristics as vascular wall resistance, blood speed and pressure, speed and pressure profiles, and muscle pump performance speed do not involve negative solutions. It is critical to understand the physical sense of the values of variables in terms of the model, using physiologically correct data and to obtain realistic and applicable results for further forecasting and optimization and for the use of positive solutions providing more stable and efficient computations. A solution for such a model modification can be used for debugging and testing numerical methods, without a direct physiological analogy.

Keywords: blood circulation in human lower extremities; positive confluent holomorphic operator groups; Sobolev type linear equations; positive solutions.

Setting up a problem

While preserving succession with the previous studies [1], the focus of researchers' attention for the recent years has come back to the positivity of operator semi-groups, and to physically significant models, arising from the certain applications for positive solutions of operator equations [2–4]. Indeed, as a rule, we mean the absence of physical sense when we receive negative or imaginary values of the variable concerned, which should be positive by sense: number of people, material volumes, amount of fluid, speed, pressure, market trends forecasting at economic processes simulation, population theory, fragmentation processes, linear transport theory, kinetic theory, birth and death rate-like systems, etc.

It should be noted that the line of papers describing a new liquid filtration model, the model of blood circulation in human lower extremities, is available for today. Let us enlarge on the paper in which it is represented. Namely, the paper [5] describes the mathematical model of blood circulation in human lower extremities, based on laws of motion (filtration) and viscous fluid preservation in heterogeneous medium:

$$\frac{k_i}{\mu} \Delta p_i = \beta_i \frac{\partial p_i}{\partial t} + q_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

where $\beta_i = \frac{dm_i}{dp_i}$, Δ , p_i , k_i , μ are compressibility coefficients of the embedded media pore space (vascular network elasticity), laplacian operator, pressure, media permeability and fluid viscosity, respectively.

By the embedded media, the authors [5] mean the arterial medium and the venous medium. Their pore space is composed by vessels of various diameter, providing blood overflow: numerous arteries and numerous small capillaries, passing into larger veins. Speed of blood overflow in vascular beds is proportional to the pulse pressure, blood overflow unit volumes in vascular systems are preserved, specifically, due to capillary exchange between media. The model characteristics are their vascular conductivity and elasticity.

The authors of the aforementioned paper earlier offered a model of closed blood circulation in human brain tissues [6]

$$-\beta_1 \frac{\partial S^+}{\partial t} + \Delta S^+ = 0; \quad -\beta_1 \frac{\partial S^-}{\partial t} + \Delta S^- - 2\eta_1 S^- = 0; \quad (S^\pm(x, t) = p_a \pm p_v),$$

based on solid heterogeneous porous medium methods. Continuing such reasoning, we can draw some analogy of the concerned mathematical model of blood circulation in human lower extremities with the mathematical elastic-filtration hydraulic seam fracture model is emphasized

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p) = \Delta p, \quad p_2 = p - \eta \Delta p.$$

The relatively large vessels (arterioles) should be considered as a sparse system of rather large fissures; and small capillaries, passing into larger veins, should be considered as a system of finely-porous units. Increase in total volume of fractures leads to decrease in units porosity (condition of pore volumes strain compatibility), which causes the media permeability value change. In totality of the aforementioned, we have an equation similar to the diffusivity equation, describing the elastic filtration mode.

The authors, V.I. Penkovsky and N.K. Korsakova obtained the time-periodic problem solution without initial conditions for the system of differential parabolic equations, corresponding to harmonic vibrations, determined by cardiac rhythm. They found analytical problem solutions, having considered the particular cases: 1) with permanent muscular tissue section area, proportional to specific flows and overflow values (gravity was absent); 2) at rigid mode of blood circulation in arterial and venous beds with the bent section function (zero arteriole elasticity). They provided the numerical solution of the one-dimensional problem, aligned with the results of analytical solutions.

Unlike the authors of the initial paper, for more exact study of the dynamics of process of blood circulation in human lower extremities, we plan considering the mathematical model in common case, without neglecting vascular elasticity and various vascular conductivity; in addition, the ambitious plan is to take into account the gravity further. Further, it will be also possible to analyze the model with regard of adding the following important physiological parameters: vessel resistance, volumetric blood flow, gas and nutrient metabolism, and to check the modified model against experimental data or real-time observations for efficiency confirmation.

Modified blood circulation model

There exist the sufficient number of the one-dimensional haemodynamics model modifications. Both earlier and existing models and the model to which this paper is dedicated, are based on real-time measurement data or physiological data close to them. Blood pulsation in veins, vascular wall resistance, speed and pressure in them, speed and pressure profiles, muscle pump performance speed, blood circulation volume, other parameters and haemodynamic significance indicators do not involve negative values. The mathematical apparatus for modelling systems using these characteristics, in their extraordinary majority as a result also involves non-negative (positive) solutions.

Let us consider the system arising from (1), assuming that arteries and veins have various elasticity and vascular conductivity:

$$\begin{cases} -\beta_1 \frac{\partial h_a}{\partial t} + \frac{1}{s(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial h_a}{\partial z} \right) = \eta_1 (h_a - h_v), \\ -\beta_2 \frac{\partial h_v}{\partial t} + \frac{1}{s(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial h_v}{\partial z} \right) = \eta_2 (h_a - h_v), \\ \left\{ \begin{aligned} -\frac{dm_1}{dp_a} \frac{\partial (p_a - \rho gz)}{\partial t} + \frac{1}{s(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial (p_a - \rho gz)}{\partial z} \right) &= \frac{\alpha}{k_1 \mu} (p_a - p_v), \\ -\frac{dm_2}{dp_v} \frac{\partial (p_v - \rho gz)}{\partial t} + \frac{1}{s(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial (p_v - \rho gz)}{\partial z} \right) &= -\frac{\alpha}{k_1 \mu} (p_a - p_v), \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Without regard of the vessel joint deformation condition, the system below is subject to linearization

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{dm_1}{dp_a} \frac{\partial (p_a - \rho gz)}{\partial t} + \frac{1}{q_a} \left(-\frac{\partial (p_a - \rho gz)}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial (p_a - \rho gz)}{\partial z} \right) &= \frac{\alpha}{k_1 \mu} (p_a - p_v), \\ -\frac{dm_2}{dp_v} \frac{\partial (p_v - \rho gz)}{\partial t} + \frac{1}{q_v} \left(-\frac{\partial (p_v - \rho gz)}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial (p_v - \rho gz)}{\partial z} \right) &= -\frac{\alpha}{k_1 \mu} (p_a - p_v), \end{aligned} \right.$$

Let us take into account the transformation of media permeability value. Let us emphasize that the porosity change is low compared to initial values, and the permeability value varies significantly. Along with that, blood pulsations in veins are negligible compared to pulsations in arteries, so it is important to provide physiologically correct pressure drop between them as well. Taking the above into consideration, we will receive the following system:

$$\begin{cases} \frac{1}{s(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(s(z) \frac{\partial (p_a - \rho g z)}{\partial z} \right) = \frac{\alpha}{k_1 \mu} (p_a - p_v), \\ -\frac{dm_2}{dp_v} \frac{\partial (p_v - \rho g z)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{k_1 \mu} (p_a - p_v), \end{cases}$$

Indices 1 and 2 will indicate the parameters in the environment of arteries and veins, respectively. The, the modified model in initial designations will look as follows:

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\mu} \Delta p_a = \frac{\alpha}{\mu} (p_a - p_v), \\ \beta_2 \frac{\partial p_v}{\partial t} = \frac{\alpha}{\mu} (p_a - p_v). \end{cases}$$

Conclusion

Such model adaptation with the set limit and initial conditions, not inconsistent with reason, and setting the limited range of parameter values, safe for human body, reinforces the significance of positive solution methods development. Requires representation in the form of the Sobolev type equation. Claims further research in the issues of optimal positive decision management. Such solution may have no direct physiological analogy, but it can be used for numerical methods debugging and testing.

Gratitude

The research was carried out at the expense of the grant from the Russian Science Foundation no. 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>.

References

1. Bogatov E.M. On the History of the Positive Operators (1900s – 1960s) and the Contribution of M.A. Krasnosel'skii. Applied Mathematics & Physics, 2020, Vol. 52, Iss. 2, pp. 105–127. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-105-127
2. Banasiak J., Arlotti L. Perturbations of Positive Semigroups with Applications, Springer-Verlag, London Limited, 2006, 438 p. DOI: 10.1007/1-84628-153-9
3. Zagrebina, S.A., Solovyova, N.N. Positive Degenerate Holomorphic Groups of the Operators and Their Applications. In: Banasiak, J., Bobrowski, A., Lachowicz, M., Tomilov, Y. (eds) Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2020, Vol. 325, pp. 95–109. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_6
4. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Konkina A.S. Modified Transport Flow at the Crossroads. *OP&PM Surveys on Applied and Industrial Mathematics*, 2020, Vol. 27, no. 1, pp. 29–30.
5. Pen'kovskiy V.I., Korsakova N.K. Modeli gidravlicheskogo razryva plasta i tsirkulyatsii krovi v mozge na osnove mekhaniki i fil'tratsii v geterogennykh sredakh (Models of Hydraulic Fracturing and Blood Circulation in the Brain Based on Mechanics and Filtration in Heterogeneous Media). XIV Vse-rossiyskiy seminar «Dinamika Mnogofaznykh Sred», priurochenny k 75-letiyu akademika RAN Fomina V.M., 2–5 noyabrya 2015 g (Proc. XIV All-Russian Seminar Dynamics of Multiphase Media", dedicated to the 75th anniversary of Academician V.M. Fomin, November 2–5, 2015), Novosibirsk: ITPM SO RAN Publ., 2015, pp. 73–75. (in Russ.).
6. Korsakova N., Pen'kovskij V., Shilova A., Shevchenko V. Model of Blood Circulation in the Cerebral Cortex on the Theory of Fluid Flow in Heterogeneous Medium. Series on Biomechanics, 2016, Vol. 30, no. 2, pp. 24–31.

Received July 12, 2024

Information about the authors

Solov'yeva Natal'ya Nikolaevna is Senior Lecturer, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: solovevann@susu.ru.

Soldatova Ekaterina Aleksandrovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: soldatovaea@susu.ru.

Mezaal Yasir Ali is Al-mustansiriya university, Baghdad, Iraq, e-mail: yaser_ali_84@yahoo.com.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 45–49*

УДК 517.9

DOI: 10.14529/mmph240307

О НОВОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Н.Н. Соловьёва¹, Е.А. Солдатова¹, Я.А. Мезал²

¹ Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

² Аль-Мустансирия университет, г. Багдад, Ирак

E-mail: solovevann@susu.ru

Аннотация. Представлено исследование модификации модели циркуляции крови в нижних конечностях человека В.И. Пеньковского, Н.К. Корсаковой. С целью более точного исследования динамики процесса рассмотрен общий случай математической модели: без пренебрежения эластичностью сосудов, а также включая во внимание разную проводимость их русел. Адаптация модели к новым условиям произведена посредством учета дополнительных факторов, добавления новых переменных. Подчеркивается аналогия рассматриваемой математической модели с математической упруго-фильтрационной моделью гидравлического разрыва пласта. Развитый математический аппарат моделирования гидродинамических течений применим и к описанию кровотока в сосудах. При данной модификации модели учтена большая роль позитивных решений. Такие характеристики, как пульсации крови в венах, сопротивление стенок сосудов, скорости и давления в них, профили скоростей и давлений, частота работы мышечного насоса не подразумевают отрицательного контекста решений. Важно понимать, каков физический смысл значений переменных в рамках конкретной модели, используя физиологически корректные данные, получать реалистичные и применимые результаты для дальнейшего прогнозирования и оптимизации, а при использовании позитивных решений – обеспечивать более стабильные и эффективные вычисления. Решение для подобной модификации модели может быть использовано для отладки и тестирования численных методов, при отсутствии прямой физиологической аналогии.

Ключевые слова: циркуляция крови в нижних конечностях человека; позитивные вырожденные голоморфные группы операторов; линейные уравнения соболевского типа; позитивные решения.

