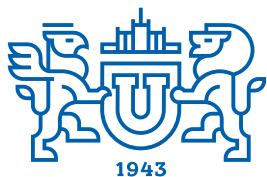


ВЕСТНИК



**ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**2025
Т. 17, № 2**

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

**Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

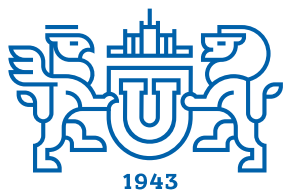
Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бровко Г.Л.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гундетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИНХА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

SERIES

2025

Vol. 17, no. 2

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
G.L. Brovko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
A.V. Trukhanov, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БОЗИЕВ О.Л. Применение априорных оценок интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа для его редукции к линейному уравнению	5
EREMCHUK M.P. Analysis of a Screened Harmonic System under Dirichlet and Neumann Boundary Conditions	13
ЗОРИН В.А., МЕЩЕРЯКОВ Р.В. Аналитический обзор нейросетевых алгоритмов обнаружения возгораний при чрезвычайных ситуациях	23
КАРАЧИК В.В. Представление функции Грина бигармонической задачи Навье	35
ПАРАМОНОВ А.А., КАЛАЧ А.В. Модификация математического аппарата почти периодического анализа для обработки пространственно-временных данных с упорядоченным аргументом	44

Механика

КАРМАНОВ Н.И., КЛИНАЧЕВА Н.Л. Математическое моделирование процессов окисления и воспламенения нелегированного плутония	50
КОВАЛЕВ Ю.М., ЛЕБЕДЕВ М.А., МАТАШ В.П., ПОМЫКАЛОВ Е.В., ЯЛОВЕЦ А.П. Определение упругих констант энергетических материалов на основе экспериментальных данных по механическому воздействию	60

Физика

ГАВРИЛЯК А.М., ГАВРИЛЯК М.В., БОРОНИН В.А., ПОДГОРНОВ Ф.В. Вклад примесных ионов в пространственно-временное распределение локального электрического поля в нематической жидкокристаллической ячейке	69
ДУБСКИЙ Г.А., МИШЕНЕВА Н.И., ДОЛГУШИН Д.М., НЕФЕДЬЕВ А.А., МАВРИНСКИЙ В.В. Способ диспергирования кремния в расплаве силумина, кристаллизующегося в неоднородном магнитном поле	82

Информация

Памяти Георгия Леонидовича Бровко	91
---	----

CONTENTS

Mathematics

BOZIEV O.L. Application of a priori Estimates of the Integral Load of the Kirchhoff Hyperbolic Equation for its Reduction to a Linear Equation.....	5
EREMCHUK M.P. Analysis of a Screened Harmonic System under Dirichlet and Neumann Boundary Conditions	13
ZORIN V.A., MESHCHERYAKOV R.V. Analytical Review of Neural Network Algorithms for Fire Detection in Emergency Situations	23
KARACHIK V.V. Representation of the Green's Function for the Biharmonic Navier Problem	35
PARAMONOV A.A., KALACH A.V. Modification of the Mathematical Apparatus of almost Periodic Analysis for Processing Spatio-Temporal Data with an Ordered Argument.....	44

Mechanics

KARMANOV N.I., KLINACHEVA N.L. Mathematical Modeling of Oxidation and Ignition Processes of Unalloyed Plutonium.....	50
KOVALEV Yu.M., LEBEDEV M.A., MATASH V.P., POMYKALOV E.V., YALOVETS A.P. Determination of Elastic Constants of Energetic Materials based on Experimental Data on Mechanical Impact	60

Physics

GAVRILYAK A.M., GAVRILYAK M.V., BORONIN V.A., PODGORNOV F.V. Contribution of Impurity Ions to Spatial-Temporal Distribution of Local Electric Field in Nematic Liquid Crystal Cell.....	69
DUBSKY G.A., MISHENEVA N.I., DOLGUSHIN D.M., NEFEDIEV A.A., MAVRINSKY V.V. Method of Dispersing Silicon in a Silumin Melt Crystallizing in an Inhomogeneous Magnetic Field	82

Information

In Memory of Georgy Brovko	91
----------------------------------	----

ПРИМЕНЕНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ИНТЕГРАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА ДЛЯ ЕГО РЕДУКЦИИ К ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ

О.Л. Бозиев^{1,2}

¹ Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Российская Федерация

² Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация

E-mail: boziev@yandex.ru

Аннотация. Целью работы является установление априорных оценок для интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа, моделирующего некоторые нелинейные колебательные процессы. В рассматриваемом случае нагрузкой является рациональная степень m/n линейной функции от нормы искомого решения в пространстве $H^1(\Omega)$. Для достижения указанной цели производятся интегральные преобразования слагаемых скалярного произведения исходного уравнения и временной производной его решения. Применение интегрального неравенства типа Гронуолла–Беллмана приводит к искомым оценкам. Таким способом установлены априорные неравенства, ограничивающие интегральную нагрузку уравнения Кирхгофа известной функцией, зависящей от правой части уравнения и начальных условий, а также от знака и вида показателя степени. Показан способ редукции уравнения Кирхгофа к линейному уравнению путем замены интегральной нагрузки правыми частями этих оценок. Приведен пример такой редукции. Описанный способ установления априорных оценок и последующей редукции нелинейного уравнения к линейному может быть применен к широкому классу нагруженных уравнений, содержащих модуль интеграла рациональной степени искомой функции или ее производной.

Ключевые слова: уравнение Кирхгофа; априорная оценка; интегральная нагрузка; редукция к линейному уравнению.

Введение

В области $Q = \{(x, t) : x \in \Omega \subseteq R^n, t \in [0, T]\}$ с границей $\partial\Omega$ класса дважды непрерывно-дифференцируемых функций будем рассматривать уравнение Кирхгофа

$$u_{tt} - a(s)\Delta u = f(x, t) \quad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \nabla u|_{\partial\Omega} = 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (2)$$

При этом

$$s = s(t) = \|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \Omega \subset R^n.$$

Уравнение вида (1) моделирует некоторые колебательные процессы, в частности, оно учитывает изменения длины струны, вызванные поперечными колебаниями. Данное уравнение относится к классу нагруженных, так как оно содержит интегральную нагрузку $a(s)$, где s – это интеграл указанного вида. В статье полагается

$$a(s) = (C_1 s + C_2)^p, C_1, C_2 > 0, p \in Q, p \neq 0.$$

В [1] для уравнения указанного вида была установлена разрешимость в целом первой смешанной задачи с однородными начальными условиями при натуральных p . В [2] разрешимость этой же задачи в целом установлена при $p = -2$. В [3] доказываются существование и единственность задачи Коши для однородного уравнения вида (1). Работы [4–9], как и большое количество других, также посвящены подобным уравнениям, в том числе и с младшими членами.

В большинстве случаев непосредственное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных невозможно. В подобных случаях часто прибегают к аппроксимации нелинейных уравнений линейными. При этом процесс, описываемый аппроксимирующим линейным уравнением, может существенно отличаться от моделируемого исходным уравнением нелинейного процесса. В настоящей работе для интегральной нагрузки уравнения устанавливаются априорные оценки, правые части которых являются известными функциями свободного члена уравнения и начальных условий. Они могут быть использованы для редукции нагруженного уравнения к ассоциированному с ним линейному уравнению путем замены ими интегральной нагрузки. Полученное таким образом аппроксимирующее линейное уравнение может быть принято за начальное приближение к исходному нагруженному уравнению в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (2). Этот прием применялся в случае одномерного уравнения вида (1) в [10, 11], где были получены априорные оценки производных решения одномерного уравнения вида (1).

В работе неоднократно используются обозначения

$$F_1(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2, \quad K_0(t) = \int_0^t F_2(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F_2(t),$$

а при доказательстве теорем возникает неравенство

$$\|u_t\|^2 \leq K_0(t). \quad (3)$$

Легко видеть, что в предположении $u \in H^1(\Omega)$ имеют место равенства

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, \quad -(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2,$$

где скалярное произведение рассматривается в смысле пространства $L_2(\Omega)$.

Для установления априорных оценок применяется

Лемма. [12, теорема 1.4] Если функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau + f(t), \quad t \geq t_0,$$

где функция $f(t)$ и неотрицательные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t f(\tau) \beta(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t \alpha(s) \beta(s) ds \right) d\tau + f(t).$$

1. Интегральная нагрузка со степенью $p = m/n$, $m, n \in N$

Рассмотрим уравнение (1) в виде

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \Delta u = f(x, t), \quad m, n \in N. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть решением задачи (4), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t, u_{tt}, \nabla \varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $(C_1 s + C_2)^{(m+n)/n}$ ограничена зависящей от t константой.

Доказательство. Скалярное произведение (1) и функции u_t имеет вид

$$(u_{tt}, u_t) - a(s)(\Delta u, u_t) = (f, u_t). \quad (5)$$

Заметим, что

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2 C_1} (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2).$$

Это позволяет записать соотношение

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрирование которого, в свою очередь, приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши:

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}. \quad (6)$$

Исключая второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t),$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму, получаем оценку (3). В левой части (6) исключим $\|u_t\|^2$, а в правой части заменим его на $K_0(t)$:

$$\frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Отсюда перейдем к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$(C_1 s + C_2)^{(m+n)/n} \leq K(t), \quad (7)$$

$$K(t) = C_1 \frac{m+n}{n} \left(\int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) \right),$$

Теорема 1 доказана.

С помощью (7) редуцируем нелинейное уравнение (4) к линейному уравнению. Для этого положим в (4)

$$(C_1 s + C_2)^{m/m} = (K(t))^{m/(m+n)},$$

что приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (K(t))^{m/(m+n)} \Delta u = f(x, t). \quad (8)$$

2. Интегральная нагрузка со степенью $p = -m/n$, $m, n \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \Delta u = f(x, t), m, n \in N. \quad (9)$$

Заметим, что при $a(s) = (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}}$ в скалярном произведении (5) имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2).$$

Продолжим его при $m = n$ и $m \neq n$.

При $m = n$ ($p = -1$) имеем

$$\frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-1} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1} \frac{d}{dt} \ln(C_1 s + C_2). \quad (10)$$

Пусть $m \neq n$. Тогда

$$\frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1} \frac{n}{n-m} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}}. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть решением задачи (9), (2) является функция $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t, u_{tt}, \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, $m, n \in N$. Тогда нижеследующие функции ограничены зависящими от t константами:

- a) $\ln(C_1s + C_2)$ при $C_1s + C_2 \geq 1, p = -1$;
 b) $\ln(C_1s + C_2)^{-1}$ при $C_1s + C_2 < 1$ и $s'(t) < 0, p = -1$;
 c) $(C_1s + C_2)^{(n-m)/n}$ при $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0, m < n$;
 d) $(C_1s + C_2)^{(m-n)/n}$ при $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0, s'(t) > 0, m > n$.

Доказательство.

a) С учетом (10) запишем

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s + C_2) \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx.$$

После интегрирования последнего перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s + C_2) \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t), \quad (12)$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s(0) + C_2).$$

Пусть $C_1s + C_2 \geq 1$. Исключая в (12) второе слагаемое левой части и применяя лемму, приходим к оценке (3).

Выбирая верхнюю границу неравенства, в правой части (12) заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$, исключая при этом первое слагаемое левой части. Это приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$\ln(C_1s + C_2) \leq K_1(t), \quad (13)$$

$$K_1(t) = C_1 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right);$$

b) Пусть $C_1s + C_2 < 1$. С учетом знака логарифма запишем (12) в виде

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) - \frac{1}{C_1} \ln \frac{C_1s(0) + C_2}{C_1s + C_2},$$

Последний член правой части исключим в силу $s(0) = \max s(t)$. После применения леммы при $F_2(t) = F_1(t)$ получаем неравенство (3).

В (11) заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$, исключая при этом первое слагаемое левой части, что приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$\ln(C_1s + C_2)^{-1} \leq K_2(t), \quad (14)$$

$$K_2(t) = C_1 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right);$$

c) С учетом (11) запишем

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1s + C_2)^{(n-m)/n} \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx. \quad (15)$$

После интегрирования перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1s + C_2)^{(n-m)/n} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t). \quad (16)$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1s(0) + C_2)^{\frac{n-m}{n}}.$$

Исключая в (16) второе слагаемое левой части с применением леммы, имеем оценку (3). Подстановка $K_0(t)$ в правую часть (16) вместо $\|u_t\|^2$ с одновременным исключением первого слагаемого левой части приводит к выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ оценке

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} \leq K(t), \quad (17)$$

$$K(t) = C_1 \frac{n-m}{n} \left(\int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) \right);$$

д) С помощью (11) перейдем к уравнению (15). Проинтегрируем его, замечая, что в силу возрастания функции s

$$\int_0^t \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} d\tau = \frac{(C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}} - (C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}}}{(C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}}} = F_0(t) < 0,$$

после чего перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} F_0(t) \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t). \quad (18)$$

Исключая второе слагаемое левой части, запишем оценку

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t).$$

Очередное применение леммы при $F_2(t) = F_1(t)$ дает оценку (3).

Вновь заменяя $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$ в правой части (18) с одновременным исключением первого слагаемого левой части, получаем неравенство

$$\frac{n}{n-m} F_0(t) \leq C_1 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right).$$

Из последнего следует, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}} \leq K(t), \quad (19)$$

$$K(t) = C_1 \frac{m-n}{n} \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right) (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим применение полученных оценок для редукцирования нелинейного уравнения (8) к соответствующим линейным уравнениям.

а) и б) Переход к равенствам в (13) и (14) позволяет перейти от (9) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp(K(t)) \Delta u = f(x, t), \quad (20)$$

в котором

$$K(t) = \begin{cases} -K_1(t), & C_1 s + C_2 \geq 1, \\ K_2(t), & C_1 s + C_2 < 1; \end{cases}$$

с) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{m-n}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (17), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{m-n}} \Delta u = f(x, t). \quad (21)$$

д) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{n-m}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (20), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{n-m}} \Delta u = f(x, t). \quad (22)$$

3. Пример

Приведем одномерный пример, соответствующий случаю с) теоремы 2. Пусть задача (9), (2) имеет вид

$$u_{tt} - \left(\int_0^1 |u_x|^2 dx + 1 \right)^{\frac{1}{2}} u_{xx} = x + t,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6}x^2(2x - 3), u_t(x, 0) = x, x \in [0, 1], u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, t \in [0, T].$$

Таким образом, в формулировке теоремы 2 имеем

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{6}x^2(2x - 3), \varphi_2(x) = x, f(x, t) = x + t, C_1 = C_2 = 1, m = 1, n = 2.$$

Найдем величины, входящие в (17):

$$\int_0^t \|f\|^2 dx = \int_0^t \int_0^1 |x + t|^2 dx d\tau = t^2 + t + \frac{1}{3}, \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, F_1(t) = \frac{1}{6}t(2t^2 + 3t + 2) + \frac{1}{3},$$

$$s(0) = \int_0^1 |u_x(x, 0)|^2 dx = \int_0^1 |\varphi_{1x}(x)|^2 dx = \int_0^1 |x^2 - x|^2 dx = \frac{1}{30}, (s(0) + 1)^{\frac{1}{2}} \approx 1,01653.$$

$$F_2(t) = 0,16667t(2t^2 + 3t + 2) + 2,36639, K_0(t) = 5,69972e^t - t^2 + 3,33333t - 2,99748,$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = 5,69972e^t - 0,25t^4 - 3,33333t^3 - 2,99748t,$$

$$K(t) = 2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319.$$

После подстановки в (21) получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \left(2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319 \right)^{-0,5} u_{xx} = x + t.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки для интегральной нагрузки $a(s) = (C_1 s + C_2)^{\pm \frac{m}{n}}$, $C_1, C_2 > 0, m, n \in N$, уравнения Кирхгофа (1) при условиях (2) и показано их применение к его линеаризации. Положительной степени интегральной нагрузки соответствует оценка (7). Для отрицательной степени рассмотрены случаи $m = n$ с оценками (12) и (14), а также случаи $m < n$ и $m > n$ с оценками (17) и (19) соответственно. Правые части полученных выражений, рассматриваемых как равенства, используются для линеаризации уравнения (1) путем замены ими интегральной нагрузки. Результатом являются уравнения (8), (20), (21), (22). Приводится одномерный пример, иллюстрирующий редукцию нагруженного уравнения к линейному. Решение последнего при исходных начально-краевых условиях может быть принято за первое приближение к решению нагруженной задачи.

Литература

1. Похожаев, С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений / С.И. Похожаев // Матем. сб. – 1975. – Т. 96 (138), № 1. – С. 152–166.
2. Похожаев, С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа / С.И. Похожаев // Дифф. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 101–108.
3. Nishihara, K. Exponential Decay of Solutions of Some Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping / K. Nishihara // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1984. – Vol. 8, no. 6. – P. 623–636.

4. Crippa, H.R. On Local Solutions of Some Mildly Degenerate Hyperbolic Equations / H.R. Crippa // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. – 1993. – Vol. 21, no. 8. – P. 565–574.
5. Ngoc, L.T.P. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions / L.T.P. Ngoc, N.T. Long // *Acta Appl Math.* – 2010. – Vol. 112. – P. 137–169.
6. Frota, C.L. Wave Equation in Domains with Nonlocally Reacting Boundary/ C.L. Frota, L.A. Medeiros, A. Vicente // *Differential and Integral Equations*. – 2011. – no. 17. – P. 1001–1020.
7. Frota, C.L. A Mixed Problem for Semilinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions in Domains with Non-Locally Reacting Boundary / C.L. Frota, L.A. Medeiros, A. Vicente // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2014. – Vol. 2014, no. 243. – P. 1–14.
8. Ono, K. Lower Decay Estimates for Non-Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations / K. Ono // *J. Math. Tokushima Univ.* – 2018. – Vol. 52. – P. 39–52.
9. Ono, K. Global Solvability for Mildly Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations in Bounded Domains / K. Ono // *J. Math. Tokushima Univ.* – 2021. – Vol. 55. – P. 11–18.
10. Бозиев, О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений/ О.Л. Бозиев // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 80. – С. 16–25.
11. Бозиев, О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части / О.Л. Бозиев // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2024. – № 89. – С. 5–17.
12. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 151 с.

Поступила в редакцию 11 декабря 2024 г.

Сведения об авторе

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик, Российская Федерация; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация, e-mail: bozиеv@yandex.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 2, pp. 5–12*

DOI: 10.14529/mmph250201

APPLICATION OF A PRIORI ESTIMATES OF THE INTEGRAL LOAD OF THE KIRCHHOFF HYPERBOLIC EQUATION FOR ITS REDUCTION TO A LINEAR EQUATION

O.L. Bozиеv^{1,2}

¹ *Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russian Federation*

² *Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation*

E-mail: bozиеv@yandex.ru

Abstract. The aim of this work is to establish a priori estimates for the integral load of the Kirchhoff equation. This equation models some nonlinear oscillatory processes. Here, the load is the rational degree m/n of a linear function of the norm of the desired solution in the space $H^1(\Omega)$. To achieve the specified goal, integral transformations of the terms of the scalar product of the original equation and the time derivative of its solution are performed. The application of Gronwall-Bellman type integral inequality leads to the desired estimates. A priori inequalities limiting the integral load of the Kirchhoff equation to a known function are established. This function depends on the right-hand side of the equation.

tion and the initial conditions, as well as on the sign and type of the exponent. The article shows a method for reducing the Kirchhoff equation to a linear equation by replacing the integral load with the right-hand sides of these estimates. An example of such a reduction is given. The described method of establishing a priori estimates and subsequent reduction of a nonlinear equation to a linear one can be applied to a wide class of loaded equations containing the modulus of the integral of the rational degree of the desired function or its derivative.

Keywords: Kirchhoff equation; a priori estimation; integral load; reduction to a linear equation.

References

1. Pokhozhaev S. I. Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy [On a Class of Quasi-Linear Hyperbolic Equations]. *Matematicheskii Sbornik*, 1975, Vol. 96(138), no. 1, pp. 152–166. (in Russ.).
2. Pokhozhaev S.I. Ob odnom kvazilineynom giperbolicheskom uravnenii Kirkhgofa [On a Quasi-linear Hyperbolic Kirchhoff Equation]. *Differential equations*, 1985, Vol. 21, no. 1, pp. 101–108. (in Russ.).
3. Nishihara K. Exponential Decay of Solutions of Some Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1984, Vol. 8, no. 6, pp. 623–636.
4. Crippa H.R. On Local Solutions of Some Mildly Degenerate Hyperbolic Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1993, Vol. 21, no. 8, pp. 565–574.
5. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions. *Acta Appl Math.*, 2010, Vol. 112, pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
6. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. Wave Equation in Domains with Nonlocally Reacting Boundary. *Differential and Integral Equations*, 2011, no. 17, pp. 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.
7. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. A Mixed Problem for Semilinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions in Domains with Non-Locally Reacting Boundary. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, Vol. 2014, no. 243, pp. 1–14. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf> (accessed 02 April 2024).
8. Ono K. Lower Decay Estimates for Non-Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations. *J. Math. Tokushima Univ.*, 2018, Vol. 52, pp. 39–52.
9. Ono K. Global Solvability for Mildly Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations in Bounded Domains. *J. Math. Tokushima Univ.*, 2021, Vol. 55, pp. 11–18.
10. Boziev O. L. O linearizatsii giperbolicheskikh uravneniy s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti s pomoshch'yu apriornoy otsenki ikh resheniy (On the Linearization of Hyperbolic Equations with Integral Load in the Main Part by a priori Estimation of Their Solutions). *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2022, no. 80, pp. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2. (in Russ.).
11. Boziev O.L. Apriornye otsenki proizvodnykh resheniy odnomernykh neodnorodnykh volnovykh uravneniy s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti (A priori Estimates for Derivative Solutions of Onedimensional Inhomogeneous Wave Equations with an Integral Load in the Main Part). *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2024, no. 89, pp. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/89/1. (in Russ.).
12. Filatov A.N., Sharova L.V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral Inequality and Theory of Nonlinear Oscillations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 151 p. (in Russ.).

Received December 11, 2024

Information about the author

Boziev Oleg Ludinovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Computer Technologies and Information Security Department, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russian Federation; Senior Researcher, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation, e-mail: boziev@yandex.ru.

ANALYSIS OF A SCREENED HARMONIC SYSTEM UNDER DIRICHLET AND NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS

M.P. Eremchuk

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
e-mail: zedicov74@mail.ru

Abstract. In this paper, a screened harmonic system with Dirichlet and Neumann boundary conditions in a domain with complex geometry is considered, and a method for analyzing such a system is proposed. The development of this method is especially relevant for solving boundary value problems for the screened Poisson equation in domains with complex geometry, which are used to describe various physical systems in mechanics, hydrodynamics, electrical engineering, and heat engineering. The proposed algorithm for analyzing a screened harmonic system under these boundary conditions makes a significant contribution to this area. The proposed method includes the continuation of the screened harmonic system through boundaries with Dirichlet and Neumann conditions. Then, the continuation is discretized by a system of linear algebraic equations. An asymptotically optimal analysis of the discrete continued screened harmonic system and an algorithm implementing the method for analyzing the screened harmonic system with optimal asymptotics in the number of arithmetic operations are carried out.

Keywords: Screened harmonic system; asymptotically optimal analysis.

Introduction

The development of an asymptotically optimal method for solving a boundary value problem for the screened Poisson equation is relevant for the analysis of screened harmonic systems in domains with complex geometry, which describe the corresponding physical systems. For the screened Poisson equation, a boundary value problem in a domain with complex geometry is used to describe a stationary physical system in nature and technology, for example, in mechanics, hydrodynamics, electrical engineering, heat engineering, etc. Such a problem was studied within the framework of similar approaches, for example, in works [1, 2]. While creating numerical techniques for the analysis of screened harmonic systems in domains with complex geometry, they are reduced to a system in rectangular domains for which asymptotically optimal marching methods are known [3]. In order to achieve results with optimal asymptotics for elliptic problems with the Neumann boundary condition, a methodology of fictitious components for solving second-order elliptic boundary value problems in the presence of a Dirichlet boundary condition was proposed, studied, and optimized in the works [4–6]. This paper is devoted to the numerical solution of a mixed boundary value problem, which describes the displacements of membrane points under transverse pressure with fixed and free edges based on its analysis as a screened harmonic system:

$$\begin{aligned} u : -\Delta \tilde{u} + \kappa \tilde{u} &= \tilde{f}|_{\Omega}, \Omega \subset R^2, \kappa \geq 0, \\ \tilde{u}|_{\Gamma_1} &= 0, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\partial\Omega = \bar{s}, s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

1. Screened harmonic system and its continuation

For the screened Poisson equation, the boundary value problem is considered as a screened harmonic system in two versions with variable index $\omega \in W$, $W = \{1, II\}$. When $\omega \in W$ we consider the problem (1), and when $W \setminus w$ we introduce the fictitious problem. From the theory of elasticity comes definition of energy of a deformed membrane:

$$\tilde{E}_{\omega}(\tilde{u}_{\omega}) = \frac{1}{2} \tilde{T}_{\omega} \int_{\Omega_{\omega}} (\tilde{u}_{\omega x}^2 + \tilde{u}_{\omega y}^2) d\Omega_{\omega} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\omega}} \tilde{K}_{\omega} \tilde{u}_{\omega}^2 d\Omega_{\omega} - \int_{\Omega_{\omega}} \tilde{P}_{\omega} \tilde{u}_{\omega} d\Omega_{\omega},$$

where the displacement of the membrane is $\tilde{u}_\omega$, the membrane tension coefficient is $\tilde{T}_\omega > 0$, the elastic foundation stiffness coefficient is $\tilde{K}_\omega \geq 0$, the pressure is $\tilde{P}_\omega$, a limited domain Ω_ω with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega_\omega$ of class C^2 without self-tangencies and self-intersections, $\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega$, $s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2}$, $\Gamma_{\omega,i} \cap \Gamma_{\omega,j} = \emptyset$, if $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. The variation of energy of membrane equates to zero

$$\delta \tilde{E}_\omega(\tilde{u}_\omega) = \tilde{T}_\omega \int_{\Omega_\omega} (\tilde{u}_{\omega x} \tilde{v}_{\omega x} + \tilde{u}_{\omega y} \tilde{v}_{\omega y}) d\Omega_\omega + \int_{\Omega_\omega} \tilde{K}_\omega \tilde{u}_\omega \tilde{v}_\omega d\Omega_\omega - \int_{\Omega_\omega} \tilde{P}_\omega \tilde{v}_\omega d\Omega_\omega = 0,$$

if $\tilde{v}_\omega = \delta \tilde{u}_\omega$, $\kappa_\omega = \tilde{K}_\omega / \tilde{T}_\omega$, $\tilde{f}_\omega = \tilde{P}_\omega / \tilde{T}_\omega$, then

$$\int_{\Omega_\omega} (\tilde{u}_{\omega x} \tilde{v}_{\omega x} + \tilde{u}_{\omega y} \tilde{v}_{\omega y} + \kappa_\omega \tilde{u}_\omega \tilde{v}_\omega) d\Omega_\omega = \int_{\Omega_\omega} \tilde{f}_\omega \tilde{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

We integrate by parts

$$\int_{\Omega_\omega} (-\Delta \tilde{u}_\omega + \kappa_\omega \tilde{u}_\omega) \tilde{v}_\omega d\Omega_\omega + \int_{s_\omega} \frac{\partial \tilde{u}_\omega}{\partial \tilde{n}_\omega} \tilde{v}_\omega ds_\omega = \int_{\Omega_\omega} \tilde{f}_\omega \tilde{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

If $\tilde{n}_\omega$ is outer normal to $\partial\Omega_\omega$, the membrane is fixed on $\Gamma_{\omega,1}$, and the membrane is free on $\Gamma_{\omega,2}$, then boundary value problem arises:

$$-\Delta \tilde{u}_\omega + \kappa_\omega \tilde{u}_\omega = \tilde{f}_\omega|_{\Omega_\omega}, \kappa_\omega \geq 0,$$

$$\tilde{u}_\omega|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_\omega}{\partial \tilde{n}_\omega}|_{\Gamma_{\omega,2}} = 0.$$

Same boundary value problem in variational form

$$\tilde{u}_\omega \in \tilde{H}_\omega : A_\omega(\tilde{u}_\omega, \tilde{v}_\omega) = F_\omega(\tilde{v}_\omega) \quad \forall \tilde{v}_\omega \in \tilde{H}_\omega, F_\omega \in \tilde{H}'_\omega \quad (2)$$

in the space of Sobolev functions

$$\tilde{H}_\omega = \tilde{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \tilde{v}_\omega \in W_2^1(\Omega_\omega) : \tilde{v}_\omega|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0 \right\}.$$

The dot product in bilinear form is defined as

$$A_\omega(\tilde{u}_\omega, \tilde{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} (\tilde{u}_{\omega x} \tilde{v}_{\omega x} + \tilde{u}_{\omega y} \tilde{v}_{\omega y} + \kappa_\omega \tilde{u}_\omega \tilde{v}_\omega) d\Omega_\omega.$$

The assumption below implies that the problem's solution exists and is unique

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty) : c_1 \|\tilde{v}_\omega\|_{W_2^1(\Omega_\omega)}^2 \leq A_\omega(\tilde{v}_\omega, \tilde{v}_\omega) \leq c_2 \|\tilde{v}_\omega\|_{W_2^1(\Omega_\omega)}^2 \quad \forall \tilde{v}_\omega \in \tilde{H}_\omega,$$

if for a given function $\tilde{f}_\omega \in L_2(\Omega_\omega)$ the linear functional is

$$F_\omega(\tilde{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \tilde{f}_\omega \tilde{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

Let us consider fictitious problem

$$-\Delta \tilde{u}_{W \setminus \omega} + \kappa_{W \setminus \omega} \tilde{u}_{W \setminus \omega} = \tilde{f}_{W \setminus \omega}, \tilde{f}_{W \setminus \omega} = 0,$$

$$\tilde{u}_{W \setminus \omega}|_{\Gamma_{W \setminus \omega,1}} = 0, \frac{\partial \tilde{u}_{W \setminus \omega}}{\partial \tilde{n}_{W \setminus \omega}}|_{\Gamma_{W \setminus \omega,2}} = 0$$

Same problem in variational form:

$$\tilde{u}_{W \setminus \omega} \in \tilde{H}_{W \setminus \omega} : A_{W \setminus \omega}(\tilde{u}_{W \setminus \omega}, \tilde{v}_{W \setminus \omega}) = F_{W \setminus \omega}(\tilde{v}_{W \setminus \omega}) \quad \forall \tilde{v}_{W \setminus \omega} \in \tilde{H}_{W \setminus \omega}, F_{W \setminus \omega}(\tilde{v}_{W \setminus \omega}) = 0.$$

A continuation of the boundary value problem is performed for the screened Poisson equation, which is regarded as an extension of the screened harmonic system:

$$\tilde{u} \in \tilde{V} : A_I(\tilde{u}, I_1 \tilde{v}) + A_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) = F_I(I_1 \tilde{v}) + F_{II}(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \quad (3)$$

on extended space

$$\tilde{V} = \tilde{V}(\Pi) = \left\{ \tilde{v} \in W_2^1(\Pi) : \tilde{v}|_{\Gamma_1} = 0 \right\},$$

assuming, that domains are

$$\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{II} = \bar{\Pi}, \Omega_1 \cap \Omega_{II} = \emptyset, \Omega_1, \Omega_{II} \subset R^2,$$

and the boundary of the domain Π is a piecewise smooth boundary of class C^2 without self-tangencies and self-intersections

$$\partial\Pi = \bar{s}, s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2$$

At the same time

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{II} = \bar{S}, S = \Gamma_{1,1} \cap \Gamma_{II,2} \neq \emptyset.$$

The solution space of the extended problem $\check{V}_1$ is the subspace of the extended space

$$\check{V}_1 = \check{V}_1(\Pi) = \left\{ \check{v}_1 \in \check{V} : \check{v}_1|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

We use arbitrary projection operators

$$I_1 : \check{V} \mapsto \check{V}_1, \check{V}_1 = im I_1, I_1 = I_1^2.$$

Additionally, we define subspaces of the extended space

$$\check{V}_3 = \check{V}_3(\Pi) = \left\{ \check{v}_3 \in \check{V} : \check{v}_3|_{\Pi \setminus \Omega_{II}} = 0 \right\}, \check{V}_0 = \check{V}_1 \oplus \check{V}_3,$$

$$\check{V}_2 = \check{V}_2(\Pi) = \left\{ \check{v}_2 \in \check{V} : A(\check{v}_2, \check{v}_0) = 0 \quad \forall \check{v}_0 \in \check{V}_0 \right\},$$

$$\check{V} = \check{V}_1 \oplus \check{V}_2 \oplus \check{V}_3 = \check{V}_1 \oplus \check{V}_{II}, \check{V}_I = \check{V}_1 \oplus \check{V}_2, \check{V}_{II} = \check{V}_2 \oplus \check{V}_3.$$

The decomposition into direct sums here is determined by the the bilinear form

$$A(\check{u}, \check{v}) = A_I(\check{u}, \check{v}) + A_{II}(\check{u}, \check{v}) \quad \forall \check{u}, \check{v} \in \check{V}.$$

We consider bilinear form to be such that following inequality takes place:

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\check{v}\|_{W_2^1(\Pi)}^2 \leq A(\check{v}, \check{v}) \leq c_2 \|\check{v}\|_{W_2^1(\Pi)}^2 \quad \forall \check{v} \in \check{V},$$

and continuation of functions with preservation of the norm and class take place in the following form:

$$\exists \check{\beta}_1 \in (0; 1], \check{\beta}_2 \in [\check{\beta}_1; 1] : \check{\beta}_1 A(\check{v}_2, \check{v}_2) \leq A_{II}(\check{v}_2, \check{v}_2) \leq \check{\beta}_2 A(\check{v}_2, \check{v}_2) \quad \forall \check{v}_2 \in \check{V}_2.$$

Let us denote solution to the problem (2) and solution to the continued problem (3) as function in the same way, and

$$\check{H}_\omega(\Omega_\omega) = \check{V}_\omega(\Omega_\omega), \omega \in \{1, II\}.$$

Proposition 1. The following dot products are equal to zero:

$$A_\omega(\check{u}_0, \check{v}_2) = A_\omega(\check{v}_2, \check{u}_0) = 0 \quad \forall \check{u}_0 \in \check{V}_0, \forall \check{v}_2 \in \check{V}_2, \omega \in \{1, II\}.$$

Proof. This is obtained from the following equalities

$$A_I(\check{u}_0, \check{v}_2) = A_I(\check{u}_1, \check{v}_2) = A(\check{u}_1, \check{v}_2) = 0 \quad \forall \check{u}_1 \in \check{V}_0, \forall \check{v}_2 \in \check{V}_2,$$

$$A_{II}(\check{u}_0, \check{v}_2) = A_{II}(\check{u}_3, \check{v}_2) = A(\check{u}_3, \check{v}_2) = 0 \quad \forall \check{u}_3 \in \check{V}_0, \forall \check{v}_2 \in \check{V}_2.$$

Statement 1. The solution to problem (3) $\check{u} \in \check{V}_\omega$ exists, is unique, matches with solution to the problem (2) on Ω_ω , and this is $\check{u}_2 \in \check{V}_2$ (zero at $\omega=1$) on $\Omega_{W \setminus \omega}$.

Proof. If $\check{u}^1, \check{u}^2$ are both solutions, and $\check{u}^0 = \check{u}^1 - \check{u}^2$, then

$$A_I(\check{u}^0, I_1 \check{v}) + A_{II}(\check{u}^0, \check{v}) = 0 \quad \forall \check{v} \in \check{V}.$$

Then $\check{u}^0 = \check{u}_2^0 \in \check{V}_2$, because for $\check{v} = \check{v}_0$ we have

$$A_I(\check{u}^0, I_1 \check{v}_0) + A_{II}(\check{u}^0, \check{v}_0) = A_I(\check{u}^0, \check{v}_0) + A_{II}(\check{u}^0, \check{v}_0) = A(\check{u}^0, \check{v}_0) = 0 \quad \forall \check{v}_0 \in \check{V}_0.$$

If $\check{v} = \check{u}_2^0$, then

$$A_I(\check{u}_2^0, I_1 \check{u}_2^0) + A_{II}(\check{u}_2^0, \check{u}_2^0) = 0,$$

and according to proposition 2.1 we have

$$A_I(\check{u}_2^0, I_1 \check{u}_2^0) = 0, A_{II}(\check{u}_2^0, \check{u}_2^0) = 0,$$

and $\check{u}_2^0 = 0$ on Ω_{II} , because $A_{II}(\cdot, \cdot)$ is dot product, and

$$0 \leq \check{\beta}_1 A(\check{u}_2^0, \check{u}_2^0) \leq A_{II}(\check{u}_2^0, \check{u}_2^0) = 0,$$

then

$$A(u_2^0, u_2^0) = 0,$$

and $\tilde{u}_2^0 = 0$ on Π , because $A(\cdot, \cdot)$ is dot product. Therefore, $\tilde{u}^0 = \tilde{u}_2^0 = 0$ on Π . The existing solution to the problems in (3) is indicated in the formulation of the statement.

