

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

ВЕСТНИК



ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

СЕРИЯ

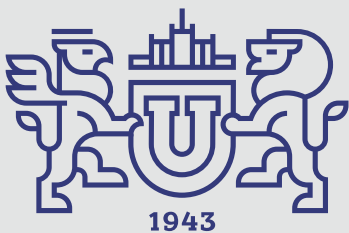
**МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА.
ФИЗИКА**

2026, том 18, № 2

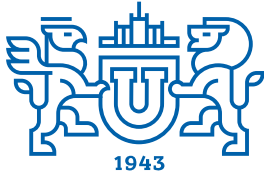
SERIES

**MATHEMATICS.
MECHANICS.
PHYSICS**

2026, volume 18, no. 2



ВЕСТНИК



ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2026
Т. 18, № 2

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

СЕРИЯ

«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»

Решением ВАК России включен в Перечень рецензируемых научных изданий

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Основной целью серии «Математика. Механика. Физика» является публикация и распространение оригинальных результатов научных исследований в области математики, механики и физики, а также их приложений в естественных, технических и экономических науках.

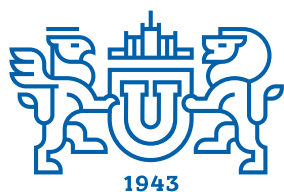
Редакционная коллегия

д.ф.-м.н., профессор **Загребина С.А.** (гл. редактор)
к.ф.-м.н., доцент **Голубев Е.В.** (отв. секретарь)
д.ф.-м.н., профессор **Бескачко В.П.** (ЮУрГУ)
к.ф.-м.н., профессор **Заляпин В.И.** (ЮУрГУ)
д.т.н., профессор **Чернявский А.О.** (ЮУрГУ)

Редакционный совет

д.т.н., профессор **Богомолов А.В.** (Государственный научный центр Российской Федерации – Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Бучельников В.Д.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)
профессор **Гуидетти Д.** (Болонский университет, г. Болонья, Италия)
д.ф.-м.н., профессор **Жуковский В.И.** (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва)
д.ф.-м.н., профессор **Зелик С.В.** (Университет Суррея, г. Гилфорд, Великобритания)
д.ф.-м.н., профессор **Короткий А.И.** (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург)
Ph. D., профессор **Ким Джейван** (Корейский институт передовых исследований KIAS, г. Сеул, Южная Корея)
Ph. D., профессор **Ким Кишик** (ИННА-Университет, г. Инчон, Южная Корея)
д.ф.-м.н., профессор **Кундикова Н.Д.** (Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург)
д.ф.-м.н., профессор **Меньших В.В.** (Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж)
д.ф.-м.н., профессор **Пинчук С.И.** (Университет штата Индиана, г. Блумингтон, США)
Ph. D., ассистент-профессор **Пузырев Е.С.** (Университет Вандербильта, г. Нэшвилл, США)
д.т.н., профессор **Равшанов Н.К.** (Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент, Узбекистан)
д.ф.-м.н., доцент **Труханов А.В.** (НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, г. Минск, Республика Беларусь)
д.т.н., профессор **Уткин Л.В.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург)
Prof. dr. ir. **Ферпуст И.** (Католический университет, г. Лёвен, Бельгия)
д.ф.-м.н., Ph. D., профессор **Штраус В.А.** (Университет Симона Боливара, г. Каракас, Венесуэла)
д.ф.-м.н., профессор **Яловец А.П.** (Челябинский государственный университет, г. Челябинск)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2026



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL
STATE UNIVERSITY

2026

Vol. 18, no. 2

SERIES

“MATHEMATICS.
MECHANICS. PHYSICS”

ISSN 2075-809X (Print)
ISSN 2409-6547 (Online)

Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Matematika. Mekhanika. Fizika”

South Ural State University

The main purpose of the series “Mathematics. Mechanics. Physics” is to promote the results of research in mathematics, mechanics and physics, as well as their applications in natural, technical and economic sciences.

Editorial Board

S.A. Zagrebina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E.V. Golubev, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.P. Beskachko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
V.I. Zalyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.O. Chernyavskiy, Doctor of Engineering, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Editorial Council

A.V. Bogomolov, Doctor of Engineering, Professor, State Scientific Center of the Russian Federation – A.I. Burnazyan Federal Medical Biophysical Center, the Russian Federal Medical-Biological Agency, Moscow, Russian Federation
V.D. Buchelnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
D. Guidetti, Full Professor of Mathematical Analysis, University of Bologna, Bologna, Italy
V.I. Zhukovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University, Moscow, Russian Federation
S.V. Zelik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Surrey, Guildford, United Kingdom
A.I. Korotkii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
Jaewan Kim, Ph. D., Professor, Korea Institute for Advanced Study KIAS, Seoul, South Korea
Kisik Kim, Ph. D., Professor, INHA-University, Incheon, South Korea
N.D. Kundikova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
V.V. Menshikh, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh Institute of Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russian Federation
S.I. Pinchuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Indiana University, Bloomington, United States of America
Y.S. Puzyrev, Ph. D., Assistant Professor, Vanderbilt University, Nashville, United States of America
N.K. Ravshanov, Doctor of Engineering, Professor, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan
A.V. Trukhanov, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Scientific Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
L.V. Utkin, Doctor of Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation
I. Verpoest, Dr. ir., Professor, Catholic University, Leuven, Belgium
V.A. Strauss, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Simon Bolivar, Caracas, Venezuela
A.P. Yalovets, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

БУГАЕВ Ю.В., КАЛАЧ А.В., НИКИТИН Б.Е., ШУРУПОВА И.Ю. Двойственность в задаче о назначении исполнителей проекта.....	5
КАРАЧИК В.В. Функция Грина задачи Дирихле-2 для 4-гармонического уравнения в шаре..	17
КЕЛЛЕР А.В., МАНАКОВ И.М. Исследование задачи смешанного управления для полулинейной системы леонтьевского типа.....	28
РЯЖСКИХ А.В., РЯЖСКИХ В.И. Оценка времени установления стационарного режима напорного течения ньютоновской жидкости через плоский пористый слой.....	33
СУРИН В.А., ИВАНОВ С.Э., ИВАНОВ М.Э., КОРЖОВ А.В., САФОНОВ В.И., КУЛИК С.П., МАЛЕТИН Н.В. Применение графовых нейронных сетей для расчета режимов электрических сетей.....	39
ТОКМАЧЕВ М.С. Функции случайных величин с распределением типа гиперболического косинуса и методы вычисления интегралов некоторого класса.....	47

Механика

КРАУС А.Е. Определение предельных деформаций разрушения гетерогенных материалов в условиях высокоскоростного взаимодействия	57
НАЙШТУТ Ю.С., ГРАЧЕВ В.А. Прогнозирование разрушения вязко-упругопластических конструкций при длительной эксплуатации	69
ШИПОВСКИЙ И.Е. Гибридная модель больших деформаций при динамическом воздействии на угольные пласты.....	77

Физика

ZAGREBINA M.A. Surface Plasmon Polaritons Excitation in 2d Gold-Based Nanoresonators of Various Geometries by a Point Source	86
--	----

CONTENTS

Mathematics

BUGAEV Yu.V., KALACH A.V., NIKITIN B.E., SHURUPOVA I.Yu. Ambivalence in the Assignment of Project Executors	5
KARACHIK V.V. Green's Function of the Dirichlet-2 Problem for the 4-Harmonic Equation in a Ball.....	17
KELLER A.V., MANAKOV I.M. A Study of a Mixed Control Problem for a Leontiev-Type Semilinear System	28
RYAZHSKIY A.V., RYAZHSKIY V.I. Estimation of the Time of Setting Steady-State Conditions for Newtonian Fluid Pressure Flow through a Flat Porous Layer	33
SURIN V.A., IVANOV S.E., IVANOV M.E., KORZHOV A.V., SAFONOV V.I., KULIK S.P., MALETIN N.V. Application of Graph Neural Networks for Calculating Steady-State Modes of Electrical Power Systems.....	39
TOKMACHEV M.S. Functions of Random Variables with a Distribution of the Hyperbolic Cosine Type and Methods for Evaluating Integrals of a Certain Class.....	47

Mechanics

KRAUS A.E. Determination of the Ultimate Fracture Deformations of Heterogeneous Materials under the Conditions of High-Speed Interaction	57
NAYSHTUT Yu.S., GRACHEV V.A. Predicting the Failure of Viscoelastic-Plastic Structures During Long-Term Operation.....	69
SHIPOVSKII I.E. A Hybrid Model of Large Deformations under Dynamic Impact on Coal Seams. 77	

Physics

ZAGREBINA M.A. Surface Plasmon Polaritons Excitation in 2d Gold-Based Nanoresonators of Various Geometries by a Point Source	86
--	----

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧЕ О НАЗНАЧЕНИИ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ ПРОЕКТА

Ю.В. Бугаев¹, А.В. Калач^{2,3}, Б.Е. Никитин², И.Ю. Шурупова¹

¹ Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация

² Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация

³ МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: a_kalach@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о назначении исполнителей проекта – совокупности взаимозависимых работ, связи между которыми описываются с помощью ориентированных взвешенных графов без петель и контуров, элементам которых поставлены в соответствие некоторые характеристики проекта. При этом события (факт окончания или начала выполнения работ) соответствуют вершинам графа, а работы – дугам, ориентация которых соответствует технологии этого процесса. Цель управления проектом заключается в оптимальном распределении исполнителей проекта по проектным заданиям. Критерий эффективности – минимум времени реализации проекта. Анализ литературы показал, что подобная задача является важной составной частью большинства сложных моделей управления проектами. Предложен метод решения данной задачи с использованием аппарата двойственности. Показано, что для вычисления соответствующей двойственной функции необходимо на каждом шаге решать классическую задачу о назначениях, ценовая матрица которой определяется умножением элементов ценовой матрицы исходной задачи на соответствующие множители Лагранжа. В ходе решения тестовых задач выяснилось, что классический алгоритм Х. Удзавы негладкой оптимизации порождает зигзагообразную траекторию поиска, сходную с траекторией оптимизации «овражных» функций. Было предложено воспользоваться подходом, разработанным В.Ф. Демьяновым и В.Л. Малоземовым для решения нелинейных минимаксных задач. В работе детально описан пример использования предлагаемого алгоритма. Тестовые расчеты подтвердили эффективность метода для задач умеренной размерности. Было показано, что в общем случае для данной задачи наблюдается разрыв двойственности, что не мешает найти приемлемое приближенное решение.

Ключевые слова: управление проектами, сетевая модель, теория двойственности, функция Лагранжа, разрыв двойственности, задача о назначениях, минимакс, поверхность разрыва.

Введение

Реализация сложных проектов предусматривает выполнение совокупности взаимозависимых работ, связи между которыми хорошо описываются с помощью сетевых моделей – ориентированных взвешенных графов без петель и контуров, элементам которых поставлены в соответствие некоторые характеристики проекта. При этом события (факт окончания или начала выполнения работ) соответствуют вершинам графа, а работы – дугам, ориентация которых соответствует технологии этого процесса. Принятие управленческих решений традиционно отождествляют с распределением ресурсов, необходимых для выполнения работ, в том числе людских ресурсов, т. е. исполнителей проекта. Целью управления является построение расписания выполнения заданного комплекса взаимозависимых работ таким образом, чтобы при заданных свойствах ресурсов и работ оптимизировать выбранную меру эффективности.

Одним из важных моментов на начальных этапах проектирования является формирование команды исполнителей. От решения этой задачи во многом зависит успешное выполнение проекта. Данная область не охватывается существующими системами управления проектами [1–4]. Поэтому актуальной является разработка методов, позволяющих формировать проектную команду и определять круг работ, поручаемых каждому исполнителю.

Как следует из формулировки проблемы, речь идёт о решении двухэтапной задачи – формирование и предварительная оценка списка потенциальных исполнителей и назначение конкретного исполнителя каждой работы. Решению этих подзадач посвящено достаточно много публикаций [5–14]. Обширный обзор соответствующих моделей и методов их решения представлен в монографии [5]. Для решения задачи первого этапа в последнее время приобрели популярность генетические алгоритмы [6–8]. Что касается решения задачи второго этапа, то предлагаются различные методы. Данная задача является обобщением классической задачи о назначениях и отличается от неё наличием дополнительных допущений и ограничений. Традиционный подход основан на сведении данной задачи к задаче смешанного целочисленного математического программирования [9], для решения которых в настоящее время существует широкий спектр программных средств, включая расширение Solver в MS Excel, LPSolve с IDE и CPLEX Optimizer. Недостаток такого подхода состоит в ограниченной размерности решаемых задач. Также предлагаются эвристические методы решения типа локального поиска и жадного алгоритма [10–13]. В [14] предложен алгоритм, основанный на сведении задачи второго этапа к обычной задаче о назначениях путём наложения системы штрафов за нарушения дополнительных ограничений.

В предлагаемой работе предпринята попытка построить алгоритм решения, основанный не только на эвристике, но и имеющий определенное математическое обоснование. Речь пойдет о весьма распространенном аппарате теории двойственности оптимизационных задач.

Методы и материалы

Пусть сформирован сетевой план проекта в виде графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, отражающего отношения взаимосвязи между работами. Каждая дуга $e \in E$ представляет собой определённую работу в рамках проекта. Пусть s – исток сети, f – ее сток.

Сделаем следующие допущения:

- каждая работа может быть выполнена каждым работником с сопоставимой эффективностью, иными словами, характер выполняемых работ более или менее однороден;
- не предполагается совмещение, т. е. выполнение нескольких работ одним исполнителем.

Обозначим:

- $J = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество исполнителей; без ограничения общности можно считать, что число работ и исполнителей совпадает; в противном случае несложно провести дробление работ на более мелкие или ввести фиктивных исполнителей;
- T_{ij} – время, которое требуется j -му исполнителю для выполнения i -й работы; при фиксированном назначении T_{ij} можно интерпретировать как вес (длину) i -й дуги графа.

Варьируемыми параметрами математической модели являются величины $Z_{ij} \in \{0, 1\}$ – распределение операций по исполнителям: $Z_{ij} = 1$, если i -я операция поручена j -му исполнителю, $Z_{ij} = 0$ в противном случае. При этом должны выполняться следующие ограничения:

каждая работа выполняется лишь одним исполнителем:

$$\sum_{j \in J} Z_{ij} = 1 \quad \forall i \in E; \quad (1)$$

каждому исполнителю поручается лишь одна работа:

$$\sum_{i \in E} Z_{ij} = 1 \quad \forall j \in J. \quad (2)$$

В публикациях [5–14] предложено достаточно много моделей реализации проекта с различными целевыми функциями и ограничениями. Наиболее распространенным способом синтеза оптимального управления, используемым в современных системах управления проектами, является Program (Project) Evaluation and Review Technique (сокращённо PERT) – метод оценки и ана-

лиза проектов. Ключевой частью PERT является метод критического пути в сетевом графике (сетевой диаграмме PERT). Остановимся на постановке задачи с минимизацией критического пути, т. е. с минимизацией времени исполнения проекта.

Связь между длиной критического пути и введенными выше величинами можно описать следующим образом. Пусть $E_k, k \in \{1, \dots, N\}$ – множество дуг, составляющих k -й по порядку путь от источника к стоку. Если распределение работ зафиксировано в элементах матрицы Z , то длина k -го пути вычисляется по формуле

$$d_k = \sum_{i \in E_k} \sum_{j \in J} T_{ij} Z_{ij}.$$

Введем вспомогательную переменную ξ , значение которой равно длине критического пути. В соответствии с определением ξ для нее должны выполняться условия

$$\sum_{i \in E_k} \sum_{j \in J} T_{ij} Z_{ij} \leq \xi \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (3)$$

$$\xi \rightarrow \min. \quad (4)$$

Поскольку $Z_{ij} \in \{0, 1\}$, а переменная ξ произвольна, задача определения исполнителей работ свелась к задаче частичного булевого программирования (1)–(4). Как известно, эти задачи в общем случае являются *NP*-трудными, поэтому нужно подобрать соответствующий метод решения.

Сложность решения модели (1)–(4) в частности состоит из необходимости перебора всех путей в сетевом графе. Их количество N сильно варьируется в разных задачах и в графах даже средней размерности может достигать весьма больших значений. Алгоритмически же задача не представляет сложности, наиболее простой метод её решения – алгоритм поиска с возвратом (*back-tracking*). Часто он реализуется в рекурсивной форме.

В линейном программировании задачи с большим числом ограничений рекомендуется решать сведением исходной задачи к двойственной. В дискретной оптимизации, кроме того, переход от исходной дискретной задачи к непрерывной двойственной открывает возможности использования таких апробированных понятий непрерывной оптимизации, как окрестность, направление наискорейшего спуска и т. п. Применим этот подход в данном случае.

Произвольная оптимизационная задача сводится к двойственной следующим образом [15]. Пусть поставлена задача

$$\min(\varphi(x) \mid x \in S), \quad (5)$$

$$h_k(x) \leq 0, \quad k \in \{1, \dots, N\}. \quad (6)$$

Функция Лагранжа для неё имеет следующий вид:

$$L(x, \lambda) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k h_k(x), \quad x \in S, \lambda_k \geq 0. \quad (7)$$

По определению задача, двойственная к (5)–(6), записывается как

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in S} L(x, \lambda). \quad (8)$$

Функцию

$$\omega(\lambda) = \min_{x \in S} L(x, \lambda), \quad \lambda_k \geq 0$$

называют двойственной функцией для задачи (5)–(6), и двойственную задачу (8) можно представить в виде

$$\max_{\lambda \geq 0} \omega(\lambda).$$

Конкретно для задачи (1)–(4) функция Лагранжа (7) выглядит так:

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left(\sum_{i \in E_k} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij} - \xi \right), \quad (9)$$

$$Z \in S, \lambda_k \geq 0.$$

Область допустимых решений S определяется ограничениями (1)–(2) и условием $Z_{ij} \in \{0, 1\}$, ξ произвольно.

Преобразуем формулу (9). Для этого введём матрицу M размера $(N \times m)$, элементы которой зададим следующим образом: $M_{ki} = 1$, если i -е ребро содержится в k -м пути, $M_{ki} = 0$ в противном случае. Тогда длина k -го пути определится по формуле

$$d_k = \sum_{i=1}^m M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij}.$$

Подставим это выражение в формулу (9) на место первоначального выражения для d_k :

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left(\sum_{i=1}^m M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij} - \xi \right).$$

Поменяем порядок суммирования:

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi \left(1 - \sum_{k=1}^N \lambda_k \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \lambda_k M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij}.$$

Обозначим

$$\mu_i = \sum_{k=1}^N \lambda_k M_{ki}. \quad (10)$$

В итоге получим:

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi \left(1 - \sum_{k=1}^N \lambda_k \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i T_{ij} Z_{ij}, \quad (11)$$

$$(Z, \xi) \in S, \lambda_k \geq 0.$$

Возможны три случая для значений λ_k .

1. $\sum_{k=1}^N \lambda_k > 1$. Поскольку ξ не ограничено, то минимум $L(Z, \xi, \lambda)$ при произвольном фиксированном λ достигается при $\xi = \infty$. При этом $\omega(\lambda) = -\infty$. Данное решение двойственной задачи, очевидно, не имеет практического значения, этот случай мы рассматривать не будем.

2. $\sum_{k=1}^N \lambda_k < 1$. Аналогичная ситуация, только минимум $L(Z, \xi, \lambda)$ достигается при $\xi = -\infty$.

3. $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$. В этом случае значение функции (11) не зависит от ξ и она примет вид

$$L(Z, \mu) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i T_{ij} Z_{ij} = \sum_{k=1}^N \lambda_k d_k, \quad Z \in S, \lambda \geq 0, \quad (12)$$

а k -я координата ее градиента равна

$$g(\lambda^u)_k = \sum_{i=1}^m M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij} - \xi = d_k - \xi.$$

Выражение (12) представляет собой целевую функцию классической задачи о назначениях, ценовая матрица которой образована из матрицы T задачи (1)–(4) умножением каждой её i -й строки на весовой коэффициент μ_i , определяемый по формуле (10) при условии

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1. \quad (13)$$

Известна тесная связь между прямой и двойственной задачами. Так, при определенных условиях [15], например, для задачи линейного программирования (ЛП), оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают. При несовпадении говорят, что имеет место разрыв двойственности. Опыт решения тестовых примеров показал, что в общем случае для задачи (1)–(4) разрыв двойственности имеет место. Данный факт не позволяет использовать

двойственный метод для поиска точного решения задачи. Однако он вполне пригоден для построения приближенного алгоритма.

Решение двойственной задачи сводится к непосредственному поиску максимума функции Лагранжа. К сожалению, по известному её свойству [15] разрыв двойственности влечёт отсутствие седловой точки, из чего, в свою очередь, следует недифференцируемость функции Лагранжа в оптимальной точке. Это означает, что для решения двойственной задачи следует привлекать специальные алгоритмы [15–22], приспособленные к оптимизации вогнутых (выпуклых вверх) функций, которые не всюду дифференцируемы. Помимо классических лагранжевых методов [15–17] можно отметить семейства субградиентных методов с растяжением пространства, которые известны как r -алгоритмы Н.З. Шора [21, 22]. Они имеют ускоренную сходимость при минимизации выпуклых функций с овражной структурой поверхностей уровня, а также хорошо зарекомендовали себя при минимизации негладких выпуклых функций. Тем не менее есть основания полагать, что алгоритмы, в основе которых положена идея движения по гребню минимизируемой негладкой функции, выдвинутая и обоснованная в монографии В.Ф. Демьянова и В.Л. Малоземова [23], вполне конкурентоспособна на фоне методов с переменной метрики.

В общем случае субградиентный алгоритм с ограничениями состоит из следующих шагов [15].

Обозначим $A \subset R^N$ – множество весов λ , удовлетворяющих условию (13).

1. Задать начальную точку λ^0 , положить номер итерации $u = 0$.

2. На u -м шаге итерации мы находимся в точке λ^u . Вычислить величину

$$\omega(\lambda^u) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^u).$$

3. Вычислить вектор $g(\lambda^u)$ – субградиент функции $\omega(\lambda)$ в точке λ^u .

4. Определить λ^{u+1} равенством

$$\lambda^{u+1} = \text{Pr}_{R^+ \cap \Lambda} \left[\lambda^u + \rho_u g(\lambda^u) \right], \quad (14)$$

где ρ_u – шаг перемещения на u -й итерации.

5. Если выполнен тест остановки, то СТОП. Иначе положить $u = u + 1$ и вернуться к пункту 2.

В ходе итераций следует фиксировать получаемые пути и отмечать минимум их максимальной длины. В результате найдется максимум функции Лагранжа. Результирующие назначения можно приближенно считать решением задачи. Кроме того, в процессе итераций может обнаружиться назначение, не доставляющее оптимальное решение двойственной задачи, но имеющее наилучшее значение функции φ . Его также можно считать искомым решением. Найденное значение максимума функции Лагранжа может служить оценкой близости полученного решения к оптимуму прямой задачи.

В ходе поиска оптимума возможно получение точки разрыва градиента. В данном случае разрыв обусловлен тем, что задача о назначениях, а значит, и задача (3)–(4) может иметь несколько решений с одинаковыми значениями целевой функции, но с разными наборами протяженностей путей $\{d_k\}$, которые, в свою очередь, определяют векторы-градиенты функции (12).

Отсюда возникают две подзадачи:

– поиск различных решений задачи (3)–(4), порождающих при фиксированном λ одинаковые значения функции Лагранжа;

– поиск направления максимального локального роста целевой функции при отсутствии дифференцируемости в обычном смысле.

Изложим способ нахождения соответствующего вектора $p(\lambda^u)$ – проекции субградиента на множество $R^+ \cap \Lambda$.

Пусть λ^u – точка разрыва градиента и $\{Z(\lambda^u)\}$ – набор всех решений задачи минимизации функции Лагранжа (12), соответствующих λ^u . Обозначим A – матрица $(m \times t)$, столбцами которой являются градиенты, образованные решениями из $\{Z(\lambda^u)\}$. Потребуем, чтобы вектор

$p(\lambda^u)$ образовывал максимально острый угол со всеми столбцами A . Точнее, чтобы выполнялось условие

$$\tau \rightarrow \max, A^T p(\lambda^u) \geq \tau e_t.$$

Здесь e_t – столбец из t единиц.

Помимо этого, вектор $p(\lambda^u)$ должен удовлетворять следующим условиям.

1. Поскольку при достаточно малой величине шага ρ вдоль направления $p(\lambda^u)$ элементы матрицы Z не изменятся, а условие (13) для новых значений λ^{u+1} должно остаться в силе, то для его соблюдения необходимо, чтобы сумма элементов $p(\lambda^u)$ была равна 0. Для этого введем произвольную матрицу H , $(m \times (m-1))$ ранга $m-1$, сумма элементов каждого столбца которой равна 0. Сделаем замену переменных, положив $p = Hx$, где x – вектор с $m-1$ координатами, и вместо поиска p будем подбирать x . Нетрудно доказать, что при такой подстановке требуемое условие для p будет выполнено.

2. В процессе поиска максимума L некоторые λ_k могут обратиться в 0. В этом случае соответствующие значения p_k должны быть неотрицательны. Обозначим множество номеров таких p_k через Q , $|Q|=s$. Введём матрицу D , $(m \times s)$ у которой в r -м столбце, $r=1, 2, \dots, s$, отличен от нуля только элемент $D_{k,r}$, $k \in Q$. Тогда соответствующее условие можно записать как $D^T Hx \geq 0$.