Литература

1. Богатов, Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е – 1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского / Е.М. Богатов // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, Вып. 2. – С. 105–127.
2. Banasiak, J. Perturbations of Positive Semigroups with Applications / J. Banasiak, L. Arlotti. – Springer-Verlag, London Limited, 2006. – 438 p.
3. Zagrebina, S.A. Positive Degenerate Holomorphic Groups of the Operators and Their Applications / Zagrebina S.A., N.N. Solovyova // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. – 2020. – P. 95–109.
4. Sviridyuk, G.A. Modified Transport Flow at the Crossroads / G.A. Sviridyuk, S.A. Zagrebina, A.S. Konkina // Обозрение Прикладной и Промышленной Математики. – 2020. – Т. 27, № 1. – С. 29–30.

5. Пеньковский, В.И. Модели гидравлического разрыва пласта и циркуляции крови в мозге на основе механики и фильтрации в гетерогенных средах / В.И. Пеньковский, Н.К. Корсакова // XIV Всероссийский семинар «Динамика многофазных сред», приуроченный к 75-летию академика РАН Фомина В.М., 2–5 ноября 2015 г. – Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2015. – С. 73–75.

6. Model of Blood Circulation in the Cerebral Cortex on the Theory of Fluid Flow in Heterogeneous Medium / N. Korsakova, V. Pen'kovskij, A. Shilova, V. Shevchenko // Series on Biomechanics. – 2016. – Vol. 30, no. 2. – P. 24–31.

Поступила в редакцию 12 июля 2024 г.

Сведения об авторах

Соловьёва Наталья Николаевна – старший преподаватель, кафедры «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: solovevann@susu.ru.

Солдатова Екатерина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: soldatovaea@susu.ru.

Мезал Ясир Али Мезал – Аль-Мустансирия университет, г. Багдад, Ирак, e-mail: yaser_ali_84@yahoo.com.

ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ «ПЛЕНКА (Ti)/(СИЛУМИН) ПОДЛОЖКА», ОБЛУЧЕННОЙ ИМПУЛЬСНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Д.В. Загуляев¹, Ю.Ф. Иванов², О.С. Толкачев², В.В. Шляров¹, Ю.А. Шлярова¹

¹ Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк, Российская Федерация

² Институт сильноточной электроники СО РАН, г. Томск, Российская Федерация
E-mail: zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru

Аннотация. Обработка поверхности металлов электронным пучком представляет собой многогранный метод, включающий применение интенсивных импульсных электронных пучков для улучшения поверхностных свойств различных материалов в широком спектре. Обширные исследования показали, что использование этого подхода может привести к заметному снижению шероховатости и пористости поверхности, а также к заметному повышению прочности на растяжение и пластичности. Кроме того, было замечено, что обработанные образцы обладают улучшенными характеристиками, такими как твердость, износостойкость и коррозионные свойства, что подчеркивает эффективность электронно-пучковой обработки поверхности в материаловедении.

В данной работе установлено, что облучение системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка» приводит к трансформации как пленки титана, так и прилегающего слоя силумина с разной плотностью энергии, что оказывает различное влияние на структуру и состав. При обработке электронным пучком при плотности энергии 30 Дж/см² титановая пленка и прилегающий слой силумина подвергаются полному растворению, в результате чего образуется сложная субмикроннокристаллическая структура, характеризующаяся присутствием частиц кремния, распределенных по границам зерен. Облучение электронным пучком системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка» при разных плотностях энергии (10, 15, 30 Дж/см²) приводит к изменению морфологии поверхности, размера кристаллитов и фазового состава, а повышение плотности энергии приводит к плавлению пленки титана и прилегающего слоя силумина.

Ключевые слова: силумин; титан; система «пленка/подложка»; импульсный электронный пучок; элементный и фазовый состав; дефектная субструктура.

Введение

Электронно-пучковая обработка (ЭПО) поверхности широко изучена и используется для изменения поверхностных свойств различных материалов. А. Панин и др. использовали обработку электронным пучком для уменьшения ширины игольчатой α -фазы и увеличения объемной доли β -фазы в композите с титановой матрицей [1]. С. Басак с соавторами обсуждали улучшение твердости, износостойкости и коррозионной стойкости аустенитной нержавеющей стали 316L за счет ЭПО поверхности [2]. Коллектив под руководством С. Валькова в одной из своих работ обобщил использование технологий ЭПО для модификации поверхности металлов и сплавов [3, 4]. Наблюдалось улучшение коррозионной стойкости сплава на основе Mg–Sn с выделениями Mg₂Sn за счет импульсной обработки электронным пучком [5].

Важным фактором при использовании технологий ЭПО является плотность энергии пучка электронов. Было показано влияние плотностей энергии электронного пучка на морфологию поверхности и свойства при растяжении сплава Al–Mg, изготовленного методом аддитивного производства [6]. Исследования показали, что использование обработки электронным пучком с различной плотностью энергии (5, 10, 15 Дж/см²) приводит к улучшению четкости границ зерен, уменьшению межзеренных трещин, а также оптимальной кристаллизации и прочности на разрыв

для сплава Al-Mg. С. Вальков с соавторами продемонстрировали влияние мощности пучка электронов на структуру, шероховатость поверхности и коррозионные свойства обработанных электронным лучом сплавов Co-Cr-Mo [7]. Также этим научным коллективом был продемонстрирован метод дуплексной модификации поверхности, включающий нанесение покрытия WN с последующей электронно-лучевой обработкой поверхности из быстрорежущей инструментальной стали R18. Таким образом, в работах показано, что ЭПО оказывает влияние на поверхностные слои обрабатываемых материалов, приводя к изменению структуры и, как следствие, к изменению физико-механических характеристик. Очевидно, что применение ЭПО поверхности металлов и сплавов является важной и активной областью исследований, охватывающей широкий спектр материалов. Эта исследовательская деятельность обусловлена множеством преимуществ технологии ЭПО по сравнению с традиционными методами обработки. К ним можно отнести:

- точный контроль: технология позволяет точно контролировать уровень фокусировки, интенсивность мощности луча и отклонение, обеспечивая точную регулировку по площади поверхности;
- автоматизированный процесс: машины для электронно-пучковой обработки поверхности полностью автоматизированы, что обеспечивает точную повторяемость и полную отслеживаемость соответствующих параметров в процессе модификации;
- низкое тепловложение: метод работает с чрезвычайно низким тепловложением, сводя к минимуму искажения и обеспечивая при этом предсказуемые свойства поверхности;
- универсальность: обеспечивает широкий спектр методов, таких как закалка, структурирование поверхности, гравировка и полировка, все из которых могут быть интегрированы в одну систему для эффективного использования;
- условия высокого вакуума: процесс происходит в условиях высокого вакуума в рабочей камере, что положительно влияет на материал за счет уменьшения потенциальных пор или других дефектов;
- энергоэффективность: электронно-лучевое отверждение потребляет меньше энергии (всего 10 % термического отверждения) и обеспечивает более быстрое время отверждения по сравнению с методами термического отверждения;
- снижение внутренних напряжений: отверждение при температуре окружающей среды при электронно-пучковой обработке снижает внутренние напряжения, что делает его пригодным для производства деталей с высокими требованиями к производительности;
- управление процессом: позволяет точно контролировать степень отверждения в различных местах продукта, улучшая контроль процесса и качество.

Сплавы Al-Si привлекли значительное внимание благодаря их широкому спектру применения в различных отраслях промышленности, таких как автомобилестроение, аэрокосмическая промышленность и производство биоматериалов. Однако, несмотря на это, до сих пор сохраняется высокий интерес к данным сплавам, не только с практической, но и с научной точки зрения. Проведены исследования доэвтектических сплавов Al-Si-Cu, в частности $AlSi_8Cu_3$ и $AlSi_6Cu_4$, с использованием термического анализа производных [8]. Эти сплавы продемонстрировали потенциал для дисперсионного упрочнения. Исследования позволили установить, что правильный выбор температуры в процессе термообработки сплавов Al-Cu помогает определить характерные точки и средние изменения размера фаз меди после растворения при различных температурах. Для сплавов Al-Cu температура раствора составляет 548 °C, а для сплавов $AlSi_8Cu_3$ и $AlSi_6Cu_4$ – 490 °C и 488 °C соответственно. В работах [9, 10] заэвтектические сплавы Al-Si облучались сильноточным импульсным электронным пучком. Сообщалось, что обработка сильноточным импульсным электронным пучком расширила и сместила дифракционные пики Al и Si. Уменьшение параметров решетки алюминия связано с образованием в жидком слое пересыщенного твердого раствора алюминия. Износостойкость обработанного сплава повысилась в 9 раз, что может быть связано с образованием метастабильных структур. Ф. Мао и др. разработали кинетическую модель, основанную на теории зарождения и роста, для прогнозирования свойств при литье и термообработке сплавов Al-Si-Cu-Mg [11]. Это исследование подчеркивает важность понимания процесса термообработки для оптимизации свойств сплавов Al-Si для конкретных применений. Проведены исследования влияния фаз Al_3FeSi на растрескивание отливок из сплавов Al-Si, подчеркивающие необходимость решения потенциальных проблем, которые могут возникнуть в ус-

ловиях эксплуатации компонентов, изготовленных из этих сплавов [12]. В целом литература свидетельствует о том, что сплавы Al-Si имеют большие перспективы для широкого спектра применений и дальнейшие исследования состава сплавов, процессов термообработки и механических свойств необходимы для полного использования потенциала этих материалов в различных отраслях промышленности.

Целью настоящей работы являлось исследование эволюции системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка», облученной импульсным электронным пучком в режиме твердофазного и жидкофазного растворения титана в силумине доэвтектического состава.

Материал и методика исследования

В качестве материала исследования был использован силумин доэвтектического состава марки АК5М2 (Al-(4-6)Si-(1,5-3,5)Cu-(0,2-0,8)Mg-(0,2-0,8)Mn-(0,05-0,2)Ti-(до 1,5)Zn-(до 1,3)Fe-(до 0,5)Ni). Образцы имели форму параллелепипеда с размерами $4 \times 12 \times 130$ мм. Имитация трещины (концентраторы напряжений) в центральной части образца осуществлялась двумя надрезами в виде полуокружности радиусом 20 мм. Образцы в областях концентраторов напряжений подвергались механической шлифовке наждачными бумагами с уменьшающейся дисперсностью частиц абразива. После шлифования на бумагах проводили полировку образцов алмазной пастой с частицами абразива размерностью до 1 мкм (до придания зеркального блеска). Подготовку поверхности в области концентратора напряжений осуществляли с целью уменьшения шероховатости поверхности, поскольку известно, что при циклических нагрузках разрушение деталей связано с развитием усталостных трещин, возникающих непосредственно в поверхностном слое. Поверхностную обработку силумина осуществляли в два этапа. На первом этапе на поверхность образцов силумина наносили пленку титана толщиной 5 мкм. Пленку титана осаждали из плазмы, образующейся при вакуумном плазменно ассистированном (плазма аргона) электродуговом распылении катода из технически чистого титана марки ВТ1-0. Формирование пленки титана осуществляли на установке «КВИНТА» (ИСЭ СО РАН) [13]. На втором этапе проводили облучение системы «пленка (Ti)/(АК5М2) подложка» импульсным электронным пучком при следующих условиях: энергия ускоренных электронов – 18 кэВ, плотность падающей энергии пучка электронов – (10, 15, 30) Дж/см², длительность импульса облучения – 200 мкс, количество импульсов – 3, частота следования импульсов – 0,3 с⁻¹, давление остаточного газа (аргон) в рабочей камере установки – 0,02 Па. Облучение осуществляли на установке «СОЛО» (ИСЭ СО РАН) [13]. Выбор режима облучения был обусловлен результатами работ, представленных в [14], из которых следует, что при плотности энергии пучка электронов $E_S = 10$ Дж/см² система «пленка (Ti)/(силумин) подложка» находится в твердофазном состоянии, т. е. облучение не приводит к плавлению пленки титана, и прилегающего к ней слоя силумина. При $E_S = 15$ Дж/см² плавится прилегающий к пленке титана слой силумина, сама пленка не плавится. При $E_S = 30$ Дж/см² плавится и пленка титана, и прилегающий к ней слой силумина. Исследование структуры и элементного состава образцов силумина осуществляли методами электронной сканирующей (прибор Philips SEM-515 с микроанализатором EDAX ECON IV) и просвечивающей дифракционной (прибор JEM 2100F, JEOL) микроскопии.

