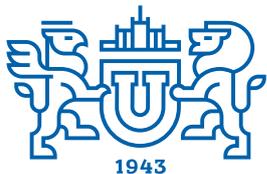


ВЕСТНИК



ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2025
Т. 17, № 4

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.ф.-м.н., профессор **Ковалев Ю.М.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИННА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2025

Vol. 17, no. 4

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

- S.A. Zagrebina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Yu.M. Kovalev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

- A.V. Bogomolov**, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
A.V. Trukhanov, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

КАДЧЕНКО С.И. Алгоритмы вычисления собственных значений начально-краевых задач, заданных на связанных графах с изменяющимися ребрами.....	5
КРЫНЕЦКИЙ Б.А., КАЛАЧ А.В., ПАРАМОНОВ А.А. Анализ информации о регулярном характере структуры снежной лавины на основе выявления почти периодов	10
MELTSAYKIN E.A., USHAKOV A.L. Numerical Simulation of the Deflection of a Rectangular Plate on an Elastic Base with its Rigid Edge Fixation	17
ПРИВАЛОВ А.Н., БОГОМОЛОВ А.В., ЛАРКИН Е.В., АКИМЕНКО Т.А. Математическое обеспечение оценивания надёжности программных средств вычислительных кластеров	24
САГАДЕЕВА М.А., АБЫЗГАРЕЕВ Д.Ф. Решение задачи оптимального управления решениями одной стохастической нестационарной модели Леонтьева	35

Механика

АНДРИАНОВ И.К. Осесимметричное деформирование толстостенной стесненной оболочки под внутренним давлением при нелинейном законе деформационного упрочнения.....	44
ГОРШКОВ А.В., ПРОСВИРЯКОВ Е.Ю. Изотермическое течение Куэтта–Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости с малой вертикальной скоростью	52
ЕФРЕМОВЦЕВ Н.Н., ШИПОВСКИЙ И.Е. Результаты исследования влияния технологических факторов на сейсмическое воздействие взрывов при открытой разработке месторождений полезных ископаемых	65
ОРЛОВ М.Ю., ГЛАЗЫРИН В.П., ФАЗЫЛОВ Т.В. Исследование процесса пробития алюминиевых преград сферическим ударником в диапазоне от 460 до 700 м/с.....	72
ФИЛИН В.Ю., БАРАКОВ Д.Р., НАЗАРОВА Е.Д. Расчетные процедуры, используемые в обоснование системы требований к материалам конструкций морской техники и магистральных трубопроводов	81

Физика

GORSHKOV M.S., FAIZOVA D.Yu., ANIKINA E.V. DFT Simulations of g-C ₂ O Monolayer as Energy Storage Material	88
LATYPOV R.M., SOZYKIN S.A., BESKACHKO V.P. First Principles Investigation of Electronic and Electrical Properties of Carbon Nanotube Interfaces	96

Персоналии

Анатолий Семёнович Макаров. К восьмидесятилетию со дня рождения.....	103
Памяти Юрия Михайловича Ковалева	105

CONTENTS

Mathematics

KADCHENKO S.I. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Initial Boundary Value Problems Defined on Connected Graphs with Changing Edges.....	5
KRYNETSKY B.A., KALACH A.V., PARAMONOV A.A. Analysing the Information on the Regular Nature of a Snow Avalanche Structure Based on Near-Periods Identification.....	10
MELTSAYKIN E.A., USHAKOV A.L. Numerical Simulation of the Deflection of a Rectangular Plate on an Elastic Base with its Rigid Edge Fixation.....	17
PRIVALOV A.N., BOGOMOLOV A.V., LARKIN E.V., AKIMENKO T.A. Mathematical Support for Assessing the Reliability of Software for Computing Clusters.....	24
SAGADEEVA M.A., ABYZGAREEV D.F. Solving the Optimal Control Problem for One Stochastic Non-Stationary Leontief Model.....	35

Mechanics

ANDRIANOV I.K. Axisymmetric Deformation of a Thick-Walled Constrained Shell under Internal Pressure with a Nonlinear Law of Strain Hardening.....	44
GORSHKOV A.V., PROSVIRYAKOV E.Yu. Isothermal Couette–Poiseuille Flow of a Viscous Incompressible Liquid with Low Vertical Velocity.....	52
EFREMOVTSEV N.N., SHIPOVSKII I.E. Researching the Influence of Technological Factors on the Seismic Impact of Blasts in Surface Mining of Mineral Deposits.....	65
ORLOV M.Yu., GLAZYRIN V.P., FAZYLOV T.V. Investigating the Penetration of Aluminum Targets by a Spherical Impactor in the Range from 460 to 700 m/s.....	72
FILIN V.Yu., BARAKOV D.R., NAZAROVA E.D. Calculation Procedures Used for the Substantiation of the System of Requirements for Hull Materials of Marine Structures and Arterial Pipelines.....	81

Physics

GORSHKOV M.S., FAIZOVA D.Yu., ANIKINA E.V. DFT Simulations of g-C ₂ O Monolayer as Energy Storage Material.....	88
LATYPOV R.M., SOZYKIN S.A., BESKACHKO V.P. First Principles Investigation of Electronic and Electrical Properties of Carbon Nanotube Interfaces.....	96

Personalia

Anatoliy Makarov. To the 80-th Anniversary.....	103
In Memory of Yuriy Kovalev.....	105

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ЗАДАННЫХ НА СВЯЗНЫХ ГРАФАХ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ

С.И. Кадченко

Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова,
г. Магнитогорск, Российская Федерация
E-mail: sikadchenko@mail.ru

Аннотация. Потребность в развитии математических методов, позволяющих вычислительно эффективно находить собственные значения дифференциальных операторов в частных производных, заданных на графах с изменяющимися во времени геометрическими параметрами, связана с развитием новых технологий в науке и технике. На примере канонических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа разработаны алгоритмы вычисления их собственных чисел. Найдены аналитические формулы, позволяющие находить приближенные значения собственных чисел рассматриваемых операторов в необходимые моменты времени.

Ключевые слова: начально-краевые задачи; связные графы; собственные числа и собственные функции операторов; дискретные и полуограниченные операторы; метод Галеркина; метод регуляризованных следов.

Введение

В процессе моделирования природных явлений возникает необходимость нахождения собственных чисел дискретных дифференциальных операторов в частных производных, заданных на связных графах, геометрия которых изменяется со временем. Для построения методов решения таких задач воспользуемся методикой численного решения спектральных задач, заданных на квантовых графах с постоянными ребрами [1–4].

В статьях [5–10] разработаны алгоритмы нахождения собственных чисел начально-краевых задач, заданных на графах типа звезда с изменяющимися ребрами. Их граничные условия позволяют найти аналитические формулы для вычисления собственных чисел этих задач в необходимые моменты времени. В случае, когда графы связные, граничные условия затрудняют получение аналитических формул. Для этих случаев возникает необходимость построения алгоритмов решения этих задач.

Используя результаты статьи, можно распространить ранее полученную методику решения обратных спектральных задач на графах с неподвижными ребрами на графы с изменяющимися ребрами [11].

Для описания математической модели рассмотрим конечное множество связного ориентированного графа G_t , имеющего j_0 ребер и i_0 вершин. Через $E = (E_1, E_2, \dots, E_{j_0})$ обозначим множество их ребер, а через $V = V(V_i)_{i=1}^{i_0}$ – множество вершин. У графа G длины ребер и площади поперечного сечения изменяются во времени по законам:

$$L_j(t) = l_j L(t), D_j(t) = d_j D(t), j = \overline{1, j_0}. \quad (1)$$

Здесь $L(t), D(t)$ – дважды дифференцированные функции, такие, что все длины ребер E_j и площади поперечных сечений D_j графа всегда остаются положительными. В момент времени $t = t_*$ введем пространство $L^{2,1}(G_{t_*})$ суммируемых с квадратом вектор-функций $f(t)$, заданных на графе G_t со скалярным произведением

$$(f, w)_{L^{2,1}(G_{t_*})} = \frac{1}{t_*} \left(\int_0^{t_*} \sum_{j=1}^{j_0} D_j(t) \int_0^{L_j(t)} f_j(x_j, t) w_j(x_j, t) dx_j dt, \right)$$

$$f = (f_1(x_1, t), \dots, f_{j_0}(x_{j_0}, t)), \quad x_j \in (0, L_j(t)), \quad j = \overline{1, j_0}.$$

Когда $L(t) \equiv D(t) \equiv 1$, геометрия графа G_t со временем не изменяется. В этом случае граф будем обозначать G_0 . Далее рассмотрим спектральные задачи, заданные на связных квантовых графах G_t с изменяющимися ребрами для операторов параболического типа.

Вычисление собственных чисел

Опишем методику вычисления приближенных значений собственных чисел дискретных вектор-операторов $F = (F_1, F_2, \dots, F_{j_0})$ параболического типа, заданных на связных квантовых графах G_t :

$$F \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + P_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + P_0 \Psi, \quad P_i = (p_{i1}(x_1, t), \dots, p_{ij_0}(x_{j_0}, t)), \quad i = 0, 1, \tag{2}$$

$$\Psi = (\psi_1(x_1, t), \dots, \psi_{j_0}(x_{j_0}, t)), \quad x = (x_1(t), \dots, x_{j_0}(t)), \quad j = \overline{1, j_0}$$

с областью определения $D_F = L^{2,1}(G_t)$. Известно, что собственные числа μ операторов F находятся при решении начально-краевых задач, заданных на подвижных ребрах графа G_t

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_j^2} + p_{1j}(x_j, t) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} + p_{0j}(x_j, t) = \mu \psi_j,$$

$$\psi_j = \psi_j(x_j, t), \quad x_j = (0, L_j(t)), \quad j = \overline{1, j_0},$$

$$\sum_{E_k \in E^\alpha(V_s)} \frac{d_k}{l_k} \frac{\partial \psi_k(y_k, t)}{\partial y_k} \Big|_{y_k=0} - \sum_{E_m \in E^\omega(V_s)} \frac{d_m}{l_m} \frac{\partial \psi_m(y_m, t)}{\partial y_m} \Big|_{y_m=l_m} = 0, \tag{3}$$

$$E_i, E_k \in E^\alpha(V_s), \quad E_m, E_v \in E^\omega(V_s), \quad i, k, n, v \in N,$$

$$\psi_i(0, t) = \psi_k(0, t) = \psi_m(l_m, t) = \psi_v(l_v, t), \quad \psi_j(x_j, 0) = \zeta(x_j),$$

где $E^\alpha(V_s)$ – множество дуг в E с началом в вершинах V , а $E^\omega(V_s)$ – множество дуг в E с концом в вершинах V . Функции $\zeta(x)$ и ψ_j дифференцируемые необходимое число раз.

Для нахождения решений начально-краевых задач (3) сделаем замену переменных $y_j = \frac{x_j}{L(t)}$

и перейдем к соответствующим задачам для графа G_0 с постоянными ребрами [7–9]. В результате преобразований получим следующие начально-краевые задачи на графе G_0 с постоянными ребрами:

$$\frac{\partial \psi_j(y_j, t)}{\partial t} - \frac{1}{L^2(t)} \frac{\partial^2 \psi_j(y_j, t)}{\partial y_j^2} + \frac{1}{L(t)} [p_{1j}(y_j, t) - y_j \frac{dL(t)}{dt}] \frac{\partial \psi_j(y_j, t)}{\partial y_j} +$$

$$+ p_{0j}(y_j, t) \psi_j(y_j, t) = \mu \psi_j(y_j, t), \quad y_j \in (0, l_j),$$

$$\sum_{E_k \in E^\alpha(V_s)} D_k \frac{\partial \psi_k(y_k, t)}{\partial y_k} \Big|_{y_k=0} - \sum_{E_m \in E^\omega(V_s)} D_m \frac{\partial \psi_m(y_m, t)}{\partial y_m} \Big|_{y_m=l_m} = 0,$$

$$E_i, E_k \in E^\alpha(V_s), \quad E_m, E_v \in E^\omega(V_s), \quad i, k, n, v \in N, \tag{4}$$

$$\psi_i(0, t) = \psi_k(0, t) = \psi_m(l_m, t) = \psi_v(l_v, t), \quad \psi_j(y_j, 0) = \zeta(y_j).$$

В работах [12, 13] разработан метод вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов, заданных в гильбертовом пространстве H . Воспользуемся им для нахождения собственных чисел спектральных задач (4). Для этого построим последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств $H_n \subseteq H$, которая будет полной в H . Если известны ортонормированные базисы $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ пространств H_n , удовлетворяющие граничным условиям (4), то имеет место теорема

Теорема 1. Приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n$ спектральной задачи (4) находятся по линейным формулам

$$\tilde{\mu}_n = (U\omega_n, \omega_n) + \tilde{\delta}_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{\delta}_n| = 0, \quad n \in N, \quad (5)$$

где $\tilde{\delta}_n = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n)]$, $\tilde{\mu}_k(n)$ – n -е приближение по Галеркину к соответствующим значениям μ_k спектральной задачи (4).

Вычисление приближенных собственных значений $\tilde{\mu}_n(t)$ оператора F , заданного на графе G_0 по формулам (5), требует знания ортонормированных систем функций $\{\omega_{jk}(y_j, t)\}_{k=1}^n$, которые удовлетворяют граничным условиям (4) и являются базисами пространств H_n . В этом случае формулы (5) в момент времени $t = t_*$ примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n(t_*) &= \frac{1}{t_*} \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*} \int_0^{l_j} F(\omega_{jn}(y_j, t)) \omega_{jn}(y_j, t) dy_j dt = \\ &= \frac{1}{t_*} \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*} \int_0^{l_j} \left\{ \frac{\partial \omega_{jn}(y_j, t)}{\partial t} - \frac{1}{L^2(t)} \frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j, t)}{\partial y_j^2} + \frac{1}{L(t)} [p_{1j}(y_j, t) - y_j \frac{dL(t)}{dt}] \frac{\partial \omega_{jn}(y_j, t)}{\partial y_j} + \right. \\ &\quad \left. + p_{0j}(y_j, t) \omega_{jn}(y_j, t) \right\} \omega_{jn}(y_j, t) dy_j dt + \tilde{\delta}_n(t_*). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя формулы (6), можно вычислить значения собственных чисел вектор-оператора F заданного на графе G_t с изменяющимися во времени длинами ребер, в необходимый момент времени и необходимого порядка.

Литература

1. Провоторов, В.В. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 10. – С. 105–126.
2. Keating, J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs / J.P. Keating // Quantum graphs and their applications. Contemporary Mathematics. – 2006. – Vol. 415. – P. 191–200.
3. Time-Dependent Quantum Graph / D.U. Matrasulov, J.R. Yusupov, K.K. Sabirov, Z.A. Sobirov // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges. – 2015. – Vol. 6, no. 2. – P. 173–181.
4. Никифоров, Д.С. Модель квантовых графов с ребрами меняющейся длины: дис. ... канд. тех. наук / Д.С. Никифоров. – Санкт Петербург, 2018. – 125 с.
5. Кадченко, С.И. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных следов / С.И. Кадченко, О.А. Торшина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40 (299), вып. 14. – С. 83–88.
6. Кадченко, С.И. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных рядов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 36–43
7. Кадченко, С.И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

// Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6 (97). – С. 13–21.

8. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных операторов заданных на квантовых графах типа звезда с переменными ребрами / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова, И.Е. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2024. – Т. 17, № 4. – С. 51–65.

9. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных чисел начально-краевых задач для волнового дифференциального уравнения, заданного на графе с изменяющимися ребрами / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 29–34.

10. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges / S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova // Journal of Computational Engineering Mathematics. – 2024. – Vol. 11, Iss. 4. – P. 49–60.

11. Ставцева, А.В. Программный комплекс численного решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенным оператором Штурма–Лиувилля, на конечных связных геометрических графах / А.В. Ставцева, С.И. Кадченко // Свидетельство № 2021662776 Российская Федерация; заявление 24.06.2021, зарегистрир. 04.08.2021, реестр программы на ЭВМ.

12. Kadchenko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, no. 7. – С. 323–329.

13. Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник Самарского Университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6(97). – С. 13–21.

Поступила в редакцию 9 октября 2025 г.

Сведения об авторе

Кадченко Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: sikadchenko@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 5–9*

DOI: 10.14529/mmph250401

ALGORITHMS FOR CALCULATING EIGENVALUES OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS DEFINED ON CONNECTED GRAPHS WITH CHANGING EDGES

S.I. Kadchenko

*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: sikadchenko@mail.ru*

Abstract. The development of new technologies in science and engineering has led to a need for mathematical methods to efficiently calculate the eigenvalues of partial differential operators on graphs with time-varying geometric parameters. The paper presents algorithms developed using the example of canonical parabolic partial differential equations to compute their eigenvalues. The analytical formulas obtained from these algorithms can approximate the eigenvalues at specific time points.

Keywords: *initial-boundary value problems; connected graphs; eigenvalues and eigenfunctions of operators; discrete and semi-bounded operators; Galerkin method; regularized trace method.*

References

1. Provotorov V.V. Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem on a Star Graph. *Sbornik: Mathematics*, 2008, Vol. 199, Iss. 10, pp. 1523–1545. DOI: 10.1070/SM2008v199n10ABEH003971
2. Keating J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs. Quantum Graphs and their Applications. *Contemporary Mathematics*, 2006, Vol. 415, pp. 191–200. DOI: 10.1090/conm/415/07869
3. Matrasulov D.U., Yusupov J.R., Sabirov K.K., Sobirov Z.A. Time-Dependent Quantum Graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. *Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges*, 2015, Vol. 6, no. 2, pp. 173–181. DOI: 10.17586/2220-8054-2015-6-2-173-181
4. Nikiforov D.S. *Model' kvantovykh grafov s rebrami menyayushcheyasya dliny: dis. ... kand. tekh. nauk* (Model of Quantum Graphs with Edges of Varying Length: Cand. phys. and math. sci. diss.). Saint Petersburg, 2018, 125 p. (in Russ.).
5. Kadchenko S.I., Torshina O.A. The Algorithm of Finding of Meanings of Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoin Operators Via Method of Regularized Traces. *Bulletin of South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2012. no. 40 (299), iss. 14, pp. 83–88.
6. Kadchenko S.I., Torshina O.A. Calculation of Eigenvalues of Elliptic Differential Operators Using the Theory of Regularized Series. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2016, Vol. 8, no. 2, pp. 36–43.
7. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded from Below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2012, no. 6(97), pp. 13–21.
8. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S., Kadchenko I.E. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Discrete Semi-Bounded Operators Defined on Quantum Graphs of Star Type with Variable Edges. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2024, Vol. 17, Iss. 4, pp. 51–65. (in Russ.).
9. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Initial-Boundary Value Problems for a Wave Differential Equation Given on a Graph with Changing Edges. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2024, Vol. 16, no. 4, pp. 29–34. (in Russ.).
10. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges. *Journal of Computational Engineering Mathematics*, 2024, Vol. 11, Iss. 4, pp. 49–60. DOI: 10.14529/jcem240401
11. Stavtsova A.V., Kadchenko S.I. *Software Package for Numerical Solution of Inverse Spectral Problems Generated by a Perturbed Sturm–Liouville Operator on Finite Connected Geometric graphs*. Certificate No. 2021662776 Russian Federation; application 24.06.2021, registered. 04.08.2021, computer program registry.
12. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, Vol. 10, no. 7, pp. 323–329. DOI: 10.12988/ams.2016.510625
13. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded from Below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2012, no. 6(97), pp. 13–21

Received October 9, 2025

Information about the authors

Kadchenko Sergey Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics and Informatics Department, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: sikadchenko@mail.ru.

АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ О РЕГУЛЯРНОМ ХАРАКТЕРЕ СТРУКТУРЫ СНЕЖНОЙ ЛАВИНЫ НА ОСНОВЕ ВЫЯВЛЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДОВ

Б.А. Крынецкий, А.В. Калач, А.А. Парамонов

*МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: a_kalach@mail.ru*

Аннотация. Приведены результаты исследования регулярного характера почти периодов в структуре снежной лавины на примере сошедшей 11 января 2025 года в Альпийских горах снежной массы. Изображение лавины подвергается линейаризации на основе полигональной трансформации целевой области для проведения почти периодического анализа внутри тела схода снежной массы. Полученное прямоугольное представление позволяет выполнять горизонтальные и вертикальные срезы, отражающие продольные и поперечные составляющие компоненты пространственной структуры анализируемого опасного природного явления.

Для решения задачи структурной сегментации применяется почти периодический анализ, определяющий величины длин интервалов единообразного поведения данных. Анализ различных срезов продемонстрировал системный характер ряда продольных и поперечных почти периодов, выражающий фундаментальный вклад в описание структуры тела лавины. Также обнаружены фундаментальные высокочастотные почти периоды, носящие, вероятно, локально выраженные характеристики области.

Полученные результаты позволяют ускорять исследование и сегментирование на основе сформированных априорных представлений о существовании единообразных почти периодов, пронизывающих систему явления на фундаментальном уровне. Это позволит улучшить понимание структур лавин, что способствует совершенствованию мер по обеспечению безопасности лавиноопасных регионов.

Ключевые слова: почти периодический анализ; полигональная линейаризация; анализ данных; обработка изображений; лавины; техносферная безопасность; чрезвычайная ситуация; опасные природные явления.

Введение

С развитием современного туризма и горной промышленности возникает вопрос исследования опасных природных явлений на примере лавин с целью прогнозирования зон ущерба и противодействия их разрушительной силе. Согласно определению, снежные лавины представляют собой массы снега, падающие или движущиеся со скоростью 20–30 м/с. Явление распространено как на территории России [1, 2], так и за границей – например, в Казахстане [3–5] и Турции [6].

Для исследования применяются различные методы и модели – так модель RAMMS демонстрирует удовлетворительные результаты даже в условиях недостатка данных [7, 8]. При этом существенную роль в анализе сыграло зонирование по степеням опасности. Таким образом, вопрос о структурной сегментации лавины показывает свою актуальность в целях улучшения качества прогнозных моделей.

Одним из универсальных методов анализа данных, обладающих упорядоченным аргументом – будь то пространство или время, – является почти периодический анализ [9].

Известно, что метод применим для пространственного сегментирования опасных природных явлений [10, 11]. В работе предлагается оценка системного характера структуры лавины на основе почти периодических характеристик явления.

Описание данных. Исследование проводится на графическом изображении лавины, сошедшей 11 января 2025 года в Альпах на хребте между французской коммуной Ларш (Larche)

и итальянским населенным пунктом Саретто (Saretto) в коммуне Аччельо (Acceglio), взятом с открытого Интернет источника [12].

Лавина сошла слоем толщиной в 15–30 см по поверхности грунта. Критических последствий схода лавины, к счастью, нет – на пути спуска не находились объекты инфраструктуры или туристические группы. Изображение приводится к черно-белой гамме, а для дальнейшего анализа обрабатывается в представлении в виде матрицы, элементы которой описывают интенсивность белого цвета в пикселе строки и столбца приведенного изображения.

Описание методов. Для проведения структурной сегментации лавины в исследовании предлагается применение почти периодического анализа в структуре лавины. Для этого необходимо привести область изображения к спрямлённому виду для представления структуры лавины в виде наборов данных с упорядоченным аргументом.

Преобразование данных основывается на алгоритме полигональной трансформации. В пространстве исходного изображения создаётся сеть узлов полигонов, сопряженных в форме цепочки, описывающей область исследуемого явления. Внутри полигонов с заданными частотами определяются сетки узлов дискретизации преобразованных данных. Для линейаризации выбраны частоты продольной и поперечной дискретизации – 600 и 300 узлов соответственно. Спрямленный набор данных в виде набора горизонтальных и вертикальных срезов – последовательностей упорядоченных по аргументу значений яркости узла дискретизации подвергали почти периодическому анализу для определения существования и синхронизации систем ритмичных тактов в срезах, что позволит провести структурную сегментацию линейаризованного набора и воспроизвести разметку существенных границ в теле исследуемой лавины.

Почти периодический анализ определяет значения, близкие по определению к периоду функции, на основе обобщённой сдвиговой функции – синтезированной из сдвиговой функции и анаморфозы данных, выделяющей колебательную компоненту из единой с трендом структуры.

Исследование почти периодов по различным срезам позволяет систематизировать наблюдения и выявить наиболее существенные характеристики, описывающие данные. Так, рассмотрение ритмичных компонент по поперечному срезу в середине линейаризации приводит к исследованию локальных минимумов сечения обобщенной сдвиговой функции.

Установлено, что анализируемая система локальных минимумов представляет практически идеальную алгебраическую последовательность, что указывает на их фундаментальный характер. Отдельного упоминания заслуживает почти период в 87 узлов дискретизации – он имеет самое малое значение обобщенной сдвиговой функции во всей системе.

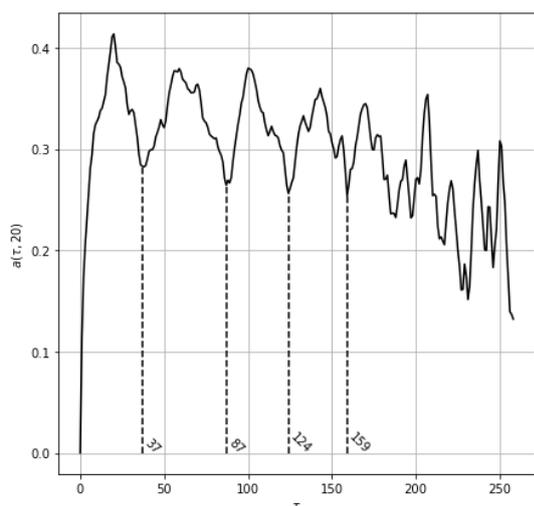


Рис. 1. Сечение обобщенной сдвиговой функции для 250-го поперечного среза линейаризованных данных с разметкой системы локальных минимумов

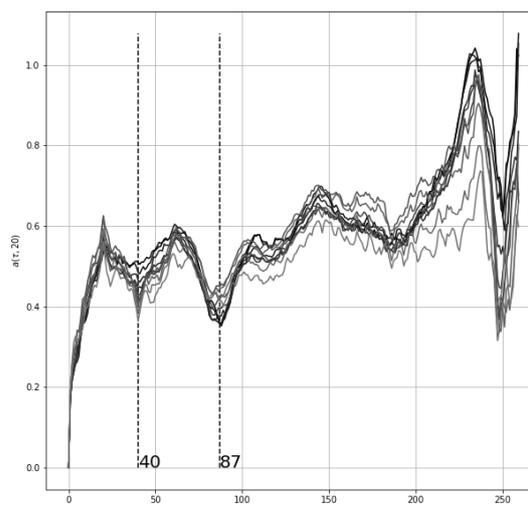


Рис. 2. Сечения обобщенной сдвиговой функции для системы поперечных срезов линейаризованных данных с разметкой системы локальных минимумов

Для первичной систематизации проведем почти периодический анализ для поперечного сечения линеаризованных данных в 400-й вертикали. Система почти периодов на данном срезе также носит ритмичный характер алгебраической последовательности с шагом, близким к 30 узлам дискретизации. Отдельно необходимо отметить то, что почти период в 87 узлов дискретизации встречается в обеих системах локальных минимумов, что существенно выделяет его и наделяет уже системным характером. Чистое воспроизведение почти периода в 87 узлов дискретизации встречается и в системе локальных минимумов для 250-го вертикального сечения линеаризованных данных, приведенной на рис. 1.

Установлено, что если провести почти периодический анализ в системе первого десятка вертикальных срезов, то система сечений обобщенной сдвиговой функции показывает единообразное поведение (рис. 2).

Рис. 2 убедительно демонстрирует существование пары практически кратных почти периодов в 40 и 87 узлов дискретизации. Также наблюдается подобие локального минимума в окрестностях 185 узлов дискретизации и существенного локального минимума при 250 узлах дискретизации, однако слабая обеспеченность данными позволяет пренебрегать последней четвертью среза. Таким образом, в структуре почти периодов поперечных сечений линеаризованных данных тактовый интервал в 87 узлов дискретизации демонстрирует систематический характер, претендуя на статус фундаментальной составляющей исследуемого явления.

Проведение почти периодического анализа в системе горизонтальных сечений линеаризованных данных позволит оценить продольные почти периоды в структуре. Так, для серединного продольного сечения срез обобщенной сдвиговой функции показывает, что существенные локальные минимумы так же, как и в исследованиях поперечных почти периодов образуют последовательность, схожую с арифметической прогрессией. Помимо существенных локальных минимумов существенно выделяется система ритмичных высокочастотных оврагов, указывающая на неявный фундаментальный малый почти период примерно в 12 узлов дискретизации, однако относительная глубина соответствующего прогиба невелика.

Проведение почти периодического анализа для другого горизонтального среза линеаризованных данных даёт систему ритмичных тактов, в которых явление почти периода в 12 узлов дискретизации носит более явный характер. Его можно зафиксировать в виде последовательности локальных минимумов в 12, 24, 36 и 50 (близко к 48) узлах дискретизации, а существенные локальные минимумы соответствуют 100, 155 и 235 узлам дискретизации.

Особенности полученных срезов обобщенной сдвиговой функции для горизонтальных сечений линеаризованных выражены обилием локальных минимумов, образующих почти строгие алгебраические последовательности с фундаментальным почти периодом в 12 узлов дискретизации. Также можно выделить существенные минимумы, соответствующие трендовому углублению графика среза в 155 и 305 узлах дискретизации.

Таким образом, почти периодический анализ показал системный характер некоторых тактов развития структуры лавины в продольном и поперечном направлениях.

Возникает возможность визуализации структурной сегментации, основан-

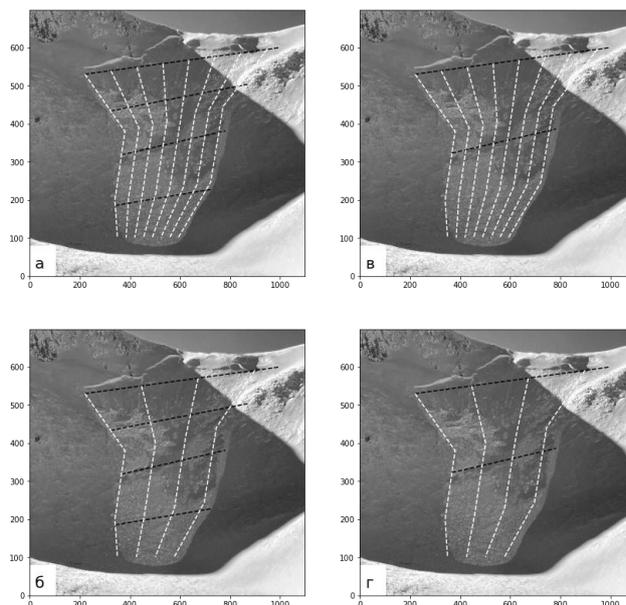


Рис. 3. Комбинации композиций продольных и поперечных почти периодов на исходных данных

ной на определённых регулярных почти периодах. Для демонстрации на рис. 3 рассматриваются композиции продольных почти периодов в 155 и 305 узлов дискретизации и поперечных почти периодов в 40 и 87 узлов дискретизации.

Ритмичные границы приведённой сетки на исходных данных воспроизведены на рис. 3: белые линии определяют поперечные почти периоды, а чёрные – продольные почти периоды соответственно.

На рис. 3 видно, что в строках сохраняется величина поперечного почти периода – так, рис. 3, а и в имеют ширину синей сетки в 40 узлов дискретизации, а рис. 3, б и г – ширину синей сетки в 87 узлов дискретизации. Для ширины продольных почти периодов это правило сохранено внутри столбцов – рис. 3, а и б размечены красными границами с шагом в 155 узлов дискретизации, а рис. 3, в и г – 305 узлов дискретизации соответственно.

На рис. 3, б можно отметить удачную композицию почти периодов, формирующую структуризацию: отдельные области разграничиваются практически по идеальным цветовым сегментам – то есть высветленные области «турбулентного» характера строго отсекаются границами и по продольным, и по поперечным границам.

Рис. 3 показывает, что поперечный почти период в 87 узлов дискретизации делит снежную лавину на три продольные полосы – соответствующие условным трём зонам схода лавины, сошедшей от 2 линий, которые объединились в середине.

Продольный почти период в 305 узлов дискретизации отделяет область начала и развития схода лавины от зоны торможения и окончания пути лавины.

На рис. 4 представлена общая схема алгоритма анализа информации о регулярном характере структуры снежной лавины на основе выявленных почти периодов.

Предложенная схема формирует основу для дальнейшего развития исследований пространственных структур лавин на основе почти периодического анализа.

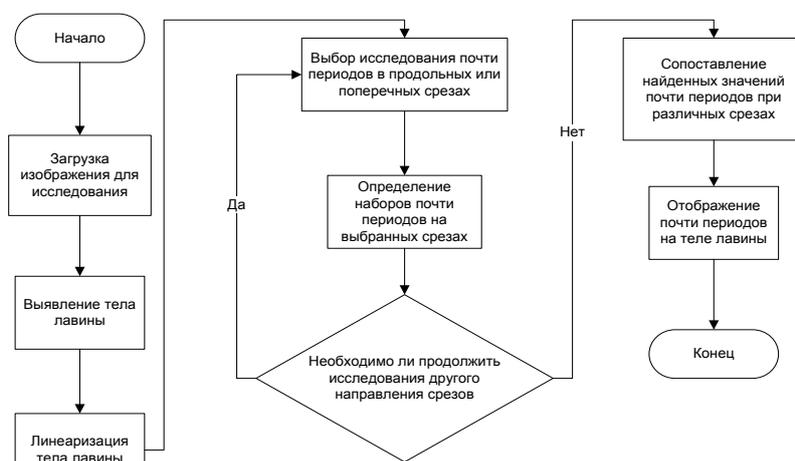


Рис. 4. Схема алгоритма анализа информации о регулярном характере структуры снежной лавины на основе выявленных почти периодов

Выводы

В рамках проведения исследования изображение структуры снежной лавины подвергалась спрямлению с использованием полигональной трансформации для дальнейшего почти периодического анализа снежного потока. Почти периодический анализ позволил установить существование в структуре снежной массы поперечных и продольных ритмичных интервалов развития лавины. Выявленные почти периоды показали системный характер – так, поперечный почти период в 87 узлов дискретизации был устойчиво обнаружен в большом наборе разрозненных срезов. Это указывает на его фундаментальный характер в вопросе описания структуры исследуемой лавины. Полученные результаты показывают единство ритмов структуры развития лавины, что указывает на существенные возможности к пространственной сегментации явления на основе применяемой методики анализа. Проработанный подход может быть интегрирован в системы по мониторингу и прогнозированию лавинной активности в целях поддержки принятия решений по совершенствованию мер обеспечения безопасности и профилактики чрезвычайных ситуаций.

Литература

1. Лавинная опасность на территории всесезонного туристско-рекреационного комплекса «Армхи» (Республика Ингушетия) / Н.В. Кондратьева, А.Х. Аджиев, В.В. Разумов и др. // ГеоРиск. – 2023. – Т. 17, № 1. – С. 52–61.
2. Кондратьева, Н.В. Условия формирования снежных лавин на территории ледниковых комплексов Зедегондон и Козидон / Н.В. Кондратьева, А.Х. Аджиев // Международный научно-исследовательский журнал. – 2024. – № 11(149).
3. Кузагельдина, Н.У. Анализ состояния проблемы снежного покрова и лавин в горах Иле Алатау / Н.У. Кузагельдина // Студенческая наука: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей X Международной научно-практической конференции в 2 частях, Пенза, 29 декабря 2022 года. Часть 1. – Пенза: Наука и Просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.), 2022. – С. 211–215.
4. Применение методов математической статистики для оценки уровня лавинной опасности в горах Иле Алатау / А.Р. Медеу, В.П. Благовещенский, В.В. Жданов, С.У. Ранова // Метеорология и гидрология. – 2022. – № 8. – С. 34–45.
5. Благовещенский, В.П. Лавинный риск в Казахстане при различных уровнях лавинной опасности / В.П. Благовещенский, В.В. Жданов // Гидросфера. Опасные процессы и явления. – 2021. – Т. 3, № 2. – С. 122–132.
6. Ibrahim, G. Avalanche Disaster Review in Turkey / G. Ibrahim // Hydrosphere. Hazard Processes and Phenomena. – 2022. – Vol. 4, no. 4. – P. 310–326.
7. К вопросу моделирования снежных лавин при недостаточности данных / А.С. Турчанинова, С.А. Сократов, Ю.Г. Селиверстов и др. // ГеоРиск. – 2020. – Т. 14, № 1. – С. 38–47.
8. Жукова, Е.Д. Оценка и учет лавинной опасности при развитии курортов (на примере Красной Поляны) / Е.Д. Жукова // Инженерные изыскания в строительстве: Материалы четвертой Общероссийской научно-практической конференции молодых специалистов, Москва, 29 апреля 2022 года. – Москва: Геомаркетинг, 2022. – С. 134–139.
9. Парамонов, А.А. Практическая значимость почти-периодического анализа / А.А. Парамонов, Б.А. Крынецкий, Т.Е. Смоленцева // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2024. – Т. 1. – С. 227–230.
10. Калач, А.В. К вопросу анализа метеоданных с упорядоченным аргументом в аспекте решения задач техносферной безопасности / А.В. Калач, А.А. Парамонов, Б.А. Крынецкий // Технологии техносферной безопасности. – 2024. – № 3(105). – С. 170–180.
11. Калач, А.В. О возможностях применения метода почти-периодического анализа для обработки изображений / А.В. Калач, А.А. Парамонов, С.Л. Сахаров // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 44–52.
12. Стоковые изображения, изображения роялти-фри. – URL <https://www.data-avalanche.org/avalanche/1736735650157> (Дата обращения 13.01.2025).

Поступила в редакцию 20 февраля 2025 г.

Сведения об авторах

Крынецкий Борис Алексеевич – аспирант, старший преподаватель кафедры прикладной математики, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0789-5233>; e-mail: kryneckij@mirea.ru.

Калач Андрей Владимирович – доктор химических наук, профессор кафедры прикладной математики, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>; e-mail: a_kalach@mail.ru.

Парамонов Александр Александрович – аспирант, старший преподаватель кафедры прикладной математики, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8504-2108>, e-mail: paramonov_a_a99@mail.ru.

ANALYSING THE INFORMATION ON THE REGULAR NATURE OF A SNOW AVALANCHE STRUCTURE BASED ON NEAR-PERIODS IDENTIFICATION

B.A. Krynetsky, A.V. Kalach, A.A. Paramonov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation

E-mail: a_kalach@mail.ru

Abstract. The paper presents the results of a study on the regularity of near-periods in the structure of a snow avalanche, using the example of an avalanche that occurred on January 11, 2025 in the Alps. A linearized image of the avalanche was created by transforming the target area into a polygon to conduct a near-period analysis within the body of the avalanche. This representation allowed for the creation of horizontal and vertical slices that reflected the longitudinal and transverse components of the spatial structure of this hazardous natural phenomenon. To solve the problem of structural segmentation, a near-periodic analysis is used. It determines the lengths of intervals with uniform data behavior. Analysis of various slices reveals the systematic nature of longitudinal and transverse near-periods, which contribute to the description of avalanche body structure. The paper also describes the discovered fundamental high-frequency periods, which likely have local characteristics in the region. These results speed up research and segmentation based on an a priori understanding of uniform near-periods that permeate the system at the fundamental level. This improves the understanding of avalanche structures and contributes to safer measures in avalanche-prone areas.

Keywords: Near-periodic analysis; polygonal linearization; data analysis; image processing; avalanches; technosphere safety; emergency situation; hazardous natural phenomena.

References

1. Kondratyeva N.V., Adzhiev A.Kh., Razumov V.V., Zalikhanov M.Ch., Yurchenko N.V. Avalanche hazard on the territory of the all-season tourist and recreational complex "Armkhi" (Republic of Ingushetia). *GeoRisk World*, 2023, Vol. XVII, No. 1, pp. 52–61. DOI: 10.25296/1997-8669-2023-17-1-52-61.
2. Kondrat'eva N.V., Adzhiev A.Kh. Usloviya formirovaniya snezhnykh lavin na territorii lednikovykh kompleksov Zemegondon i Kozidon (Conditions of Snow Avalanche Formation in the Territory of the Zemyegondon and Kozidon Glacier Complexes). *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal*, 2024, no. 11(149). DOI: 10.60797/IRJ.2024.149.122.
3. Kuzhagel'dina N.U. Analiz sostoyaniya problemy snezhnogo pokrova i lavin v gorakh Ile Alatau (Analysis of the State of the Problem of Snow Cover and Avalanches in the Ile Alatau Mountains). *Studencheskaya nauka: Aktual'nye voprosy, dostizheniya i innovatsii: sbornik statey X Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii v 2 chastyakh, Penza, 29 dekabrya 2022 goda. Tom Chast' 1* (Student Science: Current Issues, Achievements and Innovations: Proc. X International Scientific and Practical Conference in 2 parts, Penza, December 29, 2022. Part 1). – Penza: Nauka i Prosveshchenie Publ., 2022, pp. 211–215. (in Russ.).
4. Medeu A.R., Blagoveshchenskii V.P., Zhdanov V.V., Ranova S.U. Application of Mathematical Statistics to Assess the Avalanche Danger Level in the Ile Alatau Mountains. *Meteorologiya i gidrologiya*, 2022, no. 8, pp. 34–45. (in Russ.). DOI: 10.52002/0130-2906-2022-8-34-45.
5. Blagoveshchenskiy V.P., Zhdanov V.V. Lavinnyy risk v Kazakhstane pri razlichnykh urovnyakh lavinnoy opasnosti (Avalanche Risk in Kazakhstan at Different Levels of Avalanche Danger). *Hydrosphere. Hazard Processes and Phenomena*, 2021, Vol. 3, no. 2, pp. 122–132. (in Russ.). DOI: 10.34753/HS.2021.3.2.122
6. Ibrahim G. Avalanche disaster review in Turkey. *Hydrosphere. Hazard Processes and Phenomena*, 2022, Vol. 4, no. 4, pp. 310–326. DOI: 10.34753/HS.2022.4.4.310.

7. Turchaninova A.S., Sokratov S.A., Seliverstov Yu.G., Petrakov D.A., Lazarev A.V. K voprosu modelirovaniya snezhnykh lavin pri nedostatochnosti dannykh (On the Issue of Modeling Avalanches with Insufficient Data). *GeoRisk*, 2020, Vol. 14, no. 1, pp. 38–47. DOI: 10.25296/1997-8669-2020-14-1-38-47.

8. Zhukova E.D. Otsenka i uchet lavinnoy opasnosti pri razvitiy kurortov (na primere Krasnoy Polyany) (Assessment and Accounting of Avalanche Hazards in the Development of Resorts (Using the Example of Krasnaya Polyana)) *Inzhenernye izyskaniya v stroitel'stve: Materialy chetvertoy Obshcherossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii molodykh spetsialistov, Moskva, 29 aprelya 2022 goda* (Engineering Surveys in Construction: Proc. of the Fourth All-Russian Scientific and Practical Conference of Young Specialists, Moscow, April 29, 2022). Moscow: Geomarketing Publ., 2022, pp. 134–139. (in Russ.).

9. Paramonov A.A., Krynetskiy B.A., Smolentseva T.E. Prakticheskaya znachimost' pochti-periodicheskogo analiza (The Practical Significance of Near-Periodic Analysis). *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma "Nadezhnost' i kachestvo"* (Proc. of the International Symposium "Reliability and Quality"), 2024, Vol. 1, pp. 227–230. (in Russ.).

10. Kalach A.V., Paramonov A.A., Krynetskiy B.A. On the Question of Analysis of Weather Data with an Ordered Argument in the Aspect of Solving Technosphere Security Problems. *Tekhnologii tekhnosfernoy bezopasnosti*, 2024, no. 3(105), pp. 170–180. (in Russ.). DOI: 10.25257/TTS.2024.3.105.170-180.

11. Kalach A.V., Paramonov A.A., Sakharov S.L. On the Possibilities of Using the Method of Near-periodic Analysis for Image Processing. *Modeling of Systems and Processes*, 2024, Vol. 17, no. 3, pp. 44–52. DOI: 10.12737/2219-0767-2024-42-50.

12. *Stokovye izobrazheniya, izobrazheniya royalti-fri* (Stock Images, Royalty-Free Images). URL <https://www.data-avalanche.org/avalanche/1736735650157>

Received February 20, 2025

Information about the authors

Krynetskiy Boris Alekseevich is Post-graduate Student, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0789-5233>; e-mail: kryneckij@mirea.ru.

Kalach Andrey Vladimirovich is Dr. Sc. (Chemical), Professor of the Department of Applied Mathematics, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>; e-mail: a_kalach@mail.ru.

Paramonov Alexander Alexandrovich is Post-graduate Student, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8504-2108>, e-mail: paramonov_a_a99@mail.ru.

NUMERICAL SIMULATION OF THE DEFLECTION OF A RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC BASE WITH ITS RIGID EDGE FIXATION

E.A. Meltsaykin, A.L. Ushakov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ushakoal@susu.ru

Abstract. The paper presents an algorithm for numerically modeling the deflection of a rectangular plate on an elastic foundation with rigid fixation at its edges. The proposed algorithm is asymptotically optimal in terms of computational effort and is based on the iterative expansion method and assumes the use of marching methods. The asymptotic optimality of the algorithm has been experimentally confirmed using computer simulations.

Keywords: numerical modeling; deflection of a rectangular plate.

Introduction

Numerical modeling of the deflection of a rectangular plate on an elastic foundation with its rigid fixation at the edges presents practical problems [1]. In the best cases, logarithmically optimal algorithms for solving such a problem are known, although the development of asymptotically optimal algorithms is theoretically possible [2, 3]. In the present paper, an algorithm of this type is proposed based on the use of the iterative extension method [4] and the proposed application of well-known marching methods [5–8]. Computer calculations have been performed, experimentally confirming the asymptotic optimality of the developed algorithm.