Кроме того, ограничим норму вектора x условием $x^T x \leq 1$, чтобы не получить вектор бесконечной длины.

Окончательно получаем, что для обеспечения максимального локального роста функции Лагранжа необходимо решить задачу условной оптимизации

$$\tau \rightarrow \max; A^T Hx \geq \tau e; x^T x \leq 1; D^T Hx \geq 0. \quad (15)$$

Данная задача имеет линейную целевую функцию и содержит квадратичное ограничение, т. е. не является стандартной. Вычислительные эксперименты показали, что при неудачном начальном приближении не удастся найти решение с помощью математических пакетов. Для достижения надежности нахождения решения приближенно сведем (15) к задаче квадратичного программирования, которая решается конечным методом.

Можно предложить два варианта такой замены:

$$x^T x \rightarrow \min; A^T Hx \geq \gamma e; D^T Hx \geq 0 \quad (16)$$

либо

$$x^T x - \gamma\tau \rightarrow \min; A^T Hx \geq \tau e; D^T Hx \geq 0. \quad (17)$$

Здесь $\gamma > 0$ – некоторое большое число.

Как было сказано выше, для определения направления поиска $p(\lambda^u)$ в точке разрыва градиента необходимо решить задачу поиска различных решений задачи (3)–(4), порождающих при фиксированном λ одинаковые значения функции Лагранжа. В общем случае это потребует определения всех возможных решений задачи о назначениях. Соответствующий метод предложен авторами в работе [24]. При этом использован комбинированный алгоритм, сочетающий ускоренный вариант модифицированного симплекс-метода и алгоритм поиска в ширину на графе.

Очевидно, что трудоемкость каждой итерации изложенного метода решения задачи (3)–(4) намного выше, чем, например, классического варианта алгоритма Утзавы [15], в котором направление поиска совпадает с направлением градиента. Однако такой вариант применим лишь при отсутствии разрыва градиента и выполнении условия $\lambda_k > 0, k=1, \dots, m$, в противном случае траектория поиска становится зигзагообразной, сходной с траекторией оптимизации «овражных» функций, что, в конечном счете, может привести к закливанию. Соответствующие примеры приведены в [22].

Остается рассмотреть вопрос о выборе длины шага поиска ρ . Предлагается определять его из условия минимума функции Лагранжа в направлении $p(\lambda^u)$. Поскольку данная целевая функция кусочно-линейная, то весьма эффективным будет метод касательных. В [22] предложена формула для определения производной по направлению p в точке разрыва градиента целевой функции. Применительно к функции (12) формула имеет вид $\frac{\partial L}{\partial p} = \min_{j=1,t} q_j$, где $q = A^T p$.

В заключение рассмотрим пример. Пусть граф G имеет 4 вершины и 5 дуг. Элементы матрицы T и дуги графа заданы в таблице.

Дуги		Длительности работ				
Начальная вершина	Конечная вершина					
1	2	10	5	9	18	11
2	4	13	19	12	6	14
1	4	19	2	20	4	19
1	3	18	9	12	17	15
3	4	11	6	14	19	10

Данный граф имеет, очевидно, три пути из истока (вершина 1) к стоку (вершина 4): путь № 1: 1 – 2 – 4 (дуги 1 и 2); путь № 2: 1 – 4 (дуга 3); путь № 3: 1 – 3 – 4 (дуги 4 и 5).

Зададим начальные значения $\lambda^0 = \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 1)^T$. Тогда решением задачи минимизации L по Z_{ij} будут следующие назначения:

$$Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кратко запишем данное назначение, указав порядковые номера исполнителей для 1-й, 2-й и т. д. задач в виде (1, 4, 2, 3, 5). Соответственно, длины путей составят (16, 2, 22). Отсюда $\omega(\lambda^0) = 13,3333$. Направление поиска определяется вектором $p(\lambda^0) = (0,1837, -0,7808, 0,5971)^T$.

Минимум $\omega(\lambda)$ в направлении $p(\lambda^0)$ достигается при $\rho^0 = 0,2767$, следующее приближение $\lambda^1 = (0,3842, 0,1173, 0,4985)^T$, $\omega(\lambda^1) = 17,3489$.

Весовому вектору λ^1 соответствуют два назначения (1, 4, 2, 3, 5) и (1, 4, 5, 3, 2) со значениями длин путей (16, 2, 22) и (16, 19, 18) соответственно. Следовательно,

$$A(\lambda^1) = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 2 & 19 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следующее направление $p(\lambda^1) = (-0,7689, 0,1465, 0,6224)^T$.

Новые значения весов будут $\lambda^2 = (0,2632, 0,1404, 0,5965)^T$. Соответствующие назначения: (1, 4, 2, 3, 5) с длинами путей (16, 2, 22); (5, 1, 4, 3, 2) и (1, 5, 4, 3, 2) с одинаковыми длинами (24, 4, 18) и (1, 4, 5, 3, 2) с длинами (16, 19, 18). $\omega(\lambda^1) = 17,6140$. Следовательно,

$$A(\lambda^2) = \begin{pmatrix} 16 & 24 & 16 \\ 2 & 4 & 19 \\ 22 & 18 & 18 \end{pmatrix},$$

Направление поиска $p(\lambda^2) = (-0,5245, -0,2796, 0,8042)^T$, $\lambda^3 = (0, 0, 1)^T$, $L(Z^{(3)}, \lambda^3) = 18$. В точке λ^3 имеем 6 назначений, 5 различных возможных путей. Матрицы $A(\lambda^3)$ и D имеют вид:

$$A(\lambda^3) = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 17 & 24 & 16 \\ 19 & 19 & 19 & 4 & 19 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача (15) при таких данных имеет нулевое решение $p(\lambda^3) = (0, 0, 0)^T$, следовательно, допустимых направлений нет, найдено оптимальное значение $L = 18$.

Наилучшие из полученных назначений – (1, 4, 5, 3, 2), (5, 4, 1, 3, 2) и (1, 4, 5, 3, 2) с протяженностью критического пути 19. Их можно принять за решение задачи. Разрыв двойственности составит $\Delta = 1$.

Проверка полным перебором показала, что минимальная длина критического пути действительно 19 и существует еще одно оптимальное назначение (3, 4, 1, 2, 5).

Разработанный алгоритм был реализован нами в системе MATLAB для решения тестовых задач. Сравнение значения функции Лагранжа в найденных решениях с полученной длиной критического пути указывает на близость полученного решения к оптимальному. Для сравнения была предпринята попытка решить тестовые задачи посредством программы bintprog системы MATLAB и пакета «Поиск решения» системы Excel.

Соответствующая задача булевого программирования содержит m^2 переменных и при $m \geq 20$ решение этим программным обеспечением уже не находилось.

Заключение

Предложен метод с использованием аппарата двойственности и составлена соответствующая программа решения задачи о назначении исполнителей проекта – последовательности работ с отношением предшествования. Тестовые расчеты подтвердили эффективность метода для задач умеренной размерности. Было показано, что в общем случае для данной задачи наблюдается разрыв двойственности, что не мешает найти приемлемое приближенное решение.

К недостаткам предложенного подхода следует отнести необходимость перебора всех путей в сетевом графе, что в общем случае приводит к задаче высокой вычислительной сложности. Однако в постановке задачи предполагали, что характер выполняемых работ более или менее однороден, а значит, их перечень не может быть слишком большим, поскольку в больших и сложных проектах виды работ обычно весьма разнообразны. Следовательно, не стоит опасаться, что в графах реальных проектов список путей будет неподъемным.

Литература

1. Cerebro: Система управления проектами. – <http://cerebrohq.com>.
2. Trac: Project management tool. – www.trac.edgwall.org.
3. PayDox: система электронного документооборота. – www.paydox.ru.
4. Автоматизированная система АСОНИКА для проектирования высоконадежных радиоэлектронных средств на принципах CALS-технологий. Том 1 / Под ред. Ю.Н. Кофанова, Н.В. Малютина, А.С. Шалумова. – М.: Энергоатомиздат, 2007. – 368 с.
5. Катаев, А.В. Управление проектами на базе динамической сети партнеров: монография / А.В. Катаев, Т.М. Катаева. – Ростов н/Д. – Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2017. – 125 с.
6. Филиппов, А.А. Применение генетического алгоритма для формирования проектных команд на основе уровня квалификации специалиста / А.А. Филиппов, В.В. Шеркунов // Информатика и вычислительная техника: Сборник научных трудов VII Всероссийской научно-

технической конференции аспирантов, студентов и молодых ученых ИВТ-2015, Ульяновск, 25–27 мая 2015 года / Ульяновский государственный технический университет. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2015. – С. 541–550.

7. Синдюкова, М.О. Генетическая оптимизация подбора исполнителей из списка потенциальных участников для проектов / М.О. Синдюкова, Е.А. Горлова // Прикладные информационные системы (ПИС-2019). Сб. научн. трудов VI Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. – Ульяновск, 2019. – С. 49–57.

8. Ковшов, Е.Е. Автоматизированный подбор руководителей образовательных проектов на основе генетических алгоритмов / Е.Е. Ковшов, В.С. Кувшинников, Л.Е. Осипенко // Известия Юго-Западного государственного университета. Курск. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 162–180.

9. Катаев, А.В. Управление проектами: математические модели оптимального назначения исполнителей проектных работ / А.В. Катаев, Т.М. Катаева, Е.Л. Макарова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2016. – Т.16, № 3. – С. 294–299.

10. Катаев, А.В. Задача минимизации количества исполнителей работ в проекте: математическая модель и алгоритм решения / А.В. Катаев, Т.М. Катаева // Экономика и социум. – 2016. – № 6-3 (25). – С. 77–84.

11. Катаев, А.В. Формирование и оптимизация проектных команд: математические модели и алгоритмы / А.В. Катаев, А.В. Тычинский // Вестник Таганрогского института управления и экономики. – 2021. – № 1 (33). – С. 57 – 60.

12. Новикова, Т.П. Алгоритм решения задачи оптимального распределения работ в сетевых канонических структурах / Т.П. Новикова, А.И. Новиков // Лесотехнический журнал. – 2014. – Т. 4, № 4(16). – С. 309–317.

13. Метод сетевого планирования разработки сложных технических систем / Р.В. Допира, Р.Ю. Кордюков, А.А. Беглецов, С.В. Сергиенко // Программные продукты и системы. – 2014. – № 2. – С. 22–26.

14. Алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях на сетях / Ю.В. Бугаев, О.В. Авсеева, Л.А. Коробова, И.Ю. Шурупова // Вестник ВГУИТ. Серия: «Информационные технологии, моделирование и управление». – 2017. – Т. 79, № 4. – С. 71–74.

15. Мину, М. Математическое программирование. Теория и практика: Пер. с фр. / М. Мину – М.: Наука, 1990. – 485 с.

16. Zhao, X. Surrogate Gradient Algorithm for Lagrangian Relaxation / X. Zhao, P. B. Luh, J. Wang // Journal of optimization Theory and Applications. – 1999. – Vol. 100, no. 3. – P. 699–712.

17. Fisher, M.L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems / M.L. Fisher // Management science. – 2004. – Vol. 50, no. 12 suppl. – P. 1861–1871.

18. Bagirov, A. Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software / A. Bagirov, N. Karmitsa, M.M. Mäkelä // Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software, 2014. – 372 p.

19. Gradient Sampling Methods for Nonsmooth Optimization / J.V. Burke, F.E. Curtis, A.S. Lewis *et al.* // Numerical Nonsmooth Optimization: State of the Art Algorithms. – 2020. – P. 201–225.

20. Numerical Nonsmooth Optimization / под ред. А.М. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa *et al.* – Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2020. – 698 p.

21. Стецюк, П.И. Субградиентные методы $ralgb5$ и $ralgb4$ для минимизации овражных выпуклых функций / П.И. Стецюк // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 127–149.

22. Шор, Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. – Киев: Наук. думка, 1979. – 199 с.

23. Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Л. Малоземов. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

24. Бугаев, Ю.В. Поиск всех решений задачи о назначениях / Ю.В. Бугаев, И.Ю. Шурупова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. тр. Международной научной конференции. – Воронеж: ВГУ, 2024. – С.1461–1465.

Поступила в редакцию 23 января 2026 г.

Сведения об авторах

Бугаев Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: y_bugaev52@mail.ru.

Калач Андрей Владимирович – доктор химических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация; Институт информационных технологий РТУ МИРЭА, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a_kalach@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>.

Никитин Борис Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных технологий, моделирования и управления, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация

Шурупова Ирина Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: i_shur@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 2, pp. 5–16*

DOI: 10.14529/mmph260201

AMBIVALENCE IN THE ASSIGNMENT OF PROJECT EXECUTORS

Yu.V. Bugaev¹, A.V. Kalach^{2,3}, B.E. Nikitin², I.Yu. Shurupova¹

¹ Military Educational and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy Named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russian Federation

² Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation

³ Institute of Information Technologies RTU MIREA, Moscow, Russian Federation

Abstract. This paper considers the assignment of project executors to a set of interdependent tasks. The relationships between these tasks are described using weighted directed graphs without loops and contours, the elements of which correspond to certain project characteristics. At the same time, events (the completion or commencement of work) are represented by the vertices of the graph, while tasks are represented by arcs, with their orientation corresponding to the technology of this process. Project management aims to optimally distribute project executors according to project assignments, with the efficiency criterion of minimizing the time required for project completion. Literature review has shown that this task is an essential component of most complex project management models. The authors proposed a method for solving this problem using the duality apparatus. It is shown that the classical assignment problem should be solved at each step to calculate the corresponding dual function. The price matrix of this problem is determined by multiplying the elements of the price matrix of the original problem by the corresponding Lagrange multipliers. When solving the test problems, it was found that H. Uzawa's classical non-smooth optimization algorithm generates a zigzag search trajectory, similar to the optimization trajectory of "ravine" functions. It was proposed to use the approach developed by V.F. Demyanov and V.L. Malozemov to solve nonlinear minimax problems. The paper provides a detailed example of using the proposed algorithm. Test calculations have confirmed the effectiveness of this method for moderate-dimensional problems. It has been shown that, in general, there is a duality gap for this problem, but an acceptable approximate solution can still be found.

Keywords: project management; network model; duality theory; Lagrange function; duality gap; assignment problem; minimax; gap surface.

References

1. *Cerebro: Sistema upravleniya proektami* (Cerebro: Project Management System). <http://cerebrohq.com>.
2. *Trac: Project Management Tool*. www.trac.edgwall.org.
3. *PayDox: sistema elektronnoy dokumentooborota* (PayDox: Electronic Document Management System). www.paydox.ru.
4. Kofanova Yu.N., Malyutina N.V., Shalumova A.S. (eds.) *Avtomatizirovannaya sistema ASONIKA dlya proektirovaniya vysokonadezhnykh radioelektronnykh sredstv na printsipakh CALS-tehnologii. Tom 1* (Automated ASONICS system for the design of highly reliable electronic devices based on the principles of CALS technologies. Volume 1). Moscow, Energoatomizdat Publ., 2007, 368 p. (in Russ.).
5. Kataev A.V., Kataeva T.M. *Upravlenie proektami na baze dinamicheskoy seti partnerov: monografiya* (Project Management based on a Dynamic Network of Partners: Monograph). Rostov-na-Donu–Taganrog, Izd-vo Yuzhnogo federal'nogo un-ta Publ., 2017, 125 p. (in Russ.).
6. Filippov A.A., Sherkunov V.V. Primenenie geneticheskogo algoritma dlya formirovaniya proektnykh komand na osnove urovnya kvalifikatsii spetsialista (The use of a genetic algorithm for the formation of project teams based on the skill level of a specialist). *Informatika i vychislitel'naya tekhnika. Sb. nauchn. trudov VII Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii aspirantov, studentov i molodykh uchenykh (IVT-2015)* (Computer Science and Computer Engineering. Proc. VII All-Russian Scientific and Technical Conference of Graduate Students, Students and Young Scientists (IVT-2015)). Ul'yanovsk, Ul'yanovskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet Publ., 2015, pp. 541–550. (in Russ.).
7. Sindukova M.O., Gorlova E.A. Geneticheskaya optimizatsiya podbora ispolniteley iz spiska potentsial'nykh uchastnikov dlya proektov (Genetic Optimization of the Selection of Performers from the List of Potential Participants for Projects). *Prikladnye informatsionnye sistemy (PIS-2019). Sb. nauchn. trudov VI Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* (Applied Information Systems (IIS-2019). Proc. VI All-Russian Scientific and Technical Conference with International Participation). Ul'yanovsk, 2019, pp. 49–57. (in Russ.).
8. Kovshov E.E., Kuvshinnikov V.S., Osipenko L.E. Avtomatizirovannyi podbor rukovoditeley obrazovatel'nykh pro-ektov na osnove geneticheskikh algoritmov (Automated Selection of Educational Project Managers based on Genetic Algorithms) *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Kursk*, 2021, Vol. 25, no. 1, pp. 162–180. (in Russ.). DOI: 10.21869/2223-1560-2021-25-1-162-180
9. Kataev A.V., Kataeva T.M., Makarova E.L. Upravlenie proektami: matematicheskie modeli optimal'nogo naznacheniya ispolniteley proektnykh rabot (Project Management: Mathematical Models of Optimal Assignment of Project Work Performers). *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Ekonomika. Upravlenie. Pravo*, 2016, Vol. 16, no. 3, pp. 294–299. (in Russ.). DOI: 10.18500/1994-2540-2016-16-3-294-299
10. Kataev A.V., Kataeva T.M. Zadacha minimizatsii kolichestva ispolniteley rabot v proekte: matematicheskaya model' i algoritm resheniya (The Task of Minimizing the Number of Performers in a Project: a Mathematical Model and a Solution Algorithm). *Ekonomika i sotsium*, 2016, no. 6-3 (25), pp. 77–84. (in Russ.).
11. Kataev A.V., Tyachinskiy A.V. Formirovanie i optimizatsiya proektnykh komand: matematicheskie modeli i algoritmy (Formation and Optimization of Project Teams: Mathematical Models and Algorithms). *Vestnik Taganrogskego instituta upravleniya i ekonomiki*, 2021, no. 1 (33), pp. 57–60. (in Russ.).
12. Novikova T.P., Novikov A.I. Algorithms for Solving Problems of Optimum Distribution Work in Network Canonical Structures. *Lesotekhnicheskii zhurnal*, 2014, Vol. 4, no. 4(16), pp. 309–317. (in Russ.). DOI: 10.12737/8515
13. Dopira. R.V., Kordyukov R.Yu., Begletsov A.A., Sergienko S.V. Metod setevogo planirovaniya razrabotki slozhnykh tekhnicheskikh sistem (A Method of Network Planning for the Development of Complex Technical Systems). *Programmnye produkty i sistemy*, 2014, no. 2, pp. 22–26. (in Russ.).
14. Bugaev Yu.V., Avseeva O.V., Korobova L.A., Shurupova I.Yu. Algorithm for Solving Multicriteria Problem of Appointments on the Networks. *Vestnik VGUIT. Seriya: "Informatsionnye*

tekhnologii, modelirovanie i upravlenie”, 2017, Vol. 79, no. 4, pp. 71–74. (in Russ.). DOI: 10.20914/2310-1202-2017-4-71-74

15. Minu M. Matematicheskoe programmirovaniye. Teoriya i praktika (Mathematical Programming. Theory and Practice). Moscow, Nauka Publ., 1990, 485 p. (in Russ.).

16. Zhao X., Luh P.B., Wang J. Surrogate Gradient Algorithm for Lagrangian Relaxation. *Journal of optimization Theory and Applications*, 1999, Vol. 100, no. 3, pp. 699–712. DOI: 10.1023/A:1022646725208

17. Fisher M.L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Management science*, 2004, Vol. 50, no. 12 suppl., pp. 1861–1871. DOI: 10.1287/mnsc.1040.0263

18. Bagirov V.A., Karmitsa N., Mäkelä M.M. *Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software*. Cham, Heidelberg: Springer International Publishing, 2014, 372 p.

19. Burke J.V., Curtis F.E., Lewis A.S., Overton M.L., Simões L.E.A. (eds.) Gradient Sampling Methods for Nonsmooth Optimization. *Numerical nonsmooth optimization: State of the Art Algorithms*, 2020, pp. 201–225. DOI: 10.1007/978-3-030-34910-3_6

20. Bagirov A.M., Gaudioso M., Karmitsa N., Mäkelä M.M., Taheri S. *Numerical Nonsmooth Optimization*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2020, 698 p. DOI: 10.1007/978-3-030-34910-3

21. Stetsyuk P.I. Subgradientnye metody ralgb5 i ralgb4 dlya minimizatsii ovrazhnykh vypuklykh funktsiy (Subgradient Methods ralgb5 and ralgb4 for Minimizing Gully Convex Functions). *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2017, Vol. 22, no. 2, pp. 127–149. (in Russ.).

22. Shor N.Z. *Metody minimizatsii nedifferentsiruemykh funktsiy i ikh prilozheniya* (Methods for Minimizing Non-Differentiable Functions and their Applications). Kiev, Naukova dumka Publ., 1979, 199 p. (in Russ.).

23. Dem'yanov V.F., Malozemov V.L. *Vvedenie v minimaks* (Introduction to Minimax). Moscow, Nauka Publ., 1972, 368 p. (in Russ.).

24. Bugaev Yu.V., Shurupova I.Yu. Poisk vseh resheniy zadachi o naznacheniyakh (Search for all Solutions to the Assignment Problem). *Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki. Sb. tr. Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* (Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Proc. of the International Scientific Conference). Voronezh, VGU Publ., 2024, pp. 1461–1465. (in Russ.).

Received January 23, 2026

Information about the authors

Bugaev Yuriy Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Military Educational and Scientific Center of the Air Force “Air Force Academy Named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russian Federation, e-mail: y_bugaev52@mail.ru.

Kalach Andrey Vladimirovich is Dr. Sc. (Chemistry), Professor, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation; Institute of Information Technologies RTU MIREA, Moscow, Russian Federation, e-mail: a_kalach@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>.

Nikitin Boris Egorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Information Technology, Modeling and Management, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation.

Shurupova Irina Yur'evna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor Department of Mathematics, Military Educational and Scientific Center of the Air Force “Air Force Academy Named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russian Federation, e-mail: i_shur@mail.ru.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-2 ДЛЯ 4-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Построена функция Грина краевой задачи Дирихле-2 для 4-гармонического уравнения в единичном шаре, граничные условия которой представляют собой сочетание граничных условий задач Навье и Навье–Неймана. Дано интегральное представление решения этой задачи как через найденную функцию Грина, так и ее представление, не включающее функцию Грина в явном виде.

Ключевые слова: 4-гармоническое уравнение; функция Грина; задача Дирихле-2; интегральное представление.

Введение. В настоящей работе рассматривается представление решения следующей краевой задачи для 4-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^4 u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Delta u|_{\partial S} = \varphi_2, \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_3, \quad (2)$$

где ν – внешняя единичная нормаль к ∂S и $\varphi_k \in C^{m-k-1+\varepsilon}(\partial S)$, $k = 0, \dots, 3$, $f \in C^1(\bar{S})$. Эту задачу будем называть задачей Дирихле-2 по причине ее близости в некотором смысле к классической задаче Дирихле, а решение будем искать из класса $u, \Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u \in C^\varepsilon(\bar{S})$, где $\varepsilon > 0$ – малое, а оператор Δ определен ниже. Вариант задачи Дирихле-2 для 3-гармонического уравнения был сформулирован и исследован в [1], где были также доказаны подобные утверждения теоремы 6.

В качестве области приложения полученных результатов отметим, что 3-гармоническое и 4-гармоническое уравнения встречаются в областях механики сплошных сред, включая линейную теорию упругости и задачи вязкого течения. Именно в этих областях могут быть применены полученные результаты. Например, плоский медленно вращающийся поток высоковязкой жидкости в малых полостях моделируется 3-гармоническим уравнением для функции тока [2] при различных граничных условиях. В работе [3] предложен итерационный метод решения краевой задачи для 3-гармонического уравнения. Следует отметить, что точность такого приближённого метода может быть проверена с помощью точных решений, полученных, например, в данной работе.

Функции Грина для различных полигармонических краевых задач в явном виде встречаются во многих работах. Для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [4, 5] приведена явная форма функции Грина в секторе. В [6] дается явный вид функции Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в единичном шаре, а в [7, 8] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в [9–14].