Результаты исследования и их обсуждение

Структура силумина доэвтектического состава, в том числе и силумина марки АК5М2, в литом состоянии представлена зернами алюминия, зернами эвтектики Al-Si, а также включениями различной морфологии, элементного и фазового состава [15]. Следуя элементному составу, представленному выше, основной составляющей структуры силумина марки АК5М2 являются зерна твердого раствора на основе алюминия.

Облучение системы «пленка (Ti)/(силумина) подложка» импульсным электронным пучком при $E_S = 10$ Дж/см² не приводит к видимому изменению морфологии пленки титана (рис. 1, а).

При $E_S = 15$ Дж/см² наблюдается частичное разрушение пленки титана и формирование структуры островкового типа (рис. 1, б, в). Островки обогащены атомами алюминия, основным химическим элементом поверхности образца является титан. При $E_S = 30$ Дж/см² островковая структура поверхностного слоя сохраняется. В этом случае островки обогащены атомами титана, а основным химическим элементом поверхности образца является алюминий (рис. 1, г).

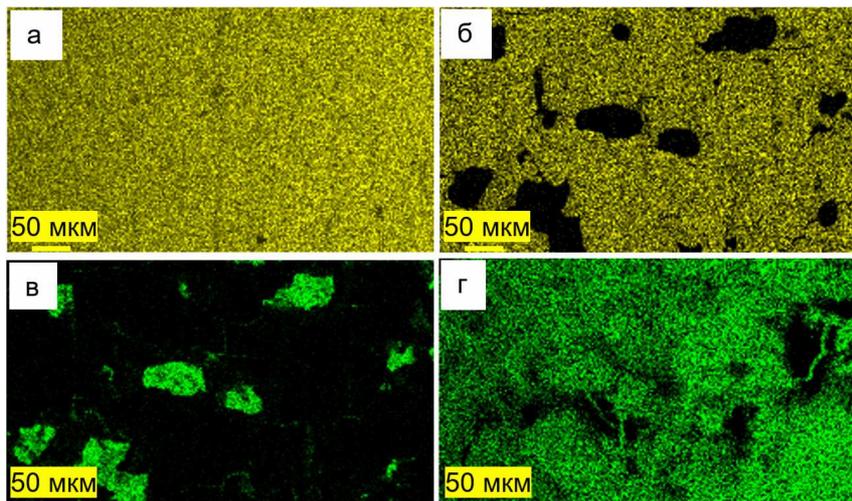


Рис. 1. Изображение поверхностного слоя образцов системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка», подвергнутых облучению импульсным электронным пучком, полученное в характеристическом рентгеновском излучении атомов титана (Ti K α 1) (а, б) и атомов алюминия (Al K α 1) (в, г); образцы облучены при плотности энергии пучка электронов E_S (Дж/см 2) 10 (а), 15 (б, в), 30 (г). Сканирующая электронная микроскопия

Более детально структуру поверхностного слоя образцов системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка», подвергнутых облучению импульсным электронным пучком, изучали методами просвечивающей электронной дифракционной микроскопии, анализируя фольги, приготовленные из пластинок, вырезанных в плоскости, расположенной перпендикулярно плоскости облучения образца. Представленные на рис. 2 микрофотографии свидетельствуют о том, что при $E_S = 10$ Дж/см 2 изменение структуры прилегающего к пленке слоя силумина заключается в формировании субзеренной структуры с размерами субзерен (0,4–1,0) мкм (рис. 2, а, б). Следовательно, плавления поверхностного слоя силумина при данном режиме облучения не происходит и преобразование элементного и фазового состава, формирование дефектной субструктуры материала протекает в твердофазном состоянии.

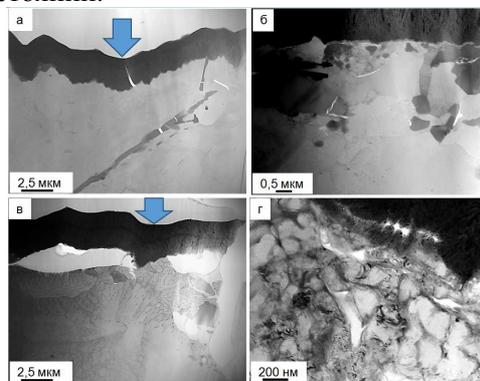


Рис. 2. Электронно-микроскопическое изображение структуры системы «пленка/подложка», облученной импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов: а, б – $E_S = 10$ Дж/см 2 ; в, г – $E_S = 15$ Дж/см 2 ; (а-в) – режим STEM анализа; г – режим ПЭМ анализа. Стрелкой на (а, в) указана пленка титана

При $E_S = 15$ Дж/см 2 плавится прилегающий к пленке титана слой силумина толщиной 4–6 мкм (рис. 2, в). В результате высокоскоростного охлаждения данный слой кристаллизуется с образованием структуры ячеистого типа в слое, прилегающем к пленке титана (рис. 2, г). Размер ячеек кристаллизации изменяется в пределах от 130 нм до 200 нм. По мере удаления от границы контакта пленки и подложки ячейки кристаллизации преобразуются в структуру столбчатого типа (рис. 2, в). Поперечный размер столбиков изменяется в пределах от 200 нм до 500 нм.

Увеличение плотности энергии пучка электронов до 30 Дж/см 2 сопровождается плавлением слоя силумина толщиной 60–70 мкм (рис. 3). В результате сверхбыстрого охлаждения за счет теплоотвода в объем образца формируется структура высокоскоростной кристаллизации, морфология которой изменяется по мере удаления от поверхности облучения.

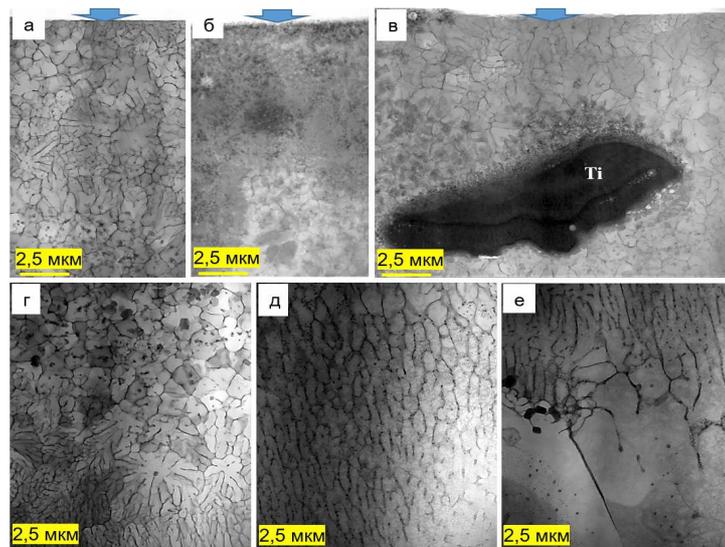


Рис. 3. Электронно-микроскопическое изображение структуры системы «пленка/подложка», облученной импульсным электронным пучком при $E_s = 30 \text{ Дж/см}^2$; а-в – слой, формирующий поверхность облучения, г – слой, расположенный на глубине 27 мкм, д – слой, расположенный на глубине 50 мкм, е – слой, расположенный на глубине 65 мкм; режим STEM анализа. Стрелками на (а–в) указана поверхность облучения; на (в) обозначен фрагмент пленки титана, погружившейся в поверхностный слой силумина

Поверхностный слой формируют два типа структуры. Во-первых, структура ячеистого типа, основным химическим элементом которой является, как будет показано ниже, алюминий (рис. 3, а). Во-вторых, структура ячеистого типа, основным химическим элементом которой является, как будет показано ниже, титан (рис. 3, б). Размер ячеек изменяется в пределах от 200 до 1000 нм и растет по мере увеличения расстояния от поверхности облучения. Одновременно с этим изменяется форма ячеек от глобулярной (округлой) у поверхности облучения к столбчатой (см. рис. 3). В отдельных случаях обнаруживаются фрагменты пленки титана, погружившиеся в объем образца на стадии плавления прилегающего к пленке поверхностного слоя силумина (рис. 3, в).

Методами картирования установлено, что растворение пленки титана в поверхностном слое силумина при облучении системы «пленка/подложка» импульсным электронным пучком при $E_s = 30 \text{ Дж/см}^2$ приводит к формированию обогащенных атомами титана островков и тонких прослоек по границам ячеек кристаллизации алюминия (рис. 4, а, б). Наряду с титаном границы ячеек обогащены атомами кремния, железа и меди (рис. 4, в–е).

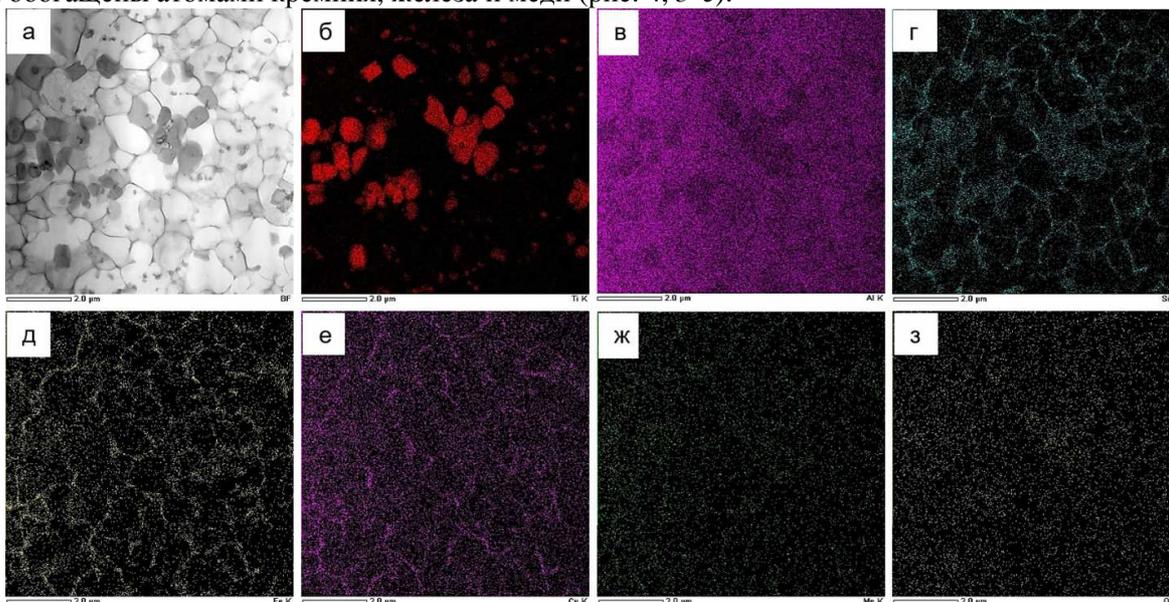


Рис. 4. Электронно-микроскопическое изображение (а) структуры системы «пленка/подложка», облученной импульсным электронным пучком при $E_s = 30 \text{ Дж/см}^2$ (слой, формирующий поверхность облучения); б–з – изображение поверхностного слоя, полученное в характеристическом рентгеновском излучении атомов титана (б), алюминия (в), кремния (г), железа (д), меди (е), марганца (ж), кислорода (з)

Результаты элементного анализа данного участка фольги, представленные в таблице, свидетельствуют о том, что наряду с атомами алюминия и титана поверхностный слой обогащен атомами кремния, железа и меди, формирующими прослойки, расположенные на границах ячеек кристаллизации.

Результаты количественного анализа элементного состава участка фольги, электронно-микроскопическое изображение которого приведено на рис. 4, а

Thin Film Standardless Standard Quantitative Analysis					
Fitting Coefficient : 0.1402					
Element	(keV)	Mass%	Counts	Error%	Atom%
O K	0.525	0.96	3235.84	0.17	1.90
Al K (Ref.)	1.486	64.23	378526.06	0.00	75.46
Si K	1.739	3.88	23798.69	0.04	4.38
Ti K	4.508	15.93	73811.55	0.01	10.54
Mn K	5.894	0.86	3438.56	0.34	0.49
Fe K	6.398	2.39	9231.64	0.11	1.36
Cu K	8.040	11.75	35613.75	0.03	5.86
Total		100.00			100.00

Методами дифракционной электронной микроскопии осуществлен анализ фазового состава системы «пленка (Ti)/(АК5М2) подложка», облученной импульсным электронным пучком. Прежде всего рассмотрим преобразование пленки титана. Выполненные исследования показали, что в исходном состоянии (состояние до облучения) пленка титана имеет столбчатую структуру (рис. 5, а).