2. Continued system in finite-dimensional subspace

Let us consider the discretization of the continued problem with

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2), \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{b_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{0\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{0\}, b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

In area Π we define the grid nodes

$$(x_i; y_j) = ((i-1, 5)h_1; (j-1, 5)h_2),$$

$$h_1 = b_1 / (m-1, 5), h_2 = b_2 / (n-1, 5), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

We define grid functions on grid nodes

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in R, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

We take into account boundary conditions and define linear basis

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x) \Psi^{2,j}(y), i = 2, \dots, m-1, j = 2, \dots, n-1, m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i] \Psi(x/h_1 - i + 3, 5) + \Psi(x/h_1 - i + 2, 5),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j] \Psi(y/h_2 - j + 3, 5) + \Psi(y/h_2 - j + 2, 5),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} z, & z \in [0; 1], \\ 2 - z, & z \in [1; 2], \\ 0, & z \notin (0; 2), \end{cases}$$

where function $[\cdot]$ is integer part of a number. We additionally determine that

$$\Phi^{i,j}(x; y) = 0, (x; y) \notin \Pi, i = 2, \dots, m-1, j = 2, \dots, n-1, m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

We will use the approximation of the extended space by a finite-dimensional subspace

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x; y) \right\} \subset \tilde{V}.$$

Let us consider the continued problem in a finite-dimensional subspace

$$\tilde{u} \in \tilde{V}: A_1(\tilde{u}, I_1 \tilde{v}) + A_{\Pi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = F_1(I_1 \tilde{v}) + F_{\Pi}(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Finite-dimensional subspace of solutions of the continued problem

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V} : \tilde{v}_1|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

We assume that the projection operator

$$I_1 : \tilde{V} \mapsto \tilde{V}_1, \tilde{V}_1 = \text{im} I_1, I_1 = I_1^2$$

determined as

$$I_1 \left(\sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x; y) \right) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} I_1 \left(\Phi^{i,j}(x; y) \right),$$

$$I_1 \left(\Phi^{i,j}(x; y) \right) = \begin{cases} \Phi^{i,j}(x; y), & \text{supp} \{ \Phi^{i,j} \} \subset \bar{\Omega}_1, \\ 0, & \text{supp} \{ \Phi^{i,j} \} \not\subset \bar{\Omega}_1. \end{cases}$$

We assume that, for example, for a function f set $\text{supp} \{ f \}$ denotes its support. Let us define subspaces in a finite-dimensional subspace

$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_3(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_3 \in \tilde{V} : \tilde{v}_3|_{\Pi \setminus \Omega_{\Pi}} = 0 \right\}, \tilde{V}_0 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_3,$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{V}_2(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_2 \in \tilde{V} : A(\tilde{v}_2, \tilde{v}_0) = 0 \quad \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0 \right\},$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3 = \tilde{V}_I \oplus \tilde{V}_{II}, \quad \tilde{V}_I = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2, \quad \tilde{V}_{II} = \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3.$$

We assume that the provisions on the possibility of continuing functions with preservation of the norm and class on a finite-dimensional space are fulfilled in the following form:

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1], \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1;1]: \tilde{\beta}_1 A(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq A_{II}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq \tilde{\beta}_2 A(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

3. Continued system on Euclidean space

We approximate the continued problem and obtain a system of equations

$$\bar{u} \in R^N : B\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{f} \in R^N, \quad (4)$$

where matrix B and right side $\bar{f}$ are defined as follows

$$\begin{aligned} \langle B\bar{u}, \bar{v} \rangle &= A_I(\bar{u}, I_1 \bar{v}) + A_{II}(\bar{u}, \bar{v}) \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \tilde{V}, \quad \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = F_1(I_1 \bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in \tilde{V}, \\ \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle &= (\bar{f}, \bar{v}) h_1 h_2 = \bar{f} \bar{v} h_1 h_2, \quad \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)' \in R^N, \quad N = (m-2)(n-2). \end{aligned}$$

In this system of equations, we enumerate first the basis functions $\Phi^{i,j}$ and their coefficients, if

$$\text{supp}\{\Phi^{i,j}\} \subset \bar{\Omega}_I,$$

then enumerate second the basis functions $\Phi^{i,j}$ and their coefficients, if

$$\text{supp}\{\Phi^{i,j}\} \cap \Omega_I \neq \emptyset \wedge \text{supp}\{\Phi^{i,j}\} \cap \Omega_{II} \neq \emptyset,$$

and enumerate third the basis functions $\Phi^{i,j}$ and their coefficients, if

$$\text{supp}\{\Phi^{i,j}\} \subset \bar{\Omega}_{II}.$$

With this enumeration, the vectors are

$$\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')', \quad \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2', \bar{u}_3')', \quad \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{f}_2', \bar{f}_3')'.$$

The matrix B is obtained in block form

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Additionally, we define the matrices A_I, A_{II} :

$$\langle A_I \bar{u}, \bar{v} \rangle = A_I(\bar{u}, \bar{v}), \quad \langle A_{II} \bar{u}, \bar{v} \rangle = A_{II}(\bar{u}, \bar{v}) \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \tilde{V}.$$

The matrices A_I, A_{II} are obtained in a block form

$$A_I = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

We introduce an extended matrix

$$A = A_I + A_{II} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Let us define vector subspaces

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in R^N : \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0} \right\},$$

$$\bar{V}_3 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in R^N : \bar{v}_1 = \bar{0}, \bar{v}_2 = \bar{0} \right\}, \quad \bar{V}_0 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3,$$

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in R^N : A_{11} \bar{v}_1 + A_{12} \bar{v}_2 = \bar{0}, A_{32} \bar{v}_2 + A_{33} \bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

We note that

$$R^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_I \oplus \bar{V}_{II}, \quad \bar{V}_I = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2, \quad \bar{V}_{II} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

We assume that the provisions on the possibility of continuing functions with preservation of the norm and class on a finite-dimensional space are fulfilled in the following form:

$$\exists \beta_1 \in (0; +\infty), \beta_2 \in [\beta_1; +\infty): \beta_1 \langle A\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \leq \langle A_{II}\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \leq \beta_2 \langle A\bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \quad \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

When $\omega = 1$, the continued problem in matrix form is

$$B\bar{u} = \bar{f}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

and the original and fictitious problems in matrix form are

$$A_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1, \begin{bmatrix} A_{02} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

When $\omega = II$, the continued problem in matrix form is

$$B\bar{u} = \bar{f}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{bmatrix},$$

and the original and fictitious problems in matrix form are

$$\begin{bmatrix} A_{02} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{bmatrix}, A_{11}\bar{u}_1 + A_{12}\bar{u}_2 = \bar{0}.$$

4. Asymptotically optimal analysis of continued system

Let us present a method for analyzing problem (4), if we define the extended matrix as

$$C = A_I + \gamma A_{II}, \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty),$$

and we assume that

$$\begin{aligned} \exists \gamma_1 \in (0; +\infty), \gamma_2 \in [\gamma_1; +\infty): \gamma_1^2 \langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \rangle &\leq \langle A_{II}\bar{v}_2, A_{II}\bar{v}_2 \rangle \leq \gamma_2^2 \langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \rangle \quad \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2, \bar{V}_{II} \\ \exists \alpha \in (0; +\infty): \langle A_I\bar{v}_2, A_I\bar{v}_2 \rangle &\leq \alpha^2 \langle A_{II}\bar{v}_2, A_{II}\bar{v}_2 \rangle \quad \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2, \bar{V}_{II}. \end{aligned}$$

Together with the least residuals approach and the inclusion of additional parameter in the formulation of the extended matrix, we propose method for solving problem (4)

$$\bar{u}^k \in R^N: C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), k \in N, \quad (5)$$

$$\tau_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle / \langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle, k \in N, \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_\omega, \alpha < \gamma, \text{ if } \omega = 1, \text{ then } \tau_0 = 1,$$

where the residual vectors, correction vectors and equivalent residual vectors are calculated respectively

$$\begin{aligned} \bar{r}^{k-1} &= B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1}, k \in N, \\ \bar{\eta}^{k-1} &= B\bar{w}^{k-1}, \omega, k \neq 1, k \in N. \end{aligned}$$

Let us introduce a norm stronger than the energy norm

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \rangle} \quad \forall \bar{v} \in R^N.$$

Lemma 1. In method (5), if $\omega = 1$, then

$$\|\bar{u}^1 - \bar{u}\|_{C^2} \leq 2\|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}.$$

Proof. If error in (5)

$$\bar{\psi}^k = \bar{u}^k - \bar{u}, k \in N \cup \{0\},$$

then

$$\langle C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0), C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) \rangle = \langle -A_{11}\bar{\psi}_1^0, -A_{11}\bar{\psi}_1^0 \rangle,$$

$$\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \rangle - 2\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^0 \rangle + \langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle = \langle A_{11}\bar{\psi}_1^0, A_{11}\bar{\psi}_1^0 \rangle.$$

We have

$$\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle \geq \langle A_{11}\bar{\psi}_1^0, A_{11}\bar{\psi}_1^0 \rangle,$$

then

$$\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \rangle - 2\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^0 \rangle \leq 0, \langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \rangle^2 \leq 4\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^0 \rangle^2 \leq 4\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \rangle \langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle.$$

When reducing

$$\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \rangle \leq 4\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle, \|\bar{\psi}^1\|_{C^2} \leq 2\|\bar{\psi}^0\|_{C^2}, \|\bar{u}^1 - \bar{u}\|_{C^2} \leq 2\|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}.$$

Theorem 1. In method (5) estimates are

$$\omega = 1, \|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{C^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}, \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1}, k \in \mathbb{N},$$

$$\omega = \Pi, \|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{C^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}, \varepsilon = (\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Relative errors in a norm stronger than the energy norm are estimated from above by members of infinitely decreasing geometric progressions.

Proof. Except for $\omega, k=1$, we have

$$\bar{\psi}^k = \bar{\psi}^{k-1} - \tau_k C^{-1} A_{\Pi} \bar{\psi}^{k-1}, \bar{r}^k = \bar{r}^{k-1} - \tau_k A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}.$$

We define

$$\tau_{k-1} = \frac{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle}{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1} \rangle} = \frac{\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}{\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}.$$

We have

$$\tau_{k-1} = \frac{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle}{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1} \rangle} = \frac{\langle A_{\Pi} \bar{w}^{k-1}, C \bar{w}^{k-1} \rangle}{\langle A_{\Pi} \bar{w}^{k-1}, A_{\Pi} \bar{w}^{k-1} \rangle}.$$

We mark

$$A_I \bar{w}^{k-1} = \bar{a}, A_{\Pi} \bar{w}^{k-1} = \bar{b}.$$

We note

$$\tau_k = \frac{\langle \bar{b}, \bar{a} + \gamma \bar{b} \rangle}{\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle} = \gamma - \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle} \geq \gamma - \frac{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle^{1/2} \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle^{1/2}}{\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle} \geq \gamma - \frac{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle^{1/2}}{\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle^{1/2}} \geq \gamma - \alpha > 0.$$

With selected τ_{k-1}

$$\langle \bar{r}^k, \bar{r}^k \rangle = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle - \frac{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle^2}{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1} \rangle}.$$

We introduce the relation

$$\begin{aligned} q_k^2 &= \frac{\langle \bar{r}^k, \bar{r}^k \rangle}{\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle} = 1 - \frac{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle^2}{\langle A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1}, A_{\Pi} C^{-1} \bar{r}^{k-1} \rangle \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle} = \\ &= \frac{\langle A_{\Pi} \bar{w}^{k-1}, A_{\Pi} \bar{w}^{k-1} \rangle \langle C \bar{w}^{k-1}, C \bar{w}^{k-1} \rangle - \langle A_{\Pi} \bar{w}^{k-1}, C \bar{w}^{k-1} \rangle^2}{\langle A_{\Pi} \bar{w}^{k-1}, A_{\Pi} \bar{w}^{k-1} \rangle \langle C \bar{w}^{k-1}, C \bar{w}^{k-1} \rangle} = \frac{\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle \langle \bar{a} + \gamma \bar{b}, \bar{a} + \gamma \bar{b} \rangle - \langle \bar{b}, \bar{a} + \gamma \bar{b} \rangle^2}{\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle \langle \bar{a} + \gamma \bar{b}, \bar{a} + \gamma \bar{b} \rangle}. \end{aligned}$$

We define

$$\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = a, \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle = b, \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = z.$$

We have

$$q_k^2 = \frac{ab - z^2}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)} \leq \max_{|z| \leq \sqrt{ab}} q_k^2(z) = q_k^2\left(\frac{-a}{\gamma}\right) = \frac{a}{\gamma^2 b} \leq \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = q^2,$$

because of

$$q_k^2 \geq 0, \left(q_k^2(z)\right)'_z = \frac{-2\gamma(z + a/\gamma)(z + \gamma b)}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)^2}, -\gamma b < -\frac{a + \gamma^2 b}{2\gamma} < -\sqrt{ab} < -\frac{a}{\gamma} < \sqrt{ab}.$$

We obtain

$$\langle \bar{r}^k, \bar{r}^k \rangle \leq q^2 \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle, \langle A_{II} \bar{\psi}^k, A_{II} \bar{\psi}^k \rangle \leq q^2 \langle A_{II} \bar{\psi}^{k-1}, A_{II} \bar{\psi}^{k-1} \rangle.$$

Considering

$$\begin{aligned} \omega = I, \langle C\bar{\psi}^k, C\bar{\psi}^k \rangle &\leq \gamma_1^{-2} \langle A_{II} \bar{\psi}^k, A_{II} \bar{\psi}^k \rangle \leq \gamma_1^{-2} q^{2(k-1)} \langle A_{II} \bar{\psi}^1, A_{II} \bar{\psi}^1 \rangle \leq \\ &\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2(k-1)} \langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \rangle \leq 4\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2(k-1)} \langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle, \\ \omega = II, \langle C\bar{\psi}^k, C\bar{\psi}^k \rangle &\leq \gamma_1^{-2} \langle A_{II} \bar{\psi}^k, A_{II} \bar{\psi}^k \rangle \leq \gamma_1^{-2} q^{2k} \langle A_{II} \bar{\psi}^0, A_{II} \bar{\psi}^0 \rangle \leq \\ &\leq \gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2k} \langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle, \end{aligned}$$

we conclude

$$\begin{aligned} \omega = I, \langle C\bar{\psi}^k, C\bar{\psi}^k \rangle &\leq 4\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2(k-1)} \langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle, \\ \omega = II, \langle C\bar{\psi}^k, C\bar{\psi}^k \rangle &\leq \gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2k} \langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \rangle. \end{aligned}$$

Remark 1. If in (5) $\bar{u}^{k-1} = \bar{u}$, then $\bar{u}^k = \bar{u}$.

Proof. In iterative process we obtain

$$\bar{u}^k \in R^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u} - \bar{f}), k \in N,$$

and

$$\bar{u}^k \in R^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}) = \bar{0}, \bar{u}^k - \bar{u} = \bar{0}, \bar{u}^k = \bar{u}, k \in N.$$

5. Algorithmic implementation of method

If $\omega \in W, W = \{I, II\}$, then algorithm:

1. Value of the squared norm of the initial absolute error

$$E_0 = \langle \bar{f}, \bar{f} \rangle h^2.$$

2. Initial approximation

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_\omega.$$

3. Residuals

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, k \in N.$$

4. Value of squared norm of absolute error

$$E_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle, k \in N.$$

5. Corrections

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1}, k \in N.$$

6. Equivalent residuals

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, \omega, k \neq 1, k \in N.$$

7. Iterative parameter

$$\tau_{k-1} = \begin{cases} 1, & \omega, k = 1, \\ \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle / \langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle, & \omega, k \neq 1, k \in N. \end{cases}$$

8. Next approximation

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1} \bar{w}^{k-1}, k \in N.$$

9. Stop criterion based on a given relative error $\delta \in (0; 1)$

$$E_{k-1} \leq E_0 \delta^2, k \in \mathbb{N}.$$

If the criterion did not reach, then repeat everything from step 2.

Conclusion

The main results of this work include the development of a method for analysis of a screened harmonic system under Dirichlet and Neumann boundary conditions in a domain with complex geometry, with optimal asymptotics in the number of arithmetic operations. Additionally, the paper presents an asymptotically optimal analysis of the discrete continued screened harmonic system and introduces an algorithm that implements the method for analyzing screened harmonic systems with optimal asymptotics in the number of arithmetic operations. The work contributes to the field of analysis of screened harmonic systems and provides a method for solving boundary value problems for the screened Poisson equation in areas with complex geometry.

References

1. Astrakhsantsev G.P. Method of Fictitious Domains for a Second-Order Elliptic Equation with Natural Boundary Conditions. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1978, Vol. 18, no. 1, pp 114–121. DOI: 10.1016/0041-5553(78)90012-5.
2. Ushakov A.L., Meltsaykin Y.A. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of Iterative Extensions. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2022, Vol. 15, no. 3, pp. 51–66. DOI: 10.14529/mmp220304.
3. Bank R.E. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 1977, Vol. 14, no. 5, pp. 792–829. DOI: 10.1137/0714064.
4. Kaporin I.E., Nikolaev E.S. Method of Fictitious Unknowns for Solving Difference Elliptic Boundary Value Problems in Irregular Domains. *Differential equations*, 1980, Vol. 16, no. 7, pp. 1211–1225.
5. Kaporin I.E., Nikolaev E.S. Method of Fictitious Unknowns for Solving Difference Equations of Elliptic Type in Domains of Complex Shape. *USSR Reports of the Academy of Sciences*, 1980, Vol. 251, no. 3, pp. 544–548.
6. Matsokin A.I. The Method of Fictitious Components and a Modified Difference Analogue of the Schwartz Method. *Computational methods of linear algebra*, 1980, pp. 66–77.

Received March 17, 2025

Information about the author

Eremchuk Maksim Pavlovich is Post-Graduate Student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zedicov74@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 2, pp. 13–22*

УДК 519.63

DOI: 10.14529/mmp250202

АНАЛИЗ ЭКРАНИРОВАННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

М.П. Еремчук

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
e-mail: zedicov74@mail.ru

Аннотация. Рассматривается экранированная гармоническая система с граничными условиями Дирихле и Неймана в области со сложной геометрией и предлагается метод анализа такой системы. Разработка этого метода особенно актуальна для решения краевых задач для экранированного уравнения Пуассона в областях со сложной геометрией, которые используются для описания различных физических систем в механике, гидродинамике, электротехнике и теплотехнике.

ке. Предложенный алгоритм анализа экранированной гармонической системы при этих граничных условиях вносит существенный вклад в эту область. Предложенный метод включает продолжение экранированной гармонической системы через границы с условиями Дирихле и Неймана. Затем продолжение дискретизируется системой линейных алгебраических уравнений. Проводится асимптотически оптимальный анализ дискретной продолженной экранированной гармонической системы и алгоритм, реализующий метод анализа экранированной гармонической системы с оптимальной асимптотикой по числу арифметических операций.

Ключевые слова: экранированная гармоническая система; асимптотически оптимальный анализ.

Литература

1. Астраханцев, Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями / Г.П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18, № 1. – С. 118–125.
2. Ushakov, A.L Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of Iterative Extensions / A.L. Ushakov, Y.A. Meltsaykin // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2022. – Vol. 15, № 3. – P. 51–66.
3. Bank, R.E. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems / R.E. Bank, D.J. Rose // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, № 5. – P. 792–829.
4. Капорин, И.Е. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптических краевых задач в нерегулярных областях / И.Е. Капорин, Е.С. Николаев // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 7. – С. 1211–1225.
5. Капорин, И.Е. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы / И.Е. Капорин, Е.С. Николаев // ДАН СССР – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 544–548.
6. Мацокин, А.М. Метод фиктивных компонент и модифицированный разностный аналог метода Шварца / А.М. Мацокин // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. – С. 66–77.

Поступила в редакцию 17 марта 2025 г.

Сведения об авторе

Еремчук Максим Павлович – аспирант, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zedicov74@mail.ru.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР НЕЙРОСЕТЕВЫХ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ ВОЗГОРАНИЙ ПРИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

В.А. Зорин, Р.В. Мещеряков

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: mrv@ipu.ru*

Аннотация. Благодаря развитию нейронных сетей робототехнические системы научились обнаруживать и распознавать объекты в режиме реального времени, что поспособствовало применению РТС в автономном режиме в самых различных сценариях, в том числе для обнаружения возгораний при чрезвычайных ситуациях. В статье рассматривается ряд существующих алгоритмов обнаружения на основе нейронных сетей, включая сверточные нейронные сети, региональные сверточные нейронные сети и их варианты, глубокие нейронные сети со сверточной долговременной кратковременной памятью (ConvLSTM), методы, интегрирующие глубокое обучение с корреляционной фильтрацией посредством самостоятельного обучения, сиамские нейронные сети для отслеживания целей и семейство алгоритмов YOLO (You Only Look Once). Описаны основные характеристики и различия между нейросетевыми алгоритмами, а также приведено сравнение эффективности, по критериям средней точности (mAP – mean Average Precision) и скорости обработки – частоте кадров в секунду (FPS – Frame Per Second).

Выводы статьи дают представление о компромиссах между точностью, скоростью и требованиями конкретных задач в задачах обнаружения, что позволяет сделать обоснованный выбор по применению того или иного алгоритма.

Ключевые слова: нейросетевые алгоритмы; БПЛА; обнаружение; сверточные нейронные сети; YOLO.

Введение

Надежное обнаружение возгораний является критически важным компонентом локализации чрезвычайных ситуаций. Методы, основанные на нейронных сетях, стали уравновешивающим компромиссом между вычислительной эффективностью и точностью обнаружения.

Методы глубокого обучения значительно улучшили компьютерное зрение, поэтому всё чаще используются в современных системах обнаружения и, например, предупреждения о столкновениях [1].

Технологии искусственного интеллекта (ИИ) и искусственные нейронные сети открыли возможность обрабатывать сложные данные для обнаружения, распознавания и отслеживания. Например, системы автоматического распознавания целей, базирующиеся на сверточных нейронных сетях (CNN), доказали свою эффективность в определении целей на инфракрасных изображениях при обучении на синтетических данных [2], где мерой эффективности выступил критерий высокой надежности обнаружения.

Системы обхода препятствий на базе технологий искусственного интеллекта позволяют БПЛА безопасно маневрировать и перемещаться в сложных условиях [3]. Методы машинного обучения позволяют адаптироваться к среде, распознавать препятствия и избегать их во время полета. Используемое для таких задач обучение с подкреплением показало эффективность в решении проблемы автономного избегания препятствий и отслеживания целей.

Архитектуры нейронных сетей, такие как YOLO, были разработаны для улучшения обнаружения небольших объектов за счет расширения возможностей извлечения признаков и локализации, например, для подсчета яблок в сложных садах для сбора урожая с помощью роботизированной руки [4].

В статье рассматриваются известные алгоритмы на основе нейросетей и как показатели производительности с точки зрения точности (mAP) и возможностей работы в режиме реального времени (FPS) помогают сделать наиболее предпочтительный выбор для применения.

1. Методы обнаружения, основанные на нейронных сетях

1.1. Сверточные нейронные сети (CNN)

CNN – класс методов глубокого обучения для обработки данных, которые имеют схему сетки, похожей на организацию зрительной коры животных [5], и предназначена для автоматического и адаптивного изучения пространственных иерархий признаков – от низкоуровневых до высокоуровневых шаблонов [6].

Некоторые методы обнаружения полагаются на CNN в качестве своей основной модельной архитектуры. Юнг и др. [7], Ким и др. [8] предлагают CNN для прогнозирования предупреждающих ситуаций на примерах с участием пешеходов и велосипедистов, если в первом случае авторы используют текущий кадр изображения для прогнозирования, то во втором обнаруживают и отслеживают объекты в последовательности кадров.

CNN составляют основу многих современных систем обнаружения. Они характеризуются иерархией сверточных слоев, которые извлекают пространственные объекты из изображений, за которыми следуют объединенные слои для уменьшения размерности и полностью связанные слои для классификации.

В основе CNN лежит операция свертки, которая является действием над парой матриц $A(n_x \times n_y)$ и $B(m_x \times m_y)$, результатом которого является матрица $C = A \times B$, размером $(n_x - m_y + 1) \times (m_x - m_y + 1)$.

Каждый элемент результата вычисляется как скалярное произведение матрицы B и некоторой подматрицы A такого же размера (подматрица определяется положением элемента в результате). Логический смысл свертки заключается в том, что чем больше величина элемента свертки, тем больше эта часть матрицы A была похожа на матрицу B (в смысле скалярного произведения). Поэтому матрицу A называют изображением, а матрицу B – фильтром или образцом. Для двумерного изображения A на входе и ядра свертки (фильтра) B операция свертки может быть записана в виде (1), где $A(i, j)$ – значение пикселя в позиции $A(i, j)$ изображения на входе, $K(m, n)$ – весовой коэффициент ядра свертки (фильтра) в позиции (m, n) , $C(i, j)$ – матрица на выходе в позиции (i, j) .

$$C(i, j) = (A \cdot B)(i, j) = \sum_{m=0}^{M-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (i + m, j + n) \cdot K(m, n). \quad (1)$$

Основные характеристики CNN

1. Локальные поля восприятия и общие весовые коэффициенты уменьшают количество параметров

Локальные поля восприятия и общие весовые коэффициенты – два фундаментальных принципа сверточных нейронных сетей. Вместо того чтобы соединять каждый нейрон в одном слое со всеми нейронами в предыдущем слое, нейрон в CNN связан только с небольшой локализованной областью входного изображения. Такое локальное подключение позволяет сети фиксировать пространственно-локальные узоры, такие как края или текстуры, при этом значительно сокращая общее количество параметров. В CNN один и тот же набор весовых коэффициентов (фильтров) применяется к разным областям входного изображения. Такое распределение весовых коэффициентов означает, что одни и те же объекты распознаются независимо от их положения на изображении. Повторно используя фильтры для всего входного сигнала, CNN всё больше ограничивают количество параметров по сравнению с полностью подключенными уровнями.

В совокупности эти конструктивные решения повышают эффективность вычислений в CNN и помогают избежать переобучения, поскольку сети требуется изучать меньше параметров, сохраняя при этом основные характеристики данных.

2. Алгоритм эффективен при захвате пространственных иерархий, что имеет решающее значение для распознавания объектов

Данная способность обусловлена уникальными архитектурными особенностями, которые позволяют сети фокусироваться на пространственно-локальных узорах, таких как края или текстуры, и являясь основными строительными блоками изображений, поскольку нейроны в CNN подключены только к небольшой локализованной области входного изображения.

При наложении нескольких сверточных слоев, CNN учатся обнаруживать простые закономерности в начальных слоях, которые затем объединяются в последующих слоях для формирования более сложных объектов. Это иерархическое обучение отражает то, как люди воспринимают визуальную информацию, позволяя сети распознавать объекты на различных уровнях абстракции.

1.2. Региональные сверточные нейронные сети (R-CNN) и их вариации

R-CNN. В основе работы региональных сверточных нейронных сетей лежит получение набора регионов, которые предположительно содержат объекты для классификации, и затем их дальнейшая обработка в сверточной нейронной сети. R-CNN [9] сначала генерирует предложения по регионам, используя такой алгоритм, как создание рамок [10]. Области предложений вырезаются из изображения и изменяются в размерах. Затем CNN классифицирует обрезанные и измененные в размерах области. Наконец, ограничивающие рамки предложения по региону уточняются с помощью метода опорных векторов (SVM), который обучается с использованием функций CNN. Алгоритм отличается более высокой точностью обнаружения, но низкой скоростью обработки информации.

Fast R-CNN. Как и в детекторе R-CNN, в детекторе Fast R-CNN [11] также используется алгоритм, подобный краевым блокам, для генерации предложений по регионам. В отличие от детектора R-CNN, который обрезает и изменяет размер предложений по регионам, детектор Fast R-CNN обрабатывает все изображение целиком. В то время как детектор R-CNN должен классифицировать каждый регион, Fast R-CNN объединяет функции CNN, соответствующие каждому предложению по региону. Fast R-CNN более эффективен, чем R-CNN, потому что в быстром R-CNN детекторе вычисления для перекрывающихся регионов выполняются совместно.

Скорость обработки информации повышается примерно на 5 кадров в секунду при одновременном увеличении карты примерно на 66 % для наборов данных VOC (Visual Object Classes).

Faster R-CNN. Модель Faster R-CNN [12] основана на модели Fast R-CNN. Добавляет сеть региональных предложений (RPN) для генерации региональных предложений непосредственно в сети вместо использования внешнего алгоритма, такого как пограничные блоки. RPN использует привязочные блоки для обнаружения объектов. Создание предложений по регионам в сети происходит быстрее и лучше соответствует данным. Достигает около 70 % mAP (VOC) примерно при 7 кадрах в секунду, эффективно балансируя скорость и точность.

Mask R-CNN. Модель Mask R-CNN [13] расширяет Faster R-CNN, добавляя ветку для прогнозирования маски объекта параллельно с существующей ветвью для распознавания ограничительной рамки. Модель Mask R-CNN проста в обучении и лишь немного замедляет Faster R-CNN, работая со скоростью 5 кадров в секунду. Модель полезна для задач сегментации с аналогичной точностью обнаружения (около 70 % карты).

1.3. Сети ConvLSTM

Глубокая нейронная сеть со слоями сверточной долговременной памяти – тип рекуррентной нейронной сети, объединяющая сверточные нейронные сети CNN и долгосрочную память рекуррентных LSTM-нейронных сетей для пространно-временного прогнозирования, которая имеет сверточные структуры как при переходе входного сигнала в состояние, так и при переходе от состояния к состоянию [14]. ConvLSTM определяет будущее состояние определенной ячейки в сетке по входным данным и прошлым состояниям ее локальных соседей. Это может быть легко достигнуто с помощью оператора свертки в переходах от состояния к состоянию и от входа к состоянию.

Для описания математической модели предположим, что наблюдаем динамическую систему в пространственной области, представленной сеткой $M \times N$, состоящей из M строк и N столбцов.

Внутри каждой ячейки сетки есть P измерений, которые меняются со временем. Таким образом, наблюдение в любой момент времени может быть представлено тензором $X \in RP \times M \times N$, где R обозначает область наблюдаемых признаков. Если периодически записывать наблюдения, то получим последовательность тензоров X_t . Чтобы избавиться от недостатка LSTM в части использования полных соединений при переходе от входа к состоянию и от состояния к состоянию, в которых пространственная информация не кодируется, входы X_t , выходы ячейки C_t , скрытые состояния H_t и элементы управления i_t , f_t , o_t в ConvLSTM представлены трехмерными тензорами. Можем представить их в виде векторов, расположенных на пространственной сетке. ConvLSTM определяет будущее состояние определенной ячейки в сетке по входным данным и прошлым состояниям её локальных соседей.

Этого можно легко достичь, используя оператор свертки при переходах от состояния к состоянию и от входа к состоянию. Ключевые уравнения ConvLSTM приведены в (2) где $*$ – оператор свертки, $[o]$ – произведение Адамара.

$$\begin{aligned} i_t &= \sigma(W_{xt} * X_t + W_{ht} * H_{t-1} + W_{ct}[o]C_{t-1} + b_i), \\ f_t &= \sigma(W_{xf} * X_t + W_{hf} * H_{t-1} + W_{cf}[o]C_{t-1} + b_f), \\ C_t &= f_t[o]C_{t-1} + i_t[o]\tanh(W_{xc} * X_t + W_{hc} * H_{t-1} + b_c), \\ o_t &= \sigma(W_{xo} * X_t + W_{ho} * H_{t-1} + W_{co}[o]C_{t-1} + b_o), \\ H_t &= o_t[o]\tanh(C_t). \end{aligned} \quad (2)$$

В задачах обнаружения столкновения Стрикленд и др. [15] предложили использовать ConvLSTM для обработки видео из нескольких источников. Авторы выполнили несколько проходов через нейронную сеть с отсевом, случайно сбрасывая соединения в единицах ConvLSTM, что дало оценку неопределенности и предсказанной вероятности [16]. В алгоритме повышена производительность обнаружения за счет сохранения временной согласованности между кадрами. Исследование [17] показало улучшение mAP примерно на 10 % для задач последовательного обнаружения по сравнению с традиционными покадровыми методами, которое объясняется способностью ConvLSTM эффективно фиксировать как пространственные, так и временные зависимости в последовательных данных.

ConvLSTM был применен к задачам семантической сегментации, что привело к заметному повышению производительности по показателю среднего числа пересечений (mIoU). Исследование [18] показало способность ConvLSTM моделировать временные последовательности, что способствует более точному прогнозированию сегментации.

1.4. Глубокое обучение с корреляционной фильтрацией и самообучением

Глубокое обучение с корреляционной фильтрацией и самоконтролем (Deep Learning with Correlation Filtering and Self-Supervised Learning) – достаточно новый подход, который сочетает в себе преимущества глубоких нейронных сетей с традиционными методами корреляционной фильтрации, усиленными возможностями обучения на основе немаркированных данных.

Корреляционные фильтры используются в визуальном отслеживании, поскольку они позволяют быстро сопоставлять шаблоны путем вычисления взаимных корреляций между изученными представлениями объектов и целевыми шаблонами. В платформы глубокого обучения модуль корреляционной фильтрации может быть интегрирован в качестве дифференцируемого уровня, который уточняет карты объектов, позволяя сети быстро локализовать объекты или отслеживать цели в последовательных кадрах. Такая интеграция не только ускоряет обработку, но и повышает надежность в динамических средах.

Автономное обучение решает проблему ограниченного количества помеченных данных путем постановки предварительных, которые позволяют нейросети извлекать полезные представления функций из немаркированных данных. Интегрированные в систему глубокого обучения с корреляционной фильтрацией методы самоконтроля помогают улучшить качество объектов и приводят к повышению эффективности обнаружения и отслеживания без чрезмерной зависимости от аннотированных наборов данных.

Объединив корреляционную фильтрацию с самоконтролируемым глубоким обучением, исследователи [19] разработали методы, которые используют как пространственное сопоставление с образцом, так и всестороннее изучение признаков без контроля. Такая синергия обеспечивает более точное и эффективное отслеживание и обнаружение.

1.5. Сети сиамских близнецов (Сиамские нейронные сети)

Сиамские сети (Siamese Twin Networks), названные так в честь сиамских близнецов, – две идентичные подсети с общим весом (общим весовым коэффициентом) для сравнения и сопоставления характеристик между целевым шаблоном и регионами-кандидатами в последующих кадрах. Такая архитектура позволяет модели эффективно вычислять показатели сходства, обеспечивая надежное отслеживание в режиме реального времени. Обе ветви Сиамской сети идентичны, что означает, что они извлекают похожие элементы из целевого и потенциального патчей. Такая согласованность имеет решающее значение для точного сравнения сходства. После выделения признаков используется показатель сходства на корреляционном уровне, чтобы определить, насколько область-кандидат соответствует целевому шаблону.

Благодаря оптимизированной архитектуре и распределению нагрузки Сиамские сети могут работать на высоких скоростях.

SiamFC (Fully-Convolutional Siamese Networks – полностью сверточные Сиамские сети). Пример [20], продемонстрировавший, как Сиамские сети могут быть использованы для визуального отслеживания, обеспечивая высокую производительность в режиме реального времени и устойчивость к изменениям внешнего вида объекта.

SiamRPN (Siamese Region Proposal Network – Сиамская сеть региональных предложений) [21] расширяет рамки Сиамской сети за счет включения механизма региональных предложений, который улучшает процесс отслеживания и повышает точность. SiamRPN работает со скоростью ~160 кадров в секунду.

Используя глубокое представление объектов и согласованное распределение веса, эти сети могут эффективно справляться с различиями во внешнем виде объектов, их масштабе и скрытии. Архитектура, присущая Сиамским сетям, позволяет быстро вычислять сходство, что делает их популярным выбором в решении задач с минимальной задержкой.

1.6. Алгоритмы семейства YOLO

YOLO (“You Only Look Once” – «Вы Смотрите Только Один раз») [22] представляет семейство одноступенчатых детекторов, которые предсказывают ограничительные рамки и классифицируют вероятности непосредственно по полным изображениям за одну оценку.

Сетевая структура выглядит как обычная CNN со сверточными и максимальными объединенными слоями. Математическое описание функции свертки мы рассмотрели в (1), отдельный интерес представляет описание отображения результата работы алгоритма через функцию потерь.

Предсказание ограничительной рамки имеет 5 компонентов: $(x, y, w, h, \text{доверие})$. Координаты (x, y) представляют центр рамки относительно местоположения ячейки сетки. Эти координаты нормализованы между 0 и 1. Размеры рамки (w, h) также нормализованы до $[0, 1]$ относительно размера изображения.

1. Функция потерь, связанная с прогнозируемым положением ограничительной рамки (x, y) , где x' и y' – фактическое положение на основе обучения. Считаем сумму по каждому предсказателю ограничивающей рамки $(j = 0 \dots B)$ каждой ячейки сетки $(i = 0 \dots S^2)$. 1_{ij}^{obj} – принимает значение 16, если объект присутствует в ячейке и 0 в остальных случаях.

$$\lambda_{x,y} \sum_{i=0}^{S^2} \sum_{j=0}^B \left(1_{ij}^{obj} \left((x - x')^2 + (y - y')^2 \right) \right). \quad (3)$$

2. Функция потерь, связанная с оценкой достоверности для каждого предсказателя ограничивающей рамки. C – оценка достоверности, C' – это пересечение при объединении предсказанного ограничивающего прямоугольника с основным значением истинности. $1_{ij}^{obj} = 1$, когда в ячейке

есть объект, и 0 – в противном случае, 1_{ij}^{no} – полная противоположность. Параметры λ , как и в первой части, используются для разного веса частей функций потерь. Это необходимо для повышения стабильности модели. Самый высокий штраф – для координатных предсказаний ($\lambda = 5$) и самый низкий – для доверительных предсказаний, когда объект отсутствует ($\lambda_{no} = 0,5$).

$$\sum_{i=0}^{S^2} \cdot \sum_{j=0}^B 1_{ij}^{obj} (C_i - C'_i)^2 + \lambda_{no} \sum_{i=0}^{S^2} \cdot \sum_{j=0}^B 1_{ij}^{no} (C_i - C'_i)^2. \quad (4)$$

Детальную эволюцию модели от 1-й до 11-й версии приводить не будем, лишь отметив основные изменения некоторых из них.