Practical task

In real three-dimensional space it is considered under transverse load, under pressure P_1 rectangular plate with the stiffness coefficient of the elastic base $K_1 \geq 0$, with rigidly fixed edges, length l_1 , width b_1 , thickness H , when $0 < H \ll b_1 \leq l_1$ made of material with Young's modulus $E_1 > 0$ and Poisson's ratio $\sigma_1 \in [0; 1)$. Find the middle surface of the plate, equidistant, for example, from the lower and upper surfaces of the plate, when the plate is located horizontally.

Regions

It is assumed that the first region is given and the second region is selected that does not intersect with the first region. $\Omega_\omega \subset R^2$, $\omega \in \{I, II\}$, and the union of the closures of these regions is the closure of a square region Π . The boundaries of the regions consist of open arcs:

$$\partial\Pi = \bar{s}, s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset,$$

$$\partial\Omega_I = \bar{s}_I, \partial\Omega_{II} = \bar{s}_{II}, s_I = \Gamma_{I,0}, s_{II} = \Gamma_{II,1} \cup \Gamma_{II,2} \cup \Gamma_{II,3}, \Gamma_{I,0} \cap \Gamma_{II,3} \neq \emptyset.$$

In this case, the intersection of the boundaries of the first and second regions is as follows

$$\partial\Omega_I \cap \partial\Omega_{II} = \bar{S}, S = \Gamma_{I,0} \cap \Gamma_{II,3} \neq \emptyset.$$

We will consider such areas

$$\Pi = (-l_2; l_3) \times (-b_2; b_3). \quad \Omega_I = (0; l_1) \times (0; b_1), \quad 0 < b_1 \leq l_1,$$

$$\Omega_{II} = (-l_2; l_3) \times (-b_2; b_3) \setminus [0; l_1] \times [0; b_1], \quad 0 < l_2, l_1 < l_3, \quad 0 < b_2, b_1 < b_3,$$

The first region is an open rectangle, and the second region is an open and larger rectangle with the closure of the first region punctured. The boundaries of the regions contain the following parts:

$$\Gamma_1 = \{l_3\} \times (-b_2; b_3) \cup (-l_2; l_3) \times \{b_3\}, \quad \Gamma_2 = \{-l_2\} \times (-b_2; b_3) \cup (-l_2; l_3) \times \{-b_2\}.$$

$$\Gamma_{I,0} = \{0, l_1\} \times (0; b_1) \cup (0; l_1) \times \{0, b_1\},$$

$$\Gamma_{II,1} = \{l_3\} \times (-b_2; b_3) \cup (-l_2; l_3) \times \{b_3\}, \quad \Gamma_{II,2} = \{-l_2\} \times (-b_2; b_3) \cup (-l_2; l_3) \times \{-b_2\},$$

$$\Gamma_{II,3} = \{0, l_1\} \times (0; b_1) \cup (0; l_1) \times \{0, b_1\},$$

Solved and fictitious problems

In the first region, i. e. when $\omega=1$ the problem to be solved is set. In the second area, i. e. when $\omega=\text{II}$ then a fictitious homogeneous problem is introduced:

$$D_1 \Delta^2 \check{u}_1 + K_1 \check{u}_1 = P_1 \text{ in } (0; l_1) \times (0; b_1), \quad \check{u}_1 = \frac{\partial \check{u}_1}{\partial \check{n}} = 0 \text{ on } \{0, l_1\} \times (0; b_1) \cup (0; l_1) \times \{0, b_1\}, \quad (1)$$

where $D_1 = E_1 H^3 / (12(1 - \sigma_1^2)) > 0$ is cylindrical rigidity of the plate. If we assume that $f_1 = P_1 / D_1$, $a_1 = K_1 / D_1 \geq 0$, then the problem is solvable

$$\Delta^2 \check{u}_1 + a_1 \check{u}_1 = f_1 \text{ in } (0; l_1) \times (0; b_1), \quad \check{u}_1 = \frac{\partial \check{u}_1}{\partial \check{n}} = 0 \text{ on } \{0, l_1\} \times (0; b_1) \cup (0; l_1) \times \{0, b_1\}. \quad (2)$$

Here $\frac{\partial \check{u}_1}{\partial \check{n}}$ – derivative with respect to the outward normal of a function \check{u}_1 , and \check{u}_1 function of displacement of points of the midplane of the plate. The plate is considered under transverse pressure P_1 , determining the load f_1 and is located on an elastic foundation, with rigid fixation at the boundary. The solved and fictitious problems are considered in variational form:

$$\check{u}_\omega \in \check{H}_\omega : \Lambda_\omega(\check{u}_\omega, \check{v}_\omega) = F_\omega(\check{v}_\omega) \quad \forall \check{v}_\omega \in \check{H}_\omega, \quad \omega \in \{1, \text{II}\} \quad (3)$$

spaces of Sobolev functions.

$$\check{H}_1 = \check{H}_1(\Omega_1) = \left\{ \check{v}_1 \in W_2^2(\Omega_1) : \check{v}_1|_{\Gamma_{1,0}} = \frac{\partial \check{v}_1}{\partial \check{n}}|_{\Gamma_{1,0}} = 0 \right\},$$

$$\check{H}_{\text{II}} = \check{H}_{\text{II}}(\Omega_{\text{II}}) = \left\{ \check{v}_{\text{II}} \in W_2^2(\Omega_{\text{II}}) : \check{v}_{\text{II}}|_{\Gamma_{\text{II},1}} = 0, \frac{\partial \check{v}_{\text{II}}}{\partial \check{n}}|_{\Gamma_{\text{II},2}} = 0 \right\},$$

where the right-hand sides of the problems are functionals

$$F_\omega(\check{v}_\omega) = (\check{f}_\omega, \check{v}_\omega), \quad (f_\omega, \check{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \check{f}_\omega \check{v}_\omega d\Omega_\omega, \quad \check{f}_{\text{II}} = 0,$$

and the left parts of the problems are bilinear forms

$$\Lambda_\omega(\check{u}_\omega, \check{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} (\check{u}_{\omega xx} \check{v}_{\omega xx} + 2\check{u}_{\omega xy} \check{v}_{\omega xy} + \check{u}_{\omega yy} \check{v}_{\omega yy} + a_\omega \check{u}_\omega \check{v}_\omega) d\Omega_\omega, \quad a_{\text{II}} > a_1 \geq 0.$$

Each of these problems has a unique solution [9]. The solution to the fictitious problem is zero.

To jointly denote the solution, the right side of the original problem \check{u}_1, f_1 and solutions, the right side of the fictitious problem $\check{u}_{\text{II}}, f_{\text{II}}=0$ the following designations can be used accordingly \check{u}, f , omitting the index ω . So often, for convenience, a function and its continuation are designated the same way.

Difference approximation

In the previously entered rectangular area

$$\Pi = (-l_2; l_3) \times (-b_2; b_3), \quad \Gamma_1 = \{l_3\} \times (-b_2; b_3) \cup (-l_2; l_3) \times \{b_3\}, \quad \Gamma_2 = \{-l_2\} \times (-b_2; b_3) \cup (-l_2; l_3) \times \{-b_2\}$$

and on the encircling strip we will introduce a grid with nodes:

$$(x_i; y_j) = ((i - m - 0,5)h + \delta_1; (j - n - 0,5)h), \quad h = b_1 / n, \quad m = [l_1 / h], \quad \delta_1 = (l_1 - mh) / 2, \quad h \ll b_1 \leq l_1, \\ i = 0, \dots, 3m, \quad j = 0, \dots, 3n, \quad 3 \leq m, n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

We believe that

$$-l_2 = (x_0 + x_1) / 2 = -mh + \delta_1 = -l_1 + 3\delta_1, \quad 0 \leq \delta_1 < h/2, \quad l_2 = l_1 - 3\delta_1, \\ l_3 = x_{3m} = (2m - 0,5)h + \delta_1 = 2(l_1 - 2\delta_1) - h/2 + \delta_1 = 2l_1 - 3\delta_1 - h/2, \quad l_3 = 2l_1 - 3\delta_1 - h/2, \\ -b_2 = (y_0 + y_1) / 2 = nh = -b_1, \quad b_2 = b_1, \quad b_3 = y_{3n} = (2n - 0,5)h = 2b_1 - h/2, \quad b_3 = 2b_1 - h/2.$$

We will consider arrays with values of grid functions at the nodes of the previously introduced grid.

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, 3m, \quad j = 0, 1, \dots, 3n.$$

Note that with discrete approximation $-\Delta \check{u}$ on Π without taking into account the boundary conditions, it is replaced by systems of differences using the approximation method by parts [9]:

$$\frac{4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h^2}, 1 \leq i \leq 3m-1, 1 \leq j \leq 3n-1.$$

After multiplying by h^2 in the difference scheme approximating $-\Delta \tilde{u}$, the result is the so-called cross pattern with coefficients:

$$\begin{array}{ccccc} & & j-1 & j & j+1 \\ & i-1 & & -1 & \\ & i & -1 & 4 & -1 \\ & i+1 & & -1 & \end{array}.$$

With discrete approximation already $\Delta^2 \tilde{u}$ on Π without taking into account the boundary conditions, if in differences we multiply by h^4 , It turns out that the so-called big cross pattern is used with coefficients:

$$\begin{array}{cccccc} & & j-2 & j-1 & j & j+1 & j+2 \\ & i-2 & & & 1 & & \\ & i-1 & & 2 & -8 & 2 & \\ & i & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & i+1 & & 2 & -8 & 2 & \\ & i+2 & & & 1 & & \end{array}.$$

We do not use, for example, the usual numbering of vector components $v_{(3n-1)(i-1)+j} = v_{i,j}$, $i=1, 3m-1$, $j=1, 3n-1$, and first we number the components of the vectors at the nodes inside the first region, except for the nodes closest to its boundary, i. e., when $m+2 \leq i \leq 2m-1$, $n+2 \leq j \leq 2n-1$, secondly, we number the components of the vectors at the nodes from the vicinity of the boundary of the first and second regions, i. e., when $m \leq i \leq 2m+1$, $n \leq j \leq 2n+1$ with the exception of the components of the vectors numbered earlier, i. e., when $m+2 \leq i \leq 2m-1$, $n+2 \leq j \leq 2n-1$, and the third ones we will number the components of the vectors at the nodes inside the third region, i. e., when $1 \leq i \leq 3m-1$, $1 \leq j \leq 3n-1$ with the exception of the components of the vectors numbered earlier, i. e., when $m \leq i \leq 2m+1$, $n \leq j \leq 2n+1$. Note that the system of linear algebraic equations being solved, obtained by approximating the original and fictitious problems, can then be written in matrix form

$$\bar{u} \in R^N : B\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in R^N, N = (3m-1)(3n-1),$$

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

A system for approximating the original problem

$$\bar{u}_1 \in R^M : \Lambda_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1, \bar{f}_1 \in R^M, M = (m-2)(n-2), m, n \geq 3,$$

The system obtained by approximating the corresponding fictitious problem

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

When approximating a fictitious problem, we will use a change in the part of the domain of the coefficient a_{II} near part of the border $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{II} = \bar{S}$, $S = \Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{II,3} \neq \emptyset$, so that when approximating the term with this coefficient, a diagonal matrix is obtained with the same values on the diagonal always equal a_{II} .

Algorithmic implementation of the iterative extension method for modeling plate deflection

We consider the method of iterative extensions for solving a system with a matrix B :

$$\bar{u}^k \in R^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), \tau_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}) / (\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}), \tau_0 = 1, \bar{u}^0 = \bar{0} \in R^N,$$

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{r}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

$$C = \Lambda_I + \gamma\Lambda_{II}, \Lambda_I = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}, \gamma = 1.$$

This iterative process is written as

$$\bar{u}^1 \in R^N : C\bar{u}^1 = \bar{f};$$

$$\bar{u}^k \in R^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}\Lambda_{II}\bar{u}^{k-1}, \tau_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}) / (\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

In an algorithm that implements an iterative process, the following is sequentially calculated:

- I. The squared norm of the initial absolute error $\varepsilon_0 = (\bar{f}, \bar{f})h^2$.
 - II. First approximation $\bar{u}^1 \in R^N : C\bar{u}^1 = \bar{f}$.
 - III. Discrepancy $\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f} = \Lambda_{II}\bar{u}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - IV. The squared norm of the absolute error $\varepsilon_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1})h^2, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - V. Amendment $\bar{w}^{k-1} \in R^N : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - VI. Equivalent discrepancy $\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1} = \Lambda_{II}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - VII. Iteration parameter $\tau_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}) / (\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - VIII. Iterative approximation $\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - IX. Iteration termination condition. $\varepsilon_{k-1} \leq \varepsilon^2 \varepsilon_0, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \varepsilon = 0,001 \in (0; 1)$.
- If the condition for stopping the iterations is not met, everything is repeated from point **III**.

An algorithm for calculating the first approximation and correction in an algorithm implementing the iterative extension method

Note that the system of linear algebraic equations being solved, obtained at each step of the previously applied iterative process, is written in matrix form

$$\bar{v} \in R^N : C\bar{v} = \bar{g}, \bar{g} \in R^N, N = (3m-1)(3n-1).$$

To solve this problem, an iterative process of the form is used

$$\bar{v}^l \in R^N : A^2(\bar{v}^l - \bar{v}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\bar{v}^{l-1} - \bar{g}), \tau_{l-1} > 0, \bar{u}^0 = \bar{0} \in R^N, l \in \mathbb{N}.$$

Here is the matrix C coincides with the matrix up to a permutation of rows $(A - \kappa E)^2 + aE, \kappa = \sqrt{a}$, where E identity matrix of dimension $N \times N$, matrix $A - \kappa E$ determined from the difference scheme:

$$\frac{4v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1}}{h^2}, 1 \leq i \leq 3m-1, 1 \leq j \leq 3n-1,$$

$$v_{i,0}^k = v_{i,1}^k, i = 1, 2, \dots, 3m-1, v_{0,j}^k = v_{1,j}^k, j = 1, 2, \dots, 3n-1,$$

$$v_{i,3n}^k = 0, i = 1, 2, \dots, 3m-1, v_{3m,j}^k = 0, j = 1, 2, \dots, 3n-1,$$

$$a = a_1, \text{ if } m+2 \leq i \leq 2m-1, n+2 \leq j \leq 2n-1, \text{ then } a = a_{II}.$$

To select the iteration parameter, the well-known method of minimum corrections [10] is used. The algorithm calculates:

- I. Initial approximation $\bar{v}^0 = \bar{0} \in R^N$.
- II. Discrepancy $\bar{r}^{l-1} : \bar{r}^{l-1} = C\bar{v}^{l-1} - \bar{g}, l \in \mathbb{N}$. More

$$\bar{t}^{l-1} : \bar{t}^{l-1} = (A - \kappa E)\bar{v}^{l-1}, l \in \mathbb{N}, \bar{r}^{l-1} : \bar{r}^{l-1} = (A - \kappa E)\bar{t}^{l-1} + a\bar{v}^{l-1} - \bar{g}, l \in \mathbb{N}.$$
- III. Amendment $\bar{w}^{l-1} \in R^N : A^2\bar{w}^{l-1} = \bar{r}^{l-1}, l \in \mathbb{N}$.
- IV. Square of the error norm $E_{l-1} = \|\bar{w}^{l-1}\|_{CA^2C}^2 = \langle \bar{r}^{l-1}, \bar{w}^{l-1} \rangle, l \in \mathbb{N}$.

V. Iteration termination condition $E_{l-1} \leq E_0 \varepsilon^2$, $\varepsilon \in (0; 1)$, $l \in \mathbb{N}$.

VI. Equivalent discrepancy $\bar{\eta}^{l-1} : \bar{\eta}^{l-1} = C\bar{w}^{l-1}$, $l \in \mathbb{N}$. More

$$\bar{p}^{l-1} : \bar{p}^{l-1} = (A - \kappa E)\bar{w}^{l-1}, l \in \mathbb{N}, \quad \bar{\eta}^{l-1} : \bar{\eta}^{l-1} = (A - \kappa E)\bar{p}^{l-1} + a\bar{w}^{l-1}, l \in \mathbb{N}.$$

VII. Equivalent correction $\bar{\xi}^{l-1} \in \mathbb{R}^N : A^2 \bar{\xi}^{l-1} = \bar{\eta}^{l-1}$, $l \in \mathbb{N}$.

VIII. Iteration parameter

$$\tau_{l-1} = \frac{\langle \bar{w}^{l-1}, C\bar{w}^{l-1} \rangle}{\langle C\bar{w}^{l-1}, A^{-2}C\bar{w}^{l-1} \rangle} = \frac{\langle \bar{w}^{l-1}, \bar{\eta}^{l-1} \rangle}{\langle \bar{\eta}^{l-1}, \bar{\xi}^{l-1} \rangle}, l \in \mathbb{N}.$$

IX. Iterative solution $\bar{v}^l = \bar{v}^{l-1} - \tau_{l-1} \bar{w}^{l-1}$, $l \in \mathbb{N}$.

Note that the relative error specified in the iterative process termination condition is:

$$\varepsilon = 0,001 \in (0;1).$$

In the iterative process, a problem of the form:

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^N : A^2 \bar{v} = \bar{g}, \quad \bar{g} \in \mathbb{R}^N,$$

which is written as two problems:

$$\bar{q} \in \mathbb{R}^N : A\bar{q} = \bar{g}, \quad \bar{g} \in \mathbb{R}^N, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^N : A\bar{v} = \bar{q}, \quad \bar{q} \in \mathbb{R}^N.$$

When solving problems of the previous type, the well-known marching method can be used [5–8].

Calculation of the deflection of a shipbuilding plate

The following data were considered in the calculations:

$$l_1 = 1\text{m}, b_1 = 1\text{m}, H = 0,03\text{m}, K_1 = 0\text{Па/м}, E_1 = 2 \cdot 10^{11}\text{ Па}, \sigma_1 = 0,3\text{м/м}, P_1 = 80\,000\text{ Па}, \varepsilon = 0,001,$$

where $D_1 = 494\,505,5\text{ Па}\times\text{м}^3$, $a_1 = 0\text{м}^{-4}$, $f_1 = 0,162\text{м}^{-3}$. A table of the number of iterations in calculations on a computer with a given number of nodes was obtained.

Number of iterations depending on the number of nodes in the directions of the axes

m, n	41	71	101	131	161
k	7	5	5	4	4

The maximum approximate value of the slab deflection, i. e. the maximum value of the modulus of the last iterative solution on the finest grid $u_{i,j}^k$:

$$M = \max_{\substack{m+2 \leq i \leq 2m-1 \\ n+2 \leq j \leq 2n-1}} |u_{i,j}^k| = 0,000\,205\,299\text{ м}.$$

Conclusion

A detailed algorithm has been developed for the numerical modeling of the deflection of a rectangular plate under a transverse load, where the plate is located on an elastic foundation and rigidly fixed at its edges. The proposed algorithm is asymptotically optimal in terms of computational effort, as it is based on the iterative expansion method. The algorithm's operation is successfully demonstrated in the computer calculation of a ship's plate.

References

1. Anuchina N.N., Babenko K.I., Godunov S.K. et al. *Teoreticheskie osnovy i konstruirovaniye chislennykh algoritmov zadach matematicheskoy fiziki* (Theoretical Foundations and Design of Numerical Algorithms for Mathematical Physics Problems), Moscow, Nauka Publ., 1979, 295 p. (in Russ.).
2. D'yakonov E.G. *Minimizatsiya vychislitel'noy raboty. Asimptoticheski optimal'nye algoritmy dlya ellipticheskikh zadach* (Minimizing Computational Work. Asymptotically Optimal Algorithms for Elliptic Problems). Moscow, Nauka Publ., 1989, 271 p. (in Russ.).
3. Algazin S.I., Solovyov G. On Fast Solution of the Primal Biharmonic Problem. *Trudy MAI*, 2019, Iss.108, p. 15. (in Russ.).
4. Ushakov A.L., Meltsaykin E.A. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of iterative Extensions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, Vol. 15, no. 3, pp. 51–66. DOI: 10.14529/mmp220304

5. Bank R.E., Rose D.J. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 1977, Vol. 14, no. 5, pp. 792–829. DOI: 10.1137/0714064

6. Kaporin I.E. Modifitsirovannyu marsh-algoritm resheniya raznostnoy zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona v pryamougol'nike (Modified Marsh Algorithm for Solving the Dirichlet Difference Problem for the Poisson Equation in a Rectangle). *Raznostnye metody matematicheskoy fiziki: sb. nauch. tr.* (Difference Methods of Mathematical Physics: Collection of Scientific Papers). Moscow, 1980, pp. 11–21. (in Russ.).

7. Kaporin, I.E. Marshevyuy metod dlya sistemy s blochno-trekhdiagonal'noy matritsey (The Marching Method for a System with a Block-Tridiagonal Matrix). *Chislennyye metody lineynoy algebrы: sb. nauch. tr.* (Numerical Methods of Linear Algebra: Collection of Scientific Papers). Moscow, 1982, pp. 63–72. (in Russ.).

8. Samarskii A.A., Kaporin I.E., Kycherov A.B., Nikolaev E.S. Some Modern Methods of Solution of Difference Equations. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1983, Vol. 27, no. 7, pp. 1–13. (in Russ.).

9. Oben Zh.P. *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* (Approximate Solution of Elliptic Boundary Value Problems). Moscow, Mir Publ., 1977, 383 p. (in Russ.). [Aubin J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems. New York, Wiley-Interscience, 1972, 360 p.]

10. Samarskiy A.A. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* (Methods for Solving Finite-Difference Equations). Moscow, Nauka Publ., 1978, 591 p. (in Russ.).

Received October 17, 2025

Information about the authors

Meltsaykin Evgeniy Andreevich is Assistant, the Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: meltsaikinea@susu.ru.

Ushakov Andrey Leonidovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Research Officer at the Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: ushakoal@susu.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 17–23*

УДК 519.63

DOI: 10.14529/mmph250403

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ЕЕ ЖЕСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ПО КРАЯМ

Е.А. Мельцайкин, А.Л. Ушаков

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: ushakoal@susu.ru

Аннотация. Приведен алгоритм численного моделирования прогиба прямоугольной пластины на упругом основании при ее жестком закреплении по краям. Предложенный алгоритм асимптотически оптимальный по вычислительным затратам и основывается на методе итерационных расширений и предполагает использование маршевых методов. Асимптотическая оптимальность алгоритма экспериментально подтверждена при расчетах на ЭВМ.

Ключевые слова: численное моделирование; прогиб прямоугольной пластины.

Литература

1. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко, С.К. Годунов и др.; под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

2. Дьяконов, Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е.Г. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 271 с.

3. Алгазин, С.Д. О быстром решении основной бигармонической проблемы / С.Д. Алгазин, Г.Х. Соловьев // Труды МАИ. – 2019. – Выпуск № 108. – С. 15.
4. Ushakov, A.L. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of iterative Extensions / A.L. Ushakov, E.A. Meltsaykin // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 51–66.
5. Bank, R.E. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems / R.E. Bank, D.J. Rose // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, no. 5. – P. 792–829.
6. Капорин, И.Е. Модифицированный марш-алгоритм решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике / И.Е. Капорин // Разностные методы математической физики: сб. науч. тр. – М., 1980. – С. 11–21.
7. Капорин И.Е. Маршевый метод для системы с блочно-трехдиагональной матрицей / И.Е. Капорин // Численные методы линейной алгебры: сб. науч. тр. – М., 1982. – С. 63–72.
8. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, И.Е. Капорин, А.Б. Кучеров, Е.С. Николаев // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 3–12.
9. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
10. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 591 с.

Поступила в редакцию 17 октября 2025 г.

Сведения об авторах

Мельцайкин Евгений Андреевич – ассистент, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: meltsaikinea@susu.ru.

Ушаков Андрей Леонидович – доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: ushakoval@susu.ru.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОЦЕНИВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

А.Н. Привалов¹, А.В. Богомолов², Е.В. Ларкин³, Т.А. Акименко³

¹ Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Российская Федерация

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

³ Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация
E-mail: privalov.61@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты синтеза математического обеспечения априорного оценивания надежности программных средств вычислительных кластеров, учитывающего специфику их построения: параллельная обработка информации, высокая производительность, масштабируемость, повышенная отказоустойчивость, балансировка нагрузки, поддержка гетерогенных конфигураций. Разработанное математическое обеспечение основано на линеаризации исходного последовательного алгоритма и преобразовании его из линейной формы в параллельную. Линеаризация исходной структуры программного средства позволяет представить реализуемый им алгоритм в виде объединения последовательностей операторов, начинающихся и заканчивающихся в неисполнимых операторах. Процедура линеаризации включает этапы представления алгоритма, описывающего последовательную обработку данных, в виде графа; линеаризацию графа путем формирования графа реализаций с помощью матричной конкатенации матрицы его смежности; формирование параллельной структуры из линеаризованной модели за счет разделения последовательности операторов на фрагменты, число которых равно числу вычислительных кластеров. Получены математические зависимости расчета оценок вероятностей появления последовательностей операторов, не удовлетворяющих исходным требованиям к алгоритму, на основании законов распределений обрабатываемых данных и условий ветвления вычислительного процесса. Рассмотрены модели отказов, причинами которых являются ошибки синхронизации обработки данных в вычислительных кластерах. Поиск и оценивание вероятностей появления на линейной и параллельной форме ветвей, не удовлетворяющих требованиям технического задания на программное средство, позволило построить модель генератора отказов программных средств, обеспечивающего априорное оценивание времени наработки до отказа. Моделируемый поток отказов рассматривается как стохастическая сумма пуассоновских потоков, формируемых при кратном циклическом запуске вычислительного кластера. Время наработки программного средства на отказ рассчитывается на основании плотности распределения времени между отказами в пуассоновском потоке. Синтезированы математические модели генератора отказов и расчета оценки времени наработки программных средств на отказ, основанные на оценках вероятностей попадания параллельного вычислительного процесса в отказные ветви реализуемых алгоритмов. Приоритеты развития полученных результатов связываются с разработкой моделей отказов программных средств вычислительных кластеров вследствие структурных ошибок, допущенных при разработке параллельных программ.

Ключевые слова: линеаризация графа; ветвление алгоритма; распараллеливание вычислений; наработка на отказ; надежность программного средства; программное средство вычислительного кластера.

Введение

Интеллектуализация и цифровизация промышленных технологий предполагает существенное повышение производительности средств обработки данных [1–3]. Это может быть достигну-

то за счет внедрения универсальных вычислительных кластеров, объединяющих множество независимых компьютеров-узлов в единую систему с общей файловой системой, высокоскоростной коммуникационной сетью и распределенной архитектурой [4, 5].

Широкое применение вычислительных кластеров актуализирует вопросы обеспечения надежности их аппаратных и программных средств. Надежность аппаратных средств обеспечивается за счет совершенствования технологий их проектирования, изготовления и эксплуатации, и в настоящее время является хорошо изученным вопросом [6, 7]. Программные средства вычислительных кластеров обладают рядом отличительных особенностей, выделяющих их среди других программных средств: параллельная обработка информации, высокая производительность, масштабируемость, повышенная отказоустойчивость, балансировка нагрузки, поддержка гетерогенных конфигураций – поэтому вопросы обеспечения их надежности требуют изучения [8–11].

Разработка технологий повышения надежности программных средств требует наличия модели формирования, выявления и рискометрии ошибок [12]. Структура модели должна формироваться по результатам анализа алгоритма функционирования вычислительного кластера, но не должна быть идентичной ему, поскольку ошибки программирования означают, что разработанное программное средство не соответствует заданным техническим требованиям, а модель должна выявлять именно эти различия, приводящие к отказам [13–15].

Основным недостатком известных подходов к оцениванию надежности программных средств [16, 17] является то, что:

– они ориентированы на исследование надежности программных средств однопроцессорных ЭВМ;

– оценки параметров надежности рассчитываются на основе эмпирических данных о количестве ошибок, выявленных между двумя наблюдениями за работой тестируемой программы, а следовательно, на результат оценивания сильно влияют как период наблюдения, так и покрытие области пространства обрабатываемых данных подобластью данных, генерируемых тестирующей программой.

Вместе с тем цена ошибки при анализе надежности вычислительных кластеров является, как правило, высокой, поэтому задача разработки надежной программы сводится к выявлению и устранению потенциальных причин отказов на этапе разработки, до ввода программных средств в эксплуатацию. Априорное оценивание надежности программных средств вычислительных кластеров на этапе их разработки недостаточно распространено в инженерной практике. Поэтому проведено исследование, имевшее целью разработку математического обеспечения априорного оценивания надёжности программных средств вычислительных кластеров.

Схема вычислительного процесса

Программные средства вычислительных кластеров в процессе разработки проходят следующие этапы [18], на каждом из которых возможно появление ошибок, обусловленных человеческим фактором.

Этап 1. Разработка алгоритма, описывающего последовательную обработку данных в виде графа (рис. 1, а), структура которого описывается выражением $G = \{A, r\}$, где $A = \{a_0, a_1, \dots, a_j, \dots, a_{J+1}\}$ – множество вершин, каждая из которых является абстрактным аналогом оператора алгоритма; $r = [r_{i,j}]$ – матрица смежности размерности $(J+2)(J+2)$, описывающая связи между операторами алгоритма; $r_{i,j} = (a_i, a_j)$.

В общем случае алгоритм включает неисполнимые операторы «Начало» (a_0) и «Конец» (a_{J+1}), а также J исполнимых операторов, представляемых вершинами $a_1 \dots a_J$. Оператор «Начало» выполняет перезапуск алгоритма, а оператор «Конец» моделирует завершение обработки данных. Факт перезапуска алгоритма моделируется с помощью дуги (a_{J+1}, a_0), показанной на рис. 1, а пунктирной стрелкой. В матрице смежности элемент $r_{i,j} = (a_i, a_j)$ обозначает дугу, ведущую из a_i в a_j ; $1 \leq i, j \leq J+1$. Значение $r_{i,j} = \emptyset$, где \emptyset – пустой элемент, означает, что в структуре графа G дуга (a_i, a_j) отсутствует.

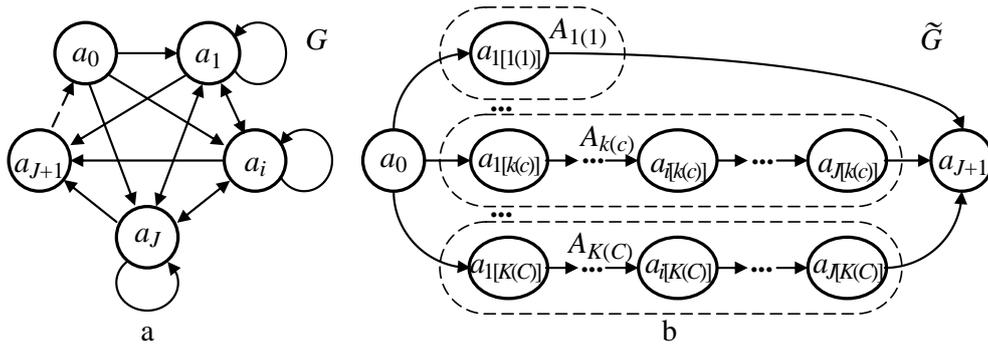


Рис. 1. Исходный последовательный алгоритм обработки данных в вычислительном кластере (а) и его линейризованная версия (б)

Корректно сконструированный последовательный алгоритм обладает свойствами:

- в оператор «Начало» можно войти только при запуске программы, то есть $r_{i,0} = \emptyset, 0 \leq i \leq J+1$;
- попадание в оператор «Конец» означает остановку исполнения программы то есть $r_{J+1,j} = \emptyset, 0 \leq j \leq J+1$;
- среди исполнимых операторов отсутствуют операторы, образующие автономные и полуавтономные циклы первого и второго рода, то есть в структуре графа G существует хотя бы один путь, ведущий из a_0 в a_i , и хотя бы один путь, ведущий из a_i в a_{J+1} , $0 \leq i \leq J$;
- каждый путь, ведущий из a_0 в a_{J+1} , включает хотя бы одну вершину подмножества $\{a_1, \dots, a_J\}$.

Невыполнение любого из этих свойств означает, что при составлении последовательного алгоритма допущена ошибка, которая является источником потенциальных отказов программных средств вычислительного кластера.

Этап 2. Линейризация графа G , для чего матрица его смежности r возводится в c -ю конкатенационную степень, при этом формируется граф реализаций (рис. 1, б)

$$\tilde{G} = I_0 \& \left[\bigcup_{c(\&)=1}^{C(\&)} r^{c(\&)} \right] \& I_{J+1},$$

где $r^{c(\&)}$ – операция возведения матрицы смежности в $c(\&)$ -ю конкатенационную степень; $\&$ – обозначение логической операции конкатенации; $I_{R,0} = (a_0, \emptyset, \dots, \emptyset)$, $I_{C,J+1} = (\emptyset, \dots, \emptyset, a_{J+1})^\theta$ – соответственно вектор-строка размерности $1 \times (J+2)$ и вектор-столбец размерности $(J+2) \times 1$; θ – обозначение операции транспонирования; $C(\&)$ – максимальное значение конкатенационной степени, в которую возводится матрица смежности r ; \emptyset – пустой элемент.

Возведение матрицы смежности в $c(\&)$ -ю конкатенационную степень выполняется в виде рекуррентной процедуры по правилам возведения алгебраической матрицы в степень, в которой операция перемножения членов заменена на операцию конкатенации, а операция сложения произведений – на операцию объединения конкатенаций, то есть

$$r^{c(\&)} = [r_{i,j}^{c(\&)-1}] \& [r_{i,j}] = \bigcup_{l=0}^{J+1} (r_{i,l}^{c(\&)-1} \& r_{l,j}) = [r_{i,j}^{c(\&)}],$$

где $\&$ – матричная конкатенация; $r^{c(\&)-1}$ – $[c(\&)-1]$ -я конкатенационная степень матрицы r ; $r_{i,j}^{c(\&)-1}$ – элемент матрицы $r^{c(\&)-1}$, находящийся на пересечении i -й строки и j -го столбца.

Конкатенация ранее построенной последовательности вершин с пустым элементом прерывает последовательность. Конкатенация $I_{R,0}$ с матрицей смежности производится по правилам умножения вектора-строки на матрицу, а матрицы смежности с вектором $I_{C,J+1}$ – по правилам умножения матрицы на вектор-столбец.

В общем случае граф G имеет вид, показанный на рис. 1, б. Вершины графа образуют линей-

ные (не содержащие циклов и ветвлений) последовательности $A_{k(c)}$ исполнимых операторов алгоритма, задействованных в $k(c)$ -й реализации. Последовательности имеют вид

$$A_{k(c)} = [a_{\nu[k(c)]}],$$

где $A_{k(c)}$ – векторы, состоящие из вершин $a_{i[k(c)]} \in A$, описывающие линейные последовательности операторов; $1 \leq \nu \leq J$, $a_{i[k(c)]}$ – вершины, размещенные в k -й реализации алгоритма на месте $i[k(c)]$; $i[k(c)]$ – индекс-функция, обозначающая номер i -й вершины в k -й линейной последовательности, получающейся в результате возведения матрицы r в $c(\&)$ -ю конкатенационную степень; $J[k(c)] = c$ – количество вершин в последовательности, равное конкатенационной степени, в которую возведена матрица r ; $K(c) = J^c$ – максимальное количество последовательностей длиной c , формируемых в результате возведения матрицы r в $c(\&)$ -ю конкатенационную степень.

Очевидно, что данные, обрабатываемые алгоритмом, являются дискретными и случайными. Поэтому они могут быть представлены в виде множества векторов

$$\prod_{m=1}^M D_m = \{ [D_{0(m)}], \dots, [D_{n(m)}], \dots, [D_{N(m)-1}] \} = \{ D_{0(\Sigma)}, \dots, D_{n(\Sigma)}, \dots, D_{N(\Sigma)-1} \},$$

где $D_m = D_{0(m)}, \dots, D_{n(m)}, \dots, D_{N(m)-1}$ – множество дискретных значений обрабатываемой величины; $D_{n(\Sigma)} = [D_{n(1)}, \dots, D_{n(m)}, \dots, D_{n(M)}]$ – обобщенный вектор обрабатываемых данных, описывающий соответствующую комбинацию; $n(\Sigma)$ – номер комбинации; \prod – групповое декартово произведение множеств; $N(\Sigma) = \prod_{m=1}^M N(m)$.

Фактор случайности значений дискретных данных, поступающих на обработку, описывается непрерывной плотностью распределения, которая представляется в виде взвешенной суммы δ -функций Дирака

$$f(\mathbf{D}) = \sum_{n(\Sigma)=0(\Sigma)}^{N(\Sigma)-1} p_{n(\Sigma)} \delta(\mathbf{D} - \mathbf{D}_{n(\Sigma)}),$$

где $p_{n(\Sigma)}$ – вероятность появления комбинации $\mathbf{D}_{n(\Sigma)}$; $\delta(\mathbf{D} - \mathbf{D}_{n(\Sigma)})$ – векторная δ -функция Дирака:

$$\delta(\mathbf{D} - \mathbf{D}_{n(\Sigma)}) = \delta(D_1 - D_{n(1)}) \cdot \dots \cdot \delta(D_m - D_{n(m)}) \cdot \dots \cdot \delta(D_M - D_{n(M)}), \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{D} - \mathbf{D}_{n(\Sigma)}) d\mathbf{D} = 1.$$

Если элементы вектора \mathbf{D} некоррелированы между собой, то для каждого элемента может быть определена плотность распределения

$$f_m(D_m) = \sum_{n(m)=0}^{N(m)-1} p_{n(m)} \delta(D_m - D_{n(m)}).$$

А общая плотность распределения в этом случае равна произведению плотностей отдельных случайных величин, то есть

$$f(\mathbf{D}) = \prod_{m=1}^M f_m(D_m).$$

Ветвление вычислительного процесса G определяется логическими условиями переключения из текущей вершины $a_{i[k(c)]} \in A_{k(c)}$ в смежные с ней вершины из подмножества $\{a_i\}$, $1 \leq i \leq J+1$. В свою очередь, если $a_{i[k(c)]} = a_i$, где $a_{i[k(c)]}$ – вершина, принадлежащая последовательности, сформированной в результате конкатенации, а a_i – вершина, принадлежащая подмножеству, то логические условия присоединения к последовательности $A_{k(c)}$ вершины из подмножества $\{a_i\}$ определяются вектором отношений

$$\Phi = [\varphi_{i,j}(\mathbf{D}) \leq 0],$$

где $\varphi_{i,j}(\mathbf{D})$ – некоторая функция от данных дискретного пространства $\tilde{\mathbf{D}}$, $1 \leq i \leq J+1$.

Принимая во внимание, что в программе отсутствуют полуавтономные циклы, в том числе «зависания», одно из условий отношения вектора Φ всегда выполняется, события выполнения отношений являются несовместными и составляют полную группу. С использованием отношений вектора Φ может быть получена оценка вероятности того, что при следующем выборе ветви программы к последовательности $A_{k(c)}$ будет добавлена вершина a_j , то есть $a_{i[k(c)]+1} = a_j$ будет равна

$$P\{i[k(c)] = i, i[k(c)] + 1 = j\} = \int \dots \int_{\varphi_{i,j}(\mathbf{D}) < 0} \dots f(\mathbf{D}) d\mathbf{D}.$$

Вероятность появления последовательности $A_{k(c)}$ определяется как произведение вероятностей:

$$P[A_{k(c)}] = \prod_{i[k(c)] = 1[k(c)]}^{J[k(c)]} P\{i[k(c)] = i, i[k(c)] + 1 = j\}.$$

Преобразование \tilde{G} графа G является эквивалентным, поэтому можно считать, что ошибок на этом этапе не возникает. Однако такое преобразование позволяет выявлять следующие ошибки в исходном алгоритме:

- наличие в структуре \tilde{G} последовательностей с «неправильной» (большей или меньшей длины, определенной решаемой с помощью алгоритма задачи) длиной;
- выпадение из последовательностей структуры \tilde{G} операторов, необходимых для решения задачи;
- наличие в последовательностях структуры \tilde{G} «неправильных» и/или «лишних» операторов;
- наличие в последовательностях со структурой \tilde{G} фрагментов с неправильным чередованием операторов, например, нарушающим отношение предшествования.

Для указанных последовательностей могут быть определены вероятности их появления в структуре \tilde{G} , а также общая вероятность отказа/сбоя программных средств при реализации алгоритма со структурой G :

$$P_{fail} = \sum_{\overline{k(c)}} P[\overline{k(c)}],$$

где $\overline{k(c)}$ – номера сбойных ветвей структуры \tilde{G} ; $P[\overline{k(c)}]$ – вероятности появления сбойных ветвей в структуре алгоритма, оцениваемые как вероятности появления последовательностей $A_{k(c)}$.

Этап 3. Формирование параллельной структуры из линеаризованной модели \tilde{G} .

Один из способов формирования параллельной структуры основан на разделении последовательности $A_{k(c)}$ на L фрагментов, реализуемых на L вычислительных кластерах (рис. 2, а).

Модель представляет собой сеть Петри

$$\Pi = \{\{\Pi_l\}, \{a_0, a_{J+1}\}, \{z_0, z_{J+1}\}, \Psi_{in}\{z_0, z_{J+1}\}, \Psi_{out}\{z_0, z_{J+1}\}\},$$

где Π_l – подсеть, описывающая последовательность операторов, исполняемых l -м вычислительным кластером, $1 \leq l \leq L$; $\{a_0, a_{J+1}\}$ – позиции, моделирующие неисполнимые операторы алгоритма; z_0, z_{J+1} – переходы, моделирующие соответственно начало и окончание параллельной обработки данных; $\Psi_{in}\{z_0, z_{J+1}\}$, $\Psi_{out}\{z_0, z_{J+1}\}$ – входная и выходная функция переходов; $\Psi_{in}(z_0) = a_0$; $\Psi_{out}(z_{J+1}) = a_{J+1}$; $\Psi_{in}(z_{J+1}) = \{\Pi_l\}$; $\Psi_{out}(z_0) = \{\Pi_l\}$.

В свою очередь, подсети Π_l , описывающие вычислительные кластеры (в индексе функции $l[k(c)]$ для краткости параметры $k(c)$ опущены), имеют вид

$$\Pi_l = \left\{ \left\{ a_{i(k,l)} \right\}, \left\{ z_{i(k,l)} \right\}, \Psi_{in} \left\{ z_{i(k,l)} \right\}, \Psi_{out} \left\{ z_{i(k,l)} \right\} \right\},$$

где $\{a_{i(k,l)}\}$ – множество позиций, $a_{i(k,l)} \in A_{k(c)}$; $\{z_{i(k,l)}\}$ – множество переходов;
 $\Psi_{in} [z_{i(k,l)}] = a_{i(k,l)}$; $\Psi_{out} [z_{i(k,l)}] = a_{i(k,l)} + 1$, $1(k,l) \leq i(k,l) \leq J(k,l) - 1$.

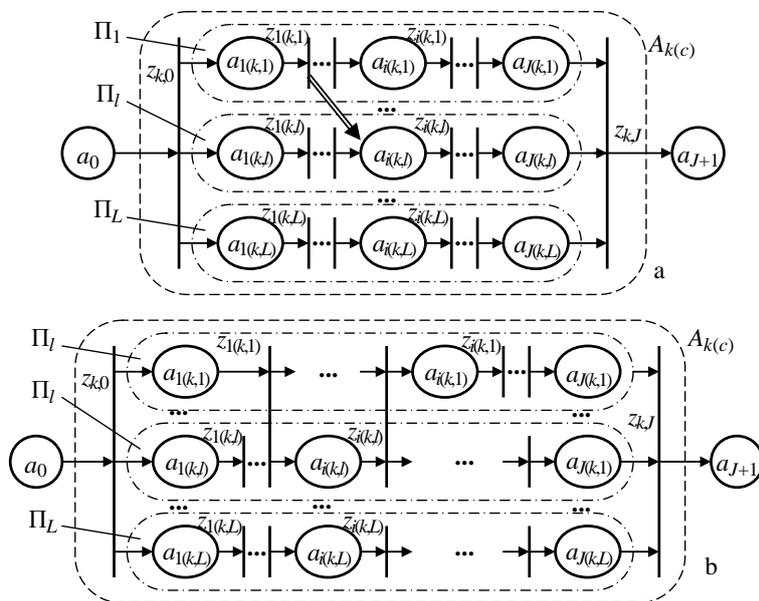


Рис. 2. Параллельная модель алгоритма

Сеть Петри описывает передачу управления от одного оператора к другому внутри вычислительных кластеров. Наряду с передачей управления внутри вычислительных кластеров естественным образом организуется передача данных, формируемых предшествующим оператором, всем последующим операторам. Простое разделение последовательности на фрагменты может породить ситуацию, когда данные, формируемые оператором m -го фрагмента, должны быть использованы операторами l -го фрагмента, а передача данных из m -го в l -ый вычислительный кластер не предусмотрена (случай при $m = 1$ показан на рис. 2, a двойной стрелкой). Эта типичная ошибка распараллеливания может привести к отказу при реализации последовательности $A_{k(c)}$ в целом, а следовательно, вероятность такого события входит в формулу для расчета p_{fail} как одно из слагаемых.

Ошибки подобного типа устраняются программно за счет введения промежуточной синхронизации вычислительного процесса, проводимой на переходе $z_{1(k,l)}$ (рис. 2, b). При промежуточной синхронизации

$$\Psi_{in} [z_{1(k,l)}] = \{a_{1(k,l)}, a_{i(k,l)-1}\}, \quad \Psi_{out} [z_{1(k,l)}] = \{a_{2(k,l)}, a_{i(k,l)}\}.$$

Такое введение входной и выходной функции на переходе $z_{1(k,l)}$ замедляет процесс кластерной обработки данных, но уменьшает вероятность отказов программных средств.