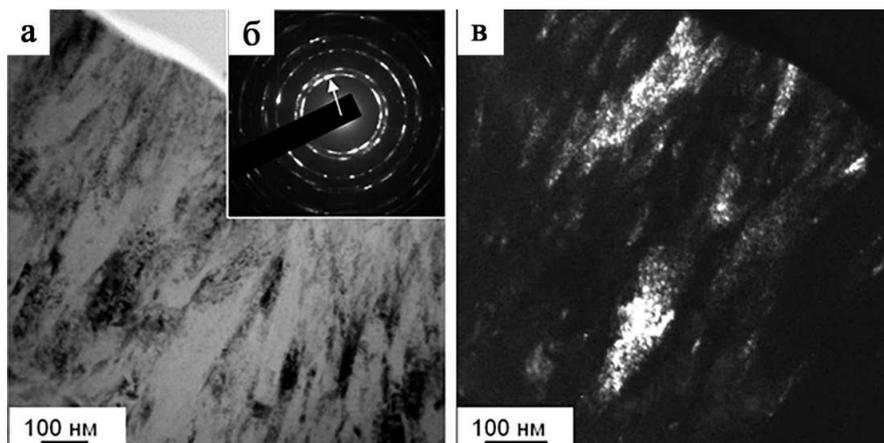


Рис. 5. Электронно-микроскопическое изображение пленки титана в исходном (до облучения импульсным электронным пучком) состоянии; а – светлое поле; б – микроэлектронграмма; в – темное поле, полученное в рефлексе $[100]\alpha\text{-Ti}$

Поперечный размер столбиков изменяется в пределах 20–30 нм. Столбики сформированы кристаллитами, размеры которых 5–7 нм (рис. 5, в). Облучение системы «пленка/подложка» импульсным электронным пучком приводит к преобразованию структуры пленки титана, заключающемуся в увеличении размеров формирующих ее кристаллитов. Установлено, что при $E_S = 10 \text{ Дж/см}^2$ размеры кристаллитов пленки изменяются в пределах 18–40 нм (рис. 6, а); при $E_S = 15 \text{ Дж/см}^2$ – 100–220 нм (рис. 6, б). При $E_S = 30 \text{ Дж/см}^2$, как было показано на рис. 3, пленка титана на поверхности образцов силумина не обнаруживается.

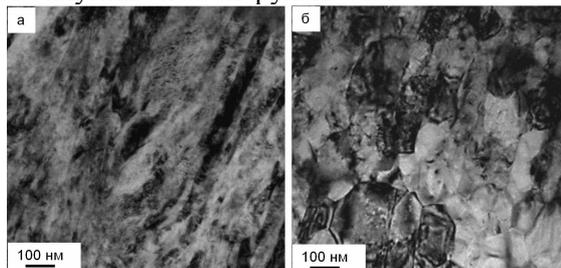


Рис. 6. Электронно-микроскопическое изображение пленки титана, облученной импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов $E_S = 10 \text{ Дж/см}^2$ (а); $E_S = 15 \text{ Дж/см}^2$ (б)

Существенным образом в результате облучения изменяется структура прилегающего к пленке слоя силюмина. Как отмечалось выше, при обсуждении результатов, представленных на рис. 2, облучение системы «пленка/подложка» импульсным электронным пучком при $E_S = 10 \text{ Дж/см}^2$ сопровождается формированием в прилегающем к пленке слое силюмина субзеренной структуры, характерное изображение которой приведено на рис. 7, а. По границам и в объеме фрагментов располагаются частицы кремния и алюминиды меди Al_2Cu (рис. 7).

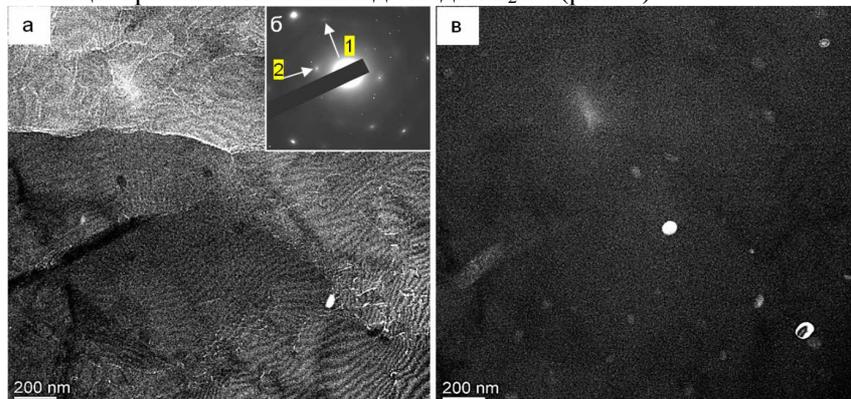


Рис. 7. Электронно-микроскопическое изображение слоя силюмина, прилегающего к пленке титана, облученной импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов $E_S = 10 \text{ Дж/см}^2$; а, в – темные поля, полученные в рефлексах $[113]\text{Al}+[331]\text{Si}$ (а) и $[211]\text{Al}_2\text{Cu}$ (в); б – микроэлектроннограмма, стрелками указаны рефлексы, в которых получены темные поля: 1 для (а), 2 – для (в)

Как отмечалось выше, при обсуждении результатов, представленных на рис. 2, в, з, облучение системы «пленка/подложка» импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов $E_S = 15 \text{ Дж/см}^2$ плавится поверхностный слой силюмина, прилегающий к пленке титана. В результате высокоскоростной кристаллизации на стадии охлаждения образца формируется ячеистая (столбчатая) структура, характерное изображение которой приведено на рис. 8. Микродифракционный анализ данной структуры позволяет утверждать, что объем ячеек кристаллизации сформирован твердым раствором на основе алюминия (рис. 8, в); прослойки второй фазы, расположенные по границам ячеек кристаллизации, являются преимущественно кремнием (рис. 8, г). Следует отметить, что прослойки кремния имеют нанокристаллическую структуру. Размеры кристаллитов кремния изменяются в пределах от 8 до 15 нм.

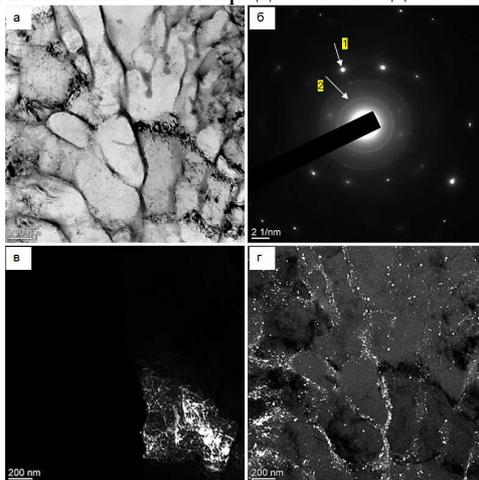


Рис. 8. Электронно-микроскопическое изображение слоя силюмина, прилегающего к пленке титана, облученной импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов $E_S = 15 \text{ Дж/см}^2$; а – светлое поле; б – микроэлектроннограмма; в, г – темные поля, полученные в рефлексах $[022]\text{Al}$ (в) и $[111]\text{Si}$ (г); на (б) стрелками указаны рефлексы, в которых получены темные поля: 1 для (в), 2 – для (г)

Наиболее существенные преобразования системы «пленка/подложка» наблюдаются при облучении электронным пучком, как было показано на рис. 3 и рис. 4, с плотностью энергии $E_S = 30 \text{ Дж/см}^2$. В поверхностном слое выявлено формирование двух типов структуры. Во-первых, структура высокоскоростной кристаллизации с образованием ячеистой или столбчатой структуры (см. рис. 3). Электронно-микроскопический микродифракционный анализ показал, что объем ячеек сформирован твердым раствором на основе алюминия (рис. 9, в).

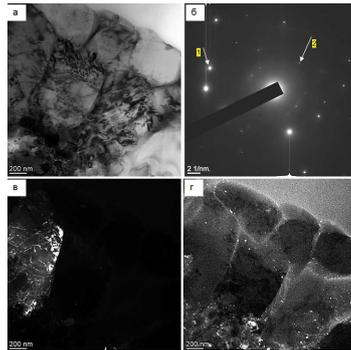


Рис. 9. Электронно-микроскопическое изображение поверхностного слоя системы «пленка/подложка», облученной импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов $E_S = 30$ Дж/см²; а – светлое поле; б – микроэлектроннограмма; в, г – темные поля, полученные в рефлексах [331]Al (в) и [311]Si + [321]Cu₅Si + [511]Al₄Cu₉ (г); на (б) стрелками указаны рефлексы, в которых получены темные поля: 1 для (в), 2 – для (г)

Во-вторых, области со структурой высокоскоростной кристаллизации, содержащие включения, обогащенные атомами титана (см. рис. 4). Представленные на рис. 10 результаты микрофракционного анализа таких областей выявили формирование наноразмерных частиц кремния (рис. 10, в), α -Ti и алюминидов титана (рис. 10, г).

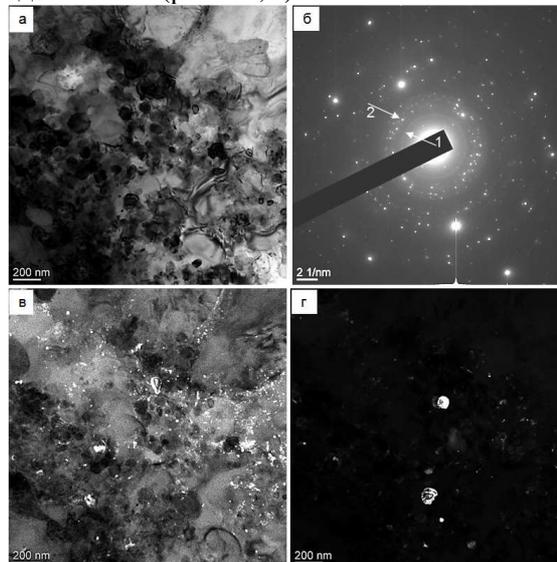


Рис. 10. Электронно-микроскопическое изображение поверхностного слоя системы «пленка/подложка», облученной импульсным электронным пучком при плотности энергии пучка электронов $E_S = 30$ Дж/см²; а – светлое поле; б – микроэлектроннограмма; в, г – темные поля, полученные в рефлексах [111]Si (в) и [110]AlTi₃ + [002] α -Ti (г); на (б) стрелками указаны рефлексы, в которых получены темные поля: 1 для (в), 2 – для (г)

Таким образом, облучение системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка» импульсным электронным пучком сопровождается преобразованием структуры как пленки титана, так и прилегающего к пленке слоя силумина. При плотностях энергии пучка электронов $E_S = (10$ и $15)$ Дж/см² пленка титана сохраняется, однако кристаллиты, ее формирующие, многократно увеличиваются. При $E_S = 30$ Дж/см² пленка титана практически полностью растворяется в расплавленном слое силумина. В поверхностном слое силумина толщиной до 70 мкм формируется многофазная субмикро- нанокристаллическая ячеисто-столбчатая структура высокоскоростной кристаллизации алюминия, по границам и в объеме ячеек располагаются наноразмерные частицы кремния, алюминидов кремния, титана и меди.