YOLO v3 [23] балансирует скорость и точность, обеспечивая около 33 % отображения на COCO при скорости примерно 30 кадров в секунду.

YOLO v4 дополнительно оптимизирует сетевую архитектуру, достигая примерно 43 % отображения на COCO при аналогичной производительности в реальном времени, со скоростью в реальном времени ~ 65 кадров в секунду на Tesla V100 [24].

YOLO v8 предлагает передовую производительность в плане точности и скорости [25]. Основываясь на достижениях предыдущих версий, YOLOv8 представила новые функции и оптимизации, которые позволяют решать различные задачи обнаружения объектов в широком спектре приложений. Модель была разработана путем интеграции модуля блока остаточной-расширенной повторной параметризации с расширением, обобщенной сети пирамид признаков и функции потерь. Усовершенствованная модель была обучена и оценена на комплексном наборе данных, достигнув точности – 81,43 %, полноты – 68,48 % и значений mAP50 – 81,68 %.

YOLO v11 – новейшая модель YOLO [26], обеспечивающая самую высокую производительность (SOTA) в различных задачах, включая обнаружение объектов, сегментацию, оценку позы, отслеживание и классификацию, использует возможности различных приложений и областей ИИ.

Сравнивая последние версии модели, следует отметить, что YOLOv9 демонстрирует существенную точность, но испытывает трудности с обнаружением мелких объектов и эффективностью, тогда как YOLOv10 демонстрирует относительно более низкую точность из-за архитектурных решений, которые влияют на его производительность при обнаружении перекрывающихся объектов, но превосходит их по скорости и эффективности. YOLOv11 неизменно демонстрирует высокую производительность с точки зрения точности, скорости, вычислительной эффективности и размера модели. Модель YOLOv11m достигла замечательного баланса точности и эффективности, набрав баллы mAP50-95 0,795, 0,81 и 0,325 для наборов данных Traffic Signs, African Wildlife и Ships соответственно, при этом сохраняя среднее время вывода 2,4 мс, размер модели 38,8 Мб и около 67,6 GFLOP в среднем [27].

В исследовании [28] удалось достичь высоких скоростей обработки изображения. YOLOv10 менее точен, чем YOLO11 [27], но превзошел по скорости и эффективности обработки. Несмотря на то, что алгоритмы демонстрируют многообещающую производительность, все еще есть возможности для совершенствования.

Высокая скорость и высокая точность делают семейство YOLO перспективным в решении задач БПЛА.

2. Сравнительная оценка

В таблице приведен сравнительный обзор нескольких алгоритмов на основе нейросетей, включая детекторы объектов и алгоритмы отслеживания, с приблизительными показателями производительности и примечательными особенностями. Значения mAP (средняя точность) и FPS (кадров в секунду) зависят от наборов данных (VOC или COCO для детекторов) и аппаратных настроек, используемых в соответствующих исследованиях. Для алгоритмов отслеживания, таких как SiamFC, SiamRPN, ConvLSTM, и подходов, использующих корреляционную фильтрацию с самообучением, показатель mAP напрямую неприменим. Для алгоритма SiamFC используется другая метрика – отслеживание.

Сравнение некоторых нейросетевых алгоритмов

пп	Алгоритм	mAP	FPS, к/с	Особенность и применимость к поиску возгораний
1	R-CNN	~58 % (VOC)	< 1	Использует выборочный поиск для генерации предложений по регионам и применяет CNN к каждому варианту из них независимо. Точный, но затратный с точки зрения вычислений. Применяется при ограниченных площадях наблюдения с короткими временами задержек.
2	Fast R-CNN	~66 % (VOC)	~5	Вводит RoI (области интереса) для совместного использования функций свертки в предложениях, сокращая избыточные вычисления и повышая скорость по сравнению с R-CNN. Применяется при средних площадях мониторинга с выделением областей возгорания.
3	Faster R-CNN	~70 % (VOC)	~7	Включает сеть региональных предложений (RPN), сочетая высокую точность с повышенной скоростью. Применяется при средних площадях мониторинга с выделением областей возгорания.
4	Mask R-CNN	~70 % (VOC) (обнаруж.)	~5	Расширяет R-CNN, добавляя ветвь сегментации, которая предоставляет маски объектов на уровне пикселей наряду с ограничивающими рамками. Применяется при средних площадях мониторинга с выделением областей с последующей сегментацией и классификацией.
5	YOLO v8	~64–74 %	~80–200+	Популярная модель семейства YOLO, оптимизированная как для повышения точности обнаружения, так и для быстрого вывода в реальном времени на современном оборудовании. Поставляется в нескольких размерах, которые обеспечивают компромисс между скоростью и точностью. Позволяет определять местоположение и тип возгорания с детализацией.
6	YOLO v11	~76 % (COCO, ва-риат.)	~100–290*	Последняя в серии YOLO, основанная на разработках своих предшественников, особенно YOLOv8. Предлагает пять масштабированных моделей от нано до сверхбольших. Включает в себя многочисленные приложения, такие как обнаружение объектов, сегментация экземпляров, классификация изображений, оценка позы и ориентированное обнаружение объектов. Позволяет определить местоположение и тип возгорания с детализацией.
7	SiamFC	N/A *	~80–90	Разработан для визуального отслеживания путем изучения метрики сходства между целевым шаблоном и регионами-кандидатами; отличается скоростью и простой работы в реальном времени. Позволяет определять фронт горения.
8	SiamRPN	N/A*	~150–200	Улучшает SiamFC за счет интеграции механизма предложения региона для более точной локализации цели; широко используется для приложений высокоскоростного отслеживания. Позволяет определять фронт горения.
9	ConvLSTM (for Sequential Detection)	+~10 %	~25–30 (прибл.)	Включает сверточные слои LSTM для захвата как пространственных, так и временных зависимостей в последовательных данных, что приводит к повышению точности обнаружения в видеопотоках по сравнению с независимой обработкой кадров. Позволяет проводить некоторую семантическую классификацию возгораний
10	DL with Correlation Filtering and Self-Supervised Learning	+~5–10 %	~60	Объединяет традиционные методы корреляционной фильтрации с глубоким изучением функций; самообучение сводит к минимуму зависимость от помеченных данных, улучшая пространственное сопоставление и повышая устойчивость к изменениям внешнего вида. Сочетание интерпретации последовательности выявления и классификации возгораний.

3. Обсуждение

Выбор алгоритмов часто предполагает компромисс между скоростью и точностью. Двухступенчатые детекторы, такие как Faster R-CNN и Mask R-CNN, обеспечивают высокую точность обнаружения, но обычно работают медленнее, что может ограничить их использование в задачах реального времени.

Одноступенчатые детекторы, такие как YOLO, обеспечивают высокую скорость вывода, что делает их идеальными для БПЛА, требующих быстрого принятия решений, а вариативность размеров моделей внутри семейства делает их практически идеальным выбором.

Алгоритмы ConvLSTM и Сиамские нейросети вводят дополнительные измерения – временную согласованность и надежное отслеживание, которые имеют решающее значение для изменяющейся обстановки, в которой работают РТС.

Интеграция корреляционной фильтрации с самообучением ещё больше расширяет возможности систем обнаружения, особенно в сценариях с ограниченным количеством помеченных данных.

Представленные в таблице особенности позволяют выбирать нейросетевые алгоритмы под имеющиеся задачи мониторинга возгораний и имеющиеся вычислительные ресурсы.

Выводы

В статье рассмотрены нейросетевые алгоритмы, возможные для применения на борту РТС для обнаружения возгораний при чрезвычайных ситуациях, приводится сравнение методов обнаружения и излагаются рекомендации по выбору соответствующего подхода с учетом операционных ограничений и поставленных задач.

Выбор подходящего алгоритма зависит от поставленных задач и имеющихся вычислительных ресурсов, например, в задачах, когда точность важнее скорости, следует применять двухступенчатые детекторы на основе региональных сверточных нейросетей, таких как Faster R-CNN. Для работы в реальном времени предпочтительнее одноступенчатые детекторы, такие как YOLO, которые обладают значительными преимуществами в скорости, что делает их подходящими для сценариев с быстро движущимися РТС. В задачах отслеживания подходы ConvLSTM и Сиамские сети повышают производительность видеопоследовательностей за счет использования временной памяти и надежного сопоставления по сходству. В задачах по адаптивности в условиях нехватки данных подходят методы, сочетающие глубокое обучение с корреляционной фильтрацией и обучением под контролем, которые предоставляют надежные альтернативы, когда количество помеченных данных ограничено. Гибридный подход, использующий сильные стороны нескольких алгоритмов, может предложить наилучшее решение для сложных задач, которые требуется решить на борту РТС.

Перспективным направлением развития рассмотренных алгоритмов является создание специализированных полигонов для апробации и тестирования обнаружения возгораний.

Литература

1. Chitraranjan, C. Vision-Based Collision Warning Systems with Deep Learning: A Systematic Review / C. Chitraranjan, V. Vipulanathan, T. Sritharan // *J Imaging*. – 2025. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 64.
2. CNN-Based Target Recognition and Identification for Infrared Imaging in Defense Systems / A. d'Acremont, R. Fablet, A. Baussard, G. Quin // *Sensors*. – 2019. – Vol. 19, Iss. 9. – P. 2040.
3. Autonomous Obstacle Avoidance and Target Tracking of UAV: Transformer for Observation Sequence in Reinforcement Learning / W. Jiang, T. Cai, G. Xu, Y. Wang // *Knowledge-Based Systems*. – 2024. – Vol. 290. – 111604.
4. Enhanced Deep Learning Model for Apple Detection, Localization, and Counting in Complex Orchards for Robotic Arm-Based Harvesting / T. Jin, X. Han, P. Wang *et al.* // *Smart Agricultural Technology*. – 2025. – Vol. 10. – 100784.
5. Fukushima, K. Neocognitron: a Self Organizing Neural Network Model for a Mechanism of Pattern Recognition Unaffected by Shift in Position / K. Fukushima // *Biological Cybernetics*. – 1980. – Vol. 36. – P. 193–202.
6. Convolutional Neural Networks: an Overview and Application in Radiology / R. Yamashita, M. Nishio, R.K.G. Do, K. Togashi // *Insights into Imaging*. – 2018. – Vol. 9. – P. 611–629.

7. End-to-End Pedestrian Collision Warning System based on a Convolutional Neural Network with Semantic Segmentation / H. Jung, M.K. Choi, K. Soon, W.Y. Jung // Proc. 2018 IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE); Las Vegas, NV, USA, 12–14 January 2018, – P. 1–3.
8. Predicting Vehicle Collisions using Data Collected from Video Games / H. Kim, K. Lee, G. Hwang, C. Suh // Mach. Vis. Appl. – 2021. – Vol. 32. – Article no. 93.
9. Rich Feature Hierarchies for Accurate Object Detection and Semantic Segmentation / R. Girshick, J. Donahue, T. Darrell, J. Malik // CVPR '14 Proc. 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2014. – P. 580–587.
10. Zitnick, C.L. Edge Boxes: Locating Object Proposals from Edges / C.L. Zitnick, P. Dollar // Computer Vision-ECCV. – 2014. – P. 391–405.
11. Girshick, R. Fast R-CNN / R. Girshick // 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), Santiago, Chile, 2015. – P. 1440–1448.
12. Faster R-CNN: Towards Real-Time Object Detection with Region Proposal Networks / S. Ren, K. He, R. Girshick, J. Sun // 2015 – <https://arxiv.org/abs/1506.01497> (дата обращения 12.03.2025)
13. Mask R-CNN / K. He, G. Gkioxari, P. Dollár, R. Girshick // 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), Venice, Italy, 2017. – 2017. – P. 2980–2988.
14. Convolutional LSTM Network: a machine learning approach for precipitation nowcasting / X. Shi, Z. Chen, H. Wang *et al.* // Proc. 29th International Conference on Neural Information Processing Systems - Volume 1 (NIPS'15), Vol. 1. MIT Press, Cambridge, MA, USA. – 2015 – P. 802–810
15. Strickland, M. Deep Predictive Models for Collision Risk Assessment in Autonomous Driving / M. Strickland, G. Fainekos, H.B. Amor // Proc. 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA); Brisbane, Australia. 21–25 May 2018. – 2018. – P. 4685–4692.
16. Gal, Y. Uncertainty in Deep Learning / Y. Gal // 2016. – <http://106.54.215.74/2019/20190729-liuzy.pdf> (дата обращения 12.03.2025)
17. https://github.com/hunwenpinghao/SSD_ConvLSTM_final (дата обращения 12.03.2025)
18. Nabavi, S.S. Future Semantic Segmentation with Convolutional LSTM / S.S. Nabavi, M. Rochan, Y. Wang // British Machine Vision Conference. – 2018. – <https://arxiv.labs.arxiv.org/html/1807.07946> (дата обращения 12.03.2025)
19. Self-Supervised Context-Aware Correlation Filter for Robust Landmark Tracking in Liver Ultrasound Sequences / L. Ma, J. Wang, S. Gong *et al.* // Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik. – 2024. – Vol. 69, Iss. 4. – P. 383–394.
20. Fully-Convolutional Siamese Networks for Object Tracking / L. Bertinetto, J. Valmadre, J.F. Henriques *et al.* // Computer Vision – ECCV 2016 Workshops. ECCV 2016. Lecture Notes in Computer Science. – Springer, Cham, 2016. – Vol. 9914.
21. High Performance Visual Tracking with Siamese Region Proposal Network / B. Li, J. Yan, W. Wu *et al.* // 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Salt Lake City, UT, USA. – 2018. – P. 8971–8980.
22. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection / J. Redmon, S. Divvala, R. Girshick, A. Farhadi // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Las Vegas, NV, USA. – 2016. – P. 779–788.
23. Redmon, J. YOLOv3: An Incremental Improvement / J. Redmon, A. Farhadi // 2018. – <https://pjreddie.com/media/files/papers/YOLOv3.pdf> (дата обращения 10.03.2025)
24. Bochkovskiy, A. YOLOv4: Optimal Speed and Accuracy of Object Detection / A. Bochkovskiy, C.-Y. Wang, H.-Y. Liao // arXiv: Computer Vision and Pattern Recognition. – 2020 – <https://arxiv.org/abs/2004.10934> (дата обращения 11.03.2025).
25. Jocher, G. Ultralytics YOLOv8, 8.0.0 / G. Jocher, A. Chaurasia, J. Qiu // 2023 – <https://github.com/ultralytics/ultralytics> (дата обращения 11.03.2025)
26. <https://docs.ultralytics.com/models/yolo11/> (дата обращения 13.03.2025)
27. Evaluating the Evolution of YOLO (You Only Look Once) Models: A Comprehensive Benchmark Study of YOLO11 and Its Predecessors / N. Jegham, C.Y. Koh, M. Abdelatti, A. Hendawi // 2024. – <https://arxiv.org/html/2411.00201v1>.
28. Al Rabbani, A.M. YOLOv11 for Vehicle Detection: Advancements, Performance, and Applications in Intelligent Transportation Systems. / A.M. Al Rabbani // 2024. – <https://arxiv.org/html/2410.22898v1>

Поступила в редакцию 18 марта 2025 г.

Сведения об авторах

Зорин Василий Александрович – соискатель, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7308-8387>, e-mail: v.a.zorin@mail.ru.

Мещеряков Роман Валерьевич – доктор технических наук, профессор РАН, директор Центра интеллектуальных робототехнических систем, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1129-8434>, e-mail: mrv@ipu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 2, pp. 23–34*

DOI: 10.14529/mmph250203

ANALYTICAL REVIEW OF NEURAL NETWORK ALGORITHMS FOR FIRE DETECTION IN EMERGENCY SITUATIONS

V.A. Zorin, R.V. Meshcheryakov

*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow,
Russian Federation
E-mail: mrv@ipu.ru*

Abstract. Advances in neural networks have enabled unmanned aerial vehicles (UAVs) to detect and recognize objects in real time, which has facilitated the use of UAVs autonomously in a variety of scenarios, including fire detection in emergency situations. The paper reviews a number of existing neural network-based detection algorithms, including convolutional neural networks, regional convolutional neural networks and their variants, deep neural networks with convolutional long short-term memory (ConvLSTM), methods integrating deep learning with correlation filtering through self-training, Siamese neural networks for target tracking, and the YOLO (You Only Look Once) family of algorithms. The main characteristics and differences between neural network algorithms are described, and a comparison of their performance in terms of mean average precision (mAP) and frame rate per second (FPS) is given. The conclusions of the article provide insight into the trade-offs between accuracy, speed and task-specific requirements in detection tasks, which allows one to make an informed choice on the use of one or another algorithm.

Keywords: *Neural network algorithms; UAVs; detection; convolutional neural networks; YOLO.*

References

1. Chitraranjan C., Vipulanathan V., Sritharan T. Vision-Based Collision Warning Systems with Deep Learning: A Systematic Review. *J Imaging*, 2025, Vol. 11, Iss. 2, p. 64. DOI: 10.3390/jimaging11020064
2. d'Acremont A., Fablet R., Baussard A., Quin G. CNN-Based Target Recognition and Identification for Infrared Imaging in Defense Systems. *Sensors*, 2019, Vol. 19, Iss. 9, p. 2040. DOI: 10.3390/s19092040
3. Jiang W., Cai T., Xu G., Wang Y. Autonomous Obstacle Avoidance and Target Tracking of UAV: Transformer for Observation Sequence in Reinforcement Learning. *Knowledge-Based Systems*, 2024, Vol. 290, 111604. DOI: 10.1016/j.knosys.2024.111604
4. Jin T., Han X., Wang P., Zhang Zh., Guo J., Ding F. Enhanced Deep Learning Model for Apple Detection, Localization, and Counting in Complex Orchards for Robotic Arm-Based Harvesting. *Smart Agricultural Technology*, 2025, Vol. 10, 100784. DOI: 10.1016/j.atech.2025.100784.
5. Fukushima K. Neocognitron: a Self Organizing Neural Network Model for a Mechanism of Pattern Recognition Unaffected by Shift in Position. *Biological Cybernetics*, 1980, Vol. 36, pp. 193–202. DOI: 10.1007/BF00344251

6. Yamashita R., Nishio M., Do R.K.G., Togashi K. Convolutional Neural Networks: an Overview and Application in Radiology. *Insights into Imaging*, 2018, Vol. 9, pp. 611–629. DOI: 10.1007/s13244-018-0639-9
7. Jung H., Choi M.K., Soon K., Jung W.Y. End-to-End Pedestrian Collision Warning System based on a Convolutional Neural Network with Semantic Segmentation. *Proc. 2018 IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE)*, Las Vegas, NV, USA, 12–14 January 2018, pp. 1–3.
8. Kim H., Lee K., Hwang G., Suh C. Predicting Vehicle Collisions using Data Collected from Video Games. *Mach. Vis. Appl.*, 2021, Vol. 32, Article no. 93. DOI: 10.1007/s00138-021-01217-2
9. Girshick R., Donahue J., Darrell T., Malik J. Rich Feature Hierarchies for Accurate Object Detection and Semantic Segmentation. *CVPR '14 Proc. 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014, pp. 580–587.
10. Zitnick C.L., Dollar P. Edge Boxes: Locating Object Proposals from Edges. *Computer Vision-ECCV*, 2014, pp. 391–405.
11. Girshick R. Fast R-CNN. *Proc. 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Santiago, Chile, 2015, pp. 1440–1448, DOI: 10.1109/ICCV.2015.169
12. Ren S., He K., Girshick R., Sun J. Faster R-CNN: Towards Real-Time Object Detection with Region Proposal Networks. 2015. <https://arxiv.org/abs/1506.01497> (12.03.2025)
13. He K., Gkioxari G., Dollár P., Girshick R. Mask R-CNN. *Proc. 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Venice, Italy, 2017, pp. 2980–2988, DOI: 10.1109/ICCV.2017.322
14. Shi X., Chen Z., Wang H., Yeung D.-Y., Wong W.-K., Woo W.-C. Convolutional LSTM Network: a Machine Learning Approach for Precipitation Nowcasting. *Proc. 29th International Conference on Neural Information Processing Systems – Vol. 1 (NIPS'15)*, Vol. 1, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2015, pp. 802–810.
15. Strickland M., Fainekos G., Amor H.B. Deep Predictive Models for Collision Risk Assessment in Autonomous Driving. *Proc. 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Brisbane, Australia, May 21–25, 2018, pp. 4685–4692. DOI: 10.1109/icra.2018.8461160
16. Gal Y. *Uncertainty in Deep Learning*. 2016. <http://106.54.215.74/2019/20190729-liuzy.pdf> (12.03.2025)
17. https://github.com/hunwenpinghao/SSD_ConvLSTM_final (12.03.2025)
18. Nabavi S.S., Rochan M., Wang Y. Future Semantic Segmentation with Convolutional LSTM. *Proc. British Machine Vision Conference*, 2018. <https://arxiv.labs.arxiv.org/html/1807.07946> (12.03.2025)
19. Ma L., Wang J., Gong S., Lan L., Geng L., Wang S., Feng X. Self-Supervised Context-Aware Correlation Filter for Robust Landmark Tracking in Liver Ultrasound Sequences. *Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik*, 2024, Vol. 69, Iss. 4, pp. 383–394. DOI: 10.1515/bmt-2022-0489
20. Bertinetto L., Valmadre J., Henriques J.F., Vedaldi A., Torr P.H.S. Fully-Convolutional Siamese Networks for Object Tracking. In: Hua, G., Jégou, H. (eds) *Computer Vision – ECCV 2016 Workshops. ECCV 2016. Lecture Notes in Computer Science*, 2016, Vol. 9914. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-48881-3_56
21. Li B., Yan J., Wu W., Zhu Z., Hu X. High Performance Visual Tracking with Siamese Region Proposal Network. *Proc. 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Salt Lake City, UT, USA, 2018, pp. 8971–8980. DOI: 10.1109/CVPR.2018.00935
22. Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection. *Proc. 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Las Vegas, NV, USA, 2016, pp. 779–788. DOI: 10.1109/CVPR.2016.91
23. Redmon J., Farhadi A. YOLOv3: An Incremental Improvement. 2018, <https://pjreddie.com/media/files/papers/YOLOv3.pdf> (10.03.2025)
24. Bochkovskiy A., Wang C.-Y., Liao H.-Y. YOLOv4: Optimal Speed and Accuracy of Object Detection. *arXiv: Computer Vision and Pattern Recognition*, 2020, <https://arxiv.org/abs/2004.10934> (дата обращения 11.03.2025)
25. Jocher G., Chaurasia A., Qiu J. Ultralytics YOLOv8, 8.0.0, 2023, <https://github.com/ultralytics/ultralytics> (11.03.2025)
26. <https://docs.ultralytics.com/models/yolo11/> (13.03.2025)

27. Jegham N., Koh C.Y., Abdelatti M., Hendawi A. (2024). Evaluating the Evolution of YOLO (You Only Look Once) Models: A Comprehensive Benchmark Study of YOLO11 and Its Predecessors. <https://arxiv.org/html/2411.00201v1>

28. Al Rabbani A.M. YOLOv11 for Vehicle Detection: Advancements, Performance, and Applications in Intelligent Transportation Systems. 2024, <https://arxiv.org/html/2410.22898v1>

Received March 18, 2025

Information about the authors

Zorin Vasiliy Aleksandrovich is Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7308-8387>, e-mail: v.a.zorin@mail.ru.

Meshcheryakov Roman Valer'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor of the Russian Academy of Sciences, Director of the Center for Intelligent Robotic Systems, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1129-8434>, e-mail: mrv@ipu.ru.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НАВЬЕ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Исследуется функция Грина бигармонической задачи Навье в единичном шаре. В отличие от ранее полученного автором вида функции Грина здесь приводится такое ее представление, в котором сингулярность фундаментального решения бигармонического уравнения явно выражена. Затем на основе функции Грина приводится интегральное представление решения задачи Навье в единичном шаре. В заключение дается представление решения задачи Навье для однородного бигармонического уравнения без использования функции Грина. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: задача Навье; бигармоническое уравнение; функция Грина; элементарное решение.

Введение. Явный вид функций Грина для разных эллиптических краевых задач приводится во многих исследованиях. Например, в двухмерном случае, в работе [1], на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений найден в работах [2, 3], а в [4–6] приведен явный вид функций Грина задачи Дирихле для этих же уравнений в единичном шаре. В работе [7] на основании интегрального представления функций класса $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ даются интегральные представления решений задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач.

В настоящей заметке будет найдено новое представление функции Грина задачи Навье для бигармонического уравнения в единичном шаре с явно выраженной сингулярностью, а также будет дано новое представление решения задачи Навье для однородного бигармонического уравнения без явного использования функции Грина.

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ при $n \geq 2$ имеет вид $G_2(x, \xi) = E(x, \xi) - E^*(x, \xi)$, где $E(x, \xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа [8] и $E^*(x, \xi) = E\left(\frac{x}{|x|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$. По аналогии с этим в работе [4] было определено элементарное решение бигармонического уравнения

$$E_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)} |x - \xi|^{4-n}, & n > 4, n = 3 \\ -\frac{1}{4} \ln |x - \xi|, & n = 4 \\ \frac{|x - \xi|^2}{4} (\ln |x - \xi| - 1), & n = 2 \end{cases}, \quad (1)$$

и доказано, что при $n \geq 3$ функция вида

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E^*(x, \xi), \quad (2)$$

где $E_4^*(x, \xi) = E_4\left(\frac{x}{|x|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$ является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S , удовлетворяющей равенствам $G_4(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \partial G_4(x, \xi) / \partial \nu|_{\xi \in \partial S} = 0$ при $x \in S$. В случае $n = 2$ последнюю строчку в формуле (1) нужно слегка подправить: вместо -1 надо взять $-1/2$.

Задача Навье [9, 10] для бигармонического уравнения (в [1] она называется задачей Дирихле-2) заключается в нахождении функции $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), x \in S, \quad u|_{\partial S} = \varphi_0, \Delta u|_{\partial S} = \varphi_1. \quad (3)$$

В работе [4, теорема 2] установлено, что функция Грина задачи Навье (3) находится по формуле

$$G_4^n(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy, \quad (4)$$

где ω_n – площадь единичной сферы. Характер сингулярности у функции $G_4^n(x, \xi)$ здесь явно не виден. Поэтому дадим другое представление функции Грина задачи Навье, похожее на формулу (2).

Представление функции Грина. В дальнейшем изложении будет необходим следующий оператор $\Lambda u = \sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}$.

Теорема 1. 1) Функция $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)$, определяемая равенством

$$\mathcal{G}_4^n(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt, \quad (5)$$

где $x \neq \xi \in S$, является бигармонической по $\xi \neq x \in S$ и удовлетворяет равенствам $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \Delta_\xi \mathcal{G}_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$ при $x \in S$.

2) Если функция $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$ является решением задачи Навье (3), то она может быть представлена в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \Delta_\xi \mathcal{G}_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_0(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{G}_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_1(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_4^n(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Доказательство. 1) Бигармоничность функции $E_4(x, \xi)$ при $x \neq \xi \in S$ и функции $E_4^*(x, \xi)$ при $x, \xi \in S$ была установлена в [4, теорема 2.2]. Известно также, что функция $E^*(x, t\xi)$ – гармоническая при $x, \xi \in S$, а значит, функция $(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)E^*(x, t\xi)$ – бигармоническая по $x, \xi \in S$. Поэтому функция $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)$ – бигармоническая. Равенство $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$ выполнено, поскольку

$$\left| \frac{x}{|x|} - |x| \xi \right|^2 = 1 - 2x\xi + |\xi|^2 |x|^2 = |x - \xi|^2$$

на ∂S , а значит, $E_4(x, \xi) = E_4^*(x, \xi)|_{\xi \in \partial S}$. В работе [4] было также установлено, что

$$\Delta_\xi E_4(x, \xi) = -E(x, \xi), \text{ а поскольку } E_4^*(x, \xi) = E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x| \xi\right), \text{ то } \Delta_\xi E_4^*(x, \xi) = -|x|^2 E^*(x, \xi).$$

Воспользуемся двумя следующими равенствами. Пусть $v(\xi)$ – гармоническая функция по $\xi \in S$, тогда

$$\Delta_\xi (|\xi|^2 v(\xi)) = 2nv(\xi) + 4\Delta_\xi v(\xi) = 2(2\Delta_\xi + n)v(\xi), \quad (7)$$

$$(2\Delta_\xi + n) \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt = 2v(\xi). \quad (8)$$

Равенство (7) легко проверяется, а равенство (8) следует из равенств

$$2\Delta_\xi \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt = 2 \int_0^1 t(v(t\xi))'_t t^{n/2-1} dt = 2v(t\xi) t^{n/2} \Big|_0^1 - n \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt = 2v(\xi) - n \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt.$$

Следовательно, учитывая (7), (8) и гармоничность $E^*(x, t\xi)$ по $\xi \in S$, получим

$$\Delta_\xi \frac{|\xi|^2 - 1}{4} \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = \frac{1}{2} (2\Delta_\xi + n) \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = E^*(x, \xi),$$

откуда следует, что

$$\Delta_{\xi} \mathcal{G}_4^n(x, \xi) = -E(x, \xi) + |x|^2 E^*(x, \xi) - (|x|^2 - 1)E^*(x, \xi) = -G_2(x, \xi).$$

Поскольку $G_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$, то $\Delta_{\xi} \mathcal{G}_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$. Утверждение 1) доказано.

2) Из равенства (5) видно, что функция $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)$ имеет сингулярность, содержащуюся в $E_4(x, \xi)$. Рассмотрим бигармоническую функцию $H(x) = \mathcal{G}_4^n(x, \xi) - E_4(x, \xi)$. По теореме 1 из [7] для произвольной функции $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$ справедливо равенство

$$\int_S E_4(x, \xi) \Delta^2 u(\xi) d\xi = \int_{\partial S} \left(E_4(x, \xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial E_4(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta u + \Delta E_4(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta E_4(x, \xi)}{\partial \nu} u(\xi) \right) ds_{\xi} + \omega_n u(x),$$

которое основывается на формуле Гаусса–Остроградского. Поэтому если в это равенство вместо $E_4(x, \xi)$ подставить бигармоническую функцию $H(x)$, то получим аналогичное равенство, но без члена $\omega_n u(x)$. Если теперь сложить эти равенства, то будем иметь

$$\int_S \mathcal{G}_4^n(x, \xi) \Delta^2 u(\xi) d\xi = \int_{\partial S} \left(\mathcal{G}_4^n(x, \xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathcal{G}_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta u + \Delta \mathcal{G}_4^n(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta \mathcal{G}_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} u(\xi) \right) ds_{\xi} + \omega_n u(x),$$

откуда, с учетом равенств $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \Delta_{\xi} \mathcal{G}_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$, сразу следует (6). Теорема доказана.

Таким образом, функция $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)$ является функцией Грина задачи Навье.

Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i=1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ – полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ ортогональных на ∂S гармонических полиномов (см., например, [11]), нормированных так, что $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(\xi))^2 ds_{\xi} = \omega_n$, где $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} \binom{k+n-3}{n-3}$ при $n > 2$ ($h_k = 2$ при $n = 2$) – размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k .

Рассмотрим следующий полином $\mathcal{H}_k(x, \xi) = \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi)$. В [4, теорема 4.1] для $|\xi| < |x| < 1$ были получены следующие представления элементарных решений:

$$E_4(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \left(\frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{|\xi|^2}{2k+n} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi), \quad (n > 4), \quad (9)$$

$$E(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \mathcal{H}_k(x, \xi), \quad E^*(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \mathcal{H}_k(x, \xi), \quad (n > 2), \quad (10)$$

а в случае $|x| < |\xi| < 1$ переменные x и ξ надо поменять местами. Записанные выше ряды сходятся равномерно по x и ξ при $|x| < a < |\xi|$. Заметим, что в представлении (10) функции $E(x, \xi)$ суммируются гармонические полиномы $H_k^{(i)}(\xi)$, умноженные на преобразование Кельвина этих же полиномов $K(H_k^{(i)}(x)) = |x|^{-(2k+n-2)} H_k^{(i)}(x)$ от переменной x с коэффициентами $1/(2k+n-2)$.

Лемма 1. Имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \mathcal{H}_k(x, \xi), & k = m. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(y) \sum_{j=1}^{h_m} H_m^{(j)}(y) H_m^{(j)}(\xi) ds_y = \\ &= \sum_{i=1}^{h_k} \sum_{j=1}^{h_m} H_k^{(i)}(x) H_m^{(j)}(\xi) \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_k^{(i)}(y) H_m^{(j)}(y) ds_y = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \mathcal{H}_k(x, \xi), & k = m. \end{cases} \end{aligned}$$

поскольку по ортогональности на ∂S системы полиномов $\{H_k^{(i)}(x) : i=1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ имеем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_k^{(i)}(y) H_m^{(j)}(y) ds_y = \begin{cases} 1, & k=m, i=j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

Приведенные представления (9) и (10) полезны при нахождении интегралов вида $\int_S \mathcal{G}_4^n(x, \xi) |\xi|^m H(\xi) d\xi$ с ядром из функции $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)$, где $H(\xi)$ – некоторый гармонический полином. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. При $n > 4$ и $|\xi| \neq |x| < 1$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt, \quad (11)$$

т. е. $G_4^n(x, \xi) = \mathcal{G}_4^n(x, \xi)$ при указанных выше условиях.

Поскольку

$$\int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = \int_S (E(x, y) - E^*(x, y)) (E(y, \xi) - E^*(y, \xi)) dy, \quad (12)$$

то доказательство теоремы можно разбить на 3 леммы.

Лемма 2. При $n > 4$ и $|\xi| < |x| < 1$ верно равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi),$$

где для удобства введено обозначение $\mathbf{k} = 2k + n$.

Доказательство. Поскольку при $x \neq \xi$ интеграл из леммы имеет интегрируемые особенности при $y = \xi$, $y = x$, то запишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_0^{|\xi|} + \int_{|\xi|}^{|x|} + \int_{|x|}^1 \right) \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y.$$

Вычислим полученные интегралы.

1) Пусть $|y| < |\xi| < |x| < 1$. Воспользуемся представлением (10), леммой 1 и обозначением $\mathbf{k} = 2k + n$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_n} \int_0^{|\xi|} \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \int_0^{|\xi|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \frac{|\xi|^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} \int_0^{|\xi|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)} |\xi|^{-(\mathbf{k}-2)}}{(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_0^{|\xi|} \rho^{\mathbf{k}-1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)} |\xi|^2}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi). \end{aligned}$$

2) Пусть $|\xi| < |y| < |x| < 1$. Аналогично предыдущему найдем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|}^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \int_{|\xi|}^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \int_{|\xi|}^{|x|} \rho^{n-1} \frac{\rho^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_{|\xi|}^{|x|} \rho d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)} (|x|^2 - |\xi|^2)}{2(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

3) Пусть $|\xi| < |x| < |y| < 1$. Аналогично предыдущему найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y &= \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(k-2)}}{k-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(m-2)}}{m-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} \frac{\rho^{-(k-2)}}{k-2} \frac{\rho^{-(m-2)}}{m-2} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_{|x|}^1 \frac{\rho^{-2(k-2)+k-1}}{(k-2)^2} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-|x|^{-(k-4)})}{-(k-4)(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi). \end{aligned}$$

С учетом сделанных вычислений найдем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_s E(x, y) E(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \left(\frac{|\xi|^2}{k} + \frac{|x|^2 - |\xi|^2}{2} + \frac{|x|^2}{(k-4)} \right) - \frac{1}{(k-4)(k-2)^2} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi). \quad (13)$$

Поскольку

$$\frac{|\xi|^2}{k} + \frac{|x|^2 - |\xi|^2}{2} + \frac{|x|^2}{k-4} = |\xi|^2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \right) + |x|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k-4} \right) = \frac{k-2}{2(k-4)} |x|^2 - \frac{k-2}{2k} |\xi|^2,$$

то с учетом (9) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \left(\frac{|\xi|^2}{k} + \frac{|x|^2 - |\xi|^2}{2} + \frac{|x|^2}{k-4} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)} \left(\frac{|x|^2}{k-4} - \frac{|\xi|^2}{k} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi) = E_4(x, \xi).$$

Используя найденное равенство из (13), сразу получаем утверждение леммы.

Заметим, что существование гармонической функции $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(x, \xi) / (k-4)(k-2)^2$ из леммы 2

было ранее теоретически доказано в [7].