Генерация потока отказов

Модель генерации потока отказов в вычислительном кластере приведена на рис. 3. Алгоритм генерации представлен в виде графа

$$\Gamma = \{A, \rho\},$$

где $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ – множество вершин; α_0 – моделирует неисполнимый оператор «Начало»; α_1 – моделирует исполнимый оператор обработки данных в вычислительном кластере; α_2 – моделирует неисполнимый оператор «Конец»; $\rho = [\rho_{i,j}]$ – матрица смежности размерности 3×3 :

$$\rho = \begin{bmatrix} \emptyset & \rho_{0,1} & \emptyset \\ \emptyset & \rho_{1,1} & \rho_{1,2} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & (\alpha_0, \alpha_1) & \emptyset \\ \emptyset & (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}.$$

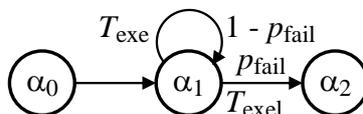


Рис. 3. Модель генерации потока отказов вычислительного кластера

При выполнении алгоритма в вычислительном кластере отказ происходит с вероятностью p_{fail} и обработка данных прекращается. С вероятностью $(1-p_{fail})$ программа завершается и перезапускается в штатном режиме. Исполнение оператора α_1 осуществляется за время, равное T_{exe} секунд.

Применение к матрице смежности ρ графа \tilde{G} , в котором $I_0 = (a_0, \emptyset, \emptyset)$, $I_2 = (\emptyset, \emptyset, a_2)^\theta$ дает последовательности исполнимых операторов, сведенные в таблицу.

Формирование последовательностей исполнимых операторов

c	Последовательности операторов	Вероятность появления	Время до отказа
1	–	–	–
2	a_0, a_1, a_2	p_{fail}	T_{exe}
3	a_0, a_1, a_1, a_2	p_{fail}^2	$2T_{exe}$
...			
k	$a_0, a_1, \dots, a_1, \dots, a_1, \dots, a_2$ $c-1$	p_{fail}^{c-1}	$(c-1)T_{exe}$
...			
K	$a_0, a_1, \dots, a_1, \dots, a_1, \dots, a_2$ $C-1$	p_{fail}^{C-1}	$(C-1)T_{exe}$

Из таблицы следует, что поток отказов может рассматриваться как стохастическая сумма потоков, формируемых при одно-, двух-, трех- и более кратном циклическом запуске вычислительного кластера. В соответствии с теоремой Б.И. Григелиониса, такой поток стремится к пуассоновскому [19]. Плотность распределения времени между отказами в пуассоновском потоке равна [20–22]

$$f_{bf}(t) \cong T_{bf}^{-1} e^{-tT_{bf}^{-1}},$$

где T_{bf} – время наработки программного средства на отказ, оценка которого в предельном случае при $C \rightarrow \infty$ рассчитывается по зависимости

$$T_{bf} = T_{exe} p_{fail}.$$

Отметим, что при эксплуатации программных средств вычислительных кластеров ошибки, приводящие к отказам, как правило, устраняются [23–25]. Это означает, что количество сбойных ветвей в графе \tilde{G} уменьшается, а, следовательно, и уменьшается вероятность p_{fail} – время наработки системы до отказа при этом увеличивается.

Заключение

Таким образом, разработано математическое обеспечение оценивания надежности программных средств вычислительных кластеров, основанное на линеаризации исходного последовательного алгоритма и преобразовании его из линейной формы в параллельную. Поиск и оценивание вероятностей появления на линейной и параллельной форме ветвей, не удовлетворяющих требованиям технического задания на программное средство, позволило построить модель генератора отказов программных средств и обеспечить априорное оценивание времени наработки до

отказа. Дальнейшее развитие исследований связывается с разработкой моделей отказов программных средств вычислительных кластеров вследствие структурных ошибок, допущенных при разработке параллельных программ.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 25-29-20177.

Литература

1. Fadali, M.S. Digital Control Engineering: Analysis and Design / M.S. Fadali, A. Visioli. – Amsterdam, Elsevier Inc., 2013. – 552 p.
2. Larkin, E. Digital Control of Continuous Production with Dry Friction at Actuators / E. Larkin, A. Privalov, A. Bogomolov, T. Akimenko // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2022. – Vol. 232. – P. 427–436.
3. Larkin, E. Digital Control by Robot Manipulator with Improved Rigidity / E. Larkin, A. Bogomolov, A. Privalov // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2023. – Vol. 329. – P. 45–59.
4. Гримм, Р. Параллельное программирование на современном языке C++ / Р. Гримм. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 616 с.
5. Chapman, B. Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming (Scientific and Engineering Computation) / B. Chapman, G. Jost, R. Van der Pas. – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press., 2008. – 353 p.
6. Naes, A. System Reliability Analysis by Enhanced Monte Carlo Simulation / A. Naes, B.J. Leira, O. Batsevych // Structural Safety. – 2009. – Vol. 31. – P. 349–355.
7. Sánchez-Silva, M. Reliability and Life-Cycle Analysis of Deteriorating Systems / M. Sánchez-Silva, G.-A. Klutke. – Switzerland: Springer, 2016. – 355 p.
8. Shatnavi, O. Measuring Commercial Software Operational Reliability. An Interdisciplinary Modelling Approach / O. Shatnavi // Eksploatacia i Niezawodnose – Maintenance and reliability. – 2014. – Vol. 16, no. 4. – P. 585–594.
9. Богомолов, А.В. Математические модели программных отказов цифровых систем управления / А.В. Богомолов, Е.В. Ларкин, А.Н. Привалов // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. – 2025. – № 1. – С. 1–9.
10. Привалов, А.Н. Моделирование надёжности программных компонентов киберфизических систем / А.Н. Привалов, А.В. Богомолов, Е.В. Ларкин // Программные продукты и системы. – 2025. – № 1. – С. 47–54.
11. Tobin, D. Model of Organization of Software Testing for Cyber-Physical Systems / D. Tobin, A. Bogomolov, M. Golosovskiy // Cyber-Physical Systems: Modelling and Industrial Application. Cham: Springer, 2022. – P. 51–60.
12. Анализ характера изменений программ и поиск неисправленных фрагментов кода / М.С. Арутюнян, Г.С. Иванов, В.Г. Варданян и др. // Труды Института системного программирования РАН. – 2019. – Т. 31, № 1. – С. 49–58.
13. Молчанов А.С. Испытания интеллектуальных систем и комплексов воздушной разведки с использованием цифровых портретов типовых объектов воздушной разведки / А.С. Молчанов, В.А. Коломоец // Наукоемкие технологии. – 2025. – Т. 26, № 3. – С. 20–31.
14. Кулямин, В.В. Конструирование программных систем, нацеленное на обеспечение безопасности / В.В. Кулямин, А.К. Петренко, Е.А. Рудина // Труды Института системного программирования РАН. – 2024. – Т. 36, № 5. – С. 7–16.
15. Математическое обеспечение иерархического цифрового управления сложным технологическим объектом / Е.В. Ларкин, А.В. Богомолов, А.Н. Привалов, Т.А. Акименко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2024. – Т. 16, № 4. – С. 43–55.
16. Barack O. Assessment and Prediction of Software Reliability in Mobile Applications / O. Barack, L. Huang // Journal of Software Engineering and Applications. – 2020. – Vol. 13, no. 9. – P. 179–190.
17. Ларкин, Е.В. Математическое моделирование отказов программного обеспечения / Е.В. Ларкин, А.В. Богомолов, А.Н. Привалов // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2025. – Т. 18, № 3. – С. 73–86.

18. Reliability of Robot's Controller Software / E. Larkin, T. Akimenko, A. Bogomolov, V. Sharov // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2023. – Vol. 14214. – P. 289–299.
19. Григелионис, Б.И. О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому / Б.И. Григелионис // *Теория вероятностей и ее применения*. – 1963. – Т. 8, № 2. – С. 189–194.
20. Bielecki, T.R. Conditional Markov Chains: Properties, Construction and Structured Dependence / T.R. Bielecki, J. Jakubowski, M. Niewęglowski // *Stochastic Processes and their Applications*. – 2017. – Vol. 127, no. 4. – P. 1125–1170.
21. Lu, H. A Functional Central Limit Theorem for Markov Additive Arrival Processes and Its Applications to Queueing Systems / H. Lu, G. Pang, M. Mandjes // *Queueing Systems*. – 2016. – Vol. 84, no. 3. – P. 381–406.
22. Kobayashi, H. Probability, Random Processes and Statistical Analysis / H. Kobayashi, B.L. Marl, W. Turin. – Cambridge, University Press, 2012. – 812 p.
23. Dubrova, E. Fault-Tolerant Design / E. Dubrova. NY: Springer Science+Business Media, 2013. – 185 p.
24. Сенсорные сети контроля состояния авиационной техники при испытаниях и эксплуатации / Е.С. Солдатов, А.В. Богомолов, Е.В. Ларкин, А.С. Солдатов // *Авиакосмическое приборостроение*. – 2024. – № 2. – С. 61–68.
25. Голосовский, М.С. Алгоритм настройки систем нечёткого логического вывода на основе статистических данных / М.С. Голосовский, А.В. Богомолов, Д.С. Тобин // *Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы*. – 2023. – № 1. – С. 1–9.

Поступила в редакцию 18 сентября 2025 г.

Сведения об авторах

Привалов Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор, директор института передовых информационных технологий, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: privalov.61@mail.ru.

Богомолов Алексей Валерьевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a.v.bogomolov@gmail.com.

Ларкин Евгений Васильевич – доктор технических наук, профессор, профессор-консультант, Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: elarkin@mail.ru

Акименко Татьяна Алексеевна – кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Российская Федерация, e-mail: tantan72@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 24–34*

DOI: 10.14529/mmph250404

MATHEMATICAL SUPPORT FOR ASSESSING THE RELIABILITY OF SOFTWARE FOR COMPUTING CLUSTERS

A.N. Privalov¹, A.V. Bogomolov², E.V. Larkin³, T.A. Akimenko³

¹ Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, Russian Federation

² Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

³ Tula State University, Tula, Russian Federation

E-mail: privalov.61@mail.ru

Abstract. The article presents the results of the synthesis of mathematical support for an a priori reliability assessment of software for computing clusters, taking into account the specifics of their design: parallel information processing, high performance, scalability, increased fault tolerance, load balancing,

and support for heterogeneous configurations. The developed mathematical support is based on the linearization of the original sequential algorithm and its transformation from a linear form to a parallel one. Linearization of the original structure of the software allows representing the algorithm it implements as a union of sequences of operators that begin and end in non-executable operators. The linearization procedure includes the following stages: representing the algorithm describing sequential data processing as a graph; linearization of the graph by forming a graph of implementations using matrix concatenation of its adjacency matrix; formation of a parallel structure from the linearized model by dividing the sequence of operators into fragments, the number of which is equal to the number of computing clusters. The paper presents the mathematical dependencies for calculating probability estimates for the occurrence of operator sequences that do not satisfy the initial requirements for the algorithm, based on the distribution laws of the processed data and the branching conditions of the computational process. It considers failure models caused by data processing synchronization errors in computing clusters. The study also involved searching for and estimating the probabilities of branches occurring in linear and parallel forms that do not meet the requirements of the software tool's technical specifications. As a result, we constructed a model of a software failure generator that provides an a priori estimate of the mean time to failure. The simulated failure flow is considered as a stochastic sum of Poisson flows formed during multiple cyclic launches of the computing cluster. The mean time between failures of the software is calculated based on the density of the distribution of the time between failures in the Poisson flow. Mathematical models of the failure generator and the calculation of the mean time between failures are synthesized, based on estimates of the probabilities of the parallel computing process entering the failure branches of the implemented algorithms. The priorities for the development of the obtained results are associated with the development of models of software failures of computing clusters due to structural errors made during the development of parallel programs.

Keywords: graph linearization; algorithm branching; parallel computing; mean time between failures; software reliability; reliability modeling; computing cluster software.

References

1. Fadali M.S., Visioli A. *Digital Control Engineering: Analysis and Design*. Amsterdam: Elsevier Inc, 2013, 552 p.
2. Larkin E., Privalov A., Bogomolov A., Akimenko T. Digital Control of Continuous Production with Dry Friction at Actuators. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2022, Vol. 232, pp. 427–436.
3. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A. Digital Control by Robot Manipulator with Improved Rigidity. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2023, Vol. 329, pp. 45–59.
4. Grimm R. *Parallel Programming in the Modern C++ Language*. Moscow: DMK Press, 2022. 616 p.
5. Chapman B., Jost G., Van der Pas R. *Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming (Scientific and Engineering Computation)*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press., 2008, 353 p.
6. Naes A., Leira B.J., Batsevych O., System Reliability Analysis by Enhanced Monte Carlo Simulation. *Structural Safety*, 2009, Vol. 31, pp. 349–355.
7. Sánchez-Silva M., Klutke G.-A. *Reliability and Life-Cycle Analysis of Deteriorating Systems*. Switzerland: Springer, 2016. 355 p.
8. Shatnavi O. Measuring Commercial Software Operational Reliability. An Interdisciplinary Modeling Approach. *Eksploatacia i Niezawodnose- Maintenance and reliability*, 2014, Vol. 16, no. 4, pp. 585–594.
9. Bogomolov A.V., Larkin E.V., Privalov A.N. Mathematical Models of Software Failures of Digital Control Systems. *Scientific and Technical Information. Series 2: Information Processes and Systems*, 2025, no. 1, pp. 1–9. (in Russ.).
10. Privalov A.N., Bogomolov A.V., Larkin E.V. Reliability Modeling of Software Components of Cyber-Physical Systems. *Software Products and Systems*, 2025, no. 1, pp. 47–54. (in Russ.).
11. Tobin D., Bogomolov A., Golosovskiy M. Model of Organization of Software Testing for Cyber-Physical Systems. *Cyber-Physical Systems: Modeling and Industrial Application*. Cham: Springer, 2022, pp. 51–60.

12. Arutyunyan M.S., Ivanov G.S., Vardanyan V.G., Aslanyan A.K., Avetisyan A.I., Kurmangaleev Sh.F. Analysis of the Nature of Program Changes and Search for Uncorrected Code Fragments. *Proceedings of the Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences*, 2019, Vol. 31, no. 1, pp. 49–58. (in Russ.).
13. Molchanov A.S., Kolomoets V.A. Testing Intelligent Systems and Aerial Reconnaissance Complexes using Digital Portraits of Typical Aerial Reconnaissance Objects. *Science-Intensive Technologies*, 2025, Vol. 26, no. 3, pp. 20–31. (in Russ.).
14. Kulyamin V.V., Petrenko A.K., Rudina E.A. Design of Software Systems Aimed at Ensuring Security. *Proceedings of the Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences*, 2024, Vol. 36, no. 5, pp. 7–16. (in Russ.).
15. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., Akimenko T.A. Mathematical Support for Hierarchical Digital Control of a Complex Technological Object. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2024, Vol. 16, no. 4, pp. 43–55. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph240406
16. Barack O., Huang L. Assessment and Prediction of Software Reliability in Mobile Applications. *Journal of Software Engineering and Applications*, 2020, Vol. 13, no. 9, pp. 179–190.
17. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N. Mathematical Modeling of Software Failures. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming*, 2025, Vol. 18, no. 3, pp. 73–86. (in Russ.).
18. Larkin E., Akimenko T., Bogomolov A., Sharov V. Reliability of Robot's Controller Software. *Lecture Notes in Computer Science*, 2023, Vol. 14214, pp. 289–299.
19. Grigelionis B.I. On the Convergence of Sums of Step Random Processes to a Poisson Process. *Probability Theory and Its Applications*, 1963, Vol. 8, no. 2, pp. 189–194.
20. Bielecki, T.R., Jakubowski, J., Niewęglowski, M. Conditional Markov Chains: Properties, Construction, and Structured Dependence. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2017, Vol. 127, no. 4, pp. 1125–1170.
21. Lu H., Pang G., Mandjes M. A Functional Central Limit Theorem for Markov Additive Arrival Processes and its Applications to Queuing Systems. *Queuing Systems*, 2016, Vol. 84, no. 3, pp. 381–406.
22. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W. *Probability, Random processes and statistical analysis*. Cambridge: University Press, 2012, 812 p.
23. Dubrova E. *Fault-Tolerant Design*. NY: Springer Science+Business Media, 2013, 185 p.
24. Soldatov E.S., Bogomolov A.V., Larkin E.V., Soldatov A.S. Sensor networks for Monitoring the Condition of Aircraft Equipment during Testing and Operation. *Aerospace instrumentation*, 2024, no. 2, pp. 61–68. (in Russ.).
25. Golosovsky M.S., Bogomolov A.V., Tobin D.S. Algorithm for Tuning Fuzzy Logical Inference Systems Based on Statistical Data. *Scientific and technical information. Series 2: Information processes and systems*, 2023, no. 1, pp. 1–9. (in Russ.).

Received September 18, 2025

Information about the authors

Privalov Aleksandr Nikolaevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Director of the Institute of Advanced Information Technologies of Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, Russian Federation, e-mail: privalov.61@mail.ru.

Bogomolov Aleksey Valerievich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Leading Researcher of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: a.v.bogomolov@gmail.com.

Larkin Eugeny Vasilyevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Professor-Consultant of Tula State University, Tula, Russian Federation, e-mail: elarkin@mail.ru.

Akimenko Tatyana Alekseevna is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of Tula State University, Tula, Russian Federation, e-mail: tantan72@mail.ru.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

М.А. Сагадеева, Д.Ф. Абызгареев

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
e-mail: sagadeevama@susu.ru

Аннотация. Рассматривается построение оптимального управления решениями стохастической нестационарной системы леонтьевского типа. Нестационарность системы взята в некотором усредненном виде и вынесена как сомножитель в правой части операторно-дифференциального уравнения с вырожденной матрицей коэффициентов при производной. При этом стохастическая составляющая предполагается в начальном условии. Используя линейность рассматриваемой системы, мы расщепляем ее на детерминированную и стохастическую задачи. Далее на основе алгоритмов, полученных ранее для детерминированной нестационарной задачи, находим оптимальное управление. Основная цель данной статьи – описать вычислительный эксперимент, иллюстрирующий результаты о разрешимости данной задачи. Статья кроме введения, заключения и списка литературы содержит две части. В первой части содержится информация о разрешимости поставленной задачи, а во второй – приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: уравнения леонтьевского типа; производная Нельсона – Гликлиха; пространство дифференцируемых «шумов»; вычислительный эксперимент.

Введение

Рассмотрим в \mathbb{R}^n динамическую балансовую модель экономики [1] в виде нестационарной системы

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где L , M и B – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Здесь $a: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы, а матрица M – (L, p) -регулярна (т. е. существует комплексная $\mu \in \mathbb{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, и ∞ является полюсом $(\mu L - M)^{-1}$ порядка $p = 0, n-1$). Вектор-функция $f: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ описывает внешние воздействия на систему, а вектор-функция $u: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ описывает управляющее воздействие на систему.

Уравнение (1) в силу условия $\det L = 0$ нельзя разрешить относительно производной и, следовательно, при для решения таких систем не применимы классические методы решения. Системы, не разрешенные относительно производной, часто встречаются при описании экономических процессов [1] в силу невозможности запастись определенными ресурсами. Для того чтобы решить систему вида (1), необходимо выполнение некоторых специфических условий [2, 3]. На сегодняшний день подобные вырожденные системы не имеют общепринятого названия (см., например, [2–4]). В работе [4] такие системы предложено называть системами леонтьевского типа, в честь их прототипа – знаменитой балансовой модели В.В. Леонтьева «затраты – выпуск» [1]. Кроме того, такие модели часто имеют нестационарный характер, то есть входящие в них матрицы зависят от времени [5]. В данной работе будем предполагать, что зависимость от времени элементов матриц может быть некоторым образом усреднена и представлена в виде умножения матрицы при производной на некоторую функцию времени. Дополнительно отметим, что системы леонтьевского типа, являющиеся частным случаем линейных уравнений соболевского типа [6–8], вызывают большой интерес у исследователей в связи с их различными приложениями, которые находят применение не только в экономике, но и в технических системах [9, 10].

Отметим, что вырожденная система (1) разрешима не для любых начальных условий [11]. Поэтому при численных решениях для таких систем удобнее использовать начальное условие Шоултера–Сидорова [12]

$$\left[(\nu L - M)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - \xi_0) = 0 \quad \text{при } \nu \in \mathbb{C} : \det(\nu L - M) \neq 0, \quad (2)$$

которое позволяет избавиться от необходимости согласования начальных данных. Дополнительно здесь будем полагать, что начальные условия являются случайным вектором $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Для решения задачи оптимального управления решениями задачи Шоултера – Сидорова (2) для системы леонтьевского типа (1) требуется найти функцию $\hat{u} \in U_{ad}$ (оптимальное управление), удовлетворяющую условию

$$J(\hat{u}) = \min_{u \in U_{ad}} J(u);$$

для некоторого функционала $J(u)$ и такое, что $x(\hat{u})$ почти всюду на $(0, \tau)$ удовлетворяет задаче (1), (2). Здесь множество U_{ad} является некоторым выпуклым и компактным подмножеством допустимых управлений в пространстве управлений U . Функционал штрафа, вид которого будет приведен ниже, по сути описывает меру расхождения планируемого (наблюдаемого) поведения системы $z : [0, \tau] \rightarrow Z$ и расчетного поведения системы $x(t)$, полученного с помощью управления $u : [0, \tau] \rightarrow U$. Пространство Z содержит не все параметры состояния системы $x(t)$, а только те, для которых есть информация (планируемое состояние системы).

Для систем леонтьевского типа задача оптимального управления исследовалась, например, в работах [11, 13, 14]. Задача оптимального управления решениями нестационарных систем леонтьевского типа в детерминированном случае исследована в работе [15]. Существование алгоритма решения данной задачи и сам алгоритм приведены в [16]. В силу того, что в условии (2) присутствует случайная составляющая, для решения поставленной задачи нам понадобится провести исследование в стохастическом случае [17]. Основная цель данной статьи – описать вычислительный эксперимент, иллюстрирующий результаты о разрешимости данной задачи для одной стохастической нестационарной модели Леонтьева.

Решение задачи оптимального управления

Обозначим множество матриц размера $n \times m$ символом $M_{n \times m}$. Пусть $L, M \in M_{n \times n}$ – квадратные матрицы порядка n . Следуя [7,10], будем называть множества $\rho^L(M) = \{ \mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M)^{-1} \neq 0 \}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ L -резольвентным множеством и L -спектром матрицы M соответственно. Нетрудно показать [7,10], что либо $\rho^L(M) = \emptyset$, либо L -спектр матрицы M состоит из конечного числа точек. Кроме того, заметим, что множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ не изменяются при переходе к другим базисам. Здесь и далее будем предполагать, что $\rho^L(M) \neq \emptyset$.

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим матричнозначные функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ и будем их называть соответственно L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами матрицы M . Также в силу результатов [7,10], L -резольвента, правая и левая L -резольвенты матрицы M голоморфны в $\rho^L(M)$. Ортогональные проекторы [7,10], расщепляющие пространство \mathbb{R}^n , имеют вид

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu, \quad (3)$$

где контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ такой, что $\gamma \subset \rho^L(M)$ и $D \supset \sigma^L(M)$. Сужение матриц L и (M) на подпространства $\ker P$ и $\text{im } P$ обозначим L_k (M_k), $k=0,1$ ($k=0$ для сужений на $\ker P$ и соответственно $k=1$ для сужений на $\text{im } P$). При условии (L, p) -регулярности матрицы M ($p = \overline{0, n-1}$) существуют

обратные матрицы L_1^{-1} и M_0^{-1} на сужениях пространства R^n .

Рассмотрим задачу Шоултера–Сидорова

$$P(\xi(0) - \xi_0) = 0 \quad (4)$$

для неоднородного нестационарного стохастического уравнения

$$L \dot{\xi}(t) = a(t)M\xi(t) + B\zeta(t), \quad (5)$$

где $\dot{\xi}$ – производная Нельсона–Гликлиха [18], а $\zeta(t)$ – стохастический процесс внешнего воздействия на систему. Здесь $\xi(t) = E\xi(t) + \eta(t)$ и соответственно $E\eta(t) = 0$. Опишем пространства дифференцируемых «шумов», где данное условие выполнено автоматически и существуют производные стохастических процессов в смысле Нельсона–Гликлиха.

Пусть $\Omega \equiv \langle \Omega, A, P \rangle$ – полное вероятностное пространство с вероятностной мерой P , ассоциированное с σ -алгеброй A подмножеств множества Ω , а $R = \langle R, B, \mu_L \rangle$ – множество действительных чисел со стандартной борелевой σ -алгеброй B и мерой Лебега μ_L . Измеримое отображение $\xi: \Omega \rightarrow R$ называется случайной величиной. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $L_2 = L_2(R) = \{ \xi: E\xi = 0, D(\xi) < +\infty \}$ со скалярным произведением $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = E(\xi_1 \cdot \xi_2)$ и нормой $\|\xi\|_{L_2}^2 = D\xi$.

Возьмем множество $\mathfrak{T} \subset R$, отображение $\eta: \mathfrak{T} \rightarrow L_2$ задает стохастический процесс. Будем говорить, что стохастический процесс $\eta = \eta(t)$ непрерывен на интервале \mathfrak{T} , если п. н. (почти наверное) все его траектории непрерывны. Множество непрерывных стохастических процессов $\eta: \mathfrak{T} \rightarrow L_2$ образуют банахово пространство со стандартной суп-нормой, которое мы обозначим символом $C(\mathfrak{T}; L_2)$. Введем в рассмотрение пространства дифференцируемых «шумов» $C^\ell(\mathfrak{T}; L_2)$ ($\ell \in N$) случайных процессов из $C(\mathfrak{T}; L_2)$, чьи траектории п. н. дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху [17, 18] на \mathfrak{T} до порядка ℓ включительно.

Возьмем n случайных процессов $\{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)\}$ и зададим n -мерный случайный процесс формулой $\Theta = \sum_{j=1}^n \eta_j(t) e_j$, где e_j – орты в пространстве R^n , $j = \overline{1, n}$. Очевидно, что п. н. все его траектории непрерывны, если $\eta_j \in C(\mathfrak{T}; L_2)$ ($j = \overline{1, n}$) и непрерывно дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху до порядка ℓ включительно, если $\eta_j \in C^\ell(\mathfrak{T}; L_2)$ для $j = \overline{1, n}$. По аналогии с предыдущим введем в рассмотрение пространства непрерывных $C(\mathfrak{T}; L_2(R^n))$ и непрерывно дифференцируемых $C^\ell(\mathfrak{T}; L_2(R^n))$ n -мерных «шумов».

Дифференцируемый процесс $\xi(t)$ будем называть решением уравнения (5), если он на \mathfrak{T} почти наверное обращает его в тождество. Решение уравнения (5) будем называть решением задачи Шоултера–Сидорова (4), (5), если оно дополнительно удовлетворяет условию (4). В силу результатов [17] это решение существует для неоднородности нужной степени гладкости и имеет вид

$$\xi(t) = X(t, 0)\xi_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}B\zeta(s)ds - \sum_{k=0}^p (M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \frac{(E_n - Q)B\zeta(t)}{a(t)}, \quad (6)$$

где E_n – единичная матрица порядка n , символ $\frac{\partial}{\partial t}$ означает производную Нельсона–Гликлиха и разрешающий поток операторов вида $X(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp \left(\mu \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right) d\mu$ для $s < t$ и кон-

тура $\gamma \subset C$ как для проекторов в (3).

Задача (4), (5) в силу линейности эквивалентна детерминированной

$$\begin{cases} L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Bu(t), \\ P(x(0) - x_0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

и стохастической

$$\begin{cases} L\dot{\eta}(t) = a(t)M\eta(t), \\ P(\eta(0) - \eta_0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

задачам. Здесь $x(t) = \mathbf{E}\xi(t)$, $\eta(t) = \xi(t) - \mathbf{E}\xi(t)$, $x_0 = \mathbf{E}\xi_0$, $\eta_0 = \xi_0 - \mathbf{E}\xi_0$. И решения этих задач можно получить с помощью (6), принимая во внимание, что производная Нельсона–Гликлиха на обычных функциях совпадает со стандартной производной. Отметим, что управляющее воздействие осталось только в детерминированной задаче (7), а стохастическая задача (8) по сути описывает влияние помех, зарегистрированных в состояниях системы в начальный момент времени.

Построим пространство $H^{p+1}(Y) = \{v \in L_2((0, \tau), Y) : v^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), Y), p = \overline{0, n-1}\}$, которое является гильбертовым в силу гильбертовости Y со скалярным произведением $[v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_Y dt$. Пусть Z – гильбертово пространство, а оператор $G: X \rightarrow Y$ линеен и непрерывен. Построим функционал штрафа

$$J(u) = J(x(u)) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Gx^{(q)}(u, t) - z^{(q)}(t)\|_Z^2 dt, \quad (9)$$

где G – матрица размерности n описывает выбор параметров системы, по которым будет задаваться план; вектор-функция $z: [0, \tau] \rightarrow Z$ описывает планируемую динамику состояний, к которой приводят систему с помощью управления $u: [0, \tau] \rightarrow U$ (U – некоторое гильбертово пространство). Заметим, что если $x \in H^1(X)$, то $z \in H^1(Z)$. Так как U – гильбертово, то и пространство $H^{p+1}(U)$ также является гильбертовым по построению. Выделим множество допустимых управлений U_{ad} , которое является замкнутым и выпуклым подмножеством в пространстве $H^{p+1}(U)$.

Вектор-функцию $\hat{u} \in H^{p+1}(U)$ назовем *оптимальным управлением* решениями задачи (7), если

$$J(\hat{u}) = \min_{u \in U_{ad}} J(u) \quad (10)$$

для функционала (9), где функции $x(u) \in H^1(X)$ и $u \in U_{ad}$ таковы, что $x(u) \in H^1(X)$ является решением задачи (7). Существование оптимального управления решениями задачи (7) для любых $z \in H^1(Z)$ и $x_0 \in \mathbf{R}^n$ показано в [15]. В силу результатов [17] ясно, что и для задачи (4), (5) оптимальное управление существует и может быть найдено по алгоритму, описанному в [16].

Оптимальное управление решениями одной нестационарной модели Леонтьева

Рассмотрим знаменитую балансовую модель Леонтьева [1] в виде конкретной интерпретации системы (5). В этой модели матрицы L и B имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{22}{35} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{13}{15} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Сформулируем результат о разрешимости задачи оптимального управления решениями стохастической нестационарной модели Леонтьева.

Теорема. Пусть матрицы L, M имеют вид (11), функция $a \in C^1((0, \tau); \mathbb{R}_+)$. Тогда для любого случайного вектора $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$ существует единственное оптимальное управление задачи (4), (5), (10) с функционалом (9).

Справедливость данного утверждения следует из результатов [15, 17] в силу расщепления задачи (4), (5) на задачи (7) и (8) и с учетом того, что в [19] показано, что матрица M является $(L, 0)$ -регулярной.

Найдем оптимальное управление решениями задачи (4), (5). Для этого зададим

$$z(t) = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ 2 + t - 3t^2 \\ 2t + t^3 \end{pmatrix} \text{ и вид } u(t) = \begin{pmatrix} C_{01} + C_{11}t + C_{21}t^2 \\ C_{02} + C_{12}t + C_{22}t^2 \\ C_{03} + C_{13}t + C_{23}t^2 \end{pmatrix}, \quad C_{ij} \in \mathbb{R},$$

матрицы $G = B = E_3$, функцию $a(t) = 2t$, длину отрезка оптимизации $\tau = 2$. Начальные значения возьмем в виде $\xi_0 = (0, 5\omega; 0, 3\omega; 0)^T$, где случайная величина ω равномерно распределена на отрезке $[1; 2]$.

Для нахождения оптимальных значений подставим $u(t)$ в (6) вместо $\zeta(t)$ и для нашей модели Леонтьева получим вид решения

$$x(t) = -\frac{\langle u(t), \phi_0 \rangle}{a(t)} M_0^{-1} \phi_0 + \sum_{k=1}^2 \left[\exp\left(\mu_k \int_0^t a(\zeta) d\zeta \right) x_{0k} \phi_k + \int_0^t \exp\left(\mu_k \int_s^t a(\zeta) d\zeta \right) \langle u(s), \phi_k \rangle ds \cdot \phi_k \right],$$

где $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ – базисные векторы системы Леонтьева, $\mu_1 = 0, 2454$, $\mu_2 = 2, 0464$ – точки относительного L -спектра матрицы M (подробнее см. в [19]). Далее это решение подставляем в функционал $J(u)$ и находим его минимум по коэффициентам C_{ij} ($i = 0, 1, 2$; $j = 1, 2, 3$).

Используя алгоритм, описанный в [16], получим

$$\hat{u}(t) = \begin{pmatrix} 5,469 + 111,74t - 102,0211t^2 \\ 48,3447 - 87,9749t + 102,2322t^2 \\ 42,4305 + 300,6506t + 319,5172t^2 \end{pmatrix}$$

и значение функционала $J = J(\hat{u}) = 2,3789$. Результаты приведены в таблице.

Сводные характеристики решения

Компонента	u_1	u_2	u_3
J_i	$4,7369 \times 10^{-1}$	$2,6741 \times 10^{-1}$	1,6378
Макс. отклонение	0,023	0,019	0,031

Заметно, что третья компонента отличается по полученным характеристикам. Это может быть объяснено тем, что для нее взяли нулевое начальное значение.

Сравнение графиков компонент $\hat{u}(t)$ и $z(t)$ приведены на рис. 1–3.

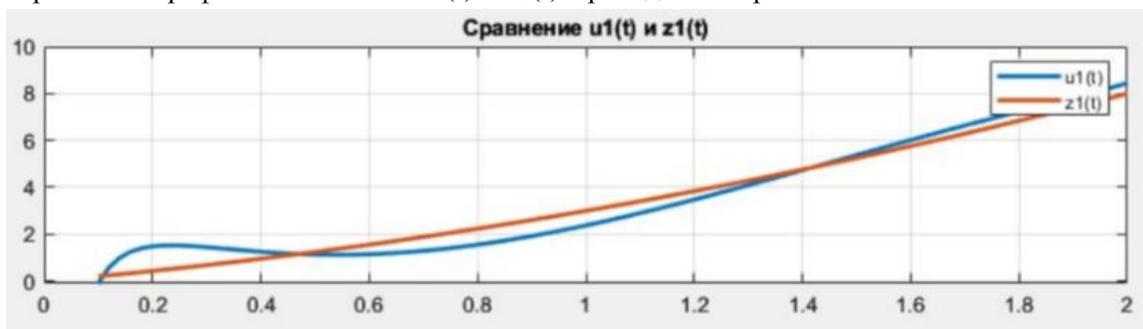


Рис. 1. Сравнение $\hat{u}_1(t)$ и $z_1(t)$, максимальное отклонение 0,023 при $t = 1,12$

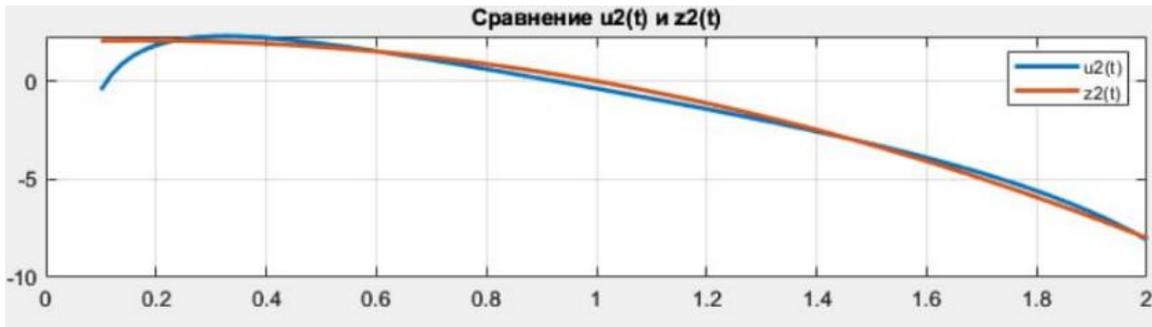


Рис. 2. Сравнение $\hat{u}_2(t)$ и $z_2(t)$, максимальное отклонение 0,019 при $t=0,87$

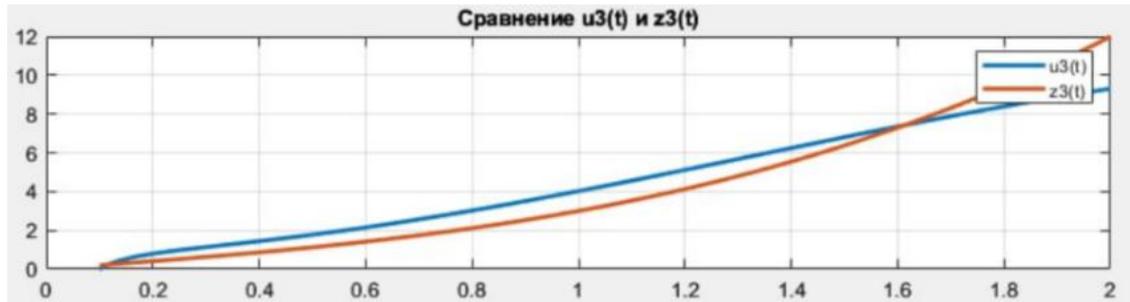


Рис. 3. Сравнение $\hat{u}_3(t)$ и $z_3(t)$, максимальное отклонение 0,031 при $t=1,45$

Также вычислительные эксперименты проводились для различных значений ω (рис. 4). На примере второй компоненты получили результаты, приведенные на рис. 5.

```
Случайный множитель rand_factor = 1.5469
Случайный множитель rand_factor = 1.9575
Случайный множитель rand_factor = 1.9649
Случайный множитель rand_factor = 1.1576
Случайный множитель rand_factor = 1.9706
```

Рис. 4. Значение случайного сомножителя ω

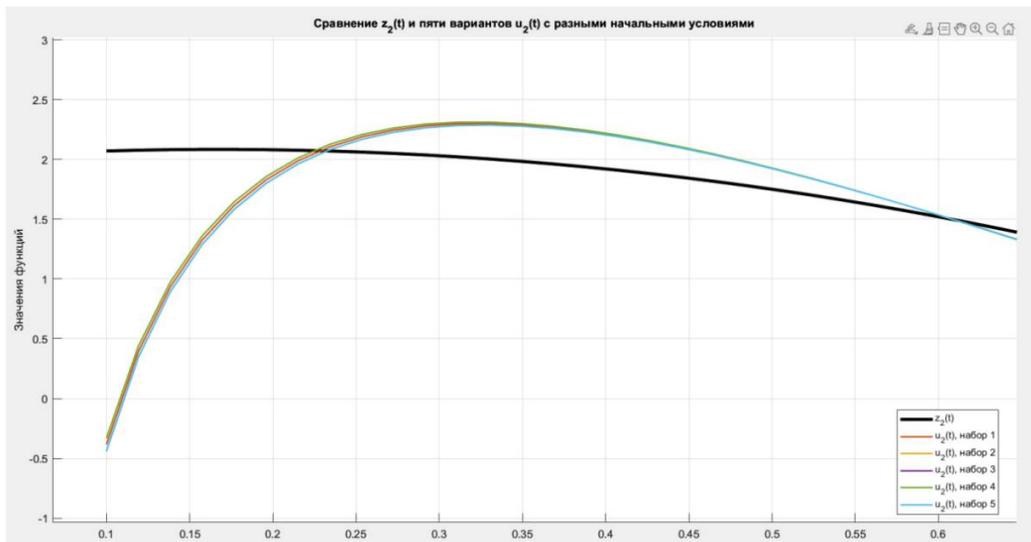


Рис. 5. Сравнение $z_2(t)$ (чёрная линия) и пяти вариантов $\hat{u}_2(t)$ (разноцветные линии) при разных начальных условиях

Заключение

В статье приведен вычислительный эксперимент для нахождения решения задачи оптимального управления решениями стохастической нестационарной модели Леонтьева. Случайная со-

ставляющая предполагается в начальном условии. Результаты вычислений приведены для конкретных значений параметров модели Леонтьева в случае, когда управляющее воздействие имеет степенной вид.

Работа была частично поддержана грантом Российского научного фонда № 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037>.

Литература

1. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997. – 315 с.
2. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
3. Булатов, М.В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 459–470.
4. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
5. Pospelov, I.G. Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables / I.G. Pospelov // Mathematical Notes. – 2013. – Vol. 94, no. 1. – P. 146–156.
6. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.
7. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.
8. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011. – 648 p.
9. Shestakov, A.L. Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–15.
10. Shestakov, A.L. Dynamical Measurements in the View of the Group Operators Theory / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Yu.V. Khudyakov // Semigroups of Operators – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – Vol. 113. – P. 273–286.
11. Свиридюк, Г.А. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2(23). – С. 24–33.
12. Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
13. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоултера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 27 (127). – С. 50–56.
14. Keller, A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff type / A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, no. 2. – P. 39–59.
15. Keller, A.V. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy / A.V. Keller, M.A. Sagadeeva // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 3rd. Сер. “Semigroups of Operators – Theory and Applications – SOTA 2018”. – 2020. – С. 263–277.
16. Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства / А.Л. Шестаков, С.А. Загребина, Н.А. Манакова и др. // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 1. – С. 55–67.
17. Сагадеева, М.А. Задача оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах дифференцируемых «шумов» / М.А. Сагадеева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2025. – Т. 28, № 4. – С. 651–644.

18. Гликлик, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлик. – Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 24–34.

19. Sagadeeva, M.A. Solution to the Initial-Final Value Problem for a Non-Stationary Leontief Type System / M.A. Sagadeeva, A.A Stenina // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – Vol. 6, no. 2. – P. 42–53.

Поступила в редакцию 8 октября 2025 г.

Сведения об авторах

Сагадеева Минзиля Алмасовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sagadeevama@susu.ru.

Абызгареев Данис Фанисович – бакалавр математики, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: xickksesd@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 35–43*

DOI: 10.14529/mmph250405

SOLVING THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR ONE STOCHASTIC NON-STATIONARY LEONTIEF MODEL

M.A. Sagadeeva, D.F. Abyzgariev

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
e-mail: sagadeevama@susu.ru*

Abstract. The article considers the construction for optimal control of solutions for a stochastic non-stationary Leontief type system. The non-stationarity of the system is taken in some averaged form and taken out as a multiplier in the right part of the operator-differential equation with a degenerate matrix of coefficients at the derivative. At the same time, the stochastic component is assumed in the initial condition. Using the linearity of the system under consideration, we split it into a deterministic and a stochastic problem. Next, based on the algorithms obtained earlier for the deterministic non-stationary problem, we find the optimal control. The article aims to describe a computational experiment that illustrates the results on the solvability of this problem. In addition to the introduction, the conclusion and the list of references, the article consists of two parts. The first part provides information on the solvability of the problem, while the second part presents the results of the computational experiment.

Keywords: *Leontief type equations; Nelson–Glickikh derivative; space of differentiable “noises”; computational experiment.*

References

1. Leontief W.W. *Input-Output Economics*. Oxford, Oxford University Press, 1986.
2. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsial'nye sistemy: metody resheniya i issledovaniya* (Algebra-Differential Systems: The Methods of Solution and Research). Novosibirsk, Nauka Publ., 1998. (in Russ.).
3. Bulatov M.V., Chistyakov V.F. A Numerical Method for Solving Differential-Algebraic Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, Vol. 42, no. 4, pp. 439–449.
4. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Equations of Leontief Type. *Russian Mathematics*, 2003, Vol. 47, no. 8, pp. 44–50.
5. Pospelov I.G. Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables. *Mathematical Notes*, 2013, Vol. 94, no. 1, pp. 146–156.

6. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003.

7. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003, 216 p.

8. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*. Series in Nonlinear Analysis and Applications. Walter de Gruyter & Co., Berlin De Gruyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Gruyter Berlin, 2011, 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294

9. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 3–15.

10. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Yu.V. *Dynamical Measurements in the View of the Group Operators Theory*. Semigroups of Operators – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2015, Vol. 113, pp. 273–286.

11. Sviridyuk G.A., Keller A.V. On the Numerical Solution Convergence of Optimal Control Problems for Leontief Type System. *Journal of Samara State Technical University, Seria: Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 24–33. (in Russ.).

12. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A.: The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.)

13. Keller A.V. Numerical Solutions of the Optimal Control Theory for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27, pp. 50–56. (in Russ.)

14. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, Vol. 2, no. 2, pp. 39–59.

15. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy // In Book: *Springer Proc. Mathematics and Statistics. 3rd. Ser. "Semigroups of Operators – Theory and Applications – SOTA 2018"*, 2020, pp. 263–277.

16. Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Manakova N.A., Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. Numerical Optimal Measurement Algorithm under Distortions Caused by Inertia, Resonances, and Sensor Degradation. *Automation and Remote Control*, 2021, Vol. 82, no. 1, pp. 41–50.

17. Sagadeeva M.A. Problem of Optimal Dynamic Measurement with Multiplicative Effects in Spaces of Differentiable “Noises”. *Journal of Samara State Technical University, Seria: Physical and Mathematical Sciences*, 2024, Vol. 28, no. 4, pp. 651–664. (in Russ.)

18. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise Protect by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 27 (286), Iss. 13, pp. 24–34. (in Russ.)

19. Sagadeeva M.A., Stenina A.A. Solution to the Initial-Final Value Problem for a Non-Stationary Leontief Type System. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, Vol. 6, no. 2, pp. 42–53.

Received October 8, 2025

Information about the authors

Sagadeeva Minzilia Almasovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sagadeevama@susu.ru.

Abyzgarееv Danis Fanisovich is Bachelor of Mathematics Degree, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: xickksesd@mail.ru.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ СТЕСНЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ

И.К. Андрианов

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,
Российская Федерация
E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрено осесимметричное упругопластическое деформирование толстостенной стесненной оболочки из несжимаемого материала, находящейся под действием внутреннего давления. Полученное на основании метода переменных параметров упругости решение задачи учитывает нелинейный закон деформационного упрочнения. По результатам расчетов представлена картина распределения радиальных, окружных и осевых напряжений для различных относительных толщин стенки оболочки в случае, когда граница пластической зоны проходит через срединную поверхность оболочки.