Заключение

Сформирована система «пленка (Ti)/(силумин) подложка» при толщине пленки титана 5 мкм. Пленка титана имеет столбчатую структуру с поперечным размером столбиков 20–30 нм. Столбики сформированы кристаллитами, размеры которых 5–7 нм. Облучение системы «пленка/подложка» импульсным электронным пучком при $E_S = 10$ Дж/см² и $E_S = 15$ Дж/см² сопровождается увеличением размеров кристаллитов пленки от 18–40 нм в первом режиме, до 100–220 нм – во втором. Показано, что при $E_S = 10$ Дж/см² морфология поверхности пленки титана не изме-

няется; при $E_S = 15$ Дж/см² наблюдается разрушение пленки титана с формированием островковой структуры (островки обогащены атомами алюминия). При $E_S = 30$ Дж/см² пленка титана на поверхности образцов силумина не обнаруживается; в отдельных случаях выявляются островки пленки титана в подповерхностном слое силумина. Установлено, что при $E_S = 10$ Дж/см² в прилегающем к пленке титана слое силумина формируется субзернистая структура, что является следствием релаксации термических напряжений, обусловленных сверхвысокими скоростями нагрева и охлаждения поверхностного слоя образца. Выявлено, что облучение системы «пленка (Ti)/(силумин) подложка» при $E_S = 15$ Дж/см² приводит к плавлению прилегающего к пленке титана слоя силумина толщиной 4–6 мкм, сопровождающееся, на стадии высокоскоростного охлаждения, формированием структуры ячеистой кристаллизации с размером ячеек 130–200 нм. Ячейки сформированы твердым раствором на основе алюминия, по границам ячеек располагаются наноразмерные частицы кремния. При $E_S = 30$ Дж/см² плавится, с образованием на стадии кристаллизации ячеистой структуры размерами 0,2–1 мкм, слой силумина толщиной 60–70 мкм. По границам ячеек располагаются силициды и алюминиды меди. Растворение пленки титана при $E_S = 30$ Дж/см² сопровождается формированием в поверхностном слое силумина наноразмерных (70–110 нм) частиц α -Ti и алюминидов титана.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-79-10059, <https://rscf.ru/project/19-79-10059/>. В работе применялось оборудование ЦКП НМНТ ТПУ, поддержанного проектом Минобрнауки России № 075-15-2021-710.

Литература

1. Electron Beam Additive Manufacturing of TiB₂/Ti–6Al–4V Composite / A. Panin, M. Kazachenok, L. Kazantseva *et al.* // AIP Conf. Proc. – 2019. – Vol. 2167. – P. 020263.
2. Electron Beam Surface Treatment of 316L Austenitic Stainless Steel: Improvements in Hardness, Wear, and Corrosion Resistance / S. Basak, S.K. Sharma, M. Mondal *et al.* // Metals and Materials International. – 2021. – Vol. 27. – P. 953–961.
3. Valkov, S. Electron-Beam Surface Treatment of Metals and Alloys: Techniques and Trends / S. Valkov, M. Ormanova, P. Petrov // Metals. – 2020. – Vol. 10, Iss. 9. – P. 1219.
4. Formation Mechanism of Micro- and Nanocrystalline Surface Layers in Titanium and Aluminum Alloys in Electron Beam Irradiation / S. Nevskii, V. Sarychev, S. Konovalov *et al.* // Metals. – 2020. – Vol. 10, Iss. 10. – P. 1399.
5. Microstructure and Corrosion Resistance of A Mg₂Sn-dispersed Mg Alloy Subjected to Pulsed Electron Beam Treatment / D. Lee, B. Kim, S.-M. Baek, J. Kim *et al.* // Journal of Magnesium and Alloys. – 2020. – Vol. 8, Iss. 2. – P. 345–351.
6. Effect of Electron Beam Energy Densities on The Surface Morphology and Tensile Property of Additively Manufactured Al-Mg Alloy / Y. Geng, I. Panchenko, S. Konovalov *et al.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section. – 2021. – Vol. 498. – P. 15–22.
7. Influence of Beam Power on The Surface Architecture and Corrosion Behavior of Electron-beam Treated Co-Cr-Mo Alloys / S. Valkov, S. Parshorov, A. Andreeva *et al.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section. – 2021. – Vol. 494–495. – P. 46–52.
8. Smolarczyk, P. Thermal-Derivative Analysis and Precipitation Hardening of the Hypoeutectic Al-Si-Cu Alloys / P. Smolarczyk, M. Krupiński // Archives of Foundry Engineering. – 2019. – Vol. 19, Iss. 1. – P. 41–46.
9. Improved Wear Resistance of Al-15Si Alloy with a High Current Pulsed Electron Beam Treatment / Y. Hao, B. Gao, G.F. Tu *et al.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 2011. – Vol. 269, Iss. 13. – P. 1499–1505.
10. Study on Continuous Solid Solution of Al and Si Elements of a High Current Pulsed Electron Beam Treated Hypereutectic Al17.5Si Alloy / B. Gao, Y. Hao, W.F. Zhuang *et al.* // Phys. Procedia. – 2011. – Vol. 18. – P. 187–192.
11. Integrated Property Predictions During Casting and Heat Treatment of Al-Si-Cu-Mg Alloys By Precipitation Simulation / F. Mao, M. Weidt, F. Roeser *et al.* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2023. – Vol. 1281. – P. 012043.
12. Hren, I. Influence of Al₅FeSi Phases on the Cracking of Castings at Al-Si Alloys / I. Hren, J. Svobodová, Š. Michna // Archives of Foundry Engineering. – 2018. – Vol. 18(4). – P. 120–124.

13. Денисова, Ю.А. Эволюция структуры поверхностного слоя стали, подвергнутой электронно-ионно-плазменным методам обработки / Ю.А. Денисова, под общ. ред. Н.Н. Коваля и Ю.Ф. Иванова. – Томск: Изд-во НТЛ, 2016. – 303 с.

14. Электронно-ионно-плазменная модификация поверхности цветных металлов и сплавов / Ю.Х. Ахмадеев, В.В. Денисов, Ю.Ф. Иванов и др. – Томск: Изд-во НТЛ, 2016. – 308 с.

15. Белов, Н.А. Фазовый состав и структура силуминов / Н.А. Белов, С.В. Савченко, А.В. Хван. – М.: МИСИС, 2008. – 281 с.

Поступила в редакцию 5 апреля 2024 г.

Сведения об авторах

Загуляев Дмитрий Валерьевич – доктор технических наук, доцент, Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк, Российская Федерация, e-mail: zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru.

Иванов Юрий Федорович – доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт сильноточной электроники Сибирского отделения РАН», г. Томск, Российская Федерация, e-mail: yufi55@mail.ru.

Толкачев Олег Сергеевич – младший научный сотрудник лаборатории плазменной эмиссионной электроники, ФГБУН «Институт сильноточной электроники Сибирского отделения РАН», г. Томск, Российская Федерация.

Шляров Виталий Владиславович – аспирант, Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк, Российская Федерация, e-mail: shlyarov@mail.ru.

Шлярова Юлия Андреевна – аспирант, Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк, Российская Федерация, e-mail: rubannikova96@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 50–61*

DOI: 10.14529/mmph240308

THE EVOLUTION OF A TI FILM/SILUMIN SUBSTRATE SYSTEM IRRADIATED BY A PULSE ELECTRON BEAM

D.V. Zaguliaev¹, Yu.F. Ivanov², O.S. Tolkachev², V.V. Shlyarov¹, Yu.A. Shlyarova¹

¹ *Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation*

² *Institute of High Current Electronics SB RAS, Tomsk, Russian Federation*

E-mail: zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru

Abstract. The electron beam treatment of metal surfaces involves the use of intense pulsed electron beams to improve a wide range of surface properties of different materials. Research has shown that it can lead to a marked reduction in surface roughness and porosity and a marked increase in tensile strength and ductility. Processed samples also have improved hardness, wear resistance, and anti-corrosion properties, which emphasizes the effectiveness of electron beam surface treatment in materials science.

This work studies the irradiation of a Ti film/silumin substrate system showing it leads to the transformation of both the Ti film and the silumin layer with different energy densities, which has a different effect on the structure and composition. When treated with an electron beam at an energy density of 30 J/cm², the Ti film and the silumin layer undergo complete dissolution, resulting in a complex sub-micron crystalline structure characterized by the presence of silicon particles distributed along grain boundaries. Irradiation with an electron beam of the Ti film/silumin substrate system at different energy densities (10, 15, 30 J/cm²) leads to a change in surface morphology, crystallite size, and phase composition, and an increase in energy density leads to the melting of the Ti film and the silumin layer.

Keywords: *silumin; titanium; film/substrate system; pulsed electron beam; elemental and phase composition; defect substructure.*

References

1. Panin A., Kazachenok M., Kazantseva L., Martynov S., Korchagin M. Electron Beam Additive Manufacturing of TiB₂/Ti–6Al–4V Composite. *AIP Conf. Proc.*, 2019, Vol. 2167, P. 020263. DOI: 10.1063/1.5132130
2. Basak S., Sharma S.K., Mondal M., Sahu K.K., Gollapudi S., Majumdar J.D., Hong S.-T. Electron Beam Surface Treatment of 316L Austenitic Stainless Steel: Improvements in Hardness, Wear, and Corrosion Resistance. *Metals and Materials International*, 2021, Vol. 27, P. 953–961. DOI: 10.1007/s12540-020-00773-y
3. Valkov S., Ormanova M., Petrov P. Electron-Beam Surface Treatment of Metals and Alloys: Techniques and Trends. *Metals*, 2020, Vol. 10, Iss. 9, P. 1219. DOI: 10.3390/met10091219
4. Nevskii S., Sarychev V., Konovalov S., Granovskii A., Gromov V. Formation Mechanism of Micro- and Nanocrystalline Surface Layers in Titanium and Aluminum Alloys in Electron Beam Irradiation. *Metals*, 2020, Vol. 10, Iss. 10, P. 1399. DOI: 10.3390/met10101399
5. Lee D., Kim B., Baek S.-M., Kim J., Park H.W., Lee J.G., Park S.S. Microstructure and Corrosion Resistance of A Mg₂Sn-dispersed Mg Alloy Subjected to Pulsed Electron Beam Treatment. *Journal of Magnesium and Alloys*, 2020, Vol. 8, Iss. 2, pp. 345–351. DOI: 10.1016/j.jma.2020.02.005
6. Geng Y., Panchenko I., Konovalov S., Chen X., Ivanov Yu. Effect of Electron Beam Energy Densities on The Surface Morphology and Tensile Property of Additively Manufactured Al-Mg Alloy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section*, 2021, Vol. 498, pp. 15–22. DOI: 10.1016/j.nimb.2021.04.008
7. Valkov S., Parshorov S., Andreeva A., Rabadzhiyska S., Nikolova M., Bezdushnyi R., Petrov P. Influence of Beam Power on The Surface Architecture and Corrosion Behavior of Electron-beam Treated Co-Cr-Mo Alloys. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section*, 2021, Vol. 494–495, pp. 46–52. DOI: 10.1016/j.nimb.2021.03.007
8. Smolarczyk P., Krupiński M. Thermal-Derivative Analysis and Precipitation Hardening of the Hypoeutectic Al-Si-Cu Alloys. *Archives of Foundry Engineering*, 2019, Vol. 19, Iss. 1, pp. 41–46. DOI: 10.24425/afe.2018.125189
9. Hao Y., Gao B., Tu G.F., Li S.W., Dong C., Zhang Z.G. Improved Wear Resistance of Al-15Si Alloy with a High Current Pulsed Electron Beam Treatment. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2011, Vol. 269, Iss. 13, pp. 1499–1505. DOI: 10.1016/j.nimb.2011.04.010
10. Gao B., Hao Y., Zhuang W.F., Tu G.F., Shi W.X., Li S.W., Hao S.Z., Dong C., Li M.C. Study on Continuous Solid Solution of Al and Si Elements of a High Current Pulsed Electron Beam Treated Hypereutectic Al17.5Si Alloy. *Phys. Procedia*, 2011, Vol. 18, pp. 187–192. DOI: 10.1016/j.phpro.2011.06.079
11. Mao F., Weidt M., Roeser F., Thorborg J., Barrales-Mora L. Integrated Property Predictions During Casting and Heat Treatment of Al-Si-Cu-Mg Alloys By Precipitation Simulation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2023, Vol. 1281, p. 012043. DOI: 10.1088/1757-899X/1281/1/012043
12. Hren I., Svobodová J., Michna Š. Influence of Al₅FeSi Phases on the Cracking of Castings at Al-Si Alloys. *Archives of Foundry Engineering*, 2018, Vol. 18(4), P. 120–124. DOI:10.24425/afe.2018.125180
13. Denisova Yu.A. *et al. Evolyutsiya struktury poverkhnostnogo sloya stali, podvergnutoy elektronno-ionno-plazmennym metodam obrabotki* (Evolution of the Structure of the Surface layer of Steel Subjected to Electron-Ion-Plasma Processing Methods). Tomsk, Izd-vo NTL Publ., 2016, 303 p. (in Russ.).
14. Akhmadeev Yu.Kh., Denisov V.V., Ivanov Yu.F. *et al. Elektronno-ionno-plazmennaya modifikatsiya poverkhnosti tsvetnykh metallov i splavov* (Electron-Ion-Plasma Surface Modification of Non-Ferrous Metals and Alloys). Tomsk, Izd-vo NTL Publ., 2016, 308 p. (in Russ.).
15. Belov N.A., Savchenko S.V., Khvan A.V. *Fazovyy sostav i struktura siluminov* (Phase Composition and Structure of Silumins). Moscow, MISIS Publ., 2008, 281 p. (in Russ.).