Лемма 3. При $n > 2$ и $|\xi| < |x| < 1$ верно равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_s E(x, y) E^*(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-2)^2 k} - \frac{1}{2} \frac{|x|^2 - 1}{(k-2)k} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Доказательство. Поскольку представление $E^*(y, \xi)$ из (10) не зависит от взаимного расположения ξ и y , то

$$\frac{1}{\omega_n} \int_s E(x, y) E^*(y, \xi) dy = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_0^{|x|} + \int_{|x|}^1 \right) \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y &= \int_0^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(k-2)}}{k-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{k-2} \frac{1}{m-2} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_0^{|x|} \rho^{k-1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)+k}}{(k-2)^2 k} \mathcal{H}_k(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^2}{(k-2)^2 k} \mathcal{H}_k(x, \xi). \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y = \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(k-2)}}{k-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^{-(k-2)}}{\mathbf{k}-2} \frac{1}{\mathbf{m}-2} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_k(x, \xi)}{(\mathbf{k}-2)^2} \int_{|x|}^1 \rho^{-(k-2)+k-1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^2|_{|x|}}{2(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Складывая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E^*(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^2}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} + \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} + \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} + \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Учитывая в полученном равенстве, что

$$\frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} + \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} = \frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)^2} \left(\frac{1}{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{|x|^2-1}{2(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}},$$

сразу получаем утверждение леммы.

Замечание 1. В силу симметрии функций $E(x, y)$ и $E^*(y, \xi)$ будем иметь

$$\int_S E^*(x, y) E(y, \xi) dy = \int_S E(y, \xi) E^*(x, y) dy = \int_S E(\xi, y) E^*(y, x) dy,$$

и значит, по лемме 3

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Лемма 4. При $n > 2$ и $|\xi| < |x| < 1$ верно равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E^*(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Доказательство. Используя представление $E^*(x, y)$ из (10), которое не зависит от взаимного расположения x и y , и лемму 1, запишем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E^*(y, \xi) dy = \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} E^*(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y =$$

$$= \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{m}-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \int_0^1 \rho^{k-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) d\rho =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $|\xi| < |x| < 1$. Воспользуемся равенством (12). С помощью лемм 2, 3, 4 и замечания 1 запишем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy - \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E^*(y, \xi) dy -$$

$$- \frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E(y, \xi) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E^*(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)^2} + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) - \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) + \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Преобразуем выражение во внешних скобках под знаком суммы. Оно равно

$$-\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2}\left(\frac{1}{\mathbf{k}-4}+\frac{1}{\mathbf{k}}\right)+\frac{1}{2}\frac{|x|^2-1+|\xi|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}}=\frac{-2}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}}+\frac{1}{2}\frac{|x|^2+|\xi|^2-2}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}}$$

Из (9) найдем

$$E_4^*(x, \xi) = E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)} - \frac{|x|^2|\xi|^2}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi),$$

а поэтому

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)} - \frac{4}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} - \frac{1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} - \frac{|x|^2|\xi|^2 - |x|^2 - |\xi|^2 + 1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Нетрудно подсчитать, что $|x|^2|\xi|^2 - |x|^2 - |\xi|^2 + 1 = (|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)$ и

$$\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)} - \frac{4}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} - \frac{1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} = 0,$$

а значит,

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Наконец, заметим, что при $|\xi| < |x|$

$$\int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \xi) t^{k+n/2-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi),$$

откуда сразу следует (11). При $|x| < |\xi| < 1$ все аналогично. Теорема доказана.

В работе [12], в частности, было получено следующее представление решения задачи Дирихле для однородного бигармонического уравнения в шаре

$$u(x) = u_0(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Delta u_0(x) - \frac{1-|x|^2}{2} u_1(x),$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ гармонические в S функции такие, что $u = u_0|_{\partial S}$ и $\partial u / \partial \nu = u_1|_{\partial S}$, где ν – внешняя нормаль к ∂S . Возможна ли подобная формула для решения задачи Навье?

Теорема 3. Пусть функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ являются решениями задач Дирихле

$$\Delta u_i = 0; \quad u_i|_{\partial S} = \varphi_i, \quad i = 0, 1$$

и $\varphi_0, \varphi_1 \in C(\partial S)$. Тогда функция

$$u(x) = u_0(x) - \frac{1-|x|^2}{4} \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt \quad (14)$$

является бигармонической, $u, \Delta u \in C(\bar{S})$ и удовлетворяются граничные условия задачи Навье.

Доказательство. При сделанных предположениях $u_0, u_1 \in C(\bar{S})$. Функция $u(x)$, определяемая из (14), является бигармонической в S поскольку произведение $|x|^2 u_1(x)$ – бигармоническая в S функция, а $u_0(x)$ – гармоническая и непрерывна в $\bar{S}$. Очевидно, что $u(x) = u_0(x)|_{\partial S} = \varphi_0$.

В силу (7) и (8) и с учетом гармоничности функции $\int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt$ запишем

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \Delta \left(u_0(x) - \frac{1-|x|^2}{4} \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} 2(2\Delta_x + n) \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt = u_1(x), \quad x \in S. \end{aligned}$$

Поэтому функция $\Delta u(x)$ – непрерывна в $\bar{S}$, а также $\Delta u(x)|_{\partial S} = \varphi_1$. Теорема доказана.

Замечание 2. При доказательстве интегрального представления решения (6) требовалась гладкость $u \in C^3(\bar{S})$, а при использовании функции Грина $G_4^n(x, \xi)$ [7, следствие 1] требовалось, чтобы $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$.

Пример 1. Рассмотрим простейшую задачу Навье

$$\Delta^2 u(x) = 1, \quad x \in S; \quad u|_{\partial S} = 0, \quad \Delta u|_{\partial S} = -2.$$

По формуле (14) найдем функцию $\hat{u}$ – решение задачи Навье для однородного уравнения. Поскольку $u_0 = 0$, $u_1 = -2$, то

$$\hat{u}(x) = -\frac{1-|x|^2}{4} \int_0^1 (-2) t^{n/2-1} dt = -\frac{|x|^2-1}{n}.$$

Вычисления показывают [13], что

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^n(x, \xi) d\xi = \frac{|x|^4-1}{8n(n+2)} - \frac{|x|^2-1}{4n^2},$$

а значит, получаем решение рассматриваемой задачи Навье в виде

$$u(x) = \frac{|x|^4-1}{8n(n+2)} - \frac{4n+1}{4n^2}(|x|^2-1).$$

Литература

1. Begehr, H. Biharmonic Green functions / H. Begehr // *Le Matematiche*. – 2006. – V. LXI. – P. 395–405.
2. Wang, Y. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector / Y. Wang, L. Ye // *Complex Variables Elliptic Equ.* – 2013. – Vol. 58, no. 1. – P. 7–22.
3. Wang, Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector / Y. Wang // *Complex Variables Elliptic Equ.* – 2014. – Vol. 59, no. 5. – P. 732–749.
4. Karachik, V.V. Green's Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2019. – Vol. 64, no. 9. – P. 1500–1521.
5. Карачик, В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2019. – Т. 59, № 1. – С. 71–86.
6. Карачик, В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Матем. заметки*. – 2020. – Т. 107, № 1. – С. 87–105.
7. Карачик, В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Дифференциальные уравнения*. – 2021. – Т. 57, № 5. – С. 673–686.
8. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
9. Sweers, G. A Survey on Boundary Conditions for the Biharmonic / G. Sweers // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2009. – Vol. 54. – P. 79–93.
10. Gazzola, F. Polyharmonic Boundary Value Problems / F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers // Springer, 2010. – 423 p.
11. Карачик, В.В. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения в шаре: монография / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2024. – 476 с.
12. Karachik, V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball / V.V. Karachik // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9, no. 16. – Article no. 1907.
13. Karachik V.V. Green's Functions of some Boundary Value Problems for the Biharmonic Equation / V.V. Karachik // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2022. – Vol. 67, no. 7. – P. 1712–1736.

Поступила в редакцию 4 марта 2025 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник, кафедра «Математический анализ и методика преподавания математики», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru.

REPRESENTATION OF THE GREEN'S FUNCTION FOR THE BIHARMONIC NAVIER PROBLEM

V.V. Karachik

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: karachik@susu.ru

Abstract. The Green's function of the biharmonic Navier problem in the unit ball is investigated. Unlike the form of the Green's function previously obtained by the author, here is a representation in which the singularity of the fundamental solution of the biharmonic equation is explicitly expressed. Then, based on the Green's function, an integral representation of the solution to the Navier problem in the unit ball is given. In conclusion, a representation of the solution to the homogeneous Navier problem is given without using the Green's function. An illustrative example is given.

Keywords: *Navier problem; biharmonic equation; Green's function; elementary solution.*

References

1. Begehr H. Biharmonic Green functions. *Le Matematiche*, 2006, Vol. LXI, pp. 395–405.
2. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2013, Vol. 58, no. 1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199
3. Wang Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2014, Vol. 59, no 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566
4. Karachik V.V. Green's Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, Vol. 64, no. 9, pp. 1500–1521. DOI: 10.1080/17476933.2018.1536702
5. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, Vol. 59, no. 1, pp. 66–81.
6. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball. *Mathematical Notes*, 2020, Vol. 107, no. 1, pp. 105–120.
7. Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier–Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differential Equations*, 2021, Vol. 57, no. 5, pp. 654–668.
8. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki (Equations of Mathematical Physics)*. Moscow: Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).
9. Sweers G. A Survey on Boundary Conditions for the Biharmonic. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2009, Vol. 54, pp. 79–93.
10. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Springer, 2010, 423 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12245-3
11. Karachik V.V. *Nekotorye kraevye zadachi dlya poligarmonicheskogo uravneniya v share: monografiya (Some Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball: Monograph)*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2024, 476 p. (in Russ.).
12. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, no. 16, Article no. 1907. DOI: 10.3390/math9161907
13. Karachik V.V. Green's Functions of some Boundary Value Problems for the Biharmonic Equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2022, Vol. 67, no 7, pp. 1712–1736.

Received March 4, 2025

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru.

МОДИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОБРАБОТКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ С УПОРЯДОЧЕННЫМ АРГУМЕНТОМ

А.А. Парамонов¹, А.В. Калач^{1,2}

¹ МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация

² Воронежский институт ФСИН России, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: paramonov_a_a99@mail.ru

Аннотация. Осуществлена модификация математического аппарата почти периодического анализа на основе сдвиговых функций для решения задачи выявления характерных почти периодов с использованием векторных вычислений. Представлен процесс преобразования изображения из декартовой системы координат в полярную, что позволяет проводить структурный почти периодический анализ с использованием векторного представления вычислений параметров обобщённой сдвиговой функции: на первом этапе происходит определение 4 узлов прямоугольной сетки, для каждого узла полярной сетки; на втором – интерполяция значений яркости для полярной сетки узлов из прямоугольной. Таким образом, изображение из декартовых координат преобразовывается в полярные и подвергается в дальнейшем почти периодическому анализу. Механизм оценки набора почти периодов в эмпирических данных с упорядоченным аргументом, представленных нелинейными колебаниями с трендом, состоит в исследовании результатов согласования параметров сдвига по аргументу Δt и параметра τ – почти периода в обобщённой сдвиговой функции. Внутренние слагаемые обобщённой сдвиговой функции являются результатом исключения тренда, в статье рассматривается случай исключения тренда на основе геометрической прогрессии. В результате для расчёта получаемых почти периодов по срезам изображений предлагается модифицированный метод вычислений результатов обобщённой сдвиговой функции на основе векторных вычислений. Такой метод расчёта позволяет на качественном уровне и с приемлемой скоростью обработки данных получать результаты анализа центральных структур на изображениях.

Ключевые слова: методы анализа данных; данные с упорядоченным аргументом; тренд; нелинейные колебания; почти период; анализ изображений; чрезвычайные ситуации; тайфуны; преобразование координат.

Введение

В настоящее время в области прикладной математики исследуется применение почти периодических функций для обработки данных, которые представляются в виде дискретной функции с упорядоченным аргументом, в качестве которого может выступать, например, время или пространственная характеристика. Проведены исследования теоретических свойств почти периодических функций. В работах рассматривались вопросы, связанные с изучением почти периодических функций в различных метрических пространствах, а также исследована сходимость рядов Фурье почти периодических функций [1–4].

В работах [5–7] показаны возможности почти периодических функций для обработки результатов измерений в областях химии, физики и биологии. Общая концепция обработки эмпирических результатов измерений с упорядоченным аргументом представлена в работах [8, 9]. Однако в представленных исследованиях анализировались одномерные ряды с упорядоченным аргументом, где динамика процесса протекала только вдоль, например, временной оси.

Для изучения возможностей обработки и анализа пространственно-временных данных представлен обзор имеющихся моделей и методов, позволяющих работать с представленным форматом данных. По результатам исследований автор приходит к выводу о необходимости создания и применения новых моделей и методов для поиска взаимосвязей между многопараметрическими характеристиками, изменяющимися во времени и в пространстве [10].

В качестве данных с пространственно-временными характеристиками рассмотрены фото- и видеоряды динамики тропических циклонов, применение к которым почти периодического анализа дало качественные результаты задачи мониторинга и прогнозирования чрезвычайных ситуаций в области техносферной безопасности [11–13].

В исследовании приведены особенности математического аппарата почти периодического анализа для обработки и анализа динамики тропических циклонов по спутниковым изображениям.

Основная часть

В данной работе рассматривается математический аппарат почти периодического анализа для обработки и анализа изображений динамики тропических циклонов.

Обрабатываемые изображения представляют собой матрицу пикселей, которые принимают значения от 0 до 255. Размер исходного изображения составляет 500×500 пикселей. Особенности применения почти периодического анализа к центрическим структурам на изображениях подробно описаны в работе [13].

Особенностью применения почти периодического анализа к таким данным является преобразование исходных данных путём преобразования изображения из декартовой системы координат в полярную систему координат согласно выражениям

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}, \quad \theta(x, y) = \arctan \frac{y_c - y}{x_c - x}, \quad (1)$$

где x_c, y_c – декартовы координаты центра преобразования; x, y – преобразуемые декартовы координаты пикселя; ρ, θ – длина радиус-вектора и угла в полярных координатах.

Для применения такого численного преобразования стоит учесть ряд особенностей, связанных со структурой представления изображения. В качестве исходных данных имеем сетку узлов значений функции яркости, которые представляются пикселями изображения. Для перехода в полярные координаты возможно выбрать произвольную точку вне узлов и построить радиус-вектор к любой точке, что позволит определить и длину, и угол этого радиус-вектора. Но при наложении сети полярных координат на сетку функции яркости в узлах изображения получается неравномерная картинка – многие узлы прямоугольной сетки не попадут в узлы равномерных полярных координат (рис. 1).

Тогда для перехода в полярные координаты сначала необходимо создать сетку полярных координат, то есть определить радиус и количество угловой насечки, затем рассчитать значения функции яркости в новой позиции, для этого необходимо сделать несколько шагов.

Шаг 1. Определяются 4 узла прямоугольной сетки, которые «обрамляют» узел полярной сетки, иногда это может быть 2 узла, если радиус-вектор лёг ровно по горизонтали или вертикали, а иногда и 1 узел – когда идёт «чистое» совпадение. Пример возможного расположения узлов прямоугольной сетки относительно узла сетки полярных координат представлен на рис. 2.

Шаг 2. Проводится процесс интерполирования полученных значений. Значение яркости функции в каждом узле будем соотносить с буквой узла (см. рис. 2) – то есть яркость в пикселе А равна f_k . Координаты красной точки назовём x_k, y_k . Спроецируем положение красного узла на отрезки АВ и CD (рис. 3).

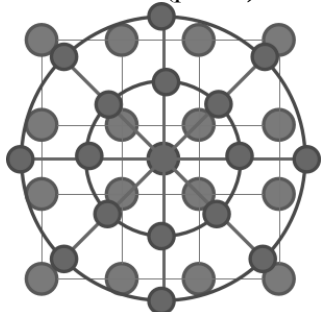


Рис. 1. Наложение сетки значений функции яркости в узлах изображения и сетки полярных координат

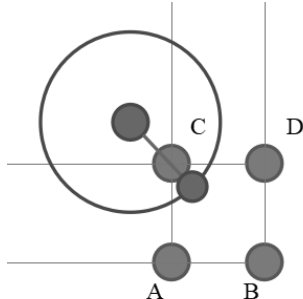


Рис. 2. Пример возможного расположения узлов прямоугольной сетки относительно узла сетки полярных координат

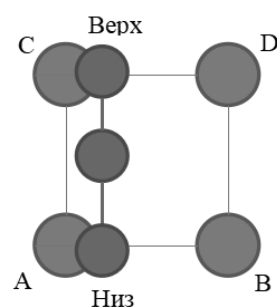


Рис. 3. Проекция положения узла полярных координат на декартовы

Проводим интерполяцию внутри каждого отрезка и определяем значение в верхнем и нижнем красных узлах:

$$f_{\text{верх}} = f_C + (f_D - f_C) \cdot \Delta x, \quad f_{\text{низ}} = f_A + (f_B - f_A) \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Стоит отметить, что $\Delta x = x_k - x_C = x_k - x_A$, поскольку координаты точек A и C совпадают. Проводя интерполяцию между двумя этими значениями (2) уже по оси y , получаем выражение

$$f_k = f_{\text{низ}} + (f_{\text{верх}} - f_{\text{низ}}) \cdot \Delta y. \quad (3)$$

На основе описанных преобразований становится возможным перевести изображение из декартовых координат в полярные для дальнейшего применения к полученным данным почти периодического анализа.

После предобработки данные изображения анализируются по срезам вдоль полярных углов, такой вектор содержит значения пикселей по радиус-векторам при фиксированном угле. Каждый такой вектор поочередно обрабатывается обобщённой сдвиговой функцией, которая лежит в основе почти периодического анализа.

Особенности выявления почти периодов из дискретных данных на основе сдвиговых функций описаны в работах [8–9].

Сдвиговая функция, применяемая для обработки дискретного ряда данных, описывается выражением следующего вида:

$$a(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} |f(t + \tau) - f(t)|, \quad (4)$$

где N – общее число отсчётов функции $f(t)$; t – упорядоченный аргумент дискретной функции $f(t)$; τ – проверяемые значения почти периодов.

Для выявления почти периодов необходимо учитывать форму анализируемых колебаний, для этого вводится понятие обобщённой сдвиговой функции. Пример обобщённой сдвиговой функции с учётом геометрического способа исключения тренда представлен формулой

$$a(\tau, \Delta t) = \frac{1}{N - \tau - 2\Delta t} \sum_{t=1}^{N-\tau-2\Delta t} \left| \ln \left(\frac{y_{t-\Delta t+\tau} \cdot y_{t+\Delta t+\tau}}{y_{t+\tau}^2} \right) - \ln \left(\frac{y_{t-\Delta t} \cdot y_{t+\Delta t}}{y_t^2} \right) \right|, \quad (5)$$

где τ – значения почти периодов; Δt – значения сдвига по аргументу; N – количество отсчётов функции.

При обработке временных рядов небольших размерностей было достаточно использования численного итерационного алгоритма вычисления обобщённой сдвиговой функции, где каждое значение массива $a(\tau, \Delta t)$ рассчитывалось в ходе отдельной итерации циклов. В контексте обработки больших данных, а также медиаданных встала необходимость усовершенствования алгоритмов по вычислению обобщённой сдвиговой функции.

Первой предложенной модификацией стал алгоритм исключения тренда из данных. Проведение операции по исключению тренда можно проводить, вычисляя сразу целый вектор колебаний для фиксированного значения сдвига Δt :

$$P_{\Delta t} = \ln \left(\frac{y_{t-\Delta t} \cdot y_{t+\Delta t}}{y_t^2} \right), \quad (6)$$

где $P_{\Delta t}$ – вектор значений колебаний, полученный по результатам исключения тренда на основе теории пропорций, размерностью $N - 2\Delta t$; y_t – вектор значений y_t ; $y_{t-\Delta t}$ – вектор значений $y_{t-\Delta t}$; $y_{t+\Delta t}$ – вектор значений $y_{t+\Delta t}$.

Тогда расчёт сдвиговой функции (4) для фиксированного значения Δt также можно представить в векторном виде:

$$a(\tau)_{\Delta t} = \frac{1}{N - \tau - 2\Delta t} |P_{\Delta t+\tau} - P_{\Delta t}|, \quad (7)$$

где $a(\tau)_{\Delta t}$ – вектор сдвиговой функции для вектора колебаний со сдвигом по аргументу Δt ; $P_{\Delta t+\tau}$ – вектор исключенного тренда при значении Δt , смещённый на τ ; $P_{\Delta t}$ – вектор исключенного тренда при значении Δt .

В (7) операция модуля является перегруженной, то есть результат модуля разности векторов $P_{\Delta t+\tau}$ и $P_{\Delta t}$ представляет собой вектор абсолютных величин.

В результате таких преобразований, получаем, что набор векторов вычисленных сдвиговых функций $a(\tau)_{\Delta t}$ есть результат обобщённой сдвиговой функции (5).

Заключение

Таким образом, проведенные математические преобразования с алгоритмами анализа пространственно-временных характеристик тропических циклонов позволили модифицировать вычисления, осуществляемые почти периодическим анализом данных с упорядоченным аргументом на основе сдвиговых функций, что позволило на качественном уровне и с приемлемой скоростью обработки данных получать результаты анализа центральных структур, присущих опасным природным явлениям, по спутниковым изображениям.

Литература

1. Талбаков, Ф.М. О приближении равномерных почти-периодических функций некоторыми суммами и интегралами / Ф.М. Талбаков // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2024. – № 2. – С. 23–32.
2. Талбаков, Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций / Ф.М. Талбаков // Endless Light in Science. – 2022. – № 3-3. – С. 93–98.
3. Талбаков, Ф.М. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике / Ф.М. Талбаков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2023. – № 4. – С. 65–75.
4. Баскаков, А.Г. Гармонический анализ периодических и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и гармоничных распределений / А.Г. Баскаков, В.Е. Струков, И.И. Струкова // Математический сборник. – 2019. – Т. 210, № 10. – С. 37–90.
5. Моделирование критических периодов развития вьюна *Misgurnus fossilis* по кинетике изменения окислительно-восстановительного потенциала среды инкубации на основе пропорции Кирквуда / В.И. Кузьмин, А.Ф. Гадзаов, А.Б. Бурлаков и др. // Технологии живых систем. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 30–39.
6. Кузьмин, В.И. Ритмы разбавления водных растворов / В.И. Кузьмин, А.Ф. Гадзаов, Д.Л. Тытик // Физика водных растворов: Сборник трудов третьей всероссийской конференции, Москва, 14–15 декабря 2020 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью «МЕСОЛ», 2020. – С. 30.
7. Кузьмин, В.И. Методы разделения быстрых и медленных движений атомов как основа анализа динамической структуры наночастиц / В.И. Кузьмин, А.Ф. Гадзаов, Д.Л. Тытик и др. // Российские нанотехнологии. – 2010. – Т. 5, № 11-12. – С. 92–97.
8. Кузьмин, В.И. Методы определения почти-периодов в эмпирических данных / В.И. Кузьмин, А.Ф. Гадзаов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2009. – Т. 14, № 4. – С. 24–28.
9. Кузьмин, В.И. Почти-периодические функции в методах обработки результатов измерений / В.И. Кузьмин, А.Ф. Гадзаов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2015. – Т. 20, № 2. – С. 56–61.
10. Крынецкий, Б.А. Анализ моделей периодических структур пространственно-временных процессов / Б.А. Крынецкий // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 497–501.
11. Парамонов, А.А. О возможностях применения метода почти-периодического анализа для обработки изображений / А.А. Парамонов, А.В. Калач // Моделирование систем и процессов. – 2024 – Т. 17, № 3. – С. 44–52.
12. Парамонов, А.А. Выявление почти-периодических характеристик спутниковых изображений тайфунов в аспекте решения задач техносферной безопасности / А.А. Парамонов // Техносферная безопасность. – 2024. – Т. 44, № 3. – С. 71–76.
13. Парамонов, А.А. Моделирование чрезвычайных ситуаций с применением почти-периодического анализа изображений структуры тайфунов / А.А. Парамонов, А.В. Калач // Вест-

Сведения об авторах

Парамонов Александр Александрович – аспирант, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Институт информационных технологий РТУ МИРЭА, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: paramonov_a_a99@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8504-2108>.

Калач Андрей Владимирович – доктор химических наук, профессор, начальник кафедры безопасности информации и защиты сведений, составляющих государственную тайну, Воронежский институт ФСИН России, г. Воронеж, Российская Федерация; Институт информационных технологий РТУ МИРЭА, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a_kalach@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>.

MODIFICATION OF THE MATHEMATICAL APPARATUS OF ALMOST PERIODIC ANALYSIS FOR PROCESSING SPATIO-TEMPORAL DATA WITH AN ORDERED ARGUMENT

A.A. Paramonov¹, A.V. Kalach^{1,2}

¹*Institute of Information Technologies RTU MIREA, Moscow, Russian Federation*

²*Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia, Voronezh, Russian Federation*

E-mail: paramonov_a_a99@mail.ru

Abstract. This paper discusses the mathematical apparatus of almost periodic analysis based on shift functions to solve the problem of identifying characteristic almost periods using vector computation.

A process for converting an image from a Cartesian coordinate system to a polar coordinate system is presented, which allows structural almost periodic analysis using vector representation of the computation of the generalized shift function underlying almost periodic analysis. The process consists of two steps: the first step involves the determination of four rectangular grid nodes, for each polar grid node; and the second step interpolates the brightness values for the polar grid nodes from the rectangular grid. Thus, the image in Cartesian coordinates is converted to polar coordinates for further analysis.

The mechanism for estimating a set of nearly periods in empirical data with ordered argument, represented by nonlinear oscillations with trend, is to investigate the results of matching the shift parameters on the argument Δt and the parameter τ - the nearly period in the generalized shift function. The inner summands of the generalized shift function are the result of trend exclusion. The paper considers the case of trend exclusion based on geometric progression.

As a result, a modified method of calculating the results of the generalized shift function based on vector calculations is proposed in order to calculate the resulting near-periods from image slices. Such calculation method allows obtaining the results of almost periodic analysis of centric structures in images at a qualitative level and with an acceptable speed of data processing.

Keywords: *Data analysis methods; data with ordered argument; trend; nonlinear fluctuations; almost period; image analysis; emergencies; typhoons; coordinate transformation.*

References

1. Talbakov F.M. About Approximation of Uniform Almost-Periodic Functions by some Sums and Integrals. *Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences*, 2024, no 2, pp. 23–32.
2. Talbakov F.M. About Absolute Convergence of Fourier Series of Almost-Periodic Functions. *Endless Light in Science*, 2022, no 3-3, pp. 93–98. DOI: 10.24412/2709-1201-2022-2022-93-98.

3. Talbakov F.M. On Absolute Convergence of Fourier Double Series of Almost-Periodic Functions in Uniform Metric. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2023, no 4, pp. 65–75. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-4-65-75.
4. Baskakov A.G., Strukov V.E., Strukova I.I. Harmonic Analysis of Periodic and Almost Periodic at Infinity Functions from Homogeneous Spaces and Harmonic Distributions. *Mathematical Collection*, 2019, Vol. 210, no 10, pp. 37–90. DOI: 10.4213/sm9147.
5. Kuzmin V.I., Gadzaov A.F., Burlakov A.B., Tytik D.L., Kasatkin V.E., Busev S.A. Modeling of Critical Periods of Development of Loach *Misgurnus Fossilis* on Kinetics of Changes in Redox Potential Medium Incubation Based on the Proportions of Kirkwood. *Technologies of Living Systems*, 2018, Vol. 15, no. 2, pp. 30–39.
6. Kuzmin V.I., Gadzaov A.F., Tytik D.L. Rhythms of Dilution of Aqueous Solutions. *Fizika vodnykh rastvorov (Physics of aqueous solutions): Proc. Third All-Russian Conference, Moscow, December 14–15, 2020*, Moscow: Limited Liability Company “MESOL”, 2020, pp. 30. (in Russ.).
7. Kuzmin V.I., Gadzaov A.F., Tytik D.L., Belashchenko D.K., Sirenko A.N. Methods of Separation of Fast Particles. N. Methods of Separation of Fast and Slow Atomic Motions as a Basis for Analyzing the Dynamic Structure of Nanoparticles. *Russian Nanotechnologies*, 2010, Vol. 5, no. 11–12, pp. 92–97.
8. Kuzmin V.I., Gadzaov A.F. Methods of Determination of Almost-Periods in Empirical Data. *Electromagnetic waves and electronic systems*, 2009, Vol. 14, no 4, pp. 24–28.
9. Kuzmin V.I., Gadzaov A.F. Almost-Periodic Functions in the Methods of Measurement Results Processing. *Electromagnetic waves and electronic systems*, 2015, Vol. 20, no 2, pp. 56–61.
10. Krynetsky B.A. Analysis of Models of Periodic Structures of Spatial and Temporal Processes. *Aktual'nye problemy prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki (Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics): Proc. Int. Sci. Conference, Voronezh, December 4–6, 2023*. Voronezh: Limited Liability Company “Welborn”, Publishing House “Research Publications”, 2024, pp. 497–501. (in Russ.).
11. Paramonov A.A., Kalach A.V. On the Possibilities of Application of the Almost-Periodic Analysis Method for Image Processing. *Modeling of Systems and Processes*, 2024, Vol. 17, no 3, pp. 44–52. DOI: 10.12737/2219-0767-2024-42-50.
12. Paramonov A.A. Detection of Almost-Periodic Characteristics of Satellite Images of Typhoons in the Aspect of Solving Problems of Technosphere Safety. *Technosphere Safety*, 2024, Vol. 44, no. 3, pp. 71–76.
13. Paramonov A.A., Kalach A.V. Modeling of Emergency Situations with the Use of Almost-Periodic Analysis of Images of the Typhoon Structure. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2024, Vol. 16, no 4, pp. 67–74. DOI: 10.14529/mmph240408.

Received February 20, 2025

Information about the authors

Paramonov Aleksandr Aleksandrovich is Post-graduate Student, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technologies, RTU MIREA, Moscow, Russian Federation, e-mail: paramonov_a_a99@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8504-2108>.

Kalach Andrey Vladimirovich is Dr. Sc. (Chemical), Professor, Head of the Department of Information Security and Protection of State Secret Information, Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia, Voronezh, Russian Federation; Institute of Information Technologies, RTU MIREA, Moscow, Russian Federation, e-mail: a_kalach@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОКИСЛЕНИЯ И ВОСПЛАМЕНЕНИЯ НЕЛЕГИРОВАННОГО ПЛУТОНИЯ

Н.И. Карманов¹, Н.Л. Клиначева²

¹ Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Российская Федерация

² Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: klinachevanl@susu.ru

Аннотация. Рассматривается проблема окисления и воспламенения плутония при различных температурах. Показано, что для определения критических условий возникновения воспламенения образцов плутония с характерным размером до 2 см на стадии установившейся толщины оксидного слоя достаточно воспользоваться выводами теории теплового взрыва в постановке Н.Н. Семенова. Расчеты критической температуры окружающей среды, выше которой происходит воспламенение плутония, удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным. Сформулирована и обоснована модель окисления сферического образца плутония в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью данной модели можно определять времена до воспламенения, а также определять количество окисленного плутония в каждый момент времени. Работоспособность модели проверялась на эксперименте по динамическому нагреву образца плутония до воспламенения. В результате получено удовлетворительное соответствие расчетного значения температуры на момент воспламенения экспериментально зафиксированному значению. На основании выводов теории теплового взрыва предложен подход по определению кинетических параметров для скорости реакции окисления плутония.

Ключевые слова: воспламенение; окисление; плутоний; кинетические параметры; тепловой взрыв; период индукции.

Введение

Соппротивление металлов газовому окислению при повышенных температурах зависит от сохранности защитных оксидных пленок, покрывающих металл. По мере увеличения толщины в ней возникают внутренние напряжения, которые могут вызвать ее разрушение и осыпание [1], что обусловлено различием физико-механических свойств пленки и металла. Например, для свежего плутония толщина оксидной пленки вначале нарастает, а затем стабилизируется, но при этом чешуйки окисла все время осыпаются и образуется новый слой окисла. Можно сказать, что образуется фронт окисления,двигающийся внутрь плутония, а за ним формируется оксидная пленка. Толщина такой пленки ≈ 4 мкм, что на порядок меньше толщины фронта окисления. Процесс окисления сопровождается выделением тепла.

Скорость окисления определяется из экспериментов по выдержке малых образцов плутония при заданной температуре. В этих экспериментах определяется привес образца на единицу поверхности (мкг/см^2) за счет связывания кислорода с течением времени [2]. При разных температурах закономерности связывания кислорода различны. Это связано с изменением фазового состояния плутония и, как следствие, с изменением механических характеристик.

Изучение процесса окисления плутония важно в двух аспектах. С одной стороны, это различные технологические операции, связанные с перевозкой, хранением, механической обработкой. Характерные температуры в этом случае – 0–100 °С. С другой стороны, при аварийных ситуациях с изделиями, содержащими плутоний, возможны достаточно интенсивные механические и тепловые воздействия, в ходе которых большие массы плутония могут выбрасываться в окружающую среду, причем плутоний может нагреваться до высоких температур (> 100 °С). В этом случае плутоний начнет интенсивно окисляться, а в некоторых случаях отдельные фрагменты плутония могут воспламениться, что может привести к достаточно сильному загрязнению окру-

жающей среды. Тем самым желательно уметь прогнозировать состояние нагретых фрагментов плутония, помещенных в окружающую среду с различной температурой.

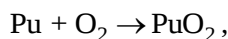
1. Основные сведения о закономерностях окисления плутония

Скорость связывания кислорода на этапе установившейся толщины оксидной пленки для многих металлов в определенном диапазоне температур описывается законом Аррениуса:

$$\frac{dw}{dt} = K_{\text{лин}} = A \exp\left(-\frac{E}{RT_f}\right), \quad (1)$$

где w – количество связанного кислорода на единицу поверхности ($\text{кг}/\text{м}^2$), t – время (с), $K_{\text{лин}}$ – линейная константа скорости реакции, A – предэкспоненциальный множитель ($\text{кг}\text{O}_2/\text{м}^2 \cdot \text{с}$), E – энергия активации ($\text{Дж}/\text{моль}$), $R = 8,314 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ – универсальная газовая постоянная, T_f – температура фронта окисления (К).

В соотношении (1) dw/dt – это с точностью до постоянной массовая скорость окисления плутония. Если рассмотреть брутто-реакцию окисления плутония:



то видно, что 32 г кислорода окисляет 244 г плутония, значит, 1 кг кислорода окислит 244/32 кг плутония. Отсюда массовая скорость окисления плутония

$$m = \frac{244}{32} \cdot \frac{dw}{dt},$$

а линейная скорость фронта окисления (м/с)

$$u_n(T_f) = m / \rho_{\text{Pu}} = \frac{7,625}{\rho_{\text{Pu}}} \frac{dw}{dt}, \quad (2)$$

где $\rho_{\text{Pu}} = 19\,050 \text{ кг}/\text{м}^3$ – плотность нелегированного плутония. В [2] приведены данные по зависимости $K_{\text{лин}}$ от температуры окружающей среды в диапазоне $T_0 = 20\text{--}360^\circ\text{C}$ для нелегированного плутония в сухом воздухе. Исходя из этой зависимости, определены кинетические параметры $A = 11,77 \text{ кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$ и $E = 6,613 \cdot 10^4 \text{ Дж}/\text{моль}$.

В действительности скорость окисления плутония чрезвычайно сильно зависит от влажности воздуха. Кроме того, на скорость окисления оказывает влияние фазовое состояние. На рис. 1 представлены зависимости $K_{\text{лин}}$ от температуры для нелегированного плутония в случае сухого воздуха и в случае воздействия паров воды при давлении 0,21 атм [3]. Также на рис. 1 представлена зависимость теплоемкости от температуры, где учитываются теплоты соответствующих фазовых переходов [4]. Видно, что скорость реакции в широком диапазоне температур может как расти, так и падать. В диапазоне температур $0\text{--}200^\circ\text{C}$ скорость окисления плутония в реальных условиях будет находиться между кривыми 1 и 2. После 200°C обе кривые сходятся.

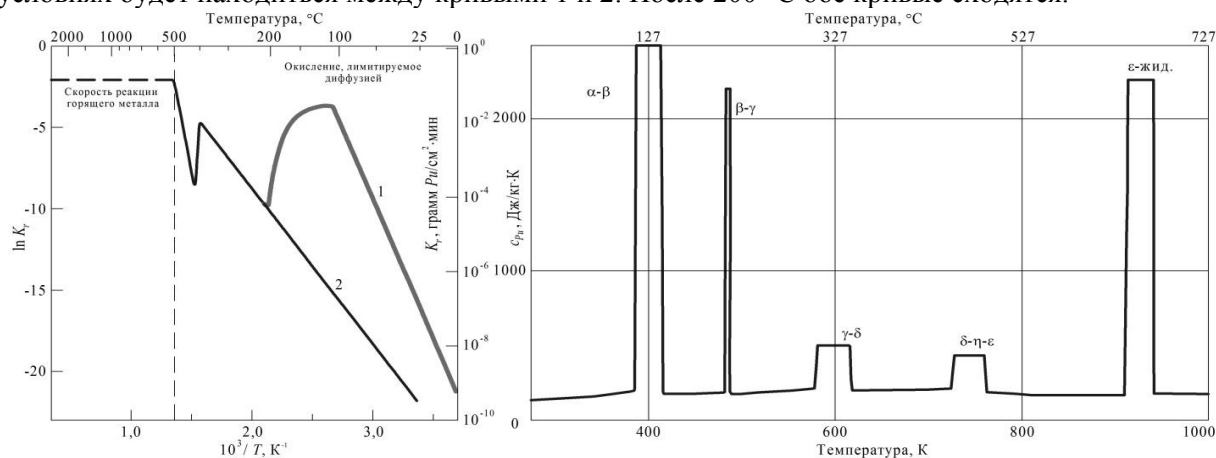


Рис. 1. Зависимости скорости окисления нелегированного плутония [3] и теплоемкости [4] от температуры: 1 – окисление в парах воды, 2 – окисление в сухом воздухе

2. Критические условия воспламенения плутония

Известно, что небольшие фрагменты (фольга 0,5–1 мм) нелегированного плутония в статических экспериментах воспламеняются при температурах окружающего воздуха $T_0 = 300\text{--}490^\circ\text{C}$ [2]. Рассмотрим более крупный сферический образец плутония массой $M_0 = 0,1$ кг с начальным радиусом $r_0 = 1,078 \cdot 10^{-2}$ м и определим для него температуру воздуха, при которой реализуется воспламенение, руководствуясь кинетической зависимостью (1) с параметрами из [2] для случая сухого воздуха.