Элементарные решения. Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном шаре S при $n \geq 2$ имеет вид

$$G_2(x, \xi) = E_2(x, \xi) - E_2\left(\frac{x}{|x|}, |x| \xi\right),$$

где $E_2(x, \xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа, как его определил А.В. Бицадзе в [15]. Для $m \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$. Поскольку множе-

ство \mathbb{N}_m^c – конечное, то \mathbb{N}_m – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. В [16] были введены элементарные функции для полигармонического уравнения следующего вида:

$$\mathcal{E}_{2m}(x, \xi) = \frac{(-1)^m}{(2m-2)!!} \begin{cases} \frac{|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^*} \left(\ln|x-\xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c. \end{cases}$$

С.Л. Соболев в [17] использовал похожие фундаментальные решения полигармонического уравнения. В [16] было доказано, что функция вида

$$\mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = \mathcal{E}_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2-1)^k (|\xi|^2-1)^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} \mathcal{E}_{2m-2k}^*(x, \xi) \tag{3}$$

является функцией Грина задачи Дирихле при всех натуральных $n \geq 2$ без ограничений. В частности, для 4-гармонического уравнения функция Грина задачи Дирихле в S имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_8(x, \xi) = & \mathcal{E}_8(x, \xi) - \mathcal{E}_8^*(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{6} \mathcal{E}_6^*(x, \xi) \\ & - \frac{1}{4!!} \frac{(|x|^2-1)^2 (|\xi|^2-1)^2}{6 \cdot 4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - \frac{1}{6!!} \frac{(|x|^2-1)^3 (|\xi|^2-1)^3}{6!!} \mathcal{E}_2^*(x, \xi), \end{aligned}$$

где обозначено $\mathcal{E}_{2k}^*(x, \xi) = \mathcal{E}_{2k} \left(\frac{x}{|x|}, |x| |\xi| \right)$.

Вспомогательные утверждения. В дальнейшем необходимо будет следующее интегральное представление функций класса $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D , полученное в [1, лемма 3.1].

Лемма 1. Функция $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ имеет следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \Delta^{m-k-1} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u - \Delta^{m-k-1} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi \\ & + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{4}$$

где функция $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ определена в (3), $\omega_n = |\partial S|$ – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n , а ν – внешняя единичная нормаль к ∂D .

Далее необходимо будет также следующий оператор $\Lambda v(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i u_{\xi_i}$, который преобразует гармонические функции $v(\xi)$ в гармонические функции $\Lambda v(\xi)$ и обладает свойством $\Lambda u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu_\xi}|_{\partial S}$. Поскольку функции $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$ являются по существу функцией разностного аргумента, то необходимо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\varphi(t)$ – некоторая дифференцируемая при $t > 0$ функция. Тогда

$$\Lambda_\xi \varphi(|x-\xi|) = \frac{\varphi'(|x-\xi|)}{|x-\xi|} (|\xi|^2 - x \cdot \xi), \tag{5}$$

а также

$$\Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \frac{\varphi'(|x/|x| - \xi|x||)}{|x/|x| - \xi|x||} (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi). \tag{6}$$

Кроме того, при $m > 1$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ верно равенство

$$\Delta_\xi \left(\varphi(|\xi|^2) \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) \right) = 4 \left(|\xi|^2 \varphi''(|\xi|^2) + \varphi'(|\xi|^2) (\Lambda_\xi + n/2) \right) \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) - |x|^2 \varphi(|\xi|^2) \mathcal{E}_{2m-2}^*(x, \xi). \quad (7)$$

Доказательство равенств (5) и (6), можно найти в [1, лемма 3.2], а доказательство равенства (7) в [1, лемма 3.3].

Лемма 3. При $m > 1$, $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ и $x \neq \xi \in S$ справедливо равенство

$$(\Lambda_\xi + n/2) \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) = m \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) + \frac{1 - |x|^2 |\xi|^2}{2(2m-2)} \mathcal{E}_{2m-2}^*(x, \xi),$$

а также при $\xi \in \partial S$

$$(2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi). \quad (8)$$

Свойства функции $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$. Сформулируем полезные ниже свойства функции Грина $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ задачи Дирихле.

Теорема 1. При $m \geq 3$, $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ и $x \neq \xi \in S$ справедливо равенство

$$\Delta_\xi \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = -\mathcal{G}_{2m-2}(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^{m-1} (|\xi|^2 - 1)^{m-2}}{(2m-2)!!(2m-4)!!} (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi). \quad (9)$$

Кроме того, при $m = 2$ и $n \geq 3$ верно равенство

$$\Delta_\xi \mathcal{G}_4(x, \xi) = -\mathcal{G}_2(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi), \quad (10)$$

которое при $n = 2$ справедливо на ∂S .

С помощью теоремы 1 нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Функция $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ при $m \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ обладает свойством

$$\Delta_\xi^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \Big|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad 2k < m; \quad \frac{\partial \Delta_\xi^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Big|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad 2k + 1 < m. \quad (11)$$

На основании теорем 1 и 2 докажем существование функции Грина задачи (1)–(2).

Теорема 3. Функция Грина $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ задачи Дирихле при $n \notin \mathbb{N}_3^c = \{2, 4, 6\}$ является также и функцией Грина задачи Дирихле-2 (1)–(2).

Доказательство. Действительно, функция Грина задачи Дирихле $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ при $n \in \mathbb{N}_3$ обладает свойствами:

- а) является 4-гармонической при $x \neq \xi \in S$;
- б) имеет особенность фундаментального решения 4-гармонического уравнения [16];
- с) согласно равенствам (11) в случае четного $m = 4$ выполнены однородные условия (2) по переменной ξ :

$$\mathcal{G}_8(x, \xi) \Big|_{\partial S} = \Delta_\xi \mathcal{G}_8(x, \xi) \Big|_{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_8(x, \xi)}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \frac{\partial \Delta_\xi \mathcal{G}_8(x, \xi)}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad (12)$$

поскольку при $k = 0, 1$ имеем $2k < 4$ и $2k + 1 < 4$.

Все перечисленные выше свойства делают функцию $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ функцией Грина задачи Дирихле-2 в S . Теорема доказана.

Теорема 4. 1. При $n \in \mathbb{N}_3$ решение однородной задачи Дирихле-2 (1)–(2) (выполнены условия $\varphi_k = 0$), если оно существует, то может быть записано в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_8(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (13)$$

2. Функция $u(x)$, определяемая из (13) при $f \in C^1(\bar{S})$, является решением однородной задачи (1)–(2).

Доказательство. Воспользуемся леммой 1 при $D = S$ для $u(x)$ – решения однородной задачи (1)–(2). Оно может быть записано в виде (4)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^3 \left(\frac{\partial \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u - \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_8(x, \xi) \Delta^4 u(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Для $0 \leq k \leq 3$ обозначим

$$I_k(\xi) = \Delta^k u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi), \quad I'_k(\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta^k u(\xi)) \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi)$$

и покажем, что $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial S$ и для всех $0 \leq k \leq 3$.

Из условий задачи (1)–(2) и теоремы 2 при $0 \leq k \leq 1$ и $\xi \rightarrow \partial S$ вытекают равенства

$$\Delta_\xi^k u(\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_\xi^k u(\xi) = 0, \quad \Delta_\xi^k \mathcal{G}_8(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_\xi^k \mathcal{G}_8(x, \xi) = 0.$$

Поэтому имеем $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ на ∂S при $0 \leq k \leq 1$. Если $2 \leq k \leq 3$, то $-2 \geq -k \geq -3$ и, значит, $0 \leq 3 - k \leq 1$, а поэтому в силу условий $\Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) = 0$ на ∂S получим равенства $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ на ∂S и при $2 \leq k \leq 3$, т. е. $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial S$ и для $0 \leq k \leq 3$. Поэтому все интегралы по ∂S из (14) обратятся в ноль, и мы получаем равенство (13).

В [16, теорема 2] показано, что функция $u(x)$, определяемая из (13) при $f \in C^1(\bar{S})$ и $n \geq 2$, является решением однородной задачи Дирихле для уравнения (1). В частности, $\Delta^m u = f$ в S . В силу симметрии функции $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ для нее будут также выполнены симметричные условия из теоремы 2 по переменной x

$$\Delta_x^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Delta_x^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = 0, \quad 0 \leq k \leq 1$$

для $x \in \partial S$. Поэтому функция $u(x)$ из (13) является решением задачи (1)–(2). Теорема доказана.

Основные результаты

Теорема 5. Пусть $n \in \mathbb{N}_3$, тогда решение задачи Дирихле-2 (1)–(2) для однородного уравнения (1) из класса $u \in C^8(S) \cap C^7(\bar{S})$ может быть записано в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^1 \left(\varphi_{2k}(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) - \varphi_{2k+1}(\xi) \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) \right) ds_\xi. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1)–(2). По лемме 1 при $D = S$ и $f = 0$ решение задачи (1)–(2) может быть записано в виде (4)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^3 \left(\Delta^k u \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) - \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) \right) ds_\xi.$$

Поскольку здесь при $k = 2, 3$ имеем $3 - k = 1, 0$, то в силу равенств (12) для $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ слагаемые под знаком суммы при $k = 2, 3$ обращаются в ноль. Учитывая также граничные условия (2) задачи, запишем:

$$\Delta^k u|_{\partial S} = \varphi_{2k}, \quad \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_{2k+1},$$

где $k = 0, 1$, и, значит, приходим к равенству (15). Теорема доказана.

Определение 1. Обозначим через $u_\varphi^{(i)}(x)$ функцию, которая является решением задачи Дирихле-2 (1)–(2), в которой $\varphi_k = 0$ при $k \in \{0, \dots, 3\} \setminus \{i\}$, а $\varphi_i = \varphi$.

Теорема 6. Пусть $\varphi_i \in C^{3-i+\varepsilon}(\partial S)$ при $i = 0, \dots, 3$, тогда функции $u_\varphi^{(i)}(x)$, определяемые из равенств

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(2k)}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi, k = 0, 1, \\ u_\varphi^{(2k+1)}(x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi, k = 0, 1, \end{aligned} \tag{16}$$

удовлетворяют определению 1, а значит, решение (15) задачи Дирихле-2 (1)–(2) из теоремы 5 можно представить в виде суммы $u(x) = \sum_{k=0}^3 u_{\varphi_k}^{(k)}(x)$. Это решение $u(x)$ обладает следующей гладкостью $u, \Lambda u, \Delta u, \Lambda \Delta u \in C^\varepsilon(\bar{S})$, где $\varepsilon > 0$ – малое.

Доказательство. 1. Найдем функцию $u_\varphi^{(3)}(x)$. Для этого вычислим значение $\Delta^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)$. В соответствии с формулой (9) из теоремы 1 запишем

$$\Delta_\xi \mathcal{G}_8(x, \xi) = -\mathcal{G}_6(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^3 (|\xi|^2 - 1)^2}{6!! 4!!} \mathcal{H}_1^*(x, \xi),$$

где обозначено

$$\mathcal{H}_1^*(x, \xi) = (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi).$$

Применим оператор Лапласа Δ_ξ к полученному равенству и опять по теореме 1 найдем

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) &= -\Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{6!! 4!!} \Delta_\xi ((|\xi|^2 - 1)^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi)) \\ &= \mathcal{G}_4(x, \xi) + \frac{(|x|^2 - 1)^2 (|\xi|^2 - 1)}{4!! 2!!} \mathcal{H}_1^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{6!! 4!!} \Delta_\xi ((|\xi|^2 - 1)^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi)). \end{aligned}$$

Аналогично (7) при $\varphi(t) = (t - 1)^2$, с учетом гармоничности $\mathcal{H}_1^*(x, \xi)$, запишем

$$\Delta_\xi ((|\xi|^2 - 1)^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi)) = 8|\xi|^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi) + 8(|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + n/2) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \tag{17}$$

и, следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) &= \mathcal{G}_4(x, \xi) + \frac{(|x|^2 - 1)^2 (|\xi|^2 - 1)}{4!! 2!!} \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \\ &\quad - 8 \frac{(|x|^2 - 1)^3}{6!! 4!!} (|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned} \tag{18}$$

Поэтому, учитывая свойства функции Грина $\mathcal{G}_4(x, \xi)$ и равенство (8), получим

$$\Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} = \mathcal{G}_4(x, \xi)|_{\partial S} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\partial S} = \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S},$$

где $\xi \in \partial S$. Таким образом, в соответствии с (16) находим

$$u_\varphi^{(3)}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi = \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_\xi = \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} u_\varphi(x),$$

где $u_\varphi(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi$. С помощью этой формулы и результатов работы [18] легко находятся полиномиальные решения задачи Дирихле-2.

Проверим, удовлетворяет ли 4-гармоническая функция $u_\varphi^{(3)}(x)$ определению 1, если $\varphi \in C^\varepsilon(\partial S)$, т. е. является ли она решением следующей задачи Дирихле-2

$$\Delta^4 u(x) = 0, x \in S; \quad u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \Delta u|_{\partial S} = 0, \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi. \quad (19)$$

Для этого проверим выполнимость граничных условий этой задачи. Поскольку

$$\Lambda u_\varphi^{(3)}(x) = 6|x|^2 \frac{(|x|^2 - 1)^2}{48} u_\varphi(x) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \Lambda u_\varphi(x),$$

то $u_\varphi^{(3)}|_{\partial S} = \frac{\partial u_\varphi^{(3)}}{\partial \nu}|_{\partial S} = 0$. Далее, используя (17) относительно x , найдем

$$\Delta u_\varphi^{(3)}(x) = \frac{1}{48} \Delta \left((|x|^2 - 1)^3 u_\varphi(x) \right) = \frac{1}{4} (|x|^2 - 1) \left(2|x|^2 + (|x|^2 - 1)(\Lambda_x + n/2) \right) u_\varphi(x),$$

где при $\varphi \in C^\varepsilon(\partial S)$ будем иметь $u_\varphi \in C^\varepsilon(\partial S)$ и значит, согласно [19, лемма 2.2], существуют пределы $\Delta u_\varphi^{(3)}|_{\partial S} = 0$ и

$$\Lambda \Delta u_\varphi^{(3)}(x)|_{\partial S} = \frac{1}{4} 4|x|^2 u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi.$$

Подобные пределы основаны на формуле (2.4.114) из [20, с. 146]. Итак, $u_\varphi^{(3)}(x)$ – решение задачи (19).

2. Для нахождения функции $u_\varphi^{(2)}(x)$ вычислим значение $\Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S}$. Сначала заметим, что в силу (6) $\Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \Lambda_x \mathcal{E}_2^*(x, \xi)$, а значит, можно записать

$$\Lambda_\xi \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = (2\Lambda_\xi + n - 2) \Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = (2\Lambda_\xi + n - 2) \Lambda_x \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \Lambda_x \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \quad (20)$$

Если применить оператор Λ_ξ к обеим частям равенства (18), затем воспользоваться свойством (20), а потом перейти к пределу при $\xi \rightarrow \partial S$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} &= \Lambda_\xi \mathcal{G}_4(x, \xi)|_{\partial S} + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\partial S} \\ &\quad - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (2 + \Lambda_x + 2(\Lambda_x + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\partial S}, \end{aligned}$$

где $\xi \in \partial S$. Учитывая свойства функции Грина $\mathcal{G}_4(x, \xi)$ и равенство (8), которое означает, что $\mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S}$, получим

$$\Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} = - \left(\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (3\Lambda_x + n + 2) \right) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}.$$

Таким образом, в соответствии с (16) находим

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(2)}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi = \left(\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (3\Lambda_x + n + 2) \right) \\ &\quad \times \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_\xi = \left(\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (3\Lambda + n + 2) \right) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

где $u_\varphi(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi$, а $\Lambda = \Lambda_x$.

Легко видеть, что $u_\varphi^{(2)}|_{\partial S} = \frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial \nu}|_{\partial S} = 0$, а поскольку аналогично (17)

$$\Delta u_\varphi^{(2)}(x) = \left(|x|^2 - \frac{|x|^2 - 1}{2} (3\Lambda + n + 2) + \left(|x|^2 - 1 - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (3\Lambda + n + 2) \right) (\Lambda + n/2) \right) u_\varphi(x),$$

то $\Delta u_\varphi^{(2)}|_{\partial S} = \varphi$ и, кроме того, отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Delta u_\varphi^{(2)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda \Delta u_\varphi^{(2)}(x) \Big|_{\partial S} = (2 + \Lambda - (3\Lambda + n + 2) + 2(\Lambda + n/2))u_\varphi(x) \Big|_{\partial S} = 0.$$

Значит, функция $u_\varphi^{(2)}(x)$ является решением соответствующей ей задачи Дирихле-2. В этом случае для существования пределов производных функции $u_\varphi^{(2)}(x)$ в граничных условиях задачи Дирихле-2 опять, в соответствии с [19, лемма 2.2], достаточно, чтобы $\varphi \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$.

3. Для нахождения функции $u_\varphi^{(1)}(x)$ вычислим значение $\Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) \Big|_{\partial S}$. Из (18) с учетом (10) получим

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) = & -\mathcal{G}_2(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{H}_1^*(x, \xi) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{16} \Delta_\xi (|\xi|^2 - 1) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \\ & - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \Delta_\xi (|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned}$$

Аналогично (17) и (7) при $\varphi(t) = t - 1$ вычислим

$$\Delta_\xi (|\xi|^2 - 1) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = 4(\Lambda_\xi + n/2) \mathcal{H}_1^*(x, \xi),$$

$$\Delta_\xi (|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = 4(\Lambda_\xi + n/2 + 1)(\Lambda_\xi + n/2) \mathcal{H}_1^*(x, \xi)$$

и поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) = & -\mathcal{G}_2(x, \xi) - \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda_\xi + n/2) \right. \\ & \left. + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda_\xi + n/2 + 1)(\Lambda_\xi + n/2) \right) \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned} \tag{21}$$

Учитывая свойства функции $\mathcal{G}_2(x, \xi)$, равенства (20) и (8), получим

$$\Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) \Big|_{\partial S} = \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda_x + \frac{n}{2}) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda_x + \frac{n}{2} + 1)(\Lambda_x + \frac{n}{2}) \right) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) \Big|_{\partial S},$$

где $\xi \in \partial S$. Таким образом, в соответствии с (16) находим

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(1)}(x) = & \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi = - \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda + n/2) \right. \\ & \left. + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right) \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_\xi = \\ & \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda + n/2) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

где $u_\varphi(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_\varphi(x) \Big|_{\partial S} = \varphi$ и $\Lambda = \Lambda_x$.

Нетрудно непосредственно видеть, что $u_\varphi^{(1)} \Big|_{\partial S} = 0$ и $\frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda u_\varphi^{(1)} \Big|_{\partial S} = \varphi$. Поскольку аналогично (17) верно равенство

$$\begin{aligned} \Delta u_\varphi^{(1)}(x) = & (-2|x|^2 (\Lambda + n/2) + 2|x|^2 (|x|^2 - 1)(\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \\ & + (2 - 2(|x|^2 - 1)(\Lambda + n/2) + (|x|^2 - 1)^2 (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2))(\Lambda + n/2)) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

то из него получаем

$$\Delta u_\varphi^{(1)} \Big|_{\partial S} = (-2(\Lambda + n/2) + 2(\Lambda + n/2)) u_\varphi(x) \Big|_{\partial S} = \varphi,$$

и, кроме того, из него следует, что

$$\begin{aligned} \Lambda \Delta u_\varphi^{(1)}(x)|_{\partial S} &= (-2(\Lambda + n/2)(\Lambda + 2) + 4(\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) + 2(\Lambda + n/2)\Lambda \\ &- 4(\Lambda + n/2)^2)u_\varphi(x)|_{\partial S} = -2(\Lambda + 2 - 2\Lambda - n - 2 - \Lambda + 2\Lambda + n)(\Lambda + n/2)u_\varphi(x)|_{\partial S} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому функция $u_\varphi^{(1)}(x)$ является решением соответствующей ей задачи Дирихле-2. Для существования пределов производных функции $u_\varphi^{(1)}(x)$ в граничных условиях соответствующей задачи Дирихле-2 в соответствии с [19, лемма 2.2] достаточно, чтобы $\varphi \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$.

4. Для нахождения функции $u_\varphi^{(0)}(x)$ вычислим значение $\Lambda_\xi \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S}$. Из (21) с учетом равенства $\mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S}$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} &= \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_x + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2) \right. \\ &\left. - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2 + 1)(\Lambda_x + n/2) \right) (-\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}), \end{aligned}$$

откуда в соответствии с (16) находим:

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(0)}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi = \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_x + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2) \right. \\ &\left. - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2 + 1)(\Lambda_x + n/2) \right) \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_\xi \\ &= \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \Lambda (\Lambda + n/2) - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} \Lambda (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

где $u_\varphi(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi$. Нетрудно видеть, что

$$u_\varphi^{(0)}|_{\partial S} = \varphi \text{ и } \frac{\partial u_\varphi^{(0)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda u_\varphi^{(0)}|_{\partial S} = 0$$

и аналогично (17)

$$\begin{aligned} \Delta u_\varphi^{(0)}(x) &= \left(2|x|^2 \Lambda (\Lambda + n/2) - 2|x|^2 (|x|^2 - 1) \Lambda (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right. \\ &\left. + (-2\Lambda + 2(|x|^2 - 1) \Lambda (\Lambda + n/2) - (|x|^2 - 1)^2 \Lambda (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2))(\Lambda + n/2) \right) u_\varphi(x). \end{aligned}$$

Отсюда, после некоторых простых преобразований, получим

$$\Delta u_\varphi^{(0)}(x) = -(|x|^2 - 1)^2 \Lambda (\Lambda + n/2)(\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2 + 2)u_\varphi(x).$$

Поэтому $\Delta u_\varphi^{(0)}(x)|_{\partial S} = 0$ и $\frac{\partial \Delta u_\varphi^{(0)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda \Delta u_\varphi^{(0)}(x)|_{\partial S} = 0$. Таким образом, функция $u_\varphi^{(0)}(x)$ является решением соответствующей ей задачи Дирихле-2. Для существования пределов производных функции $u_\varphi^{(0)}(x)$ в граничных условиях соответствующей задачи Дирихле-2 в соответствии с [19, лемма 2.2] достаточно чтобы $\varphi \in C^{3+\varepsilon}(\partial S)$. Теорема доказана.

Замечание 1. При нахождении функций $u^{(k)}(x)$, $k = 0, \dots, 3$ никаких условий на размерность пространства n не возникло, поэтому, вероятно, что в теореме 5 условие $n \in \mathbb{N}_3$ можно снять.

Литература

1. Karachik, V.V. Green's Function of One Problem for the 3-Harmonic Equation in a Ball / V.V. Karachik // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2026. – Vol. 71. – P. 662–685.
2. An, Q. A decoupled Finite Element Method for the Triharmonic Equation / Q. An, X. Huang, C. Zhang // Appl. Math. Lett. – 2024. – Vol. 147. – P. 108843.

3. Dang, Q.A. Iterative Method for Solving a Boundary Value Problem for Triharmonic Equation / Q.A. Dang // Vietnam. J. Math. – 2002. – Vol. 30. – P. 71–78.
4. Wang, Y. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector / Y. Wang, L. Ye // Complex Variables Elliptic Equ. – 2013. – Vol. 58, no. 1. – P. 7–22.
5. Wang, Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector / Y. Wang // Complex Variables Elliptic Equ. – 2014. – Vol. 59, no. 5. – P. 732–749.
6. Карачик, В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Матем. заметки. – 2020. – Т. 107, № 1. – С. 87–105.
7. Karachik, V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball / V.V. Karachik // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, no. 16. – Article no. 1907.
8. Karachik, V.V. On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – Vol. 8, no. 1. – P. 63–75.
9. Akel, M. Neumann Function for a Hyperbolic Strip and a Class of Related Plane Domains / M. Akel, H. Begehr // Mathematische Nachrichten. – 2017. – Vol. 290, Iss. 4. – P. 490–506.
10. Lin, H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs / H. Lin // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2020. – Vol. 67. – P. 79–95.
11. Harkonen, V.J. Exact Factorization of the Many-Body Green's Function Theory of Electrons and Nuclei / V.J. Harkonen // Phys. Rev. B. – 2022. – Vol. 106. 205137.
12. Dong, H. Optimal Estimates for the Conductivity Problem by Green's Function Method / H. Dong, H. Li // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2019. – Vol. 231, no. 3. – P. 1427–1453.
13. Grebenkov, D.S. Semi-Analytical Computation of Laplacian Green Functions in Three-Dimensional Domains with Disconnected Spherical Boundaries / D.S. Grebenkov, S.D. Traytak // Journal of Computational Physics. – 2019. – Vol. 379. – P. 91–117.
14. Hsu, C.-W. Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions / C.-W. Hsu, C. Hwu // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2020. – Vol. 476, no. 2233. – P. 20190437.
15. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
16. Karachik, V.V. On Green Function of the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 6. – P. 543.
17. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
18. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15. № 2 (50). – С. 86–98.
19. Алимов, Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной / Ш.А. Алимов // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 10. – С. 1738–1751.
20. Карачик, В.В. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения в шаре: монография / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2024. – 476 с.

Поступила в редакцию 18 января 2026 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник, кафедры «Математический анализ и методика преподавания математики», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru.

GREEN'S FUNCTION OF THE DIRICHLET-2 PROBLEM FOR THE 4-HARMONIC EQUATION IN A BALL**V.V. Karachik***South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation**E-mail: karachik@susu.ru*

Abstract. This paper discusses the construction of the Green's function for the Dirichlet-2 boundary value problem for the 4-harmonic equation in a single ball. The boundary conditions of this problem are a combination of those for the Navier and Navier–Neumann problems. An integral representation of the solution to this problem is provided, both through the found Green's function and its representation that does not explicitly include the Green's function.

Keywords: 4-harmonic equation; Green's function; Dirichlet-2 problem; integral representation.