Received April 5, 2024

Information about the authors

Zaguliaev Dmitry Valer'evich is Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation, e-mail: zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru.

Ivanov Yurii Fedorovich is Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of High Current Electronics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (IHCE SB RAS), Tomsk, Russian Federation, e-mail: yufi55@mail.ru.

Tolkachev Oleg Sergeevich is Junior Researcher of the Laboratory of Plasma Emission Electronics, Institute of High Current Electronics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (IHCE SB RAS), Tomsk, Russian Federation.

Shlyarov Vitaly Vladislavovich is graduate student, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation, e-mail: shlyarov@mail.ru.

Shliarova Yulia Andreevna is graduate student, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation, e-mail: rubannikova96@mail.ru.

ПАРАМЕТРЫ МАГНИТНОГО ОБМЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ТЕМПЕРАТУРА КЮРИ В СПЛАВЕ $\text{Fe}_{75}\text{Ga}_{25}$

М.В. Матюнина, М.А. Загребин, В.В. Соколовский, В.Д. Бучельников

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: matunins.fam@mail.ru

Аннотация. Для кристаллических структур D0_3 и L1_2 сплава $\text{Fe}_{75}\text{Ga}_{25}$ в рамках теории функционала плотности рассчитаны параметры магнитного обменного взаимодействия J_{ij} с помощью гамильтониана, построенного на основе базиса функций Ванье. Наибольшее ферромагнитное взаимодействие в первой координационной сфере в фазе L1_2 составляет 18 мэВ, что на 3 мэВ меньше по сравнению с результатами, полученными с помощью метода функций Грина Корринга–Кона–Ростокера. В фазе D0_3 наибольшее ферромагнитное взаимодействие в первой координационной сфере наблюдается между атомами разных подрешеток Fe. Разница с результатами, полученными ранее с помощью метода Корринга–Кона–Ростокера составляет ≈ 10 мэВ. В результате моделирования Монте-Карло с использованием полученных значений параметров магнитного обмена оценены температуры Кюри. Для структуры L1_2 температура Кюри составляет 1007 К, что сопоставимо с экспериментальными данными. Температура Кюри для структуры D0_3 составляет 517 К, что ниже экспериментального значения на 200 К.

Ключевые слова: сплавы на основе Fe; первопринципные расчеты; функции Ванье; параметры обменного взаимодействия; температура Кюри.

Введение

В настоящее время интенсивно возрастающий интерес научного сообщества обращен на исследование и развитие высокопроизводительных материалов нового поколения. Таковыми являются магнитомягкие сплавы на основе железа Fe-Al, Fe-Ga и Fe-Ge, привлекающие внимание своими необычными механическими, электрическими и магнитными свойствами [1]. Высокие значения магнитострикции насыщения в низких магнитных полях, высокий предел прочности, хорошая пластичность и ударопрочность, слабая зависимость магнитомеханических свойств в широком диапазоне температур [2] позволяют рассматривать сплавы Fe-Ga в качестве альтернативы сплавам с редкоземельными элементами, например, $\text{Dy}_{0.7}\text{Tb}_{0.3}\text{Fe}_2$ [1–4]. Указанные сплавы сохраняют ферромагнитные (ФМ) свойства в широком концентрационном диапазоне, так, например, температура Кюри T_C при содержании немагнитных атомов 25 ат. % достигает значений $T_C = 758$ К, 730 К и 710 К в Fe-Al, Fe-Ga и Fe-Ge соответственно [5, 6]. В области твердого раствора A2 наблюдается плавное снижение T_C по мере растворения немагнитных атомов в железе. При повышенном содержании легирующего элемента до 20–30 ат. % концентрационная зависимость температуры T_C качественно изменяется и определяется особенностями состояния формирующихся упорядоченных фаз [5, 6]. Так, в сплаве Fe-Ga в этой области концентраций наибольшую температуру Кюри (около 900 К) имеет фаза L1_2 (221-я группа симметрии, $Pm\bar{3}m$), а температура T_C фазы D0_3 существенно ниже [6] ($T_C \approx 600$ К).

С теоретической точки зрения концентрационные зависимости T_C могут быть определены в рамках приближения молекулярного поля (ПМП) и в рамках микроскопического подхода, сочетающего в себе моделирование методом Монте-Карло (МК) трехмерной модели Гейзенберга $H = \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j$ с *ab initio* расчетами при $T = 0$ К параметров обменного взаимодействия J_{ij} . Описанный выше микроскопический подход позволяет получить температурные зависимости намагниченностей, из которых и определяется T_C . Исследование концентрационной зависимости T_C для сплавов Fe-Al, Fe-Ga и Fe-Ge в кристаллических структурах A2 и D0_3 в приближении среднего поля с учетом влияния выбора широко известных и апробированных функционалов приближения обобщенного градиента (*general gradient approximation*, GGA) и приближения локальной плотности (*local density approximation*, LDA) было проведено в работе [7]. Поведение зависимости $T_C(x)$ качественно соответствует экспериментальному, однако полученные значения превы-

шают экспериментальные данные на величину порядка 400 К и 250 К в приближении GGA и LDA соответственно. Исследование зависимости $T_C(x)$ при помощи микроскопического подхода, сочетающего в себе *ab initio* расчеты и моделирование методом МК, выполненное для сплавов Fe-Ga, представлено в работах [8–10]. Как и в случае ПМП, теоретические расчеты методом МК дают завышенные значения. Возможное объяснение этого факта может быть связано с первопринципными параметрами для расчета констант магнитного обменного взаимодействия, полученными при помощи программного пакета SPRKKR [11] в рамках метода Коринги–Кона–Ростокера и теории многократного рассеяния в формулировке, предложенной Лихтенштейном [12]. Для создания нестехиометрических композиций в данном пакете используется приближение когерентного потенциала (*coherent potential approximation*, CPA), что предполагает использование некоторой эффективной среды, в которой один из компонентов внедрен таким образом, чтобы воспроизвести усредненную концентрацию всех компонентов среды. Применение такой усредненной среды может давать завышенные значения параметров магнитного обменного взаимодействия, что в конечном итоге сказывается на величине T_C .

Расчет параметров магнитного обменного взаимодействия вне приближения когерентного потенциала может быть выполнен в рамках теории функционала плотности (*density functional theory*, DFT) с использованием подхода суперячеек при создании нестехиометрических композиций при помощи Гамильтониана для расчета J_{ij} , построенного в базе функций Ванье [13]. Такой подход к расчету параметров магнитного обменного взаимодействия позволяет оценить влияние окружения немагнитных атомов на элементы основного твердого раствора и, соответственно, оценить роль ближнего порядка в распределении легирующего элемента на магнитные свойства исследуемой кристаллической структуры.

Целью данной работы является расчет в рамках теории функционала плотности параметров магнитного обменного взаимодействия с применением базиса максимально локализованных функций Ванье, а также оценка температуры Кюри, полученной в рамках микроскопического подхода моделированием методом Монте-Карло с учетом J_{ij} , полученных с помощью функций Ванье.

Детали вычислений

В качестве объектов были выбраны кристаллические структуры $D0_3$ и $L1_2$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$, расчет структурных и магнитных характеристик которых ранее выполнялся коллективом авторов и представлен в ряде работ [7–10]. Все расчеты выполнены при помощи метода проекционных присоединенных волн (*projector augmented wave*, PAW), реализованного в программном пакете VASP [14, 15]. Учет обменно-корреляционных эффектов был проведен для функционала – GGA по схеме Пердю, Бурке и Эрнцерхофа (Perdew, Burke, Ernzerhof – PBE) [16]. В рамках PAW-потенциалов использовались следующие электронные конфигурации: $Fe(3p^6 3d^7 4s^1)$ и $Ga(3d^{10} 4s^2 4p^1)$. Энергия обрезания плоских волн составила 440 эВ. Для расчетов учитывалась плотность k -сетки ≈ 5000 k -точек на обратную решетку. Критерий сходимости при проведении геометрической оптимизации составил 10^{-8} эВ/ячейку, сходимость по силам составляла менее 10^{-3} эВ/Å. На рис. 1 представлены примитивные ячейки исследуемых кристаллических структур $L1_2$ и $D0_3$ в стехиометрической композиции.

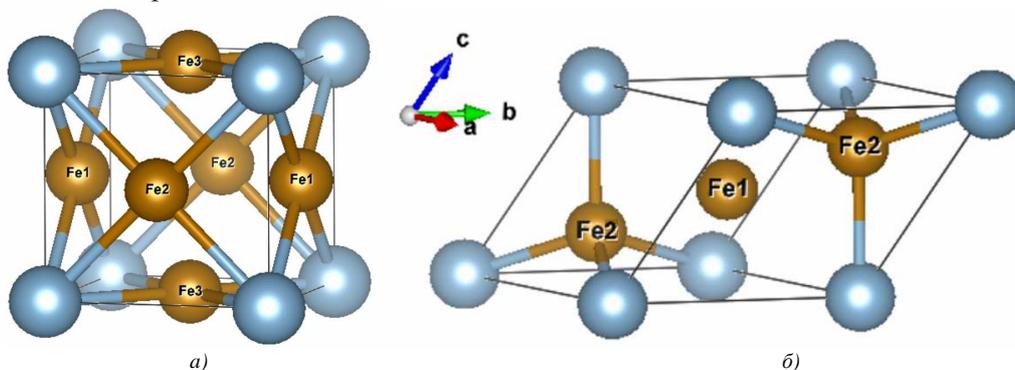


Рис. 1. Модельные примитивные кристаллические решетки исследуемых структур сплавов $Fe_{75}Ga_{25}$: а) $L1_2$ ($Pm-3m$, №221), атомы $Fe_{1,2,3}$ локализованы на позиции Уайкова 3с (0; 0,5; 0,5), (0,5; 0; 0,5), (0,5; 0,5; 0); б) $D0_3$ ($Fm-3m$, №225), атомы Fe_1, F_2 расположены на позициях 4b (0,5; 0,5; 0,5) и 8с (0,25; 0,25; 0,25), (0,75; 0,75; 0,75) соответственно. Серебристые сферы соответствуют расположению немагнитных атомов Ga

В гранецентрированной решетке $L1_2$ три атома железа занимают позиции Уайкова $3c$ (0; 0,5; 0,5), (0,5; 0; 0,5) и (0,5; 0,5; 0), немагнитные атомы располагаются в позиции $1a$ (0; 0; 0). В решетке $D0_3$ атом Fe_1 занимает позицию $4b$ (0,5; 0,5; 0,5), атом $Fe_2 - 8c$ (0,25; 0,25; 0,25) и (0,75; 0,75; 0,75), атом $Ga - 4a$ (0; 0; 0).

После проведения геометрической оптимизации для каждой из исследуемых структур были рассчитаны максимально-локализованные функции Ванье по методу Марзари и Вандербильта в рамках программного пакета Wannier90 [17]. В первопринципных программных пакетах кристаллы представляют собой регулярную периодическую структуру, и, согласно теореме Блоха, потенциал, действующий на электрон в кристалле, имеет размерность кристалла, что позволяет свести задачу к решению уравнений Кона–Шэма для электронов в рамках элементарной ячейки, находящихся в бесконечном периодическом твердом теле. Локализованный набор обобщенных функций Ванье, представляющий множество локализованных ортонормированных орбиталей, строился из волновых функций Блоха и охватывал то же пространство, что и указанный набор функций Блоха. Альтернативное представление может быть дано в терминах пространственно-локализованных функций Ванье. Непосредственно константы обменного взаимодействия рассчитывались при помощи пакета TB2J python [18] в рамках метода функций Грина с локальным жестким вращением спина, рассматриваемым как возмущение [13]. Полученная зависимость множественности J_{ij} от расстояния между взаимодействующими атомами использовалась в качестве входных параметров в моделировании МК с использованием кода Vampire 5.0 [19].