Примем ряд допущений:

1. Образец с температурой T_0 помещается в воздух с той же температурой, при этом сразу образуется сферический слой фронта окисления с толщиной $\Delta = 0,4$ мкм $\ll r_0$. Считаем, что образующийся слой оксида, толщина которого в реальности достигает $\delta = 4$ мкм [3], тут же осыпается. Температура фронта окисления T_f зависит только от времени.

2. Теплообмен между фронтом окисления и окружающей средой описывается законом Ньютона–Рихмана:

$$q = \alpha(T_f - T_0),$$

где q – тепловой поток (Вт/м^2), α – коэффициент теплоотдачи ($\text{Вт/м}^2\cdot\text{K}$), учитывающий как лучистый, так и конвективный теплообмен ($\alpha \sim 55\text{--}125 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}$ при температурах $300\text{--}500^\circ\text{C}$ и естественной конвекции).

3. Радиус образца принимается равным начальному значению r_0 и он не изменяется с течением времени.

4. Нас не интересует распределение температур внутри плутония ввиду малости числа Био ($Bi = \alpha r_0 / \lambda \ll 1$, $\lambda_{\text{Pu}} = 27,6 \text{ Вт/м}\cdot\text{K}$ [4]). Условие $Bi \ll 1$ сохранится для размеров шара до 2 см. Будем рассматривать среднюю температуру образца T_{Pu} , которая зависит только от времени.

Уравнения теплового баланса для фронта окисления и образца плутония имеют вид:

$$M_f c_f \frac{dT_f}{dt} = 4\pi r_0^2 \left[H A \exp\left(-\frac{E}{RT_f}\right) - \lambda_{\text{Pu}} \frac{dT}{dr}\bigg|_{f \rightarrow \text{Pu}} - \alpha(T_f - T_0) \right] + M_f Q, \quad (3)$$

$$M_0 c_{\text{Pu}} \frac{dT_{\text{Pu}}}{dt} = 4\pi r_0^2 \cdot \lambda_{\text{Pu}} \frac{dT}{dr}\bigg|_{f \rightarrow \text{Pu}} + M_0 Q, \quad (4)$$

где $M_f = 4\pi r_0^2 \Delta \rho_f$ – масса сферического слоя фронта окисления, $\rho_f = (\rho_{\text{PuO}_2} + \rho_{\text{Pu}})/2$ – средняя плотность фронта окисления, ρ_{PuO_2} – плотность оксида, $c_f = (c_{\text{PuO}_2} + c_{\text{Pu}})/2$ – средняя теплоемкость фронта окисления ($\text{Дж/(кг}\cdot\text{K)}$), c_{Pu} – теплоемкость плутония, c_{PuO_2} – теплоемкость оксида, Q – мощность энергосвечения в плутонии за счет радиоактивного распада (Вт/кг), H – тепловой эффект реакции на единицу массы кислорода (Дж/кг), $\frac{dT}{dr}\bigg|_{f \rightarrow \text{Pu}}$ – градиент температуры на

границе «фронт окисления – плутоний», $M_0 = 4/3\pi r_0^3 \rho_{\text{Pu}}$ – масса плутония. Значения параметров приведены в таблице.

Значения теплофизических и кинетических параметров [2–4]

ρ_{PuO_2} , кг/м^3	10850	ρ_{Pu} , кг/м^3	19050
A , $\text{кг/(м}^2\cdot\text{с)}$	11,77	c_{PuO_2} , $\text{Дж/(кг}\cdot\text{K)}$	247
E , Дж/моль	$6,613 \cdot 10^4$	c_{Pu} , $\text{Дж/(кг}\cdot\text{K)}$	177
α , $\text{Вт/(м}^2\cdot\text{K)}$	100	H , $\text{Дж/кг}_{\text{O}_2}$	$33,9 \cdot 10^6$
Q , Вт/кг	1,83	λ_{Pu} , $\text{Вт/(м}\cdot\text{K)}$	27,6

Уравнение (3) описывает изменение внутренней энергии слоя фронта окисления со временем за счет притока тепла от химической реакции (первый член), оттока тепла от фронта окисления в глубь плутония (второй член) и к окружающей среде (третий член), приток тепла от радиоактивного распада (четвертый член). Уравнение (4) описывает изменение внутренней энергии образца плутония за счет притока тепла от фронта окисления (первый член) и от радиоактивного распада (второй член). Уравнения (3) и (4) можно решить, если знать градиент температуры на границе «фронт окисления – плутоний». Ввиду незначительности перепада температур внутри плутония градиент температуры можно приближенно заменить соотношением

$$\lambda_{Pu} \frac{dT}{dr} \Big|_{f \rightarrow Pu} = \lambda_{Pu} \frac{(T_f - T_{Pu})}{r_0}. \quad (5)$$

Четвертый член справа в (3) весьма мал по сравнению с остальными членами, поэтому его можно не рассматривать. Учитывая (5) и то, что $M_f = 4\pi r_0^2 \Delta \rho_f$ и $M_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_{Pu}$, перепишем (3) и (4):

$$\Delta \rho_f c_f \frac{dT_f}{dt} = HA \exp \left(-\frac{E}{RT_f} \right) - \lambda_{Pu} \frac{(T_f - T_{Pu})}{r_0} - \alpha (T_f - T_0), \quad (6)$$

$$\rho_{Pu} c_{Pu} \frac{dT_{Pu}}{dt} = 3 \lambda_{Pu} \frac{(T_f - T_{Pu})}{r_0^2} + \rho_{Pu} Q. \quad (7)$$

Постановка задачи для окисления небольших сферических частичек металлов приведена также в [5] для различных законов окисления. Но в [5], в отличие от настоящей работы, не рассматривался отдельно фронт окисления.

Далее для определения температуры окружающей среды, выше которой реализуется воспламенение плутония, можно поступить так же, как и в теории горения определяется критическая температура для взрывчатых веществ [6, 7], т. е. ищется такая максимальная температура T_0 , когда все еще возможно стационарное решение системы (6) и (7). Для этого положим

$\frac{dT_f}{dt} = \frac{dT_{Pu}}{dt} = 0$. Затем из (7) выразим поток $\lambda_{Pu} \frac{(T_f - T_{Pu})}{r_0}$ и подставим его в (6). Получим:

$$HA \exp \left(-\frac{E}{RT_f} \right) = \alpha \left(T_f - T_0 - \frac{\rho_{Pu} r_0 Q}{3\alpha} \right) = \alpha (T_f - T_0^*), \quad (8)$$

где $T_0^* = T_0 + \frac{\rho_{Pu} r_0 Q}{3\alpha}$ – эффективная температура окружающей среды, связанная с энерговыделением в плутонии. Уравнение (8) полностью соответствует постановке задаче о тепловом взрыве, развитой Н.Н. Семеновым, т. е. для случая $Bi \ll 1$ [6, 7]. Левая часть (8) соответствует теплоприходу за счет химической реакции, правая – теплоотводу за счет конвекции и излучения. Воспламенение реализуется, когда кривые теплоприхода и теплоотвода касаются друг друга:

$$\frac{d}{dT_f} \left[HA \exp \left(-\frac{E}{RT_f} \right) \right] = \frac{HAE}{RT_f^2} \exp \left(-\frac{E}{RT_f} \right) = \frac{d}{dT_f} \left[\alpha (T_f - T_0^*) \right] = \alpha. \quad (9)$$

Решая совместно (8) и (9), находим $T_{0кр}^* = 656,5 \text{ K} = 383,5 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{fкр} = 722 \text{ K} = 449 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{0кр} = 655,2 \text{ K} = 382,2 \text{ }^\circ\text{C}$. Предвзрывной разогрев $T_{fкр} - T_{0кр} = 66,8 \text{ }^\circ\text{C}$. Как мы видим, критическая температура $T_{0кр}$ попадает в середину диапазона температур воспламенения $300\text{--}490 \text{ }^\circ\text{C}$, реализующихся в опытах [2]. При выбранном режиме теплоотдачи с окружающей средой влияние внутреннего энерговыделения незначительно, иных геометрических факторов в (8) нет. Значит, большой разброс экспериментальных результатов можно объяснить закономерностями протекания реакций на поверхности плутония, состояние которой зависит как от технологических особенностей получения образцов плутония, так и загрязненности поверхности образцов другими

элементами. Действительно, образцы плутония имели разную удельную поверхность, и чем выше эта величина, тем меньше температура воспламенения [2]. Собственно, и кинетические кривые по окислению плутония в сухом воздухе, приведенные в [2, 3], отличаются друг от друга в 2–3 раза в диапазоне 250–360 °С. Также существует влияние сложного характера изменения скорости реакции (см. рис. 1). Так что можно сказать, что с учетом большой погрешности определения кинетических параметров соответствие между расчетными и экспериментальными данными удовлетворительное.

3. Задача об определении периода индукции

Если температура окружающей среды превышает $T_{0кр}$, то по истечении некоторого времени реализуется воспламенение. В этом случае нам необходимо решить задачу о периоде индукции или периоде скрытого протекания процесса, предшествующего воспламенению. Задачу об определении периода индукции в адиабатических условиях ($Bi = 0$) впервые решил О.М. Тодес [8]. В нашем случае температура окружающей среды поддерживается постоянной, и происходит теплообмен между средой и образцом из плутония. Нестационарная теория теплового взрыва для Семеновской постановки задачи позволяет вычислить безразмерный период индукции [5]:

$$\tau_u = \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - \frac{\theta}{Se}}, \quad (10)$$

где $\theta = \alpha(T_f - T_0^*)/RT_0^{*2}$ – безразмерная температура, $Se = \frac{HA}{\alpha} \frac{E}{RT_0^{*2}} \exp\left(-\frac{E}{RT_0^*}\right)$ – число Семёнова, $\beta = RT_0^*/E \approx 0,08...0,1$. Размерный период индукции вычисляется как:

$$t_u = \tau_u t_{ad} = \tau_u \frac{\rho_{Pu} c_{Pu}}{HA} \frac{r_0}{3} \frac{RT_0^{*2}}{E} \exp\left(\frac{E}{RT_0^*}\right), \quad (11)$$

где t_{ad} – адиабатический период индукции. В результате расчета по (11) с использованием данных из таблицы и значением $T_0^* = 383,6$ °С ($T_0 = 382,4$ °С), немного превышающим критическое значение $T_{0кр}^* = 383,3$ °С ($T_{0кр} = 382,1$ °С), получено, что $t_u = 8\,520$ с. Расчет времени до воспламенения по уравнениям (6) и (7) дает значение 8 470 с.

Далее для подтверждения правильности замены градиента температуры в (3) и (4) на соотношение (5) и правильности выражения (11) были проведены численные расчеты в программе ANSYS Fluent. Расчетная геометрия показана на рис. 2 слева. Решалось уравнение теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + \rho_{Pu} Q, \quad (12)$$

где $\rho_{Pu} Q$ – объемный источник тепла, связанный с радиоактивным распадом. При решении уравнения (12) использовались данные из таблицы. Расчеты проводились в двумерной осесимметричной постановке. На оси симметрии задавалось условие адиабатичности. На границе сферы (см. рис. 2) задавался тепловой поток в виде

$$q = HA \exp\left(-\frac{E}{RT_{Pu}}\right) - \alpha(T_{Pu} - T_0).$$

За момент воспламенения принималось время, когда температура на границе сферы превышала значение 700 °С. Результаты решения уравнения (12) и расчетов по (6) и (7) представлены на рис. 2 справа. В результате численного расчета в программе ANSYS Fluent со значением $T_0 = 382,4$ °С, немного превышающим критическое значение $T_{0кр} = 382,1$ °С, получено, что $t_u^{числ} = 8\,820$ с, что несколько выше значения $t_u = 8\,520$ с ($\approx 3,5\%$), полученного из формулы (11), и значения $t_u = 8\,470$ с ($\approx 4,1\%$), полученного из решения уравнений (6) и (7). Таким образом,

численные расчеты дают примерно те же результаты, что и упрощенные подходы, а значит, использование соотношений (5) и (11) оправданно.

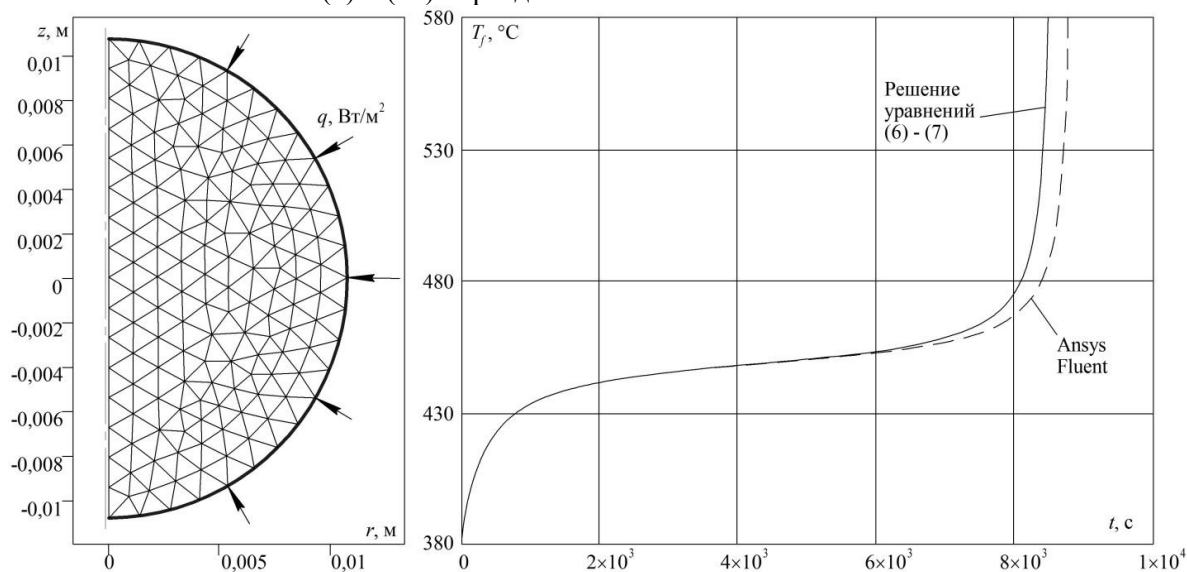


Рис. 2. Температура фронта окисления плутония в зависимости от времени при температуре среды выше критической ($T_0^* = 382,4^\circ\text{C}$, $T_{0\text{кр}}^* = 382,1^\circ\text{C}$)

4. Полная формулировка модели окисления плутония

Понятно, что в окончательном виде модель окисления плутония должна учитывать влияние фазовых переходов в плутонии, сложного поведения зависимости скорости окисления плутония и коэффициента теплоотдачи от температуры и уменьшения радиуса образца. Температура окружающей среды также может зависеть от времени. Для учета фазовых превращений достаточно ввести в уравнения (6) и (7) зависимость теплоемкости плутония от температуры [4] (см. рис. 1). Зависимость скорости окисления $K_r(T)$ на единицу массы плутония можно взять из рис. 1 [3]. Окончательно наша модель будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta\rho_f \left(\frac{c_{\text{Pu}}(T_f) + c_{\text{PuO}_2}}{2} \right) \frac{dT_f}{dt} = H \frac{K_r(T_f)}{7,625} - \lambda_{\text{Pu}} \frac{(T_f - T_{\text{Pu}})}{r} - \alpha(T_f, T_0(t))(T_f - T_0(t)), \quad (13)$$

$$\rho_{\text{Pu}} c_{\text{Pu}}(T_{\text{Pu}}) \frac{dT_{\text{Pu}}}{dt} = 3\lambda_{\text{Pu}} \frac{(T_f - T_{\text{Pu}})}{r^2} + \rho_{\text{Pu}} Q, \quad (14)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{K_r(T_f)}{\rho_{\text{Pu}}}, \quad (15)$$

$$r(0) = r_0, T_f(0) = T_{\text{Pu}}(0) = T_n. \quad (16)$$

Уравнение (15) описывает зависимость радиуса образца от текущей температуры фронта окисления. Уравнения (16) – начальные условия, где T_n – начальная температура образца.

Для апробации сформулированной модели рассмотрим влияние уменьшения радиуса образца на критическую температуру окружающей среды, выше которой реализуется воспламенение, и на период индукции. Решения системы уравнений (13)–(15) с данными из таблицы и

$K_r(T_f) = 7,625 A \exp\left(-\frac{E}{RT_f}\right)$ для двух температур $T_n = T_0$ приведены на рис. 4. Видно, что учет

изменения радиуса почти не привел к изменению критической температуры окружающей среды. Также по сравнению с предыдущими расчетами для температуры $T_0 = 382,5^\circ\text{C}$ период индукции t_u вырос с 8 500 до 8 850 с, что совершенно незначительно, учитывая реальную погрешность в определении кинетических параметров [2, 3]. Значение радиуса на момент времени $t_u = 8 850$ с $r(t_u) = 0,01004$ м, т. е. изменение по сравнению с $r_0 = 0,01078$ составляет около 6,9 %, что не

повлияло на значение критической температуры и период индукции. При более высоких температурах изменение радиуса к моменту воспламенения будет еще меньше.

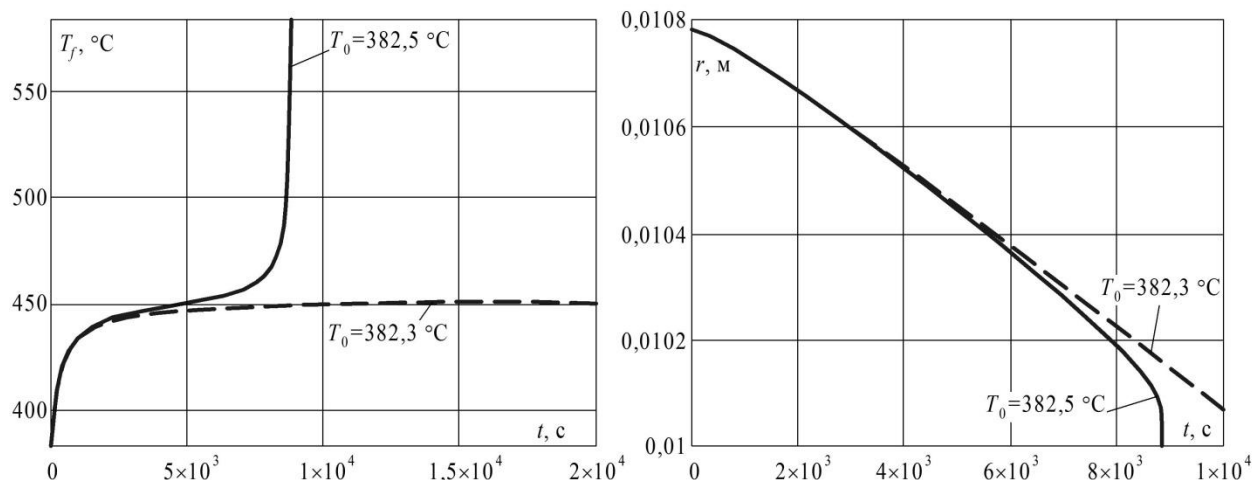


Рис. 4. Результаты расчетов для двух значений температур окружающей среды с учетом уменьшения радиуса образца

Далее проверим нашу модель на эксперименте, результаты которого приведены в [2], где образец плутония подвергался быстрому нагреву в сухом воздухе от комнатной температуры со скоростью 10 °C/мин до воспламенения. В ходе данного эксперимента плутоний испытывал все фазовые переходы. Температура на момент воспламенения составила величину 508 °C. В расчете задавалась переменная температура окружающей среды в виде $T_0(t) = T_n + 10/60 \cdot t$, $T_n = 293$ K, а коэффициент теплоотдачи был взят равным 100 Вт/м²·K. В результате расчета с зависимости скорости окисления для сухого воздуха [3] и теплоемкости [4] от температуры (см. рис. 1) получено, что плутоний воспламенился при температуре 460 °C, что с учетом погрешности определения температур воспламенения в статических экспериментах удовлетворительно соответствует эксперименту из [2].

Таким образом, для определения критических температур окружающей среды и периода индукции для образцов плутония с характерными размерами до 2 см, когда можно пренебречь распределением температур внутри образца и при равенстве начальных температур окружающей среды и плутония, достаточно пользоваться выводами из теории теплового взрыва Семенова. Для более сложных случаев необходимо пользоваться выражениями (13)–(16) или проводить численные расчеты с использованием пакетов прикладных программ.

5. Об определении кинетических параметров

Кинетические параметры для линейного закона окисления (1), приведенные в [2, 3], определены для небольших образцов плутония. Для более крупных образцов и для конкретной технологии их изготовления кинетические параметры могут отличаться от параметров из [2, 3] и их нужно определить отдельно. Семеновская постановка задачи об окислении плутония позволяет наметить подход по определению этих параметров. Перепишем уравнение (8), явно выделив потери тепла за счет излучения:

$$HA \exp \left(-\frac{E}{RT_f} \right) = \alpha_k (T_f - T_0) + \varepsilon \varepsilon_0 (T_f^4 - T_0^4) - \frac{\rho_{Pu} r_0 Q}{3}, \quad (17)$$

где $\varepsilon_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·K⁴ – коэффициент Стефана–Больцмана, ε – эффективная степень черноты системы «плутоний – окружающая среда»

Уравнение (17) в подкритической области теплового взрыва определяет неявную функциональную связь $T_f = f(T_0)$ между температурой фронта окисления T_f и температурой окружающей среды T_0 . При этом конвективный коэффициент теплоотдачи α_k можно принять постоянным. Построим график зависимости $T_f = f(T_0)$ в диапазоне температур от 290 до 360 °C с использованием данных из таблицы и со следующими значениями параметров: $\alpha_k = 10$ Вт/м²·K,

$\varepsilon = 0,9$. Результаты представлены на рис. 5 слева (сплошная линия). На этом же графике поставим некоторое количество точек, нормально распределенных относительно полученной кривой $T_f = f(T_0)$ со среднеквадратичным отклонением 10°C . Пусть эти точки гипотетически получены из экспериментов, где сферические образцы из плутония с начальной температурой T_0 помещались в воздух с той же температурой. Если в центр такого образца поместить термопреобразователь, то он покажет некоторую температуру $T_{Pu} \approx T_f > T_0$. В какой-то момент времени эта температура станет постоянной, когда установится равновесие между теплоприходом и теплоотводом. Теперь эти «экспериментальные» точки можно обработать по методу наименьших квадратов при помощи неявно определенной по (8) кривой $T_f = f(T_0)$. Результаты такой обработки представлены на рис. 5 справа. Видно, что кинетические параметры изменились, но сами две кривые незначительно отличаются друг от друга при температурах окружающей среды от 295 до 355°C , т. е. там, где были поставлены гипотетические точки.

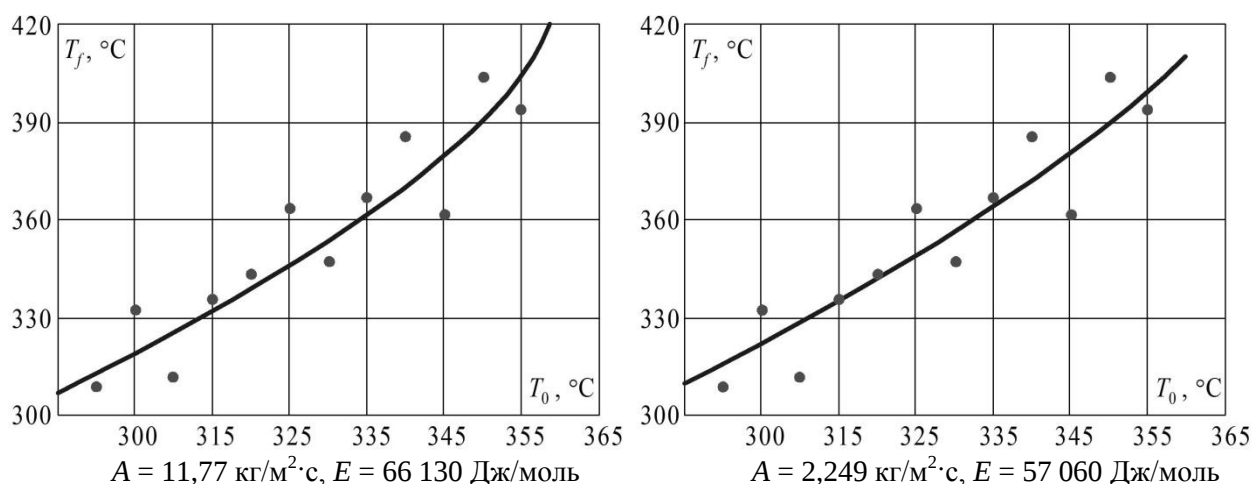


Рис. 5. Иллюстрация определения кинетических параметров в подкритической области теплового взрыва с использованием кривой $T_f = f(T_0)$, определяемой из (16)

Аналогичным образом можно воспользоваться выражением для периода индукции (11), также полученной из нестационарной теории теплового взрыва в Семеновской постановке. Только в данном случае для определения кинетических параметров необходимо провести эксперименты по воспламенению образцов плутония, т. е. нужна экспериментальная зависимость времени до воспламенения от температуры окружающей среды. Способы определения кинетических параметров с использованием выражений для периода индукции представлены, например, в [6, 9, 10].

Таким образом, используя выводы из теории теплового взрыва в Семеновской постановке [6], можно решить обратную кинетическую задачу. При таком подходе необходимо использовать кинетические параметры из [2] как начальные данные, а затем в ходе оптимизации по экспериментальным данным с использованием выражений (11) или (17) эти параметры необходимо уточнить.

Заключение

В настоящей работе показано, что для решения задач окисления и воспламенения макроскопических образцов из плутония с характерными размерами до 2 см можно воспользоваться выводами стационарной и нестационарной теорий теплового взрыва, сформулированных в Семеновской постановке для $Bi \ll 1$. Расчеты по определению критических условий возникновения теплового взрыва с кинетическими параметрами, взятыми из [2, 3], удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным [2]. Предложена модель, позволяющая определять времена до воспламенения и динамику уменьшения размера образца в ходе окисления. Показано, что для определения критических температур окружающей среды учет уменьшения размера образца в ходе прогрева образца за счет осыпания оксидного слоя не обязателен. Предложен способ определения кинетических параметров из простых экспериментов по определению стационарной

температуры внутри образца плутония в подкритической области теплового взрыва и из экспериментов по определению зависимости времени до воспламенения от температуры окружающей среды.

Литература

1. Пахомов, В.С. Коррозия металлов и сплавов: справочник в двух книгах. Книга 1 / В.С. Пахомов. – М.: Наука и технологии, 2013. – 448 с.
2. Плутоний: справочник. Т. 2 / под ред. Н.Т. Чеботарева. – 1973. – 455 с.
3. Плутоний. Фундаментальные проблемы / под ред. Б.А. Надыкто, Л.Ф. Тимофеевой. – Саратов: РФЯЦ-ВНИИЭФ. – 2003. – Т. 1. – 304 с.
4. Плутоний. Сборник докладов иностранных ученых / под ред. О.А. Алексеева, В.И. Кутайцева, Ю.Н. Сокурского Н.Т. Чеботарева. – М.: Атомиздат, 1964. – 555 с.
5. Хайкин, Б.И. О воспламенении частиц металла / Б.И. Хайкин, В.Н.Bloшенко, А.Г. Мержанов // Физика горения и взрыва. – 1970. – Т. 6, № 4. – С. 474–488.
6. Рябинин, В.К. Математическая теория горения. Курс лекций / В.К. Рябинин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 440 с.
7. Франк-Каменецкий, Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д.А. Франк-Каменецкий. – М.: Наука, 1987. – 502 с.
8. Тодес, О.М. «Адиабатический» тепловой взрыв / О.М. Тодес // Теория горения и взрыва. Сборник научных трудов. – М.: Наука, 1981. – С. 195–202.
9. Вилунов, В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ / В.Н. Вилунов. – Новосибирск: Наука, 1984. – 190 с.
10. Зуев, Ю.С. Определение кинетических параметров для прессованного тетранитропентаэритрита по результатам ODTX-экспериментов / Ю.С. Зуев, Н.И. Карманов // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». – 2019. – Т. 29, № 2. – С. 57–63.

Поступила в редакцию 2 апреля 2025 г.

Сведения об авторах

Карманов Николай Иванович – сотрудник ФГУП «РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», г. Снежинск, Российская Федерация.

Клиначева Наталия Леонидовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: klinachevanl@susu.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 2, pp. 50–59*

DOI: 10.14529/mmph250206

MATHEMATICAL MODELING OF OXIDATION AND IGNITION PROCESSES OF UNALLOYED PLUTONIUM

N.I. Karmanov¹, N.L. Klinacheva²

¹ All-Russian Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation

² South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: klinachevanl@susu.ru

Abstract. The article discusses the problem of oxidation and ignition of plutonium at various temperatures. It is shown that to determine the critical conditions for the ignition of plutonium samples with a characteristic size of up to 2 cm at the stage of the steady-state thickness of the oxide layer, it is sufficient to use the outcomes of the thermal explosion theory formulated by N.N. Semenov. Calculations of the critical ambient temperature above which plutonium ignites are in satisfactory agreement with the experimental results. A model of the oxidation of a spherical plutonium sample in the form of a system of ordinary differential equations is formulated and substantiated. Using this model, it is possible to determine the time before ignition and the amount of oxidized plutonium at any given moment. The

model's operability was tested in an experiment on dynamic heating of a plutonium sample before ignition. As a result, a satisfactory correspondence of the calculated temperature value at the time of ignition to the experimentally recorded value was obtained. Based on the conclusions of the thermal explosion theory, an approach to the determination of the kinetic parameters for the reaction rate of plutonium oxidation is proposed.

Keywords: Ignition; oxidation; plutonium; kinetic parameters; thermal explosion; induction period.

References

1. Pahomov V.S. *Korroziya metallov i splavov: spravochnik v dvuh knigah. Kniga 1* (Corrosion of metals and alloys: a handbook in two books. Book 1). Moscow: Nauka i tekhnologii Publ., 2013, 448 p. (in Russ.).
2. Wick O.J. (Ed.) *Plutoniyy Spravochnik. T. 2* (Plutonium Handbook: A Guide to the Technology, Vol. 2), 1967, 428 p.
3. Nadykto B.A., Timofeevoy L.F. *Plutoniyy. Fundamental'nye problemy* (Plutonium. Fundamental Problems). Sarov, RFYaTs-VNIIEF Publ., 2003, Vol. 1, 304 p. (in Russ.).
4. *Plutoniyy. Sbornik dokladov inostrannykh uchenykh* (Plutonium. Collection of Reports by Foreign Scientists). Moscow, Atomizdat Publ., 1964, 555 p. (in Russ.).
5. Hajkin B.I., Bloshenko V.N., Merzhanov A.G. On the Ignition of Metal Particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1970, Vol. 6, no. 4, pp. 412–422. DOI: 10.1007/bf00742774.
6. Ryabinin V.K. *Matematicheskaya teoriya goreniya. Kurs lektsiy* (Mathematical theory of gorenje. A course of lectures). Chelybinsk: Publishing Center of SUSU, 2014, 440 p. (in Russ.)
7. Frank-Kamenetskiy D.A. Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike (Diffusion and heat transfer in chemical kinetics). Moscow, Nauka Publ., 1987, 502 p. (in Russ.).
8. Todes O.M. “Adiabatcheskii” teplovoy vzryv (Adiabatic Thermal Explosion). *Teoriya goreniya i vzryva. Sbornik nauchnykh trudov*. Moscow, Nauka Publ., 1981, pp. 195–202. (in Russ.).
9. Vilyunov V.N. *Teoriya zazhiganiya kondensirovannykh veshchestv* (Theory of Ignition of Condensed Substances). Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 190 p. (in Russ.).
10. Zuev Yu.S. Opredelenie kineticheskikh parametrov dlya pressovannogo tetranitropentaeritrita po rezul'tatam ODTX-eksperimentov (Determination of Kinetic Parameters for Pressed Tetranitropentaerythritol based on the Results of ODTX Experiments). *Vestnik Kontserna VKO «Almaz – Antey»*, 2019, Vol. 29, no. 2, pp. 57–63. (in Russ.).

Received April 2, 2025

Information about the authors

Karmanov Nikolay Ivanovich is Employee, All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation.

Klinacheva Nataliya Leonidovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: klinachevanl@susu.ru.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ КОНСТАНТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО МЕХАНИЧЕСКОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Ю.М. Ковалев¹, М.А. Лебедев², В.П. Маташ², Е.В. Помыкалов¹, А.П. Яловец¹

¹ Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

² ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», г. Снежинск, Российская Федерация

E-mail: potykalovev@susu.ru

Аннотация. Статья посвящена проблеме разработки математической модели для численного анализа возможных аварийных ситуаций при обращении с энергетическими материалами (ЭМ), связанными с их высокой чувствительностью к механическим и тепловым нагрузкам. При построении математической модели и проведении расчетов использовались динамические и термодинамические характеристики материала, полученные из эксперимента по механическому воздействию металлического ударника на ЭМ, что позволило применять для описания процесса деформирования ЭМ модель упруго-пластической гомогенной среды. В статье представлена постановка задачи, соответствующая экспериментам по воздействию ударника на ЭМ, и описана система дифференциальных уравнений механики сплошных сред (МСС) в переменных Лагранжа. Для моделирования пластических течений использовалась модель Прандтля–Рейса, а также уравнения состояния материала и граничные условия, учитывающие механическое и тепловое взаимодействие ударника с ЭМ. На основе экспериментальных данных по ударному воздействию металлического ударника на октогеносодержащий ЭМ проведено численное моделирование упруго-пластического течения ЭМ, позволившее определить упругие константы данного материала. Результаты расчетов по динамике проникновения ударника в ЭМ показали хорошее совпадение с экспериментальными данными, что подтверждает адекватность предложенной в работе математической модели.

Ключевые слова: ударное воздействие; энергетический материал; модель Прандтля–Рейса; пуансон; упругие константы.

Введение

Одна из ключевых проблем использования энергетических материалов (ЭМ) – это обеспечение безопасности при их хранении и эксплуатации с целью исключения аварийных ситуаций [1–3] в случае воздействия на них механических и тепловых нагрузок.

Проблемы обеспечения безопасности применения ЭМ усугубляются тем, что основным направлением в развитии ЭМ в настоящее время стало повышение мощности зарядов, которая достигается за счет увеличения энергоемкости и плотности материала. Однако чем мощнее ЭМ, тем более опасными они оказываются в производстве и применении. С ростом мощности возрастает их чувствительность к механическим и тепловым воздействиям, что особенно критично в условиях механических нагрузок.

В настоящее время существуют различные методы оценки чувствительности ЭМ [4–7] на основе расчетно-теоретических исследований поведения ЭМ при механических воздействиях, но они не являются универсальными. Это связано с тем, что различные способы механических и тепловых нагрузок ЭМ могут вызвать различные механизмы инициирования взрывчатых превращений. Одним из таких механизмов может являться формирование разогретого тонкого слоя ЭМ в зоне сдвига, который образуется на границе контакта ЭМ с инертным материалом. Следовательно, разработка математической модели деформирования термопластичных материалов становится еще более актуальной, так как она позволит более точно прогнозировать поведение ЭМ в экстремальных условиях и снизить риски аварий.

Следует отметить, что рассматриваемые энергетические материалы являются многофазными (гетерогенными), что значительно усложняет математическое моделирование реальных гетеро-

генных смесей по сравнению с однофазными средами по, как минимум, двум причинам. Во-первых, усложняется описание процессов в отдельных фазах, имеющих место и в однофазных средах. Во-вторых, в многофазных средах проявляются эффекты структуры фазы, эффекты межфазного взаимодействия, и в результате – число возможных процессов, которые должны быть отражены в уравнениях, многократно расширяется.

В эксперименте невозможно разделить измерения параметров отдельных фаз. Поэтому целесообразно при построении математических моделей и проведении расчетов использовать некоторые динамические и термодинамические характеристики материала, полученные из эксперимента, что позволит применять для описания процесса деформирования ВВ модель гомогенной среды.

Целью данной работы является разработка математической модели в приближении гомогенной среды, которая позволит описать упруго-пластические течения и определить упругие константы ЭМ по результатам экспериментов.

Математическая модель воздействия ударника на энергетический материал

Сформулируем задачу, соответствующую экспериментам по воздействию ударника на ЭМ. Стальной цилиндрический ударник, правый торец которого представляет собой полусферу радиуса R_H , движется со скоростью $\vec{V}$ ($V_r = 0, V_z = V$) и сталкивается с энергетическим материалом, заключенным в цилиндрическую капсулу (рис. 1). Масса ударника равна M . Воздействие ударника на материал приводит к его деформированию (деформацией ударника пренебрегаем) и, следовательно, к изменению термодинамического состояния. При этом кинетическая энергия ударника расходуется на деформацию материала и работу силы трения, поэтому с течением времени скорость ударника уменьшается вплоть до остановки, а запасенная упругая энергия в материале вызывает обратное движение ударника. В эксперименте ударник и образец были расположены вертикально, но вклад потенциальной энергии в полную энергию ударника намного меньше, чем вклад кинетической энергии, что позволяет перевести постановку задачи в горизонтальное положение. Таким образом учитывается только значимая составляющая энергии, а именно кинетическая энергия ударника.