Ключевые слова: упругопластическая деформация; нелинейный закон упрочнения; толстостенная оболочка; осевая симметрия.

Введение

В широкой практике достаточно часто встречаются материалы, при упругопластическом деформировании которых имеет место физическая нелинейность, которая проявляется в нелинейном законе деформационного упрочнения при описании диаграммы деформирования. В немногочисленных трудах рассматриваются вопросы физической нелинейности. Особенно важным данный вопрос представляется для толстостенных оболочек, работающих под давлением. В частности, в работе [1] рассмотрено пластическое деформирование толстостенного цилиндра внутренним давлением при произвольном законе упрочнения и с использованием условия пластичности Треска. Вопросы расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек в условиях неоднородности и физической нелинейности рассматривались в трудах [2, 3]. Сегодня проблеме деформирования оболочек в форме тел вращения уделяется достаточно много внимания. Неклассические математические модели деформирования оболочек и численные методы их расчета исследовались в трудах [4, 5]. Некоторые решения задачи Ламе для цилиндрической оболочки рассматривались в работах [6, 7]. Деформирование осесимметричных оболочек в условиях комбинированного нагружения исследовались в трудах [8–10]. Многие из этих задач рассматривались для моделей жесткопластического тела, а также для моделей материала без упрочнения, в частности, работы [11, 12]. В некоторых задачах данные упрощения обоснованны, однако для многих материалов неучет упругих деформаций, а также упрочнения может приводить к значительным погрешностям в расчетах напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек.

В рамках данного исследования рассматривалось упругопластическое деформирование стесненной толстостенной оболочки из несжимаемого материала, работающей под внутренним давлением. Особенностью напряженно-деформированного состояния стесненной оболочки является то, что она находится в условиях плоской деформации. Ряд вопросов математического моделирования пластического состояния тел в условиях плоской деформации исследовались в работах [13–15].

В работе [16] представлено решение задачи о деформировании толстостенной стесненной цилиндрической оболочки под внутренним давлением, но для модели идеального упругопластического тела. В условиях же физической нелинейности расчет напряженно-деформированного состояния оболочек представляет собой сложную математическую задачу и требует разработки численных процедур. В рамках данного исследования численный расчет напряженно-деформированного состояния осесимметричной оболочки проводился при нелинейном законе деформационного упрочнения.

Методика исследования

Решение задачи осесимметричного упругопластического деформирования толстостенной оболочки под внутренним давлением будем проводить на основании положений линейной теории упругости и деформационной теории пластичности с использованием метода переменных параметров упругости [17–20]. Учитывая то, что цилиндрическая оболочка находится в условиях равномерного нагружения, расчет будем проводить в главных осях. В качестве меры деформации будем использовать деформацию Генки. Стесненная цилиндрическая оболочка представляет собой цилиндр с закрытыми торцами, соответственно, в результате нагружения оболочка находится в условиях плоской деформации: $e_{zz} = 0$, где e_{zz} – осевая деформация Генки. Поскольку рассматриваемый материал является несжимаемым, коэффициент поперечной деформации принимается $\mu = 0,5$.

Математическая постановка задачи упругопластического деформирования толстостенной цилиндрической оболочки из несжимаемого материала в условиях плоской деформации будет описываться следующей системой уравнений:

– уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\theta\theta}$ – радиальные, окружные напряжения, ρ – радиальная координата.

– уравнение совместности деформаций Генки [17–20]:

$$\frac{de_{\theta\theta}}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_{\theta\theta} - e_{\rho\rho})}{\rho}, \quad (2)$$

где $e_{\rho\rho}, e_{\theta\theta}$ – радиальные, окружные деформации Генки,

– физические соотношения согласно методу переменных параметров упругости:

$$\begin{cases} e_{\rho\rho} = \frac{3}{4E}(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}) \\ e_{\theta\theta} = \frac{3}{4E}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}), \\ \sigma_{zz} = (\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta})/2 \end{cases} \quad (3)$$

где σ_{zz} – осевые напряжения, $E = \sigma_i / e_i$ – переменный параметр упругости при условии несжимаемости материала, σ_i – интенсивность напряжений, e_i – интенсивность деформаций Генки:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}|, \quad (4)$$

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{e_{\rho\rho}^2 + e_{\rho\rho}e_{\theta\theta} + e_{\theta\theta}^2}, \quad (5)$$

– диаграмма деформирования:

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \quad (6)$$

где $\Phi(e_i) = \{Ee_i, e_i \leq e_{im}; Ae_i^n, e_i > e_{im}\}$ – функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования материала, e_{im} – интенсивность деформаций Генки, соответствующая переходу упругих деформаций в пластические, E – модуль Юнга материала, A, n – параметры кривой упрочнения диаграммы деформирования,

– условие пластичности Мизеса:

$$\sigma_i = \sigma_m, \quad (7)$$

где σ_m – предел текучести материала,

– граничные условия:

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=r} = -p, \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho\rho}\Big|_{\rho=R} = 0, \quad (9)$$

где p – давление, r – внутренний радиус оболочки, R – наружный радиус оболочки.

Для проведения численного расчета представим уравнение совместности деформаций (2) в интегральной форме, выражая окружную деформацию Генки с учетом граничного условия (8):

$$e_{\theta\theta} = \ln \left(-\rho \int_{\rho}^R \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_{\theta\theta} - e_{\rho\rho}) d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right), \quad (10)$$

где R_0 – начальный радиус наружной поверхности оболочки.

Подставим в соотношение (10) физические уравнения (3) для $e_{\rho\rho}$ и $e_{\theta\theta}$. Тогда, выразив окружное напряжение, интегральное уравнение совместности деформаций Генки, представленное в напряжениях для несжимаемой толстостенной цилиндрической оболочки с закрытыми концами, примет вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \int_{\rho}^R \sigma_{\theta\theta} d\rho + \frac{4}{3} E \ln \left(-\rho \int_{\rho}^R \frac{1}{\rho^2} \exp \left[\frac{9}{4E} \sigma_{\theta\theta} - \right] \frac{9}{4E} \frac{1}{\rho} \int_{\rho}^R \sigma_{\theta\theta} d\rho d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right). \quad (11)$$

Численный расчет системы уравнений (1)–(11) проводился на основании метода переменных параметров упругости с использованием методики решения серий обратных задач [17–20], которая строилась на смещении наружного края оболочки на малую величину согласно соотношению $R = R_0 + \Delta R$ и расчете напряженно-деформированного состояния, при котором произошло данное смещение. Таким образом, для численного расчета напряженного состояния оболочки итерационная система уравнений согласно соотношениям (1), (3), (4), (11) принимала вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho} \int_{\rho}^R \sigma_{\theta\theta}^{(k)} d\rho + \frac{4}{3} E^{(k)} \ln \left(-\rho \int_{\rho}^R \frac{1}{\rho^2} \exp \left[\frac{9}{4E^{(k)}} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \right] \right) \frac{-9}{4E^{(k)}} \frac{1}{\rho} \int_{\rho}^R \sigma_{\theta\theta}^{(k)} d\rho d\rho + \frac{\rho}{R_0}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho} \int_{\rho}^R \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} d\rho, \sigma_{zz}^{(k+1)} = \frac{1}{2} (\sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)}), \sigma_i^{(k+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} - \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)}). \end{aligned}$$

где k – номер итерации.

Деформированное состояние оболочки определялось согласно уравнениям (3), (5) на текущей итерации:

$$\begin{aligned} e_{\rho\rho}^{(k+1)} &= \frac{3}{4E^{(k)}} (\sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)}), e_{\theta\theta}^{(k+1)} = \frac{3}{4E^{(k)}} (\sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} - \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)}), \\ e_i^{(k+1)} &= \frac{2}{3} \sqrt{\left(e_{\rho\rho}^{(k+1)} \right)^2 + e_{\rho\rho}^{(k+1)} e_{\theta\theta}^{(k+1)} + \left(e_{\theta\theta}^{(k+1)} \right)^2}. \end{aligned}$$

На основании соотношения (6), описывающего диаграмму деформирования материала, определялся переменный параметр упругости: $E^{(k+1)} = \Phi \left(e_i^{(k+1)} \right) / e_i^{(k+1)}$. Далее итерационный расчет повторялся до тех пор, пока не выполнится условие: $\left| \sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)} \right| / \sigma_i^{(k+1)} \leq \Delta\sigma$, где $\Delta\sigma$ – заданная точность. Расчет внутренней границы определялся согласно схеме $r^{(j+1)} = r_0 \exp \left(e_{\theta\theta}^{(j)} \Big|_{\rho=r} \right)$, где j – номер итерации, r_0 – начальный радиус внутренней поверхности оболочки, $\left| r^{(j+1)} - r^{(j)} \right| / r^{(j+1)} \leq \Delta r$ – условие окончания процесса, Δr – заданная точность. Затем приложенное давление p определялось согласно граничному условию (8).

Результаты исследования

Для оценки напряженного состояния толстостенной цилиндрической оболочки с закрытыми концами, находящейся под внутренним давлением, были проведены серии численных расчетов

при следующих относительных толщинах стенки: $\delta/R_0 = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$, где δ – толщина оболочки, наружный радиус принимал фиксированное значение $R_0 = 100$ мм. В качестве материала оболочки использовалась сталь марки 30ХГСН2А ($E = 195$ ГПа, $\sigma_m = 1110$ МПа) [21]. Диаграмма деформирования стали 30ХГСН2А описывалась линейно-степенной аппроксимацией ($A = 4623, n = 0,276$). Для того чтобы оценить распределение напряжений в упругопластической стадии деформирования, внутреннее давление для оболочки каждой толщины подбиралось таким образом, чтобы цилиндрическая поверхность, разделяющая область пластических и упругих деформаций $\rho_T = \rho|_{\sigma_i = \sigma_T}$, совпадала со срединной поверхностью $\rho = (R+r)/2$. В этом случае внутреннее давление для оболочек различной толщины принималось $p/\sigma_T = \{0,119; 0,248; 0,394; 0,563; 0,775\}$. Результаты расчета напряженного состояния оболочки при упругопластическом деформировании с учетом степенного деформационного закона упрочнения представлены на рис. 1–4.

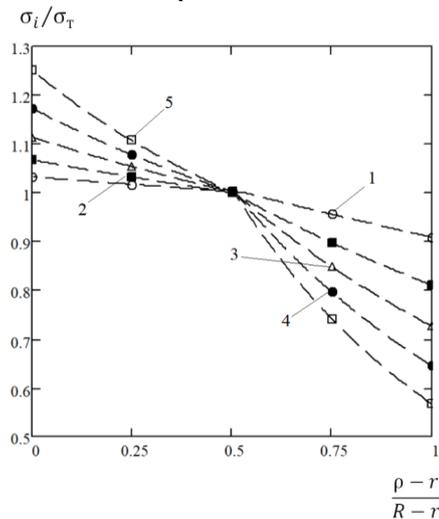


Рис. 1. Распределение интенсивностей напряжений по толщине оболочки при $\rho_m = (R+r)/2$:

1 – $\delta/R = 0,1$, 2 – $\delta/R = 0,2$, 3 – $\delta/R = 0,3$,
4 – $\delta/R = 0,4$, 5 – $\delta/R = 0,5$

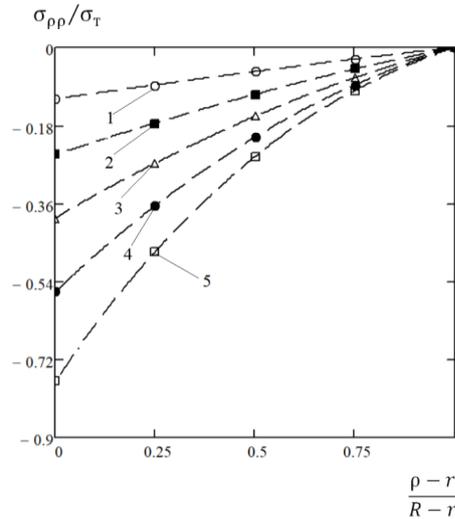


Рис. 2. Распределение радиальных напряжений по толщине оболочки при $\rho_m = (R+r)/2$:

1 – $\delta/R = 0,1$, 2 – $\delta/R = 0,2$, 3 – $\delta/R = 0,3$,
4 – $\delta/R = 0,4$, 5 – $\delta/R = 0,5$

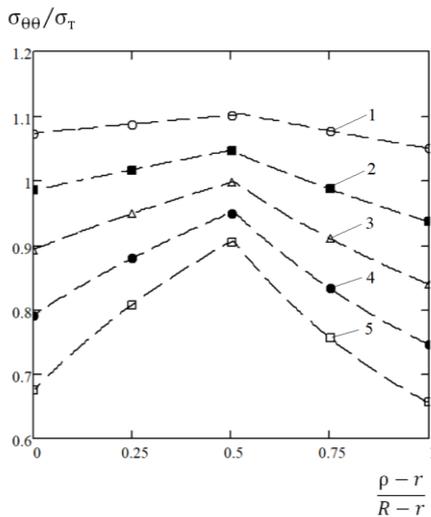


Рис. 3. Распределение окружных напряжений по толщине оболочки при $\rho_m = (R+r)/2$: 1 – $\delta/R = 0,1$,

2 – $\delta/R = 0,2$, 3 – $\delta/R = 0,3$, 4 – $\delta/R = 0,4$,
5 – $\delta/R = 0,5$

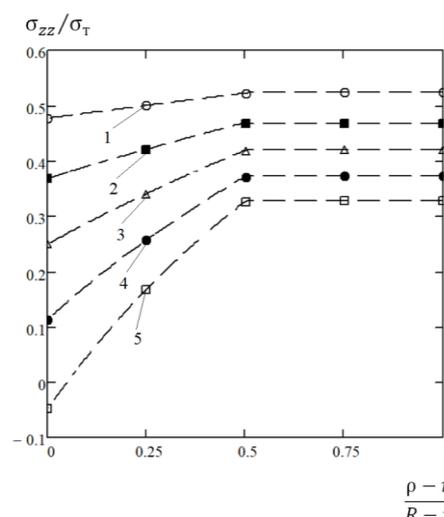


Рис. 4. Распределение осевых напряжений по толщине оболочки при $\rho_m = (R+r)/2$: 1 – $\delta/R = 0,1$,

2 – $\delta/R = 0,2$, 3 – $\delta/R = 0,3$, 4 – $\delta/R = 0,4$,
5 – $\delta/R = 0,5$

Обсуждение результатов

Согласно полученным результатам численных расчетов, с увеличением относительной толщины стенки оболочки радиальные сжимающие напряжения, при которых половина толщины стенки переходит в стадию пластического деформирования, возрастают по абсолютной величине, достигая наибольшее значение на внутренней границе оболочки. Окружные растягивающие напряжения, при которых половина толщины стенки оболочки переходит в стадию пластического деформирования, с увеличением относительной толщины стенки уменьшаются. При этом по толщине стенки окружные напряжения изменяются по нелинейному закону в упругопластической стадии, достигая максимум в срединном сечении стенки оболочки, соответствующем переходу упругих деформаций в пластические. В упругой стадии окружные напряжения уменьшаются, а в пластической стадии – увеличиваются. Осевые напряжения в пределах пластических деформаций возрастают по толщине стенки оболочки, а в пределах упругих деформаций остаются постоянными. С увеличением относительной толщины стенки оболочки осевые напряжения, при которых половина толщины стенки переходит в стадию пластического деформирования, уменьшаются. В пластической стадии деформирования интенсивности напряжений, при которых половина толщины стенки переходит в стадию пластического деформирования, возрастают с увеличением относительной толщины стенки оболочки, а в упругой стадии – с уменьшением относительной толщины стенки.

Заключение

Полученные в рамках данного исследования результаты позволяют рассчитать напряженно-деформированное состояние толстостенной стесненной цилиндрической оболочки из несжимаемого материала, находящейся под действием внутреннего давления, в том случае, если диаграмма деформирования материала в пластической стадии описывается нелинейным законом деформационного упрочнения. Построенные графические зависимости позволяют оценить в зависимости от изменения относительной толщины стенки оболочки характер изменения окружных, радиальных и осевых напряжений, возникающих при упругопластическом деформировании, когда пластическая зона охватывает половину толщины стенки оболочки, что может быть использовано в задачах автофретирования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-79-10135, <https://rscf.ru/project/25-79-10135/>.

Литература

1. Александров, С.Е. Расчет толщины стенки трубопровода под внутренним давлением при произвольном законе упрочнения / С.Е. Александров, Р.В. Гольдштейн // Деформация и разрушение материалов. – 2011. – № 9. – С. 15–20.
2. Полякова, Л.С. Расчет трехслойной цилиндрической оболочки конечной длины с учетом нелинейности и непрерывной неоднородности / Л.С. Полякова, В.И. Андреев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 2(283). – С. 36–42.
3. Андреев, В.И. Физически нелинейные задачи для неоднородных толстостенных оболочек / В.И. Андреев, Л.С. Полякова // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2016. – Т. 12, № 4. – С. 36–40.
4. Аннин, Б.Д. Неклассические модели теории пластин и оболочек / Б.Д. Аннин, Ю.М. Волчков // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5(339). – С. 5–14.
5. Коробейников, С.Н. Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения / С.Н. Коробейников // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6, № 5. – С. 39–59.
6. Зингерман, К.М. Некоторые качественные эффекты в точных решениях задачи Ламе при больших деформациях / К.М. Зингерман, В.А. Левин // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 2. – С. 283–303.
7. Абдеев, Б.М. Противоречие в осесимметричной классической задаче Ламе о напряженном состоянии упругого цилиндра / Б.М. Абдеев, Г. Муслиманова // Материалы IX Международной заочной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике», 17 апреля 2012 г. – 2012. – № 9. – С. 46–50.

8. Игнатик, А.А. Напряженно-деформированное состояние трубопровода под воздействием комбинированной нагрузки / А. А. Игнатик // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2020. – Т. 10, № 1. – С. 22–31.

9. Хохлов, А.В. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полого цилиндра из нелинейно наследственного материала под действием внутреннего и внешнего давлений / А.В. Хохлов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика» – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 44–54.

10. Яхно, Б.О. Напряжено-деформированное состояние цилиндрических толстостенных перфорированных оболочек / Б.О. Яхно, С.И. Трубачев // Вестник Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Серия: Машиностроение. – 2013. – № 1(67). – С. 126–130.

11. Дьяконов, О.М. Пластическое течение изотропного жесткопластического тела при одноосной деформации / О.М. Дьяконов // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2021. – Т. 66, № 2. – С. 186–193.

12. Барашков, В.Н. Анализ упругопластического напряжённого состояния цилиндрической трубы, нагруженной внутренним давлением / В.Н. Барашков, М.Ю. Шевченко // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2018. – Т. 20, № 3. – С. 100–111.

13. Артемов, М.А. Математическое моделирование пластического состояния тел. плоская деформация / М.А. Артемов, Е.С. Барановский // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2(24). – С. 72–87.

14. Бакушев, С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений / С.В. Бакушев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 69. – С. 69–85.

15. Буренин, А.А. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления / А.А. Буренин, Л.В. Ковтанин, Г.Л. Панченко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 1. – С. 6–18.

16. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

17. Андреанов, И.К. Обратная задача упругопластического деформирования свободной толстостенной цилиндрической оболочки с учетом нелинейного закона упрочнения / И.К. Андреанов, С.И. Феоктистов // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 3. – С. 259–269.

18. Feoktistov, S.I. Modeling of Hydraulic Autofrettage of Thick-Walled Cylindrical Shells Taking into Account Elastoplastic Anisotropy Caused by the Bauschinger Effect / S.I. Feoktistov, I.K. Andrianov, H. Lin // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 2. – P. 891–911.

19. Феоктистов, С.И. Моделирование напряжённо-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек с учётом физической нелинейности материала / С.И. Феоктистов, И.К. Андреанов, Л. Тхет // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2022. – № 3(59). – С. 12–20.

20. Андреанов, И.К. Анализ нагружения толстостенных оболочек в пространстве Ильюшина при автофретировании / И.К. Андреанов, С.И. Феоктистов // Прикладная математика и механика. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 295–309.

21. Скляр Н.М. Авиационные материалы. Справочник в 9 томах. Том 1. Конструкционные стали / Н.М. Скляр. – Москва: ОНТИ, 1975. – 431 с.

Поступила в редакцию 22 сентября 2025 г.

Сведения об авторе

Андреанов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация, e-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

**AXISYMMETRIC DEFORMATION OF A THICK-WALLED CONSTRAINED SHELL
UNDER INTERNAL PRESSURE WITH A NONLINEAR LAW OF STRAIN
HARDENING****I.K. Andrianov***Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russian Federation
E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru*

Abstract. The study considers axisymmetric elastoplastic deformation of a thick-walled constrained shell made of incompressible material subjected to internal pressure. The problem is solved using the method of variable elasticity parameters, taking into account the nonlinear law of deformation hardening. Based on the calculation results, the paper presents the distribution of radial, circumferential, and axial stresses for various relative shell wall thicknesses when the boundary of the plastic zone passes through the median surface of the shell.

Keywords: elastoplastic strain; nonlinear hardening law; thick-walled shell; axial symmetry.

References

1. Aleksandrov S.E., Goldstein R.V. Calculation of the Pipeline Wall Thickness under Internal Pressure at an Arbitrary Law of Hardening. Russ. *Metallurgy (Metally)*, 2012, Iss. 10, pp. 873–878.
2. Polyakova L.S., Andreev V.I. Calculation of the Three-layer Cylindrical Shell of Final Length with Account of Nonlinearity and Continuous Inhomogeneity. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2019, no. 2(283), pp. 36–42. (in Russ.)
3. Andreev V.I., Polyakova L.S. Physically Nonlinear Problems for Inhomogeneous Thick-Walled Shells. *International Journal for Computational Civil And Structural Engineering*, 2016, Vol. 12, no. 4, pp. 36–40. DOI: 10.22337/1524-5845-2016-12-4-36-40.
4. Annin B.D., Volchkov Yu.M. Neklassicheskie modeli teorii plastin i obolochek (Non-Classical Models of Plate and Shell Theory). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, Vol. 57, no. 5(339), pp. 5–14. DOI 10.15372/PMTF20160501.
5. Korobeinikov S.N. Numerical Solution of Equations with Singularities of Deformation of Elastoplastic Shells of Revolution. *Computational technologies*, 2001, Vol. 6, no. 5, pp. 39–59. (in Russ.)
6. Zingerman K.M., Levin V.A. Some Qualitative Effects in the Exact Solutions of the Lamé Problem for Large Deformations. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, Vol. 76, Iss. 2, pp. 205–219. (in Russ.)
7. Abdeev B.M., Muslimanova G. Contradiction in Axisymmetric Classical Problem about Stress Lamé State of the Elastic Cylinder. *Materialy IX Mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Tekhnicheskie nauki – ot teorii k praktike", 17 aprelya 2012 g* (Proc. IX International Correspondence Scientific and Practical Conference "Technical Sciences – from theory to practice", April 17, 2012), 2012, no. 9, pp. 46–50. (in Russ.)
8. Ignatik A.A. Stress-Strain State of a Pipeline Subject to the Influence of a Combined Load. *Nauka i Tehnologii Truboprovodnogo Transporta Nefti i Nefteproduktov – Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2020, Vol. 10, no. 1, pp. 22–31. (in Russ.). DOI: 10.28999/2541-9595-2020-10-1-22-31.
9. Khokhlov A.V. Exact Solution of the Boundary Value Problem for Strain and Stress Fields in a Thick Tube Made of Physically Non-linear Elasto-viscoplastic Material Under Given Internal and External Pressures. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2020, Vol. 12, no. 1, pp. 44–54. DOI: 10.14529/mmph200106

10. Yakhno B., Trubachev S. Stress-Straine State of the Cylindrical Walled Perforated Shells. *Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta Ukrainy "Kievskiy politekhnicheskiiy institut"*. Seriya: Mashinostroenie, 2013, no. 1(67), pp. 126–130. (in Russ.).
11. Dyakonov O.M. Plastic Flow of Isotropic Rigid Body at Uniform Deformation. Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. *Physical-technical series*, 2021, Vol. 66, no. 2, pp. 186–193. (in Russ.). DOI: 10.29235/1561-8358-2021-66-2-186–193.
12. Barashkov V.N., Shevchenko M.U. Elastoplastic Stress State of Cylindrical Pipe Under Internal Pressure. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2018, Vol. 20, no. 3, pp. 100–111. DOI: 10.31675/1607-1859-2018-20-3-100-111
13. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Mathematical Modeling of Plastic Sate of the Bodies in Case of Plane Strain. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2015, no. 2(24), pp. 72–87. (in Russ.).
14. Bakushev S.V. Differential Equations of Balansed Continuum for Planar Deformation in Cylindrical Coordinates at Bilinear Approximation of Crossing Equations. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, no. 69, pp. 69–85. DOI: 10.17223/19988621/69/6.
15. Burenin A.A., Panchenko G.L., Kovtanyuk L.V. Deformation and Heating of an Elastoviscoplastic Cylindrical Layer Moving Owing to a Varying Pressure Drop. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, no. 1, pp. 1–11. DOI: 10.3103/S0025654418010016
16. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* (Applied Theory of Plasticity and Creep). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 399 p. (in Russ.).
17. Andrianov I.K., Feoktistov S.I. Inverse Problem of Elastic-plastic Deformation of a Free Thick-walled Cylindrical Shell taking into Account the Nonlinear Law of Hardening. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2024, Vol. 86, no. 3, pp. 259–269. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-259-269.
18. Feoktistov S.I., Andrianov I.K., Lin H. Modeling of Hydraulic Autofrettage of Thick-Walled Cylindrical Shells Taking into Account Elastoplastic Anisotropy Caused by the Bauschinger Effect. *Mechanics of Solids*, 2025, Vol. 60, no. 2, pp. 891–911. DOI: 10.1134/S0025654424603367.
19. Feoktistov S.I., Andrianov I.K., Htet L. Modeling of the Stress-strain State of Thick-walled Cylindrical Shells Taking into Account Physical Nonlinearity of the Material. *Scholarly Notes of Komsomolsk-na-Amure State Technical University*, 2022, no. 3(59), pp. 12–20. DOI 10.17084/20764359-2022-59-12
20. Andrianov I.K., Feoktistov S.I. Loading Analysis of Thick-walled Shells in Ilyushin Stress Space During Autofrettage. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2025, Vol. 89, no. 2, pp. 295–309. (in Russ.). DOI 10.31857/S0032823525020087
- 21 Sklyarov N.M. *Aviatsionnye materialy. Spravochnik v 9 tomakh. Tom 1. Konstruktsionnye stali* (Aviation Materials. The Reference Book is in 9 Volumes. Vol. 1. Structural Steels). Moscow, ONTI Publ., 1975, 431 p. (in Russ.).

Received September 22, 2025

Information about the author

Andrianov Ivan Konstantinovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation, e-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА–ПУАЗЕЙЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С МАЛОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

А.В. Горшков^{1,2}, Е.Ю. Просвиряков^{1,2}

¹Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

²Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: alex55gor@mail.ru, evgen_pros@mail.ru

Аннотация. Рассматривается неоднородное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее трехмерное крупномасштабное изотермическое завихренное течение Куэтта–Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости. На свободной недеформируемой границе жидкости (приближение «твердой» крышки) заданы касательные напряжения, моделирующие воздействие ветра (силу трения). На твердой нижней поверхности бесконечного горизонтального слоя жидкости заданы условия скольжения Навье. В статье рассматривается установившееся переходное состояние от неоднородного сдвигового течения к трехмерному движению жидкости с малой вертикальной скоростью. Исследуется влияние малых отклонений граничных условий от условий совместности переопределенной системы уравнений, описывающей неоднородное сдвиговое течение Куэтта–Пуазейля. Показано, что при нарушении условий совместности вертикальная компонента скорости может быть отличной от нуля. Решение разрешающей системы трехмерных уравнений Навье–Стокса построено в виде ряда по степеням малого параметра, определяющего отклонение граничных от условий совместности с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты. Коэффициенты получены в виде полиномов вертикальной координаты.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса; трехмерные течения; сдвиговые течения; точное решение; условие совместности; возмущение; малый параметр.

Введение

Точные решения уравнений гидродинамики используются для математического моделирования многих процессов химической и нефтехимической технологий, включая процессы конвективного массо- и теплопереноса и различных природных явлений [1–4]. Адвективные изотермические течения невращающейся вязкой жидкости исследовались многими авторами [5–9]. В работах [1, 2, 5–9] рассматривалось применение класса точных решений уравнений Навье–Стокса для сжимаемой жидкости с линейной зависимостью компонент решения от двух координат. Коэффициенты линейных функций зависят от третьей координаты. Решение задачи сводится к интегрированию нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В научных статьях [10–14] предлагается использовать этот класс точных решений для описания адвективного (слоистого) течения вязкой несжимаемой жидкости. В результате подстановки класса решений в уравнения Навье–Стокса получается переопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, как замечают сами авторы, вопрос об условиях совместности полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений ими не рассматривался.

В работах [15–18] построены точные решения системы уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью горизонтальных компонент скорости от двух координат, описывающие адвективное (слоистое) течение вязкой несжимаемой жидкости. Такое решение будем называть неоднородным, в отличие от точного решения, в котором компоненты скорости зависят только от одной координаты. В работах получены и исследованы условия совместности системы уравнений, описывающей неоднородное решение. Условия совместности накладывают некоторые ограничения на компоненты скорости течения жидкости и, следовательно, на граничные условия задачи.

В настоящей работе исследуется неоднородное решение, описывающее изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости по твердой плоскости с учетом скольжения по твердой по-

верхности при малых нарушениях условий совместности. Предполагается, что отклонения пропорциональны малому параметру. Решение построено в виде ряда по степеням малого параметра. Коэффициенты рядов являются многочленами вертикальной переменной. Построены первые приближения решения. Показано, что при нарушении условий совместности возникает вертикальная компонента скорости.

Постановка задачи

Рассмотрим установившееся изотермическое движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое жидкости. Течение описывается уравнениями Навье–Стокса, которые в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_x, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_y, \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_z, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

В системы (1) введены следующие обозначения: V_x, V_y, V_z – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости; V_h – характерный масштаб горизонтальных компонент скорости; масштаб вертикальной компоненты скорости выбран в виде $V_v = \delta V_h$; безразмерные горизонтальные координаты x, y определены характерным масштабом длины L , а поперечная координата z – толщиной слоя жидкости h ; $\delta = h/L$ – отношение масштабов длины, ν – коэффициент кинематической

(молекулярной) вязкости жидкости, $\text{Re} = LV_h/\nu$ – число Рейнольдса, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в безразмерных переменных.

Для нахождения частного решения системы уравнений (1) зададим граничные условия на обеих границах слоя жидкости. На нижней, твердой поверхности, описываемой уравнением $z = 0$, предполагается скольжение жидкости согласно условию Навье [19–24]:

$$a \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial V_x}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = V_x, \quad a \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial V_y}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} = V_y \quad (2)$$

и условие непротекания $V_z|_{z=0} = 0$. Здесь a – безразмерный коэффициент трения. На свободной недеформируемой поверхности (приближение «твердой» крышки), описываемой уравнением $z = 1$, задана сила \mathbf{F} в безразмерном виде с компонентами $\mathbf{F} = (\tau_x, \tau_y, P_a)$. Компоненты силы τ_x, τ_y задают касательные напряжения на свободной поверхности жидкости, моделирующие воздействие ветра [19–24]:

$$\left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial V_x}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=1} = \tau_x, \quad \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial V_y}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=1} = \tau_y. \quad (3)$$

Будем считать, что касательные напряжения τ_x, τ_y являются линейными функциями горизонтальных координат:

$$\tau_x = \tau_{10} + x\tau_{11} + y\tau_{12}, \quad \tau_y = \tau_{20} + x\tau_{21} + y\tau_{22},$$

где τ_{ij} – постоянные. Третья компонента силы \mathbf{F} – давление атмосферы P_a . Давление P_a задается квадратичной функцией:

$$P_a = P_0^0 + xP_{10}^0 + yP_{01}^0 + x^2P_{20}^0 + xyP_{11}^0 + y^2P_{02}^0,$$

где $P_0^0, P_{10}^0, P_{01}^0, P_{20}^0, P_{11}^0, P_{02}^0$ – постоянные.

Точное решение системы (1) будем искать в полиномиальном классе Линя–Сидорова–Аристова [1, 3]

$$\begin{aligned} V_x &= U_0(z) + xU_1(z) + yU_2(z), \quad V_y = V_0(z) + xV_1(z) + yV_2(z), \\ V_z &= W(z), \\ P &= P_0(z) + xP_{10}(z) + yP_{01}(z) + x^2P_{20}(z) + xyP_{11}(z) + y^2P_{02}(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь U_0, V_0 – фоновые слагаемые горизонтальных компонент скорости жидкости, функции U_1, V_1, U_2, V_2 описывают скорость деформации элемента жидкости (пространственные ускорения).

После подстановки вида решений (4) в систему исходных уравнений (1) получим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} U_0'' &= \delta^2 \operatorname{Re}[P_{10} + U_0U_1 + V_0U_2 + WU_0'], \quad V_0'' = \delta^2 \operatorname{Re}[P_{01} + U_0V_1 + V_0V_2 + WV_0'], \\ U_1'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (2P_{20} + U_1^2 + U_2V_1 + WU_1'), \quad U_2'' = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{11} + U_1U_2 + U_2V_2 + WU_2'), \\ V_1'' &= \delta^2 \operatorname{Re}(P_{11} + U_1V_1 + V_1V_2 + WV_1'), \quad V_2'' = \delta^2 \operatorname{Re}[2P_{02} + U_2V_1 + V_2^2 + WV_2'], \\ W'' &= \operatorname{Re} P_{00}' + \operatorname{Re} \delta^2 WW', \\ U_1 + V_2 + W' &= 0, \\ P_{10}' &= 0, \quad P_{01}' = 0, \quad P_{20}' = 0, \quad P_{02}' = 0, \quad P_{11}' = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее штрихом обозначается производная соответствующей функции по переменной z . Для слоистого течения ($W(z) = 0$) система уравнений (5) примет вид:

$$\begin{aligned} U_0'' &= \delta^2 \operatorname{Re}[P_{10} + U_0U_1 + V_0U_2], \quad V_0'' = \delta^2 \operatorname{Re}[P_{01} + U_0V_1 + V_0V_2], \\ P_{00}' &= 0, \quad P_{10}' = 0, \quad P_{01}' = 0, \quad P_{20}' = 0, \quad P_{02}' = 0, \quad P_{11}' = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$U_1'' = \operatorname{Re} \delta^2 (2P_{20} + U_1^2 + U_2V_1), \quad U_2'' = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{11} + U_1U_2 + U_2V_2),$$

$$V_1'' = \delta^2 \operatorname{Re}(P_{11} + U_1V_1 + V_1V_2), \quad V_2'' = \delta^2 \operatorname{Re}[2P_{02} + U_2V_1 + V_2^2], \quad (7)$$

$$U_1 + V_2 = 0. \quad (8)$$

Граничные условия (2) и (3) для систем уравнений (6)–(8) с учетом класса решения (4) следующие:

$$\begin{aligned} \delta U_0(0) &= aU_0'(0), \quad \delta V_0(0) = aV_0'(0), \\ \delta U_1(0) &= aU_1'(0), \quad \delta V_1(0) = aV_1'(0), \quad \delta U_2(0) = aU_2'(0), \quad \delta V_2(0) = aV_2'(0), \\ U_0'(1) &= \delta \tau_{10}, \quad V_0'(1) = \delta \tau_{20}, \quad U_1'(1) = \delta \tau_{11}, \quad V_1'(1) = \delta \tau_{21}, \quad U_2'(1) = \delta \tau_{12}, \quad V_2'(1) = \delta \tau_{22}, \\ P_{10}(1) &= P_{10}^0, \quad P_{01}(1) = P_{01}^0, \quad P_{20}(1) = P_{20}^0, \quad P_{02}(1) = P_{02}^0, \quad P_{11}(1) = P_{11}^0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (6) описывает фоновые слагаемые компонент скорости, а система уравнений (7), (8) – коэффициенты сдвиговых слагаемых компонент скорости жидкости. Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8) – переопределенная (дифференциально-алгебраическая) система уравнений. Условия совместности системы (7), (8) исследовались в работах [1, 2, 15] и имеют вид

$$U_1^2 + U_2V_1 = 0, \quad (10)$$

$$P_{20} = 0, \quad P_{02} = 0, \quad P_{11} = 0. \quad (11)$$

Общее решение системы (7) с учетом условий совместности (10), (11) и условия несжимаемости (8) представляется линейными функциями переменной z :

$$U_1 = C_1z + C_2, \quad U_2 = C_3z + C_4, \quad V_1 = C_5z + C_6, \quad V_2 = -(C_1z + C_2).$$

Условие совместности (10) в терминах граничных условий (9) получится следующим [6]:

$$\begin{aligned} \tau_{12}\tau_{21} + \tau_{11}^2 &= 0, \\ P_{20}^0 &= 0, \quad P_{11}^0 = 0, \quad P_{02}^0 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а условие несжимаемости (8)

$$\tau_{11} + \tau_{22} = 0. \quad (13)$$

При выполнении условий совместности (12) реализуется слоистое изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим решение системы (5) при малых нарушениях (возмущениях) условия совместности. Для этого представим касательные напряжения на свободной границе в виде

$$\tau_{11} = \tau_{11}^0 + \mu\tau_{11}^1, \quad \tau_{12} = \tau_{12}^0 + \mu\tau_{12}^1, \quad \tau_{21} = \tau_{21}^0 + \mu\tau_{21}^1, \quad \tau_{22} = -\tau_{11}^0 + \mu\tau_{22}^1,$$

где μ – малый параметр, τ_{ij}^0 – невозмущенные значения, τ_{ij}^1 – возмущения касательных напряжений. Соответственно, коэффициенты квадратичных слагаемых в выражении давления атмосферы

$$P_{20}^0 = \mu P_{20}^1, \quad P_{11}^0 = \mu P_{11}^1, \quad P_{02}^0 = \mu P_{02}^1.$$

Слагаемые касательных напряжений на свободной поверхности τ_{10} , τ_{20} и коэффициенты линейных по x , y слагаемых давления не входят в условия совместности и считаются невозмущенными. Считается, что при $\mu = 0$ выполняются условия совместности (12) и условия несжимаемости (13) и невозмущенное движение является слоистым:

$$\left(\tau_{11}^0\right)^2 + \tau_{12}^0\tau_{21}^0 = 0.$$

Тогда выражение (12) с подстановкой возмущений примет вид

$$\mu\left(\tau_{11}^0\tau_{11}^1 + \tau_{12}^0\tau_{21}^1 + \tau_{21}^0\tau_{12}^1 - \tau_{11}^0\tau_{22}^1\right) + \mu^2\left(\left(\tau_{11}^1\right)^2 + \tau_{12}^1\tau_{21}^1\right) = 0.$$

Для удобства дальнейших исследований представим решение исходной системы уравнений (1) в виде:

$$V_x = U_0 + x(\varepsilon(z) + \gamma_1(z)) + y(\gamma_2(z) - \Omega(z)), \quad V_y = V_0(z) + x(\gamma_2(z) + \Omega(z)) + y(\varepsilon(z) - \gamma_1(z)), \\ V_z = W(z), \quad (14)$$

$$P = P_0(z) + xP_{10}(z) + yP_{01}(z) + x^2P_{20}(z) + xyP_{11}(z) + y^2P_{02}(z).$$

Переменная $\varepsilon = (U_1 + V_2)/2$ описывает скорость изменения площади элемента жидкости, $\Omega = (V_1 - U_2)/2$ – угловую скорость вращения элемента жидкости, $\gamma_1 = (U_1 - V_2)/2$, $\gamma_2 = (U_2 + V_1)/2$ – компоненты девизатора тензора скоростей деформаций элемента жидкости.

При подстановке класса решения (14) в систему уравнений (1) получим следующую систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$U_0'' = \delta^2 \operatorname{Re}\left[P_{10} + U_0(\varepsilon + \gamma_1) + V_0(\gamma_2 - \Omega) + WU_0'\right], \\ V_0'' = \delta^2 \operatorname{Re}\left[P_{01}(z) + U_0(z)(\gamma_2(z) + \Omega(z)) + V_0(z)(\varepsilon(z) - \gamma_1(z)) + W(z)V_0'(z)\right], \\ W'' = \operatorname{Re}\left(P_0' + \delta^2 WW'\right), \quad \Omega'' = \operatorname{Re}\delta^2(2\varepsilon\Omega + W\Omega'), \quad \varepsilon + W' = 0, \\ \gamma_1'' = \operatorname{Re}\delta^2\left(P_{20} - P_{02} + 2\varepsilon\gamma_1 + W\gamma_1'\right), \quad (15) \\ \gamma_2'' = \delta^2 \operatorname{Re}\left(P_{11} + 2\varepsilon\gamma_2 + W\gamma_2'\right), \\ P_0' = 0, P_{10}' = 0, P_{01}' = 0, P_{20}' = 0, P_{02}' = 0, P_{11}' = 0, \\ \varepsilon'' = \operatorname{Re}\delta^2\left(P_{20} + P_{02} + \varepsilon^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \Omega^2 + W\varepsilon'\right).$$

Граничные условия (2), (3), в соответствии с видом решения (14), получатся следующие: на нижней границе жидкости:

$$\delta U_0'(0) = aU_0(0), \quad \delta\gamma_1'(0) = a\gamma_1(0), \quad \delta\gamma_2'(0) = a\gamma_2(0), \quad \delta V_0'(0) = aV_0(0), \quad \delta\Omega'(0) = a\Omega(0), \\ \delta\varepsilon'(0) = a\varepsilon(0), \quad W(0) = 0;$$

на свободной поверхности:

$$U_0'(1) = \delta\tau_{10}, \quad V_0'(1) = \delta\tau_{20}, \quad \varepsilon'(1) = \mu\delta\left(\tau_{11}^1 + \tau_{22}^1\right)/2, \quad \gamma_1'(1) = \delta\tau_{11}, \\ \gamma_2'(1) = \delta\left(\tau_{12} + \tau_{21}\right)/2, \quad \Omega'(1) = \delta\left(\tau_{21} - \tau_{12}\right)/2, \quad (16)$$

$$P_{20}(1) = P_{20}^0, P_{02}(1) = P_{02}^0, P_{11}(1) = P_{11}^0.$$

Выделим два случая возмущений. Первый – возмущения касательных напряжений τ_{ij} на свободной поверхности. Возмущения τ_{ij}^1 могут не удовлетворять условиям совместности (12) и условию несжимаемости для слоистого течения (13). При этом будем считать, что давление $P^0(x, y)$ на свободной поверхности невозмущенное и описывается линейной функцией горизонтальных координат согласно условию совместности (11). Второй случай – касательные напряжения на свободной поверхности невозмущенные, $\tau_{ij}^1 = 0$, а давление представлено квадратичной функцией горизонтальных координат (14), коэффициенты при квадратичных слагаемых пропорциональны малому параметру μ .