Оценка температуры Кюри по кривым $M(T)$ проводилась при помощи построения функции $M^{1/\beta}(T)$, линейно убывающей с ростом температуры, и определялась на пересечении кривой $M^{1/\beta}$ с осью T , где $\beta = 0,3646$ – критический индекс трехмерной модели Гейзенберга.

Результаты расчетов и обсуждение

Геометрическая оптимизация. Результаты геометрической оптимизации исследуемых кристаллических структур $D0_3$ и $L1_2$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$, выполненных при помощи программного пакета VASP в приближении GGA, представлены в табл. 1.

В табл. 1 приведены экспериментальные и теоретические литературные данные с указанием программного пакета и функционала для случая, если он не рассматривался в настоящей работе. Как можно видеть из табл. 1, полученные результаты и литературные данные для равновесных параметров решетки практически не отличаются друг от друга и их значения меньше экспериментальных. Разница теоретических значений с экспериментальными данными не превышает 1 %. Значения $a_{теор.}$ также хорошо согласуются с теоретическими расчетами, полученными в рамках подхода, основанного на применении теории многократного рассеяния, называемого формализмом Корринги–Кона–Ростокера (SPRKKR) [19, 20].

Таблица 1

Равновесные расчетные $a_{теор.}$ (Å) и экспериментальные $a_{эксп.}$ (Å) параметры решеток, полные расчетный $\mu_{теор.}$ (мБ/ат.) и экспериментальный $\mu_{эксп.}$ (мБ/ат.) магнитные моменты исследуемых кристаллических структур $D0_3$ и $L1_2$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$, полученные в настоящей работе и взятые из литературных данных. В квадратных скобках приведена информация о программном пакете, при помощи которого выполнены расчеты и функционале

Фаза	$a_{теор.}$	$a_{эксп.}$	$\mu_{теор.}$	$\mu_{эксп.}$
$D0_3$	5,75	5,81 [6]	1,54	1,54 [6]
	5,82 [10, SPRKKR]			
$L1_2$	3,65	3,68 [6]	1,74	1,80 [6]
	3,69 [10, SPRKKR]		1,74 [7, SPRKKR]	
	3,59* [10, SPRKKR]		1,74* [7, SPRKKR]	

* расчеты выполнены с учетом функционала LDA

Постоянные обменного взаимодействия. На втором этапе расчетов для исследуемых фаз был получен локализованный набор обобщенных функций Ванье, представляющий множество локализованных ортонормированных орбиталей, построенный на базе волновых функций Блоха и охватывающий то же пространство, что и указанный набор функций Блоха (далее по тексту и на рисунках сокращенно будем обозначен как VASP). Для получения базиса волновых функций задавались орбитали s -, p -, d - для атомов Fe и s -, p - для немагнитных атомов Ga. На рис. 2 представлена зависимость параметров магнитного обменного взаимодействия J_{ij} от расстояния $d/a \leq 1$ между атомами i и j в кристаллических структурах $D0_3$ и $L1_2$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$.

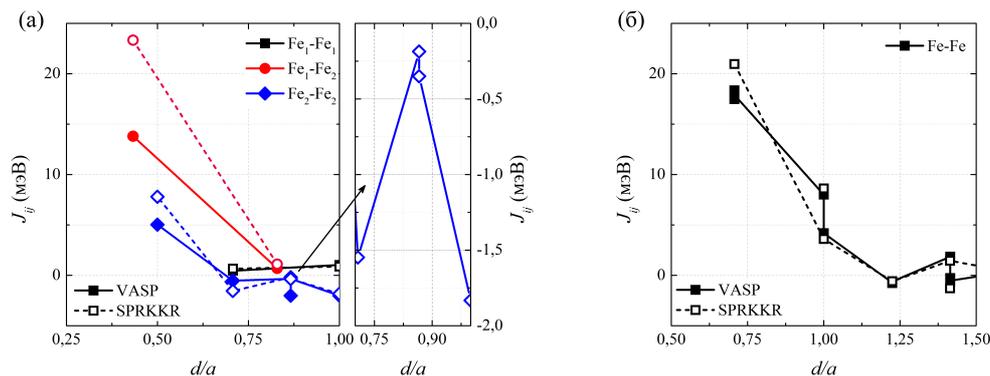


Рис. 2. Зависимость параметров магнитного обменного взаимодействия J_{ij} от расстояния d/a между атомами i и j кристаллической структуры $D0_3$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$, полученные в приближениях: а) в программном пакете SPRKKR [21] (полые символы); в программном пакете VASP (сплошные символы) и б) J_{ij} в структуре $L1_2$

На рис. 2, а представлены результаты, ранее полученные в программном пакете SPRKKR [8] в приближении GGA (далее по тексту и на рисунках сокращенно будут обозначены как SPRKKR). Как можно видеть, наибольшее ФМ ($J_{ij} > 0$) взаимодействие наблюдается в первой координационной сфере для атомов Fe_1-Fe_2 , расположенных на позициях $4b$ (0,5; 0,5; 0,5) и $8c$ (0,25; 0,25; 0,25), (0,75; 0,75; 0,75) соответственно (см. рис. 1 расположения атомов в решетке). Величина обменного взаимодействия составляет $J_{ij} \approx 23$ мэВ в программном пакете SPRKKR, и ≈ 13 мэВ при расчете J_{ij} с применением базиса максимально локализованных функций Ванье.

Можно отметить, что для атомов Fe_2 в третьей координационной сфере наблюдается расщепление взаимодействия на слабое ФМ и антиферромагнитное (АФМ, $J_{ij} < 0$). Расчеты J_{ij} в программном пакете SPRKKR предсказывают расщепление на АФМ-АФМ взаимодействие величиной $-0,19$ мэВ и $-0,35$ мэВ (см. вставку на рис. 2, а)). В структуре $L1_2$ (см. рис. 2, б) наибольшее ФМ взаимодействие также наблюдается в первой координационной сфере. Значения, рассчитанные при помощи программного пакета SPRKKR [8], составляют ≈ 21 мэВ, для программного пакета VASP – 18 мэВ.

Температура Кюри. Набор параметров J_{ij} в зависимости от расстояния между взаимодействующими атомами в кристаллических структурах $D0_3$ и $L1_2$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$, полученный в программном пакете SPRKKR с учетом приближения когерентного потенциала и приближения среднего поля, а также с применением базиса максимально локализованных функций Ванье в пакете VASP, использовался в качестве входных параметров в моделировании методом МК. В табл. 2 представлены результаты расчета температуры Кюри в сравнении с экспериментальными данными [6]. Расчетные значения T_C в кристаллических структурах $L1_2$ и $D0_3$, полученные в ПМП, существенно превышают экспериментальные. В фазе $L1_2$ температура Кюри, рассчитанная на основании J_{ij} как при помощи программного пакета SPRKKR, так и VASP, хорошо согласуются с экспериментом. Дополнительно стоит отметить, что указанные экспериментальные значения T_C в структуре $L1_2$ получены методом экстраполяции [6] кривых намагниченности. Также из табл. 2 можно отметить, что в фазе $D0_3$ расчетные значения практически равноудалены от экспериментального: SPRKKR – завышенные значения, VASP – заниженные. Такая ситуация непосредственно объясняется значениями обменных взаимодействий, полученных разными пакетами. Как видно из рис. 2, для структуры $L1_2$ разница значений в первой координационной сфере составляет не многим более 3 мэВ, в то время как для $D0_3$ $J_{ij}^{SPRKKR} - J_{ij}^{VASP} \approx 10$ мэВ и 2,5 мэВ – для взаимодействий Fe_1-Fe_2 и Fe_2-Fe_2 соответственно.

Таблица 2

Температура Кюри T_C (в К), вычисленная с помощью рассчитанных параметров обменного взаимодействия. Для сравнения приведено теоретическое значение T_C , полученное с помощью МК моделирования обменных интегралов в программном пакете SPRKKR, в ПМП и экспериментальные данные

Фаза	T_C	T_C (SPRKKR)	T_C (ПМП)	T_C (эксперимент)
$D0_3$	517	987	1278	730 [6]
$L1_2$	1007	1060	1463	1040*[6]

* данные, полученные экстраполяцией

Заключение

В работе апробирован подход получения параметров магнитного обменного взаимодействия через гамильтониан функций Ванье, что позволяет получить значения J_{ij} для каждого из атомов в суперячейке без создания эффективной среды как в случае программного пакета SPRKKR. Данный подход позволяет проанализировать влияние ближайшего окружения немагнитных атомов на обменные параметры J_{ij} магнитных элементов, а также учесть влияние локальных деформаций, вносимых немагнитными атомами. В качестве объекта выбраны хорошо исследованные структуры $D0_3$ и $L1_2$ сплава $Fe_{75}Ga_{25}$.

Величина обменных взаимодействий, рассчитанная в структуре $L1_2$ при помощи программных пакетов SPRKKR и VASP, различается слабо. Разница значений J_{ij} в первой координационной сфере составляет ≈ 3 мэВ. В случае фазы $D0_3$ при расчетах пакетом VASP различие более существенно, оно наблюдается для двух типов взаимодействий – Fe_1-Fe_2 и Fe_2-Fe_2 . Разница с ранее полученными значениями при помощи пакета SPRKKR составляет ≈ 10 мэВ и 2,5 мэВ соответственно для взаимодействий Fe_1-Fe_2 и Fe_2-Fe_2 . Для атомов Fe_2 в третьей координационной сфере наблюдается расщепление взаимодействия на слабое ферромагнитное и антиферромагнитное, что не предсказывается в программном пакете SPRKKR.

Расчёт температуры Кюри методом моделирования Монте-Карло с использованием параметров магнитного обменного взаимодействия, полученных двумя способами (пакетами SPRKKR и VASP), приводит к следующим результатам. В фазе $L1_2$ температуры Кюри, рассчитанные на основании J_{ij} , полученных при помощи программного пакета SPRKKR и с помощью функций Ванье в программном пакете VASP, хорошо согласуются с экспериментом. Для фазы $D0_3$ оба подхода дают значение T_C , отличное от экспериментальной на величину ≈ 200 К. Использование параметров магнитного взаимодействия, полученных с помощью функций Ванье в пакете VASP, дает заниженный результат, в то время как параметры магнитного взаимодействия, полученные с помощью функций Грина Корринга–Кона–Ростокера в пакете SPRKKR – завышенный результат.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-20086, <https://rscf.ru/project/24-22-20086/>.

Литература

1. Structure and Properties of Fe–Ga Alloys as Promising Materials for Electronics / I.S. Golovin, V.V. Palacheva, A.K. Mohamed, A.M. Balagurov // *Physics of Metals and Metallography*. – 2020. – Vol. 121. – P. 851–893.
2. Extraordinary Magnetoelasticity and Lattice Softening in BCC Fe-Ga Alloys / A.E. Clark, K.B. Hathaway, M. Wun-Fogle *et al.* // *Journal of Applied Physics*. – 2003. – Vol. 93, Iss. 109. – P. 8621–8623.
3. Балагуров, А.М. Рассеяние нейтронов в исследованиях функциональных сплавов на основе железа (Fe–Ga, Fe–Al) / А.М. Балагуров, И.С. Головин // *УФН*. – 2021. – Т. 191, Вып. 7. – С. 738–759.
4. Гигантская магнитострикция / К.П. Белов, Г.И. Катаев, Р.З. Левитин // *УФН*. – 1983. – Т. 140, Вып. 6. – С. 271–313.
5. Okamoto, H. The Fe-Ga (Iron-Gallium) System / H. Okamoto // *Bulletin of Alloy Phase Diagrams*. – 1990. – Vol. 11. – P. 576–581.
6. Kawamiya, N. Magnetic Properties and Mössbauer Investigations of Fe-Ga Alloys / N. Kawamiya, K. Adachi, Y. Nakamura // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 1972. – Vol. 33, no. 5. – P. 1318–1327.
7. The Effect of Exchange-Correlation Potentials on Magnetic Properties of Fe-(Ga, Ge, Al) Alloys / M.A. Zagrebina, M.V. Matyunina, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1389. – P. 012087.
8. *Ab initio* Study of Magnetic and Structural Properties of Fe-Ga Alloys / M. Matyunina, M. Zagrebina, V. Sokolovskiy, V. Buchelnikov // *EPJ Web of Conferences*. – 2018. – Vol. 185. – P. 04013.
9. Magnetic Properties of $Fe_{100-x}Ga_x$: *Ab initio* and Monte Carlo study / M.V. Matyunina, M.A. Zagrebina, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2019. – Vol. 470. – P. 118–122.