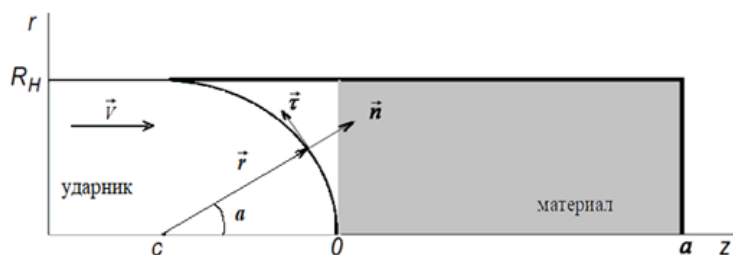


Рис. 1. Схема эксперимента по воздействию ударника на материал

Система дифференциальных уравнений механики сплошных сред (МСС), описывающая упруго-пластические течения конденсированных сред в переменных Лагранжа в цилиндрической системе координат, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho \frac{\dot{V}}{V}; \quad \dot{V} = V(v_{rr} + v_{\varphi\varphi} + v_{zz}); \\ \rho \dot{v}_r &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r}; \quad \rho \dot{v}_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{zr}}{\partial r} + \frac{S_{zr}}{r}; \\ \rho \dot{U} &= -P \frac{\dot{V}}{V} + (S_{rr}v_{rr} + S_{\varphi\varphi}v_{\varphi\varphi} + S_{zz}v_{zz} + 2S_{rz}v_{rz}) - (\nabla \vec{q}); \\ \vec{q} &= -\kappa \nabla T; \quad \dot{S}_{rr}^0 = 2\mu \left(v_{rr} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right); \\ \dot{S}_{zz}^0 &= 2\mu \left(v_{zz} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right); \quad \dot{S}_{\varphi\varphi}^0 = -\dot{S}_{rr}^0 - \dot{S}_{zz}^0; \quad \dot{S}_{rz}^0 = 2\mu v_{rz}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ, v_i – массовые плотность и скорость, v_{ik} – тензор скоростей деформаций, V – объём, σ_{ik} – тензор напряжений, P, S_{ik} – шаровая часть и девиатор тензора напряжений, U – удельная внутренняя энергия, T – температура, $\vec{q} = -\kappa \nabla T$ – тепловой поток, описываемый законом Фурье, κ – коэффициент теплопроводности.

Для описания пластических течений применялась модель Прандтля–Рейса [8, 9], в которой явно фигурирует тензор скоростей пластических деформаций:

$$\dot{S}_{ik} = 2\mu(\hat{v}_{ik} - \dot{u}_{ik}^p), \quad (2)$$

где $\hat{v}_{ik} = v_{ik} - v_{ll}\delta_{ik}/3$, $\dot{u}_{ik}^p$ – тензор скоростей пластических деформации, который связан с напряжениями уравнениями Мизеса $\dot{u}_{ik}^p = S_{ik}/\lambda$, λ – модуль пластичности, μ – модуль сдвига. Выражение (2) отражает тот факт, что за упругие напряжения отвечают только упругие деформации.

Модуль пластичности находится из выражения

$$1/\lambda = \frac{3}{2} \frac{S_{ik}\hat{v}_{ik}}{Y_0^2}.$$

Из уравнений Мизеса и (2) следует уравнение для тензора девиатора напряжений:

$$\dot{S}_{ik} + S_{ik}/\tau^p = 2\mu\hat{v}_{ik}, \quad (3)$$

где $\tau^p = \lambda/2\mu$ – время релаксации упругих напряжений за счет пластических течений (максвелловское время релаксации).

Данная система дополняется уравнениями состояния материала [10, 11] и граничными условиями, которые учитывают взаимодействие ударника с материалом. Для решения системы уравнений (1) применялся метод решения системы уравнений механики сплошной среды, описанный в [12].

Режим взаимодействия ударника с материалом задается следующим образом. Положим, что ударник меняет только направление скорости движения материала без изменения его модуля, что соответствует абсолютно упругому взаимодействию.

Пусть найденная из уравнений МСС (1) скорость материала вблизи поверхности ударника равна $\vec{v}(v_r, v_z)$. При контакте с ударником направление вектора скорости изменяется $\vec{v}'(v'_r, v'_z)$, но $v' = v$. Новое направление вектора скорости $\vec{v}'$ находится из условия непроницаемости на поверхности ударника:

$$u'_n = (\vec{u}'\vec{n}) = 0, \quad (4)$$

где $\vec{u}' = \vec{v}' - \vec{V}$ – вектор относительной скорости, $\vec{n}(n_r = \sin\alpha, n_z = \cos\alpha)$ – нормаль к поверхности ударника.

Таким образом, сохранение модуля скорости вещества при взаимодействии с ударником и условие непроницаемости (4) позволяют записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} v'_r \sin\alpha + v'_z \cos\alpha &= V \cos\alpha; \\ v'^2_r + v'^2_z &= v^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение системы (5) позволяет вычислить $\vec{v}'(v'_r, v'_z)$, а также тангенциальную компоненту скорости $u'_\tau = (\vec{u}'\vec{\tau})$:

$$v'_r = V_n \sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{v^2 - V_n^2}; v'_z = V_n \cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{v^2 - V_n^2}; u'_\tau = \sqrt{v^2 - V_n^2} + V \sin\alpha, \quad (6)$$

где $V_n = V \cos\alpha$, $\vec{\tau}(\tau_r = \cos\alpha, \tau_z = -\sin\alpha)$ – тангенциальный орт.

В случае, когда скорость материала мала, то есть $v < V_n$, он увлекается ударником. В этом случае полагается $v = V_n$.

Выражения (6) представляют собой граничные условия на поверхности ударника.

За время Δt движущаяся с относительной скоростью u'_τ точка поверхности материала пройдет по поверхности ударника путь $\Delta l = u'_\tau \Delta t$ и окажется в точке, радиус-вектор которой будет иметь с осью Oz угол $\alpha + \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha = \Delta l / R_H$.

Таким образом, в момент времени $t + \Delta t$ новые координаты рассматриваемой точки поверхности материала будут равны $r = R_H \sin(\alpha + \Delta\alpha)$; $z = R_H \cos(\alpha + \Delta\alpha)$, а направление относитель-

ной скорости будет определяться новым тангенциальным вектором $\vec{\tau} (\tau_r = \cos(\alpha + \Delta\alpha), \tau_z = -\sin(\alpha + \Delta\alpha))$. Компоненты скорости материала на поверхности ударника определяются по формулам (6) с углом $\alpha + \Delta\alpha$.

При скольжении образца по поверхности подложки в результате работы силы трения их контактная граница разогревается.

По абсолютной величине сила трения, действующая на единицу контактной поверхности, имеет вид

$$F_f = k_f \Sigma_n, \quad \Sigma_n = \Sigma_i n_i = \sigma_{ik} n_{ik} n_k, \quad (7)$$

где k_f – коэффициент сухого трения, где $\Sigma_n > 0$ – сила реакции подложки на единицу площади. Сила трения направлена вдоль контактной поверхности против тангенциальной составляющей вектора скорости образца v_τ .

Работа силы трения приводит к нагреванию трущихся поверхностей. Тепловой поток, возникающий за счет работы силы сухого трения, имеет вид

$$q_f = (F_f v_\tau) = \begin{cases} k_f \Sigma_n v_\tau, & \Sigma_n > 0; \\ 0, & \Sigma_n \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Генерируемое на контактной границе тепло распространяется в объемы подложки и образца. Поскольку в общем случае материалы подложки и образца разные, то будут различными и тепловые потоки.

Пусть материал подложки имеет массовую плотность ρ_1 , удельную теплоемкость C_1 , коэффициент теплопроводности χ_1 , а материал образца – соответственно ρ_2 , C_2 , χ_2 . Соответственно потоки тепла в подложку и образец обозначим через q_1 и q_2 , причем $q_f = q_1 + q_2$. Будем искать потоки q_1 и q_2 .

Воспользуемся выражением для температуры поверхности тела под воздействием заданного теплового потока [13]:

$$T_1(t) = \frac{\chi_1}{\chi_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_1(t')}{\sqrt{\chi_1(t-t')}} dt' + T_0; \quad T_2(t) = \frac{\chi_2}{\chi_2 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_2(t')}{\sqrt{\chi_2(t-t')}} dt' + T_0, \quad (9)$$

где T_0 – начальная температура среды, χ_1, χ_2 – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности сред. Представим $q_2 = \beta q_f$, $q_1 = (1 - \beta) q_f$, где β – доля распространяющегося в образец теплового потока. Из условия равенства температур на контактной поверхности $T_1(t) = T_2(t)$ из выражений (9) следует

$$\beta = \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_1 C_1 \chi_1}{\rho_2 C_2 \chi_2}} \right)^{-1}. \quad (10)$$

В литературе формула (10) известна как формула Шарона. Она справедлива при описании нагрева поверхностей при сплошном фрикционном контакте [14].

Температуру контактной поверхности трущихся материалов с найденной величиной β (10) можно найти из любого выражения из (9).

Движение ударника в данном случае является одномерным и определяется упругой силой,

действующей на погруженную в материал поверхность ударника $F_z = 2\pi \int_0^{r_c} \Sigma_z(r) r dr$,

$\Sigma_z = \sigma_{zz} n_z + \sigma_{zr} n_r$ – поверхностная сила, σ_{ik} – компоненты тензора напряжений, $\vec{n} (n_r = \sin(\alpha), n_z = \cos(\alpha))$ – нормаль к поверхности ударника, r_c – координата границы контакта материала с ударником, а также силой трения. Поскольку вектор силы трения направлен по касательной к поверхности ударника, то наиболее просто учесть влияние силы трения на движение ударника можно путем вычитания из кинетической энергии ударника работы силы трения. Таким образом, уравнение движения ударника с учетом упругой силы имеет вид:

$$M\dot{V} = F_z(t). \quad (11)$$

Полагая, что на некотором малом временном интервале движение ударника происходит с постоянным ускорением, нетрудно из (11) записать выражения для скорости ударника в момент $t + \Delta t$:

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \frac{F_z}{M} \Delta t.$$

Работа силы трения (8), совершаемая за время Δt на всей контактной поверхности ударника, приводит к убыли кинетической энергии ударника. Исходя из сказанного, можно записать выражение для скорости ударника с учетом работы силы трения в виде:

$$V(t + \Delta t) = \sqrt{\left(V(t) + \frac{F_r}{M} \Delta t\right)^2 - \frac{4\pi}{M} \Delta t \int_0^{r_c} q_f r dr}. \quad (12)$$

Пространственное положение ударника полностью описывается координатой центра сферической поверхности z_c . Изменение этой координаты находится из выражения

$$z_c(t + \Delta t) = z_c(t) + 0.5(V(t + \Delta t) + V(t)) \Delta t.$$

Таким образом, кинетическая энергия ударника идет на изменение внутренней энергии материала и работу силы трения, что приводит в конечном итоге к остановке ударника. С этого момента запасенная упругая энергия в материале приводит к его разгрузке и часть этой энергии идет на движение ударника в обратном направлении. В этом сила трения будет увлекать ударник, то есть в выражении (12) последний член под корнем будет со знаком плюс.

Определение упругих констант энергетического материала

Большинство изделий, содержащих бризантные ЭМ, имеют различную структуру, и подобрать упругие константы, которые адекватно описывают поведение образца при механических нагрузках, проблематично. В данной работе для определения констант используются данные о распределении глубин отпечатка ударника на поверхности энергетического материала, полученные в ходе эксперимента [15] совместно с численным моделированием. Постановка эксперимента представлена ранее на рис.1. Экспериментальные данные содержат информацию о глубине внедрения ударника (пуансона), скорости ударника и реакции образца ЭМ. В таблице представлены данные серии экспериментов по ударному воздействию на октогенсодержащий ЭМ.

Данные серии экспериментов по ударному воздействию на октогенсодержащий ЭМ

№ опыта	Максимальная глубина проникновения пуансона в образец, мм	Скорость проникновения пуансона в образец, м/с	Результат
1	3,3	13,26	взрыв отсутствует
2	4,83	27,5	взрыв
3	5,31	29,7	взрыв
4	5,40	26,9	взрыв
5	3,08	11,18	взрыв отсутствует

На рис. 2 представлены динамики погружения пуансона в ЭМ для экспериментов № 1 и 5, эксперименты были выбраны таким образом, что в них отсутствует взрыв, что позволяет определить упругие константы ЭМ.

Как видно из рис. 2 эксперимента № 5 на момент времени $\sim 0,45$ мс происходит повторное погружение пуансона. Данный эффект связан с тем, что ударник сообщает повторный импульс пуансону и происходит повторное погружение в ЭМ. Так как для эксперимента № 1 отличительной особенностью является отсутствие взрыва и повторных ударов, таким образом, на основании данного эксперимента проводилось определение упругих констант образца ЭМ с помощью численного моделирования.

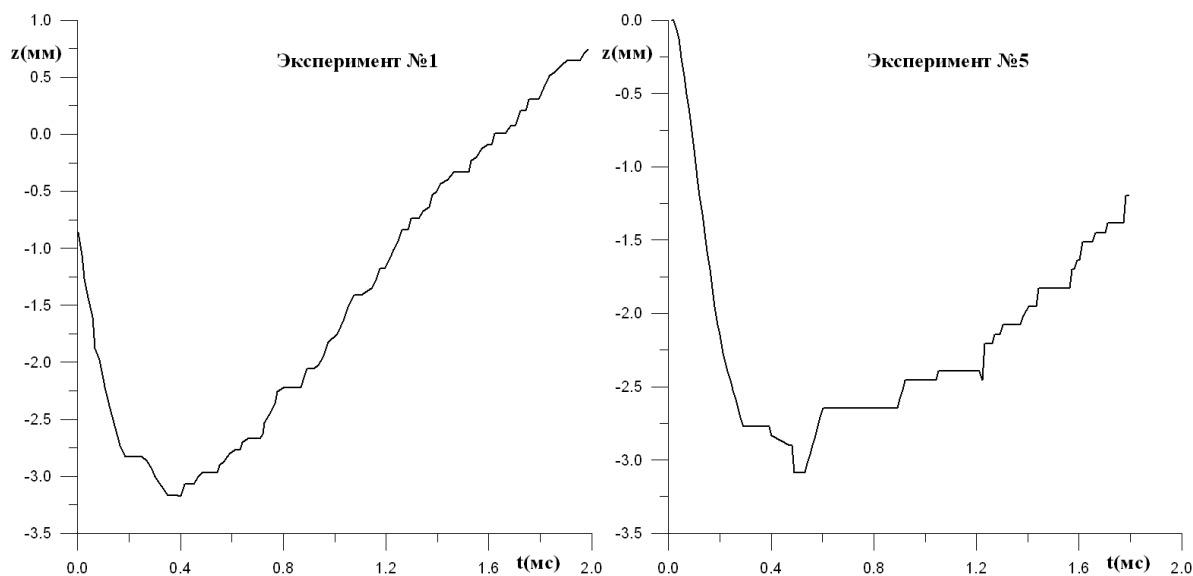


Рис. 2. Динамика погружения пуансона, полученная в ходе экспериментов

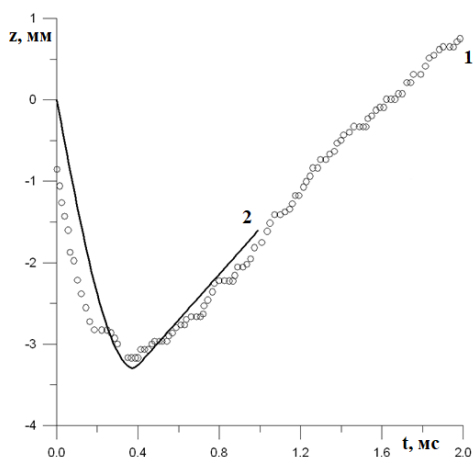


Рис. 3. Сравнение динамики погружения пуансона в эксперименте № 1 с результатами численного моделирования:
1 – эксперимент; 2 – расчет

На рис. 3 представлены графики зависимости глубины погружения от времени нагружения для скорости пуансона из эксперимента № 1. Моментом окончания расчета является время отрыва пуансона от образца ЭМ. Момент времени был выбран так, что отразившийся от поверхности ЭМ ударник обеспечил релаксацию упругих напряжений в ЭМ. В этом случае геометрия отпечатка оставалась в дальнейшем неизменной. В литературе коэффициент трения ЭМ варьируется от 0,2 до 0,4 [16]. Поэтому расчеты проводились при осредненном значении коэффициента трения $k_f = 0,3$.

Анализ полученных профилей и экспериментальных данных показал, что «кратер», полученный в ходе численного моделирования с упругими константами $Y = 0,0845$ ГПа и $\mu = 18$ ГПа, наиболее близок к геометрии поверхности ЭМ после взаимодействия с ударником. Также угол наклона прямой соответствующей остаточной скорости совпадает с экспериментом.

Таким образом, результаты расчетов глубины внедрения пуансона при скорости ударника 13,26 м/с не противоречит данным, полученным в эксперименте, что подтверждает адекватность найденных упругих констант образца ЭМ.

Выводы

По результатам, представленным в работе, можно сделать следующие выводы:

1. Предложенная математическая модель, основанная на системе уравнений механики сплошных сред и включающая модель Прандтля–Рейса для описания пластических деформаций, продемонстрировала высокую точность в описании экспериментальных данных.

2. На основе анализа экспериментальных данных по динамике погружения пуансона в октогенсодержащий ЭМ были определены упругие константы материала: модуль Юнга $Y = 0,0845$ ГПа и модуль сдвига $\mu = 18$ ГПа. Эти значения хорошо согласуются с экспериментальными результатами, что подтверждает адекватность предложенной модели.

3. Предложенная в работе математическая модель может быть использована для анализа других типов ЭМ и оптимизации их состава с целью снижения чувствительности к внешним воздействиям.

Литература

1. Кондриков, Б.Н. Технологическая безопасность на стыке веков / Б.Н. Кондриков. – Москва: ПХТУ им. Д. И. Менделеева, 2006. – 112 с.
2. Doherty, R. Insensitive Munition – Coming of Age / R. Doherty, D. Watt // 35th International Annual Conference of ICT on June 29 – July 2, 2004 in Karlsruhe, Germany. – 2004. – P. 1–12.
3. Жилин, В.Ф. Малочувствительные взрывчатые вещества / В.Ф. Жилин, В.Л. Збарский, Н.В. Юдин. – Москва: ПХТУ им. Д. И. Менделеева, 2008. – 160 с.
4. Chidester, S.K. A Frictional Work Predictive Method for the Initiation of Solid High Explosives from Low-Pressure Impacts / S.K. Chidester, L.G. Green, C.G. Lee // Lawrence Livermore National Lab., CA (United States). – 1993. – 13 p.
5. Taylor, G. The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress I. Theoretical considerations / G. Taylor // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1948. – Vol. 194, no. 1038. – P. 289–299.
6. The Use of Impact Techniques to Characterize the High Rate Mechanical Properties of Plastic Bonded Explosives / F.R. Christopher, J.C. Foster, L.L. Wilson, H.L. Gilland // Proc. 11th International Detonation Symposium. – 1998. – P. 286.
7. Dobratz, B.M. LLNL Explosives Handbook / B.M. Dobratz, P.C. Crawford. – Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory, 1985. – (Report UCRL-52997 Change 2).
8. Рейс, А. Учет упругой деформации в теории пластичности / А. Рейс // Теория пластичности. – Москва : Изд-во иностр. лит., 1948. – 260 с.
9. Klinacheva, N. L. Modelling of Shock Wave Experiments on Two-Fold Compression of Polymethyl Methacrylate / N. L. Klinacheva, E. S. Shestakovskaya, A. P. Yalovets // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2022. – Vol. 9, no. 2. – P. 26–38.
10. Ковалев, Ю.М. Уравнения состояния для описания изотермического сжатия некоторых молекулярных кристаллов нитросоединений // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 1. – С. 229–239.
11. Ковалев, Ю.М. Уравнения состояния для расчета давлений ударно-волнового сжатия пентаэритриттетранитрата (ТЭНа) / Ю.М. Ковалев, Е.В. Помыкалов // Инженерно-физический журнал. – 2023. – Т. 96, № 4. – С. 1053–1061.
12. Яловец, А.П. Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц // ПМТФ. – 1997. – № 1. – С. 151–166.
13. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
14. Амосов, А.П. Теория воспламенения взрывчатых веществ при механических воздействиях / А. П. Амосов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 1996. – № 4. – С. 208–235.
15. Помыкалов, Е.В. Определение упругих констант энергетического материала на основании экспериментальных данных / Е.В. Помыкалов, Ю.М. Ковалев, А.П. Яловец // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2024 по направлению «Инновационные ядерные технологии»: Сборник научных трудов всероссийской научно-практической конференции, Снежинск, 31 января 2024 года. – Москва: Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 2025. – С. 110–113
16. Green, L. Mechanical and frictional behavior of skid test hemispherical billets / L. Green, A. Weston, J. Van Velkinburg // Lawrence Livermore Laboratory, California University, Livermore, 1971, Report No. UCRL51085.

Поступила в редакцию 2 апреля 2025 г.

Сведения об авторах

Ковалев Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: yum_kov@mail.ru.

Лебедев Максим Александрович – научный сотрудник, заведующий отделом, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Российская Федерация.

Маташ Владимир Петрович – кандидат технических наук, заведующий отделом, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической

физики имени академика Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Российская Федерация, e-mail: s.m.ulyanov@vniitf.ru.

Помыкалов Евгений Валерьевич – аспирант, кафедра вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: pomykalovev@susu.ru.

Яловец Александр Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра вычислительной механики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

DOI: 10.14529/mmph250207

DETERMINATION OF ELASTIC CONSTANTS OF ENERGETIC MATERIALS BASED ON EXPERIMENTAL DATA ON MECHANICAL IMPACT

Yu.M. Kovalev¹, M.A. Lebedev², V.P. Matash², E.V. Pomykalov¹, A.P. Yalovets¹

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

² Federal State Unitary Enterprise "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russian Federation

E-mail: pomykalovev@susu.ru

Abstract. The article addresses the problem of developing a mathematical model for the numerical analysis of potential emergency situations involving energetic materials (EMs), which are highly sensitive to mechanical and thermal loads. The mathematical model and calculations are based on dynamic and thermodynamic material properties obtained from experiments involving mechanical impact by a metallic striker on an EM. This allows the use of an elastic-plastic homogeneous medium model to describe the deformation process of the EM. The article presents the problem formulation corresponding to experiments on striker impact on the EM and describes the system of continuum mechanics differential equations in Lagrangian variables. The Prandtl–Reuss model is used to simulate plastic flow, along with material state equations and boundary conditions accounting for the mechanical and thermal interaction between the striker and the EM. Based on experimental data from the impact of a metallic striker on an octogen-containing EM, numerical modeling of the elastic-plastic flow of the EM is performed, enabling the determination of the material's elastic constants. The calculated results on the dynamics of striker penetration into the EM have shown good agreement with experimental data, confirming the adequacy of the proposed mathematical model.

Keywords: Impact loading; energetic material; Prandtl–Reuss model; striker; elastic constants.

References

1. Kondrikov, B.N. *Tekhnologicheskaya bezopasnost' na styke vekov* (Technological Security at the Turn of the Century). Moscow, RKhTU im. D.I. Mendeleeva Publ., 2006, 112 p.
2. Doherty R., Watt D. Insensitive Munition – Coming of Age. *Proc. 35th International Annual Conference of ICT on June 29 - July 2, 2004 in Karlsruhe, Germany*, 2004, pp. 1–12.
3. Zhilin V.F., Zbarskiy V.L., Yudin N.V. *Malochuvstvitel'nye vzryvchatye veshchestva* (Low-sensitivity explosives). Moscow, RKhTU im. D.I. Mendeleeva Publ., 2008, 160 p.
4. Chidester S.K., Green L.G., Lee C.G. *A Frictional Work Predictive Method for the Initiation of Solid High Explosives from Low-Pressure Impacts*. Lawrence Livermore National Lab., CA (United States), 1993, 13 p.
5. Taylor, G. The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress I. Theoretical Considerations. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1948, Vol. 194, no. 1038, P. 289–299. DOI: 10.1098/rspa.1948.0081.
6. Christopher F.R., Foster J.C., Wilson L.L., Gilland H.L. The Use of Impact Techniques to Characterize the High Rate Mechanical Properties of Plastic Bonded Explosives. *Proc. 11th International Detonation Symposium*, J.M. Short and J.E. Kennedy, eds., 1998, p. 286.

7. Dobratz B.M., Crawford P.C. *LLNL Explosives Handbook*. – Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory, 1985, Report UCRL-52997 Change 2.
8. Reys A. Uchet uprugoy deformatsii v teorii plastichnosti (Consideration of Elastic Deformation in the Theory of Plasticity). *Teoriya plastichnosti* (Theory of plasticity). Moscow, Izd-vo inostr. lit. Publ., 1948, 260 p. (in Russ.).
9. Klinacheva N.L., Shestakovskaya E.S., Yalovets A.P. Modelling of Shock Wave Experiments on Two-Fold Compression of Polymethyl Methacrylate. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2022, Vol. 9, no. 2, pp. 26–38.
10. Kovalev Yu.M. Uravneniya sostoyaniya dlya opisaniya izotermicheskogo szhatiya nekotorykh molekulyarnykh kristallov nitrosoedineniy (Equations of State for Describing the Isothermal Compression of some Molecular Crystals of Nitro compounds). *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2020, Vol. 93, no. 1, pp. 229–239. (in Russ.).
11. Kovalev Yu.M., Pomykalov E.V. Uravneniya sostoyaniya dlya rascheta davleniy udarno-volnovogo szhatiya pentaeritritetranitrata (TENa) (Equations of State for Calculating the Pressures of Shock Wave Compression of Pentaerythritol Tetranitrate (TENa)). *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2023, Vol. 96, no. 4, pp. 1053–1061. (in Russ.).
12. Yalovets A.P. Raschet techeniy sredy pri vozdeystvii intensivnykh potokov zaryazhennykh chastits (Calculation of Medium Flows under the Influence of Intense Streams of Charged Particles). *PMTF*, 1997, no. 1, pp. 151–166. (in Russ.).
13. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T.VI. Gidrodinamika* (Theoretical Physics. Vol. VI. Hydrodynamics). Moscow, Nauka Publ., 1988, 216 p. (in Russ.).
14. Amosov A. P. Theory of Ignition of Explosives under Mechanical Influences. *Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 1996, no. 4, pp. 208–235.
15. Pomykalov E.V., Kovalev Yu.M., Yalovets A.P. Opredelenie uprugikh konstant energeticheskogo materiala na osnovanii eksperimental'nykh dannykh (Determination of Elastic Constants of an Energy Material based on Experimental Data). *Nauchnaya sessiya NIYaU MIFI-2024 po napravleniyu «Innovatsionnye yadernye tekhnologii»: Sbornik nauchnykh trudov vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Snezhinsk, 31 yanvarya 2024 goda* (Scientific session of the National Research Nuclear University MEPhI-2024 in the field of "Innovative nuclear technologies": Collection of scientific papers of the All-Russian Scientific and practical conference, Snezhinsk, January 31, 2024). Moscow, Natsional'nyy issledovatel'skiy yadernyy universitet MIFI Publ., 2025, pp. 110–113. (in Russ.).
16. Green L., Weston A., Van Velkinburg J. *Mechanical and Frictional Behavior of Skid Test Hemispherical Billets*. Lawrence Livermore Laboratory, California University, Livermore, 1971, Report No. UCRL51085.

Received April 2, 2025

Information about the authors

Kovalev Yuri Mikhailovich is Dr. Sc. (Physical and Mathematical), Professor, Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: yum_kov@mail.ru.

Lebedev Maksim Aleksandrovich is Scientist, Department Head, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation. ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-0226-1901>.

Matash Vladimir Petrovich is Cand. Sc. (Engineering), Head of Department, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation, e-mail: s.m.ulyanov@vniitf.ru. ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-1908-2410>.

Pomykalov Evgeny Valeryevich is Post-graduate Student, Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: pomykalovev@susu.ru.

Yalovets Alexander Pavlovich is Dr. Sc. (Physical and Mathematical), Professor, Department of Computational Mechanics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

ВКЛАД ПРИМЕСНЫХ ИОНОВ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В НЕМАТИЧЕСКОЙ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ

А.М. Гавриляк¹, М.В. Гавриляк^{1,2}, В.А. Боронин^{1,2}, Ф.В. Подгорнов¹

¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

²Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: gavriliakam@susu.ru

Аннотация. Исследовано влияние примесных ионов на пространственно-временное распределение локального электрического поля в планарной жидkokристаллической (ЖК) ячейке с блокирующими электродами. Проведено численное моделирование динамики переключения директора нематического жидкого кристалла (НЖК) с использованием системы уравнений Пуассона–Нернста–Планка и нелинейного уравнения Эриксона–Лесли при управляющем электрическом напряжении, превышающем напряжение перехода Фредерикса. Предложен метод учета влияния эффективной диэлектрической проницаемости, связанной с переориентацией директора НЖК на динамику электродиффузии примесных ионов. Спектральный анализ локального электрического поля выявил наличие высших гармоник, обусловленных пространственной неоднородностью распределения ионных примесей. Показано, что наличие данных гармоник в спектральном составе локального электрического поля приводит к нелинейности динамики переключения директора НЖК.

Ключевые слова: нематические жидкие кристаллы; примесные ионы; блокирующие электроды; нелинейные искажения; эффективная диэлектрическая проницаемость; локальное электрическое поле.

Введение

В работе устройств, основанных на электрооптическом переключении жидких кристаллов (ЖК), как правило, предполагается, что электрическое поле внутри слоя жидкого кристалла равно внешнему электрическому полю. Однако примесные ионы в ЖК-слое оказывают существенное влияние на динамику электрооптического переключения и на параметры/характеристики ЖК устройств, а также могут стать причиной различных негативных эффектов (мерцание, залипание изображения, изменение времени электрооптического переключения) [1]. Кроме того, примесные ионы могут приводить к таким нежелательным последствиям для ЖК-устройств, как электрогидродинамическая нестабильность [2–5].

В ряде работ было показано, что необходимо рассматривать электрическое поле внутри ЖК-слоя как результат перераспределения внешнего управляющего поля между компонентами ЖК-ячейки [6, 7]. В данных работах было доказано, что форма, амплитуда и спектральный состав электрического поля внутри ячейки существенно отличается от внешнего приложенного электрического поля, что оказывает влияние на форму электрооптического переключения данных ячеек [8–10].

Для расчета влияния ионов на характеристики ЖК-ячеек [11, 12] была предложена упрощенная дрейфовая модель переноса ионов в ЖК в приближении малого диффузионного тока, и исследовано влияние примесных ионов на динамику переключения ЖК под воздействием постоянного электрического поля. Было доказано перераспределение приложенного напряжения между слоем ЖК, обусловленное накоплением ионов на границе блокирующего полимерного слоя.

В то же время в случае переменного электрического поля исследовано влияние примесных ионов на формирование двойных электрических слоев [13–15], поляризацию пространственного

заряда [16, 17], а также процессы генерации/рекомбинации ионов [18–20]. Основываясь на модели Пуассона–Нернста–Планка, в предположении малого приложенного синусоидального напряжения ($V < \frac{k_B T}{ze}$, e – элементарный заряд, k_B – постоянная Больцмана, z – валентность ионов, T – температура [21]), были рассчитаны комплексные спектры диэлектрической проницаемости с учетом влияния ионных примесей [22, 23]. В рамках данной модели предполагается, что диэлектрическая проницаемость постоянна, так как приложенное электрическое напряжение существенно меньше перехода Фредерикса (V_{th}). Данное упрощение не выполняется в случае больших приложенных электрических напряжений ($V > V_{th}$), так как из-за пространственно-временного переключения директора жидкого кристалла необходимо учитывать анизотропию диэлектрической проницаемости ЖК и ее вклад в нелинейные диэлектрические свойства ЖК-ячеек.

Цель данной работы – моделирование вклада примесных ионов и анизотропии диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла (НЖК) в пространственно-временное распределение директора и локального электрического поля в ячейке, управляемой синусоидальным электрическим сигналом с амплитудой, превышающей порог Фредерикса.

Теоретическая модель

Расчет локального электрического поля в НЖК-ячейке

В данной работе используется одномерная модель, описывающая планарно-ориентированную ЖК-ячейку, заполненную нематическим жидким кристаллом. Предполагается, что в объеме жидкого кристалла содержатся только одновалентные ионы.

Для построения пространственно-временного распределения концентрации $p(x, t)$ положительных и $n(x, t)$ отрицательных ионов, а также напряженности локального электрического поля $E(x, t)$ применялась система уравнений Пуассона–Нернста–Планка [24–26]:

$$e \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J_p(x, t)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$e \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial J_n(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

где $J_p(x, t)$ и $J_n(x, t)$ – плотности потока положительных и отрицательных ионов.

В рамках данного подхода предполагалось отсутствие конвективных течений ЖК, поэтому можно записать, что каждый из токов $J_p(x, t)$ и $J_n(x, t)$ состоит из дрейфового и диффузионного слагаемых:

$$J_p(x, t) = e\mu_p p(x, t)E(x, t) - eD_p \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad (3)$$

$$J_n(x, t) = e\mu_n n(x, t)E(x, t) + eD_n \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0 \varepsilon(t)} (p(x, t) - n(x, t)), \quad (5)$$

где D_n, D_p – коэффициенты диффузии отрицательных и положительных ионов, μ_n, μ_p – подвижности отрицательных и положительных ионов, ε – диэлектрическая проницаемость ЖК. Полагается, что коэффициенты диффузии и подвижности ионов являются постоянными и не зависят от приложенного электрического напряжения, а также равны для положительных и отрицательных ионов $D_n = D_p = D_{n,p}$ и $\mu_n = \mu_p = \mu_{n,p}$. Соотношение Эйнштейна между коэффициентами диффузии и подвижностями положительных и отрицательных ионов: $\mu_{n,p} = \frac{D_{n,p}}{k_B T}$.

В качестве начальных и граничных условий предполагается, что начальные концентрации положительных и отрицательных ионов равны между собой и распределены равномерно по ячейке. В данной модели считается, что отсутствуют электрохимические реакции на управляющих электродах, которые являются блокирующими:

$$J_p(0, t) = J_p(d, t) = 0, \quad (6)$$

$$J_n(0, t) = J_n(d, t) = 0, \quad (7)$$

где d – толщина ячейки.

В дальнейших расчетах к электродам приложено синусоидальное электрическое напряжение $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ с амплитудой $V_0 = 2\text{ В}$, превышающей пороговое напряжение Фредерикса для

большинства НЖК (напр. смеси E7 [27]) и частотой $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1\text{ Гц}$, где ω – циклическая частота.

Выбор синусоидального сигнала обусловлен тем, что в дальнейшем полученные результаты будут использованы для получения комплексного спектра нелинейной диэлектрической проницаемости.

Расчет динамики переключения директора НЖК

В данной работе рассматривается планарно-ориентированный НЖК (анизотропия диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon > 0$), заключенный в ячейку, состоящую из двух стеклянных подложек с нанесенными на них прозрачными электродами (например, индий оловянный оксид – ИТО). Для ориентации НЖК на прозрачные электроды обычно наносится полимерный ориентирующий слой, натертый в одном направлении. Схематическое изображение НЖК ячейки показано на рис. 1, а.

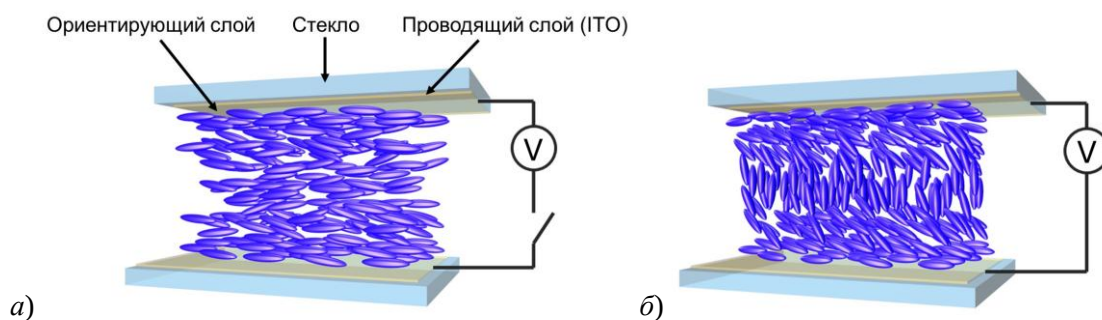


Рис. 1. Схематическое представление ЖК-ячейки, заполненной нематиком: а) приложенное электрическое напряжение $V = 0$, б) $V \neq 0$

При моделировании предполагалось, что энергия сцепления на ориентирующих слоях является бесконечно большой, а угол преднаклона директора НЖК на поверхности ориентирующего слоя полагался равным $\theta_{\text{tilt}} = 1^\circ$. В рамках данного предположения во внешнем электрическом поле директор НЖК не меняет своей ориентации около полимерного слоя (см. рис. 1, б).