References

1. Karachik V.V. Green's Function of One Problem for the 3-Harmonic Equation in a Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2026, Vol. 71, no. 3, pp. 662–685. DOI: 10.1080/17476933.2025.2463481
2. An Q., Huang X., Zhang C. A Decoupled Finite Element Method for the Triharmonic Equation. *Appl. Math. Lett.*, 2024, Vol. 147, 108843. DOI 10.1016/j.aml.2023.108843.
3. Dang, Q.A. Iterative Method for Solving a Boundary Value Problem for Triharmonic Equation. *Vietnam. J. Math.*, 2002, Vol. 30, pp. 71–78.
4. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2013, Vol. 58, no. 1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199
5. Wang Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2014, Vol. 59, no. 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566
6. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball. *Mathematical Notes*, 2020, Vol. 107, no. 1, pp. 105–120. DOI: 10.1134/S0001434620010101
7. Karachik, V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, no. 16, Article no. 1907. DOI: 10.3390/math9161907
8. Karachik V.V. On Solvability Conditions for the Neumann Problem for a Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, Vol. 8, no. 1, pp. 63–75. DOI: 10.1134/S1990478914010074
9. Akel M., Begehr H. Neumann Function for a Hyperbolic Strip and a Class of Related Plane Domains. *Mathematische Nachrichten*, 2017, Vol. 290, Iss. 4, pp. 490–506. DOI: 10.1002/mana.201500501
10. Lin H. Harmonic Green and Neumann Functions for Domains Bounded by Two Intersecting Circular Arcs. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, Vol. 67, pp. 79–95. DOI: 10.1080/17476933.2020.1816984
11. Harkonen V.J. Exact Factorization of the Many-Body Green's Function Theory of Electrons and Nuclei. *Phys. Rev. B.*, 2022, Vol. 106, 205137. DOI: 10.1103/PhysRevB.106.205137
12. Dong H., Li H. Optimal Estimates for the Conductivity Problem by Green's Function Method. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2019, Vol. 231, no. 3, pp. 1427–1453. DOI: 10.1007/s00205-018-1301-x
13. Grebenkov D.S., Traytak S.D. Semi-Analytical Computation of Laplacian Green Functions in Three-Dimensional Domains with Disconnected Spherical Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 2019, Vol. 379, pp. 91–117. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.033

14. Hsu C.-W., Hwu C. Green's Functions for Unsymmetric Composite Laminates with Inclusions. *Proc. Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2020, Vol. 476, 20190437. DOI: 10.1098/rspa.2019.0437
15. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow: Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).
16. Karachik V.V. On Green Function of the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equation in the Ball. *Axioms*, 2023, Vol. 12, no. 6, p. 543. DOI: 10.3390/axioms12060543
17. Sobolev S.L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction* (Introduction to the Theory of Cubature Formulas). Moscow: Nauka; 1974, 808 p.
18. Karachik V.V., Antropova N.A. On Polynomial Solutions of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, Vol. 15, no. 2, pp. 86–98. (in Russ.).
19. Alimov Sh. A. On a Problem with an Oblique Derivative. *Differ. Uravn.*, 1981, Vol. 17, Iss.10, pp. 1738–1751. (in Russ.).
20. Karachik V.V. *Nekotorye kraevye zadachi dlya poligarmonicheskogo uravneniya v share: monografiya* (Some Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball: Monograph). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2024, 476 p. (in Russ.).

Received January 18, 2026

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер^{1,2}, И.М. Манаков²

¹ Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

² Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: alevtinak@inbox.ru, immanakov@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена исследованию задачи смешанного управления для одной полулинейной системы леонтьевского типа с начальным условием Шоултера – Сидорова. Постановка задачи позволила применить методы исследования разрешимости задачи оптимального управления для полулинейного уравнения соболевского типа к задаче смешанного управления для полулинейной системы леонтьевского типа. Доказана теорема существования решения этой задачи. Актуальность исследования разрешимости поставленной задачи обусловлена наличием прикладных задач, в основе которых лежит полулинейная система леонтьевского типа, а методы их исследования позволяют продолжить численные исследования задачи оптимального управления.

Ключевые слова: задача смешанного управления; полулинейная система леонтьевского типа; задача Шоултера–Сидорова.

Введение

Рассмотрим полулинейную систему леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) + Mx(t) + N(x(t)) = u(t), \quad \det L = 0 \quad (1)$$

с начальным условием Шоултера–Сидорова

$$L(x(0) - u_0) = 0. \quad (2)$$

Здесь L, M – квадратные матрицы порядка n , N – нелинейный оператор, заданный формулой

$$\langle N(x), x \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} x_1^{2j} + \sum_{j=1}^m \alpha_{2j} x_2^{2j} + \dots + \sum_{j=1}^m \alpha_{nj} x_n^{2j}, \quad \alpha_{ij} \geq 0, m \geq 1, \quad (3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в \mathbf{R}^n ; $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ и $\dot{x}(t) = \text{col}(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния системы (1) соответственно; $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, $u_0 = \text{col}(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n})$. Вырожденную систему дифференциальных уравнений (1), являющуюся конечномерным аналогом полулинейного уравнения соболевского типа [1], будем называть полулинейной системой леонтьевского типа. Исследование задачи Шоултера–Сидорова (2) для линейных ($N \equiv \mathbf{O}$) и полулинейных систем леонтьевского типа (1) обусловлено наличием прикладных задач, изучение каждой из которых представляет самостоятельный интерес, например, вырожденная балансовая динамическая модель производственного предприятия, вырожденная балансовая модель клеточного цикла, математическая модель сложного измерительного устройства.

Целью работы является исследование задачи смешанного управления

$$J(u, u_0) = J(x(u, u_0), u, u_0) = \alpha \|C(x(t, u(t), u_0) - x_0(t))\|_X^{2m} + \beta \|u(t)\|_U^{\frac{2m}{2m-1}} + \gamma \|u_0\|_V^{2m} \rightarrow \min, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (4)$$

решениями задачи (1), (2). Здесь $X = L_{2m}((0, T), \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{X} = \{x \in X : \dot{x} \in \text{coim} L\}$ – пространство состояний, $U \times V$ – пространство управления, где $U = L_{\frac{2m}{2m-1}}((0, T), \mathbf{R}^n)$, $V = L_{2m}(\mathbf{R}^n)$, C – матрица

размера $r \times n, r \leq n$. Определим множества:

$$1) \text{coim} L = \{x \in X : [x, \varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}, \quad \text{где } [\cdot, \cdot] \text{ – скалярное произведение в } L_2((0, T), \mathbf{R}^n);$$

2) допустимых управлений как замкнутое выпуклое подмножество $U_\circ \times V_\circ \subset U \times V$ в пространстве управления $U \times V$.

Постановка задачи оптимального управления для уравнения соболевского типа и исследование ее разрешимости берут начало с работы [2]. Задачи оптимального управления стали активно исследоваться как аналитически [3], так и численно в прикладных исследованиях [4], кроме того, изучались и другие виды задач управления [5].

1. Исследование задачи управления

Исследование задачи управления проведем в два этапа: построение множества допустимых решений, а затем получение условий его существования. Сначала покажем существование решения задачи Шоултера–Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{5}$$

для уравнения (1) с заданными функцией $u = u(t)$ и начальным состоянием x_0 в (5) на основе метода фазового пространства [6]. Классическим решением уравнения (1) будем называть вектор-функцию $x \in C^k((0, T); X)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, если при некотором $T \in \mathbf{R}_+$ она удовлетворяет (1). Классическое решение уравнения (1) является решением задачи Шоултера – Сидорова (1), (5), если оно удовлетворяет (5).

Для доказательства разрешимости задачи Шоултера–Сидорова (1), (5) воспользуемся результатом, изложенным в [7], показывающим существование решения задачи Шоултера – Сидорова для системы вырожденных дифференциальных уравнений:

$$A\dot{x} = F(x), \quad A(x(0) - x_0) = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. [7] Пусть A – квадратная матрица порядка n , $\text{rank } A \leq n$; P^A – проектор на левый аннулятор матрицы A вдоль образа, P_A – проектор на правый аннулятор матрицы A вдоль кообраза; $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ – вектор-функция на \mathbf{R}^n , $F_i \in C^k$, $k \geq 1$. Задача (6) локально разрешима для любого $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если $\text{rank } P^A F'_{x_0} P_A = n - \text{rank } A$, где F'_{x_0} – матрица Якоби отображения F в точке x_0 .

Доказательство теоремы 1 основано на методе фазового пространства [7]. Первоначально данный результат был получен при исследовании локальной разрешимости задачи Коши [6].

Построим множество $\mathbf{B} = \{x \in X : P^L(Mx + N(x)) = P^L u\}$, в котором лежат решения уравнения (1) при всех $T \in \mathbf{R}_+$. Зафиксируем $x_0 \in \mathbf{B}$ и сужение оператора $P^L(M + N'_{x_0})P_L$ рассмотрим в качестве F'_v , здесь N'_{x_0} – производная Фреше оператора N в точке x_0 .

Теорема 2. Пусть L, M – квадратные неотрицательно определенные матрицы порядка n , кроме того, L – самосопряженная и $\dim \ker L = \dim \text{coker } L$, оператор N задан формулой (3). Тогда для любого $T \in \mathbf{R}_+$, $u \in U$ и $x_0 \in \mathbf{R}^n$ существует единственное решение задачи (1), (5).

Доказательство. Чтобы показать разрешимость задачи (1), (5), установим невырожденность матрицы Якоби отображения $M + N - u\mathbf{I}$, или невырожденность оператора $P^L(M + N'_y)P_L$. В силу построения операторов M, N имеем

$$P^L(M + N'_y)P_L = \langle (M + N'_y)x, x \rangle = \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} 2j y_1^{2j-2} x_1^2 + \sum_{j=1}^m \alpha_{2j} 2j y_2^{2j-2} x_2^2 + \dots + \sum_{j=1}^m \alpha_{nj} 2j y_n^{2j-2} x_n^2 > 0.$$

По построению оператор $N \in C^\infty(L_{2m}((0, T), \mathbf{R}^n); L_{\frac{2m}{2m-1}}((0, T), \mathbf{R}^n))$ s -монотонен [7].

Построим норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$ в $\text{coim } L$, она эквивалентна норме, индуцированной из надпространства $L_2((0, T), \mathbf{R}^n)$. Умножив скалярно (1) на x и применив неравенство Гильберта, получим

$$\langle Lx(t), x(t) \rangle + 2 \int_0^t \langle Mx, x \rangle d\tau + 2 \int_0^t \langle N(x), x \rangle d\tau = 2 \int_0^t \langle u, x \rangle d\tau + \langle Lx(0), x(0) \rangle,$$

$$|x(t)|^2 + C_1 \|x\|_{L_2((0,T),\mathbf{R}^n)}^2 + C_2 \|x\|_{L_{2m}((0,T),\mathbf{R}^n)}^{2m} \leq C_3 \|u\|_{L_{\frac{2m}{2m-1}}((0,T),\mathbf{R}^n)}^{\frac{2m}{2m-1}} + |x_0|^2. \quad (7)$$

Из получившейся оценки следует, что временной интервал $(0, T_0(x_0))$ является независимым от значения x_0 , поэтому допустимо считать, что $T_0(x_0) = T$.

В силу непрерывности вложения $H^1((0, T); \mathbf{R}^n) \hookrightarrow C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ классическое решение (1) является также и сильным решением (1) [2]. Под сильным решением будем понимать вектор-функцию $x \in H^1((0, T); \mathbf{R}^n)$, если она п.в. на $(0, T)$ обращает его в тождество.

Перейдем к исследованию задачи управления (1), (2), (4).

Определение 2. Совокупность $(x(v, v_0), v, v_0) \in \mathbf{X} \times U_\delta \times V_\delta$ назовем решением задачи смешанного управления (1), (2), (4), если

$$J(v, v_0) = J(x(v, v_0), v, v_0) = \min_{(u, u_0)} J(x(u, u_0), u, u_0),$$

где $(x, u, u_0) \in \mathbf{X} \times U \times V$ удовлетворяет (1), (2) в смысле сильного решения [1–3, 5]. *Допустимым* будем называть множество $\mathbf{A} = \{(x, u, u_0) : (x(u, u_0), u, u_0) \in \mathbf{X} \times U_\delta \times V_\delta\}$, где (x, u, u_0) удовлетворяет задаче (1), (2).

Теорема 3. Пусть L, M – квадратные неотрицательно определенные матрицы порядка n , кроме того, L – самосопряженная и $\dim \ker L = \dim \operatorname{co} \ker L$, оператор N задан формулой (3). Тогда для любого $T \in \mathbf{R}_+$ существует решение задачи (1), (2), (4).

Доказательство. Отметим, что структура доказательства этой теоремы построена в соответствии с классическими методами исследования разрешимости задач оптимального управления [8–10].

1. В силу существования единственного решения задачи (1), (2), определен гомеоморфизм $x = x(u, u_0)$. Таким образом, допустимое множество \mathbf{A} не пусто и найдутся последовательности $\{(u_l, u_{0l})\} \in U_\delta \times V_\delta$ такие, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J(u_l, u_{0l}) = \min_{(u, u_0)} J(u, u_0).$$

Из оценки, приведенной в (7), получим

$$\|u_l\|_U \leq \text{const}, \|u_{0l}\|_V \leq \text{const}, \quad \forall l. \quad (8)$$

Таким образом, показали, что $\{(u_l, u_{0l})\}$ ограничены.

2. Получив (8), выберем подпоследовательности $\{u_l\} : u_l \rightarrow v, \{u_{0l}\} : u_{0l} \rightarrow v_0$, которые являются слабо сходящимися. Заметим, что их пределы $(v, v_0) \in U_\delta \times V_\delta$ на основании теоремы Мазура. Пусть $x_l = x(u_l, u_{0l})$ удовлетворяет задаче

$$L\dot{x}_l + Mx_l + N(x_l) = u_l, \quad (9)$$

$$L(x_l(0) - u_{0l}) = 0. \quad (10)$$

В силу выполнения априорной оценки (7) и свойства $2m$ -коэрцитивности оператора N [7] получим $\|x_l\|_X \leq \text{const} \quad \forall l$.

3. Переходя к слабому пределу в уравнении состояния и используя метод монотонности, получим, что слабый предел последовательности $\{(x_l, u_l, v_l)\}$ удовлетворяет

$$L \frac{dx}{dt} + Mx + N(x) = v, \quad L(x(0) - v_0) = 0.$$

Доказательство того, что $N(x_l) \rightarrow N(x)$ основано на методе монотонности [8, 9].

4. Тогда $x = x(v, v_0)$ и $\liminf J(u_l, u_{0l}) \geq J(v, v_0)$.

Таким образом, показано существование решения задачи смешанного управления решениями для полулинейной системы леонтьевского типа с начальным условием Шоултера–Сидорова.

Литература

1. Келлер, А.В. Системы леонтьевского типа и прикладные задачи / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 23–42.
2. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
3. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models / A.A. Zamyshlyayeva, N.A. Manakova, O.N. Tsyplenkova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2020. – Т. 13, № 1. – С. 5–27.
4. Manakova, N.A. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with The Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova, K.V. Perevozchikova // Differential Equations and Control Processes. – 2020. – № 4. – С. 115–126.
5. Keller, A.V. The Existence of a Unique Solution to A Mixed Control Problem for Sobolev-Type Equations / Keller A.V., Ebel A.A. // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 121–127.
6. Свиридюк, Г.А. Об одной сингулярной системе обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1637–1639.
7. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Известия вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 55–61.
8. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 р.
9. Lions, J.-L. Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles / J.-L. Lions. – Paris, Dunod, 1968. – 426 р
10. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.

Поступила в редакцию 16 марта 2026 г.

Сведения об авторах

Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация; кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: alevtinak@inbox.ru.

Манаков Игорь Михайлович – аспирант, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: immanakov@gmail.com.

A STUDY OF A MIXED CONTROL PROBLEM FOR A LEONTIEV-TYPE SEMILINEAR SYSTEM**A.V. Keller^{1,2}, I.M. Manakov²**¹ Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation² South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: alevtinak@inbox.ru, immanakov@gmail.com

Abstract. This paper investigates a mixed control problem for a Leontief-type semilinear system with a Showalter–Sidorov initial condition. The problem statement allowed applying methods for studying the solvability of an optimal control problem for a Sobolev-type semilinear equation to a mixed control problem for a Leontief-type semilinear system. A theorem on the existence of a solution to this problem is proved. The relevance of studying the solvability of this problem stems from the existence of applied problems based on a Leontief-type semilinear system. The research methods used here allow for further numerical studies of the optimal control problem.

Keywords: mixed control problem; semi-linear Leontief type system; Showalter–Sidorov problem.

References

1. Keller A.V. Leontief-Type Systems and Applied Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, Vol. 15, no. 1, pp. 23–42. DOI: 10.14529/mmph220102
2. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, Vol. 31, no. 11, pp. 1882–1890.
3. Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, Vol. 13, no. 1, pp. 5–27. DOI: 10.14529/mmph200101
4. Manakova N.A., Gavrilova O.V., Perevozchikova K.V. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with the Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment. *Differential Equations and Control Processes*, 2020, no. 4, pp. 115–126.
5. Keller A.V., Ebel A.A. The Existence of a Unique Solution to A Mixed Control Problem for Sobolev-Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 121–127. DOI: 10.14529/mmph140313
6. Sviridyuk G.A. A Singular System of Ordinary Differential Equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1987, Vol. 23, no. 9, pp. 1637–1639.
7. Sviridyuk G.A. A Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1989, Vol. 33, no. 2, pp. 62–73.
8. Lions J.-L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).
6. Lions J.-L. *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*. Paris, Dunod, 1968, 426 p. (in French).
10. Fursikov, A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* (Optimal Management of Distributed Systems. Theory and Application). Novosibirsk, Nauchnaya kniga Publ., 1999, 350 p. (in Russ.).

*Received March 16, 2026***Information about the authors**

Keller Alevtina Viktorovna is Doctor Physics and Mathematics, professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation; Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: alevtinak@inbox.ru.

Manakov Igor Mikhailovich is graduate student, Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: immanakovan@gmail.com.

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ УСТАНОВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА НАПОРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ПОРИСТЫЙ СЛОЙ

А.В. Рязских, В.И. Рязских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж,
Российская Федерация
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

Аннотация. На основе нестационарного упругого режима фильтрации вязкой несжимаемой жидкости при ее изотермической прокачке через изотропный пористый слой сформулированы начально-краевые задачи для одномерного поля давления в предположении, что режим фильтрации подчиняется закону Дарси. Задачи описывают режимы включения и выключения прокачки, а также стационарный режим движения ньютоновской среды, подаваемой с верхней поверхности пористой среды и выходящей через нижнюю ее ограничивающую поверхность с бесконечно большой проницаемостью границы. Уравнения сформулированных начально-краевых задач относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных с граничными условиями типа Дирихле и (или) фон Неймана. В случае импульсного ввода граничное условие представлено структурой, состоящей из разности функций Хэвисайда, одна из которых имеет сдвиг, равный величине длительности импульса. В силу их линейности получены аналитические решения с помощью одностороннего интегрального преобразования Лапласа в виде явных соотношений для безразмерных профилей давления и скорости по высоте пористого слоя. Поскольку решения представлены быстросходящимися рядами Фурье с мультипликативной экспонентой, то использовано понятие «регулярного» режима (в разложении учитывается только первое слагаемое), найдены приближенные соотношения для определения длительности режимов установления при пуске и останове прокачки жидкой среды через пористый слой. Полученные решения обобщены с помощью импульсного краевого условия. Вычислительные эксперименты показали, что безразмерное время приближения к линейному профилю давления в режиме включения прокачки и ее выключения составляет приближенно 0,537 с относительной точностью 0,01, определяемой по скорости жидкой среды на выходе из пористого слоя. Приведен пример, показывающий, что время установления может достигать значительной величины, которую необходимо учитывать при функционировании различных технических устройств, составным элементом которых являются пористые слои.

Ключевые слова: пористый слой; ньютоновская жидкость; прокачка; напорное течение; время установления; закон Дарси.

Введение. Напорная прокачка жидкостных сред через пористые слои наиболее часто применяется при их очистке от примесей, находящихся в различном агрегатном состоянии, с использованием таких механизмов, как осаждение, сорбция, адгезия и др. [1]. Для проектирования систем, реализующих этот процесс, необходима информация о нестационарном режиме функционирования, например, при начале или окончании работы таких устройств [2].

Структура пористых сред пока еще не до конца формализована, и поэтому, как правило, ограничиваются ее интегральными характеристиками: пористостью ε и проницаемостью k [3]. Для большинства грубодисперсных пористых сред (эффекты поверхностного натяжения пренебрежимо малы по сравнению с вязкими силами) справедлива линейная функциональная зависимость между перепадом давления в жидкости и ее расходом [4]. В связи с этим в случае ламинарного течения ньютоновской жидкости при отсутствии деформации пористого скелета гидродинамика описывается уравнением Дарси–Бринкмана [5]

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] = \rho_f \bar{g} - \nabla p + \mu_f \nabla^2 \bar{u} - \mu_f \frac{\bar{u}}{k}, \quad (1)$$

Математика

где τ – время; ρ_f , μ_f – плотность и динамическая вязкость жидкости; \bar{u} – вектор скорости; \bar{g} – вектор ускорения свободного падения; p – давление. К уравнению (1) добавляется уравнение неразрывности

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_f}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho_f \bar{u}) = 0. \quad (2)$$

При неизменной структуре пористой матрицы нестационарные локальные флуктуации скорости отсутствуют, а режим ламинарного течения в поровом пространстве нивелирует инерционность потока. Кроме того, так как преобладает напорное течение, то

$$|\rho_f \bar{g} + \mu_f \nabla^2 \bar{u}| \ll |\nabla p + \mu_f \bar{u}/k|,$$

т. е. в этом случае (1) трансформируется в соотношение

$$\bar{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (3)$$

которое является математической формализацией закона Дарси.

Если считать, что в первом приближении сжимаемость жидкости от давления имеет линейную зависимость [6]

$$\rho_f = \rho_{f_0} [1 + (p - p_0)/k_\rho],$$

где ρ_{f_0} – плотность жидкости при характерном давлении p_0 ; k_ρ – модуль объемного сжатия жидкости, тогда

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial \tau} = \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\rho_{f_0}}{k_\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует уравнение, описывающее нестационарное поле давлений

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \chi \nabla^2 p, \quad (5)$$

где $\chi = k \cdot k_\rho / (\varepsilon \mu)$; которое дополняют соответствующим набором начального и граничных условий.

В данной работе анализируется задача об оценке длительности переходных режимов прокачки вязкой несжимаемой среды через плоскую изотропную пористую среду для изотермических условий без учета миграции примесей к поверхности пористого скелета.

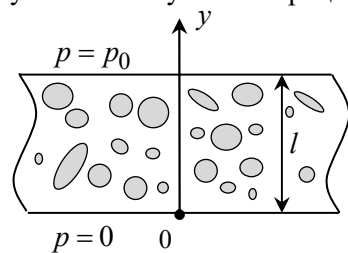


Рис. 1. Расчетная схема

Постановка и решение задачи. Однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости осуществляется под действием избыточного давления p_0 с верхней поверхности пористого слоя (рис.1). В этом случае уравнение (5) в выбранной системе координат принимает вид

$$\frac{\partial p(y, \tau)}{\partial \tau} = \chi \frac{\partial^2 p(y, \tau)}{\partial y^2} \quad (6)$$

с соответствующим начальным

$$p(y, 0) = 0 \quad (7)$$

и граничными условиями

$$p(0, \tau) = 0, \quad (8)$$

$$p(l, \tau) = p_0. \quad (9)$$

Система (6)–(9) в безразмерной форме записи такова:

$$\frac{\partial P(Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P(Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (10)$$

$$P(Y, 0) = 0; \quad (11)$$

$$P(0, \theta) = 0; \quad (12)$$

$$P(1, \theta) = 1, \quad (13)$$

где $\theta = \tau\chi/l^2$; $Y = y/l$; $P = p/p_0$.

Линейный характер начально-краевой задачи для параболического уравнения (6) с краевыми условиями (7)–(9) позволяет получить ее аналитическое решение, применяя, например, одностороннее интегральное преобразование Лапласа [7]

$$P(Y, \theta) = Y + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(Y\mu_n)}{\mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta), \quad (14)$$

где $\mu_n = \pi n$, $n = \overline{1, \infty}$.

Если ввести характерную скорость течения среды

$$w = kp_0/(\mu l),$$

то с учетом (3) безразмерная локальная скорость течения жидкости в поровом пространстве пористого слоя есть

$$U = u/w = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n Y)}{\cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta). \quad (15)$$

В стационарном режиме, когда $\theta \rightarrow \infty$, из (14) и (15) следует, что $P(Y) = Y$, $U = 1$. Характерные профили безразмерных давления и скорости приведены на рис. 2.