Построение решений для возмущенных касательных напряжений

Первый случай. На свободной поверхности возмущенные граничные условия зависят от малого параметра μ и имеют вид (16). Решение системы уравнений (15) при граничных условиях (16) ищем в виде рядов по степеням малого параметра μ :

$$\begin{aligned} U_0(z, \mu) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m U_0^m(z), \quad V_0(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m V_0^m(z), \quad W(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m W^m(z), \\ \varepsilon(z, \mu) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \varepsilon^m(z), \quad \Omega(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \Omega^m(z), \\ \gamma_1(z, \mu) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \gamma_1^m(z), \quad \gamma_2(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \gamma_2^m(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Так как невозмущенное течение слоистое, то $\varepsilon^0(z) = 0$ и $W^0(z) = 0$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ , получим последовательность неоднородных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Система уравнений m -ого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} U_0^{m''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left[P_{10}^m + \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left(U_0^i (\varepsilon^j + \gamma_1^j) + V_0^i (\gamma_2^j - \Omega^j) + W^j U_0^{i'} \right) \right], \\ V_0^{m''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left[P_{01}^m + \left(V_0^i (\varepsilon^j - \gamma_1^j) - U_0^i (\gamma_2^j + \Omega^j) + W^j V_0^{i'} \right) \right], \\ W^{m''} &= \operatorname{Re} \left[P_0^{m''} + \delta^2 \sum_{i,j=0}^{i+j=m} W^i W^{j'} \right], \\ \Omega^{m''}(z) &= \operatorname{Re} \delta^2 \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left(2\varepsilon^i \Omega^j + W^i \Omega^{j'} \right), \\ \gamma_1^{m''} &= \operatorname{Re} \delta^2 \left[P_{20}^m - P_{02}^m + \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left(2\varepsilon^i \gamma_1^j + W^i (\gamma_1^j)' \right) \right], \\ \gamma_2^{m''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left[P_{11}^m + \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left(2\varepsilon^i \gamma_2^j + W^i (\gamma_2^j)' \right) \right], \\ P_0^{m''} &= 0, P_{10}^{m''} = 0, P_{01}^{m''} = 0, P_{20}^{m''} = 0, P_{02}^{m''} = 0, P_{11}^{m''} = 0, \\ \varepsilon^{m''} &= \operatorname{Re} \delta^2 \left[P_{20}^m + P_{02}^m + \sum_{i,j=0}^m \left(\varepsilon^i \varepsilon^j + \gamma_1^i \gamma_1^j + \gamma_2^i \gamma_2^j - \Omega^i \Omega^j + W^i \varepsilon^{j'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений при нулевой степени параметра μ называется порождающей. Порождающая система описывает адвективное течение несжимаемой жидкости и является переопреде-

ленной или дифференциально-алгебраической. Одно из уравнений системы – алгебраическое соотношение. При выполнении условий совместности (11), (12) и условия несжимаемости (13) для слоистого течения порождающая система примет вид:

$$U_0^{0''} = \delta^2 \operatorname{Re} \left[P_{10}^0 + U_0^0 \gamma_1^0 + V_0^0 (\gamma_2^0 - \Omega^0) \right], \quad V_0^{0''} = \delta^2 \operatorname{Re} \left[P_{01}^0 - V_0^0 \gamma_1^0 + U_0^0 (\gamma_2^0 + \Omega^0) \right],$$

$$\Omega^{0''} = 0, \quad \gamma_1^{0''} = 0, \quad \gamma_2^{0''} = 0, \quad (19)$$

$$P_{20}^0 + P_{02}^0 + (\gamma_1^0)^2 + (\gamma_2^0)^2 - (\Omega^0)^2 = 0. \quad (20)$$

Условие совместности (12) в новых переменных преобразовалось в алгебраическое соотношение (20), связывающее переменные, описывающие компоненты скорости сдвига γ_1^0 , γ_2^0 , угловую скорость вращения элемента жидкости Ω^0 и коэффициенты давления P_{20}^0 , P_{02}^0 , P_{11}^0 [3, 4]. Общее решение системы (19) с учетом невозмущенных граничных условий имеет вид:

$$\gamma_1^0(z) = C_1^0(z + a/\delta), \quad \gamma_2^0(z) = C_3^0(z + a/\delta), \quad \Omega^0(z) = C_5^0(z + a/\delta).$$

$$U_0^0 = \operatorname{Re}^2 \delta^4 \left((C_3^0 - C_5^0) P_{01}^0 + C_1^0 P_{10}^0 \right) \left[\frac{z^5}{40} + \frac{z^4}{24} \left(\frac{a}{\delta} - \frac{1}{12} \right) + z \left(\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{5a}{6\delta} + \frac{5}{24} \right) + \frac{a^3}{\delta^3} + \frac{5a^2}{5\delta^2} - \frac{z^3 a}{3\delta} - \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} + \frac{5a}{24\delta} \right] + \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \tau_{10}^0 + \operatorname{Re} P_{10}^0 \delta^2 \left(\frac{z^2}{2} - z - \frac{a}{\delta} \right) + \operatorname{Re} \left(C_1^0 \tau_{10}^0 + (C_3^0 - C_5^0) \tau_{20}^0 \right) \delta^2 \left[\frac{z^4}{12} + \frac{z^3 a}{3\delta} + \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} - \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \left(\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{a}{\delta} + \frac{1}{3} \right) \right],$$

$$V_0^0(z) = \operatorname{Re}^2 \delta^4 \frac{C_1^0 \left((C_3^0 - C_5^0) P_{01}^0 + C_1^0 P_{10}^0 \right)}{C_3^0 - C_5^0} \left[\frac{z^2 a^2}{2\delta^2} + \frac{z^3 a}{3\delta} - \frac{z^5}{40} - \frac{z^4}{12} \left(\frac{1}{2\delta} - 1 \right) - \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \left(\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{10a}{12\delta} + \frac{5}{24} \right) \right] + \tau_{20}^0 \left(z + \frac{a}{\delta} \right) + \operatorname{Re} P_{01}^0 \delta^2 \left(\frac{z^2}{2} - z - \frac{a}{\delta} \right) + \operatorname{Re} \frac{C_1^0 \left(C_1^0 \tau_{10}^0 + (C_3^0 - C_5^0) \tau_{20}^0 \right)}{C_3^0 - C_5^0} \delta^2 \left(-\frac{z^4}{12} - \frac{z^3 a}{3\delta} - \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} + \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \left(\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{a}{\delta} + \frac{1}{3} \right) \right).$$

Здесь введены обозначения:

$$C_1^0 = \delta \tau_{11}^0, \quad C_3^0 = \delta (\tau_{12}^0 + \tau_{21}^0) / 2, \quad C_5^0 = \delta (\tau_{21}^0 - \tau_{12}^0) / 2. \quad (21)$$

Система уравнений первого приближения

Система уравнений первого приближения строится на основе системы (15). После подстановки выражений сдвиговых слагаемых компонент скорости с учетом условия несжимаемости получим линейную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с переменными коэффициентами. Здесь и далее будем явно указывать аргумент функций, известных к моменту решения очередной подсистемы уравнений. Уравнения системы записаны в порядке их решения. Уравнения градиентов давления:

$$P_0^{1'} = 0, \quad P_{10}^{1'} = 0, \quad P_{01}^{1'} = 0, \quad P_{20}^{1'} = 0, \quad P_{02}^{1'} = 0, \quad P_{11}^{1'} = 0. \quad (22)$$

Уравнения сдвиговых слагаемых компонент скорости разбиваются на две подсистемы:

$$\Omega^{1''} = \operatorname{Re} \delta^2 \left(2\Omega^0 \varepsilon^1 + \Omega^{0'} W^1 \right),$$

$$\gamma_1^{1''} = \operatorname{Re} \delta^2 \left(P_{20}^1 - P_{02}^1 + 2\gamma_1^0 \varepsilon^1 + \gamma_1^{0'} W^1 \right), \quad (23)$$

$$\gamma_2^{1''} = \delta^2 \operatorname{Re} \left(P_{11}^1 + 2\gamma_2^0 \varepsilon^1 + \gamma_2^{0'} W^1 \right).$$

Уравнение скорости изменения площади элемента жидкости, вертикальной компоненты скорости жидкости и фонового давления на свободной поверхности:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1''} &= \operatorname{Re} \delta^2 \left(P_{20}^1 + P_{02}^1 + 2\gamma_1^0 \gamma_1^1 + 2\gamma_2^0 \gamma_2^1 - 2\Omega^0 \Omega^1 \right), \\ W^{1'} &= -2\varepsilon^1, \\ W^{1''} &= \operatorname{Re} P_0^{0'}.\end{aligned}\tag{24}$$

Уравнения фоновых слагаемых компонент скорости

$$\begin{aligned}U_0^{1''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left(\gamma_1^0 U_0^1 + (\gamma_2^0 - \Omega^0) V_0^1 + P_{10}^1 + U_0^0 (\varepsilon^1 + \gamma_1^1) + V_0^0 (\gamma_2^1 - \Omega^1) + U_0^0 W^1 \right), \\ V_0^{1''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left((\gamma_2^0 + \Omega^0) U_0^1 - \gamma_1^0 V_0^1 + P_{01}^1 + V_0^0 (\varepsilon^1 - \gamma_1^1) + U_0^0 (\gamma_2^1 + \Omega^1) \right).\end{aligned}\tag{25}$$

Граничные условия для систем (22)–(25) на твердой границе:

$$\begin{aligned}\delta U_0^{1'}(0) &= a U_0^1(0), \quad \delta \gamma_1^{1'}(0) = a \gamma_1^1(0), \quad \delta \gamma_2^{1'}(0) = a \gamma_2^1(0), \quad \delta V_0^{1'}(0) = a V_0^1(0), \quad \delta \Omega^{1'}(0) = a \Omega^1(0), \\ \delta \varepsilon^{1'}(0) &= a \varepsilon^1(0), \quad W^1(0) = 0;\end{aligned}$$

на свободной границе

$$\begin{aligned}U_0^{1'}(1) &= 0, \quad V_0^{1'}(1) = 0, \\ \varepsilon^{1'}(1) &= (\tau_{11}^1 + \tau_{22}^1)/(2\delta), \quad \gamma_1^{1'}(1) = (\tau_{11}^1 - \tau_{22}^1)/(2\delta), \quad \gamma_2^{1'}(1) = (\tau_{12}^1 + \tau_{21}^1)/(2\delta), \\ \Omega^{1'}(1) &= (\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1)/(2\delta), \quad P_{20}^1(1) = 0, \quad P_{02}^1(1) = 0, \quad P_{11}^1(1) = 0.\end{aligned}\tag{26}$$

С помощью простых преобразований задача интегрирования системы (22)–(25) сводится к последовательному взятию нескольких квадратур. Из первой подсистемы (22) следует, что градиенты давления постоянные. Общее решение системы первого приближения (23), (24) получено в виде суммы многочленов переменных z и a/δ :

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &= \frac{Q_1}{2} \left(z + \frac{a}{\delta} \right) + Q_2 \operatorname{Re} \delta^3 \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z}{3} + \frac{a}{\delta} \left(\frac{z^3}{3} - z - \frac{1}{3} \right) + \frac{a^2}{\delta^2} \left(\frac{z^2}{2} - z - 1 \right) - \frac{a^3}{\delta^3} \right), \\ W^1 &= -\delta z Q_1 \left(\frac{a}{\delta} + \frac{z}{2} \right) + \frac{Q_2 \operatorname{Re} \delta^3}{30} z \left(60 \frac{a^3}{\delta^3} - 10 \frac{a^2}{\delta^2} (z^2 - 3z - 6) - 5 \frac{a}{\delta} (z^3 - 6z - 4) - z(z^3 - 10) \right), \\ \gamma_1^1 &= \frac{\delta}{2} (\tau_{11}^1 - \tau_{22}^1) \left(z + \frac{a}{\delta} \right) + \operatorname{Re} C_1^0 Q_1 \delta^3 \left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{\delta^2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{a}{\delta} z^3 + \frac{z^4}{24} - \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \left(\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\delta} + \frac{1}{6} \right) \right) + \\ &+ \operatorname{Re}^2 C_1^0 \delta^5 \left[\frac{z^5 a^2}{15 \delta^2} + \frac{z^6 a}{45 \delta} + \frac{z^7}{315} + \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \left(2 \frac{a^4}{\delta^4} + \frac{8 a^3}{3 \delta^3} + \frac{5 a^2}{3 \delta^2} + \frac{8 a}{15 \delta} + \frac{4}{45} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{z^4}{12} \left(\frac{a^3}{\delta^3} - \frac{a^2}{\delta^2} - \frac{a}{\delta} - \frac{1}{3} \right) - z^2 \left(\frac{a}{\delta} + \frac{z}{3} \right) \left(\frac{a^3}{\delta^3} + \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{3} \frac{a}{\delta} \right) \right] Q_2, \\ \gamma_2^1 &= \frac{\delta}{2} \left(\frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{12}^1 + \tau_{21}^1) + \operatorname{Re} C_3^0 Q_1 \delta^3 \left(\frac{z^2 a^2}{2 \delta^2} + \frac{z^3 a}{6 \delta} + \frac{z^4}{24} - \left(z + \frac{a}{\delta} \right) \left(\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\delta} + \frac{1}{6} \right) \right) + \\ &+ \operatorname{Re}^2 C_3^0 \delta^5 \left\{ \frac{z^5 a^2}{15 \delta^2} + \left(\frac{a}{\delta} + z \right) \left(2 \frac{a^4}{\delta^4} + \frac{8 a^3}{3 \delta^3} + \frac{5 a^2}{3 \delta^2} + \frac{8 a}{15 \delta} + \frac{4}{45} \right) - \left(\frac{z^3}{3} + z^2 \frac{a}{\delta} \right) \left(\frac{a^3}{\delta^3} + \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{3} \frac{a}{\delta} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{z^6 a}{45 \delta} + \frac{z^7}{315} + \frac{z^4}{12} \left(\frac{a^3}{\delta^3} - \frac{a^2}{\delta^2} - \frac{a}{\delta} - \frac{1}{3} \right) \right\} Q_2, \\ \Omega^1(z) &= \frac{\delta}{2} \left(\frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1) - C_5^0 Q_1 \operatorname{Re} \delta^3 \left(\frac{a^3}{\delta^3} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\delta^2} (z^2 - 2z - 1) - \frac{1}{6} \frac{a}{\delta} (z^3 - 3z - 1) - \frac{z}{24} (z^3 - 4) \right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C_5^0}{1260} \operatorname{Re}^2 \delta^5 \left[2520 \frac{a^5}{\delta^5} - 420 \frac{a^4}{\delta^4} (3z^2 - 6z - 8) + 105 \frac{a^3}{\delta^3} (20 + 32z - 12z^2 - 4z^3 + z^4) + \right. \\
 & + 21 \frac{a^2}{\delta^2} (32 + 100z - 20z^2 - 20z^3 - 5z^4 + 4z^5) + 7 \frac{a}{\delta} (16 + 96z - 20z^3 - 15z^4 + 4z^6) + \\
 & \left. + z(112 - 35z^3 + 4z^6) \right] Q_2.
 \end{aligned}$$

Решения системы первого приближения содержат два слагаемых: одно с множителем

$$Q_1 = \tau_{11}^1 + \tau_{22}^1,$$

второе с множителем

$$Q_2 = \tau_{11}^0 \tau_{11}^1 + \tau_{21}^0 \tau_{12}^1 + \tau_{12}^0 \tau_{21}^1 - \tau_{11}^0 \tau_{22}^1. \quad (27)$$

Первое слагаемое описывает влияние на решение системы первого приближения отклонения от условия несжимаемости (12), а второе – влияние отклонения от условия совместности (13).

Если выполняются равенства $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$, то решение системы первого приближения принимает вид:

$$\gamma_1^1 = \frac{\delta}{2} (\tau_{11}^1 - \tau_{22}^1) \left(z + \frac{a}{\delta} \right), \quad \gamma_2^1 = \frac{\delta}{2} \left(\frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{12}^1 + \tau_{21}^1), \quad \Omega^1 = \frac{\delta}{2} \left(\frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1), \quad \varepsilon^1 = 0, \quad W^1 = 0.$$

Вертикальная компонента скорости и скорость изменения площади элемента жидкости обращаются в нуль, течение при выполнении указанных условий остается слоистым.

Первые приближения фоновых слагаемых горизонтальных компонент скорости строятся по той же схеме, что и фоновые слагаемые нулевого приближения. В результате получаются полиномы высокого порядка, которые за громоздкостью не приводятся.

Граничные условия следующих приближений ($m > 1$) на свободной границе берутся однородными $\varepsilon^{m'}(1) = 0$, $\gamma_1^{m'}(1) = 0$, $\gamma_2^{m'}(1) = 0$, $\Omega^{m'}(1) = 0$. Решения получаются в виде многочленов переменных z и a/δ .

Ниже приведены результаты вычислений решений системы первого приближения (23), (24) при некоторых вариантах значений параметров.

Вариант 1. Параметры системы и градиенты давления:

$$\operatorname{Re} = 10, \quad \delta = 0,1, \quad a = 0, \quad P_{10}^0 = 1, \quad P_{01}^0 = 0.$$

Невозмущенные касательные напряжения:

$$\tau_1^0 = 10,0, \quad \tau_2^0 = 0, \quad \tau_{11}^0 = 1,0, \quad \tau_{12}^0 = -1,0, \quad \tau_{21}^0 = 1,0.$$

Возмущения касательных напряжений: $\tau_{11}^1 = 0,01$, $\tau_{12}^1 = 1,0$, $\tau_{22}^1 = 0,1$.

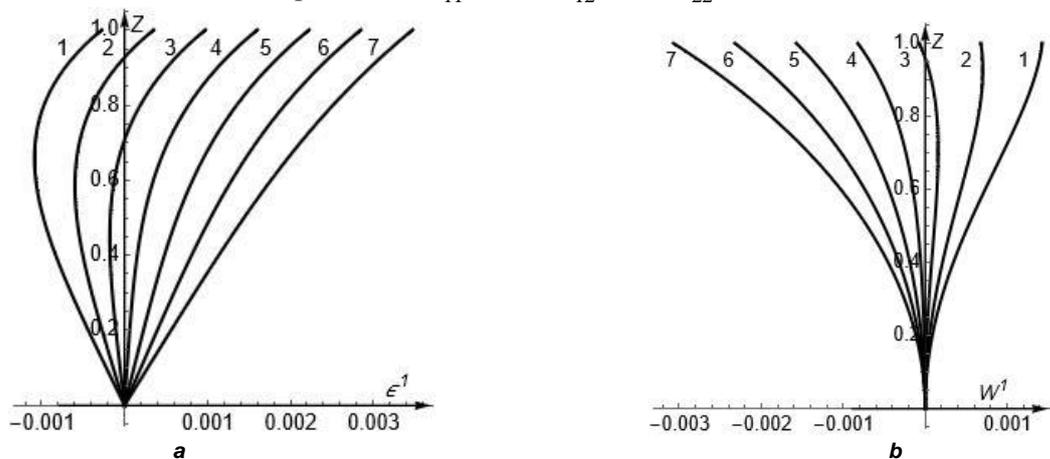


Рис. 1. Профили скорости изменения площади элемента жидкости (а) и вертикальной компоненты скорости (б) в зависимости от возмущения касательных напряжений τ_{21}^1

Таблица 1

Номера кривых и соответствующие значения параметра τ_{21}^1 и функций Q_1 и Q_2

№	1	2	3	4	5	6	7
τ_{21}^1	-1,42	-1,15	-0,9	-0,65	-0,4	-0,15	0,1
Q_1	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
Q_2	-0,3	-0,05	0,2	0,45	0,7	0,95	1,2

При выбранных значениях возмущения касательных напряжений, представленных в табл. 1, функции Q_1 и Q_2 (27) отличны от нуля. Из полученных результатов видно, что вертикальная компонента скорости $W^1(z)$ (рис 1, b) и скорость изменения площади элемента жидкости $\varepsilon^1(z)$ могут быть знакопеременными функциями (рис 1, a). На рис. 1 проиллюстрировано, что происходит расслоение жидкости по вертикальной компоненте скорости: в жидкости возникает слой, который не смещается по вертикали. При этом слои жидкости выше точки смены знака скорости опускаются вниз, а слои ниже этой точки поднимаются вверх.

Вариант 2. Параметры системы и градиенты давления: $Re=10$, $\delta=0,1$, $a=0$, $P_{10}^0=1$, $P_{01}^0=0$. Невозмущенные касательные напряжения: $\tau_{10}=10$, $\tau_{20}=0$, $\tau_{11}^0=1$, $\tau_{12}^0=1$, $\tau_{21}^0=1$. Возмущения касательных напряжений: $\tau_{11}^1=0,05$, $\tau_{12}^1=1$, $\tau_{22}^1=-0,05$.

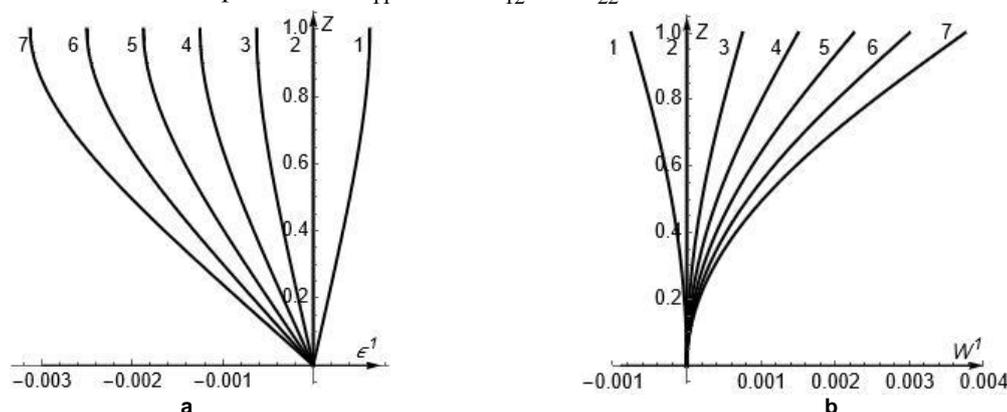


Рис. 2. Профили скорости изменения площади элемента жидкости (а) и вертикальной компоненты скорости (b) в зависимости от возмущения касательных напряжений τ_{21}^1

Таблица 2

Номера кривых и соответствующие значения возмущений касательных напряжений τ_{21}^1 и функции Q_2 :

	1	2	3	4	5	6	7
τ_{21}^1	-1,35	-1,1	-0,85	-0,6	-0,35	-0,1	0,15
Q_2	-0,25	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25

Здесь (см. табл. 2) касательные напряжения подобраны так, что выполняется первое равенство (27) – условие несжимаемости, функция Q_1 обращается в нуль. Кривая 2 (рис. 2, b) соответствует значениям касательных напряжений, при которых одновременно выполняется и второе равенство в (27) – функция Q_2 обращается в нуль. При этом вертикальная компонента скорости и скорость изменения площади элемента обращаются в нуль. Угловая скорость вращения элемента $\Omega(z)$ и скорости деформации сдвига $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ являются монотонными функциями переменной z (рис. 2, a), близкими к линейным.

Заключение

В работе построены аналитические решения уравнений Навье–Стокса, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости при малых возмущениях граничных условий. Решения построены в виде рядов по степеням малого параметра, определяющего малость возмущений. Невозмущенные значения граничных условий соответствуют слоистому течению и являются усло-

виями совместности переопределенной системы уравнений, описывающей нулевое приближение. Исследовалось возмущение касательных напряжений. Показано, что при нарушении условий совместности возникает вертикальная компонента скорости, пропорциональная малому параметру. Показано также, что условие совместности (12) является достаточным, но не необходимым для существования сдвигового течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 25–29–00339).

Литература

1. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations / S.V. Ershkov, E.Yu. Prosviryakov, N.V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53, no. 4. – p. 044501.

2. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review / S.V. Ershkov, E.Y. Prosviryakov, N.V. Burmasheva, V. Christianto // *Symmetry*. – 2023. – Vol. 15, no. 10. – P. 1825.

3. Drazin, P.G. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions* / P.G. Drazin, N. Riley. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.

4. Пухначев, В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса / В.В. Пухначев // *Успехи механики*. – 2006. – Vol. 4, no. 1. – P. 6–76.

5. Lin, C.C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics / C.C. Lin // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395.

6. Сидоров, А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн / А.Ф. Сидоров // *Прикл. мех. техн. физ.* – 1989. – Т. 30, № 2. – С. 34–40.

7. Аристов, С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: автореферат дис. ... доктора физико-математических наук: 01.02.05 / С.Н. Аристов // Ин-т автоматизации и процессов управления. – Владивосток, 1990. – 32 с.

8. Аристов, С.Н. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии / С.Н. Аристов, Е.Ю. Просвиряков // *Теор. основы хим. технологии*. – 2016. – Т. 50, № 3. – С. 294.

9. Аристов, С.Н. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С.Н. Аристов, Д.В. Князев, А.Д. Полянин // *Теоретические основы химической технологии*. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547–566.

10. Аристов С.Н., Полянин А.Д. Новые классы точных решений уравнений Эйлера / С.Н. Аристов, А.Д. Полянин // *Доклады РАН*. – 2008. – Т. 419, № 3. – С. 328–333.

11. Шварц К.Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // *Изв. РАН. МЖГ*. – 2014. – № 4. – С. 26–30.

12. Шварц, К.Г. Устойчивость адвективного течения во вращающемся горизонтальном теплоизолированном снизу слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малом числе Прандтля / К.Г. Шварц // *Изв. РАН. МЖГ*. – 2022. – № 2. – С. 38–50.

13. Шварц, К.Г. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости при учете проскальзывания Навье / К.Г. Шварц, Ю.А. Шварц // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2020. – № 1. – С. 33–44.

14. Шварц, К.Г. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном теплоизолированном снизу слое жидкости с твердыми границами / К.Г. Шварц, Ю.А. Шварц // *Прикладная математика и механика*. – 2022. – Т. 86, Вып. 6. – С. 926–937.

15. Зубарев, Н.М. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости / Н.М. Зубарев, Е.Ю. Просвиряков // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2019. – Т. 60, № 6(358). – С. 65–71.

16. Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // *Труды института Математики и механики УрО РАН*. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 32–41.

17. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Isothermal Equatorial Poiseuille–Ekman Flow / A.V. Gorshkov, E.Y. Prosviryakov // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2315, Iss. 1. – 050008.

18. Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю. Застойные точки неоднородного решения, описывающего конвективное течение Экмана в экваториальной зоне океана / А.В. Горшков, Е.Ю. Просви-

ряков // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2022. – Iss. 1. – P. 52–66. <http://dream-journal.org>.

19. Шелухин, В.В. Об одном условии проскальзывания для уравнения вязкой жидкости / В.В. Шелухин, У.А. Христенко // *ПМТФ*. – 2013. – Т. 54, № 5(321). – С. 101–109.

20. Neto, C. Boundary Slip in Newtonian Liquids: a Review of Experimental Studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso // *Reports on Progress in Physics*. – 2005. – Vol. 68, Iss. 12. – P. 2859–2897.

21. Борзенко Е.И., Дьякова М, Шрагер Г.Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале / Е.И. Борзенко, М. Дьякова, Г.Р. Шрагер // *Вестник ТГУ, Механика*. – 2014. – № 2(28). – С. 35–44.

22. Bulíček, M. Internal Flows of Incompressible Fluids Subject to Stick-Slip Boundary Conditions / M. Bulíček, J. Málek // *Vietnam Journal of Mathematics*. – 2017. – Vol. 45. – P. 207–220.

23. Plastic Effect on the Sliding Inception between a Cylinder and a Rigid Flat / S. Zhang, J. Huan, H. Song *et al.* // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2019. – Vol. 32. – P. 1–16.

24. Role of Interfacial Conditions on Blast Overpressure Propagation into the Brain / Y. Chen, T.J. O'Shaughnessy, G.H. Kamimori *et al.* // *Frontiers in Neurology*. – 2020. – Vol. 11. – Article 323.

Поступила в редакцию 25 сентября 2025 г.

Сведения об авторах

Горшков Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кафедра прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: alex55gor@mail.ru.

Просвирыков Евгений Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кафедра информационных технологий и систем управления, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: evgen_pros@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 52–64*

DOI: 10.14529/mmph250407

ISOTHERMAL COUETTE–POISEUILLE FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID WITH LOW VERTICAL VELOCITY

A.V. Gorshkov^{1,2}, E.Yu. Prosviryakov^{1,2}

¹ *The Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Yekaterinburg, Russian Federation*

² *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

E-mail: alex55gor@mail.ru, evgen_pros@mail.ru

Abstract. The paper considers an inhomogeneous solution to the Navier-Stokes equations, which describe a layered, large-scale, isothermal, vortical, Couette-Poiseuille flow of a viscous, incompressible fluid. Tangential stresses are imposed at the free surface of the liquid, simulating the effects of wind. On the solid surface, the sliding conditions of Navier are applied. The paper investigates the influence of small deviations from the compatibility conditions of the redefined set of equations describing this flow. If the compatibility conditions are not satisfied, the vertical component of velocity can be non-zero. The solution to the system of equations is constructed as a series in a small parameter that represents the deviation from the compatibility condition, with coefficients that depend on the vertical coordinate. The coefficients are obtained as polynomials of the vertical coordinate z .

Keywords: *Navier-Stokes equations, laminar flows, shear flows, exact solutions, compatibility conditions, perturbations, small parameter.*

References

1. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Burmasheva N.V., Christianto V. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, Vol. 53, no. 4, p. 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0
2. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review. *Symmetry*, 2023, Vol. 15, no. 10, p. 1825. DOI: 10.3390/sym15101825
3. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p. DOI: 10.1017/cbo9780511526459.
4. Pukhnachev V.V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'e–Stoksa (Symmetries in Navier–Stokes equations). *Uspekhi mekhaniki (Achievements in Mechanics)*, 2006, Vol. 4, no. 1, pp. 6–76. (in Russ.).
5. Lin C.C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, Vol. 1, pp. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016
6. Sidorov A.F. Two Classes of Solutions of the Fluid and Gas Mechanics Equations and their Connection to Traveling Wave Theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, Vol. 30, no. 2, pp. 197–203.
7. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti: avtoreferat dis. ... doktora fiziko-matematicheskikh nauk: 01.02.05* (Eddy Currents in Thin Liquid Layers, 01.02.05, Dr. phys. and math. sci. diss.). Vladivostok, Institut avtomatiki i protsessov upravleniya Publ., 1990, 32 p. (in Russ.).
8. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. A New Class of Exact Solutions for Three-dimensional Thermal Diffusion Equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, Vol. 50, no. 3, pp. 286–293.
9. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations with the Linear Dependence of Velocity Components on two Space Variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, Vol. 43, no. 5, pp. 642–662.
10. Aristov S.N., Polyanin A.D. Novye klassy tochnykh resheniy uravneniy Eylera (New Classes of Exact Solutions of Euler Equations). *Doklady RAN*, 2008, Vol. 419, Iss. 3, pp. 328–333.
11. Schwarz K.G. Plane-Parallel Advective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer with Rigid Boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, Vol. 49, no. 4, pp. 438–442.
12. Schwarz K.G. Stability of Advective Flow in a Rotating Horizontal Incompressible Fluid Layer Heat-insulated From Below with Rigid Boundaries at Low Prandtl Number. *Fluid Dynamics*, 2022, Vol. 57, no. 2, pp. 146–157. DOI: 10.31857/S0568528122020086
13. Schwarz K.G., Schwarz Y.A. Stability of Advective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer in the Presence of the Navier Slip Condition. *Fluid Dynamics*, 2020, Vol. 55, no. 1, pp. 31–42. DOI: 10.31857/S0568528120010119
14. Shvarts K.G., Shvarts Yu.A. Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer Insulated from Below with Solid Boundaries. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2022, Vol. 86, iss. 6, pp. 926–937. (in Russ.). DOI: 10.31857/S0032823522060133
15. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions for the Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of Viscous Incompressible Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, no. 6, pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075
16. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic Solutions of Stationary Complex Convection Describing a Shear Stress Field of Different Signs. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, Vol. 23, no. 2, pp. 32–41. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41.
17. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Isothermal Equatorial Poiseuille–Ekman Flow. *AIP Conference Proceedings*, 2020, Vol. 2315, iss. 1, 050008; DOI: 10.1063/5.0036894
18. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Zastoynnye toчки neodnorodnogo resheniya, opisuyayushchego konvektivnoe techenie Ekmana v ekvatorial'noy zone okeana (Stagnation Points of an Inhomogeneous Solution Describing the Convective Ekman Flow in the Equatorial Zone of the Ocean). *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, iss. 1, pp. 52–66 <http://dream-journal.org>.
19. Shelukhin V.V., Khristenko U.A. On One Slip Condition for the Equations of a Viscous Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, Vol. 54, no. 5, pp. 773–780. DOI: 10.1134/S0021894413050106

20. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary Slip in Newtonian Liquids: A Review of Experimental Studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, Vol. 68, Iss. 12. p. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05

21. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the Slip Phenomenon for a Viscous Fluid Flow in a Curved Channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, no. 2(28), pp. 35–44.

22. Bulíček M., Málek J. Internal Flows of Incompressible Fluids Subject to Stick-Slip Boundary Conditions. *Vietnam Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 45, pp. 207–220. DOI: 10.1007/s10013-016-0221-z.

23. Zhang S., Huan J., Song H., Liu X., Wei Y.G. (2019) Plastic Effect on the Sliding Inception between a Cylinder and a Rigid Flat. *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 32, pp. 1–16. DOI: 10.1007/s10338-018-0060-4.

24. Chen Y., O'Shaughnessy T.J., Kamimori G.H., Horner D.M., Egnoto M.J., Bagchi A. Role of Interfacial Conditions on Blast Overpressure Propagation into the Brain. *Frontiers in Neurology*, 2020, Vol. 11, Article 323. DOI: 10.3389/fneur.2020.00323

Received September 25, 2025

Information about the authors

Gorshkov Aleksandr Vasil'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, The Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Yekaterinburg, Russian Federation, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: alex55gor@mail.ru.

Prosviryakov Evgeniy Yur'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, The Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Yekaterinburg, Russian Federation, Department of Information Technologies and Management Systems, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: evgen_pros@mail.ru.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА СЕЙСМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ВЗРЫВОВ ПРИ ОТКРЫТОЙ РАЗРАБОТКЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Н.Н. Ефремовцев, И.Е. Шиповский

*Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова Российской академии наук (ИПКОН РАН), г. Москва, Российская Федерация
E-mail: noee7@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрены основные положения методики проведения исследований сейсмического действия взрыва на полигоне и особенности применения метода сглаженных частиц (SPH) для исследования сейсмического действия взрыва в монолитных и трещиноватых массивах. Представлены результаты численных исследований, направленных на оценку влияния параметров взрывных работ на сейсмическое воздействие. В рамках полигонных испытаний и численного моделирования методом сглаженных частиц (SPH) проанализирована зависимость векторной скорости смещения грунта от скорости детонации. Исследования проведены для различных типов массивов – монолитных и трещиноватых. Установлено, что зависимость скорости смещения грунта от скорости детонации зарядов носит полиномиальный характер. Это свидетельствует о сложной, нелинейной природе данного процесса. Такая закономерность подразумевает возможность существования экстремумов - участков максимального или минимального эффекта, что важно учитывать при прогнозировании и оптимизации параметров взрывных работ.

Ключевые слова: буровзрывные работы (БВР); сейсмическое воздействие; скорость детонации; метод сглаженных частиц (SPH); монолитный массив; трещиноватый массив; полигонные испытания; векторная скорость смещения грунта; численное моделирование; оптимизация параметров взрывных работ.

Введение

Рост масштабов открытых горных работ вблизи жилой застройки и объектов производственного назначения, а также необходимость соблюдения требований по сейсмической и экологической безопасности обуславливают актуальность комплексных исследований воздействия взрывов. В работах [1–4] приведены результаты исследований влияния свойств пород и технологических факторов на сейсмическое действие промышленных взрывов, физические процессы формирования и распространения сейсмических волн и особенности их воздействия на механические системы, результаты исследований на горных предприятиях при открытой разработке месторождений полезных ископаемых. Проведен анализ влияния на сейсмический эффект массовых взрывов (результатирующую векторную скорость смещения грунта) следующих факторов: массы взрывааемого ВВ, масштабов массовых взрывов; количества групп скважин при различном удельном расходе ПВВ, глубины заложения зарядов, точности средств инициирования. М.И. Садовским, В.Ф. Писаренко [5] рассмотрены особенности режима сейсмического процесса в блоковой геофизической среде земной коры, которая рассматривается как сложная, неоднородная иерархическая система отдельных частей. Тенденция роста масштабов взрывных работ приводит к увеличению числа взрывааемых блоков, ступеней замедления и числа групп зарядов (ЧГЗ) общей продолжительности взрыва, что обуславливает повышение вероятности прироста результирующей векторной скорости смещения грунта у охраняемых объектов. В работах [6, 7] представлены результаты исследований в условиях полигона характера влияния скорости детонации на показатели сейсмического действия взрыва и содержание вредных газов в продуктах детонации, результаты систематизации способов управления сейсмическим действием взрыва как основы научного подхода к управлению действием взрыва, полученные SPH-методом зависимости векторной скорости смещения грунта от расстояния до заряда в различных зонах действия взрыва в монолитном и тре-

щиноватом массивах, влияние дифракции прямых и отраженных волн, а также методические аспекты расчета энергии, расходуемой на сейсмическое действие взрыва и ударную воздушную волну. Однако в настоящее время методы численного моделирования для оценки сейсмического воздействия БВР остаются недостаточно разработанными.

Методика проведения исследований

Особое значение приобретают методы, позволяющие оценивать влияние свойств взрывчатых веществ и параметров зарядов на характеристики сейсмического поля и уровень взрывного шума. В то же время существующие численные подходы не всегда обеспечивают достаточную точность и универсальность при моделировании сейсмических процессов, связанных с БВР. Полигонные экспериментальные исследования проводились с использованием зарядов идентичной массы и при постоянной влажности грунта, что обеспечивало воспроизводимость условий испытаний. Взрывчатые вещества размещались в специальных детонационных системах различных типов, заключённых в металлические или бетонные оболочки, что позволяло точно фиксировать скорость детонации. Для регистрации параметров взрывов применялось современное измерительное оборудование, предназначенное для записи сейсмических колебаний и воздушных ударных волн. Датчики сейсмического воздействия и микрофоны устанавливались на заранее заданных, строго фиксированных расстояниях от эпицентра каждого взрыва. В процессе испытаний производилась регистрация амплитудных и частотных характеристик сейсмических волн, а также измерение скорости смещения грунта по трем ортогональным направлениям. На основе полученных данных рассчитывались средние и максимальные значения скорости смещения, а также результирующая векторная скорость. Дополнительно оценивались параметры взрывного шума, включая его интенсивность и спектральный состав, что позволило комплексно охарактеризовать сейсмическое и акустическое воздействие каждого взрыва.

Численное моделирование проводилось с использованием метода сглаженных частиц SPH [8], который обеспечивает высокую точность при описании динамики деформируемых тел и процессов разрушения горных пород. В рамках данного подхода были построены цифровые модели как монолитных, так и трещиноватых горных массивов, с учётом реальной геометрии зарядных полостей, свободных поверхностей и подпорных стенок, сформированных из ранее разрушенного материала.

Каждая частица в SPH-модели представляет собой элементарный объём среды с заданными физико-механическими характеристиками. Это позволяет достоверно моделировать процессы фрагментации, передачи напряжений и распространения ударных волн в неоднородной горной среде. В модели подробно воспроизводится конструкция зарядов, их пространственное размещение в уступе, а также геометрические параметры буровых скважин. Для каждого случая подбирался соответствующий тип взрывчатого вещества на основе технологической базы данных для учета влияния взрывчатых характеристик средств разрушения горных пород.

Особое внимание уделялось моделированию трещиноватых зон с различной ориентацией и толщиной трещин, что критически влияет на перераспределение энергии и направление фронта разрушения. Расчёты проводились в контрольных точках, расположенных на различном удалении от зарядов для определения закономерностей пространственного распределения максимальных и средних значений результирующей векторной скорости смещения грунта, а также напряжённого состояния массива.

Все модели проходили калибровку на основе данных, полученных в ходе полигонных испытаний или опытных взрывов в промышленных условиях. Результаты моделирования использовались для оценки изменения среднего расстояния между трещинами, объема образовавшихся мелких фракций, а также амплитуд и продолжительности сейсмического воздействия в различных зонах разрушаемого взрывом массива.

Объект исследования

Процессы распространения сейсмического воздействия при взрывных работах в горных массивах различной структуры (монолитных и трещиноватых), сопровождающиеся смещением грунта и образованием напряжённого состояния массива горных пород, и защищаемых объектах производственного и непроизводственного назначения.

Предмет исследования

Фундаментальные закономерности и параметры, характеризующие сейсмическое действие взрыва в монолитном и трещиноватом массиве горных пород и в условиях полигона. Пространственно-временные зависимости результирующей векторной скорости смещения грунта и их изменение в зависимости от скорости детонации взрывчатого вещества; закономерности распределения средних и пиковых значений сейсмических параметров в характерных зонах действия взрыва.

Результаты исследования

В ходе проведённых полигонных и численных исследований в частности получены зависимости средних значений результирующей векторной скорости смещения грунта (РВС) от расстояния до свободной поверхности (рис. 1) и от скорости детонации зарядов во взрываемом блоке (рис. 2).

На рис. 1 линия, обозначенная квадратами, показывает значения РВС при расстоянии от скважинного заряда до свободной поверхности 2 м; линия, обозначенная ромбами, – значения РВС до свободной поверхности при расстоянии 4 м; линия, обозначенная треугольниками, – значения РВС при расстоянии от скважинного заряда до свободной поверхности 6 м.

Установлен полиномиальный характер зависимости численных значений РВС от расстояния до заряда. Получены следующие убывающие полиномиальные зависимости третьего порядка при расстоянии от крайнего к бровке уступа скважинного заряда соответственно 6 и 4 м:

$$Y_1 = -1,2389x^3 + 16,48x^2 - 72,123x + 125,15; R = 0,9069, \tag{1}$$

$$Y_2 = -1,6389x^3 + 17,658x^2 - 64,144x + 104,92; R = 0,9594. \tag{2}$$

Получены зависимости влияния расстояния между скважиной и бровкой уступа на результирующую среднюю векторную скорость и наличие зоны максимального прироста и снижения сейсмического воздействия на массив горных пород. В рассмотренном случае минимальные значения РВС соответствуют расстоянию от крайней скважины до поверхности уступа, равному 4 м. Максимальный прирост вычисленных значений векторной скорости смещения (РВС) наблюдается в анализируемых расчетных сценариях при расстоянии от заряда до бровки уступа, равном 2 м. Этот эффект обусловлен, в частности, дифракцией прямых и отражённых волн.

На рис. 2 представлены обобщённые результаты расчётов, полученных для различных зон массива: ближней (4–7 радиусов заряда), средней (7–12 радиусов заряда) и дальней (50–70 радиусов заряда). Анализ полученных данных показал, что характер зависимостей – полиномиальный, что свидетельствует о сложной и многокомпонентной природе рассматриваемого процесса.

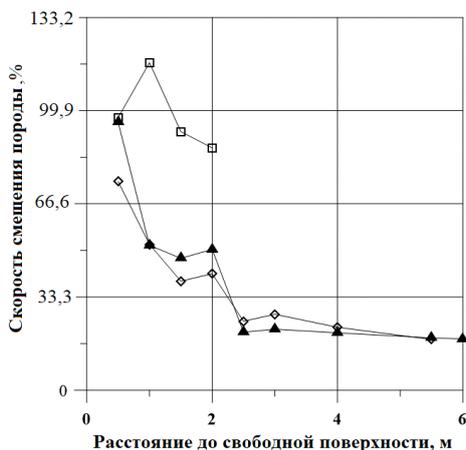


Рис. 1. Зависимость результирующей векторной скорости смещения грунта в относительных единицах от расстояния между скважинным зарядом и свободной поверхностью склона уступа

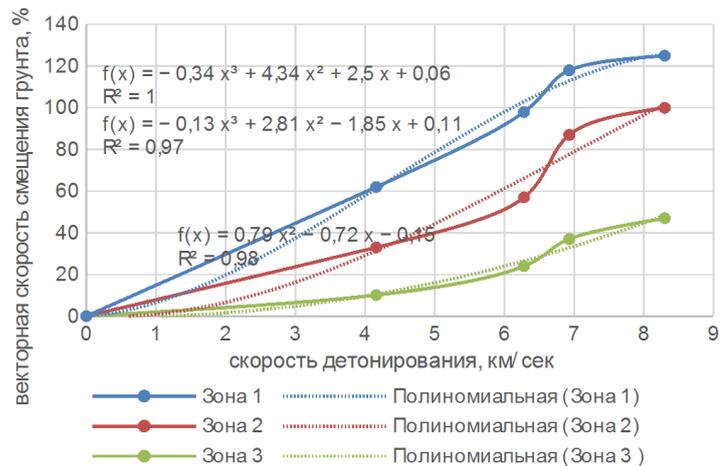


Рис. 2. Зависимости в относительных единицах векторной скорости смещения грунта от скорости детонации ВВ

На рис. 2 линия 1 показывает полиномиальную зависимость векторной скорости в относительных единицах в ближней зоне действия взрыва в пределах 4–7 радиусов заряда; линия 2 – полиномиальная зависимость в пределах 7–12 радиусов заряда; линия 3 – зависимость на расстоянии от 50–70 радиусов заряда.

Во всех рассмотренных случаях выявлена нелинейность зависимости результирующей векторной скорости смещения от скорости детонации взрывчатого вещества, расстояний от заряда до свободной поверхности. Установлено, что при увеличении скорости детонации наблюдается неравномерный рост или снижение результирующей векторной скорости смещения, причём в отдельных диапазонах возможны экстремальные значения – максимумы или минимумы, указывающие на точки повышенной чувствительности массива к параметрам взрыва. Такие участки требуют особого внимания при проектировании взрывных работ, так как могут приводить как к усиленному воздействию на окружающую среду, так и к неэффективному расходованию энергии заряда. Анализ также показал, что степень нелинейности зависимости усиливается в трещиноватых массивах, где наблюдаются процессы отражения и дифракции волн. При этом рассеяние энергии на структурных неоднородностях играет доминирующую роль. В монолитных массивах картина более стабильна, однако и в этом случае сохраняется полиномиальный характер связи между параметрами. Результаты моделирования подтверждены данными полигонных экспериментов и продемонстрировали хорошее совпадение по основным критериям: значениям амплитуд векторной скорости и характеру ослабления сейсмического сигнала с увеличением расстояния от центра взрыва. Выявленные закономерности позволяют сделать вывод о том, что изменение скорости детонации оказывает не просто линейное, а качественно сложное воздействие на структуру сейсмического поля. Это обусловлено одновременно действующими факторами: геометрией заряда, типом массива, расстоянием до свободной поверхности, а также физико-механическими свойствами породы. Проводятся исследования изменения во времени и пространстве волн напряжения и скорости смещения грунта сейсмического действия взрыва при наличии подпорной стенки. На рис. 3 представлена структура поля сейсмичности, а также численные значения результирующей векторной скорости смещения грунта.

Анализ результатов численных экспериментов показывает значительное изменение локализации областей с максимальными значениями результирующей скорости смещения (РСВ) в районе подпорной стенки, сформированной из ранее взорванной горной массы.