Для исследования динамики переключения молекул НЖК используется уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta f}{\delta \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta'} \right) = \gamma \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (8)$$

где f – плотность свободной энергии, являющаяся суммой электрической и упругой частей: $f = f_{\text{упр}} + f_{\text{эл}}$, γ – вращательная вязкость ЖК, θ – угол между директором и нормалью к поверхности ячейки.

Ниже приведены формулы для электрической и упругой частей плотности свободной энергии:

$$f_{\text{эл}} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \Delta \epsilon E^2 \sin^2(\theta(x)), \quad (9)$$

$$f_{\text{упр}} = \frac{1}{2} K_{11} \cos^2(\theta(x)) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{33} \sin^2(\theta(x)) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2, \quad (10)$$

где K_{11}, K_{33} – модули упругости Франка, ε_0 – электрическая постоянная, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ – анизотропия относительной диэлектрической проницаемости.

Минимизация плотности свободной энергии приводит к уравнению Эриксона–Лесли:

$$\left(K_{11} \cos^2(\theta(x)) + K_{33} \sin^2(\theta(x)) \right) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{2} (K_{33} - K_{11}) \sin(2\theta(x)) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta\varepsilon \sin(2\theta(x)) E^2 = \gamma \frac{d\theta}{dt}. \quad (11)$$

В общем случае модули упругости Франка НЖК не равны друг другу, что может привести к нелинейности и отсутствию симметрии при переориентации директора. Уравнение (11) можно упростить, приравняв $K_{33} = K_{11}$, для исключения нелинейного вклада переориентации ЖК.

Определение эффективной диэлектрической проницаемости

Поскольку молекулы НЖК анизотропны, то его диэлектрическая проницаемость вдоль директора ($\varepsilon_{\parallel}$) и в направлении, перпендикулярном к нему ($\varepsilon_{\perp}$), существенно разные. В связи с этим из-за переориентации молекул ЖК под действием внешнего электрического поля происходит изменение диэлектрической проницаемости вдоль направления приложенного поля. Из-за неоднородной по пространству ориентации директора можно ввести эффективную диэлектрическую проницаемость, определенную как среднюю диэлектрическую проницаемость по пространству вдоль выделенного направления [28, 29]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{d} \int_0^d (\varepsilon_{\perp} + \Delta\varepsilon \sin^2(\theta(x, t))) dx \quad (12)$$

Около ориентирующего слоя предполагается, что ориентации директора НЖК не изменяется под действием приложенного электрического поля из-за бесконечности энергии сцепления. В то же время из-за малости толщины данного приповерхностного слоя его вкладом в эффективную диэлектрическую проницаемость можно пренебречь.

Компьютерное моделирование

Для моделирования динамики пространственно-временного распределения концентрации примесных ионов, электрического поля и угла наклона директора НЖК система уравнений (1)–(5), (11) и (12) численно решалась в пакете MATLAB с использованием итерационного метода конечных разностей.

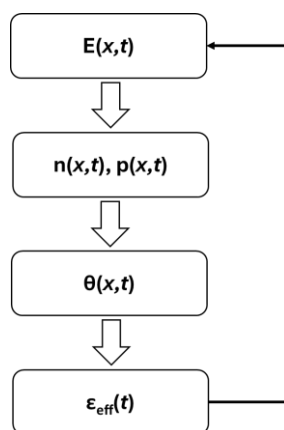


Рис. 2. Блок-схема алгоритма расчета динамики переключения ЖК

Таблица 1 Параметры смеси E7	
K_{11} , пН	11
K_{33} , пН	18
$\Delta\varepsilon$	11
γ , Па·с	0,234
$\varepsilon_{\perp}$	6
$\varepsilon_{\parallel}$	17
$D_{p,n}$, м ² /с	$1 \cdot 10^{-11}$

Графический алгоритм расчета рассматриваемой модели представлен на рис. 2. На первом этапе моделируется распределение электрического поля в ячейке, на втором этапе рассчитывается распределение концентраций положительных и отрицательных ионов, далее следует расчет распределения угла наклона директора молекул НЖК и в конечном итоге рассчитывается временная зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ЖК. При расчете использовались материальные параметры НЖК смеси E7 (табл. 1), а толщина ячейки предполагалась равной 6 мкм.

Кроме того, при расчете предполагалось, что отсутствуют какие-либо дефекты текстуры НЖК, а температура оставалась постоянной и равной 298 К, таким образом материальные параметры не меняются.

Результаты и обсуждение

По результатам численного решения систем уравнений (1)–(5), (11) и (12), в приложенном электрическом поле примесные ионы, присутствующие в жидком кристалле, концентрируются около электродов, что влияет на перераспределение напряженности электрического поля внутри ячейки (рис. 3). Из графиков на данном рисунке видно, что увеличение концентрации ионов от $n = p = 1 \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$ до $1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ приводит к уменьшению напряженности электрического поля в середине ячейки, а в области около электродов она увеличивается более чем на порядок. Так, например, при концентрации $1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ значение напряженности электрического поля в центре уменьшилось до $E = 22,1 \text{ кВ/м}$. При концентрации примесных ионов, не превышающей $n = p \leq 1 \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$, в центре ячейки не наблюдается пространственное перераспределение электрического поля, а его напряженность равна $E = 32,7 \text{ кВ/м}$.

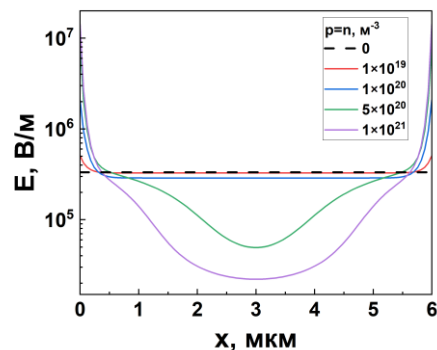


Рис. 3. Пространственное распределение напряженности локального электрического поля в НЖК ячейке при разных значениях концентраций ионов при $t = \tau/4$, где τ – период колебаний; Частота и амплитуда приложенного синусоидального сигнала $\nu = 1 \text{ Гц}$ и $V_0 = 2 \text{ В}$ соответственно

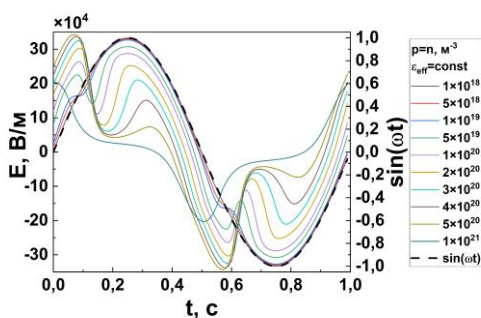


Рис. 4. Временная зависимость напряженности локального электрического поля в середине ячейки $x = d/2$ (в течение одного периода приложенного сигнала) при разных значениях концентрации примесных ионов. Частота и амплитуда приложенного синусоидального сигнала $\nu = 1 \text{ Гц}$ и $V_0 = 2 \text{ В}$ соответственно

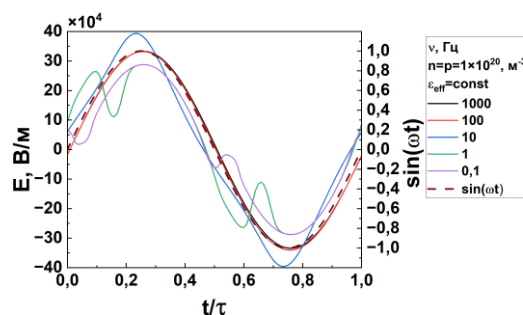


Рис. 5. Зависимость напряженности локального электрического поля (в середине ячейки $x = d/2$) от нормированного на период времени. Данный график взят за один период приложенного поля, концентрация примесных ионов $1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$, амплитуда приложенного синусоидального напряжения $V_0 = 2 \text{ В}$

При увеличении концентрации ионов временное распределение напряженности поля в середине ячейки принимает несинусоидальный вид (рис. 4), который проявляется в виде дополнительного пика в начале каждого полупериода. Величина пика растет при увеличении концентрации. Также амплитуда напряженности поля начинает уменьшаться при концентрации $5 \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$. При концентрации $1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ электрическое поле, создаваемое ионами $\vec{E}_{\text{ион}}$, имеет доминирующий вклад в локальное электрическое поле $\vec{E}_{\text{лок}}$ ячейки. Здесь мы предполагаем, что $\vec{E}_{\text{ион}}$, $\vec{E}_{\text{лок}}$ и приложенное электрическое поле $E_{\text{пр}} = V/d$ связаны соотношением

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E}_{\text{пр}} + \vec{E}_{\text{ион}}. \quad (13)$$

Временная зависимость локального электрического поля $\vec{E}_{\text{лок}}$ значительно отличается от формы приложенного сигнала $\vec{E}_{\text{пр}}$.

Отклонение динамики электрического поля в середине ячейки в присутствии большой концентрации ионов имеет частотную дисперсию (рис. 5). Таким образом, для низких частот (0,1 Гц и 1 Гц) сигнал значительно отклоняется от синусоидальной формы, проявляя дополнительные пики, которые отсутствуют при частотах более 100 Гц. Данное поведение электрического поля в ячейке можно объяснить характерным временем электродиффузии ионов, при котором ионы достигают противоположного электрода и начинают накапливаться на нем.

Из рис. 5 также видно, что при низких частотах ($\nu \leq 1$ Гц) максимум напряженности локального электрического поля достигается раньше, чем при высоких частотах, что указывает на существенные различия в динамике перераспределения поля в зависимости от частоты приложенного электрического напряжения.

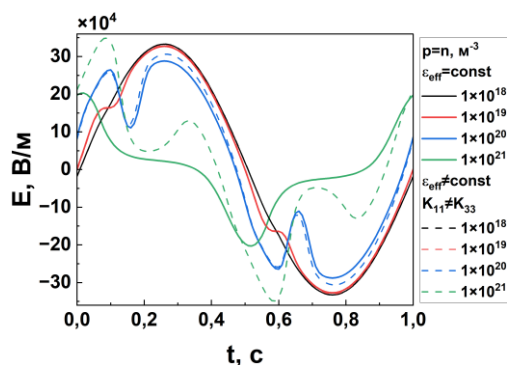


Рис. 6. Сравнение временных зависимостей напряженности локального электрического поля в середине ЖК-ячейки (за один период приложенного электрического синусоидального сигнала) при различных концентрациях примесных ионов, с учетом (пунктирные линии) и без учета (сплошные линии) зависимости эффективной диэлектрической проницаемости от ориентации директора НЖК для $K_{11} \neq K_{33}$

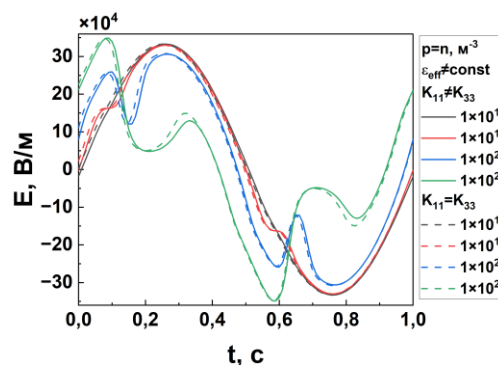


Рис. 7. Сравнение временных зависимостей напряженности локального электрического поля в середине ЖК-ячейки (за один период приложенного сигнала) при разных значениях концентрации примесных ионов с учетом эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{eff} \neq \text{const}$ в двух случаях: при различных $K_{11} \neq K_{33}$ и одинаковых $K_{11} = K_{33}$ модулях упругости Франка

На рис. 6 представлено сравнение временных зависимостей напряженности локального электрического поля в центре ЖК-ячейки ($x = d/2$) с учетом и без учета изменения эффективной диэлектрической проницаемости ϵ_{eff} от угла наклона директора НЖК при различных концентрациях примесных ионов. При концентрации ионов $n = p = 1 \times 10^{18} \text{ м}^{-3}$ зависимость напряженности локального электрического поля от времени не отличается от формы приложенного сигнала, но при увеличении концентрации можно наблюдать изменение формы функциональной зависимости кривой напряженности локального электрического поля. Как видно из данного графика, концентрация примесных ионов влияет на спектральный состав локального электрического поля, что должно приводить к нелинейности электрооптического отклика НЖК ячейки.

Учет влияния переориентации директора НЖК на эффективную диэлектрическую проницаемость показал, что при больших концентрациях ионов $n, p \geq 1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ происходит увеличение амплитуды первой гармоники при неизменности амплитуд высших гармоник.

Моделирование локального электрического поля в ячейке при различных параметрах жидкого кристалла в случае различных $K_{11} \neq K_{33}$ и одинаковых $K_{11} = K_{33}$ модулях упругости Франка (рис. 7) показало, что в обоих случаях присутствует значительная нелинейность электрического поля. Наибольшее влияние коэффициентов упругости Франка на распределение локального электрического поля происходит при концентрации ионов $n, p \geq 1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$, что в целом согласуется с результатами, представленными на рис. 6, и связано с перерасчетом эффективной диэлектрической проницаемости.

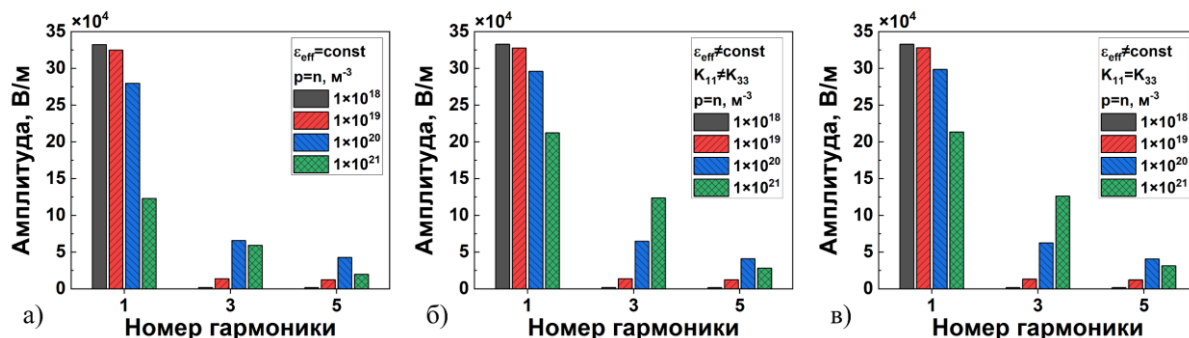


Рис. 8. Зависимость амплитуды локального электрического поля 1-й, 3-й и 5-й гармоник от концентрации примесных ионов в случае а) постоянной эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{eff} = \text{const}$, б) эффективной диэлектрической проницаемости, зависящей от ориентации директора при $K_{11} \neq K_{33}$, в) $K_{11} = K_{33}$

Примесные ионы в ЖК-ячейке вызывают пространственные искажения электрического поля, что приводит к изменению его спектрального состава. Для количественного анализа вклада высших гармоник в локальное электрическое поле удобно использовать диаграммы, полученные с помощью быстрого преобразования Фурье, отражающие зависимость амплитуды высших гармоник от концентрации примесных ионов (рис. 8). Из данных диаграмм следует, что основная гармоника вносит доминирующий вклад во временную зависимость электрического поля. С увеличением концентрации примесных ионов основная гармоника уменьшается, однако в то же время наблюдается рост амплитуды 3-й и 5-й гармоник, что указывает на усиление нелинейных эффектов. Влияние учета анизотропии ЖК на амплитуду электрического поля наиболее значимо при больших концентрациях ($n, p > 1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$), независимо от того, равны ли друг другу коэффициенты упругости Франка ($K_{11} = K_{33}$) или нет ($K_{11} \neq K_{33}$). Отсутствие четных гармоник свидетельствует о centrosymmetry исследуемой системы относительно знака подаваемого электрического напряжения.

Для количественной оценки отклонения формы локального электрического поля от идеальной синусоиды рассчитаны коэффициенты гармонических искажений (K_Γ):

$$K_\Gamma = \frac{\sqrt{E_2^2 + E_3^2 + E_4^2 + \dots + E_n^2}}{E_1}, \quad (14)$$

где E_n – амплитуда n -й гармоники электрического поля.

Таблица 2
Коэффициенты гармонических искажений при различных концентрациях ионных примесей для случаев постоянной эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{eff} = \text{const}$ и эффективной диэлектрической проницаемости, зависящей от ориентации директора при $K_{11} \neq K_{33}$ и $K_{11} = K_{33}$

	$n, p = 10^{18} \text{ м}^{-3}$	$n, p = 10^{19} \text{ м}^{-3}$	$n, p = 10^{20} \text{ м}^{-3}$	$n, p = 10^{21} \text{ м}^{-3}$
$\varepsilon_{eff} = \text{const}$	0,815 %	6,402 %	29,155 %	50,879 %
$\varepsilon_{eff} \neq \text{const}, K_{11} \neq K_{33}$	0,790 %	6,275 %	26,882 %	60,464 %
$\varepsilon_{eff} \neq \text{const}, K_{11} = K_{33}$	0,767 %	6,132 %	25,943 %	61,414 %

Анализ коэффициентов гармонических искажений показал (см. табл. 2), что при концентрации примесных ионов $n, p \leq 1 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$ отклонение от синусоидального сигнала уменьшается при учете эффективной диэлектрической проницаемости, а также с исключением нелинейностей, вызванных разницей в модулях упругости Франка $K_{11} \neq K_{33}$. Данный эффект отчетливо выражен при концентрации примесных ионов $n, p = 1 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$, где коэффициент гармонических искажений уменьшился более чем на 3 %. Но при больших концентрациях $n, p \geq 1 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ наблюдается обратный эффект. При учете эффективной диэлектрической проницаемости при больших концентрациях примесных ионов амплитуда основной гармоники также увеличивается.

Моделирование динамики переключения директора НЖК

Результаты моделирования показали, что перераспределение локального электрического поля приводит к изменению динамики переориентации директора ЖК в присутствии ионов. На рис. 9 представлены результаты численного моделирования пространственно-временного распределения угла наклона молекул ЖК, рассчитанные для двух случаев: а) в отсутствие и б) в присутствии примесных ионов. Включение в моделирование ионов приводит к перераспределению электрического поля внутри ячейки и уменьшению максимального угла наклона. Кроме того, наблюдаются изменения в характере пространственно-временной динамики переориентации молекул.

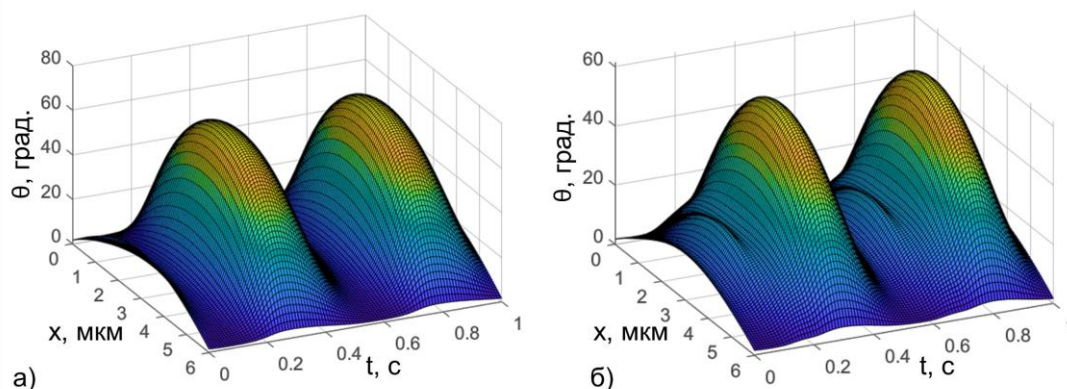


Рис. 9. Пространственно-временное распределение угла наклона директора НЖК: а) без учета ионов и б) при $n, p = 1 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Частота и амплитуда приложенного синусоидального сигнала $\nu = 1 \text{ Гц}$ и $V_0 = 2 \text{ В}$ соответственно; $K_{11} \neq K_{33}$

Возникновение дополнительного пика в напряженности электрического поля также отражается и на возникновении дополнительного максимума в распределении угла наклона директора при концентрациях выше $5 \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Как показано на рис. 10, при увеличении начальной концентрации ионов максимальное значение, до которого переориентируются молекулы ЖК, уменьшается: при $n = p = 1 \times 10^{18} \text{ м}^{-3}$ максимальный угол переориентации директора $\theta_{\max} = 68,2^\circ$, а при $n = p = 1 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$ $\theta_{\max} = 61,5^\circ$. Таким образом, рост концентрации примесных ионов приводит к уменьшению максимального угла переориентации директора, это может быть связано с ослаблением локального электрического поля внутри ячейки.

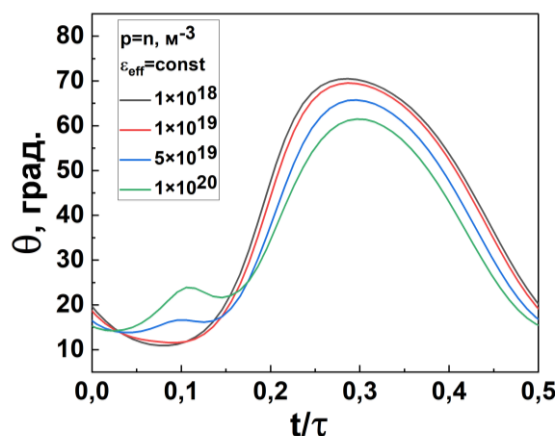


Рис. 10. Динамика переориентации директора НЖК в середине ячейки ($x = d/2$) за половину периода при разных значениях концентраций ионов

Выводы

В данной статье исследованы причины нелинейности локального электрического поля в планарно-ориентированной нематической жидкокристаллической ячейке с блокирующими электродами в присутствии примесных ионов.

Используя систему уравнений Пуассона–Нернста–Планка и нелинейное уравнение Эриксона–Лесли, численно рассчитали влияние ионных примесей и динамики переориентации директора ЖК на локальное электрическое поле в ячейке, заполненной НЖК смесью Е7, при приложении внешнего синусоидального электрического напряжения, амплитуда ($V_0 = 2 \text{ В}$) которого существенно больше перехода Фредерикса ($V_{th} \sim 0,9 \text{ В}$).

Результаты компьютерного моделирования показали, что существуют две причины нелинейности, приводящие к искажению синусоидальной формы локального электрического поля в НЖК: 1) нелинейная динамика переключения директора НЖК, 2) пространственно-временная неоднородность распределения примесных ионов. Было установлено, что учет эффективной диэлектрической проницаемости ЖК вносит дополнительный вклад в нелинейное поведение локального электрического поля, особенно при высоких концентрациях ионов. Частотный анализ временной зависимости локального электрического поля показал, что вклад, вызванный нелинейностью динамики переключения директора ЖК, существенно меньше, чем вклад неоднородности перераспределения примесных ионов в приложенном электрическом поле. Показано, что кривые напряженности принимают нелинейный вид только при низких частотах < 100 Гц, что связано с процессами электродиффузии и перераспределения ионов внутри ячейки.

Также показано влияние нелинейности локального электрического поля в присутствии примесных ионов на динамику переориентации директора ЖК, что позволяет более точно предсказывать возможные отклонения в электрооптическом отклике устройств на основе жидких кристаллов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23-13-00045, <https://rscf.ru/project/23-13-00045/>.

Литература

1. Garbovskiy, Y. Kinetics of Ion-Capturing / Ion-Releasing Processes in Liquid Crystal Devices utilizing Contaminated Nanoparticles and Alignment Films / Y. Garbovskiy // *Nanomaterials*. – 2018. – Vol. 8, Iss. 59. – P. 1–11.
2. High Contrast Switching of Transmission due to Electrohydrodynamic Effect in Stacked Thin Systems of Liquid Crystals / S.V. Serak, U. Hrozhyk, J. Hwang *et al.* // *Applied Optics*. – 2016. – Vol. 55, Iss. 30. – P. 8506.
3. Numerical Prediction of Transient Electrohydrodynamic Instabilities under an Alternating Current Electric Field and Unipolar Injection / C.-T. Zhou, Z.-Z. Yao, D.-L. Chen *et al.* // *Heliyon*. – 2023. – Vol. 9, Iss. 1. – P. e12812.
4. Nonlinear Electro-Hydrodynamics of Liquid Crystals / E.S. Pikina, A.R. Muratov, E.I. Kats, V. V. Lebedev // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 2023. – Vol. 137, Iss. 1. – P. 114–124.
5. Беляев, В.В. Физические методы измерения коэффициентов вязкости нематических жидких кристаллов / В.В. Беляев // *Успехи физических наук*. – 2001. – Т. 171, № 3. – С. 267.
6. Direct Current Electric Conductivity of Ferroelectric Liquid Crystals–Gold Nanoparticles Dispersion Measured with Capacitive Current Technique / A.R. Karaawi, M.V. Gavrilyak, V.A. Boronin *et al.* // *Liquid Crystals*. – 2020. – Vol. 47, Iss. 10. – P. 1507–1515.
7. Mesophase Materials as Smart Media for Emerging Pressure Sensors: Capacitive Method of Measurement of DC Conductivity / F.V. Podgornov, M. Gavrilyak, A. Karaawi *et al.* // *Proc. 2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC 2018)*. – 2018. – P. 1–5.
8. Hysteresis Inversion Frequency for V-Shape Electrooptical Switching Controlled by Dynamic Impedance of Ferroelectric SmC* Phase / L.M. Blinov, E.P. Pozhidaev, F.V. Podgornov *et al.* // *Ferroelectrics*. – 2002. – Vol. 277. – P. 3–11.
9. Modeling Electrooptical Effects in Ferroelectric Liquid Crystals. 1. Basic Equations and Experimental Tests / S.P. Palto, F.V. Podgornov, W. Haase, L.M. Blinov // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2004. – Vol. 410. – P. 95–104.
10. Modeling Electrooptical Effects in Ferroelectric Liquid Crystals. 2. V-Shape Switching in the SmC* Phase / L.M. Blinov, S.P. Palto, E.P. Pozhidaev *et al.* // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2004. – Vol. 410. – P. 105–115.
11. Molecular Reorientation Dynamics due to Direct Current Voltage-Induced Ion Redistribution in Undoped Nematic Planar Cell / P. Pagliusi, B. Zappone, G. Cipparrone, G. Barbero // *Journal of Applied Physics*. – 2004. – Vol. 96, Iss. 1. – P. 218–223.
12. Palomares, L.O. Optical Response of a Nematic Sample Submitted to a Periodic External Electric Field: Role of the Ionic Impurities / L.O. Palomares, J.A. Reyes, G. Barbero // *Physics Letters A*. – 2004. – Vol. 333, Iss. 1–2. – P. 157–163.

13. Rybakov, D.O. Electrical Double Layers and Their Effect on the Low-Frequency Dielectric Permittivity of 4-n-Pentyl-4'-Cyanobiphenyl (5CB) / D.O. Rybakov, V.V. Belyaev // *Liquid Crystals and Their Applications*. – 2018. – Vol. 18, Iss. 4. – P. 40–47.
14. Беляев, Б.А. Исследование электрофизических характеристик границы электрод – жидкий кристалл методом импедансной спектроскопии / Б.А. Беляев, Н.А. Дрокин // *Физика твердого тела*. – 2015. – Т. 57, № 1. – С. 170–175.
15. Sawada, A. Modeling of Electrode Polarization for Electrolytic Cells with a Limited Ionic Adsorption / A. Sawada // *Physical Review E*. – 2013. – Vol. 88, Iss. 3. – P. 032406.
16. Sawada, A. Electrode Process of Mobile Ions in Generating Space-Charge Polarization / A. Sawada, T. Manaka // *Physical Review E*. – 2024. – Vol. 109, Iss. 3. – P. 034802.
17. Probing Modulated Liquid Crystal Media with Dielectric Spectroscopy / M.P. Rosseto, R.R. Ribeiro de Almeida, E.K. Lenzi *et al.* // *Journal of Molecular Liquids*. – 2023. – Vol. 390. – P. 122943.
18. Ganea, C. P. Effects of the Ionic Association-Dissociation and Adsorption-Desorption on the Space Charge Polarization: A new theoretical approach / C. P. Ganea // *European Physical Journal Plus*. – 2014. – Vol. 129, Iss. 10. – P. 238.
19. Ganea, C. P. New Approach of the AC Electrode Polarization during the Measurements of Impedance Spectra / C.P. Ganea // *Romanian Journal of Physics*. – 2012. – Vol. 57. – P. 664–675.
20. MacDonald, J.R. Utility of Continuum Diffusion Models for Analyzing Mobile-Ion Immittance Data: Electrode Polarization, Bulk, and Generation-Recombination Effects / J. R. MacDonald // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2010. – Vol. 22, Iss. 49. – P. 495101.
21. Bazant, M.Z. Diffuse-charge Dynamics in Electrochemical Systems / M. Z. Bazant, K. Thornton, A. Ajdari // *Physical Review E*. – 2004. – Vol. 70, Iss. 2. – P. 021506.
22. Frequency-Dependent Dielectric Permittivity in Poisson–Nernst–Planck Model / M.P. Rosseto, L.R. Evangelista, E.K. Lenzi *et al.* // *Journal of Physical Chemistry B*. – 2022. – Vol. 126, Iss. 34. – P. 6446–6453.
23. Khazimullin M.V. Influence of Dielectric Layers on Estimates of Diffusion Coefficients and Concentrations of Ions from Impedance Spectroscopy / M.V. Khazimullin, Y.A. Lebedev // *Physical Review E*. – 2019. – Vol. 100, Iss. 6. – P. 1–15.
24. Barbero, G. Effective Dielectric Constant of Electrolytes / G. Barbero, I. Lelidis // *Journal of Applied Physics*. – 2014. – Vol. 115, Iss. 19. – P. 194101.
25. Derfel, G. Numerical Study of Ionic Current in Dielectric Liquid Layer Subjected to AC Voltage / G. Derfel // *Journal of Molecular Liquids*. – 2009. – Vol. 144, Iss. 1–2. – P. 59–64.
26. Вклад поляризации пространственного заряда в нелинейный спектр диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла: компьютерное моделирование / М.В. Гавриляк, А.М. Гавриляк, В.А. Боронин, Ф.В. Подгорнов // *Жидкие кристаллы и их практическое использование*. – 2025. – Т. 25, № 1. – С. 62–71
27. Measurement of the Twist Elastic Constant of Nematic Liquid Crystals using Pi-Cell Devices / P. D. Brimicombe, C. Kischka, S. Elston, E.P. Raynes // *Journal of Applied Physics*. – 2007. – Vol. 101, Iss. 4. – P. 1–8.
28. Shcherbinin, D.P. Electric Method for Studying Reorientation Dynamics of the Nematic Liquid Crystal Director / D.P. Shcherbinin, D.A. Vakulin, E.A. Konshina // *Technical Physics*. – 2016. – Vol. 61, Iss. 7. – P. 1039–1045.
29. Chen, H.Y. Electrodynamical Behaviour of Nematic Liquid Crystal in a Relaxation Process / H. Y. Chen, K.X. Yang, Z.Y. Lin // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 2010. – Vol. 43, Iss. 31. – P. 315103.

Поступила в редакцию 14 февраля 2025 г.

Сведения об авторах

Гавриляк Алина Маратовна – аспирант, ассистент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: gavriliakam@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9179-6945>

Гавриляк Максим Витальевич – ассистент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация; младший научный сотрудник, лаборатория нелинейной оптики, Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: gavriliakmv@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8299-9695>

Боронин Виктор Александрович – младший научный сотрудник, лаборатория нелинейной оптики, Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация; ассистент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: boronin1996vitek@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-8227-7635>

Подгорнов Федор Валерьевич – доцент кафедры физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: fedorpod@yahoo.de, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9926-4799>

CONTRIBUTION OF IMPURITY IONS TO SPATIAL-TEMPORAL DISTRIBUTION OF LOCAL ELECTRIC FIELD IN NEMATIC LIQUID CRYSTAL CELL

A.M. Gavril'yak¹, M.V. Gavril'yak^{1,2}, V.A. Boronin^{1,2}, F.V. Podgornov¹

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

² Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

E-mail: gavril'yakam@susu.ru

Abstract. The influence of impurity ions on the spatiotemporal distribution of the local electric field in a planar nematic liquid crystal (NLC) cell with blocking electrodes has been investigated. Numerical simulation of the switching dynamics of the NLC director has been performed using the Poisson–Nernst–Planck and nonlinear Ericksen–Leslie equations at the driving electrical voltage exceeding the Fredericksz threshold. The authors take into account the influence of the effective permittivity associated with the reorientation of the NLC director on the dynamics of electrodiffusion of impurity ions. Spectral analysis of the local electric field reveals the presence of higher harmonics caused by the spatial inhomogeneity of ionic impurity distribution. It has been proven that the presence of these harmonics in the spectral composition of the local electric field leads to a nonlinearity of the NLC director switching dynamics.

Keywords: Nematic liquid crystals; impurity ions; blocking electrodes; nonlinear distortions; effective permittivity; local electric field.

References

1. Garbovskiy Y. Kinetics of Ion-Capturing / Ion-Releasing Processes in Liquid Crystal Devices utilizing Contaminated Nanoparticles and Alignment Films. *Nanomaterials*, 2018, Vol. 8, no. 59, p. 59. DOI: 10.3390/nano802059.
2. Serak S.V., Hrozhyk U., Hwang J., Tabiryan N.V., Steeves D., Kimball B.R. High Contrast Switching of Transmission due to Electrohydrodynamic Effect in Stacked Thin Systems of Liquid Crystals. *Appl. Opt.*, 2016, Vol. 55, no. 30, p. 8506. DOI: 10.1364/ao.55.008506.
3. Zhou C.-T., Yao Z.-Z., Chen D.-L., Luo K., Wu J., Yi H.-L. Numerical Prediction of Transient Electrohydrodynamic Instabilities under an Alternating Current Electric Field and Unipolar Injection. *Heliyon*, 2023, Vol. 9, no. 1, p. e12812. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e12812.
4. Pikina E.S., Muratov A.R., Kats E.I., Lebedev V.V. Nonlinear Electro-Hydrodynamics of Liquid Crystals. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2023, Vol. 137, no. 1. pp. 114–124. DOI: 10.1134/S1063776123070075.
5. Belyaev V.V. Physical Methods for Measuring the Viscosity Coefficients of Nematic Liquid Crystals. *Physics–Uspekhi*, 2001, Vol. 44, no 3, pp. 255–284. DOI: 10.3367/UFNr.0171.200103b.0267. (in Russ.).
6. Karaawi A.R., Gavril'yak M.V., Boronin V.A., Gavril'yak A.M., Kazachonok J.V., Podgornov F.V. Direct Current Electric Conductivity of Ferroelectric Liquid Crystals–Gold Nanoparticles Disper-

sion Measured with Capacitive Current Technique. *Liq. Cryst.*, 2020, Vol. 47, no. 10, pp. 1507–1515. DOI: 10.1080/02678292.2020.1740951.

7. Podgornov F.V., Gavril'yak M., Karaawi A., Ishmurzina A., Kolmakova N.S., Haase W. Mesophase Materials as Smart Media for Emerging Pressure Sensors: Capacitive Method of Measurement of DC Conductivity. *Proc. 2018 Glob. Smart Ind. Conf. GloSIC 2018*, 2018, pp. 1–5. DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570127.

8. Blinov L.M., Pozhidaev E.P., Podgornov F.V., Sinha A., Haase W. Hysteresis Inversion Frequency for V-Shape Electrooptical Switching Controlled by Dynamic Impedance of Ferroelectric SmC* Phase. *Ferroelectrics*, 2002, Vol. 277, pp. 3–11. DOI: 10.1080/00150190214448.

9. Palto S.P., Podgornov F.V., Haase W., Blinov L.M. Modeling Electrooptical Effects in Ferroelectric Liquid Crystals. 1. Basic Equations and Experimental Tests. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 2004, Vol. 410, pp. 95–104. DOI: 10.1080/15421400490436133.

10. Blinov L.M., Palto S.P., Pozhidaev E.P., Podgornov F.V., Haase W., Andreev A.L. Modeling Electrooptical Effects in Ferroelectric Liquid Crystals. 2. V-Shape Switching in the SmC* Phase. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 2004, Vol. 410, pp. 105–115. DOI: 10.1080/15421400490436142.

11. Pagliusi P., Zappone B., Cipparrone G., Barbero G. Molecular Reorientation Dynamics due to Direct Current Voltage-Induced Ion Redistribution in Undoped Nematic Planar Cell. *J. Appl. Phys.*, 2004, Vol. 96, no. 1, pp. 218–223. DOI: 10.1063/1.1756693.

12. Palomares L.O., Reyes J.A., Barbero G. Optical Response of a Nematic Sample Submitted to a Periodic External Electric Field: Role of the Ionic Impurities. *Phys. Lett. A*, 2004, Vol. 333, no. 1–2, pp. 157–163. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.10.047.

13. Rybakov D.O., Belyaev V.V. Electrical Double Layers and Their Effect on the Low-Frequency Dielectric Permittivity of 4-n-Pentyl-4'-Cyanobiphenyl (5CB). *Liq. Cryst. their Appl.*, 2018, Vol. 18, no. 4, pp. 40–47. DOI: 10.18083/LCAppl.2018.4.40.

14. Belyaev B.A., Drokin N.A. Issledovanie elektrofizicheskikh kharakteristik granitsy elektrod – zhidkiy kristall metodom impedansnoy spektroskopii (Investigation of the Electrophysical Characteristics of the Electrode–Liquid Crystal Interface by the Impedance Spectroscopy Method). *Fizika tverdogo tela*, 2015, Vol. 57, no. 1, pp. 170–175. (in Russ.).