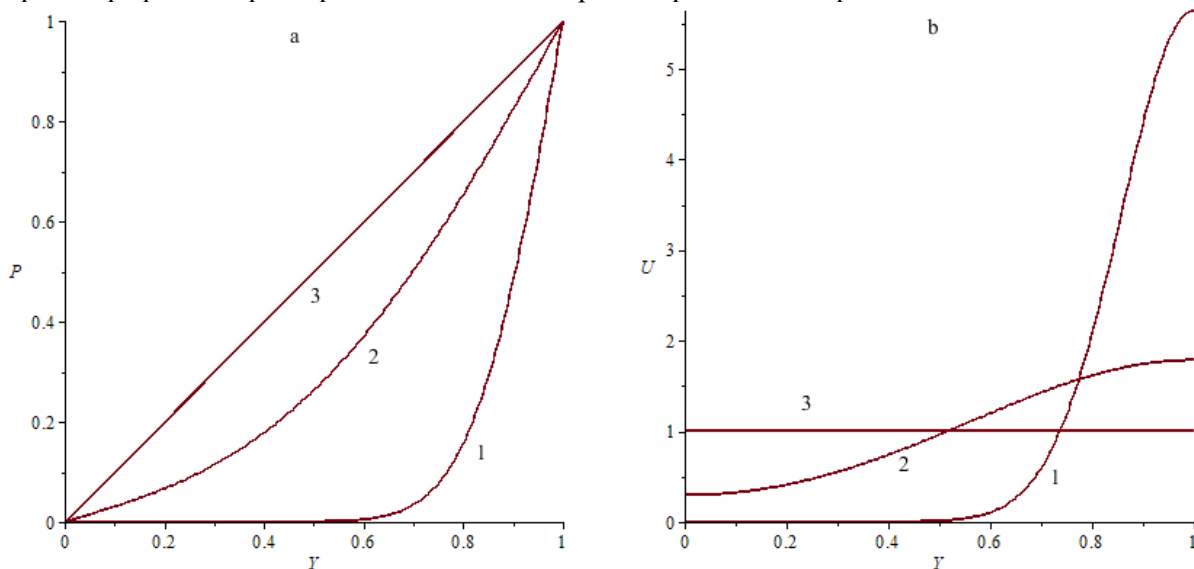


Рис. 2. Профили безразмерных давлений (а) и скорости (б) среды при различных значениях θ :
1 – 0,01; 2 – 0,1; 3 – 1,0

Задача (6)–(9), по существу, описывает формирование профилей давления и скорости по толщине пористого слоя в период начала прокачки и перехода ее в стационарный режим. Если в (15) положить $Y = 0$, то можно определить безразмерное время θ^* установления стационарного режима, например, с относительной погрешностью в 0,01 из уравнения

$$U(0, \theta^*) = 0,99. \quad (16)$$

Для этого будем считать, что при достаточно больших временах θ соотношение (15) можно записать в виде

$$U(0, \theta^*) \approx 1 + 2 \exp(-\mu_1^2 \theta^*) / \cos \mu_1, \quad (17)$$

тогда из (16) и (17) следует

$$\theta^* = -\frac{1}{\pi^2} \ln 0,005 = 0,537. \quad (18)$$

Если прокачку жидкости сквозь пористый слой остановить, то динамика изменения полей безразмерных давления и скорости определяется из решения задачи:

$$\frac{\partial P(Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P(Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (19)$$

$$P(Y, 0) = Y; \quad (20)$$

$$P(0, \theta) = P(1, \theta) = 0. \quad (21)$$

Решение (18)–(21):

$$P(Y, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n Y)}{\mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta); \quad (22)$$

$$U(Y, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n Y)}{\cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta). \quad (23)$$

Очевидно, что, повторяя ту же процедуру по определению продолжительности периода отключения прокачки, получим результат, аналогичный (18).

При импульсном законе изменения давления задача формируется в виде

$$\frac{\partial P(Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P(Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (24)$$

$$P(Y, 0) = P(0, \theta) = 0; \quad (25)$$

$$P(1, \theta) = 1(\theta) - 1(\theta - \theta_0), \quad (26)$$

где θ_0 – безразмерное время импульса; $1(\dots)$ – функция Хэвисайда.

Решение (24)–(26) таково:

$$P(Y, \theta) = \begin{cases} P_1(Y, \theta), & \text{при } \theta \leq \theta_0, \\ P_2(Y, \theta), & \text{при } \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (27)$$

где $P_1(Y, \theta)$ определяется соотношением (14), а

$$P_2(Y, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n Y)}{\mu_n \cos \mu_n} \left\{ \exp(-\mu_n^2 \theta) \left[1 - \exp(-\mu_n^2 \theta_0) \right] \right\}.$$

Следует отметить, что решение задачи (24)–(26) обобщает решения задач (10)–(13) и (19)–(21).

Пример. Оценим времена пребывания и установления потока жидкости с $\mu = 10^{-3}$ Па·с через пористый слой толщиной $l = 0,1$ м, пористостью $\varepsilon = 0,4$ и проницаемостью $k_p \sim 10^9$ Па (для большинства капельных жидкостей [6]). Пусть избыточное давление составляет $p_0 = 10^5$ Па, тогда время пребывания жидкости в слое составляет порядка 100 с, а время установления ≈ 21 с. Для более высоких давлений p_0 время пребывания уменьшается, при этом время установления увеличивается.

Заключение. Анализ показал, что времена установления при прокачке жидкой среды сквозь изотропный пористый слой и при останове прокачки совпадают. Получено обобщение задач начала прокачки, ее стационарного режима и ее останова, показано на примере, что основную роль в величине времени играет давление подачи жидкой среды в пористый слой, чем оно больше, тем больше время установления.

Литература

1. Маскот, М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскот. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 628 с.
2. Вотошкин, А.Г. Процессы и аппараты защиты окружающей среды / А.Г. Вотошкин. – М.: Высш. шк., 2008. – 638 с.
3. Delavar, M.A. Using Porous for Heat Transfer Enhancement in Heat Exchangers: Review / M.A. Delavar, M.I. Azemi // J. of Eng. Sci. and Technology Review. – 2013. – Vol. 6, no. 1. – P. 14–16.
4. Беляев А.Ю. Усреднение в задачах теории фильтрации / А.Ю. Беляев. – М.: Наука, 2004. – 198 с.

5. Hsu, C.T. Thermal Dispersion in Porous Medium / C.T. Hsu, P. Cheng // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1990. – Vol. 33, no. 8. – P. 1587–1597.

6. Баренблатт, Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Раник. – М.: Недра, 1972. – 288 с.

7. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

Поступила в редакцию 13 марта 2026 г.

Сведения об авторах

Ряжских Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskihav@bk.ru.

Ряжских Виктор Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskih_vi@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 2, pp. 33–38*

DOI: 10.14529/mmph260204

ESTIMATION OF THE TIME OF SETTING STEADY-STATE CONDITIONS FOR NEWTONIAN FLUID PRESSURE FLOW THROUGH A FLAT POROUS LAYER

A.V. Ryazhskih, V.I. Ryazhskih

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskihav@bk.ru

Abstract. Unsteady elastic filtration conditions for a viscous incompressible fluid isothermally pumped through an isotropic porous layer served as a basis for formulating initial-boundary value problems for a one-dimensional pressure field, assuming that the filtration mode obeys Darcy's law. The problems describe the pumping on/off modes, as well as the steady-state conditions for the flow of a Newtonian fluid supplied from the upper surface of the porous medium and exiting through its lower bounding surface, with infinitely large boundary permeability. The equations of the formulated initial-boundary value problems are partial differential equations with Dirichlet and/or von Neumann boundary conditions. In the case of pulsed input, the boundary condition is represented by a structure consisting of the difference of Heaviside functions, one of which has a shift equal to the pulse duration. Due to their linear nature, analytical solutions can be obtained using a one-sided integral Laplace transform in the form of explicit relationships for dimensionless pressure and velocity profiles along the height of a porous layer. As these solutions are represented by rapidly converging Fourier series with a multiplicative exponent, the concept of a "regular" mode is used (only the first term is considered in the expansion). Approximate relationships are derived to determine the duration of the setting modes during the start and stop of pumping the liquid medium through a porous layer. The obtained solutions are generalized using an impulse boundary condition. Computational experiments have shown that it takes approximately 0,537 dimensionless time for the pressure profile to approach linearity during both the on and off pumping modes, with a relative accuracy of 0,01, depending on the velocity of the fluid at the outlet of the porous layer. An example is given to demonstrate that the setting time can reach a significant value, which should be taken into account in the operation of various technical devices that contain porous layers.

Keywords: porous layer; Newtonian fluid; pumping; pressure flow; settling time; Darcy's law.

References

1. Muskat, M. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. Michigan: I.W. Edwards, Inc. ann arbor, 1946, 736 p.

2. Votoshkin A.G. *Processy i apparaty zashchity okruzhayushchej sredy* (Processes and Apparatuses for Environmental Protection). Moscow: Vyssh. shk. Publ., 2008, 638 p. (in Russ.).
3. Delavar M.A., Azemi M.I. Using Porous for Heat Transfer Enhancement in Heat Exchangers: Review. *J. of Eng. Sci. and Technology Review*, 2013, Vol. 6, no. 1, pp. 14–16. DOI: 10.25103/jestr.061.03
4. Belyaev A.Yu. *Usrednenie v zadachah teorii fil'tracii* (Averaging in Problems of Filtration Theory). Moscow, Nauka Publ., 2004, 198 p. (in Russ.).
5. Hsu C.T., Cheng P. Thermal Dispersion in Porous Medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1990, Vol. 33, no. 8, pp. 1587–1597. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90015-M.
6. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ranik V.M. *Teoriya nestacionarnoj fil'tracii zhidkosti i gaza* (Theory of Non-Stationary Filtration of Liquid and Gas). Moscow, Nedra Publ., 1972, 288 p. (in Russ.).
7. Doetsch Von Gustav. *Anleitug zum praktischen Gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. R. Oldenbourg, 1956, (in German).

Received March 13, 2026

Information about the authors

Ryazhskikh Aleksandr Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: ryazhskihav@bk.ru.

Ryazhskikh Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: ryazhskih_vi@mail.ru.

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

**В.А. Сурин, С.Э. Иванов, М.Э. Иванов, А.В. Коржов,
В.И. Сафонов, С.П. Кулик, Н.В. Малетин**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: surinva@susu.ru*

Аннотация. Рассматривается применение графовых нейронных сетей для решения задачи расчета установившихся режимов электроэнергетических систем. Предложена математическая постановка, основанная на представлении энергосистемы в виде графа, а также разработана архитектура модели, сочетающая локальную регрессию параметров узлов и глобальную классификацию устойчивости режима. Для обучения использовались синтетические данные, сгенерированные на основе тестовой схемы. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали высокую точность аппроксимации параметров режима. Полученные результаты подтверждают перспективность применения графовых нейронных сетей для оперативного анализа режимов электроэнергетических систем.

Ключевые слова: графовые нейронные сети; задача потокораспределения; синтетические данные, область существования решения.

Введение

Анализ установившихся режимов – фундаментальный аспект проектирования и управления современными электроэнергетическими системами. С учетом энергетического перехода и массовой интеграции возобновляемых источников энергии сложность работы сетей возрастает, что требует точного контроля состояния системы в реальном времени для обеспечения надежности и предотвращения аварий.

Традиционно для расчета потокораспределения применяются итерационные численные методы, такие как метод Ньютона–Рафсона (NR), обеспечивающие высокую точность. Однако они тяжело масштабируются на крупные энергосистемы. Задача потока мощности нелинейна, и при росте числа шин метод NR требует колоссальных вычислительных ресурсов [1]. В системах из сотен или тысяч шин этот метод занимает значительное время из-за необходимости пересчета и факторизации большой матрицы Якоби на каждой итерации [2]. В качестве альтернативы активно развиваются методы машинного обучения [3], дающие быстрые аппроксимации решений. При этом предварительные эксперименты авторов с многослойными перцептронами (MLP) выявили их критические недостатки: склонность к переобучению, высокие требования к вычислительным мощностям и жесткую привязку к конкретной топологии сети [4, 5]. Любое изменение схемы делает полностью связную нейросеть непригодной без полного переобучения.

Поскольку электроэнергетические системы по своей природе имеют графовую структуру, наиболее адекватным решением становится применение графовых нейронных сетей (GNN). Они интегрируют топологическую информацию непосредственно в архитектуру через механизмы передачи сообщений между смежными узлами и ветвями [6]. GNN обладают реляционными индуктивными смещениями, обеспечивающими инвариантность к перестановкам узлов и локальную связность, что позволяет им обрабатывать графы произвольного размера и конфигурации без потери эффективности [7, 8].

Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи расчета установившегося режима в современных исследованиях основывается на представлении электрической сети в виде связного графа

$$G = (V, E),$$

где V – множество вершин графа, которые соответствуют вершинам (узлам) электросистемы, таким как электростанции, подстанции, крупные заводы и т. д.; E – множество ребер графа, которые отображают линии электропередачи.

Каждая вершина $v_i \in V$ характеризуется вектором физических величин, включающим действительную V_{re} и мнимую V_{im} части напряжения, а также активную P и реактивную Q мощности. Каждое ребро $e_i \in E$ также может характеризоваться вектором, включающим такие параметры, как активная проводимость g_{ij} , реактивная проводимость b_{ij} , коэффициент трансформации t_{ij} и предельная пропускная способность [6]. В рамках настоящей статьи пространство входных признаков ограничено исключительно характеристиками, заданными на вершинах графа V .

Физическая сущность задачи заключается в решении системы нелинейных алгебраических уравнений баланса мощностей, описывающих статическое состояние системы в соответствии с законами Кирхгофа и Ома. В декартовой форме уравнения баланса мощностей для активной и реактивной мощности в каждом узле i выражаются через действительные и мнимые компоненты напряжения узлов [9].

$$\begin{cases} P_i = \sum_{j \in N(i)} (V_i^{re} V_j^{re} + V_i^{im} V_j^{im}) G_{ij} + (V_i^{im} V_j^{re} - V_i^{re} V_j^{im}) B_{ij} \\ Q_i = \sum_{j \in N(i)} (V_i^{im} V_j^{re} + V_i^{re} V_j^{im}) G_{ij} + (V_i^{re} V_j^{re} - V_i^{im} V_j^{im}) B_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

Для обеспечения корректности расчета узлы классифицируются по типам фиксируемых переменных: балансирующий узел ($V\delta$ -узел), выполняющий роль опорного с заданными действительной и мнимой частями напряжения, генераторные узлы (PV -узел), где фиксированы активная мощность и квадрат модуля напряжения; и нагрузочные узлы (PQ -узел), для которых заданы активная и реактивная мощности.

Помимо стандартной постановки задачи расчета потокораспределения дополнительно рассматривается устойчивость режима энергосистемы, а именно существование решения системы нелинейных уравнений баланса мощностей (1). Это соответствует анализу области допустимых режимов, в котором система уравнений имеет физически реализуемое решение.

На границе области существования решения наблюдается явление резкого падения напряжения, при котором малые изменения входных параметров приводят к исчезновению решения. С математической точки зрения это означает, что отображение $f_0 : X \rightarrow Y$, аппроксимирующее решение уравнений (1), теряет непрерывность на границе допустимой области

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_0(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_0(x).$$

Для устранения данной проблемы вводится расширенная многозадачная постановка, в которой задача декомпозируется на две взаимосвязанные подзадачи

$$f_0 : X \rightarrow (Y_{reg}, Y_{cls}),$$

где Y_{reg} – действительная и мнимая части напряжения узлов; $Y_{cls} \in \{0, 1\}$ – индикатор существования реализуемого режима. В конечном итоге задача обучения сводится к совместной аппроксимации непрерывного отображения внутри области устойчивости и классификации границы существования решения.

Архитектура сети

Электроэнергетическая система моделируется в виде графа $G = (V, E)$, где каждому узлу $i \in V$ сопоставляется вектор входных признаков

$$x_i = [P_i, Q_i, t_i],$$

где P_i, Q_i – заданные значения активной и реактивной мощности в узле, положительные для генерации, отрицательные для нагрузки; V_i^{re} и V_i^{im} – действительная и мнимая части напряжения узла; t_i – one-hot вектор, кодирующий тип узла. Начальное скрытое представление узла полагается равным входному вектору $h_i^{(0)} = x_i$.

Для учета топологии сети используется стек графовых сверточных слоев. На k -м слое обновление скрытого состояния узла задается уравнением передачи сообщений

$$h_i^{(k+1)} = \sigma \left(W^{(k)} h_i^{(k)} + \sum_{j \in N(i)} W_n^{(k)} h_j^{(k)} \right),$$

где $N(i)$ – множество соседей узла; $W^{(k)}, W_n^{(k)}$ – матрицы весов сети; σ – функция активации $ReLU$. Для предотвращения переобучения применяется метод Dropout. Архитектура разделена на два функциональных модуля в соответствии с физической постановкой задачи.

Регрессионный модуль архитектуры аппроксимирует непрерывное отображение на локальном уровне, то есть на уровне узла

$$f_{reg} : h_i \rightarrow \hat{y}_i = \{V_i^{re}, V_i^{im}\}, \hat{y}_i = W_{reg} h_i + b_{reg},$$

где W_{reg} и b_{reg} – параметры линейного выходного слоя, \hat{y}_i – выход модели регрессионного модуля, h_i – обрабатываемое сообщение в архитектуре сети. Функция активации отсутствует для обеспечения неограниченного диапазона предсказываемых величин.

Классификационный модуль архитектуры формирует оценку существования допустимого режима на основе агрегированного представления всей сети. Глобальный вектор вычисляется посредством усредняющего пулинга

$$h_G = \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} h_i.$$

Предсказание метрики класса – режим сходится или не сходится – осуществляется линейным преобразованием.

$$\hat{y}_{cls} = \sigma(W_{cls} h_G + b_{cls}),$$

где σ – сигмоидальная функция активации, ограничивающая выходное значение диапазоном от 0 до 1 включительно, \hat{y}_{cls} – выход модели классификационного модуля, W_{cls} – матрица весов выходного слоя классификатора, b_{cls} – смещение выходного слоя классификатора.

Предложенная архитектура реализует естественное для задачи разделение ролей: локальная регрессия моделирует зависимость напряжения в узлах от локальных параметров режима, в то время как глобальная классификация агрегирует информацию со всех шин сети для оценки ее статической устойчивости. Такой подход служит основой для обработки разрывных отображений, возникающих на границе области существования решения.

Формирование набора данных и функция потерь

Для обучения предложенной графовой архитектуры была использована модельная схема электрической сети, состоящая из шести узлов, топология которой представлена на рис. 1. В ней первый узел – балансирующий ($P\delta$ -узел), остальные – узлы нагрузки (PQ -узлы).

Выбор данной конфигурации обусловлен её простотой формирования данных для обучения графовой архитектуры. Следует отметить, что основной проблемой при любой нейронной сети, основанной на глубоком обучении, традиционно является дефицит реальных эксплуатационных данных, которые часто недоступны исследователям из-за соображений конфиденциальности, коммерческой тайны или требований безопасности. Именно поэтому для обучения модели была использована синтетическая база данных. Как показано в работе [10], синтетические данные, генерируемые на основе физических моделей, способны эффективно воспроизводить статистические и физические характеристики реальных энергосистем без риска утечки информации.

Для формирования обучающей, валидационной и тестовой выборок было использовано программное обеспечение MathCad [11]. Программный модуль расчета реализовывал итерационное решение системы уравнений (1) для заданной топологии. Были сгенерированы данные как внутри области, так и на границе. Общий объем выборки составил около 11 000 режимов.

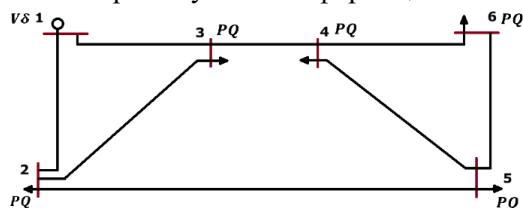


Рис. 1. Тестовая схема из 6 узлов

Специфика решаемой задачи требует использования составной функции потерь, поэтому итоговая функция потерь для графовой нейронной сети состоит из двух функций потерь для каждой части модели

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{cls} + \mathcal{L}_{reg},$$

где \mathcal{L}_{cls} – функция потерь классификационной составляющей; \mathcal{L}_{reg} – функция потерь регрессионной составляющей.

Для регрессионного модуля была использована среднеквадратичная ошибка (MSE), однако ее вычисление производилось не для всех узлов графа, а лишь для тех, которые согласно сгенерированным данным находятся в активном режиме, для которых классификационная метка $y_i = 1$. Данный подход позволяет избежать смещения градиента в сторону доминирующего нормального режима и фокусирует обучение сети на предсказании значений именно в моменты отклонений. MSE для одного узла считалось по следующей формуле:

$$\ell_{mse}^{(k)} = \frac{1}{2} \left[\left(V_{re,k}^{pred} - V_{re,k}^{true} \right)^2 + \left(V_{im,k}^{pred} - V_{im,k}^{true} \right)^2 \right],$$

где $V_{re,k}^{pred}, V_{im,k}^{pred}$ – предсказанные значения действительной и мнимой частей напряжения на узле k , $V_{re,k}^{true}, V_{im,k}^{true}$ – соответствующие истинные значения на узле k . Итоговая регрессионная ошибка с учетом маскирования нормальных режимов записывается как

$$\mathcal{L}_{reg} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(m_i \cdot \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \ell_{mse}^{(k)} \right)}{\sum_{i=1}^N m_i + \varepsilon},$$

где $m_i \in \{0,1\}$ – маска, соответствующая значению маски для i -го примера, $K = 6$ – количество шин в тестовой схеме, ε – малая константа для предотвращения деления на ноль в случае выборки без отклонений.

Функция потерь для классификационной составляющей определяет принадлежность среза данных к тому или иному режиму, которая была реализована на основе бинарной кросс-энтропии. Она обеспечивает численную стабильность вычислений за счет объединения сигмоидальной активации и расчета потерь в одном слое:

$$\mathcal{L}_{cls} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[y_i \cdot \log(\sigma(\hat{y}_i)) + (1 - y_i) \cdot \log(1 - \sigma(\hat{y}_i)) \right],$$

где σ – сигмоидальная функция, $y_i \in \{0,1\}$ – истинная метка режима для i -го графа в одной выборке, \hat{y}_i – выход классификатора.

Вычислительный эксперимент

Программная реализация нейросетевой архитектуры выполнялась на базе специализированной библиотеки для обработки графов PyTorch Geometric. В качестве базовой архитектуры была выбрана многозадачная графовая нейронная сеть пространственного типа на основе GraphConv. Обучение проводилось на компьютере с производительностью 82,6 TFLOPS.

Модель обучалась в течение 1000 эпох с использованием оптимизатора Adam с начальным значением скорости обучения $5 \cdot 10^{-5}$. Данный выбор обусловлен необходимостью обеспечения стабильной сходимости при обучении графовой нейронной сети с многозадачной функцией потерь, включающей сигмоидальную кросс-энтропию (BCE) для классификации и среднеквадратичную ошибку (MSE) для регрессии, а также предотвращения переобучения на ранних этапах.

Для дополнительной стабилизации процесса обучения использовалась L2-регуляризация с коэффициентом $\lambda = 10^{-6}$, а также адаптивное снижение скорости обучения с помощью планировщика ReduceLROnPlateau, который уменьшает скорость обучения в 2 раза при отсутствии улучшения функции потерь на валидационной выборке в течение 20 эпох. Контроль переобучения осуществлялся по динамике функции потерь на валидационной выборке. На рис. 2 представлены кривые обучения модели, которые показывают монотонное снижение функции

потерь и устойчивую сходимость модели. При этом разрыв между обучающей и валидационной выборками минимален, что свидетельствует о хорошей обобщающей способности модели.

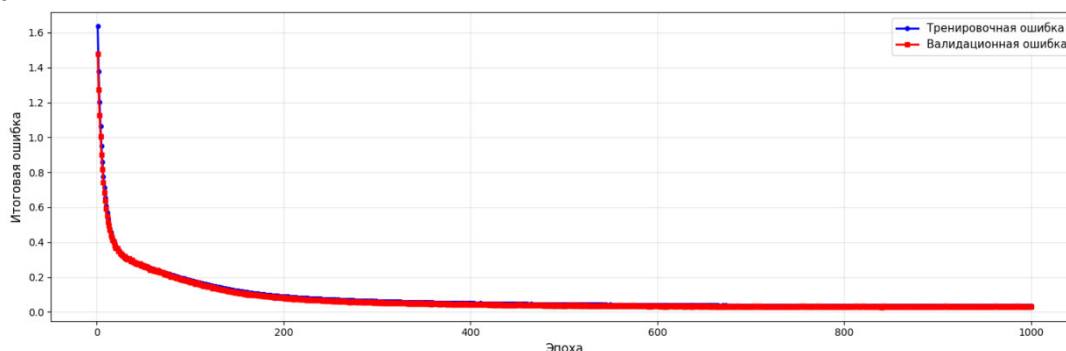


Рис. 2. Кривая обучения графовой нейронной сети

Эффективность регрессионной части модели оценивалась с использованием метрик средне-квадратичной ошибки (MSE), средней абсолютной ошибки (MAE) и коэффициента детерминации R^2 . Классификационная часть оценивалась по метрикам Accuracy и F1-score. Итоговые значения метрик приведены в таблице.

Результаты работы модели

Тип задачи	Метрика	Обучающая выборка	Валидационная выборка
Классификация	Accuracy	0,9898	0,9912
	F1-score	0,9930	0,9939
Регрессия	MAE	0,029033	0,035787
	MSE	0,004127	0,003865
	R^2	0,9946	0,9951

Результаты экспериментов демонстрируют, что предложенная графовая нейросетевая архитектура позволяет восстанавливать параметры электрического режима с высокой точностью ($R^2 = 0,995$), сопоставимой с погрешностью исходных численных методов. Классификационная компонента модели также показывает высокую эффективность ($F_1 = 0,994$) – практически безошибочно идентифицирует границу области существования решения, что важно для нашей задачи.