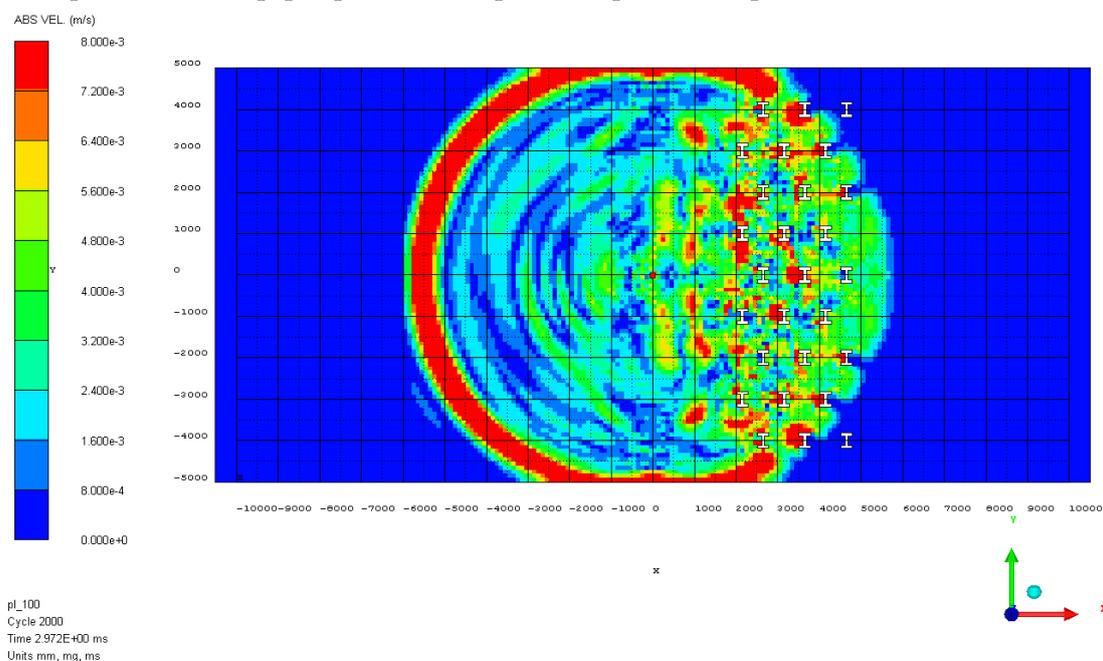


Рис. 3. Структура поля значений результирующей векторной скорости грунта в различные моменты времени при прохождении волной сжатия зоны горных пород, разрыхленной предыдущим взрывом

В левой части поля сейсмичности, где горные породы сохраняют монолитную структуру, волны смещения грунта и возникающие напряжения распространяются без разрывов по фронту. Они характеризуются максимальными амплитудами и наибольшим периодом колебаний.

В правой части поля, находящейся в зоне массива, разрушенного предыдущим взрывом, картина распространения сейсмических и напряжённых волн принципиально иная. Здесь наблюдается очаговый характер распространения: импульсы с высокой результирующей скоростью имеют значительно меньший период колебаний, а средние показатели РСВ в разрушенном массиве и за его пределами снижаются в 2 и более раза по сравнению с монолитной частью массива.

Таким образом, полученные результаты позволяют не только углубить понимание механизмов формирования сейсмического воздействия, но и использовать выявленные зависимости при инженерном обосновании параметров взрывных работ. Это особенно важно при их проведении вблизи объектов инфраструктуры или охраняемых территорий, где требуется строгий контроль над уровнем сейсмического воздействия.

Выводы

В результате выполненного исследования установлено, что зависимость векторной скорости смещения грунта от скорости детонации зарядов носит полиномиальный характер. Такая форма зависимости свидетельствует о нелинейной и многопараметрической природе распространения взрывной энергии в горных массивах. Полученные данные подтверждают, что интенсивность сейсмического воздействия определяется не только физико-химическими свойствами применяемого взрывчатого вещества, но и комплексом влияния геомеханических факторов: структурой массива (монолитность, трещиноватость), ориентацией и плотностью трещин, расстоянием от заряда до свободных поверхностей и конструктивными особенностями заряда.

Особенно важно, что характер выявленных зависимостей указывает на наличие экстремумов – диапазонов скорости детонации, при которых сейсмическое воздействие достигает локальных максимумов или минимумов. Это открывает возможности для целенаправленного управления энергетикой взрыва с целью минимизации негативного влияния на окружающую среду, конструкции и инфраструктуру, расположенные в зоне действия.

Применение численного моделирования методом сглаженных частиц, откалиброванного по результатам полигонных экспериментов, позволило получить высоко информативные данные о распространении упругих и пластических деформаций, формировании зон разрушения и изменении напряжённого состояния массива при различных сценариях взрывов. Совокупность экспериментальных и расчётных результатов подтверждает высокую эффективность данного подхода для инженерного прогнозирования и оптимизации параметров буровзрывных работ.

Установленные закономерности могут быть использованы в практической деятельности для:

- проектирования режимов взрывов с учётом допустимых уровней сейсмического воздействия;
- подбора взрывчатых веществ с оптимальной скоростью детонации;
- повышения безопасности проведения взрывных работ вблизи жилой застройки, охраняемых объектов и инженерных коммуникаций.

Благодарности

Работа выполнена в ИПКОН РАН в рамках научно-исследовательских программ по темам FMMS-2024-0007; FMMS-2024-0008.

Литература

1. Мосинец, В.Н. Дробящее и сейсмическое действие взрыва в горных породах / В.Н. Мосинец. – М: Недра. 1976. – 271 с.
2. Сейсмическое действие взрыва в горных породах / А.А. Кузьменко, В.Д. Воробьев, И.И. Денисюк, А.А. Дауегас. – М.: Недра, 1990. – 171 с.
3. Зависимость сейсмического действия взрыва в массиве горных пород от технологических условий ведения буровзрывных работ / Г.В. Гриб, А.Ю. Позынич, Н.Н. Гриб, Е.Е. Петров // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. – Том 14. – № 1-8. – С. 2112–2117.

4. Сейсмическая безопасность при взрывных работах: уч. пособие / В.К. Совмен, Б.Н. Кутузов, А.Л. Марьясов *et al.* – М.: Изд. Горная книга, 2012. – 227 с.
5. Садовский, М.А. Сейсмический процесс в блоковой среде / М.А. Садовский, В.Ф. Писаренко. – М.: Наука, 1991. – 96 с.
6. Ефремовцев, Н.Н. Сейсмические и экологические факторы оптимизации управления кинетикой выделения энергии детонационными системами для обеспечения безопасного ведения взрывных работ / Н.Н. Ефремовцев, П.Н. Ефремовцев // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2012. – № S4-14. – С. 11–16.
7. Федотенко, В.С. Методические вопросы комплексной оценки дробящего и техногенного действия взрывных работ при открытой разработке месторождений / В.С. Федотенко, Н.Н. Ефремовцев, А.В. Харченко // Горная промышленность. – 2024. – № 6. – С. 60–67.
8. Шиповский, И.Е. Расчет хрупкого разрушения горной породы с использованием бессеточного метода / И.Е. Шиповский // Научный вестник Национального Горного университета. – 2013. – Вып. 1(145). – С. 76–82.

Поступила в редакцию 22 сентября 2025 г.

Сведения об авторах

Ефремовцев Никита Николаевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, член научного совета РАН по проблеме «Народнохозяйственное использование взрыва», Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5797-1631>, e-mail: poe7@mail.ru.

Шиповский Иван Евгеньевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: iv_ev@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 65–71*

DOI: 10.14529/mmph250408

RESEARCHING THE INFLUENCE OF TECHNOLOGICAL FACTORS ON THE SEISMIC IMPACT OF BLASTS IN SURFACE MINING OF MINERAL DEPOSITS

N.N. Efremovtsev, I.E. Shipovskii

Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper discusses the main principles of the methodology for studying the seismic impact of explosions at test sites, as well as the application of the smoothed particle hydrodynamics (sph) method for investigating the seismic impact of explosions in both monolithic and fractured rock masses.

It presents the results of the numerical studies aimed at assessing the influence of blasting parameters on seismic impact. Based on field tests and numerical simulations using the sph method, we analyzed the dependence of the ground displacement vector velocity on the detonation velocity for various types of rock masses, including monolithic and fractured ones. This dependence exhibits a polynomial character, indicating a complex and nonlinear nature of the process. This pattern suggests the possible existence of extremes – zones of maximum or minimum impact – which is important to take into account when forecasting and optimizing blasting parameters.

Keywords: *blasting operations; seismic impact; detonation velocity; Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method; monolithic rock mass; fractured rock mass; field tests; vector velocity of ground displacement; numerical modeling; optimization of blasting parameters.*

References

1. Mosinets V.N. Drobyashchee i seismicheskoe deystvie vzryva v gornyx porodakh (Crushing and Seismic Effects of Explosion in Rocks). Moscow, Nedra Publ., 1976, 271 p. (in Russ.).
2. Kuz'menko A.A., Vorob'ev V.D., Denisyuk I.I., Dauetas A.A. *Seismicheskoe deystvie vzryva v gornyx porodakh* (Seismic Effect of Explosion in Rocks). Moscow, Nedra Publ., 1990, 171 p. (in Russ.).
3. Grib G., Grib N., Pazynich A., Petrov E. Dependence of the Seismic Explosive Action in the Rock Massives on the Technological Conditions of Drilling and Blasting Operations. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2012, Vol. 14. no. 1-8, pp. 2112–2117. (in Russ.).
4. Sovmen V.K., Kutuzov B.N., Maryasov A.L., Ekvist B.V., Tokarenko A.V. *Seismicheskaya bezopasnost' pri vzryvnykh rabotakh: uch. posobie* (Seismic Safety during Blasting Operations: A textbook). Moscow. Gornaya Kniga Publ., 2012, 227 p. (in Russ.).
5. Sadovskiy M.A., Pisarenko V.F. *Seismicheskii protsess v blokovoy srede* (Seismic Process in a Block Environment). Moscow, Nauka Publ., 1991. 96 p. (in Russ.).
6. Efremovtsev N.N., Efremovtsev P.N. Seismic and Ecological Factors of Optimization Management the Kinetics an Energy Detonation Systems to Ensure Safe Conducting Explosive Works. *Gornyy informatsionno-analiticheskii byulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)*, 2012, no S4-14, pp. 11–16. (in Russ.).
7. Fedotenko V.S., Efremovtsev N.N., Kharchenko A.V. Methodological Issues of a Comprehensive Assessment of the Crushing and Man-Made Effects of Blasting Operations during Open-Pit Mining. *Russian Mining Industry*, 2024, no. 6, pp. 60–67. DOI: 10.30686/1609-9192-2024-6-60-67.
8. Shipovskii I.E. Calculation of Brittle Fracture of Rock using Meshless Method (Расчет хрупкого разрушения горной породы с использованием бессеточного метода). *Nauchnyy vestnik Natsional'nogo Gornogo universiteta (Scientific Bulletin of the National Mining University)*, 2013, Iss. 1(145), pp. 76–82. (in Russ.).

Received September 22, 2025

Information about the authors

Efremovtsev Nikita Nikolaevich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, Member of the Scientific Council of the Russian Academy of Sciences on the Problem of “National economic use of explosion”, Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5797-1631>, e-mail: noee7@mail.ru.

Shipovskii Ivan Evgen'evich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: iv_ev@mail.ru.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОБИТИЯ АЛЮМИНИЕВЫХ ПРЕГРАД СФЕРИЧЕСКИМ УДАРНИКОМ В ДИАПАЗОНЕ ОТ 460 ДО 700 М/С

М.Ю. Орлов, В.П. Глазырин, Т.В. Фазылов

Томский государственный университет, г. Томск, Российская Федерация

E-mail: orloff_m@mail.ru

Аннотация. Численно изучен процесс пробития сферическим ударником однородных и упрочненных алюминиевых преград в диапазоне начальных скоростей от 460 до 700 м/с. В качестве упрочненных образцов рассмотрены алюминиевые образцы с завышенными значениями предела текучести, откольной прочности и удельной работы сдвиговых пластических деформаций. Материал моделировался упруго-пластической, пористой, сжимаемой средой с учетом свойств прочности, ударно-волновых явлений и совместного образования разрушений по типу отрыва и сдвига. Определяющие соотношения задавались уравнениями Прандтля–Рейса при условии текучести Мизеса. Уравнение состояния выбрано в форме Уолша. В качестве основного инструмента исследований использовался численный лагранжев метод, расчетная часть которого дополнена механизмами расщепления расчетных узлов и разрушения расчетных элементов. Расчеты проведены в двумерной осесимметричной постановке при помощи последней версии конечно-элементного решателя «Удар.Ос.2». Проведен анализ чувствительности сетки и предложена наиболее эффективная конечно-элементная модель. Расчетами установлено, что во всех случаях упрочнение образцов приводило к повышению их ударной стойкости. Хотя преграды были насквозь пробиты, образцы с завышенным значением сдвиговой прочности оказывали большее сопротивление действию ударника. Баллистические кривые совпадали на некоторых стадиях процесса, а выбитая из преград «пробка» имела разрушения средней и сильной степени.

Ключевые слова: высокоскоростной ударник; алюминиевая мишень; модель и метод; пробитие и проникание; ударная стойкость.

Введение

Процессы, протекающие в твердых телах при динамических нагрузках, являются предметом фундаментальных и прикладных исследований во всем мире. В работах [1–5] приведены последние достижения в области физического и математического моделирования процессов пробития и проникания ударников в конструкции из перспективных материалов. Там же указаны границы применимости аналитических методов и представлены верифицированные аналитические зависимости для расчета ударной стойкости конструкций и пробивного действия ударников. Несмотря на все многообразие методик моделирования, все еще актуальным является разработка и модификация уже имеющихся численных методов путем усовершенствования алгоритмов расчетов, критериев разрушения и т. п.

Обзор научно-технической и патентной литературы в настоящее время показывает, что как у нас в стране, так и за рубежом малоизученными являются вопросы динамики деформирования и разрушения материалов при действии ударных и ударно-волновых нагрузок. Основное достоинство развиваемого авторами подхода заключается в том, что он позволяет проследить по времени процесс деформирования и разрушения материала, а также иметь полную информацию о напряженно-деформированном и термодинамическом состоянии элементов конструкции в любой момент времени. Для задач соударения представляется возможным получить во времени всю картину внедрения, пробития и образования осколков с учетом ударно-волнового характера деформирования и разрушения как материала ударника, так и преграды.

В работах [6–7] классифицированы многослойные преграды и показано, что в некоторых случаях они обладали большей ударной стойкостью, чем монолитные. Проявлялась зависимость от типа ударника, его носовой части и начальной скорости, а также угла соударения. Авторы от-

мечают, что, по-видимому, такие металлы, как алюминий и сталь еще долго будут играть роль основных материалов в защитных конструкциях. Использование модифицированного лагранжева подхода в настоящее время представляет определенный интерес с точки зрения расширения научных знаний и определения границ его применимости. В дополнение к проведенным исследованиям ниже изучено влияние двукратного увеличения прочностных характеристик алюминиевых преград на процесс пробития их стальным сферическим ударником при скоростях от 460 до 700 м/с.

Такой диапазон прочностных характеристик выбран в связи с возможностью достижения указанных значений в практике разработки перспективных материалов. При этом математическое моделирование процесса соударения играет важную роль для оценки результатов прогнозирования свойств создаваемых материалов.

Математическая модель и численный метод расчетов

Поведение материалов описано с позиций феноменологической макроскопической теории механики сплошных сред. Материал моделируется пористой, сжимаемой, упруго-пластической средой с учетом свойств прочности и ударно-волновых явлений. Определяющие соотношения задаются уравнениями Прандтля–Рейса при условии текучести Мизеса. При описании разрушений используется детерминированный подход, в рамках которого в материалах образуются разрушения по типу сдвига и по типу отрыва. Это достигается одновременным учетом нескольких критериев разрушения. С точки зрения авторов, это позволяет моделировать ударно-волновые процессы в твердых телах наиболее приближенно к реальным [8].

В качестве основного инструмента исследований использовался численный лагранжев метод, расчетная часть которого дополнена механизмами расщепления расчетных узлов и разрушения расчетных элементов. Согласно терминологии [4], метод содержит оригинальный способ выделения поверхностей разрыва сплошности материалов, который не накладывает серьезных ограничений на решение пространственных задач пробития и проникания. Одним из достоинств метода является возможность моделирования процессов сквозного пробития и глубокого внедрения ударников сложной геометрии из различных материалов. Расчеты проведены в некоммерческом программном комплексе «Удар.Ос.2», разработанном в Томском государственном университете [9]. Программный комплекс, выполненный на языке Си++, содержит программы подготовки данных, решатель и просмотрщик.

Тестовые расчеты

Достоверность результатов численного моделирования установлена путем решения ряда тестовых задач. Вначале результаты сравнивались с аналитическим решением Ренкина–Гюгонио. Далее численные результаты сопоставлялись с экспериментальными данными, в том числе по величине запреградной скорости ударника, глубины его внедрения и диаметров пробоины (входной и выходной диаметр), относительного укорочения ударников и т. п. Наконец, численные результаты сравнивались с результатами, полученными другими исследователями в части определения доминирующего механизма разрушения и пробития.

Анализ чувствительности сетки

На начальном этапе тестовых расчетов был проведен анализ чувствительности расчетной сетки. Анализ проведен с целью достижения консервативного результата, включая морфологию разрушения, характера баллистических кривых, а также значений некоторых интегральных характеристик процесса взаимодействия. Как показано в [10], это является важнейшим этапом верификации алгоритмов расчетов. Всего было построено три конечно-элементные модели взаимодействующих тел, отличающиеся количеством элементов в преграде. Рассмотрены конечно-элементные модели с частой разбивкой (модель 1), средней (модель 2) и редкой (модель 3). Количество элементов варьировалось от 5 000 до 10 000, использовался трехузловой элемент типа «равнобедренный треугольник». В автоматическом режиме было сделано сгущение элементов в преграде в области, приблизительно равной трем радиусам ударника. При расположении области сгущения элементов авторы ориентировались на экспериментальные результаты из [6].

На рис. 1 показаны результаты, полученные по всем трем моделям. Видно, что характер баллистических кривых и морфология разрушения преград были схожи. На временных кривых ско-

рости отчетливо видны интервалы ее быстрого (до 15 мкс) и медленного (с 15 мкс) снижения. Кривые скорости отражали также установившееся движение ударника и, как следствие, выход его из преграды. В морфологии разрушения также не обнаружено значительных различий, а именно, отсутствие пластической деформации ударника и сильно поврежденная выбитая алюминиевая пробка. Размер осколков зависел от размера триангуляционных элементов в преграде, но в обоих случаях соответствовал экспериментальным данным.

Профили скорости свободной поверхности приведены на рис. 1. Отчетливо видно, что последняя конечно-элементная модель не выявила осцилляций на кривых после выхода ударной волны на свободную поверхность.

Скорее всего, на наличие осцилляций на графике влияло состояние выбитой откольной тарелки, которая во всех трех случаях была сильно разрушена. В целом профили скорости свободной поверхности близки к экспериментальным. Сопоставляя полученные результаты с экспериментальными и учитывая морфологические особенности процесса разрушения и затраченное время счета, выбрали конечно-элементную модель 2. В данном случае консервативный результат достигался в случае, когда размер элемента в преграде был почти в два раза меньше, чем в ударнике, при этом область сгущения в преграде составляла не менее трех радиусов ударника.

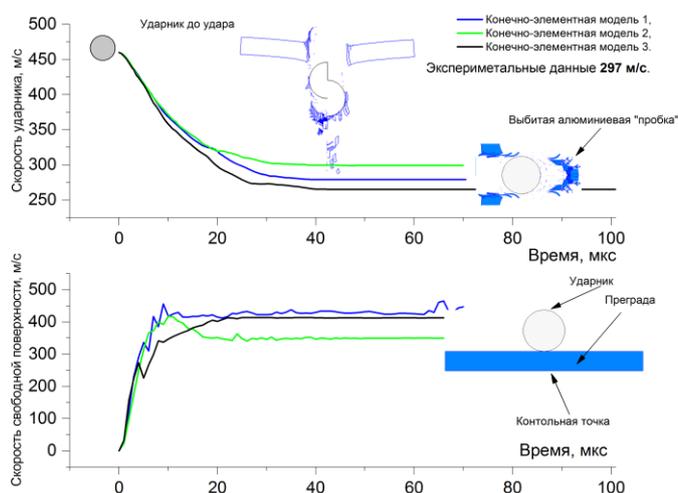


Рис. 1. Расчеты процесса пробития преграды из Д16 стальным шариком со скоростью 460 м/с

Ударник и объекты исследования

Объектом исследования выбрана однородная пластина из сплава Д16 размерами 60×6 мм в продольном сечении. В работе изучено влияние увеличения прочностных характеристик пластины при взаимодействии со стальным шариком диаметром 12,7 мм в диапазоне от 460 до 700 м/с. Материалом шарика была упрочненная сталь ШХ15.

Рассмотрены пластины с увеличенными в два раза относительного исходного варианта критическими значениями предела текучести, откольной прочности и удельной работы сдвиговых пластических деформаций. Две последние величины являются критериями разрушения материала, отвечающими за образование отрывных и сдвиговых разрушений соответственно. Таким образом, серия вычислительных экспериментов состояла из восьми вариантов. Для удобства введены обозначения образцов как (пр. тек. × 2), (отк. проч. × 2) и (сдвиг. проч. × 2), соответственно.

Физико-механические характеристики исходного образца были следующие: начальная плотность 2,78 г/см³, объемная скорость звука 5380 м/с, модуль сдвига 25,8 ГПа, эквивалентная пластическая деформация 1,2, предел текучести 0,42 ГПа, откольная прочность 0,5 ГПа, удельная работа сдвиговых пластических деформаций 35 кДж/кг.

Исследование процесса пробития базовых и упрочненных алюминиевых преград стальным ударником при 460 и 700 м/с

Влияние двукратного увеличения предела текучести материала преграды на процесс пробития

Вначале изучено влияние двукратного увеличения предела текучести материала преграды на процесс ее пробития. На основе численных результатов был воспроизведен сценарий разрушения исходных преград и преград с завышенным значением предела текучести. Для выявления основных различий процесс пробития преград при 460 м/с условно был разделен на стадии и детально проанализирован. Предел текучести исходного материала равен 0,42 Гпа.

На первой стадии отмечается пластическая деформация преграды (выход фронта пластической деформации на тыльную поверхность), на второй и третьей стадии формировалась «пробка» в преграде, на четвертой и пятой полностью образовавшаяся «пробка» выбивалась из преграды. Фрагменты конфигураций «ударник–мишень» соответствующие некоторым стадиям пробития изображены на рис. 2.

В однородной преграде первая стадия длилась не более 8 мкс, при этом зарождение будущей пробки там завершилось уже к 12-й мкс. Полностью сформированная пробка диаметром почти 10 мм начинает выходить из преграды на 15-й мкс, что сопровождается ее дальнейшим разрушением и формированием облака лидирующих осколков. С 28-й по 44-ю мкс фиксировался выход ударника, при этом его задняя часть достигала тыльной поверхности преграды на 65-й мкс, что соответствовало окончательному выходу из преграды. Скорость шарика после пробития преграды составила 299 м/с. В эксперименте ее значение равнялось 313 м/с. На верхнем графике штрихпунктиром показана кривая скорости для усиленного образца, имеющая незначительные отличия от кривой скорости для однородного образца. Расчетным путем установлено, что после пробития усиленного образца скорость ударника составляла 297 м/с.

Итак, сравнение баллистических кривых для скорости 460 м/с показало, что кривые совпадали только на первой и последней стадиях, расхождение между ними было только в середине процесса.

С увеличением начальной скорости ударника было установлено, что серьезных различий обнаружено не было. В обоих случаях ударник не теряет своей первоначальной формы, выбивая из преграды сильно разрушенную пробку. Как показывают расчеты, диаметр пробки несколько меньше исходного диаметра ударника, а края пробки разрушены. Все очаги разрушения сосредоточены возле нее, радиальных трещин, распространяющихся от края пробки к тыльной боковой поверхности, не обнаружено. Основным отличием можно считать размер внутреннего диаметра пробки. Получено, что скорости ударника после пробития однородного и усиленного образцов почти совпадали и составили 569 и 558 м/с соответственно. При этом баллистические кривые для этих вариантов расчетов полностью совпадали только на начальной стадии пробития.

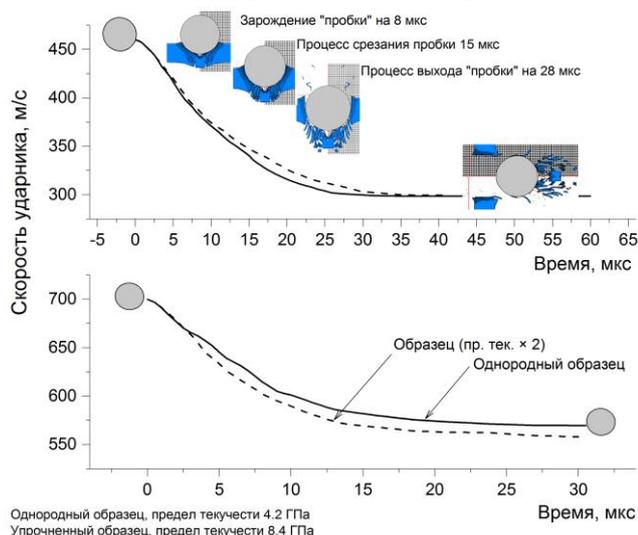


Рис. 2. Результаты расчетов процесса пробития базовой алюминиевой и алюминиевой преграды с удвоенным значением предела текучести

Влияние двукратного увеличения откольной прочности материала преграды на процесс пробития

Далее изучено влияние двукратного увеличения откольной прочности в материале преграды на процесс ее пробития. В данном случае, рассмотренная величина является одним из критериев разрушения в используемой модели. Очевидно, что образец будет больше сопротивляться откольным разрушениям. Откольная прочность исходного материала равна 0,5 ГПа.

Воспроизводя процесс пробития однородных и усиленных откольной прочностью преград, существенных отличий не обнаружили. Преграды были насквозь пробиты шариком без его пластической деформации. Все разрушения сконцентрированы по краям пробки, а из преграды была выбита «пробка», которая в зависимости от скорости имела разрушения средней и сильной степени.

Для проведения сравнительного анализа все баллистические кривые были расположены на одном графике на рис. 3. По аналогии с предыдущим случаем сверху были представлены расчетные кривые для скорости 460 м/с, а внизу – для скорости 700 м/с. Видно, что баллистические

кривые для базового и усиленного откольной прочностью образцов практически полностью совпадали. При этом совпадения с кривой относящейся к образцу с усиленным значением предела текучести, имели место только на начальных и конечных стадиях процесса пробития. Установлено, что при скорости ударника 460 м/с его запреградная скорость равнялась 300 м/с и практически полностью совпадала с предыдущими рассчитанными значениями.

При начальной скорости ударника, равной 700 м/с, наблюдалась похожая картина. Однако все три баллистические кривые совпадали только на начальной стадии, а на конечной стадии они становились параллельными друг другу. Что касается баллистических кривых для усиленных образцов, то они совпадали еще и в середине процесса до 8 мкс включительно. Таким образом, ударная стойкость образца с завышенным значением откольной прочности была выше, чем однородного образца и образца с завышенным значением предела текучести. Однако, судя по рассчитанному значению запреградной скорости, равной 554 м/с, весьма незначительно. Полученные результаты являются предсказуемыми и объясняются тем, что в процессе пробития откольное разрушение не являлось доминирующим.

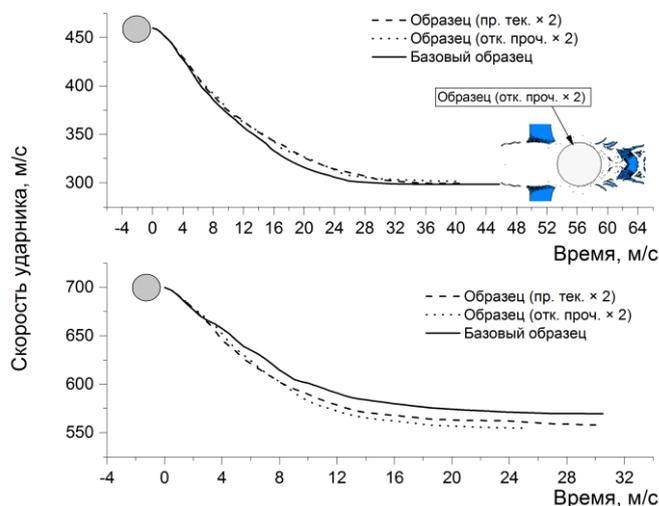


Рис. 3. Результаты расчетов процесса пробития базовой алюминиевой и алюминиевой преграды с удвоенным значением откольной прочности

Влияние двукратного увеличения удельной работы сдвиговой пластической деформации преграды на процесс пробития

В завершение проанализируем процесс пробития преград с удвоенным значением сдвиговой прочности. Согласно логике проводимых исследований, данный образец должен больше сопротивляться сдвигу. Однако расчеты показали, что все преграды были пробиты ударником насквозь без заметной пластической деформации по уже вышеописанному механизму. Время процесса пробития незначительно отличалось от времени пробития однородного образца, а состояние выбитой пробки можно охарактеризовать как средней степени разрушения.

Баллистические кривые для всех рассмотренных образцов приведены на рис. 4. Видно, что все кривые совпадали только на начальной стадии пробития, причем при скорости 460 м/с этот период был в два раза дольше и составил почти 8 мкс. Нетрудно заметить, что кривые скорости упрочненного сдвиговой прочностью образца расположены ниже остальных. Таким образом, можно утверждать в процессе пробития доминировал сдвиговой механизм, «пробка» как бы срезалась под действием ударника, однако сам образец не смог его остановить.

При начальной скорости ударника 460 м/с его запреградная скорость составляла 253 м/с, что явля-

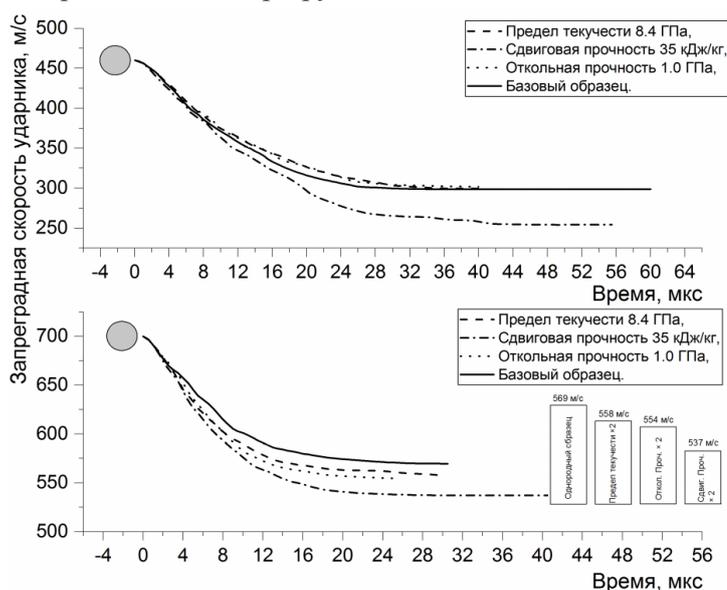


Рис. 4. Результаты расчетов процесса пробития базовой алюминиевой и алюминиевой преграды с удвоенным значением сдвиговой прочности

лось минимальным значением и на 15 % меньше скорости, зафиксированной в варианте расчетов базового образца. При начальной скорости 700 м/с также получено минимальное значение, равное 537 м/с. Однако расхождение с базовым образцом здесь уменьшилось до 5 %.

Результаты расчетов

В таблице представлены результаты расчетов для всех рассмотренных вариантов. Результаты дают количественное и качественное представление о процессе пробития базового алюминиевого и упрочненных образцов при скоростях 460 и 700 м/с. В таблице приведены начальная скорость ударника, время пробития (момент полного его выхода из преграды), запреградная скорость ударника (скорость его центра масс), величины входного и выходного диаметров пробоины и энергии поглощения ударника. Кроме того, качественно оценено состояние выбитой из преграды «пробки».

Установлено, что упрочнение образцов одной из выбранных прочностных характеристик во всех случаях приводило к повышению ударной стойкости преграды по сравнению с базовым образцом. Это выражалось в уменьшении запреградской скорости ударника, в незначительном увеличении времени процесса пробития и в увеличении выходного диаметра пробоины. Других значимых отличий в морфологии разрушения образцов обнаружено не было. При этом ударник насквозь пробивал все преграды, не теряя своей исходной сферической формы.

Путем прямого сравнения получено, что при скорости 460 м/с наибольшей ударной стойкостью обладал образец с увеличенным значением сдвиговой прочности. После пробития этого упрочненного образца запреградная скорость ударника составила 253 м/с, что почти на 15 % меньше, чем после пробития базового. После пробития образцов с завышенными значениями откольной прочности и предела текучести отмечено незначительное расхождение в расчетных значениях. Запреградные скорости в этих вариантах были меньше на 2,6 и 1,7 % соответственно. Такая же тенденция сохранилась при начальной скорости 700 м/с, однако расхождение в запреградных скоростях уменьшилось до 5 %.

Установлено, что упрочнение образцов слабо влияло на время процесса пробития. Так, при скорости 460 м/с время пробития получилось от 69 до 73 мкс, а при скорости 700 м/с – от 37 до 40 мкс. Время пробития рассчитывалось как время полного выхода ударника из преград.

Расчетным путем было установлено, что в некоторых усиленных образцах с тыльной стороны вблизи пробоины выбивался дополнительный осколок. С точки зрения авторов, данный факт говорил о том, что образец сильнее сопротивлялся пробитию. Наиболее разрушенные края пробоины наблюдались после пробития базового образца. Установлено, что во всех усиленных образцах выходной диаметр пробоины был больше, чем выходной диаметр, наблюдаемый после пробития базового образца. Наибольшие диаметры выходных пробоин обнаружены в образцах с увеличенным значением предела текучести и удельной работы сдвиговых пластических деформаций.

Установлено, что при пробитии базового образца при скоростях 460 и 700 м/с поглощалось энергии 510 и 698 Дж соответственно. При пробитии образцов с увеличенным значением сдвиговой прочности эти затраты энергии увеличивались до 619 и 846 Дж. В образцах с увеличенным значением откольной прочности отмечен средний уровень разрушения выбитой «пробки». В данном случае вместо алюминиевых осколков наблюдался фрагмент преграды в виде выбитой «пробки».

Заключение

На основании полученных результатов были сделаны следующие выводы. В целом характер баллистических кривых, морфология разрушения преград и механизм пробития были примерно одинаковыми как для базовой преграды, так и для всех упрочненных образцов. В рассмотренном диапазоне скоростей сферический ударник не деформировался пластически, и выбивал из преграды «пробку». Разрушения «пробки» можно охарактеризовать как средние (фрагмент выбитой пробки и осколки) и высокие (только осколки алюминия).

Наибольшее сопротивление пробитию оказывали преграды с увеличенным значением сдвиговой прочности. В этих вариантах расчетов отмечено незначительное увеличение времени пробития и уменьшение запреградской скорости ударника. Баллистические кривые практически совпадали с баллистической кривой для базового образца. Основное различие было в наличии совпадений кривых вначале и конце процесса пробития.

Результаты расчетов процесса пробития алюминиевых преград

Преграда Исходный образец обозначался как Д16, в обозначении упрочненного образца стоял символ «×2»	Начальная скорость, м/с	Время пробития, мкс	Запреградная скорость, м/с	Диаметр пробоины, мм		Энергия поглощения, Дж	Уровень разрушений выбитой «пробки»
				входной	выходной		
Преграда исходная Д16	460	69	300	13	13,4	510	Высокий
Пр-да Д16 (пр. тек. × 2)	460	73	299	14,5	14,24	513	Средний
Преграда исходная Д16	700	37	569	14,2	14,3	698	Высокий
Пр-да Д16 (пр. тек. × 2)	700	40	558	14,1	14,9	750	Средний
Пр-да (Отк.проч × 2)	460	69	301	13,4	13,3	509	Средний
Пр-да (Отк.проч. × 2)	700	39	554	13,1	13,7	768	Средний
Пр-да Д16 (сд. проч× 2)	460	71	253	13,2	12,7	619	Средний
Пр-да Д16 (сд. проч× 2)	700	39	537	13,3	13,6	846	Высокий

Скорее всего, откольная прочность и предел текучести также влияли на процесс взаимодействия, но только в другом интервале начальных скоростей, возможно, ниже предела сквозного пробития.

Созданные средства математического моделирования могут быть полезны при проведении фундаментальных и прикладных исследований. Предложенный подход позволяет выяснять механизмы и закономерности процесса высокоскоростного деформирования и разрушения конструкционных материалов и, кроме того, получать результаты в недоступной для эксперимента области начальных условий. При проведении комплексного рационального проектирования реализуется возможность прогнозирования поведения перспективных ударостойких защит различных объектов и техники для облегчения поиска оптимального варианта защитной конструкции.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00257, <https://rscf.ru/en/project/23-29-00257/>.

Литература

1. High Speed Penetration Dynamics: Engineering Models and Methods / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 2013. – 680 p.
2. Walker, J.D. Modern Impact and Penetration Mechanics / J.D. Walker. – Cambridge: Cambridge University Press, 2021.
3. Hazell, P.J. Armour: Materials, Theory, and Design / P.J. Hazell. – Boca Raton, CRC Press, 2022. – 498 p.
4. Высокоскоростное взаимодействие тел / В.М. Фомин, А.И. Гулидов, Г.А. Сапожников и др. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.
5. Flores-Johnson, E.A. Ballistic Performance of Multi-Layered Metallic Plates Impacted by a 7.62-mm APM2 Projectile / E.A. Flores-Johnson, M. Saleh, L. Edwards // International Journal of Impact Engineering. – 2011. – Vol. 38, Iss. 12. – P. 1022–1032.
6. Ballistic Performance of Multi-Metal Systems / P. Ranaweera, D. Weerasinghe, P. Fernando, S.N. Raman, D. Mohotti // Int. J. Protective Struct. – 2020. – Vol. 11, no. 3. – p. 379–410.
7. Орлов, М.Ю. Численное моделирование процесса пробития многослойных пластин удлиненными ударниками / М.Ю. Орлов, В.П. Глазырин, Т.В. Фазылов // XI Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2021». Материалы конференции. – Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет, 2022. – С. 22–27.

8. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016663830 Российской Федерация. Взрыв. Сглаживание контактной границы: № 2016661600 : заявл. 31.10.2016 : опубл. 19.12.2016 / В.П. Глазырин, Ю.Н. Орлов, М.Ю. Орлов; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

9. Scazzosi, R. Experimental and Numerical Investigation on the Perforation Resistance of Double-Layered Metal Shield under High-Velocity Impact of Armor-Piercing Projectiles / R. Scazzosi, M. Giglio, A. Manes // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, Iss. 3. – P. 626.

10. Orlov, M.Y. Research of the Interaction of Steel Spherical Impactor with an Aluminum Alloy Targets / M.Y. Orlov, V.P. Glazyrin, T.V. Fazylov // *Proc. XII All Russian Scientific Conference on Current Issues of Continuum Mechanics and Celestial Mechanics. CIMCM 2023. Springer Proceedings in Physics, Springer, Singapore, 2024, Vol. 412.*

Поступила в редакцию 25 сентября 2025 г.

Сведения об авторах

Орлов Максим Юрьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов, Томский государственный университет, г. Томск, Российская Федерация, e-mail: orloff_m@mail.ru.

Глазырин Виктор Парфирьевич – доктор физико-математических наук, зав. лаб. Прочности, НИИ прикладной математики и механики, Томский государственный университет, г. Томск, Российская Федерация, e-mail: glvp@list.ru.

Фазылов Талгат Вадимович – аспирант кафедры Механики Деформируемого твердого тела, Томский государственный университет, г. Томск, Российская Федерация, e-mail: talgat505@gmail.com.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 72–80*

DOI: 10.14529/mmph250409

INVESTIGATING THE PENETRATION OF ALUMINUM TARGETS BY A SPHERICAL IMPACTOR IN THE RANGE FROM 460 TO 700 M/S

M.Yu. Orlov, V.P. Glazyrin, T.V. Fazylov
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
E-mail: orloff_m@mail.ru

Abstract. The paper numerically studies the penetration of a spherical impactor through monolithic and reinforced aluminum targets at initial velocities ranging from 460 to 700 meters per second. Aluminum samples with overestimated values of yield strength, spall strength, and specific work of shear plastic deformation are considered as hardened samples. The material is modeled as an elasto-plastic, porous, compressible medium taking into account its strength properties, shock wave phenomena, and fracture formation through spall-induced and shear-induced modes. The governing equations are based on the Prandtl–Reiss equations under the Mises flow condition. The state equation is formulated in Walsh form. Numerical methods are used to solve the problem, with a Lagrangian approach serving as the primary research tool. The computational part is supplemented with mechanisms for splitting nodes and erosion elements. The calculations were carried out in a two-dimensional, axisymmetric model using the latest version of the “Udar.Os.2” finite element solver. The sensitivity of the mesh was analyzed, and the most efficient finite element model was selected. In all cases, hardening of the specimens led to an increase of impact resistance. Although the targets were penetrated, specimens with an overestimated shear strength value provided greater impact resistance. At certain stages of the process, the ballistic curves aligned, but the impactor was not destroyed, leaving behind a target’s debris cloud.

Keywords: *high-speed striker; target, mathematical model; numerical method; perforation and penetration problem; impact resistance.*

References

1. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *High-Speed Penetration Dynamics: Engineering Models and Methods*. World Scientific Publishing Co, 2013, 680 p. DOI: 10.1142/8651
2. Walker J.D. *Modern Impact and Penetration Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2021. DOI: 10.1017/9781108684026.
3. Hazell P.J. *Armour: Materials, Theory, and Design*. Boca Raton, CRC Press, 2022, 498 p. DOI: 10.1201/9781003322719
4. Fomin V.M., Gulidov A.I., Sapozhnikov G.A. et al. *Vysokoskorostnoe vzaimodeystvie tel* (High-speed interaction of bodies). Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 1999, 600 p. (in Russ.).
5. Flores-Johnson E.A., Saleh M., Edwards L. Performance of Multi-Layered Metallic Plates Impacted by a 7.62-mm APM2 Projectile. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, Vol. 38, Iss. 12, pp. 1022–1032. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2011.08.005
6. Ranaweera P., Weerasinghe D., Fernando P., Raman S.N., Mohotti D. Ballistic Performance of Multi-Metal Systems. *Int. J. Protective Struct*, 2020, Vol. 11, no. 3. pp. 379–410. DOI: 10.1177/2041419619898693
7. Orlov M., Glazyrin V., Fazylov T. Numerical Simulation of Perforation Multy-layered Plates with High-velocity Projectiles. *XI Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem «Aktual'nye problemy sovremennoy mekhaniki sploshnykh sred i nebesnoy mekhaniki – 2021»*. *Materialy konferentsii* (Proc. XI All-Russian Scientific Conference with international participation “Actual problems of modern continuum mechanics and celestial mechanics – 2021”). Tomsk, Natsional'nyy issledovatel'skiy Tomskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2022, pp. 22–27. (in Russ.).
8. *Certificate of State Registration of the Computer Program No. 2016663830 Russian Federation*. Explosion. Smoothing the Contact Boundary: No. 2016661600: application 31.10.2016 : published 19.12.2016 / V.P. Glazyrin, Yu.N. Orlov, M.Y. Orlov; applicant Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “National Research Tomsk State University”. (in Russ.).
9. Scazzosi R., Giglio M., Manes A. Experimental and Numerical Investigation on the Perforation Resistance of Double-Layered Metal Shield under High-Velocity Impact of Armor-Piercing Projectiles. *Materials*, 2021, Vol. 14, iss. 3, p. 626. DOI: 10.3390/ma14030626
10. Orlov M.Y., Glazyrin V.P., Fazylov T.V. Research of the Interaction of Steel Spherical Impactor with an Aluminum Alloy Targets. In: Orlov, M.Y., Visakh, P.M. (eds) *Proc. XII All Russian Scientific Conference on Current Issues of Continuum Mechanics and Celestial Mechanics*. CICMCM 2023. Springer Proceedings in Physics, 2024, Vol. 412. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-97-1872-6_33

Received September 25, 2025

Information about the authors

Orlov Maksim Yur'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Researcher at the Laboratory of High-Energy and Special Materials, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, e-mail: orloff_m@mail.ru.

Glazyrin Viktor Parfir'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory Strength, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, e-mail: glvp@list.ru.

Fazylov Talgat Vadimovich is Post-graduate Student of the Department of Mechanics of Deformable Solids, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, e-mail: talgat505@gmail.com.

РАСЧЕТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБОСНОВАНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕБОВАНИЙ К МАТЕРИАЛАМ КОНСТРУКЦИЙ МОРСКОЙ ТЕХНИКИ И МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

В.Ю. Филин, Д.Р. Бараков, Е.Д. Назарова

НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей», г. Санкт-Петербург,

Российская Федерация

E-mail: npk3@crism.ru

Аннотация. В обеспечении безопасной эксплуатации крупногабаритных конструкций Арктики ключевую роль играет применяемая система контроля качества судостроительных и трубных сталей, основанная на проведении специальных механических испытаний на трещиностойкость и хладостойкость. Требования к их результатам предложено количественно определять расчетами, поскольку существующие обоснования включают субъективные коэффициенты запаса. В статье описаны два типа разработанных расчетных процедур. Первым из них является численный вероятностный эксперимент, позволивший рассчитать требуемые параметры статической трещиностойкости металла сварных соединений при минимальной температуре эксплуатации в обеспечение первого уровня безопасности эксплуатации сварных конструкций – сопротивление старту трещины по хрупкому механизму. Процедура численного эксперимента включает многократную проверку вероятностного условия хрупкого разрушения элемента конструкции с дефектом в терминах нелинейной механики разрушения. Для этого разработаны предполагаемые распределения случайных параметров нагрузки, температуры и свойств стали, входящих в условие прочности, а также соответствующее программное обеспечение. Второй тип расчетных процедур предусматривает моделирование методом конечных элементов конкурирующего вязкого и хрупкого разрушения в элементах конструкций и в образцах различных типов, используемых для определения температур вязко-хрупкого перехода. Сравнение осуществляется для моделей, в которых задана одна и та же критическая величина коэффициента интенсивности напряжений, соответствующая продвижению хрупкого разрушения. Результатами расчета являются необходимые запасы по экспериментально определяемым температурам вязко-хрупкого перехода по отношению к минимальной температуре эксплуатации материала. Это позволяет обеспечить второй уровень безопасности эксплуатации конструкций – сопротивление материала распространению трещины. Разработаны принципы построения моделей и интерпретации результатов. Полученные требования к температурам вязко-хрупкого перехода сталей для новых морских проектов с высокими эксплуатационными требованиями не достигаются при применении обычных марок стали, о чем свидетельствуют накопленные в НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей» результаты специальных механических испытаний. Поэтому выполненные расчеты обосновывают область обязательного применения стали арктических марок.