10. Исследование свойств сплавов Fe-Ga из *ab initio* вычислений / М.В. Матюнина, М.А. Загребин, В.В. Соколовский, В.Д. Бучельников // Челябинский физико-математический журнал. – 2017. – Т. 2, № 2. – С. 231–240.
11. Ebert, H. Calculating Condensed Matter Properties using the KKR-Green's Function Method – Recent Developments and Applications / H. Ebert, D. Ködderitzsch, J. Minár // Reports on Progress in Physics. – 2011. – Vol. 74, no. 9. – P. 096501.
12. Local Spin Density Functional Approach to the Theory of Exchange Interactions in Ferromagnetic Metals and Alloys / A.I. Liechtenstein, M. Katsnelson, V. Antropov, V.A. Gubanov // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 1987. – Vol. 67, Iss. 1. – P. 65–74.
13. Wannier, G.H. The Structure of Electronic Excitation Levels in Insulating Crystals / G.H. Wannier // Physical Review. – 1937. – Vol. 52, Iss. 3. – P. 191–197.
14. Kresse, G. Efficient Iterative Schemes for *Ab Initio* Total-Energy Calculations using a Plane-Wave Basis Set / G. Kresse, and J. Furthmüller // Physical Review B. – 1996. – Vol. 54, Iss. 16. – P. 11169.
15. Kresse, G. From Ultrasoft Pseudopotentials to the Projector Augmented-Wave Method / G. Kresse, D. Joubert // Physical Review B. – 1999. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 1758.
16. Perdew, J.P. Generalized Gradient Approximation Made Simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // Physical Review Letters. – 1996. – Vol. 77, Iss. 18. – P. 3865.
17. Wannier90 as a Community Code: New Features and Applications / G. Pizzi, V. Vitale, R. Arita *et al.* // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2020. – Vol. 32, Iss. 16. – P. 165902.
18. TB2J: A Python Package for Computing Magnetic Interaction Parameters / X. He, N. Helbig, M.J. Verstraete, E. Bousquet // Computer Physics Communications. – 2021. – Vol. 264. – P. 107938.
19. Constrained Monte Carlo Method and Calculation of the Temperature Dependence of Magnetic Anisotropy / P. Asselin, R.F.L. Evans, J. Barker *et al.* // Physical Review B. – 2010. – Vol. 82, Iss. 5. – P. 054415.
20. Tetragonal Magnetostriction and Magnetoelastic Coupling in Fe-Al, Fe-Ga, Fe-Ge, Fe-Si, Fe-Ga-Al, and Fe-Ga-Ge Alloys / J.B. Restorff, M. Wun-Fogle, K.B. Hathaway *et al.* // Journal of Applied Physics. – 2012. – Vol. 111, Iss. 2. – P. 023905.
21. Kubaschewski, O. Iron-Binary Phase Diagrams / O. Kubaschewski. – Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 1982. – 185 p.

Поступила в редакцию 12 июля 2024 г.

Сведения об авторах

Матюнина Мария Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики конденсированного состояния, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: matunins.fam@mail.ru.

Загребин Михаил Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры радиофизики и электроники, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: miczag@mail.ru.

Соколовский Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физики конденсированного состояния, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: vsokolovsky84@mail.ru.

Бучельников Василий Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики конденсированного состояния, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: buche@csu.ru

**MAGNETIC EXCHANGE PARAMETERS AND THE CURIE TEMPERATURE
OF Fe₇₅Ga₂₅ ALLOY****M.V. Matyunina, M.A. Zagrebin, V.V. Sokolovskiy, V.D. Buchelnikov**

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: matunins.fam@mail.ru

Abstract. This paper studies the parameters of the magnetic exchange interaction J_{ij} for the crystal structures of D0₃ and L1₂ Fe₇₅Ga₂₅ alloys using the Hamiltonian based on Wannier functions and the density functional theory. The largest ferromagnetic interaction in the first coordination sphere for the L1₂ phase was 18 meV, which is 3 meV less than the results obtained using Green's function method. In the D0₃ phase the largest ferromagnetic interaction in the first coordination sphere is observed between atoms of different iron sublattices. The difference from the results obtained previously using the Korringa-Kohn-Rostoker method is approximately 10 meV. Using the values of the magnetic exchange parameters, the Curie temperature was calculated in a Monte Carlo simulation. For the L1₂ structure, the Curie temperature was estimated to be 1007 K, which is in good agreement with experimental data. However, for the D0₃ structure, the estimated Curie temperature of 517 K is lower than the experimental value by about 200 K.

Keywords: Fe-based alloys; first principles calculations; Wannier functions; magnetic exchange parameters; Curie temperature.

References

1. Golovin I.S., Palacheva V.V., Mohamed A.K., Balagurov A.M. Structure and Properties of Fe–Ga Alloys as Promising Materials for Electronics. *Phys. Metals Metallogr.*, 2020, Vol. 121, pp. 851–893. DOI: 10.1134/S0031918X20090057
2. Clark A.E., Hathaway K.B., Wun-Fogle M., Restorff J.B., Lograsso T.A., Keppens V.M., Petculescu G., Taylor R.A. Extraordinary Magnetoelasticity and Lattice Softening in BCC Fe–Ga Alloys. *J. Appl. Phys.*, 2003, Vol. 93, pp. 8621–8623. DOI: 10.1063/1.1540130
3. Balagurov A.M., Golovin I.S. Neutron Scattering in Studies of Fe-Based Functional Alloys (Fe–Ga, Fe–Al). *Phys.-Usp.*, 2021, Vol. 64, pp. 702–721. DOI: 10.3367/UFNe.2020.11.038886
4. Belov K.P., Kataev G.I., Levitin R.Z., Nikitin S.A., Sokolov V.I. Giant Magnetostriction. *Sov. Phys. Usp.*, 1983, Vol. 26, pp. 518–542. DOI: 10.1070/PU1983v026n06ABEH004435
5. Okamoto H. The Fe–Ga (Iron–Gallium) System. *Bulletin of Alloy Phase Diagrams*, 1990, Vol. 11, pp. 576–581. DOI: 10.1007/BF02841721
6. Kawamiya N., Adachi K., Nakamura Y. Magnetic Properties and Mössbauer Investigations of Fe–Ga Alloys. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, Vol. 33, no. 5, pp. 1318–1327. DOI: 10.1143/JPSJ.33.1318
7. Zagrebin M.A., Matyunina M.V., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. The Effect of Exchange-Correlation Potentials on Magnetic Properties of Fe–(Ga, Ge, Al) Alloys. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1389, pp. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012087
8. Matyunina M., Zagrebin M., Sokolovskiy V., Buchelnikov V. *Ab Initio* Study of Magnetic and Structural Properties of Fe–Ga Alloys. *EPJ Web of Conferences*, 2018, Vol. 185, p. 04013. DOI: 10.1051/epjconf/201818504013
9. Matyunina M.V., Zagrebin M.A., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. Magnetic Properties of Fe_{100–x}Ga_x: *Ab initio* and Monte Carlo Study. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2019, Vol. 470, pp. 118–122. DOI: 10.1016/j.jmmm.2017.11.011
10. Matyunina M.V., Zagrebin M.A., Sokolovskiy V.V., Buchelnikov V.D. Investigations of Properties of Fe–Ga Alloys from *Ab Initio* Calculations. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2017, Vol. 2, Iss. 2, pp. 231–240. (in Russ.).

11. Ebert H., Ködderitzsch D., Minár J. Calculating Condensed Matter Properties using the KKR-Green's Function Method – Recent Developments and Applications. *Rep. Prog. Phys.*, 2011, Vol. 74, pp. 096501. DOI: 10.1088/0034-4885/74/9/096501
12. Liechtenstein A.I., Katsnelson M., Antropov V., Gubanov V.A. Local Spin Density Functional Approach to the Theory of Exchange Interactions in Ferromagnetic Metals and Alloys. *J. Magn. Magn. Mater.*, 1987, Vol. 67, Iss. 1, pp. 65–74. DOI: 10.1016/0304-8853(87)90721-9
13. Wannier G.H. The Structure of Electronic Excitation Levels in Insulating Crystals. *Phys. Rev.*, 1937, Vol. 52, Iss. 3, pp. 191–197. DOI: 10.1103/PhysRev.52.191
14. Kresse G., Furthmüller J. Efficient Iterative Schemes for *Ab Initio* Total-Energy Calculations using a Plane-Wave Basis Set. *Phys. Rev. B.*, 1996, Vol. 54, Iss. 16, p. 11169. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.11169
15. Kresse G., Joubert D. From Ultrasoft Pseudopotentials to the Projector Augmented-Wave Method. *Phys. Rev. B.*, 1999, Vol. 59, Iss. 3, p. 1758. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.1758
16. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized Gradient Approximation Made Simple. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, Vol. 77, Iss. 18, p. 3865. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3865
17. Pizzi G., Vitale V., Arita R., Blügel S., Freimuth F., Géranton G., Gibertini M., Gresch D., Johnson C., Koretsune J., Ibañez-Azpiroz, H. Lee, J.-M. Lihm, D. Marchand, A. Marrazzo, Mokrousov Yu., Mustafa J.I., Nohara Y., Nomura Y., Paulatto L., Poncé S., Ponweiser T., Qiao J., Thöle F., Tsirkin S.S., Wierzbowska M., Marzari N., Vanderbilt D., Souza I., Mostofi A.A., Yates J.R. Wannier90 as a Community Code: New Features and Applications. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2020, Vol. 32, p. 165902. DOI: 10.1088/1361-648X/ab51ff
18. He X., Helbig N., Verstraete M.J., Bousquet E. TB2J: A Python Package for Computing Magnetic Interaction Parameters. *Comput. Phys. Commun.*, 2021, Vol. 264, p. 107938. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.107938
19. Asselin P., Evans R.F.L., Barker J., Chantrell R.W., Yanes R., Chubykalo-Fesenko O., Hinzke D., Nowak U. Constrained Monte Carlo Method and Calculation of the Temperature Dependence of Magnetic Anisotropy. *Phys. Rev. B*, 2010, Vol. 82, Iss. 5, p. 054415. DOI: 10.1103/PhysRevB.82.054415
20. Restorff J., Wun-Fogle M., Hathaway K.B., Clark A.E., Lograsso T.A., Petculescu G. Tetragonal Magnetostriction and Magnetoelastic Coupling in Fe-Al, Fe-Ga, Fe-Ge, Fe-Si, Fe-Ga-Al, and Fe-Ga-Ge Alloys. *J. Appl. Phys.*, 2012, Vol. 111, Iss. 2, p. 023905. DOI: 10.1063/1.3674318
21. Kubaschewski O. *Iron-Binary Phase Diagrams*. Springer Berlin, Heidelberg, 1982, 185 p. DOI: 10.1007/978-3-662-08024-5

Received July 12, 2024

Information about the authors

Matyunina Mariya Viktorovna, is Candidate of Science (Physics and Mathematics), Assistance Professor, Department of Condensed Matter Physics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: matunins.fam@mail.ru.

Zagrebina Mikhail Aleksandrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, Department of Radiophysics and Electronics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: miczag@mail.ru.

Sokolovskiy Vladimir Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, Department of Condensed Matter Physics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: vsokolovsky84@mail.ru.

Buchelnikov Vasily Dmitrievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Condensed Matter Physics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: buche@csu.ru.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 pt, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 16, № 3
2024

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 31.07.2024. Дата выхода в свет 06.08.2024.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,37.

Тираж 500 экз. Заказ 237/299. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.