Несмотря на высокие значения усредненных метрик, для практического применения в задачах диспетчеризации критической характеристикой является не средняя, а максимальная ошибка на отдельных узлах. В связи с этим был выполнен дополнительный анализ распределения абсолютной погрешности определения модуля напряжения на валидационной выборке. Установлено, что для 95 % проанализированных узлов ошибка не превышает 4,1 %, а медианное значение погрешности составляет менее 0,8 %. Абсолютный максимум ошибки зафиксирован на уровне 25,6 %, что соответствует пограничным режимам вблизи области несуществования решения, где даже классические численные методы демонстрируют вычислительную неустойчивость. Распределение ошибки (рис. 3) подтверждает надежность модели в большинстве нормальных состояний сети; значительные отклонения характерны лишь для недопустимых или аварийных режимов.

Распределение ошибок предсказания по узлам



Рис. 3. Распределение абсолютной ошибки предсказания модуля напряжения по узлам сети

Сравнение с альтернативным подходом, выполненным в работе [12], показывает, что при фиксированной топологии сети простые полносвязные архитектуры демонстрируют точность, сопоставимую с графовыми сетями (MSE порядка $10^{-5} - 10^{-4}$ отн. ед.). Однако в [12] рассматривается задача внутри области устойчивости, где отображение является гладким. В настоящем исследовании основное внимание уделено наиболее сложному сегменту – границе области существования решения, что принципиально усложняет задачу аппроксимации. В связи с этим достигнутый уровень точности следует рассматривать как отправную точку для дальнейших исследований, а не как конечный результат.

Заключение

В работе исследовано применение графовых нейронных сетей для расчета установившихся режимов энергосистем. Предложенная архитектура из регрессионной и классификационной составляющих обеспечила одновременное восстановление параметров режима и оценку устойчивости системы. Эксперименты на синтетических данных подтвердили высокую точность аппроксимации в большинстве эксплуатационных состояний. Установлено, что максимальные погрешности локализуются вблизи границы области существования решения, где традиционные численные методы также нестабильны. Это подчеркивает сложную нелинейность пограничных режимов и определяет вектор доработки модели.

В отличие от полносвязных сетей, выбранная архитектура концептуально независима от размерности входа. Механизмы передачи сообщений создают фундаментальные предпосылки для работы с динамически меняющимися топологиями без полного переобучения сети и для существенного ускорения расчетов.

Дальнейшие исследования будут направлены на эмпирическое подтверждение инвариантности модели к структурным изменениям, масштабирование на крупные сети и профилирование вычислительной эффективности алгоритма в задачах оперативной диспетчеризации.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание № FENU-2026-0004 «Классические, нейросетевые и квантовые оптимизационные алгоритмы для решения задач оперативно-диспетчерского управления объектами электроэнергетики»).

Литература

1. Fast Newton–Raphson Power Flow Analysis based on Sparse Techniques and Parallel Processing / A. Ahmadi, M. C. Smith, E. R. Collins *et al.* // IEEE Transactions on Power Systems. – 2022. – Vol. 37, no. 3. – P. 1695–1705.
2. Kulworawanichpong, T. Simplified Newton–Raphson Power-Flow Solution Method / T. Kulworawanichpong // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. – 2010. – Vol. 32, no. 6. – P. 551–558.
3. Pham, T. Neural Network-based Power Flow Model / T. Pham, X. Li // arXiv. – 2021. <https://arxiv.org/abs/2112.08418>.
4. Boccato, T. Breaking the Structure of Multilayer Perceptrons with Complex Topologies / T. Boccato, M. Ferrante, A. Duggento, N. Toschi // Proceedings of the 2nd Annual Workshop on Topology, Algebra, and Geometry in Machine Learning (TAG-ML) at the 40th International Conference on Machine Learning, Honolulu, Hawaii, USA. – 2023.
5. Multilayer Perceptron Architecture Optimization using Parallel Computing Techniques / W. Castro, J. Oblitas, R. Santa-Cruz, J. Avila-George // PLoS ONE. – 2017. – Vol. 12, no. 12. – p. e0189369.
6. Applications of Graph Computing and Graph Neural Networks in Power Systems: A Survey / J. Lu, H. Tan, R. Zhao *et al.* // Proc. 2024 China International Conference on Electricity Distribution (CICED). – 2024. – P. 543–548.
7. Graph Neural Networks: A Review of Methods and Applications / J. Zhou, G. Cui, Z. Zhang *et al.* // arXiv preprint. – 2018. – arXiv:1812.08434.
8. A Gentle Introduction to Graph Neural Networks / B. Sanchez-Lengeling, E. Reif, A. Pearce, A.B. Wiltschko // Distill. – 2021. – Vol. 6, no. 9. – P. e33.
9. Шиманская-Семёнова, Т.А. Применение матричных моделей для расчета и анализа режимов электрических сетей / Т. А. Шиманская-Семёнова. – Минск: БНТУ, 2010. – 158 с.

10. Computationally Efficient Data Synthesis for AC-OPF: Integrating Physics-Informed Neural Network Solvers and Active Learning / J. Zhang, R. Peng, C. Lu, C. Wu // Applied Energy. – 2025. – Vol. 378, Part A. – P. 124714.

11. PTC Mathcad Prime 11 [Электронный ресурс] // PTC. – 2026. – What's new in PTC Mathcad Prime 11. – Режим доступа: <https://www.ptc.com/en/products/mathcad/whats-new> (дата обращения: 11.04.2026).

12. Falconer, T. Leveraging Power Grid Topology in Machine Learning Assisted Optimal Power Flow / T. Falconer, L. Mones // IEEE Transactions on Power Systems. – 2023. – Vol. 38, no. 3. – P. 2234–2246.

Поступила в редакцию 14 апреля 2026 г.

Сведения об авторах

Сурин Владимир Анатольевич – кандидат технических наук, доцент центра ОП топ-уровня в сфере ИИ «ВиртУм», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: surinva@susu.ru.

Иванов Сергей Эдуардович – студент, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: ivanovse@susu.ru.

Иванов Максим Эдуардович – студент, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: ivanovme@susu.ru.

Коржов Антон Вениаминович – доктор технических наук, доцент, первый проректор – проректор по научной работе, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: korzhovav@susu.ru.

Сафонов Валерий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра электрических станций, сетей и систем электроснабжения, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: safonovvi@susu.ru.

Кулик Сергей Павлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник управления научной и инновационной деятельности, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kuliksp@susu.ru.

Малетин Николай Владимирович – научный сотрудник управления научной и инновационной деятельности, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: maletinnv@my.msu.ru.

APPLICATION OF GRAPH NEURAL NETWORKS FOR CALCULATING STEADY-STATE MODES OF ELECTRICAL POWER SYSTEMS

V.A. Surin, S.E. Ivanov, M.E. Ivanov, A.V. Korzhov, V.I. Safonov, S.P. Kulik, N.V. Maletin
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: surinva@susu.ru

Abstract. This paper considers the application of graph neural networks for solving the problem of calculating steady-state modes of electrical power systems. A mathematical formulation based on representing the power system as a graph is proposed, and a model architecture combining local regression of node parameters and global classification of mode stability is developed. Synthetic data generated based on a standard test scheme were used for training. The conducted computational experiments demonstrated high accuracy in approximating the mode parameters. The obtained results confirm the promising potential of applying graph neural networks for accelerated analysis of electrical power system modes.

Keywords: *Graph neural networks, power flow problem, synthetic data, solution existence region.*

References

1. Ahmadi A., Smith M.C., Collins E.R., Dargahi V., Jin S. Fast Newton–Raphson Power Flow Analysis based on Sparse Techniques and Parallel Processing. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2022, Vol. 37, no. 3, pp. 1695–1705. DOI: 10.1109/TPWRS.2021.3116182.
2. Kulworawanichpong T. Simplified Newton–Raphson Power-Flow Solution Method. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2010, vol. 32, no. 6, pp. 551–558. DOI: 10.1016/j.ijepes.2009.11.011.
3. Pham T., Li X. Neural Network-based Power Flow Model. *arXiv*, 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2112.08418.
4. Boccato T., Ferrante M., Duggento A., Toschi N. Breaking the Structure of Multilayer Perceptrons with Complex Topologies. *Proc. 2nd Annual Workshop on Topology, Algebra, and Geometry in Machine Learning (TAG-ML) at the 40th International Conference on Machine Learning*, Honolulu, Hawaii, USA, 2023.
5. Castro W., Oblitas J., Santa-Cruz R., Avila-George H. Multilayer Perceptron Architecture Optimization using Parallel Computing Techniques. *PLoS ONE*, 2017, Vol. 12, no. 12, e0189369. DOI: 10.1371/journal.pone.0189369
6. Lu J., Tan H., Zhao R., Guo W., Zhen D., Ping L. Applications of Graph Computing and Graph Neural Networks in Power Systems: A Survey. *Proc. 2024 China International Conference on Electricity Distribution (CICED)*, 2024, pp. 543–548. DOI: 10.1109/CICED63421.2024.10754312
7. Zhou J., Cui G., Hu S., Zhang Z., Yang C., Liu Z., Wang L., Li C., Sun M. Graph Neural Networks: A Review of Methods and Applications. *arXiv preprint*, arXiv:1812.08434, 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1812.08434
8. Sanchez-Lengeling B., Reif E., Pearce A., Wiltchko A.B. A Gentle Introduction to Graph Neural Networks. *Distill*, 2021, Vol. 6, no. 9, p. e33. DOI: 10.23915/distill.00033.
9. Shimanskaya-Semyenova T.A. *Primenenie matrichnykh modeley dlya rascheta i analiza rezhimov elektricheskikh setey* (Application of Matrix Models for Calculation and Analysis of Electric Grid Modes). Minsk, BNTU Publ., 2010, 158 p. (in Russ.).
10. Zhang J., Peng R., Lu C., Wu C. Computationally Efficient Data Synthesis for AC-OPF: Integrating Physics-Informed Neural Network Solvers and Active Learning. *Applied Energy*, 2025, Vol. 378, Part A, p. 124714. DOI: 10.1016/j.apenergy.2024.124714.
11. What's new in PTC Mathcad Prime 11. <https://www.ptc.com/en/products/mathcad/whats-new>.
12. Falconer T., Mones L. Leveraging Power Grid Topology in Machine Learning Assisted Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2023, Vol. 38, no. 3, pp. 2234–2246. DOI: 10.1109/TPWRS.2022.3187218.

Received April, 14, 2026

Information about the authors

Surin Vladimir Anatol'evich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor at the Center of Excellence in AI, “VirtUm” – a Top-Tier Educational Program, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: surinva@susu.ru.

Ivanov Sergey Eduardovich is Undergraduate Student, Department of Applied Mathematics and Programming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: ivanovse@susu.ru.

Ivanov Maksim Eduardovich is Undergraduate Student, Department of Applied Mathematics and Programming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: ivanovme@susu.ru.

Korzhov Anton Veniaminovich is Dr. Sc. (Engineering), Vice-Rector for Research, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: korzhovav@susu.ru.

Safonov Valeriy Ivanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department Electric Power Generation Stations, Networks and Supply Systems, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: safonovvi@susu.ru.

Kulik Sergey Pavlovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Principal Researcher of the Research & Innovation Services, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kuliksp@susu.ru.

Maletin Nikolay Vladimirovich is Researcher, Research & Innovation Services, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: maletinnv@my.msu.ru.

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО КОСИНУСА И МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ НЕКОТОРОГО КЛАССА

М.С. Токмачев

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород,
Российская Федерация
E-mail: mtokm@yandex.ru

Аннотация. В результате функциональных преобразований случайных величин получены новые распределения, найдены и исследованы функции плотности. В качестве базового рассматривается трехпараметрическое семейство распределений типа гиперболического косинуса, которое является обобщением известного двухпараметрического распределения Майкснера. Исходя из моментов распределения, вычислен ряд нетривиальных несобственных интегралов определенного класса от комбинации степенных, экспоненциальных, гиперболических и других функций при трех параметрах.

Ключевые слова: распределение типа гиперболического косинуса; функции случайных величин; плотность вероятностей; моменты; несобственный интеграл.

Введение

Для абсолютно непрерывных вероятностных распределений имеют место стандартные соотношения с интегралами: условие нормировки, начальные и центральные моменты. Сложность вычисления таких интегралов определяется структурой функции плотности. Например, для показательного распределения случайной величины $X \sim E(\lambda)$ интегрирование проводится общеизвестными методами и не представляет проблемы. Для нормальной случайной величины $X \sim N(m; \sigma)$ вычисления моментов $M(X^n)$ более трудоемки, но также общеизвестны, например [1, 2].

Рассматривая функции случайных величин, получаем новые, как правило, более громоздкие распределения со сложной функцией плотности. Вычисление моментов в этом случае также усложняется. Стандартные методы преобразования интегралов и интегрирования для комбинаций различных функций не достаточны. Зададимся целью нахождения интегралов с заданными нетривиальными подынтегральными функциями. В основу формирования таких функций для интегрирования положим трехпараметрическое семейство распределений типа гиперболического косинуса $Ch(m, \beta, \mu)$ [3, 4], которое является обобщением известного двухпараметрического распределения Майкснера [5, 6]. Плотность вероятностей $p_m(x)$ этого распределения имеет вид [7]

$$p_m(x) \equiv p_m(x; m, \beta, \mu) = \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} A^{2\beta} B\left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right), \quad (1)$$

где $m, \beta, \mu \in R; m > 0; \beta > 0; B(p; q)$ – бета-функция, $i = \sqrt{-1}$,

$$A \equiv \left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu}\right)^i = \begin{cases} e^{\operatorname{arctg} \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2}}, & \text{при } \beta^2 - \mu^2 > 0, \\ e^{\operatorname{arctg} \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2} + \pi \operatorname{sign} \mu}, & \text{при } \beta^2 - \mu^2 < 0, \\ e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \mu}, & \text{при } \beta^2 - \mu^2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При $m \in N$ бета-функция в (1), а следовательно, и функция плотности $p_m(x)$ выражается через элементарные функции в зависимости от параметров. В [8, 9] представлены рекуррентные формулы связи начальных моментов распределения с параметрами. Для случайной величины X

с функцией плотности вида (1) начальные моменты $M(X^n)$ выражаются через параметры m, β, μ по формуле

$$M(X^n) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где множество целочисленных коэффициентов $U(n; k, j)$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} U(0; 0, 0) &= 1; \quad U(0; k, j) = 0 \text{ при } k \neq 0 \text{ или } j \neq 0; \\ U(n; k, j) &= 0 \text{ при } k \leq 0, \text{ кроме } U(0; 0, 0); \\ U(n+1; k, j) &= U(n; k-1, j-1) + (j-1)U(n; k, j-1) + (j+1)U(n; k, j+1) \end{aligned} \quad (4)$$

при $n = 0, 1, 2, \dots, k \geq 1$. Значения коэффициентов $\{U(n; k, j)\}$ для начальных n приведены в [9] в виде числовых треугольников.

Из условия нормировки и найденных соотношений для моментов и параметров распределения в [10] сформирован класс интегралов, подынтегральными функциями в которых оказываются комбинации степенных, экспоненциальных, гиперболических и других функций.

В представленной работе задача усложнена. Из распределений типа гиперболического косинуса $\text{Ch}(m, \beta, \mu)$ с помощью некоторых функций случайных величин получены новые распределения и для них рассмотрены соответствующие интегральные равенства. А затем интегралы от новых комбинаций функций вновь выражены через параметры m, β, μ .

Полученные группы интегралов с параметрами m, β, μ структурно близки с интегралами в [10] как рассчитанные по одному и тому же алгоритму и вычисленные для связанных распределений, однако полученный результат является новым и позволяет шире взглянуть на найденную структурную связь интегралов в заданном классе функций с их параметрами.

1. Обратная зависимость случайных величин

Пусть случайная величина X имеет распределение типа гиперболического косинуса с параметрами m, β, μ , а именно: $X \sim \text{Ch}(m, \beta, \mu)$. Соответственно, функция плотности $p_m(x)$ имеет вид (1) при обозначениях (2).

Введём новую случайную величину $Y = 1/X$ с функцией плотности $g_m(y)$. Соответствующая функция $y = 1/x$ имеет монотонную обратную функцию $x = 1/y$, причем $x'_y = -1/y^2$. Область определения обратной функции: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Согласно общеизвестной теории функций случайных величин, например, [11, 12], плотности Y и X при $y \neq 0$ связаны соотношением

$$g_m(y) = p_m\left(\frac{1}{y}\right) \left| -\frac{1}{y^2} \right|. \quad (5)$$

В общем виде, используя функцию плотности (1), из (5) находим

$$g_m(y) = \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} y^2} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right). \quad (6)$$

Для функции $g_m(y)$ вида (6) в соответствии с условием нормировки получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} y^2} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = 1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}}, \quad (7)$$

где основание A показательной функции находится согласно (2). Заметим, что несобственный интеграл в (7) имеет подынтегральную функцию, разрывную в точке $y = 0$.

Также отметим, что параметр m может быть и дробным. Например, при $m = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\mu = 1$ из (7) следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} e^{\frac{\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}}{2y}} B\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{2y}; \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2y}\right) dy = \frac{\pi 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2^{\sqrt{2}-2} \sqrt{2} \sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}} = \frac{\pi 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}^{3\sqrt{2}-4}}.$$

Аналогично для начальных моментов $M(X^n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$M(X^n) = M\left(\frac{1}{Y^n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^n} g_m(y) dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

В частности,

$$M\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \mu;$$

$$M(X^2) = M\left(\frac{1}{Y^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^4} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\beta^2 + (m+1)\mu^2}{m}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^3} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\pi \mu (\beta^2 + \mu^2)^{m/2}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^4} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\pi (\beta^2 + \mu^2)^{m/2}}{2^{m-2} m^2 \beta^{m-1}} (\beta^2 + (m+1)\mu^2).$$

Согласно [4, 7] формулы плотности $p_m(x)$ при $m \in N$ имеют вид:

$$p_1(x) = \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}}; \quad p_2(x) = \frac{2xA^{\frac{x}{2\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}}; \quad (8)$$

$$p_m(x) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{(m-1)! \operatorname{ch} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s-1)^2 \beta^2 + m^2 x^2 \right], \quad m = 3, 5, 7, \dots; \quad (9)$$

$$p_m(x) = \frac{m^2 x}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{(m-1)! \operatorname{sh} \frac{\pi mx}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s)^2 \beta^2 + m^2 x^2 \right], \quad m = 4, 6, 8, \dots \quad (10)$$

Ввиду безграничной делимости распределения типа гиперболического косинуса [4, 9] при натуральных m случайную величину X с плотностью $p_m(x)$ можно представить в виде суммы m независимых случайных слагаемых, каждое с плотностью $p_1(x)$ [13–15]. Соответственно функция $p_m(x)$ является m -кратной сверткой [16–18] (композиция распределений):

$$p_m(x) = p_1(x) * p_{m-1}(x) = p_1(x) * p_1(x) * \dots * p_1(x).$$

Для случайной величины $Y = \frac{1}{X}$ соответствующие функции плотности $g_m(y)$ оказываются такими:

$$g_1(y) = \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}\right) y^2}; \quad g_2(y) = \frac{2A^{\frac{1}{\beta y}}}{(\beta^2 + \mu^2) \left(\operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}\right) y^3};$$

$$g_m(y) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^2 \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right]$$

при $m = 3, 5, 7, \dots$;

$$g_m(y) = \frac{m^2}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right]$$

при $m = 4, 6, 8, \dots$.

Типичные графики функции плотности $g_m(y)$ при конкретных параметрах представлены на рис. 1 и 2.

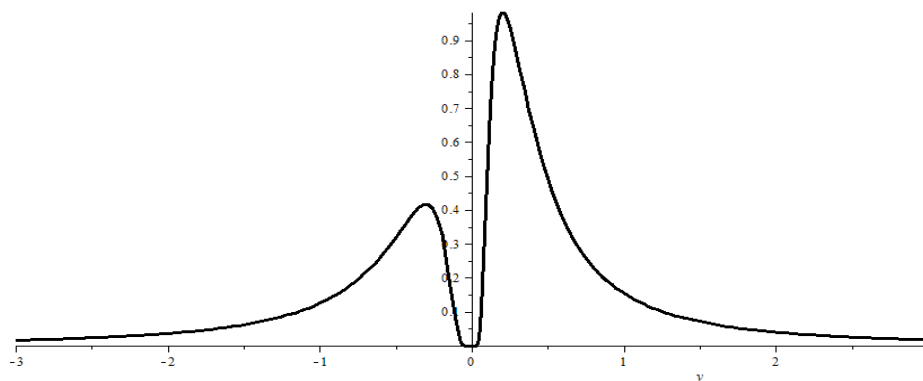


Рис. 1. График функции плотности $g_1(y)$ при $m=1, \beta=3, \mu=1$

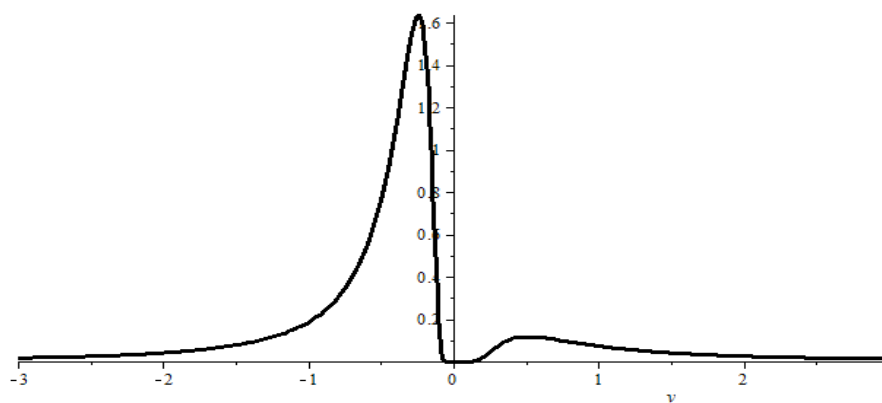


Рис. 2. График функции плотности $g_4(y)$ при $m=4, \beta=4, \mu=-2$

Как видно из рис. 1 и 2, графики асимметричны и функции плотности $g_m(y)$ имеют устранимый разрыв при $y=0$. График плотности состоит из двух составляющих (при отрицательном и положительном аргументах), но при разных соотношениях параметров форма кривой плотности данного семейства распределений принципиально не меняется.

Отметим, что для распределений с плотностью $g_m(y)$ параметр μ уже не является математическим ожиданием:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y g_m(y) dy \neq \mu.$$

Интегралы, полученные из соотношения для $M\left(\frac{1}{Y^n}\right)$, обозначим соответственно $J_n(m, \beta, \mu)$. Тогда из условия нормировки следует:

$$J_0(1, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{y^2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}} dy = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2}; \quad J_0(2, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{\beta y}}}{y^3 \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}} dy = \frac{\beta^2 + \mu^2}{2};$$

$$J_0(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^2 \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m}$$

при $m = 3, 5, 7, \dots$;

$$J_0(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m^2}$$

при $m = 4, 6, 8, \dots$

Исходя из первых моментов $M(X) = M\left(\frac{1}{Y}\right)$, получим значения интегралов:

$$J_1(1, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}} dy = 2\mu\sqrt{\beta^2 + \mu^2}; \quad J_1(2, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{\beta y}}}{y^4 \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}} dy = \frac{\mu(\beta^2 + \mu^2)}{2};$$

$$J_1(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2\mu(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m}$$

при $m = 3, 5, 7, \dots$;

$$J_1(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^4 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2\mu(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m^2}$$

при $m = 4, 6, 8, \dots$

В общем случае для моментов n -го порядка $M(X^n) = M\left(\frac{1}{Y^n}\right)$ приходим к интегралам:

$$J_n(1, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{y^{n+2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}} dy = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \beta^{n-j} \mu^j;$$

$$J_n(2, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{\beta y}}}{y^{n+3} \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}} dy = \frac{(\beta^2 + \mu^2)}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{2^{n-k}}.$$

При $m = 3, 5, 7, \dots$ следует

$$J_n(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^{n+2} \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy =$$

$$= \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

При $m = 4, 6, 8, \dots$ следует

$$J_n(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^{n+3} \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy =$$

$$= \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

В частности, при конкретных m и n подставляются значения коэффициентов $\{U(n; k, j)\}$ согласно (4), и выражения для интегралов как функций параметров β и μ существенно упрощаются.

2. Экспоненциальная зависимость случайных величин

Пусть случайная величина X имеет распределение типа гиперболического косинуса $X \sim \operatorname{Ch}(m, \beta, \mu)$ с функцией плотности $p_m(x)$ вида (1) при условиях (2). Полагаем $Y = e^X$ с функцией плотности $h_m(y)$. Функция $y = e^x$ имеет монотонную обратную функцию $x = \ln y$, определенную при $y > 0$. Следовательно, $x'_y = \frac{1}{y}$. Тогда плотность вероятностей распределения случайной величины Y получается как

$$h_m(y) = p_m(\ln y) \left| \frac{1}{y} \right|, \quad y > 0.$$

В общем виде (см. (1)) следует

$$h_m(y) = p_m(\ln y; m, \beta, \mu) \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} y} A^{\frac{m \ln y}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im \ln y}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{im \ln y}{2\beta}\right), \quad y > 0.$$

В частности, при $m \in N$ согласно формулам (8)–(10) на положительной полуоси получаем

$$h_1(y) = \frac{A^{\frac{\ln y}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} y \operatorname{ch} \frac{\pi \ln y}{2\beta}}; \quad h_2(y) = \frac{2 \ln y A^{\frac{\ln y}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) y \operatorname{sh} \frac{\pi \ln y}{\beta}};$$

$$h_m(y) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)! y \operatorname{ch} \frac{\pi m \ln y}{2\beta}} \frac{A^{\frac{m \ln y}{2\beta}}}{\prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s-1)^2 \beta^2 + m^2 \ln^2 y \right]}$$

при $m = 3, 5, 7, \dots$;

$$h_m(y) = \frac{m^2 \ln y}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)! y \operatorname{sh} \frac{\pi m \ln y}{2\beta}} \frac{A^{\frac{m \ln y}{2\beta}}}{\prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[(2s)^2 \beta^2 + m^2 \ln^2 y \right]}$$

при $m = 4, 6, 8, \dots$.