Ключевые слова: механика разрушения; хрупкое и вязкое разрушение; вязко-хрупкий переход; арктические конструкции; расчетные процедуры.

Расчетная процедура в обеспечении первого уровня безопасности

Трещины при эксплуатации обычно зарождаются в местах дефектов сварных соединений и конструктивных концентраторов напряжений. Сопротивление старту трещины контролируется испытаниями на статическую трещиностойкость с определением параметров CTOD (критического раскрытия вершины трещины) и J -интеграла на образцах полной толщины с краевым надразом и усталостной трещиной, располагаемой в различных зонах сварного соединения. Требования к параметрам CTOD и J к металлу сварного соединения определяются согласно стандарту организации [1], разработанному по результатам численного вероятностного эксперимента.

За расчетный дефект сварного соединения толщиной S принимают поверхностную полуэллиптическую трещину, ориентированную у границы усиления шва вдоль оси шва, с соотношением размеров $l/a = 3$. Глубину a принимают в зависимости от примененной процедуры и объема неразрушающего контроля при строительстве конструкции (как максимум, такой дефект не превышает размера валика сварного шва). При наличии конструкции протяженных сварных соединений глубину расчетного дефекта принимают в зависимости от их относительной длины:

$$a = -0,14 \times S^{0,5} \ln(1 - 0,95^{1/N}).$$

Используя величину J -интеграла, сформулируем условие предотвращения хрупкого разрушения в детерминистической постановке:

$$J_c \geq n \times J, \quad (1)$$

где J_c – среднее критическое значение J -интеграла по испытаниям при температуре T_D , n – коэффициент запаса, J – параметр нагрузки конструкционного элемента с расчетным дефектом. Расчетная процедура используется для определения коэффициента запаса в формуле (1). Поскольку рассматриваются эксплуатационные температуры в интервале вязко-хрупкого перехода, можно считать, что наступление разрушения по хрупкому механизму может произойти с некоторой вероятностью. То же условие прочности (1) в вероятностной постановке имеет вид

$$(J_c)_i \geq (J)_j, \quad (2)$$

где индексы i и j соответствуют случайным значениям трещиностойкости металла и параметра нагружения элемента конструкции с расчетным дефектом в конкретном случае нагружения.

Главная особенность процедуры – совместный учет нескольких независимых случайных параметров, задаваемых через генераторы псевдослучайных чисел (рандомайзеры) с периодом повторяемости не менее 10^7 . Данный период обеспечивается при количестве значащих цифр переменных не менее 8 в рекурсивных формулах вида $x_k = \{q \cdot x_k\}$, где q – простое число. В число параметров входят:

- случайная глубина дефекта $a_j = -\ln(x_1) \cdot a / \ln 20$, что соответствует вероятности того, что дефект глубиной более a будет обнаружен с вероятностью 95 %;

- распределение случайных относительных напряжений $\bar{\sigma}_j = \bar{\sigma} \cdot \left(1 - 0,5 \left[-\ln(x_2^\chi)\right]\right)$, где $\bar{\sigma}$ – детерминированная величина относительных напряжений. Показатель степени $\chi = 0,173$ выбран таким образом, чтобы обеспечить наступление наибольших нагрузок, составляющих не менее $0,95 \bar{\sigma}$, с периодичностью 5 000 случаев за срок службы 30 лет, или 167 раз в год, предполагая за каждый год 10^8 случаев нагружения. Доминирующее число случаев нагружения, таким образом, связано с небольшими нагрузками (работа оборудования, перепады давления и т. п.);

- температура, соответствующая случаям нагружения, задаваемая усеченным нормальным распределением (УНР), точка среза распределения – абсолютно минимальная климатическая температура в месте дислокации конструкции, T_{\min} . Случайное значение температуры эксплуатационного нагружения (до среза распределения) определяется по формуле

$$T_j = T_0 + \sqrt{-2 \ln(x_3)} \times \cos(4\pi \cdot x_4) \cdot \sigma_{(T)},$$

где x_3 и x_4 – псевдонезависимые случайные величины в диапазоне (0, 1), $\sigma_{(T)}$ – среднеквадратическое отклонение, °С;

- трещиностойкость материала, которую считают удовлетворяющей трехпараметрическому распределению Вейбулла, где β – параметр формы распределения, связанный с коэффициентом вариации V ; J_{c0} – медианное значение (параметр масштаба), J_{\min} – минимальное значение:

$$(J_c)_{i|T_D} = J_{\min} + (J_{c0} - J_{\min})[-\ln(x_5)]^{1/\beta},$$

что следует откорректировать для температуры, соответствующей случаю нагружения:

$$(J_c)_{i|T_j} = (J_c)_{i|T_D} \exp(0,04(T_j - T_D)).$$

Задают приемлемую вероятность разрушения Q , а также начальное значение J_{c0} . Количество опытов в численном эксперименте для проверки условия (2) принято равным 2×10^6 , что доста-

точно по результатам проверки зависимости результатов от числа опытов. Вычисляется количество случаев «разрушения», то есть невыполнения условия (2). По результатам расчёта методом пошагового спуска подбирают новое значение J_{c0} , которое обеспечивает получение задаваемого значения вероятности Q с допуском 5 %. В результате вычисляют частный коэффициент запаса $n_1 = J_c / J_{\min}$. Чтобы получить искомый коэффициент запаса n в формуле (1), необходим дополнительный множитель n_A , учитывающий ограниченность числа корректных результатов испытаний в серии m , то есть возможное отличие J_c от их среднего арифметического значения. Последний, исходя из отдельного численного эксперимента, для случая трёх корректных результатов в серии образцов принимают равным

$$n_A = 0,6 + (9V^3 - 3,4V^2 + V)(0,00031S^2 - 0,05S + 6,5).$$

Окончательно определяют требования к минимальным средним значениям J_c и СТОД. Для выполнения расчётов разработано специальное программное обеспечение. На основании выполненных численных экспериментов предложена формула для коэффициента запаса n в случае, когда максимальная эксплуатационная нагрузка составляет $\bar{\sigma} = 0,7\sigma_T$, где σ_T – предел текучести стали:

$$n = (1,4 - 6,9V + 30V^2) \times (1 - (m-3)/7 \times \sqrt{V}), \quad n \geq 1, \quad V \geq 0,10.$$

Расчетная процедура в обеспечении второго уровня безопасности. Моделирование распространения трещины при конкурирующем вязком и хрупком разрушении

Если трещина в конструкции стартовала, она должна быть остановлена основным металлом. Способность остановить трещину выражается температурой торможения трещины (T_{xp}) или критическим значением коэффициента интенсивности напряжений (КИН) K_{Ia} при этой температуре. Температуру T_{xp} затруднительно найти прямыми испытаниями, поэтому находят температуры вязко-хрупкого перехода основного металла NDT, T_{KB} , T_{DWT} . Цель расчетных процедур – обоснование корреляций T_{xp} с перечисленными температурами. Их использование позволяет получить оценки T_{xp} по каждому виду испытаний. За T_D – минимальную температуру применимости материала – принимают наиболее высокую («теплую») из этих оценок [2].

Температура нулевой пластичности NDT – максимальная температура, при которой происходит разрушение образцов с хрупкой надрезанной наплавкой при ударе падающим грузом. Температура T_{KB} при испытаниях на статический трехточечный изгиб образцов натурной толщины с круглым (ключевым) надрезом соответствует средней доле волокнистой составляющей в изломах 70 %. Температура T_{DWT} при испытаниях на трехточечный изгиб падающим грузом образцов с острым надрезом соответствует доле волокнистой составляющей в изломах 70...85 % [2].

В НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей» предложена численная модель [3], не связанная с расчетами методами конечных элементов (МКЭ), позволяющая оценить величину K_{Ia} , необходимую для торможения распространяющейся по хрупкому механизму трещины в элементе конструкции толщиной S [мм]. Такая оценка составляет

$$K_{Ia}|_{T_{xp}} = \sqrt{3,5 \times 10^{-5} \sigma_{T3}^{2,42} \cdot S}, \quad (3)$$

где T_{xp} – температура торможения трещины, σ_{T3} – эффективный предел текучести материала при данной температуре, который, в частности, учитывает упрочнение вследствие повышения скорости деформирования. Требуемая величина K_{Ia} судостроительных сталей, определенная по этой формуле, как правило, не превышает $100 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0,5}$, поэтому допустимо использование линейной механики разрушения. Оценка требований к температурам вязко-хрупкого перехода, определяемым каждым из применяемых методов, осуществляется с использованием следующей процедуры:

- определяется «истинная» диаграмма нагружения материала с пределом текучести σ_T [3, 4];
- с помощью выполнения серий расчетов МКЭ процесса нагружения испытательного образца определяется сеточно зависящая величина жесткости напряженного состояния χ , (то есть достигаемая в какой-либо точке фронта трещины и используемая в качестве условия хрупкого разрушения [4–6])

$$\chi = \sigma_1 / \sigma_i,$$

где σ_1 – первые главные напряжения, σ_i – интенсивность напряжений;

- подбирается χ , соответствующее достижению соответствующей температуры вязко-хрупкого перехода;
- решается калибровочная задача МКЭ, где в условиях плоской деформации и маломасштабной текучести в модели с тем же размером конечного элемента, нагружаемой растяжением (Y -функция равна единице), создается такая же величина χ и определяется соответствующее критическое значение КИН материала $K_{Ia}|_{T_m} = \sigma\sqrt{\pi a}$, где T_m – температура испытания. Данная процедура необходима, так как прямое определение КИН для модели образца невозможно, а пересчет через изменение потенциальной энергии (J -интеграл) дает слишком низкие «средние» значения;
- поскольку рассматриваются температуры в интервале вязко-хрупкого перехода, используется ожидаемая температурная зависимость КИН в виде

$$K_{Ia}|_{T_D} = K_{Ia}|_{T_m} \cdot \exp[0,02(T_D - T_m)]. \quad (4)$$

Формула (4) практически эквивалентна температурной зависимости нижней огибающей K_{Ia} в коде BVCS [7]. Из нее определяется требуемый температурный запас ($T_D - T_m$) с учетом (3).

Для каждого из видов испытаний проводится поэтапное решение упругопластической задачи МКЭ при возрастающем перемещении точек приложения нагрузки вплоть до выполнения какого-либо из принятых локальных условий разрушения. Затем при фиксированных перемещениях выполняется поэтапное снятие запрета на перемещение узлов «разрушенных» элементов относительно плоскости симметрии образца вплоть до прекращения продвижения трещины. После этого нагружение возобновляется. Используются несколько конкурирующих условий разрушения:

- хрупкое разрушение по достижении критического значения жёсткости напряжённого состояния χ ;
- вязкий отрыв по достижению одного из локальных критериев: критической деформации либо нормализованного по величине интенсивности пластической деформации критерия Кокрофта–Лэтэма–Оха [3],
- вязкий срез по достижении критического значения максимальной касательной деформации $\gamma_c = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2$ [5].

К настоящему моменту получены следующие корреляции:

для испытаний по методике NDT:

$$T_{xp} - NDT = 50 \ln \left(0,084\sqrt{S} \cdot (\sigma_m)_{T_D}^{1,21} / (\sigma_m)_{NDT} \right),$$

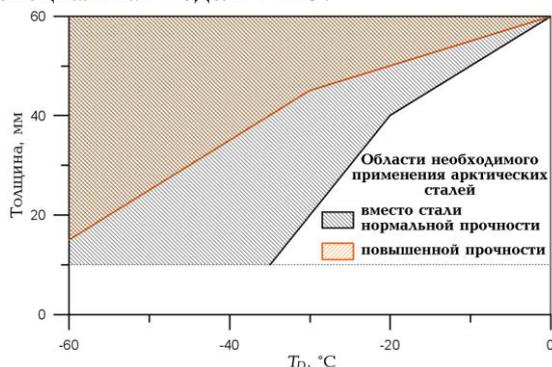
для испытаний по методике T_{KB} :

$$T_{xp} - T_{KB} = 50 \ln \left(1,55 \frac{\sqrt{S}}{S+14} \cdot (\sigma_m)_{T_D}^{1,21} / (\sigma_m)_{T_{KB}} \right),$$

для испытаний по методике DWTT:

$$T_{DWTT} = T_{xp} - (0...10)^\circ\text{C}.$$

Все представленные оценки сделаны для изотропного металла. Оценки для металла после термомеханической обработки, склонного к расщеплениям, отличаются, для исследования влияния расщеплений создана специальная модель МКЭ.



Минимальная температура применимости стали «обычных» марок и области необходимого применения сталей с индексом «Агс» для морских конструкций

О необходимости применения сталей арктических марок

Применение рассмотренных расчетных процедур позволяет оценить минимальные температуры применимости «обычных» марок стали (см. рис.), описанных в Правилах Российского морского регистра судоходства [2]. Оказывается, что эти границы не охватывают соотношения толщин и температур эксплуатации, требуемые для современных арктических проектов. Поэтому предложено внести в [2] требования к применению арктических марок стали (с индексом «Arc») для изготовления наиболее ответственных конструкций – судовых связей категории III и специальных конструкционных элементов морских платформ.

Выводы

Обоснование требований, предъявляемых к судостроительным и трубным сталям, требует применения разнообразных расчетных процедур, связанных как с численными вероятностными экспериментами, так и с моделированием МКЭ процесса распространения трещины при конкурирующем вязком и хрупком разрушении. Разработаны расчетные процедуры, применимые как на стадии аттестации новых материалов, так и для оценки допустимой дефектности.

Для новых морских проектов с высокими эксплуатационными требованиями обоснована необходимость использования сталей с индексом «Arc». Расчетные соотношения критических температур подтверждены экспериментально.

Литература

1. СТО-07516250-3613-2024 Расчётная оценка прочности по критерию предотвращения разрушения от дефектов в конструкции. Методы расчета.
2. Правила классификации и постройки морских судов. НД № 2-020101-174.
3. Количественные оценки сопротивления распространению разрушения судостроительных и трубных сталей / В.Ю. Филин, А.В. Ильин, А.В. Ларионов и др. // VIII Всероссийская конференция «Безопасность и мониторинг природных и техногенных систем: материалы и доклады», Красноярск, 16–20 сентября 2023 г. – Новосибирск: ФИЦ ИВТ, 2023. – С. 83–88.
4. Получение истинной диаграммы нагружения на основе испытаний на растяжение с использованием численных методов / Е.Д. Назарова, М.М. Пегливанова, В.Ю. Филин, А.В. Ларионов // Неделя науки ФизМех: сборник материалов Всероссийской научной конференции, 3–7 апреля 2023 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – С. 29–32.
5. Ильин, А.В. Моделирование МКЭ распространения и торможения хрупкого разрушения в пластинах с исходной трещиной / А.В. Ильин, Д.М. Артемьев, В.Ю. Филин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2018. – Том 84, № 1(1). – С. 56–65.
6. Филин, В.Ю. Определение критических температур хрупкости стали на базе численного моделирования испытаний образцов Шарпи / В.Ю. Филин, А.В. Мизецкий, Е.Д. Назарова // Физико-механические испытания, прочность и надежность современных конструкционных и функциональных материалов: материалы XIV Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат», г. Москва, 25 марта 2022 г. – М.: НИЦ «Курчатовский институт» – ВИАМ, 2022. – С. 320–332.
7. ASME BPVC Section XI. Division 1. Rules for Inspection and Testing of Components of Light-Water Cooled Plants. Article A-4000: Material properties. – 2021.

Поступила в редакцию 22 сентября 2025 г.

Сведения об авторах

Филин Владимир Юрьевич – доктор технических наук, начальник сектора аттестации материалов и обеспечения прочности конструкций, НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: npk3@crism.ru.

Бараков Данила Ростиславович – аспирант, инженер 3-й категории сектора аттестации материалов и обеспечения прочности конструкций, НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: npk3@crism.ru.

Назарова Елизавета Дмитриевна – аспирант, инженер 2-й категории сектора аттестации материалов и обеспечения прочности конструкций, НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: npk3@crism.ru.

**CALCULATION PROCEDURES USED FOR THE SUBSTANTIATION
OF THE SYSTEM OF REQUIREMENTS FOR HULL MATERIALS
OF MARINE STRUCTURES AND ARTERIAL PIPELINES****V.Yu. Filin, D.R. Barakov, E.D. Nazarova***NRC Kurchatov Institute – CRISM Prometey, Saint-Petersburg, Russian Federation**E-mail: npk3@crism.ru*

Abstract. Safe operation of large-size Arctic structures is ensured when the key role is played by the due quality control system applied for shipbuilding and pipeline steels, that is based on special mechanical tests for fracture toughness and cold resistance. The way suggested to substantiate the required test results is calculation allowing to get quantitative estimates while the actual substantiations include subjective reserve factors. Two types of developed calculation procedures are presented in the paper. The first is a probability numeric experiment assessing the required static fracture toughness of the metal of welded joints at the minimum service temperature ordered to ensure the first level of safe operation of welded structures related to brittle crack start resistance. The developed numerical procedure includes a multiple check of the probabilistic fracture condition of a flaw-containing structural element in terms of elastic-plastic fracture mechanics. Supposed distributions of relevant load parameters, temperature and steel performances are developed as well as the corresponding software. The second type of calculation procedures provides for FEM simulations of concurring ductile and brittle fracture in structural elements and specimens of different configurations used in experiments to evaluate various ductile to brittle transition temperatures. The comparison is performed for models where the material has the same critical value of stress intensity factor corresponding to brittle fracture propagation. This ensures the second level of safe operation of structures, namely the resistance to fracture propagation. The principles of FEM simulation and calculation results interpretation are developed. The calculated requirements for ductile to brittle transition temperatures of steels for prospective marine projects with high service parameters cannot be attained with common steel grades, it is proved by the test results collected in NRC Kurchatov Institute – CRISM Prometey. So the calculations undertaken substantiate the area of obligatory application of Arctic steel grades.

Keywords: fracture mechanics; brittle and ductile fracture; ductile to brittle transition; Arctic structures; calculation procedures.

References

1. STO-07516250-3613-2024 *Raschyetnaya otsenka prochnosti po kriteriyu predotvrashcheniya razrusheniya ot defektov v konstruktsii. Metody rascheta.* (The Calculated Strength Assessment is based on the Criterion of Preventing Destruction from Structural Defects. Calculation Methods.)
2. *Pravila klassifikatsii i postroyki morskikh sudov.* ND № 2-020101-174 (Rules for the classification and construction of naval vessels. ND No. 2-020101-174.)
3. Filin V.Yu., Il'in A.V., Larionov A.V., Mizetskiy A.V., Nazarova E.D., Peglivanova M.M. *Kolichestvennye otsenki soprotivleniya rasprostraneniya razrusheniya sudostroitel'nykh i trubnykh staley* (Quantitative Estimates of the Resistance to the Spread of Destruction of Shipbuilding and Pipe Steels). *Bezopasnost' i monitoring prirodnykh i tekhnogennykh sistem: materialy i doklady. VIII Vserossiyskaya konferentsiya, Krasnoyarsk, 16–20 sentyabrya 2023 g.* (Proc. VIII All-Russian Conference "Safety and Monitoring of Natural and Man-made Systems: materials and reports", Krasnoyarsk, September 16–20, 2023, Novosibirsk, FITs IVT Publ., 2023, pp. 83–88. (in Russ.).
4. Nazarova E.D., Peglivanova M.M., Filin V.Yu., Larionov A.V. *Poluchenie istinnoy diagrammy nagruzheniya na osnove ispytaniy na rastyazhenie s ispol'zovaniem chislennykh metodov* (Obtaining a True Loading Diagram Based on Tensile Tests using Numerical Methods). *Nedelya nauki FizMekh:*

sbornik materialov Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii, 3–7 aprelya 2023 g (Proc. All-Russian Scientific Conference “Week of Science of Physics FizMech”, April 3–7, 2023), St. Petersburg: Politekh-Press Publ., 2023, pp. 29–32. (in Russ.).

5. Ilyin A.B., Artemiev D.M., Filin V.Yu. Simulation of the Propagation And Arrest of the Brittle Fracture in Steel Plates of Different Thicknesses with Initial Crack Using Finite Element Method. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2018, Vol. 84, no. 1(I), pp. 56–65. (in Russ.).

6. Filin V.Yu., Mizetskiy A.V., Nazarova E.D. Opredelenie kriticheskikh temperatur khрупkosti stali na baze chislennogo modelirovaniya ispytaniy obraztsov Sharpi (Determination of Critical Steel Brittleness Temperatures based on Numerical Simulation of Tests of Sharpie Samples). *Proc. XIV All-Russian Conference on testing and research of material properties “TestMat” “Physico-Mechanical Tests, Strength and Reliability of Modern Structural and Functional Materials”*, Moscow, March 25, 2022, Moscow, NITs “Kurchatovskiy institut”–VIAM Publ., 2022, pp. 320–332. (in Russ.).

7. ASME BPVC Section XI. Division 1. *Rules for Inspection and Testing of Components of Light-Water Cooled Plants. Article A-4000: Material properties*, 2021.

Received September 22, 2025

Information about the authors

Filin Vladimir Yurievich is a Dr. Sc. (Engineering), Head of Group in Certification of Materials and Structural Strength, NRC Kurchatov Institute – CRISM Prometey, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: npk3@crism.ru.

Barakov Danila Rostislavovich is Post-graduate Student, Engineer in the Group in Certification of Materials and Structural Strength, NRC Kurchatov Institute – CRISM Prometey, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: npk3@crism.ru.

Nazarova Elizaveta Dmitrievna is Post-graduate Student, Engineer in the Group in Certification of Materials and Structural Strength, NRC Kurchatov Institute – CRISM Prometey, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: npk3@crism.ru.

DFT SIMULATIONS OF g -C₂O MONOLAYER AS ENERGY STORAGE MATERIAL

M.S. Gorshkov, D.Yu. Faizova, E.V. Anikina

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: anikinaev@susu.ru

Abstract. The paper presents a first-principles study of the C₂O monolayer as a potential material for energy storage applications. We optimized the atomic structure of the pristine monolayer, as well as those with an adsorbed lithium atom and molecular hydrogen. The binding energy of the lithium atom was found to be approximately 1,4 eV, which is lower than the cohesion energy of bulk lithium (~1,6 eV). The H₂ molecule also interacted with the monolayer rather weakly, with a binding energy not exceeding ~90 meV. These results suggest that the studied material in its pristine form is not suitable for hydrogen storage, and lithium decoration may not solve this problem due to the potential clustering of lithium atoms on the C₂O surface. However, the obtained modeling parameters, including the optimized characteristics of the atomic-orbital basis set, can be used to simulate other modifications of the monolayer and further investigate its properties.

Keywords: g -C₂O monolayer; hydrogen adsorption, Li sorption, density functional theory; local pseudoatomic orbitals (PAOs), basis set superposition error (BSSE).

Introduction

The C₂O monolayer is a material with a high specific surface area and, consequently, a potentially large number of adsorption sites for lithium ions and molecular hydrogen. This feature makes it a promising candidate for applications in lithium-ion batteries and hydrogen storage devices. The stability of this material has been previously predicted by theoretical methods [1], and its properties as a hydrogen separation membrane have been investigated [2]. In this study, we used density functional theory (DFT) to research the mechanisms of hydrogen and lithium sorption at the atomic level and to estimate the energy characteristics of the adsorbate-surface interactions.

DFT calculations can be computationally demanding, especially when accurate dispersion corrections are required for simulating weakly interacting systems. Furthermore, the presence of a high vacuum volume in the model necessitates a careful choice of methodology. Therefore, the use of localized pseudo-atomic orbitals as a basis set for wavefunction decomposition represents a reasonable approach. This type of basis set can yield accurate and efficient results provided that thorough corrections for the basis set superposition error (BSSE) are applied [3, 4]. We have previously demonstrated that after applying energy and geometry corrections for BSSE, results obtained with such a basis set can be as accurate as those from plane-wave basis set calculations, which are inherently free from the BSSE [5]. In this paper, we successfully simulated the atomic structure and sorption properties of the g -C₂O monolayer using computational resources limited to those of a personal computer.

Models and simulation details

Numerical experiments were performed with periodic boundary conditions using the SIESTA software package [6], which employs an atomic-orbital basis set for wavefunction decomposition. We treated the 2s²2p² electrons for C, 2s²2p⁴ electrons for O, 2s¹ electron for Li, and 1s¹ electron for H as valence electrons. Norm-conserving pseudopotentials were taken from the database for the PSF format [7]. We utilized a double- ζ polarized basis set (DZP [8]), where three finite functions are used for each atomic orbital: the main, modified, and polarized orbitals. To account for van der Waals interactions, we employed the semi-empirical dispersion correction scheme by Grimme (DFT-D2) [9] in conjunction with the Perdew–Burke–Ernzerhof (PBE) exchange–correlation (XC) functional [10], as well as the vdW-DF functional of Dion *et al.* [11] with exchange modified by Berland and Hyldgaard (vdW-DF2-

BH) [12]. Test spin-polarized calculations of the pristine, Li-decorated, and H₂-adsorbed g-C₂O monolayer showed that all investigated systems were non-magnetic. Therefore, to accelerate the calculations, most production simulations were performed without spin polarization. The simulation parameters used in this work, which allowed us to achieve a precision in binding energy calculations of approximately 5 meV, are summarized in Table 1.

Table 1

Simulation parameters		
XC functional	PBE+D2	BH-vdW
<i>k</i> -points	5×5×1	
MeshCutoff, Ry	450 (≈6,12 keV)	
Total energy convergence criterion, eV	10 ⁻⁶	
Force convergence criterion, Ry/Bohr	5·10 ⁻⁵ (≈1,3 meV/Å)	
Vacuum layer, Å	33 Å	
Optimized translational parameter, Å	8,26	8,25

The hexagonal simulation cell contained 12 carbon and 6 oxygen atoms. Fig. 1 shows the atomic structure of the g-C₂O monolayer after geometry relaxation. The equilibrium lattice parameter was determined by minimizing the total energy of the system. Both employed exchange-correlation functionals yielded similar structural parameters. The calculated bond lengths and pore diameter ($d_{pore} = 5,37$ Å and 5,35 Å for PBE+D2 and BH-vdW functionals, respectively) are in good agreement with previous studies of the g-C₂O monolayer [1, 2].

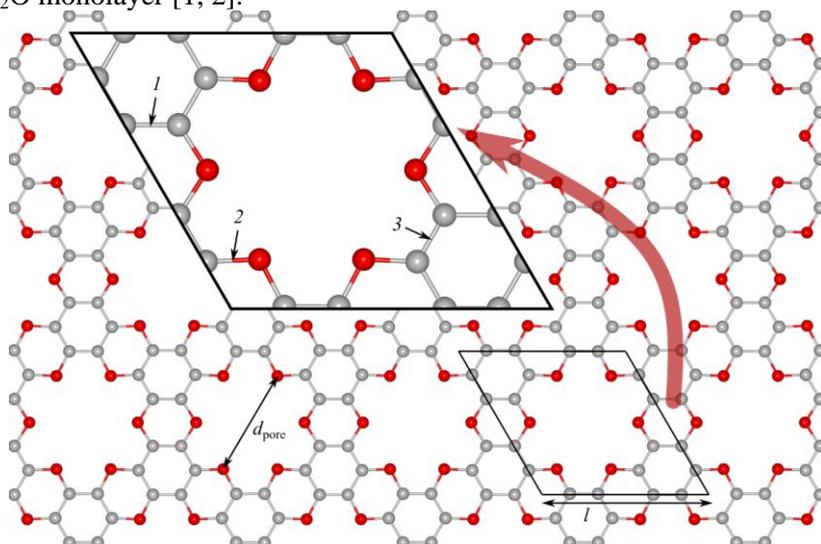


Fig. 1. Top view of the optimized atomic structure of the C₂O monolayer obtained using the PBE+D2 functional. Carbon and oxygen atoms are represented by grey and red spheres, respectively. The unit cell boundary is indicated by a solid black line. The lattice parameters *l* for the different XC approximations are listed in Table 1. The calculated bond lengths are (1) 1,41, (2) 1,39, and (3) 1,40 Å. All structural images were generated using the VESTA 3 software package

The binding energies of a Li atom and a hydrogen molecule were calculated using the following equation:

$$E_{bind} = E_{ad} + E_{C_2O} - E_{C_2O+ad} - |E_{CP}|, \quad (1)$$

where E_{ad} , E_{C_2O} , and E_{C_2O+ad} are the total energy of an isolated adsorbate (a Li atom or a hydrogen molecule), an isolated C₂O monolayer, and the adsorbate-substrate system (decorated g-C₂O monolayer), respectively; E_{CP} is the Boys–Bernardi counterpoise correction for the basis set superposition error [13]. Note, that with this definition, a positive value of the binding energy corresponds to an attractive interaction between the adsorbate and the C₂O monolayer.

Pseudo-atomic basis set optimization

Since all calculations were performed using a localized atomic-orbital basis set, the basis set parameters were optimized prior to the sorption simulations to ensure the highest possible accuracy of the binding energy estimates. We monitored the convergence of the total energy of the g-C₂O monolayer

and “pressure” P for geometrical parameter with respect to the basis set cutoff radius, following the procedure detailed in [5]. The resulting convergence dependencies are presented in fig. 2.

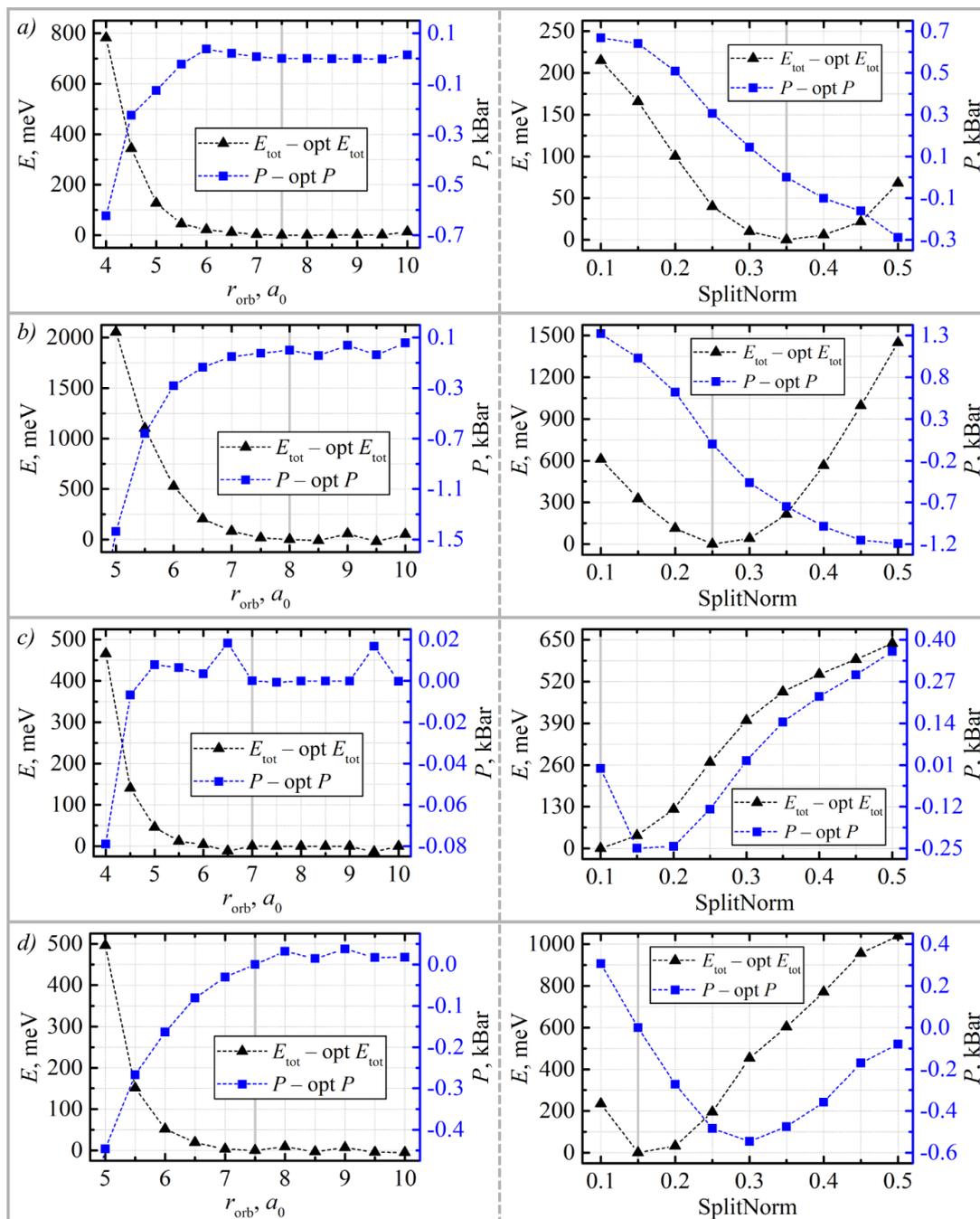


Fig. 2. Convergence of the total energy and the parameter P of the C_2O monolayer with respect to the cutoff radii of a) C(2s), b) C(2p), c) O(2s), and d) O(2p) atomic orbitals. The left panels show the dependencies for the first- ζ (main) orbital function, while the right panels correspond to the second- ζ (modified) orbital function (the cutoff radius for the latter is controlled by the SplitNorm parameter [8]). The chosen as optimal values are marked by solid gray vertical lines. The atomic orbital radii are given in Bohr radius ($a_0 \approx 0,53 \text{ \AA}$).

As shown in fig. 2, the convergence behavior for all considered valence orbitals was consistent with theoretical expectations. Consequently, the optimal basis set parameters were selected according to standard criteria: the cutoff radius for the first- ζ (main) orbital function was chosen at the point where both the total energy and the parameter P reached stable plateau values, while the SplitNorm parameter for the second- ζ (modified) function was optimized to minimize the total energy of the g- C_2O monolayer. The specific basis set parameters selected for all subsequent simulations are summarized in table 2.

The default basis set parameters are indicated in parentheses in table 2 for comparison. It is evident that these default parameters differ significantly from the optimized values obtained in this work. Furthermore, we have previously demonstrated that the default cutoff radii are insufficient for accurate simulations of H₂ sorption [5]. Therefore, the optimized basis set parameters presented here are recommended for future simulations of decorated and/or defective g-C₂O monolayer. For hydrogen and lithium the following parameters were used: $r = 6,05a_0$ and $r_m = 2,52a_0$ for H(1s) orbital; $r = 7,78a_0$ and $r_m = 7,68a_0$ for Li(2s) orbital.

Basis set parameters

Table 2

Orbital	r, a_0	r_m, a_0	SplitNorm
C(2s)	7,64 (4,09)	2,81 (3,35)	0,35 (0,15)
C(2p)	8,03 (4,87)	3,22 (3,48)	0,25 (0,15)
O(2s)	7,00 (3,31)	2,77 (2,51)	0,10 (0,15)
O(2p)	7,54 (3,94)	2,74 (2,54)	0,15 (0,15)

Hydrogen sorption on the g-C₂O monolayer

The initial position of the H₂ molecule was above the center of an oxygen pore, as this configuration was previously identified as the most energetically favorable in a similar material [14]. After geometry relaxation, the H₂ molecule remained centered above the pore with its molecular axis perpendicular to C₂O sheet (fig. 3, b). The binding energy was calculated using eq. (1) for the different dispersion corrections. Furthermore, to account for the BSSE in the relaxed geometry [5, 14], we calculated the BSSE-corrected H₂-monolayer distance (d_{corr}) and the corresponding corrected binding energy. All binding energy results are summarized in fig. 3a. The calculated distances for the PBE+D2 approximation were $d = 1,71 \text{ \AA}$ and $d_{corr} = 1,96 \text{ \AA}$. For the BH-vdW functional, the distances were $d = 2,23 \text{ \AA}$ and $d_{corr} = 2,41 \text{ \AA}$. A significant discrepancy between the two functionals is evident: the BH-vdW estimations for the H₂-monolayer distance are more than 20 % larger than those obtained with the PBE+D2 functional. Moreover, the PBE+D2 results were more sensitive to the BSSE geometry correction, with d_{corr} being 15 % larger than uncorrected distance d . For the BH-vdW functional, this increase was less than 10 %.

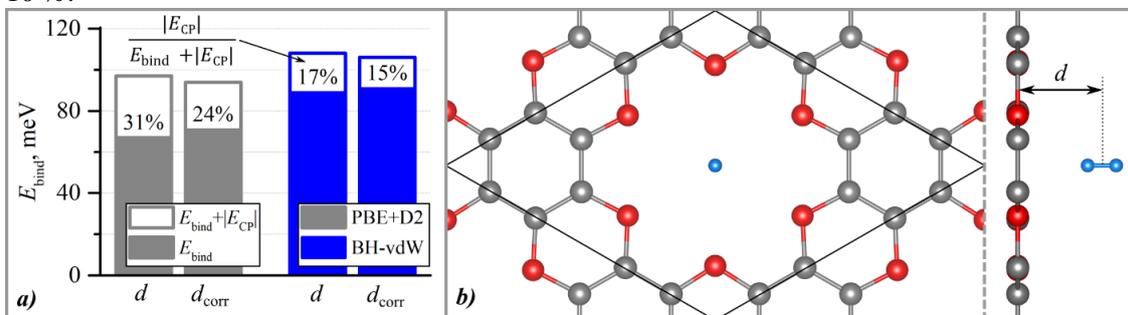


Fig. 3. Hydrogen sorption on the C₂O monolayer: a) binding energy of an H₂ molecule calculated using different dispersion corrections, with and without BSSE corrections applied to the system geometry; b) top and side view of H₂ adsorbed above the oxygen pore. The structure shown is the optimized geometry obtained using the BH-vdW functional, prior to the application of the BSSE correction.

Fig. 3, a shows that for all used functionals the counterpoise (CP) correction for the BSSE accounted for a considerable fraction (up to 30 %) of the uncorrected binding energy. While the geometry optimization with the BSSE correction slightly improved the situation, the subsequent CP corrections remained significant. This indicates that for weakly bonded systems, an energy correction for the BSSE is essential. Surprisingly, the hydrogen binding energies obtained with the PBE+D2 functional were approximately 20 % lower than those from the BH-vdW functional, despite the considerably shorter H₂-monolayer distances observed with the Grimme correction scheme. Overall, the binding energy did not exceed 100 meV per H₂ molecule, which is far too low for the desired room-temperature application of the C₂O monolayer as a hydrogen storage material.

Lithium sorption on the g-C₂O monolayer

We also simulated the sorption of a single lithium atom on the g-C₂O monolayer to evaluate the nature of its bonding. The initial position for the Li atom was chosen above the center of the oxygen pore,

as this site was previously reported to be the most energetically favorable in a similar material [15]. After geometry relaxation, the g-C₂O layer exhibited a slight distortion (see fig. 4, b, $\Delta l = 0,65 \text{ \AA}$ and $0,62 \text{ \AA}$ for the BH-vdW and the PBE+D2 functionals, respectively). The Li atom remained coordinated to the oxygen pore but was displaced from its center. The lithium binding energy was calculated using Eq. (1). In this case, geometry correction for the BSSE was deemed unnecessary, as increasing the Li-C₂O distance did not lead to a more favorable total energy. The resulting Li binding energies are presented in fig. 4, a.

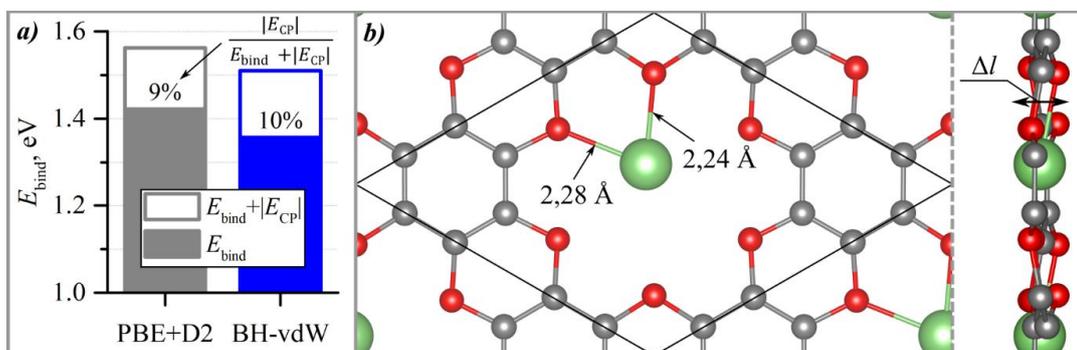


Fig. 4. Lithium adsorption on the C₂O monolayer: a) binding energy of a Li atom calculated using different dispersion corrections; b) top and side view of the optimized structure of a Li atom adsorbed at the oxygen pore site, obtained using the BH-vdW functional

Fig. 4, a shows that in the case of Li adsorption, the energy correction for the BSSE plays a less significant role than for H₂ adsorption: the CP correction does not exceed 10 % of the uncorrected Li binding energy. Furthermore, the different dispersion corrections yielded consistent results for lithium, with only a $\sim 5 \%$ difference between the estimates obtained with the PBE+D2 and BH-vdW functionals. Overall, the Li atom binds to the C₂O monolayer with an energy of approximately 1,4 eV. While this value is adequate for lithium-ion battery applications, it is lower than the cohesive energy of bulk lithium ($\sim 1,6 \text{ eV}$). This makes lithium an ineffective decorative agent for enhancing hydrogen sorption, as Li atoms will tend to cluster with increasing concentration. The inner atoms in such clusters would not participate in hydrogen binding.

Conclusion

The pristine and Li-/H₂-decorated g-C₂O monolayer was investigated using density functional theory with a pseudo-atomic orbital basis set for wavefunction decomposition. The relaxed C₂O atomic structure was obtained for the considered functionals, and the optimized parameters for the atomic orbital basis functions were determined. These parameters can be utilized in future simulations of C₂O-based systems.

For hydrogen molecule adsorption, the center of the H₂ molecule was located at a distance of 2,0–2,4 Å from the monolayer (depending on the dispersion corrections scheme). The calculated binding energy ranged from 70 to 90 meV, which is below the optimal range of 200–600 meV required for effective sorption-desorption cycles under practical conditions. This indicates that the hydrogen molecule interacts too weakly with the C₂O surface to be retained effectively, diminishing the prospects of using the pristine monolayer in hydrogen storage applications without further surface modification.

The lithium binding energy was approximately 1,4 eV, with the atom occupying the oxygen pore site of the slightly distorted monolayer. While this value falls within the acceptable range for lithium-ion battery anodes, further simulations with higher lithium concentrations are necessary to draw definitive conclusions regarding the application of C₂O in lithium batteries. Importantly, the lithium binding energy is lower than the cohesive energy of bulk lithium ($\sim 1,6 \text{ eV}$). This implies that decorating the C₂O monolayer with lithium is not a viable strategy for enhancing hydrogen binding energy, as potential clustering of lithium atoms would reduce the overall hydrogen capacity of the material.

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 25-22-20023, <https://rscf.ru/project/25-22-20023/>.

References

1. Liu W., Liu J., Miao M. Macrocycles Inserted in Graphene: from Coordination Chemistry on Graphene to Graphitic Carbon Oxide. *Nanoscale*, 2016, Vol. 8, no. 41, pp. 17976–17983. DOI: 10.1039/c6nr04178g
2. Zhu L., Chang X., He D., Xue Q., Xiong Y., Zhang J., Pan X., Xing W. Theoretical Study of H₂ Separation Performance of Two-Dimensional Graphitic Carbon Oxide Membrane. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2017, Vol. 42, no. 18, pp. 13120–13126.
3. Lee K., Yu J., Morikawa Y. Comparison of Localized Basis and Plane-Wave basis for Density-Functional Calculations of Organic Molecules on Metals. *Phys. Rev. B*, 2007, Vol. 75, no. 4, p. 045402. DOI: 10.1103/physrevb.75.045402
4. Vilela O.D., Laun J., Peintinger M.F., Bredow T. BSSE-Correction Scheme for Consistent Gaussian Basis sets of Double- and Triple-zeta Valence with Polarization Quality for Solid-State Calculations. *J. Comput. Chem.*, 2019, Vol. 40, no. 27, P. 2364. DOI: 10.1002/jcc.26013
5. Alantev V.K., Babailova V.D., Kaplun V.M., Anikina V.E., Ahuja R. Basis Set Superposition Error: Effects of the Boys–Bernardi Correction on the DFT Modeling of Hydrogen Sorption on Low-Dimensional Carbon Nano-materials. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2023, Vol. 87, no. 11, pp. 1667–1674. DOI: 10.3103/s1062873823703860
6. Soler M.J., Artacho E., Gale D.J., García A., Junquera J., Ordejón P., Sánchez-Portal D. The SIESTA Method for Ab initio Order-N Materials Simulation. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2002, Vol. 14, no. 11, pp. 2745–2779. DOI: 10.1088/0953-8984/14/11/302
7. Pseudopotentials for SIESTA: <https://siesta-project.org/siesta/Documentation/Pseudopotentials/>
8. Artacho E., Anglada E., Diéguez O., Gale D.J., García A., Junquera J., Martin R.M., Ordejón P., Pruneda J.M., Sánchez-Portal D., Soler J.M. The SIESTA Method: Developments and Applicability. *J. Phys. Condens. Matter.*, 2008, Vol. 20, no. 6, P. 064208. DOI: 10.1088/0953-8984/20/6/064208
9. Grimme S. Semiempirical GGA-type Density Functional Constructed with a Long-Range Dispersion Correction. *J. Comput. Chem.*, 2006, Vol. 27, iss. 15, pp. 1787–1799. DOI: 10.1002/jcc.20495
10. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized Gradient Approximation Made Simple. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, Vol. 77, no. 18, pp. 3865–3868. (Erratum: *Phys. Rev. Lett.*, 1997, Vol. 78, p. 1396). DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.3865
11. Dion M., Rydberg H., Schröder E., Langreth D.C. Lundqvist, B.I. Van der Waals Density Functional for General Geometries. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, Vol. 92, no. 24, P. 246401. (Erratum: *Phys. Rev. Lett.*, 2005, Vol. 95, p. 109902). DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.246401
12. Berland K., Hyldgaard P. Exchange Functional that Tests the Robustness of the Plasmon Description of the Van der Waals Density Functional. *Phys. Rev. B*, 2014, Vol. 89, no. 3, P. 035412. DOI: 10.1103/PhysRevB.89.035412
13. Boys S.F., Bernardi F. The Calculation of Small Molecular Interactions by the Differences of Separate Total Energies. Some Procedures with Reduced Errors. *Mol. Phys.*, 1970, Vol. 19, Iss. 4, pp. 553–566. DOI: 10.1080/00268977000101561
14. Anikina E.V., Babailova D.V., Zhilin M.S., Beskachko V.P. Tetraoxa[8]circulene Monolayer as Hydrogen Storage Material: Model with Boys–Bernardi Corrections Within Density Functional Theory. *J. Surf. Invest.: X-Ray, Synchrotron Neutron Tech.*, 2024, Vol. 18, no. 1, P. 19–26. DOI: 10.1134/S102745102401004X
15. Begunovich V.L., Kuklin V.A., Baryshnikov V.G., Valiev R.R., Ågren H. Single-layer Polymeric Tetraoxa[8]circulene Modified by S-block Metals: Toward Stable Spin Qubits and Novel Superconductors. *Nanoscale*, 2021, Vol. 13, no. 9, P. 4799. DOI: 10.1039/d0nr08554e

Received September 17, 2025

Information about the authors

Gorshkov Maksim Sergeevich is Undergraduate Student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Faizova Diana Yumagildeevna is Undergraduate Student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Anikina Ekaterina Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: anikinaev@susu.ru.