15. Sawada A. Modeling of Electrode Polarization for Electrolytic Cells with a Limited Ionic Adsorption. *Phys. Rev. E*, 2013, Vol. 88, no. 3, p. 032406. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.032406.

16. Sawada A., Manaka T. Electrode Process of Mobile Ions in Generating Space-Charge Polarization. *Phys. Rev. E*, 2024, Vol. 109, no. 3, p. 034802. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.034802.

17. Rosseto M.P., Ribeiro de Almeida R.R., Lenzi E.K., Evangelista L.R., Zola R.S. Probing Modulated Liquid Crystal Media with Dielectric Spectroscopy. *J. Mol. Liq.*, 2023, Vol. 390, no. PA, p. 122943. DOI: 10.1016/j.molliq.2023.122943.

18. Ganea C.P. Effects of the Ionic Association-Dissociation and Adsorption-Desorption on the Space Charge Polarization: A new theoretical approach. *Eur. Phys. J. Plus*, 2014, Vol. 129, no. 10, p. 238. DOI: 10.1140/epjp/i2014-14238-4.

19. Ganea C.P. New Approach of the AC Electrode Polarization during the Measurements of Impedance Spectra. *Rom. J. Phys.*, 2012, Vol. 57, pp. 664–675.

20. MacDonald J.R. Utility of Continuum Diffusion Models for Analyzing Mobile-Ion Immittance data: Electrode Polarization, Bulk, and Generation-Recombination Effects. *J. Phys. Condens. Matter*, 2010, Vol. 22, no. 49, DOI: 10.1088/0953-8984/22/49/495101.

21. Bazant M.Z., Thornton K., Ajdari A. Diffuse-charge Dynamics in Electrochemical Systems. *Phys. Rev. E*, 2004, Vol. 70, no. 2, p. 021506. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.021506.

22. Rosseto M.P., Evangelista L.R., Lenzi E.K., Zola R.S., Ribeiro De Almeida R.R. Frequency-Dependent Dielectric Permittivity in Poisson–Nernst–Planck Model. *J. Phys. Chem. B*, 2022, Vol. 126, no. 34, pp. 6446–6453. DOI: 10.1021/acs.jpcc.2c03663.

23. Khazimullin M.V., Lebedev Y.A. Influence of Dielectric Layers on Estimates of Diffusion Coefficients and Concentrations of Ions From Impedance Spectroscopy. *Phys. Rev. E*, 2019, Vol. 100, no. 6, p. 062601. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.062601.

24. Barbero G., Lelidis I. Effective Dielectric Constant of Electrolytes. *J. Appl. Phys.*, 2014, Vol. 115, no. 19, DOI: 10.1063/1.4875837.

25. Derfel G. Numerical Study of Ionic Current in Dielectric Liquid Layer Subjected to AC Voltage. *J. Mol. Liq.*, 2009, Vol. 144, no. 1–2. pp. 59–64. DOI: 10.1016/j.molliq.2008.10.007.
26. Gavrilyak M.V., Gavrilyak A.M., Boronin V.A., Podgornov F.V. Contribution of Space Charge Polarization to Nonlinear Permittivity Spectrum of Nematic Liquid Crystal: Computer Simulation. *Liq. Cryst. and their Appl.*, 2025, Vol. 25, no. 1, pp. 62–71
27. Brimicombe P.D., Kischka C., Elston S.J., Raynes E.P. Measurement of the Twist Elastic Constant of Nematic Liquid Crystals using Pi-CELL devices. *J. Appl. Phys.*, 2007, Vol. 101, no. 4, pp. 1–8. DOI: 10.1063/1.2432311.
28. Shcherbinin D.P., Vakulin D.A., Konshina E.A. Electric Method for Studying Reorientation Dynamics of the Nematic Liquid Crystal Director. *Tech. Phys.*, 2016, Vol. 61, no. 7, pp. 1039–1045. DOI: 10.1134/S1063784216070227.
29. Chen H.Y., Yang K.X., Lin Z.Y. Electrodynamic Behaviour of Nematic Liquid Crystal in a Relaxation Process. *J. Phys. D. Appl. Phys.*, 2010, Vol. 43, no. 31, p. 315103. DOI: 10.1088/0022-3727/43/31/315103.

Received February 14, 2025

Information about the authors

Gavrilyak Alina Maratovna is Post-graduate Student, Assistant, Department of Optoinformatics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: gavriliakam@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9179-6945>

Gavrilyak Maksim Vitalievich is Assistant, Department of Optoinformatics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; Junior Research Fellow, Laboratory of Nonlinear Optics, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: gavriliakmv@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8299-9695>

Boronin Viktor Aleksandrovich is Post-graduate Student, Junior Research Fellow, Laboratory of Nonlinear Optics, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation; Assistant, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: boronin1996vitek@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-8227-7635>

Podgornov Fedor Valerievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: fedorpod@yahoo.de, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9926-4799>

СПОСОБ ДИСПЕРГИРОВАНИЯ КРЕМНИЯ В РАСПЛАВЕ СИЛУМИНА, КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕГОСЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г.А. Дубский, Н.И. Мишенева, Д.М. Долгушин, А.А. Нефедьев, В.В. Маверинский

*Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова,
г. Магнитогорск, Российская Федерация
E-mail: denisdolgushin@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача управления процессом диспергирования кремния в кристаллизующемся расплаве силумина посредством неоднородного постоянного магнитного поля. Установлено, что при кристаллизации расплава силумина в неоднородном постоянном магнитном поле активируются диффузионные и конвективные потоки кремния вблизи фронта кристаллизации. Предложена физико-математическая модель процесса воздействия неоднородного постоянного магнитного поля на ионы вторичного кремния вблизи фронта кристаллизации. Рассчитан полный поток атомов (ионов) кремния, обусловленный двумя механизмами: первый – классической диффузией, обусловленной градиентом концентрации кремния на границе кристалл – расплав; второй – силовым воздействием неоднородного магнитного поля на магнитные диполи кремния вблизи фронта кристаллизации. Микроструктурный анализ шлифов образцов силумина, полученных при их кристаллизации в неоднородном постоянном магнитном поле, подтверждает эффект действия этого поля на формирование заданной структуры.

Ключевые слова: силумин; термодинамика и кинетика кристаллизации; диффузия; конвекция; неоднородное магнитное поле; кремний; потоки кремния; микроструктура.

Введение

Применение магнитных полей (постоянных однородных и неоднородных, импульсных и переменных), воздействующих на расплав сплава при его кристаллизации, с целью получения слитка или закристаллизованного изделия с заданной микроструктурой и заданным объёмным распределением атомов кремния и легирующих добавок, в настоящее время является перспективным технологическим методом модификации физико-механических свойств конструкционных металлов и сплавов [1–5].

Проведенные нами экспериментальные и теоретические исследования [6–8] влияния постоянного однородного и импульсного магнитных полей на термодинамику и кинетику кристаллизующихся в них доэвтектических и эвтектических расплавов силуминов показали, что магнитные поля увеличивают температуру фазового равновесия солидус – ликвидус (T_S) и температуру переохлаждения ($\Delta T = T_S - T_{кр}$), а также увеличивают скрытую теплоту фазового перехода q_s . Всё это приводит к тому, что в процессе кристаллизации расплава в магнитном поле формируется более мелкое зерно в слитке с более дисперсным распределением кремния в нём [6]. Таким образом, можно сделать вывод, что изменённые магнитным полем термодинамические параметры оказывают существенное влияние на кинетику процесса кристаллизации исследованных силуминов, так как и скорость зарождения центров кристаллизации, и линейная скорость роста зародыша зависят от указанных термодинамических параметров, что было неоднократно подтверждено нашими исследованиями изменения микроструктуры силуминов магнитными полями [6].

В данной работе разработана и предложена физико-математическая модель дополнительного механизма диффузии вторичного кремния, способствующего изменению микроструктуры исследованных силуминов, расплавы которых кристаллизуются в неоднородном магнитном поле.

1. Установление равновесного распределения ионов кремния в расплаве силумина в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим расплав эвтектического силумина АК12М2Мг, находящийся в области неоднородного постоянного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$. Необходимо рассчитать диффузионный поток ионов кремния, обусловленный действием сторонней силы $\vec{F}_m$, которая, согласно теории магнетизма, пропорциональна градиенту произведения магнитного момента атома и вектора магнитной индукции ($\text{grad}(\vec{P}_m, \vec{B})$). Для простоты примем, что сила $\vec{F}_m$ направлена вдоль оси x .

Пусть в расплаве указанного силумина вязкостью η находится n_i атомов (ионов) кремния. На каждый ион примеси будет действовать сила со стороны неоднородного постоянного магнитного поля. За счёт этой силы ионы Si перемещаются в одну сторону, создавая градиент концентрации, что приводит к появлению диффузии ионов Si в направлении, противоположном действующей магнитной силы. Через некоторое время должно установиться равновесное распределение концентрации кремния в расплаве алюминия при заданной индукции магнитного поля.

Возникшее равновесное состояние будет достигнуто за счёт равенства потоков, вызванных приложенной к атомам Si магнитной силы и противоположно направленного диффузионного потока.

Введём понятие подвижности ионов (атомов) под действием внешней силы F_m :

$$b = \frac{v}{F_m}, \quad (1)$$

где v – скорость движения атомов, которую они приобрели под действием силы F_m .

Выразив из (1) скорость частиц и умножив на их концентрацию, получим выражение для потока частиц, вызванного приложенной силой F :

$$bF_m n = vn.$$

Добавив к этому потоку поток, вызванный неоднородностью концентрации, получим уравнение стационарности концентрации частиц в состоянии равновесия:

$$bF_m n - D \frac{dn}{dx} = 0. \quad (2)$$

Или, учитывая, что $F_m = P_m \frac{dB}{dx}$, получим

$$bP_m \frac{dB}{dx} n = D \frac{dn}{dx}. \quad (3)$$

После некоторых преобразований выражения (3) окончательно получим:

$$n = n_0 \exp \left\{ \frac{bP_m B}{D} \right\}, \quad (4)$$

где n_0 – равновесная концентрация кремния в расплаве силумина в отсутствие магнитного поля, P_m – магнитный момент атомов Si, B – индукция магнитного поля, D – коэффициент диффузии кремния в расплаве силумина, обусловленный градиентом концентрации.

Формула (4) показывает стационарное распределение ионов (атомов) кремния в расплаве силумина, находящегося в неоднородном постоянном магнитном поле. Из данного распределения следует, что с ростом индукции магнитного поля B число ионов (атомов) кремния, находящихся в этом поле, изменяется, т. е. идет их отток из области с большим значением магнитной индукции или приток в эту область в зависимости от того, диамагнитный или парамагнитный ион (атом) примеси.

При кристаллизации силумина, ввиду ограниченной растворимости кремния в твёрдом растворе слитка, большая часть кремния за счёт диффузии вытесняется в расплав, образуя вблизи фронта кристаллизации избыток Si относительно его равновесной концентрации в расплаве. Концентрационный профиль избытка кремния показан на рис. 1.

Одновременно с формированием α -фазы формируется твёрдый механический раствор эвтектики, т. е. происходит одновременная кристаллизация Al и Si, каждого в своей кристаллической решётке.

Очень важно, чтобы кристаллы кремния были равномерно распределены по объёму образованного слитка. Для это необходимо за счёт внешнего силового воздействия удалять избыточный кремний от фронта кристаллизации в расплав и равномерно его там распределять. Это можно осуществить с помощью неоднородного постоянного магнитного поля.

2. Диффузионный поток атомов кремния в кристаллизующемся расплаве силумина

Наличие градиента концентрации молекул или атомов в выделенном направлении порождает поток, величина которого описывается I законом Фика:

$$\vec{j}_n = -D \text{grad}(n), \quad (5)$$

где D – коэффициент диффузии, n – концентрация молекул или атомов. Знак минус указывает на то, что $\text{grad}n$ и $\vec{j}_n$ противоположны по направлению.

Если данные молекулы или атомы (ионы) находятся в области неоднородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$, то со стороны этого поля на каждый атом (ион) будет действовать сила, пропорциональная $\text{grad}(\vec{P}_m, \vec{B})$, что должно изменить общий диффузионный поток, который будет складываться из концентрационного потока и потока, обусловленного магнитным полем:

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_B. \quad (6)$$

Проведём расчёт $\vec{j}_B$. Рассмотрим одиночный магнитный диполь, имеющий магнитный момент $\vec{P}_m$. Энергия магнитного диполя в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ равна

$$W_m = -(\vec{P}_m, \vec{B}) = -P_m B \cos(\alpha), \quad (7)$$

где α – угол между векторами $\vec{P}_m$ и $\vec{B}$ (для парамагнитных атомов $\alpha = 0$, а для диамагнитных – $\alpha = \pi$).

Сила, действующая на магнитный диполь со стороны неоднородного магнитного поля, представляется в виде

$$\vec{F}_m = -\text{grad}(W_m) = \text{grad}(\vec{P}_m, \vec{B}) = P_m \text{grad}(B). \quad (8)$$

Считаем, что $P_m = \text{const}$.

При этом суммарный диффузионный поток с учётом внешней сторонней силы, действующей на магнитные моменты атомов, может быть представлен в виде

$$\vec{j} = -D \text{grad}(n) + b n \vec{F}_m, \quad (9)$$

где $\vec{F}_m$ – сторонняя сила, действующая на атом (ион) с магнитным диполем P_m , b – подвижность атомов (ионов), определяемая выражением (1).

Учитывая (8), уравнение (9) представляется в следующем виде:

$$\vec{j} = -D \text{grad}(n) + b n P_m \text{grad}(B). \quad (10)$$

Здесь $n P_m = M_m$ – намагничённость магнетика, т. е.

$$n P_m = M_m = \chi H = \chi \frac{B}{\mu_0}, \quad (11)$$

где H – напряжённость магнитного поля, χ – магнитная восприимчивость.

Подставляя (11) в (10), получим:

$$\vec{j} = -D \text{grad}(n) + b \frac{\chi}{\mu_0} B \text{grad}(B) = -D \text{grad}(n) + b \frac{\chi}{\mu_0} \frac{1}{2} \text{grad}(B^2). \quad (12)$$

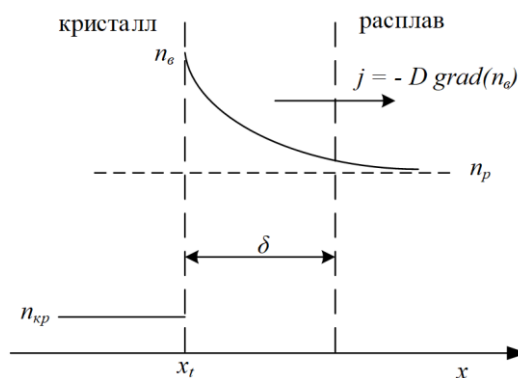


Рис. 1. Концентрационный профиль Si на границе кристалл – расплав: n_p – равновесная концентрация кремния в расплаве силумина ($n_p \approx 12\%$), $n_{кр}$ – равновесная концентрация в закристаллизованном силумине, n_e – избыточная концентрация вторичного кремния, высвобожденного из кристалла

Из соотношения Эйнштейна $D = kTb$ выразим b : $b = D/kT$, и с учётом этого окончательно суммарный диффузионный поток будет следующий:

$$\vec{j} = -D \text{grad}(n) + D \frac{\chi}{2\mu_0 kT} \text{grad}(B^2). \quad (13)$$

Анализируя уравнение (13), можно сделать следующий вывод: суммарный поток диффундирующих ионов можно как увеличить, так и уменьшить. Данное изменение потока будет определяться взаимными направлениями $\text{grad}(n)$ и $\text{grad}(B^2)$. Кроме этого, необходимо учесть, что парамагнитные атомы (ионы) втягиваются, а диамагнитные выталкиваются из области магнитного поля, поэтому поток частиц также будет зависеть от знака магнитной восприимчивости χ , т.е. суммарный поток будет зависеть от произведения $\chi \cdot \text{grad}(B^2)$.

Рассмотрим концентрационный профиль ионов кремния на границе кристалл – расплав для эвтектического силумина АК12М2Мг (см. рис. 1).

Возникающий избыток кремния, природа которого описана выше, вблизи фронта кристаллизации создаёт градиент n_s ($\text{grad}(n_s)$), направленный к фронту кристаллизации, а поток концентрации избыточного вторичного кремния n_s будет направлен в сторону расплава и его интенсивность будет определяться, во-первых, скоростью охлаждения расплава и, во-вторых, условиями возможного перемещения диффундирующих атомов (например, вакансионный механизм диффузии).

Неоднородное магнитное поле, градиент которого сформирован по направлению $\text{grad}(n_s)$, будет дополнять этот поток (атомы кремния диамагнитные), что ускорит его рассасывание в расплав, а это будет способствовать лучшему диспергированию Si в нём.

3. Расплав в неоднородном магнитном поле. Расчёт модуля магнитной индукции в области неоднородности

3.1. Схема экспериментальной установки и вывод расчетных формул для компонент магнитной индукции

Положение тигля с исследуемым расплавом силумина относительно источника неоднородного постоянного магнитного поля показано на рис. 2.

Для того чтобы большая часть объёма расплава силумина попадала в области неоднородного магнитного поля, длина катушки составляет одну треть от высоты расплава в тигле. Расположение катушки индуктивности примерно было такое, как показано на рис. 2. Максимальная напряжённость поля в центре катушки составляла $H = 78\,600$ А/м. Диаметр тигля $d = 20$ мм, высота расплава $h = 15$ см, т. е. объём расплава $V_p = 47$ см³. Время кристаллизации этого объёма силумина составляло около $t_{кр} = 123$ с. Это время определялось из термографической кривой.

Схема, представленная на рис. 2, является сильно упрощённой по отношению к реальной исследовательской экспериментальной установке, которая описана в работе [8]. Это сделано для наглядности представления потока силовых линий поля через расплав силумина.

Для оценки силового воздействия градиента магнитного поля на диамагнитный ион кремния необходимо рассчитать индукцию магнитного поля в области его неоднородности. В основу расчёта положим закон Био–Савара–Лапласа. Поскольку магнитные силовые линии имеют осевую симметрию, то удобнее рассмотреть решение задачи в цилиндрической системе координат (ρ, ϕ, z) .

Расчёт индукции магнитного поля в произвольной точке А (рис. 3) проведём для одного витка, радиуса R , по которому течёт ток I .

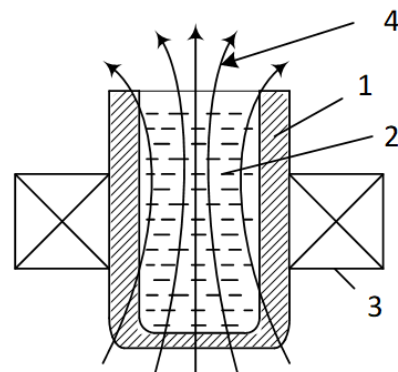


Рис. 2. Тигель с расплавом силумина в неоднородном постоянном магнитном поле: 1 – алундовый (Al_2O_3) тигель; 2 – расплав силумина; 3 – короткая катушка – источник магнитного поля; 4 – силовые линии магнитного поля

Согласно закону Био–Савара–Лапласа для элемента тока $I d\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Записав векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ в цилиндрической системе координат и проведя необходимые преобразования, получим для компонент вектора магнитной индукции следующие выражения:

$$B_\rho = \frac{\mu\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi d\phi}{(\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R \cos\phi)^{3/2}}; \quad (14)$$

$$B_\phi = 0;$$

$$B_z = \frac{\mu\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \cos\phi - R) d\phi}{(\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R \cos\phi)^{3/2}}. \quad (15)$$

Видно, что компоненты магнитной индукции зависят только от координат ρ и z .

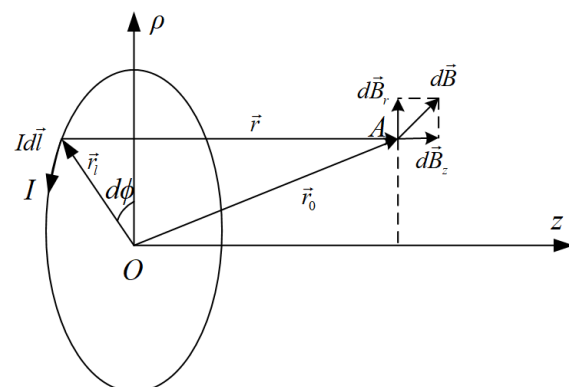
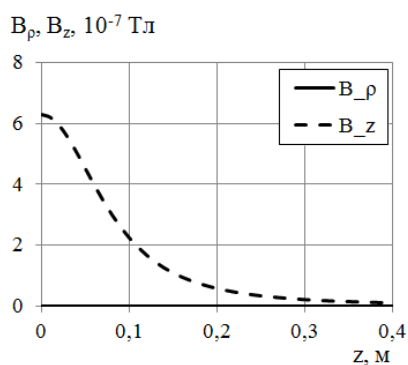


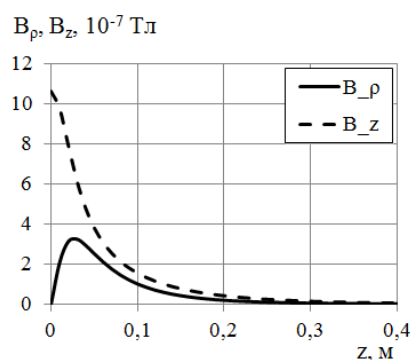
Рис. 3. Рисунок, поясняющий условие задачи расчёта в точке A от витка с током I

3.2. Результаты расчёта индукции магнитного поля в области неоднородности и их анализ

Расчёт компонент магнитной индукции по формулам (14) и (15) проводился численно с помощью компьютерной программы, по результатам вычисления которой можно построить зависимости этих компонент от координат ρ и z . Эти зависимости графически представлены на рис. 4, 5. При расчетах использовались следующие значения постоянных параметров: $\mu = 1$, $R = 0,1$ м, $I = 0,1$ А.

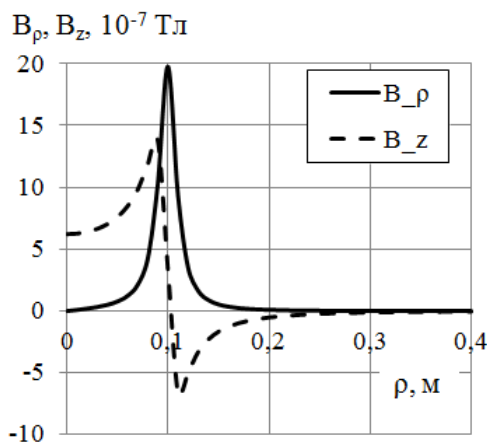


а)

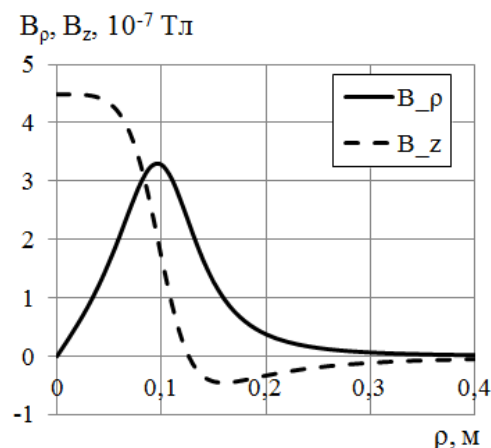


б)

Рис. 4. Зависимость компонент вектора магнитной индукции от координаты z : а) при $\rho = 0$; б) при $\rho = 0,7 \cdot R$



а)



б)

Рис. 5. Зависимость компонент вектора магнитной индукции от координаты ρ : а) при $z = 0,1 \cdot R$; б) при $z = 0,5 \cdot R$

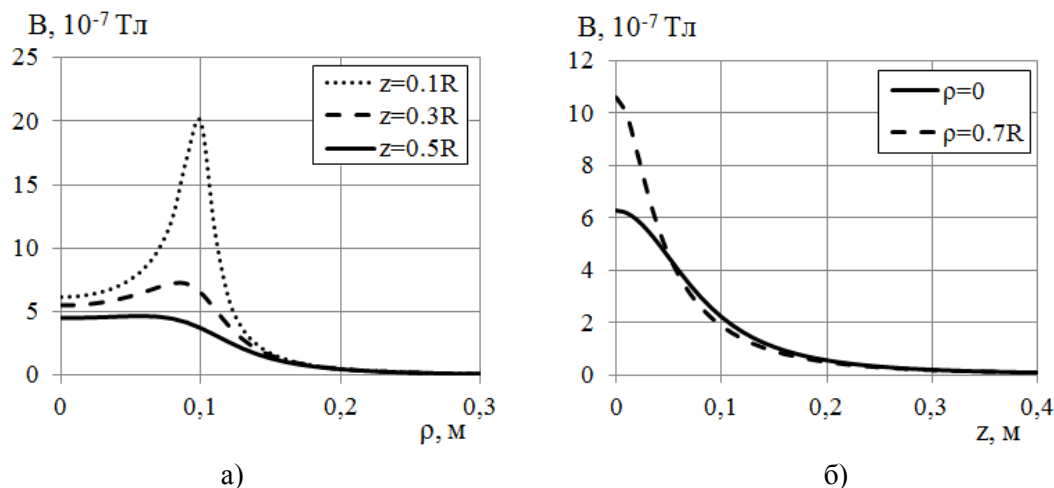


Рис. 6. Зависимость модуля вектора магнитной индукции от координат ρ (а) и z (б)

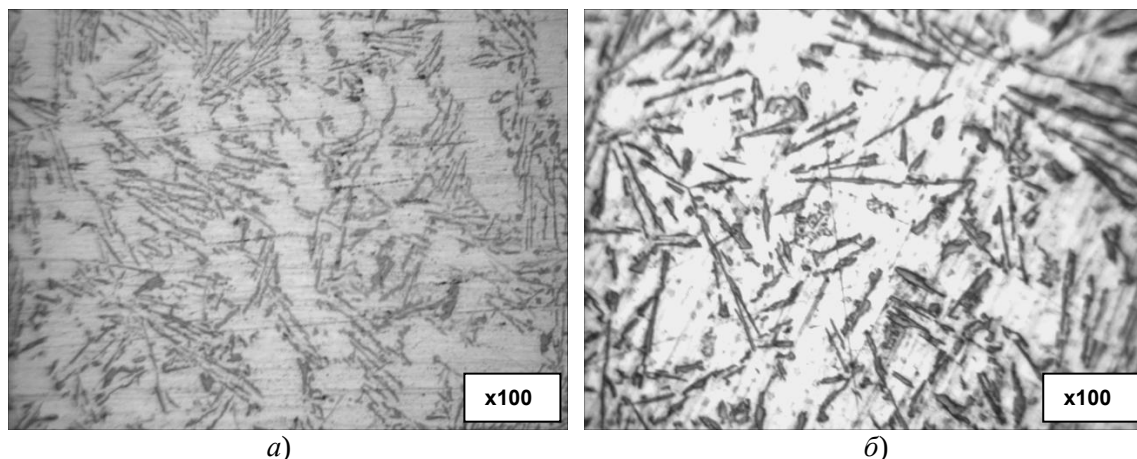


Рис. 7. Микроструктуры силумина, закристаллизованного при $B = 0$ Тл (а) и $B = 0,1$ Тл (б)

На основе полученных выражений для B_ρ , B_ϕ и B_z можно провести расчет модуля магнитной индукции. На рис. 6 представлены результаты этих расчетов в зависимости от ρ и z .

Анализ проведенных расчетов B_ρ , B_z и B , представленных на рис. 4–6, показывает, что неоднородное магнитное поле переносит избыточные ионы кремния как в направлении радиуса формирующегося цилиндрического слитка, так и в направлении z -оси тигля. Поскольку ионы кремния в расплаве являются диамагнитными, то они уносятся от стенки тигля к центру слитка, а по оси z – вверх и вниз от центра согласно конфигурации магнитного поля относительно тигля с расплавом (см. рис. 2).

Действенность неоднородного магнитного поля на процесс диспергирования Si в кристаллизующемся расплаве силумина была подтверждена экспериментально, что представлено на рис. 7. Здесь представлены фотографии микроструктуры силумина, закристаллизованного без магнитного поля и в магнитном поле. Экспериментальные результаты получены авторами работы в лаборатории физики конденсированного состояния кафедры физики МГТУ им. Г.И. Носова.

Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что в данной работе:

1. Разработана физико-математическая модель диспергирования вторичного кремния в кристаллизующемся расплаве силумина в неоднородном постоянном магнитном поле. Эта модель позволяет объяснить различия в распределении кремния в силумине, закристаллизованном в магнитном поле и без него, а также рассчитать поток избыточного вторичного кремния, обусловленного градиентом неоднородного магнитного поля.

2. Предложен экспериментальный узел получения неоднородного магнитного поля, совмещенного с цилиндрическим тиглем, содержащим расплав силумина.

3. Представлен математический расчёт индукции неоднородного постоянного магнитного поля в цилиндрических координатах в точке сильной неоднородности поля. Полученные результаты качественно показывают направление градиента неоднородного магнитного поля и позволяют судить о направлении действия силы со стороны магнитного поля на ионы кремния в расплаве.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-22-20013, <https://rscf.ru/project/24-22-20013/>.

Литература

1. Ефимов, В.А. Технологии современной металлургии / В.А. Ефимов, А.С. Эльдарханов. – М.: Новые технологии, 2004. – 781 с.
2. Садовский, В.Д. Магнитное поле и фазовые превращения в сталях / В.Д. Садовский // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1965. – № 7. – С. 16–18.
3. Кривоглаз, М.А. О влиянии магнитных полей на фазовые переходы / М.А. Кривоглаз, В.Д. Садовский // Физика металлов и металловедение. – 1964. – Т. 18, № 4. – С. 502–505.
4. Верте, Л.А. Электромагнитная разливка и обработка жидкого металла / Л.А. Верте. – М.: Металлургия, 1967 – 206 с.
5. Головин, Ю.И. Электромагнитные аспекты физики прочности и пластичности твердых тел / Ю. И. Головин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 1996. – Т. 1, № 1. – С. 3–20.
6. Термодинамика и кинетика кристаллизации алюминиевых сплавов в постоянном магнитном поле / М.Б. Аркулис, Г.А. Дубский, Д.М. Долгушин, Н.И. Мишенева // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2021. – Т. 19, № 1. – С. 29–34.
7. Влияние магнитного поля на структурообразование при кристаллизации и физико-механические свойства алюминиевых сплавов / К.Н. Вдовин, Г.А. Дубский, В.Б. Деев и др. // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. – 2019. – № 2. – С. 51–57.
8. Воздействие импульсного магнитного поля на расплав парамагнитного металла при кристаллизации / Д.М. Долгушин, Г.А. Дубский, А.А. Нефедьев и др. // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. – 2018. – Т. 16, № 3. – С. 57–66.

Поступила в редакцию 21 октября 2024 г.

Сведения об авторах

Дубский Геннадий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация.

Мишенева Надежда Игоревна – старший преподаватель кафедры физики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: misheneva_n@mail.ru.

Долгушин Денис Михайлович – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: denisdolgushin@mail.ru.

Нефедьев Александр Алексеевич – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры физики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: shuric_xp@mail.ru.

Мавринский Виктор Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: viktormav@mail.ru.

METHOD OF DISPERSING SILICON IN A SILUMIN MELT CRYSTALLIZING IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

G.A. Dubsky, N.I. Misheneva, D.M. Dolgushin, A.A. Nefediev, V.V. Mavrinsky

Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation

E-mail: denisdolgushin@mail.ru

Abstract. This paper deals with the problem of controlling the process of silicon dispersion in a crystallizing silumin melt by means of an inhomogeneous permanent magnetic field. It is established that during crystallization of the silumin melt in an inhomogeneous permanent magnetic field, diffusive and convective flows of silicon are activated near the crystallization front. A physical and mathematical model of the process of influence of an inhomogeneous permanent magnetic field on secondary silicon ions near the crystallization front is proposed. The total flux of silicon atoms (ions) caused by two mechanisms is calculated: the first is classical diffusion caused by the silicon concentration gradient at the crystal-melt boundary; and the second is the force effect of an inhomogeneous magnetic field on magnetic dipoles of silicon near the crystallization front. Microstructural analysis of silumin specimen slits obtained during their crystallization in an inhomogeneous permanent magnetic field confirms the effect of this field on the formation of a given structure.

Keywords: Silumin; thermodynamics and kinetics of crystallization diffusion; convection; inhomogeneous magnetic field; silicon; silicon fluxes; microstructure.

References

1. Efimov V.A., El'darkhanov A.S. *Tekhnologii sovremennoy metallurgii* (Technologies of Modern Metallurgy). Moscow, Novye tekhnologii Publ., 2004, 781 p. (in Russ.).
2. Sadovskiy V.D. Magnitnoe pole i fazovye prevrashcheniya v stali (Magnetic Field and Phase Transformations in Steel). *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov*, 1965, no. 7, pp. 16–18. (in Russ.).
3. Krivoglaz M.A., Sadovskiy V.D. O vliyani magnitnykh poley na fazovye perekhody (On the Influence of Magnetic Fields on Phase Transitions). *Fizika metallov i metallovedenie*, 1964, Vol. 18, no. 4, pp. 502–505. (in Russ.).
4. Verte L.A. *Elektromagnitnaya razlivka i obrabotka zhidkogo metalla* (Electromagnetic Casting and Processing of Liquid Metal), Moscow, Metallurgy Publ., 1967, 206 p. (in Russ.).
5. Golovin Yu.I. Elektromagnitnye aspekty fiziki prochnosti i plastichnosti tverdykh tel (Electromagnetic Aspects of Physics of Strength and Plasticity of Solids). *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 1996, Vol. 1, no 1, pp. 3–20. (in Russ.).
6. Arkulis M.B., Dubskiy G.A., Dolgushin D.M., Misheneva N.I. Termodinamika i kinetika kristallizatsii alyuminievykh splavov v postoyannom magnitnom pole (Thermodynamics and Kinetics of Crystallization of Aluminum Alloys in a Constant Magnetic Field). *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G.I. Nosova*, 2021, Vol. 19, no. 1, pp. 29–34. (in Russ.). DOI: 10.18503/1995-2732-2021-19-1-29-34.
7. Vdovin K.N., Dubskiy G.A., Deev V.B., Egorova L.G., Nefediev A.A., Prusov E.S. Vliyanie magnitnogo polya na strukturoobrazovanie pri kristallizatsii i fiziko-mekhanicheskie svoystva alyuminievykh splavov (Influence of Magnetic Field on Structure Formation at Crystallization and Physical-Mechanical Properties of Aluminum Alloys). *Izvestiya. Non-Ferrous Metallurgy*, 2019, no. 2, pp. 51–57. (in Russ.). DOI 10.17073/0021-3438-2019-2-51-57.
8. Dolgushin D.M., Dubskiy G.A., Nefed'ev A.A., Rive V.V., Dolgushina O.V., Kayper A. Vozdeystvie impul'snogo magnitnogo polya na rasplav paramagnitnogo metalla pri kristallizatsii (Effect of Pulsed Magnetic Field on Paramagnetic Melt During Crystallization). *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G.I. Nosova*, 2018, Vol. 16, no. 3, pp. 57–66. (in Russ.). DOI 10.18503/1995-2732-2018-16-3-57-66.

Received October 21, 2024

Information about the authors

Dubsky Gennady Alekseevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Physics, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation.

Misheneva Nadezhda Igorevna, Senior Lecturer, Department of Physics, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: misheneva_n@mail.ru.

Dolgushin Denis Mikhailovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Physics Department, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: denisdolgushin@mail.ru.

Nefediev Alexander Alekseevich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Lecturer, Department of Physics, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: shuric_xp@mail.ru.

Mavrinsky Viktor Vktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Physics, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: viktormav@mail.ru.

Информация



Георгий Леонидович БРОВКО
25.08.1948 – 30.01.2025

Редакционная коллегия серии «Математика. Механика. Физика» Вестника ЮУрГУ с глубоким прискорбием извещает о том, что 30 января 2025 года после продолжительной болезни скончался заслуженный профессор Московского университета, профессор кафедры теории упругости МГУ, член редакционного совета нашего журнала Георгий Леонидович Бровко.

Г.Л. Бровко – выпускник механико-математического факультета МГУ, с 1972 года его трудовая деятельность неразрывно связана с Московским университетом. Он являлся ярким представителем Ильюшинской школы по прочности, пластичности и теории термомеханических процессов.

Г.Л. Бровко – признанный специалист в механике сплошной среды и прежде всего в таких её значимых разделах, как теория больших деформаций, теория определяющих соотношений, неклассические модели деформируемых сред и структур. Он автор более 200 работ, в том числе фундаментальных монографий «Элементы математического аппарата механики сплошной среды» и «Определяющие соотношения механики сплошной среды».

Г.Л. Бровко на протяжении длительного периода времени сотрудничал с механико-математическим факультетом ЮУрГУ (впоследствии факультетом математики, механики и компьютерных наук), неоднократно был председателем ГАК и ГЭК по специальности математика и по направлениям 01.03.01 – математика, 02.03.01 – математика и компьютерные науки, входил в редакционный Совет журнала Вестник ЮУрГУ, серия «Математика. Механика. Физика».

Память о Георгии Леонидовиче Бровко, замечательном Учёном, Педагоге и Человеке, навсегда сохранится в памяти его коллег и друзей.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции, издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 32.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 17, № 2
2025

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 30.04.2025. Дата выхода в свет 12.05.2025.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,16.

Тираж 500 экз. Заказ 103/128. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.