Типичный график функции плотности $h_m(y)$ при конкретных параметрах представлен на рис. 3.

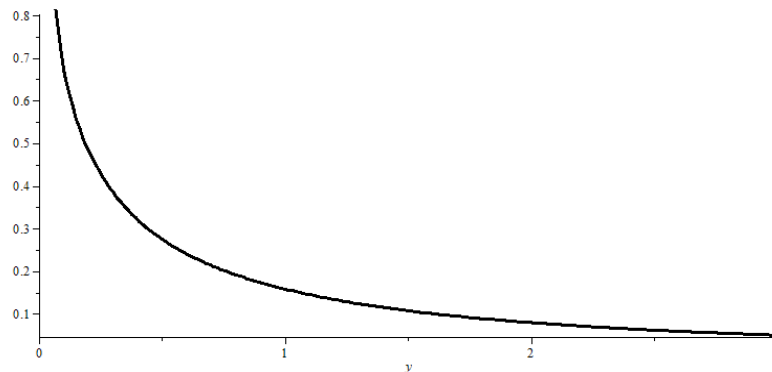


Рис. 3. График функции плотности $h_m(y)$ при $m=1$, $\beta=3$, $\mu=1$

Для $M(X^n)$ следует

$$M(X^n) = M(\ln^n Y) = \int_0^{+\infty} \ln^n y \cdot h_m(y) dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}},$$

то есть

$$\int_0^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{\ln^n y}{y} A^{\frac{m \ln y}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im \ln y}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{im \ln y}{2\beta}\right) dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

В частности, при $m=1$ и $m=2$ соответственно получаем

$$M(\ln^n Y) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n y \cdot A^{\frac{\ln y}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} y \operatorname{ch} \frac{\pi \ln y}{2\beta}} dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \beta^{n-j} \mu^j;$$

$$M(\ln^n Y) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln^{n+1} y \cdot A^{\frac{\ln y}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) y \operatorname{sh} \frac{\pi \ln y}{\beta}} dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{2^{n-k}}.$$

Аналогично получаются соотношения для интегралов и при других значениях параметров.

Заключение

Как известно, для многих классов распределений соответствующие случайные величины связаны функционально. Например, для равномерно распределенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ случайной величины X функция $Y = \mu + \lambda \cdot \operatorname{tg} X$ приводит к распределению Коши с параметрами μ и λ [2]. Если случайная величина X имеет распределение максимального значения с параметрами μ и λ , то случайная величина $Y = \exp\left(-\frac{X - \mu}{\lambda}\right)$ распределена по показательному закону с параметром λ [2].

В данной работе при использовании функций случайных величин найдены и исследованы плотности новых распределений. Причем список таких распределений далеко не исчерпывается вышеприведенными в качестве иллюстрации.

При этом используются авторские результаты для распределения типа гиперболического косинуса, которые позволяют для новых распределений вычислять интегральные характеристики и тем самым формируют новые классы интегралов от комбинаций заданных функций при различных параметрах.

Полученный результат интересен как с теоретической, так и прикладной точек зрения.

Литература

1. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
2. Вадзинский, Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб: Наука, 2001. – 294 с.
3. Токмачев, М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 1995. – № 1. – С. 139–141.
4. Токмачев, М.С. Исследование вероятностного распределения типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 18–26.
5. Lai, C.D. A Survey of Meixner's Hypergeometric Distribution / C.D. Lai // Math. Chronicle. – 1977. – no. 6. – P. 6–20.
6. Lai, C.D. Meixner Classes and Meixner Hypergeometric Distributions / C.D. Lai // Aust. J. Stat. – 1982. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 221–233.
7. Токмачев, М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2005. – № 34. – С. 96–99.
8. Токмачев, М.С. Вычисление кумулянтов и моментов распределения Майкснера / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2013. – № 75-2. – С. 47–51.
9. Токмачев, М.С. Вероятностные распределения: от характеристики к числовым множествам / М.С. Токмачев. – Саарбрюккен: LAP LAMBERT, 2018. – 224 с.
10. Токмачев, М.С. Вычисление интегралов от функций некоторого класса с вероятностной интерпретацией / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2014. – № 80. – С. 42–46.
11. Свешников, А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / А.А. Свешников. – СПб: Лань, 2008. – 448 с.
12. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – Москва: Наука, 1979. – 496 с.
13. Лукач, Е. Характеристические функции / Е. Лукач. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
14. Рамачандран, Б. Теория характеристических функций / Б. Рамачандран. – М.: Наука, 1975. – 223 с.
15. Каган, А.М. Характеризационные задачи математической статистики / А.М. Каган, Ю.В. Линник, С.Р. Рао. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
16. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 2004. – 570 с.
17. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1969. – 576 с.
18. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – 751 с.

Поступила в редакцию 19 февраля 2026 г.

Сведения об авторе

Токмачев Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация, e-mail: mtokm@yandex.ru.

**FUNCTIONS OF RANDOM VARIABLES WITH A DISTRIBUTION
OF THE HYPERBOLIC COSINE TYPE AND METHODS FOR EVALUATING
INTEGRALS OF A CERTAIN CLASS****M.S. Tokmachev**

Yaroslav-the-Wise State University, Veliky Novgorod, Russian Federation

E-mail: mtokm@yandex.ru

Abstract. Functional transformations of random variables have led to the creation of new distributions. Relevant probability density functions are determined and analyzed. The work is based on a three-parameter family of distributions of the hyperbolic cosine type, which generalizes the well-known two-parameter Meixner distribution. Several non-trivial improper integrals of a certain class of three-parameter combinations of power, exponential, hyperbolic, and other functions are evaluated based on distribution moments.

Keywords: distribution of the hyperbolic cosine type; functions of random variables; probability density function; moments; improper integral.

References

1. Kramer G. *Matematicheskie metody statistiki* (Mathematical Methods of Statistics). Moscow, Mir Publ., 1975, 648 p. (in Russ.).
2. Vadzinskiy R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* (Handbook of Probability Distributions). Sankt-Peterburg, Nauka Publ., 2001, 294 p. (in Russ.).
3. Tokmachev M.S. Postoyanstvo regressii kvadrachnoy statistiki na lineynuyu statistiku (Consistency of Regression of Quadratic Statistics on Linear Statistics). *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1995, no. 1, pp. 139–141. (in Russ.).
4. Tokmachev M.S. The Study of Probability Distributions of the Hyperbolic Cosine Type. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2017, Vol. 9, no. 3, pp. 18–26. DOI: 10.14529/mmph170303.
5. Lai C.D. A Survey of Meixner's Hypergeometric Distribution. *Math. Chronicle*, 1977, no. 6, pp. 6–20.
6. Lai C.D. Meixner Classes and Meixner Hypergeometric Distributions. *Aust. J. Stat.*, 1982, Vol. 24, Iss. 2, pp. 221–233. DOI: 10.1111/j.1467-842X.1982.tb00828.x
7. Tokmachev M.S. Prikladnyy aspekt obobshchennogo raspredeleniya giperbolicheskogo kosinusa (An Applied Aspect of the Generalized Hyperbolic Cosine Distribution). *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2005, no. 34, pp. 96–99. (in Russ.).
8. Tokmachev M.S. Vychislenie kumulyantov i momentov raspredeleniya Mayksnera (Calculation of the Cumulants and Moments of the Meixner Distribution). *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, no. 75-2, pp. 47–51. (in Russ.).
9. Tokmachev M.S. *Veroyatnostnye raspredeleniya: ot kharakterizatsii k chislovym mnozhestvam* (Probability Distributions: from Characterization to Numerical Sets). Saarbryukken, LAP LAMBERT, 2018, 224 p.
10. Tokmachev M.S. Evaluation of Integrals for some Class of Functions with Probabilistic Interpretation. *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2014, no. 80, pp. 42–46. (in Russ.).
11. Sveshnikov A.A. (ed.) *Sbornik zadach po teorii veroyatnostey, matematicheskoy statistike i teorii sluchaynykh funktsiy* (Collection of Tasks on probability theory, mathematical statistics and theory of random functions). Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2008, 448 p. (in Russ.).
12. Pugachev V.S. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* (Probability Theory and Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1979, 496 p. (in Russ.).

13. Lukach E. *Kharakteristicheskie funktsii* (Characteristic Functions). Moscow, Nauka Publ., 1979, 424 p. (in Russ.).

14. Ramachandran B. *Teoriya kharakteristicheskikh funktsiy* (Theory of Characteristic Functions). Moscow, Nauka Publ., 1975, 223 p. (in Russ.).

15. Kagan A.M., Linnik Yu.V., Rao S.R. *Kharakterizatsionnye zadachi matematicheskoy statistiki* (Characterization Problems of Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1972, 656 p. (in Russ.).

16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis). Moscow: Nauka Publ., 2004, 570 p. (in Russ.).

17. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostey* (Probability theory). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1969, 576 p. (in Russ.).

18. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya. T. 2* (An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2). Moscow, Mir Publ., 1984, 751 p. (in Russ.).

Received February 19, 2026

Information about the author

Tokmachev Mikhail Stepanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Yaroslavl the Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation, e-mail: mtokm@yandex.ru.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РАЗРУШЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А.Е. Краус

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация
E-mail: akraus@itam.nsc.ru*

Аннотация. Проведено исследование динамического нагружения гетерогенных преград двух типов: металлокерамической (V_4C + сталь 4340), взаимодействующей с высокотвёрдым стержнем, и металлической (сталь 4340 + алюминиевый сплав Al 7075), взаимодействующей со сферическим налетающим телом из высокотвёрдой стали. Диапазон скоростей соударения составлял 200–2000 м/с. Поведение гетерогенного материала описывалось двумя подходами: аддитивной моделью смеси и прямым численным моделированием. На основе анализа остаточной скорости стержня после взаимодействия с преградой проведено сравнение предельных деформаций разрушения (растягивающих, сжимающих и сдвиговых) гетерогенных материалов в зависимости от свойств и объёмной концентрации компонентов. В результате впервые получено соотношение, связывающее предельную деформацию разрушения гетерогенного материала с предельными деформациями разрушения и концентрацией его компонентов.

Ключевые слова: гетерогенный материал; предельные деформации разрушения; баллистический предел; динамическое нагружение; баллистические кривые; численное моделирование.

Введение

Исследование динамического отклика гетерогенных материалов при высокоскоростном нагружении является фундаментальной задачей современной механики твёрдого тела быстропротекающих процессов. Актуальность обусловлена их применением в аэрокосмической, авиационной и других отраслях, где требуется сочетание высокой прочности и низкой плотности материала. В отличие от однородных сред, поведение таких материалов осложняется волновыми взаимодействиями на межфазных границах. При микросекундных временах нагружения это инициирует множественные, конкурирующие механизмы разрушения (межфазное расслоение, фрагментация), что делает прогнозирование их баллистической стойкости и энергопоглощающей способности нетривиальной научной задачей.

Технологии изготовления переопределяют подходы к созданию защитных структур, делая акцент на управлении их внутренней архитектурой [1–4]. Трудностью проектирования остается отсутствие методик, связывающих параметры структуры с ее динамическими параметрами. Формализация критериев предельного состояния для гетерогенных сред позволит перейти к направленному проектированию материалов с заданной динамической прочностью.

Прогнозирование динамического отклика и предельных состояний гетерогенных материалов остается нетривиальной задачей современной механики. Как отмечается в обзоре [5], несмотря на многообразие существующих подходов (от уравнений модели Джонсона–Кука до нейросетевых алгоритмов), корректное описание конкуренции процессов деформационного упрочнения и температурного разупрочнения, например, в алюмоматричных композитах, требует дальнейшей доработки определяющих уравнений.

В [6] предложена модифицированная модель Джонсона–Кука, которая интегрирована с критерием полного разрушения, основанным на плотности энергии деформации. Этот подход позволил аналитически формализовать предельные состояния композита $V_4C/2024Al$, обеспечив высокую точность прогнозирования распространения трещин и пластической деформации.

Параллельно с уточнением критериев разрушения ведется поиск конструктивных оптимальных решений для повышения предельных характеристик. Так, в работе [7] демонстрируется, что аналитически обоснованное варьирование показателя градиента состава в функционально-градиентных материалах В₄С/Al позволяет управлять распространением волн напряжений и, как следствие, максимизировать эффективность защиты. Совокупность этих исследований свидетельствует о том, что разработка универсальных аналитических зависимостей, связывающих микроструктурные параметры с макроскопическими предельными характеристиками, остается ключевым вектором развития динамики гетерогенных материалов.

Моделирование процессов разрушения требует задания набора предельных параметров материала. Однако если для гомогенных материалов эти параметры, как правило, известны, то экспериментальное определение для гетерогенных материалов со сложной внутренней структурой (например, изготовленных по технологии PrintCast [8]) представляет собой нетривиальную научно-техническую задачу. Для преодоления этой сложности в работах [9, 10] предложен подход к прямому численному моделированию, позволяющий прогнозировать макроскопический отклик материала, опираясь лишь на известные свойства составляющих его фаз. В основе подхода лежит замкнутая упругопластическая дискретная модель, в которой мезоструктура материала с заданными параметрами включений генерируется стохастически. Применение данного подхода позволило детально описать процессы высокоскоростной деформации и разрушения материалов со сложной объемно-армированной структурой [11–13].

Следует отметить, что в механике композитов широко применяется подход, основанный на гомогенизации, при котором гетерогенная среда заменяется эквивалентной гомогенной с «эффективными» свойствами. Однако границы применимости таких усредненных моделей, особенно для динамических задач, требуют тщательного анализа, поскольку они могут не учитывать важные эффекты, связанные с мезоструктурой. Именно этот аспект исследуется в работе [14], где показано, что в периодически неоднородных средах формирование ударного фронта может быть отсрочено за счет структурной дисперсии. Авторы численно подтвердили, что гомогенизированная модель корректно предсказывает скорость ударной волны, но лишь при условии, что дисперсионные эффекты, обусловленные мезоструктурой, остаются малыми.

Цель работы и постановка задачи

Цель данной работы – провести оценку предельных деформаций разрушения гетерогенного материала на основе сравнения двух моделей динамически нагруженной гетерогенной среды.

Моделирование динамических процессов проводилось в пакете «Reactor3D» [10, 15], уравнения баланса – в постановке Лагранжа [16]. Дискретизация области выполняется на адаптивных сетках, состоящих из тетраэдральных ячеек, что обеспечивает высокую точность при моделировании больших пластических деформаций. В качестве термодинамической модели выбрано малопараметрическое уравнение состояния [17], преимуществом которого является простая идентификация параметров.

Моделирование накопления повреждений и последующего разрушения основано на отслеживании эволюции напряжённо-деформированного состояния в каждом элементе расчётной области [18, 19]. Согласно теории деформационных состояний, для произвольной материальной точки существует ортогональный базис, в котором тензор деформаций принимает диагональный вид, то есть реализуются только нормальные компоненты: растяжение, сжатие. Соответствующие величины представляют собой главные деформации: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, при этом выполняется условие $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. Алгоритм вычисления главных деформаций при динамическом нагружении детально изложен в [20]. Критерий разрушения формулируется следующим образом: если хотя бы одна из главных деформаций достигает предельного значения, характерного для данного материала, а именно $\varepsilon_1 > \varepsilon_1^*$ или $\varepsilon_\tau > \varepsilon_\tau^*$, материал считается утратившим несущую способность при растяжении и сдвиге, сохраняя при этом сопротивление сжатию.

Описание моделей гетерогенного материала

Для описания реакции гетерогенного материала на динамическое нагружение в «Reactor3D» реализованы две модели: прямое численное моделирование гетерогенного материала и аддитивная модель смеси.

$$\alpha_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^k m_j} \cup \sum \alpha_i = 1. \quad (1)$$

Аддитивная модель смеси позволяет представить гетерогенный материал в виде однородной среды с осредненными параметрами, выраженными через концентрации компонент [21–23]. При этом выполняется условие нормировки концентраций (1), согласно которому сумма концентраций всегда равна единице. Итоговые характеристики материала, такие как энергия, теплоемкость, плотность и другие параметры, могут быть выражены как взвешенная сумма соответствующих свойств отдельных компонентов, пропорционально их концентрации. В рамках аддитивного приближения предполагается, что при заданном давлении суммарный объем ударно-сжатой смеси равен сумме объемов ее компонент, определенных по ударным адиабатам при тех же условиях нагружения.

При прямом численном моделировании гетерогенная среда описывается как совокупность областей, заполненных индивидуальными компонентами с заранее определёнными объёмными долями [9, 10]. Каждой расчётной ячейке присваивается полный набор физико-механических характеристик соответствующего компонента. Сопряжение смежных ячеек обеспечивается условиями неразрывности перемещений узловых точек, что гарантирует непрерывность поля деформаций на межкомпонентных границах (2). Разрыв свойств при переходе между ячейками, принадлежащими различным компонентам, учитывается алгоритмом явным образом. Наименьший характерный размер неоднородности определяется шагом конечно-разностной сетки. Граничные условия для репрезентативной ячейки, подвергаемой воздействию фронта ударной волны, задаются в соответствии с рис. 1.

$$\sigma_n(x_k, t) = F(x_k, t), x_k \in \Gamma_1; u_1(x_k, t) = 0, x_k \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4; \sigma_{ij} n_j^+ = \sigma_{ij} n_j^-; u_i^+ = u_i^-, x_k \in \Gamma_5, \quad (2)$$

где n_j^+ , n_j^- – компоненты вектора нормали к поверхностям границы между включениями.

Прямое численное моделирование основывается на явном учёте реальной микроструктуры гетерогенного материала. В рамках подхода моделируется поведение каждой отдельной фазы или компонента с разрешением всех характерных пространственных и временных масштабов, что позволяет воспроизводить сложные процессы деформирования, разрушения, образования кратера и формирования запреградного облака с высокой степенью детализации. Такой подход требует значительных вычислительных ресурсов, однако обеспечивает получение полной картины разрушения гетерогенного материала с неизвестными из эксперимента критериями разрушения, что невозможно получить в рамках аддитивной модели. Так в [24] с помощью прямого численного моделирования успешно проведена идентификация свойств и величины предельного откольного разрушения гетерогенных материалов.

Таким образом, основное принципиальное отличие между аддитивной моделью смеси и прямым численным моделированием заключается в степени доступности описания процессов разрушения. Аддитивная модель, по своей сути, не способна определять осреднённые параметры разрушения, поскольку игнорирует микроструктурные эффекты и механизмы взаимодействия между компонентами. В то же время прямое численное моделирование предоставляет такие возможности, позволяя не только количественно оценивать параметры разрушения, но и выявлять их зависимость от структуры и свойств материала.

Определение предельных деформаций

Касательно критерия предельных напряжений разрушения в динамических задачах, удобно воспользоваться предельным откольным напряжением. В рамках применения этого критерия для разрушения гетерогенного материала в исследовании [24] предложено уравнение (3), нацеленное

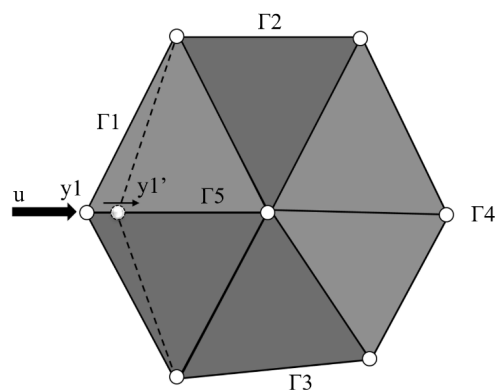


Рис. 1. Граничные условия ячейки гетерогенного материала

на определение предельного эффективного откольного напряжения для гетерогенного материала на основе параметров компонент и их концентраций. Такое соотношение даёт возможность оценивать откольные характеристики гетерогенного материала по концентрациям составляющих и их свойствам ещё на этапе проектирования материала, что может быть использовано для подбора необходимых концентраций или компонентов с целью достижения требуемых предельных характеристик эксплуатации материала.

$$\sigma_{sp_mix} = \frac{\sum_{i=1}^k \rho_{0i} \beta_i \sigma_{sp_i}}{\rho_{0mix}}. \quad (3)$$

Однако использование только предельного откольного напряжения в качестве критерия разрушения является недостаточным, необходимо также учитывать предельные деформации. Для откольного разрушения разработан ряд экспериментальных методик, позволяющих определить соответствующие параметры, однако экспериментальное определение предельных деформаций разрушения остаётся сложной задачей.

Идея оценки эффективных параметров разрушения, используемых в аддитивной модели смеси, основана на последующей аппроксимации данных по концентрации и свойствам компонентов. Предложенный подход основан на сопоставлении результатов, полученных с помощью аддитивной модели смеси и прямого численного моделирования. Многовариантные расчёты в рамках прямого моделирования, в котором разрушение реализуется на масштабе отдельных компонентов без использования осреднённых критериев, формируют массив данных, отражающий зависимость характеристик разрушения от объёмного содержания и свойств, составляющих гетерогенного материала

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (4)$$

где ε_v – объёмные деформации, V_0 – начальный объём, ΔV – изменение объёма, ε – линейные деформации вдоль главных осей.

Аналитическое описание предельных деформаций разрушения гетерогенного материала может быть построено на основе следующих рассуждений. В рамках аддитивной модели смеси объёмные деформации однозначно определяют массовую концентрацию компонентов гетерогенного тела через соотношение (4). При наложении ограничения в виде закона сохранения массы данная связь позволяет выразить эффективные предельные деформации разрушения как функцию объёмных долей и индивидуальных деформационных характеристик каждого из компонентов:

$$\varepsilon_{v(mix)} = \frac{\Delta V \cdot m}{V_0 \cdot m} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_{vi}. \quad (5)$$

Соответственно, из выражения (5) можно получить соотношение справедливое для главных деформаций, которые и используются в качестве предельных критериев разрушения по деформациям:

$$\varepsilon_{mix} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_i. \quad (6)$$

Для валидации соотношения (6) выбрана задача высокоскоростного внедрения, отличающаяся сложным характером разрушения. Материал стержня [25] подобран таким образом, чтобы его собственная пластическая деформация в процессе взаимодействия оставалась пренебрежимо малой. Гетерогенная преграда толщиной 7,5 см, состоящая из керамики В₄С [26] и сплава стали 4340 [27], подвергалась воздействию. Геометрия и постановка задачи отражены на рис. 2. Прямое численное моделирование в данной конфигурации обеспечивает описание разрушения на

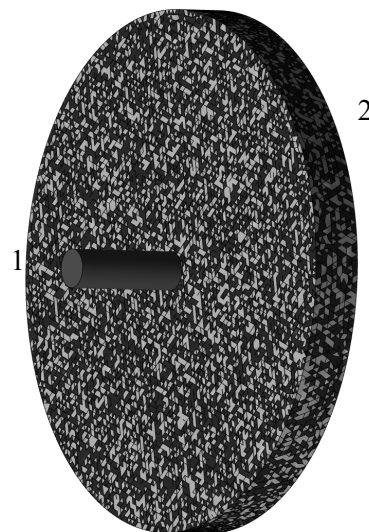


Рис. 2. Схема расчета: 1 – налетающий стержень, 2 – тонкая преграда

основе предельных деформационных характеристик индивидуальных компонентов преграды, значения которых приведены в таблице.