DFT МОДЕЛИРОВАНИЕ МОНОСЛОЯ G-C₂O КАК МАТЕРИАЛА-НАКОПИТЕЛЯ ЭНЕРГИИ**М.С. Горшков, Д.Ю. Фаизова, Е.В. Аникина**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: anikinaev@susu.ru

Аннотация. Проведено первопринципное исследование монослоя C₂O как потенциального материала-накопителя энергии. Получена оптимизированная атомная структура чистого монослоя, а также с адсорбированными атомом лития и молекулярным водородом. Энергия связи атома лития оказалась меньше по величине (~1,4 эВ), чем энергия когезии кристаллического лития (~1,6 эВ). Молекула H₂ тоже достаточно слабо взаимодействовала с монослоем: величина ее энергии связи не превышала ~90 мэВ. К сожалению, такие результаты показывают, что исследованный материал в чистом виде не пригоден для использования в качестве водородного хранилища и декорирование литием не сможет решить эту проблему из-за его потенциальной кластеризации на поверхности C₂O. При этом полученные параметры моделирования, включающие в себя характеристики базисного набора, могут быть использованы для моделирования других модификаций монослоя и дальнейшего исследования его свойств.

Ключевые слова: монослой g-C₂O; адсорбция водорода; сорбция лития; теория функционала электронной плотности; атомноподобные орбитали; ошибка суперпозиции базисного набора.

Литература

1. Liu, W. Macrocycles Inserted in Graphene: from Coordination Chemistry on Graphene to Graphitic Carbon Oxide / W. Liu, J. Liu, M. Miao // *Nanoscale*. – 2016. – Vol. 8, no. 41. – P. 17976–17983
2. Theoretical Study of H₂ Separation Performance of Two-Dimensional Graphitic Carbon Oxide Membrane / L. Zhu, X. Chang, D. He *et al.* // *International Journal of Hydrogen Energy*. – 2017. – Vol. 42, no. 18. – P. 13120–13126.
3. Lee, K. Comparison of Localized Basis and Plane-Wave basis for Density-Functional Calculations of Organic Molecules on Metals / K. Lee, J. Yu, Y. Morikawa // *Phys. Rev. B*. – 2007. – Vol. 75, no. 4. – P. 045402.
4. BSSE-Correction Scheme for Consistent Gaussian Basis sets of Double- and Triple-zeta Valence with Polarization Quality for Solid-State Calculations / O.D. Vilela, J. Laun, M.F. Peintinger, T. Bredow // *J. Comput. Chem.* – 2019. – Vol. 40, no. 27. – P. 2364.
5. Basis Set Superposition Error: Effects of the Boys–Bernardi Correction on the DFT Modeling of Hydrogen Sorption on Low-Dimensional Carbon Nano-materials / K.V. Alantev, D.V. Babailova, M.V. Kaplun, E.V. Anikina, R. Ahuja // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. – 2023. – Vol. 87, no. 11. – P. 1667–1674
6. The SIESTA Method for Ab initio Order-N Materials Simulation / M.J. Soler, E. Artacho, D.J. Gale *et al.* // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2002. – Vol. 14, no. 11. – pp. 2745–2779.
7. Pseudopotentials for SIESTA: <https://siesta-project.org/siesta/Documentation/Pseudopotentials/> (дата обращения: 27.08.2025).
8. The SIESTA Method: Developments and Applicability / E. Artacho, E. Anglada, O. Diéguez *et al.* // *J. Phys. Condens. Matter*. – 2008. – Vol. 20, no. 6. – P. 064208.
9. Grimme, S. Semiempirical GGA-type Density Functional Constructed with a Long-Range Dispersion Correction / S. Grimme // *J. Comput. Chem.* – 2006 – Vol. 27, Iss. 15. – P. 1787–1799.
10. Perdew, J.P. Generalized Gradient Approximation Made Simple / J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – Vol. 77, no. 18. – P. 3865–3868. (Erratum: *Phys. Rev. Lett.* – 1997 – Vol. 78 – p. 1396).

11. Van der Waals Density Functional for General Geometries / M. Dion, H. Rydberg, E. Schröder *et al.* // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92, no. 24. – P. 246401. (Erratum: Phys. Rev. Lett. – 2005 – Vol. 95 – p. 109902)

12. Berland, K. Exchange Functional that Tests the Robustness of the Plasmon Description of the Van der Waals Density Functional / K. Berland, P. Hyldgaard // Phys. Rev. B. – 2014. – Vol. 89, no. 3. – P. 035412.

13. Boys, S.F. The Calculation of Small Molecular Interactions by the Differences of Separate Total Energies. Some Procedures with Reduced Errors / S.F. Boys, F. Bernardi // Mol. Phys. – 1970. – Vol. 19, Iss. 4. – P. 553–566.

14. Tetraoxa[8]circulene Monolayer as Hydrogen Storage Material: Model with BoysBernardi Corrections Within Density Functional Theory / E.V. Anikina, D.V. Babailova, M.S. Zhilin, V.P. Beskachko // J. Surf. Invest.: X-Ray, Synchrotron Neutron Tech. – 2024. – Vol. 18, no. 1. – P. 19–26.

15. Single-layer Polymeric Tetraoxa[8]circulene Modified by S-block Metals: Toward Stable Spin Qubits and Novel Superconductors / V.L. Begunovich, V.A. Kuklin, V.G. Baryshnikov *et al.* // Nanoscale. – 2021. – Vol. 13, no. 9. – P. 4799.

Поступила в редакцию 17 сентября 2025 г.

Сведения об авторах

Горшков Максим Сергеевич – студент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Фаизова Диана Юмагилдеевна – студент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Аникина Екатерина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: anikinaev@susu.ru.

FIRST PRINCIPLES INVESTIGATION OF ELECTRONIC AND ELECTRICAL PROPERTIES OF CARBON NANOTUBE INTERFACES

R.M. Latypov, S.A. Sozykin, V.P. Beskachko

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: latypovrm@susu.ru

Abstract. In the last two decades, researchers have been studying various interaction issues between electrodes (primarily metals) and single-wall carbon nanotubes (SWCNTs), including contact resistance. To create electronic devices and electrical circuits based on SWCNTs, it is crucial to have a better understanding of how the interface between the electrode and the nanotube influences contact resistance. The electronic and electrical characteristics of SWCNT (6,6) in contact with other SWCNTs were investigated using density functional theory (DFT) and non-equilibrium Green's function (NEGF) methods using the SIESTA software package. We explored the rotation of SWCNTs relative to electrodes and obtained dependences of resistance, band structures, and local density of states (LDOS) for SWCNT models as a function of rotation angle. In cases where the electrodes and central tube were identical, a three-fold decrease in conductance was observed at 12 degrees. The resistance behavior was due to the localization of electrons near the interface, as confirmed by the LDOS analysis. When the electrodes and central tube were different, the calculated resistances were very high, making these interface configurations ineffective for circuit applications.

Keywords: carbon nanotubes; DFT; NEGF; electrical resistance; band structure; local density of states.

Introduction

Carbon nanotubes (CNT) remain a promising material for nanoscale field effect transistors (FET) [1]. It is possible to fabricate CNT FET with a gate length of 5 nm [2], minimizing a transistor footprint down 40 nm [3]. Excellent mechanical and electrical properties make CNT utilizable in printed film flexible electronics [4]. CNT FET massive production is possible, but it requires to solve technological difficulties [5]. The main problems are correlated with the metrology and quality control [5]. Also, the industry lacks a general experience and know-how on CNT FET mass fabrication [5]. On laboratory scale, it is possible to fabricate a RISC-V microprocessor from CNT FETs [6]. Besides FETs, CNT has a great potential in gas sensing [7]. C_2H_2 and H_2 molecules can be detected via a simple electrical response [8]. Furthermore, the reaction to magnetic field makes CNTs a promising material for spintronics [9]. In general, CNT have applications in many fields, various prototypes were constructed, but a commercial production has not yet been achieved.

The interaction of metals with single-walled carbon nanotubes has been one of the most actively studied areas over the past twenty years. Among the most important contact parameters are the height of the Schottky barrier [10, 11] and contact resistance [12, 13] which are defining parameters for CNT FETs. It is well established, that these parameters depend on interface type and electrode material [10–13]. Yet, the exact dependence is a subject for further investigations. This is required to produce CNT FETs and gas sensors with predetermined parameters. Single-walled carbon nanotubes (SWNT) structure defects also influence its resistance besides electrode material [14–16]. Even with related structure, SWNT-graphene interface can exhibit diverse properties [17, 18]. Understanding contact resistance behavior in case of nanotubes with an unideal interface can help to engineer electric circuits based on SWNT. Density functional theory calculations enable investigation of the precise interface geometry and electrode material [10–13] without additional factors, in comparison with experiment.

In this paper, we investigated SWNT–SWNT interface properties by first-principles calculation methods. We calculated interface dependence of SWNT resistance, band structures and local density of states. We found out interface configuration when SWNT resistance is increasing by three times of pristine one. In some cases, the local density of states shifts to contact sites, leaving empty cross rings of SWNT.

Computational details

Current-voltage characteristics of ideal SWNT (6,6) were calculated using the software package SIESTA [19], based on the density functional theory and nonequilibrium Green’s function method with double- ξ (DZ) basis sets [20]. Relaxation of the carbon nanotube’s geometry was performed based on the local density approximation (LDA) and the generalized gradient approximation (GGA) with Ceperley–Alder (CA) and Becke–Lee–Yang–Parr (BLYP) pseudopotentials, respectively. The mesh cutoff was 200 Ry. The k -point distribution for all structures was $1 \times 1 \times 30$ in x -, y - and z -directions (tube axis), respectively. GUI4dft was used to analyze the calculation’s output [21].

Relaxed SWNT geometries, consisting of 72 and 96 atoms, were used to construct simulation models with the central region through which current is driven in response to a voltage applied to the left and the right regions which are treated as electrodes. The distance between the central region and electrodes from both sides was taken as the average distance between circles of the nanotube: 1,231 Å and 1,242 Å for LDA and GGA, respectively. The structure was oriented in such way, that the tube is parallel to the z -direction. There were 4 models in total, which are called “72–72”, “72–96”, “96–72” and “96–96”, where the first number is the quantity of atoms in each electrode regions, the second one is the number of atoms in the central region. Some of the models are presented in fig. 1, *a* and *b*.

For angular dependence of SWNT resistance calculation we used LDA, the central region of “72–96” model rotated around the axis of the tube. The third number in the designation of such models is the angle (in degrees) of the central region rotation relative to the electrode regions. The structures of the “72–96–4” and “72–96–14” models are shown in fig. 1, *c* and *d*, respectively. TBtrans was used for current’s calculation of electrode systems [20].

Electrode systems calculations with different from central tube electrodes were also performed in LDA approximation. The distance between electrodes remains 1,231 Å. Such models were named according to the chiral indices of the electrodes and the central part. For example, (4,4)(6,6)(4,4), where the first and last brackets mean chiral indices of electrodes SWNT and the middle one of the central tube.

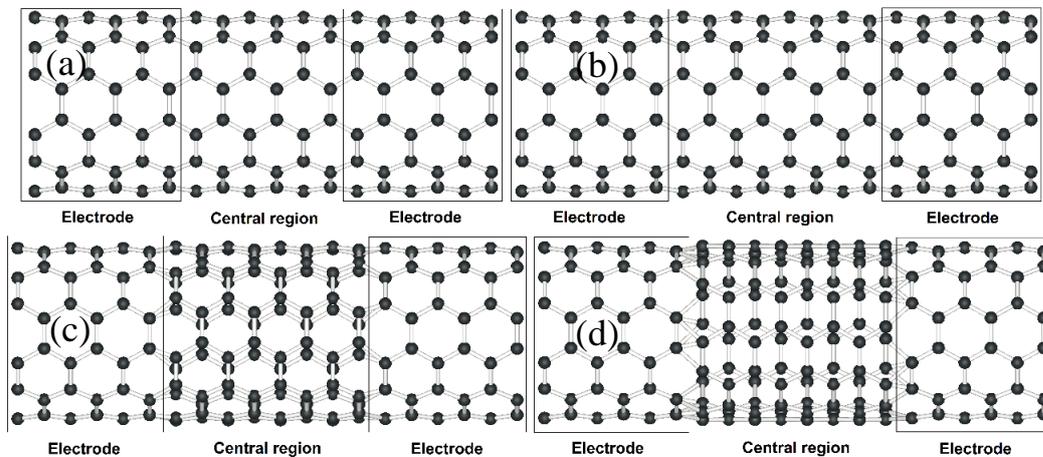


Fig. 1. The SWNT with electrodes: (a) “72–72”; (b) “72–96”; (c) “72–96–4”; (d) “72–96–14”

Result and discussion

SWNT (6,6) is an armchair nanotube with a resistance 6450 ohm (theoretical calculations) [22]. The calculated resistances from the linear I–V curves of various models are presented in Table 1. GGA have a smaller error than LDA, but both errors (relative to 6450 ohm) are less 0,5 %. LDA approximation has a less computational cost and faster mesh cutoff convergence than GGA [23], so we used it in the following calculations. The “72–96” model was used as the basis for the rotated structures.

Table 1

The resistance of SWNT (6,6) in various models			
Model	Approximation	Resistance, Ω	Error, %
“72–72”	LDA	6461	0,17
“72–96”	LDA	6476	0,41
“96–72”	LDA	6482	0,51
“96–96”	LDA	6474	0,38
“72–72”	GGA	6464	0,22
“72–96”	GGA	6469	0,30
“96–72”	GGA	6458	0,13
“96–96”	GGA	6459	0,15

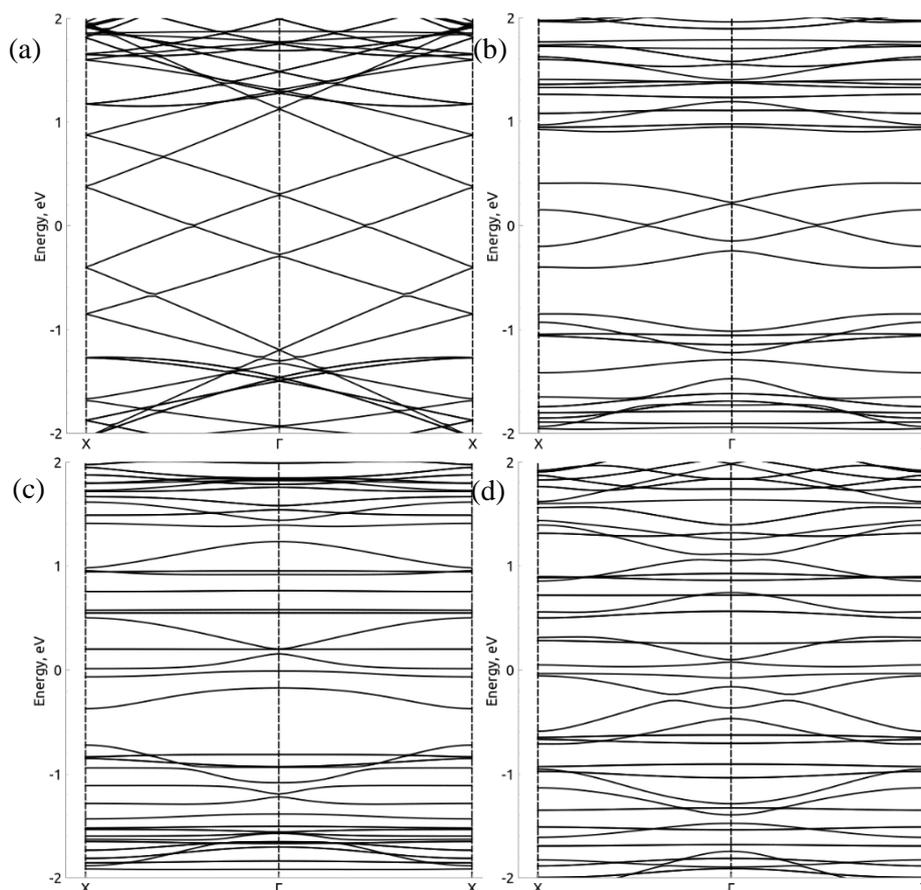


Fig. 2. The band structures of (a) “72–96”; (b) “72–96–8”; (c) “72–96–12” and (d) “72–96–18” models. Energies have been shifted to Fermi level

The band structures of electrode systems with the pristine and rotated central region are presented in fig. 2. The bending of bands around the Fermi level is observed (fig. 2, *b*) and further bending of more bands at higher angles. The gap in valence bands is observed at 8° angle, at higher angles it disappeared.

The I–V curves of rotated structures were also linear and consisted of three points: 0, 0,2 and 0,4 V. The angular dependence of SWNT resistance is shown in fig. 3. Change of curve periodicity each 12° is observed. We note the geometry periodicity of SWNT (6,6) is 60°. It means rotation angles, for example, 4° and 56° (60°–4°) are equivalent. Resistances of structures with equivalent angles are the same except for 12° and 48° angles with 8 % difference. It can be explained by the instability of this structure, the uneven distribution of C–C bonds at contact sites.

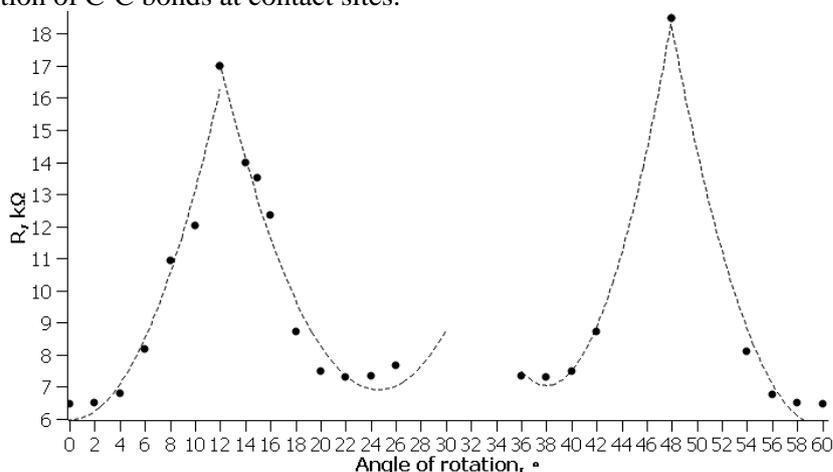


Fig. 3. Angular dependence of SWNT resistance. Parabolic approximations are shown by dashed lines

The local densities of states with the pristine and rotated central tube are presented in fig. 4. They were calculated in the energy range from $E_F - 0,1$ eV to E_F with iso surface value $10^{-4} \frac{\text{states}}{\text{eV} \times \text{\AA}}$. It shows an electron's transition to junctions of the central and the electrode regions at high angles, which we can see in fig. 4, d. In case of 12° angle (fig. 4, c) almost empty rings in the central tube are observed. It can explain high resistance of this case.

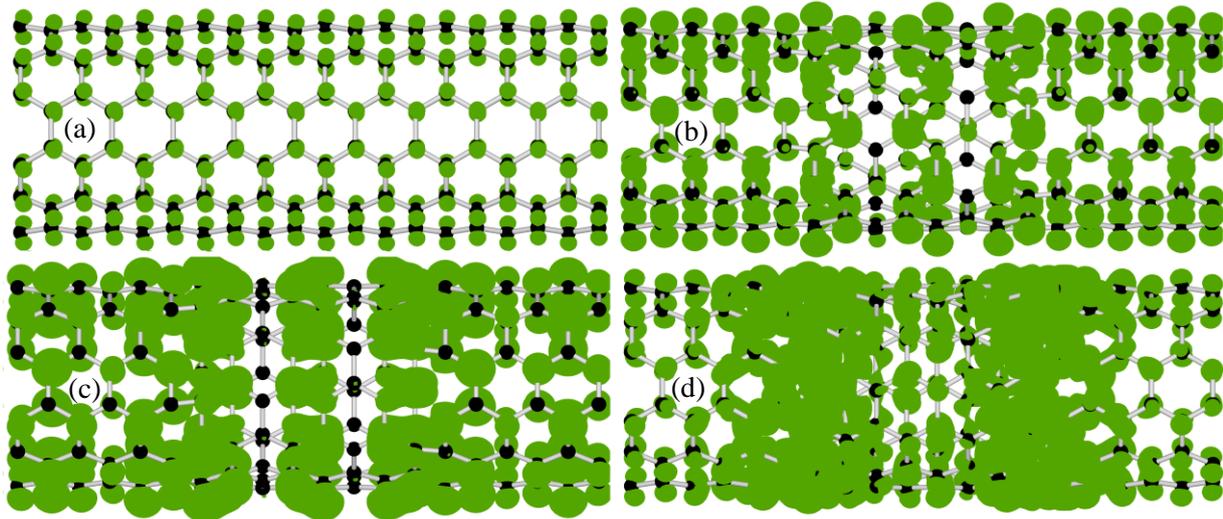


Fig. 4. The local density of states of: (a) “72–96”; (b) “72–96–8”; (c) “72–96–12”; (d) “72–96–18” models

Electrode system resistances with different types of electrodes: armchair SWNTs with (4,4), (5,5), (7,7) and (8,8) chiral indices are presented in table 2. The central tube remained the same SWNT (6,6). The higher a difference in chiral indices between electrodes and the central tube, the higher a contact resistance. We note the contact resistance of SWNT with smaller chiral indices than the central tube is higher than with bigger ones.

Table 2
Resistance of electrode systems with different electrodes. d_r – relative difference of central region and electrodes nanotube radius

Electrode system	R, Ω	d_r
(4,4)(6,6)(4,4)	473934	0,33
(5,5)(6,6)(5,5)	42371	0,17
(7,7)(6,6)(7,7)	19546	0,17
(8,8)(6,6)(8,8)	29134	0,33

Conclusion

Using density-functional theory and nonequilibrium Green's function methods, we calculated SWNT – SWNT interface properties. In particular, we obtained the band structures, the local density of states and resistance for various interface configurations. We found out the increase of resistance up to three times the intrinsic one of the armchair SWNT due to rotating the central region. Obtained angular dependence of SWNT resistance can be used for engineering nanomechanical devices. Overall, using armchair SWNT as an interconnector between other armchair SWNTs is probably ineffective in terms of contact resistance, even in the situation, when armchair tubes are the same. However, a careful study of the optimal contact geometry of different chiral SWNTs is needed to ensure this statement.

References

1. Franklin A.D. Nanomaterials in Transistors: from High-Performance to Thin-Film Applications. *Science*, 2015, Vol. 349, no. 6249, p. aab2750. DOI: 10.1126/science.aab2750
2. Qiu C.G., Zhang Z.Y., Xiao M.M., Yang Y.J., Zhong D.L., Peng L.-M. Scaling Carbon Nanotube Complementary Transistors to 5-nm Gate Lengths. *Science*, 2017, Vol. 355, no. 6322, pp. 271–276. DOI: 10.1126/science.aaj1628
3. Cao Q., Tersoff J., Farmer D.B., Zhu Y., Han S.-J. Carbon Nanotube Transistors Scaled to a 40-Nanometer Footprint. *Science*, 2017, Vol. 356, no. 6345, pp. 1369–1372. DOI: 10.1126/science.aan2476
4. Lu S., Franklin A.D. Printed Carbon Nanotube Thin-Film Transistors: Progress on Printable Materials and the Path to Applications. *Nanoscale*, 2020, Vol. 12, no. 46, pp. 23371–23390. DOI: 10.1039/D0NR06231F
5. Cao Q. Carbon Nanotube Transistor Technology for More-Moore Scaling. *Nano Res*, 2021, Vol. 14, no. 9, pp. 3051–3069. DOI: 10.1007/s12274-021-3459-z

6. Hills G., Lau C., Wright A., Fuller S., Bishop M.D., Srimani T., Kanhaiya P., Ho R., Amer A., Stein Y., Murphy D., Arvind, Chandrakasan A., Shulaker M.M. Modern Microprocessor Built from Complementary Carbon Nanotube Transistors. *Nature*, 2019, Vol. 572, no. 7771, pp. 595–602. DOI: 10.1038/s41586-019-1493-8

7. Norizan M.N., Moklis M.H., Ngah Demon S.Z., Halim N.A., Samsuri A., Mohamad I.S., Knight V.F., Abdullah N. Carbon nanotubes: Functionalization and their Application in Chemical Sensors. *RSC adv.*, 2020, Vol. 10, no. 71, pp. 43704–43732. DOI: 10.1039/D0RA09438B

8. Adrian A.R., Cerda D., Fernández-Izquierdo L., Segura R.A., García-Merino J.A., Hevia S.A. Tunable Low Crystallinity Carbon Nanotubes/Silicon Schottky Junction Arrays and their Potential Application for Gas Sensing. *Nanomat*, 2021, Vol. 11, no. 11, pp. 3040. DOI: 10.3390/nano11113040

9. Serafim F., Santos F.A.N., Lima J.R.F., Fumeron S., Berche B., Moraes F. Magnetic and Geometric Effects on the Electronic Transport of Metallic Nanotubes. *Jour. of App. Phys.*, 2021, Vol. 129, no. 4, pp. 044301. DOI: 10.1063/5.0031667

10. Svensson J., Campbell E. Schottky Barriers in Carbon Nanotube-Metal Contacts. *Jour. of appl. phys.*, 2011, Vol. 110, no. 11, pp. 16. DOI: 10.1063/1.3664139

11. Monica P.R., Sreedevi V.T. Suppression of Ambipolar Conduction in Schottky Barrier Carbon Nanotube Field Effect Transistors: Modeling, Optimization using Particle Swarm Intelligence, and Fabrication. *Comp. Model. in Eng. & Sci.*, 2019, Vol. 119, pp. 577–591. DOI: 10.32604/cmcs.2019.04718

12. Zienert A., Schuster J., Gessner T. Metallic Carbon Nanotubes with Metal Contacts: Electronic Structure and Transport. *Nanotech*, 2014, Vol. 25, no. 42, pp. 425203. DOI: 10.1088/0957-4484/25/42/425203

13. Fediai A., Ryndyk D.A., Seifert G., Mothes S., Claus M., Schröterbe M., Cuniberti G. Towards an Optimal Contact Metal for CNTFETs. *Nanoscale*, 2016, Vol. 8, no. 19, pp. 10240–10251. DOI: 10.1039/C6NR01012A

14. Teichert F., Zienert A., Schuster J., Schreiber M. Electronic Transport through Defective Semiconducting Carbon Nanotubes. *Jour. of Phys. Comm.*, 2018, Vol. 2, no. 10, pp. 105012. DOI: 10.1088/2399-6528/aae4cb

15. Teichert F., Wagner C., Croy A., Schuster J. Influence of Defect-Induced Deformations on Electron Transport in Carbon Nanotubes. *Jour. of Phys. Comm.*, 2018, Vol. 2, no. 11, p. 115023. DOI: 10.1088/2399-6528/aaf08c

16. Wu Z., Xing Y., Ren W., Wang Y., Guo H. Ballistic Transport in Bent-Shaped Carbon Nanotubes. *Carbon*, 2019, Vol. 149, pp. 364–369. DOI: 10.1016/j.carbon.2019.04.062

17. Qian L., Xie Y., Zhang S., Zhang J. Band Engineering of Carbon Nanotubes for Device Applications. *Matter*, 2020, Vol. 3, no. 3, pp. 664–695. DOI: 10.1016/j.matt.2020.06.014

18. Zhu Y., Chen C., Wu S., Cheng R., Cheng L., Zhou W.-L. Edge-Dependent Ballistic Transport through Copper-Decorated Carbon-Nanotube–Graphene Covalent Junction with Low Schottky Barrier. *Jour. of Appl. Phys.*, 2020, Vol. 128, no. 6, pp. 064302. DOI: 10.1063/5.0009406

19. Soler J.M., Artacho E., Gale J.D., García A., Junquera J., Ordejón P., Sánchez-Portal D. The SIESTA Method for Ab initio Order-N Materials Simulation. *Jour. of Phys.: Cond. Matt.*, 2002, Vol. 14, no. 11, pp. 2745. DOI: 10.1088/0953-8984/14/11/302

20. Papior N., Lorente N., Frederiksen T., García A., Brandbyge M. Improvements on Non-Equilibrium and Transport Green Function Techniques: The Next-Generation Transiesta. *Comp. Phys. Comm.*, 2017, Vol. 212, pp. 8–24. DOI: 10.1016/j.cpc.2016.09.022

21. Sozykin, S.A. GUI4dft—A SIESTA oriented GUI. *Comp. Phys. Comm.*, 2021, Vol. 262, pp. 107843. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.107843

22. Saito R., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S. *Physical Properties of Carbon Nanotubes*. London: Imperial College Press, 2001. Vol. 203.

23. Anikina E.V., Beskachko V.P. Basis Set Superposition Error: Effects of Atomic Basis Set Optimization on Value of Counterpoise Correction. *Bulletin of the South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2020, Vol. 12, Iss. 1, pp. 55–62. DOI: 10.14529/mmph200107

Received August 29, 2025

Information about the authors

Latypov Ruslan Maratovich is Post-graduate Student, Assistant, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: latypovrm@susu.ru.

Sozykin Sergey Anatolevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, Researcher of the Department of Scientific and Innovative Activity, Senior Researcher of Innovative Department, Senior Researcher of RML electromechanical, electronic and electrochemical systems, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sozykinsa@susu.ru.

Beskachko Valeriy Petrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: beskachkovp@susu.ru.

УДК 538.9

DOI: 10.14529/mmph250412

ПЕРВОПРИНЦИПНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИНТЕРФЕЙСОВ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Р.М. Латыпов, С.А. Созыкин, В.П. Бескачко

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: latypovrm@susu.ru

Аннотация. За последние два десятилетия были изучены различные аспекты взаимодействия между электродами (в основном металлическими) и одностенными углеродными нанотрубками (ОУНТ), включая контактное сопротивление. Интерес к этой тематике связан с тем, что для создания электронных устройств и электрических схем на основе ОУНТ необходимо понимать, как конфигурация контакта между электродом и нанотрубкой влияет на контактное сопротивление. В настоящей работе электронные и электрические свойства ОУНТ (6,6) при контакте с другими нанотрубками были исследованы с помощью теории функционала плотности и метода неравновесных функций Грина с использованием программного пакета SIESTA. В частности, были получены зависимости сопротивления, зонной структуры и локальной плотности электронных состояний (LDOS) моделей ОУНТ от угла поворота нанотрубки относительно электродов. В случае, когда электроды и центральная нанотрубка были одинаковыми, наблюдалось уменьшение проводимости в три раза при угле 12° . Изменение сопротивления было вызвано локализацией электронов вблизи контакта, что подтверждается анализом LDOS. В случае, когда электроды и центральная нанотрубка были разными, расчетные сопротивления были очень высокими, поэтому такие конфигурации интерфейса неэффективны для использования в электрических схемах.

Ключевые слова: углеродные нанотрубки; DFT; NEGF; электрическое сопротивление; зонная структура; локальная плотность электронных состояний

Литература

1. Nanomaterials in Transistors: from High-Performance to Thin-Film Applications / A.D. Franklin // *Science*. – 2015. – Vol. 349, no. 6249. – aab2750.
2. Scaling Carbon Nanotube Complementary Transistors to 5-nm Gate Lengths / C.G. Qiu, Z.Y. Zhang, M.M. Xiao *et al.* // *Science*. – 2017. – Vol. 355, no. 6322. – P. 271–276.
3. Carbon Nanotube Transistors Scaled to a 40-Nanometer Footprint / Q. Cao, J. Tersoff, D.B. Farmer *et al.* // *Science*. – 2017. – Vol. 356, no. 6345. – P. 1369–1372.
4. Printed Carbon Nanotube Thin-Film Transistors: Progress on Printable Materials and the Path to Applications / S. Lu, A.D. Franklin // *Nanoscale*. – 2020. – Vol. 12, no. 46. – P. 23371–23390.
5. Carbon Nanotube Transistor Technology for More–Moore Scaling / Q. Cao // *Nano Research*. – 2021. – Vol. 14, no. 9. – P. 3051–3069.
6. Modern Microprocessor Built from Complementary Carbon Nanotube Transistors / G. Hills, C. Lau, A. Wright *et al.* // *Nature*. – 2019. – Vol. 572, no. 7771. – P. 595–602.
7. Carbon Nanotubes: Functionalization and their Application in Chemical Sensors / M.N. Norizan, M.H. Moklis, S.Z. Ngah Demon *et al.* // *RSC advances*. – 2020. – Vol. 10, no. 71. – P. 43704–43732.

8. Tunable Low Crystallinity Carbon Nanotubes/Silicon Schottky Junction Arrays and their Potential Application for Gas Sensing / A.R. Adrian, D. Cerda, L. Fernández-Izquierdo *et al.* // *Nanomaterials*. – 2021. – Vol. 11, no.11. – P. 3040.
9. Magnetic and Geometric Effects on the Electronic Transport of Metallic Nanotubes / F. Serafim, F.A.N. Santos, J.R.F. Lima *et al.* // *Journal of Applied Physics*. – 2021. – Vol. 129, no. 4. – P. 044301.
10. Svensson, J. Schottky Barriers in Carbon Nanotube-Metal Contacts / J. Svensson, E. Campbell // *Journal of Applied Physics*. – 2011. – Vol. 110, no. 11. – P. 16.
11. Monica, P.R. Suppression of Ambipolar Conduction in Schottky Barrier Carbon Nanotube Field Effect Transistors: Modeling, Optimization using Particle Swarm Intelligence, and Fabrication / P.R. Monica, V.T. Sreedevi // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. – 2019. – Vol. 119. – P. 577–591.
12. Zienert, A. Metallic Carbon Nanotubes with Metal Contacts: Electronic Structure and Transport / A. Zienert, J. Schuster, T. Gessner // *Nanotechnology*. – 2014. – Vol. 25, no. 42. – P. 425203.
13. Towards an Optimal Contact Metal for CNTFETs / A. Fediai, D.A. Ryndyk, G. Seifert *et al.* // *Nanoscale*. – 2016. – Vol. 8, no. 19. – P. 10240–10251.
14. Electronic transport through defective semiconducting carbon nanotubes / F. Teichert, A. Zienert, J. Schuster, M. Schreiber // *Journal of Physics Communications*. – 2018. – Vol. 2, no. 10. – P. 105012.
15. Influence of Defect-Induced Deformations on Electron Transport in Carbon Nanotubes / F. Teichert, C. Wagner, A. Croy, J. Schuster // *Journal of Physics Communications*. – 2018. – Vol. 2, no. 11. – P. 115023.
16. Ballistic Transport in Bent-Shaped Carbon Nanotubes / Z. Wu, Y. Xing, W. Ren *et al.* // *Carbon*. – 2019. – Vol. 149. – P. 364–369.
17. Band Engineering of Carbon Nanotubes for Device Applications / L. Qian, Y. Xie, S. Zhang, J. Zhang // *Matter*. – 2020. – Vol. 3, no. 3. – P. 664–695.
18. Edge-Dependent Ballistic Transport through Copper-Decorated Carbon-Nanotube–Graphene Covalent Junction with Low Schottky Barrier / Y. Zhu, C. Chen, S. Wu, R. Cheng *et al.* // *Journal of Applied Physics*. – 2020. – Vol. 128, no. 6. – P. 064302.
19. The SIESTA Method for Ab initio Order-N Materials Simulation / J.M. Soler, E. Artacho, J.D. Gale *et al.* // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2002. – Vol. 14, no. 11. – P. 2745.
20. Improvements on Non-Equilibrium and Transport Green Function Techniques: The Next-Generation Transiesta / N. Papior, N. Lorente, T. Frederiksen *et al.* // *Computer Physics Communications*. – 2017. – Vol. 212. – P. 8–24.
21. Sozykin, S.A. GUI4dft—A SIESTA oriented GUI / S.A. Sozykin // *Computer Physics Communications*. – 2021. – Vol. 262. – P. 107843.
22. Saito, R. Physical Properties of Carbon Nanotubes / R. Saito, G. Dresselhaus, M.S. Dresselhaus. – London: Imperial College Press, 2001. – Vol. 203.
23. Anikina, E.V. Basis Set Superposition Error: Effects of Atomic Basis Set Optimization on Value of Counterpoise Correction / E.V. Anikina, V.P. Beskachko // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 55–62.

Поступила в редакцию 29 августа 2025 г.

Сведения об авторах

Латыпов Руслан Маратович – аспирант, ассистент кафедры «Физика наноразмерных систем», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: laturovrm@susu.ru.

Созыкин Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика наноразмерных систем», научный сотрудник управления научной и инновационной деятельности, старший научный сотрудник инновационного отдела, старший научный сотрудник РМЛ электромеханических, электронных и электрохимических систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sozykinsa@susu.ru.

Бесkachко Валерий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Физика наноразмерных систем», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: beskachkov@susu.ru.

Персоналии

АНАТОЛИЙ СЕМЁНОВИЧ МАКАРОВ. К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Анатолий Семёнович Макаров родился 18 августа 1945 г. в селе Бродокалмак Красноармейского района Челябинской области. Мать – Старикова Зинаида Евстигнеевна – работала учительницей в младших классах, отец – Макаров Семен Кириллович – на разных должностях в правлении совхоза.

В 1963 году А.С. Макаров окончил Бродокалмакскую среднюю школу с золотой медалью, отучившись одиннадцать лет вместо положенных десяти¹. В этом же году в Челябинском педагогическом институте была открыта новая специальность – *математика и программирование*, и Анатолий Семёнович, отличавшийся незаурядными математическими способностями, решил выбрать именно её для продолжения своего образования.

Все годы обучения, начиная со второго курса, он посещал различные научные семинары на кафедре математического анализа. Однажды на четвертом курсе заведующий кафедрой математического анализа И.Я. Барков пригласил для чтения лекций доцента Казанского государственного университета Ю.И. Грибанова. После окончания лекций тот предложил А.С. Макарову задачу о разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения. Решение этой задачи стало первой научной работой молодого математика.

Наряду с занятиями наукой Анатолия Семёновича всегда тянуло к преподавательской деятельности. Ему нравилось разбираться в тонкостях тех или иных математических утверждений и объяснять эти тонкости окружающим. Будучи студентом четвертого курса, он смог реализовать свои педагогические наклонности, в течение года на общественных началах преподавая математику в вечерней школе при институте.

В 1968 году А.С. Макаров окончил институт с красным дипломом. Его научные достижения не остались незамеченными – он был рекомендован для поступления в аспирантуру.

В этом же году А.С. Макаров начал преподавательскую деятельность в должности ассистента кафедры высшей математики № 2 Челябинского политехнического института.

В 1969 году он был направлен на стажировку в Новосибирский университет, где прослушал много полезных математических курсов, а осенью того же года мечта об аспирантуре наконец-то реализовалась – Анатолий Семёнович поступил в аспирантуру к уже знакомому ему Ю.И. Грибанову на кафедру математического анализа Казанского государственного университета. В то время этой кафедрой руководил известный математик, профессор Б.М. Гагаев. Темой научной работы аспиранта А.С. Макарова стали функциональные пространства и нелинейные операторы в них, в частности, операторы Немыцкого, Гаммерштейна, Урысона. Анатолию Семёновичу удалось получить наиболее общий критерий непрерывности оператора Немыцкого и признак полной непрерывности оператора Урысона в функциональных пространствах с произвольной сигма-конечной мерой. Эти результаты заложили основу его будущей диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

После окончания аспирантуры в 1972 году он вернулся на кафедру высшей математики № 2 ЧПИ, на которой проработал до 1985 года последовательно в должностях ассистента, старшего преподавателя, доцента. В это время А.С. Макаров опубликовал еще несколько научных работ и завершил работу над своей диссертацией, которую успешно защитил в Совете Казанского университета в 1977 году. А в 1981 году ему было присвоено ученое звание доцента.



¹ Как раз к окончанию обучения, в 1963 г. школа была переведена на одиннадцатилетнее обучение.

Персоналии

Работая на кафедре математики в ЧПИ, Анатолий Семёнович в полной мере проявил присущие ему качества: высокую научную квалификацию, талант педагога, добросовестность, принципиальность, уважительное отношение к студентам и коллегам.

В 1985 году А.С. Макаров вернулся в *alma mater* – на кафедру математического анализа Челябинского государственного педагогического института, где был избран на должность заведующего кафедрой. В этой должности он оставался вплоть до 2011 года.

Это было непростое время в жизни страны и довольно тяжелое для высшей школы в частности, перестройка и последовавший за ней развал государства, деградация высшего образования в 90-е годы, сопровождавшаяся реорганизацией высшей школы. Все это ставило перед молодым заведующим серьезные задачи, важнейшими из которых были задачи сохранения и укрепления профессионального кадрового состава кафедры и качественной организации учебного процесса.

Анатолий Семёнович с этими задачами справился. Он способствовал открытию математической аспирантуры на кафедре (руководителем которой стал профессор, д.ф.-м.н. М.М. Кипнис) и приложил значительные усилия, чтобы выпускники аспирантуры оставались работать на кафедре. По его инициативе началось творческое сотрудничество кафедры математического анализа ЧГПИ и Челябинского государственного университета, где кафедрой в то время заведовал профессор, д.ф.-м.н Г.А. Свиридюк. Это сотрудничество позволило активизировать научную деятельность не только сотрудников кафедры, но и самого Анатолия Семеновича.

Анатолий Семёнович пришел на кафедру, сотрудников которой хорошо знал. Будучи высокопрофессиональным математиком и педагогом по призванию, он на личном примере демонстрировал, как следует работать. Одно только перечисление курсов, которые в годы своего заведования ему пришлось вести – математический анализ, теорию функций комплексного и действительного переменных, численные методы, теорию вероятностей, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных и т. д. – говорит само за себя. А еще спецкурсы и спецсеминары, дипломные работы, руководство научной работой учащихся и многое другое.

Анатолий Семенович неоднократно был награжден Почетными грамотами губернатора, Законодательного Собрания, областного министерства образования и науки.

В 2008 году указом Президента ему было присвоено звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации».

Коллеги и друзья Анатолия Семёновича сердечно поздравляют его с восьмидесятилетним юбилеем и желают ему здоровья и творческого долголетия.

С.А. Загребина, В.И. Заляпин, М.М. Кипнис, Г.А. Свиридюк

ПАМЯТИ ЮРИЯ МИХАЙЛОВИЧА КОВАЛЕВА



Редакционная коллегия серии «Математика. Механика. Физика» Вестника ЮУрГУ с глубоким прискорбием сообщает о том, что 19 сентября 2025 года ушел из жизни Юрий Михайлович Ковалев – доктор физико-математических наук, профессор, член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член-корреспондент Петровской академии наук и искусств – специалист в области математического моделирования быстропротекающих процессов в многокомпонентных и многофазных средах, построения уравнений состояния энергетических и конструкционных материалов.

За выдающийся вклад в развитие российской науки и техники Юрий Михайлович Ковалев награжден знаком «За вклад в развитие атомной отрасли» госкорпорации Росатом, знаком «Почетный работник высшего профессионального образования», медалью «300 лет Российскому флоту», медалью «Столетие подводных сил России», медалями Российской Федерации космонавтики им. академ. В.П. Макеева, им. В.И. Кузнецова, им. В.П. Бармина, знаком «С.П. Королева» Российского аэрокосмического агентства. Юрий Михайлович являлся членом редакционной коллегии журнала Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия «Математика. Механика. Физика».

Коллектив Института естественных и точных наук, редакция журнала Вестник ЮУрГУ, серия «Математика. Механика. Физика», сотрудники, аспиранты и студенты кафедры вычислительной механики, которой он руководил долгие годы, выражают свои искренние соболезнования родным и близким. Мы глубоко скорбим о невозполнимой утрате. Память о Юрии Михайловиче, талантливом ученом и замечательном человеке, навсегда сохранится в наших сердцах.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции: 454080, г. Челябинск, ул. С. Кривой, 79, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 2.

Адрес издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 17, № 4
2025

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 31.10.2025. Дата выхода в свет 14.11.2025.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 12,55.

Тираж 500 экз. Заказ 283/303. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.