Механические свойства исследуемых материалов

Материал	ρ , г/см ³	C_0 , км/с	λ	G , ГПа	K , ГПа	Y , ГПа	σ_{sp} , ГПа	ε_1 , %
В ₄ С [26, 28]	2,52	8,11	1,61	178,94	214,8	11,85	11,95	5
Сталь 4340 [27]	7,87	4,57	1,49	80,0	168,11	1,0	7,5	33
Al7075 [17]	2,79	5,33	1,34	27,86	75,71	0,52	0,571	10

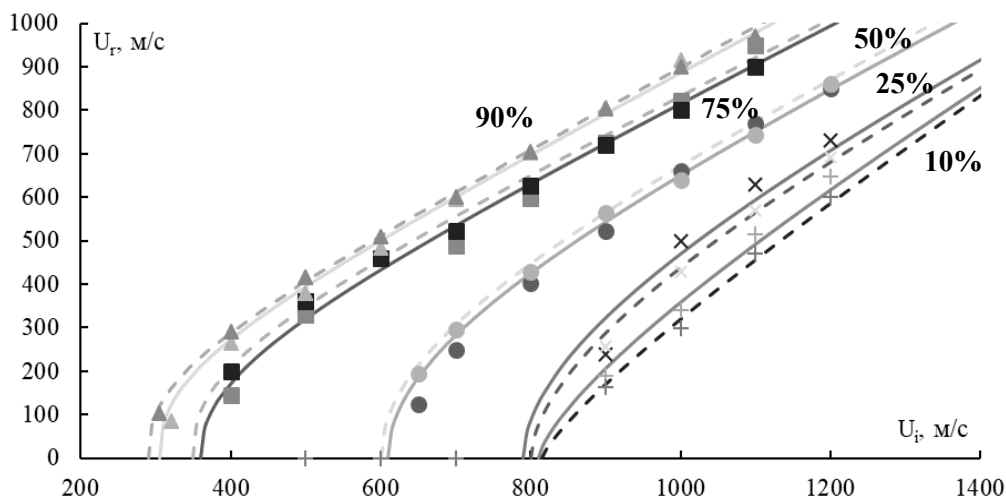


Рис. 3. Баллистические кривые гетерогенной преграды (в процентах указана концентрация керамики В₄С); сплошная линия – аддитивная модель смеси; пунктирная линия – прямое численное моделирование

Для аддитивной модели смеси эффективные параметры разрушения гетерогенного материала определим при помощи соотношений (3) и (6). В качестве критерия верификации соотношений используем связь начальной скорости внедрения стержня и остаточной скорости, что является баллистической кривой гетерогенной преграды.

$$U_r = a(U_i^p - U_b^p)^{1/p}, \quad U_i > U_b, \quad (7)$$

где U_i, U_r, U_b – скорость удара, остаточная скорость и величина баллистической скорости, a, p – постоянные, зависящие от свойств материалов и геометрии соударяющихся объектов.

На рис. 3 показаны результаты моделирования в виде баллистических кривых, построенных по аппроксимации (7) Ламберта–Джонасана [29]. Кривые демонстрируют, что остаточные скорости стержня после взаимодействия с пластинами, содержащими различную концентрацию керамики, отличаются не более чем на 5 % для обеих моделей. Таким образом можно заключить, что соотношения (3) и (6) позволяют провести моделирование разрушения гетерогенного материала аддитивной моделью, смести в соответствии с моделью прямого численного моделирования, а эффективные предельные деформации гетерогенного материала можно успешно описывать через соотношение (6).

Результаты аддитивной модели смеси с эффективными параметрами из (3) и (6) и прямого численного моделирования дополнительно рассмотрены на задачах о внедрении налетающего металлического сферического тела в массивную преграду, т. е. масса преграды значительно превышает массу частицы. В рамках такой задачи существует понятие моделирующей кривой Златина, полученной из исследований механизмов внедрения металлических тел в преграду [30–32]. В основе работы лежит отношение кинетической энергии налетающего тела к прочностным характеристикам преграды.

Рассмотрена задача высокоскоростного нагружения сферическим телом с радиусом 2 см из высокотвердого сплава в гетерогенную преграду. Преграда моделировалась цилиндрическим блоком с радиусом 120 см и толщиной 50 см, что позволяет определить ее как массивную преграду. Материал преграды представляет собой композицию стали 4340 и алюминиевого сплава Al7075, механические характеристики которых взяты из [8, 13]. Диапазон скоростей взаимодействия – от 1,0 до 2,0 км/с. Расчетная схема представлена рис. 4.

Из результатов расчетов показано, что аддитивная модель смеси с эффективными параметрами из (3) и (6) соответствует прямому численному моделированию в пределах доверительной погрешности 15 %. На рис. 5 показана зависимость отнесенного объема кратера к объему налетающего сферического тела от начальной скорости взаимодействия. Рассмотренный диапазон концентраций – от 10 до 90 % объемной доли Al7075. Дискретные точки соответствуют результатам численного расчета, сплошные линии – их аппроксимации методом наименьших квадратов. Зависимость объема кратера от скорости удара носит немонотонный характер, что наблюдается для всех исследованных составов гетерогенного материала, независимо от концентрации алюминия.

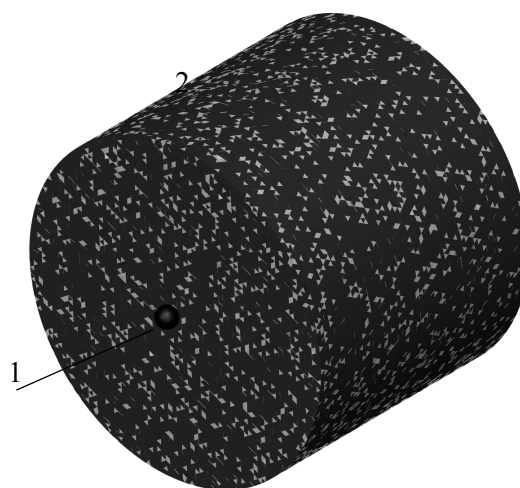


Рис. 4. Схема постановки: 1 – сферическое тело из высокотвёрдого сплава; 2 – гетерогенная массивная преграда

Резюмируя, предложенное соотношение (6) обеспечивает оценку эффективных деформаций разрушения гетерогенных сред. Сопоставление с результатами прямого численного моделирования демонстрирует расхождение менее 15 %. Установленная зависимость подтверждает аддитивный характер формирования предельных свойств композита в зависимости от концентрации и характеристик его компонентов.

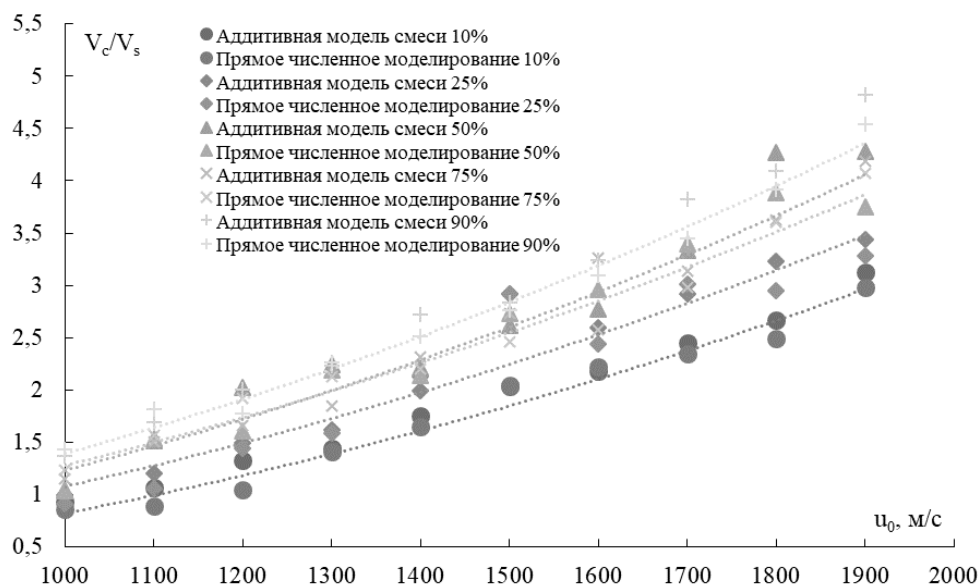


Рис. 5. Зависимость относительного объема кратера от скорости налетающего сферического тела

Оценка предела текучести гетерогенного материала

Заключительная часть исследования посвящена анализу поведения у гетерогенного материала динамического предела текучести от свойств включений. С этой целью использована описанная выше конфигурация нагружения массивной преграды, рассмотренная в иной постановке в соответствии с [16], подтверждающей корректность данного соотношения для условий высокоскоростного взаимодействия. Высокая твёрдость материала налетающего сферического тела позволяет считать изменение его объёма при взаимодействии пренебрежимо малым, что обосновывает применение соотношения (8), устанавливающего баланс между удельной кинетической энергией налетающего тела и сопротивлением материала исследуемого образца.

$$\frac{1}{2} \rho_s U^2 = \frac{V_c}{V_s} Y_t, \tag{8}$$

где Y_i – предел текучести массивной преграды, ρ_s – плотность налетающего сферического тела, U – скорость налетающего сферического тела, V_c , V_s – объем кратера и начальный объем сферического тела.

$$Y_{mix} = \sum_i \alpha_i Y_i. \quad (9)$$

Проведен сравнительный анализ результатов, полученных с использованием обеих моделей, демонстрирующий, что динамический предел текучести, из анализа морфологии кратера по соотношению (8) в преграде, построенной прямым численным моделированием, соответствует значению, рассчитанному по формуле (9) в пределах 15 % погрешности. Известно, что отношение объема кратера к объему сферы линейно зависит от отношения кинетической энергии сферического тела к динамическому пределу текучести преграды. Следовательно, при корректном определении предела текучести расчетные точки для всех концентраций композита должны группироваться вдоль единой прямой, что показано на рис. 6 для всего диапазона исследованных концентраций Al7075.

В заключение можно сказать, что методы определения эффективных параметров гетерогенного материала, описанные в работе, позволяют в пределе погрешности около ~15 % оценить прочностные характеристики гетерогенного материала или спроектировать их под требуемые эксплуатационные задачи.

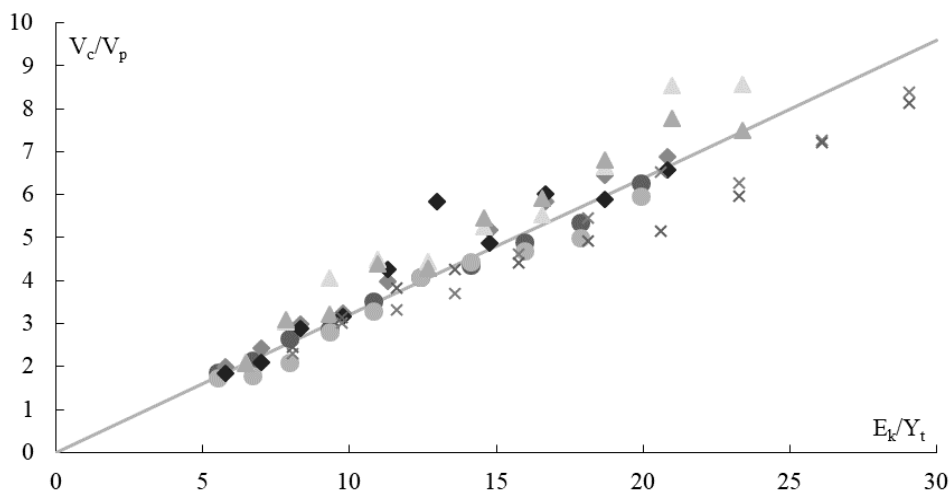


Рис. 6. Зависимость относительного объема кратера от кинетической энергии налетающего сферического тела для рассмотренных концентраций Al7075 в гетерогенной преграде

Выводы

1. Динамический предел текучести гетерогенной структуры может быть достоверно аппроксимирован линейной комбинацией пределов текучести её компонентов, взвешенных по их массовым долям.

2. Впервые на основе серии численных экспериментов выведено аналитическое соотношение, связывающее эффективную предельную деформацию разрушения гетерогенной среды с параметрами деформаций и объемной концентрацией её компонент.

3. Установлено количественное соответствие результатов прямого численного моделирования с результатами, полученными в рамках аддитивной модели смесей, учитывающей теоретическую оценку физико-механических параметров.

4. Разработана методология идентификации предельных деформаций для металломатричных композитов, характеризующихся сложным механизмом разрушения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН № 124021400036-7.

Литература

1. Anisotropy and Heterogeneity of Microstructure and Mechanical Properties in Metal Additive Manufacturing: A Critical Review / Y. Kok, X.P. Tan, P. Wang *et al.* // *Materials & Design.* – 2018. – Vol. 139. – P. 565–586.

2. Additive Manufacturing of Metallic Components – Process, structure and properties / T. DebRoy, H.L. Wei, J.S. Zuback *et al.* // *Progress in Materials Science*. – 2018. – Vol. 92. – P. 112–224.
3. Создание функционально-градиентного материала методом аддитивного лазерного сплавления / В.М. Фомин, А.А. Голышев, А.Г. Маликов и др. // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2020. – Т. 61, № 5. – С. 224–234.
4. Создание металлокерамических структур на основе Ti, Ni, WC и B₄C с применением технологии лазерной наплавки и холодного газодинамического напыления / Фомин В.М., Голышев А.А., В.Ф. Косарев и др. // *Физическая мезомеханика*. – 2019. – Vol. 22, no. 4. – С. 5–15.
5. A Review of Dynamic Mechanical Behavior and the Constitutive Models of Aluminum Matrix Composites / S. Li, T. Luo, Z. Chao *et al.* // *Materials*. – 2024. – Vol. 17, no. 8. – P. 1879.
6. Dynamic Compressive Behavior, Constitutive Modeling, and Complete Failure Criterion of 30 Vol.% B₄C/2024Al Composite / Q. Yan, Z. Zhao, T. Luo *et al.* // *Materials*. – 2025. – Vol. 18, no. 5. – P. 1–18.
7. Ballistic Performance of Functionally Graded B₄C/Al Composites without Abrupt Interfaces: Experiments and Simulations / Y. Wang, Q. Liu, B. Zhang *et al.* // *Journal of Materials Research and Technology*. – 2023. – Vol. 25. – P. 1011–1029.
8. Hypervelocity Impact of PrintCast 316L/A356 Composites / L.L. Poole, M. Gonzales, M.R. French *et al.* // *International Journal of Impact Engineering*. – 2020. – Vol. 136, no. June 2019. – P. 103407.
9. Kraus, A.E. A Heterogeneous Medium Model and Its Application in a Target Perforation Problems / A.E. Kraus, E.I. Kraus, I.I. Shabalin // *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials*. – 2021. – Vol. 141. – P. 289–304.
10. Высокоскоростное взаимодействие гетерогенных материалов / В.М. Фомин, Е.И. Краус, И.И. Шабалин и др. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2025. – 437 с.
11. Shape of Fragments Cloud behind Heterogeneous Screen by a Space Debris Particle Impact / A.E. Buzyurkin, V.M. Fomin, A.E. Kraus *et al.* // *Acta Astronautica*. – 2025. – Vol. 226, no. P1. – P. 169–177.
12. Influence of Thin-Barrier Geometry on the Morphology of the Debris Cloud in Interactions with Space-Debris Fragments / A.E. Kraus, A.E. Buzyurkin, I.I. Shabalin *et al.* // *Acta Astronautica*. – 2026. – Vol. 238. – P. 569–581.
13. Numerical Modelling of High-Speed Loading of Periodic Interpenetrating Heterogeneous Media with Adapted Mesostructure / A. Kraus, A. Buzyurkin, I. Shabalin, E. Kraus // *Applied Sciences*. – 2023. – Vol. 13, no. 12. – P. 7187.
14. Ketcheson, D.I. Effective Rankine-Hugoniot Conditions for Shock Waves in Periodic Media / D.I. Ketcheson, M. Quezada de Luna // *Communications in Mathematical Sciences*. – 2020. – Vol. 18, no. 4. – P. 1023–1040.
15. Патент № 2024681904. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024684051. Программный комплекс моделирования процесса динамического взаимодействия гомогенных и гетерогенных деформируемых твердых тел «Reactor3D»: опублик. 2024 / А.Е. Краус, Е.И. Краус, И.И. Шабалин; заявитель и правообладатель Российская Федерация, ИТПМ СО РАН. – 1 с.
16. Бузюркин А.Е., Краус А.Е., Краус Е.И., Шабалин И.И. Определение эффективного динамического предела текучести гетерогенных материалов // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2024. – Т. 65, № 3(385). – С. 142–151.
17. Kraus, A.E. Reactor 3D Software Performance on Penetration and Perforation Problems / A.E. Kraus, E.I. Kraus, I.I. Shabalin // *Behavior of Materials under Impact, Explosion, High Pressures and Dynamic Strain Rates*, vol. 176 / eds. M.Y. Orlov, P.M. Visakh. – Springer, 2023. – P. 83–101.
18. Пробитие ледяных преград конечной толщины стальными ударниками / Е.И. Краус, А.Ю. Мельников, В.М. Фомин, И.И. Шабалин // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2019. – Т. 60, № 3. – С. 146–153.
19. Моделирование ударных воздействий на конструкцию в проблеме обеспечения безопасности космических ЯЭУ / М.Ю. Федоров, Е.И. Краус, В.М. Фомин, И.И. Шабалин // *Вестник Моск. авиац. ин-та*. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 49–53.
20. Новожилов, В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

21. Николаевский В.Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ / В.Н. Николаевский // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1969. – № 3. – С. 82–88.

22. Дремин А.Н., Карпухин И.А. Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ // Прикладная механика и техническая физика. – 1960. – Т. 1, № 3. – С. 184–188.

23. Краус, Е.И. Учет электронных составляющих в уравнении состояния при расчете ударных волн в смеси металлов / Е.И. Краус, В.М. Фомин, И.И. Шабалин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2001. – № 9. – С. 78–84.

24. Идентификация свойств и величины предельного откольного разрушения гетерогенных материалов в динамических процессах / А.Е. Краус, А.Е. Бузюркин, И.И. Шабалин, Е.И. Краус // Физическая мезомеханика. – 2024. – Т. 27, № 1. – С. 64–80.

25. Краус, А.Е. Стойкость керамик к удару в численном эксперименте / А.Е. Краус, Е.И. Краус, И.И. Шабалин // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 5. – С. 190–198.

26. Моделирование реакции гетерогенных металлокерамических образцов, созданных с помощью аддитивных технологий, на динамическое воздействие / А.Е. Бузюркин, А.Е. Краус, Е.И. Краус и др. // Физическая мезомеханика. – 2024. – Т. 27, № 5. – С. 34–50.

27. Kraus, A.E. Simulation of a Group Impact on a Heterogeneous Target of Finite Thickness / A.E. Kraus, E.I. Kraus, I.I. Shabalin // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021. – Vol. 14, no. 6. – P. 700–711.

28. Экспериментальное исследование влияния лазерной обработки на сопротивление металлокерамического покрытия к высокоскоростному соударению / В.М. Фомин, А.А. Голышев, А.Г. Маликов и др. // Инженерно-физический журнал. – 2022. – Т. 95, № 7. – С. 1821–1827.

29. Зукас, Д.А. Динамика удара / Д.А. Зукас, Т. Николас, Х.Ф. Свифт и др. – М.: Мир, 1985. – 296 с.

30. Витман, Ф.Ф. О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании. 1. Состояние и теория вопроса / Ф.Ф. Витман, Н.А. Златин // Журнал технической физики. – 1963. – Т. 33, № 6. – С. 982–989.

31. Беляков, Л.В. О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании. 2. О моделировании удара шара по полупространству / Л.В. Беляков, Ф.Ф. Витман, Н.А. Златин // Журнал технической физики. – 1963. – Т. 33, № 9. – С. 900–995.

32. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Н.А. Златин, А.П. Красильщиков, Г.И. Мишин, Н.Н. Попов. – М.: Наука, 1974. – 344 с.

Поступила в редакцию 13 марта 2026 г.

Сведения об авторе

Краус Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: akraus@itam.nsc.ru.

**DETERMINATION OF THE ULTIMATE FRACTURE DEFORMATIONS
OF HETEROGENEOUS MATERIALS UNDER THE CONDITIONS
OF HIGH-SPEED INTERACTION****A.E. Kraus***Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation**E-mail: akraus@itam.nsc.ru*

Abstract. This paper examines the dynamic loading of two types of heterogeneous barriers: metal-ceramic (B_4C + steel 4340) in contact with a high-hardness rod and metallic (steel 4340 + aluminum alloy Al 7075) in contact with a spherical impinging body made of highly rigid steel. The impact velocities ranged from 200 to 2000 m/s. The behavior of a heterogeneous material was described using two approaches: the additive mixture model and direct numerical modeling. Based on the analysis of the residual velocity of the rod after interaction with an obstacle, the ultimate failure strains (tensile, compressive, and shear) of the heterogeneous materials were compared, depending on the properties and volume concentration of the components. This resulted in the first relationship that links the ultimate failure strain of a heterogeneous material with the ultimate failure strains and concentration of its components.

Keywords: heterogeneous material; ultimate failure strains; ballistic limit; dynamic loading; ballistic curves; numerical modeling.

References

1. Kok Y., Tan X.P., Wang P., Nai M.L.S., Loh N.H., Liu E., Tor S.B. Anisotropy and Heterogeneity of Microstructure and Mechanical Properties in Metal Additive Manufacturing: A Critical Review. *Materials & Design*, 2018, Vol. 139, pp. 565–586. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.11.021
2. DebRoy T., Wei H.L., Zuback J.S., Mukherjee T., Elmer J.W., Milewski J.O., Beese A.M., Wilson–Heid A., De A., Zhang W. Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties. *Progress in Materials Science*, 2018, Vol. 92, pp. 112–224. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001
3. Fomin V.M., Golyshev A.A., Malikov A.G., Orishich A.M., Filippov A.A. Sozdanie funktsional'no-gradientnogo materiala metodom additivnogo lazernogo splavleniya (Creation of a Functional Gradient Material by Additive Laser Fusion). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2020, Vol. 61, no. 5, pp. 224–234. DOI: 10.15372/PMTF20200523
4. Fomin V.M., Golyshev A.A., Kosarev V.F., Malikov A.G., Orishich A.M., Filippov A.A. Deposition of Cermet Coatings on the Basis of Ti, Ni, WC, and B by Cold Gas Dynamic Spraying with Subsequent Laser Irradiation. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2019, Vol. 22, no. 4, pp. 5–15. DOI: 10.24411/1683-805X-2019-14001
5. Li S., Luo T., Chao Z., Jiang L., Han H., Han B., Du S. A Review of Dynamic Mechanical Behavior and the Constitutive Models of Aluminum Matrix Composites. *Materials*, 2024, Vol. 17, no. 8, p. 1879. DOI: 10.3390/ma17081879
6. Yan Q., Zhao Z., Luo T., Li F., Zhao J., Chao Z., Liu S., Mei Y., Zhou F. Dynamic Compressive Behavior, Constitutive Modeling, and Complete Failure Criterion of 30 Vol.% $B_4C/2024Al$. *Composite Materials*, 2025, Vol. 18, no. 5, pp. 1–18. DOI: 10.3390/ma18051170
7. Wang Y., Liu Q., Zhang B., Wang H., Hazell P.J., Han Z., Li J., Li B., Li L., Liu F., Ye F. Ballistic Performance of Functionally Graded B_4C/Al Composites without Abrupt Interfaces: Experiments and Simulations. *Journal of Materials Research and Technology*, 2023, Vol. 25, pp. 1011–1029. DOI: 10.1016/j.jmrt.2023.06.021

8. Poole L.L., Gonzales M., French M.R., Yarberr W.A., Moustafa A.R., Cordero Z.C. Hypervelocity impact of PrintCast 316L/A356 composites. *International Journal of Impact Engineering*, 2020, Vol. 136, no. June 2019, p. 103407. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2019.103407
9. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. A Heterogeneous Medium Model and Its Application in a Target Perforation Problems. *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials, Vol. 141*. Springer, 2021, pp. 289–304. DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2_22
10. Fomin V.M., Kraus E.I., Shabalin I.I., Kraus A.E., Buzyurkin A.E. Vysokoskorostnoe vzaimodeystvie geterogennykh materialov (High-Speed Interaction of Heterogeneous Materials). Novosibirsk, SO RAN Publ., 2025, 437 p. DOI: 10.53954/9785605099697
11. Buzyurkin A.E., Fomin V.M., Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. Shape of Fragments Cloud behind Heterogeneous Screen by a Space Debris Particle Impact. *Acta Astronautica*, 2025, Vol. 226, no. P1, pp. 169–177. DOI: 10.1016/j.actaastro.2024.10.036
12. Kraus A.E., Buzyurkin A.E., Shabalin I.I., Fomin V.M., Kraus E.I. Influence of Thin-Barrier Geometry on the Morphology of the Debris Cloud in Interactions with Space-Debris Fragments. *Acta Astronautica*, 2026, Vol. 238, pp. 569–581. DOI: 10.1016/j.actaastro.2025.10.023
13. Kraus A., Buzyurkin A., Shabalin I., Kraus E. Numerical Modelling of High-Speed Load-ing of Periodic Interpenetrating Heterogeneous Media with Adapted Mesostructure. *Applied Sciences*, 2023, Vol. 13, no. 12, p. 7187. DOI: 10.3390/app13127187
14. Ketcheson D.I., Quezada de Luna M. Effective Rankine–Hugoniot Conditions for Shock Waves in Periodic Media. *Communications in Mathematical Sciences*, 2020, Vol. 18, no. 4, pp. 1023–1040. DOI: 10.4310/CMS.2020.V18.N4.A6
15. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. Patent no. 2024681904. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2024684051. *Programmnyy kompleks modelirovaniya protsessa dinamicheskogo vzaimodeystviya gomogennykh i geterogennykh deformiruemykh tverdykh tel "Reactor3D"* (Certificate of registration of the computer program RU 2024684051. Software package for modeling the process of dynamic interaction of homogeneous and heterogeneous deformable solids "Reactor3D") publ. 2024; zayavitel' i pravoobladatel' Rossiyskaya Federatsiya, ITPM SO RAN (Author and copyright holder Russian Federation, ITPM SB RAS), 1 p.
16. Buzyurkin A.E., Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. Determination of the Effective Dynamic Yield Strength of Heterogeneous Materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, Vol. 65, no. 3, pp. 519–527. DOI: 10.1134/S0021894424030131
17. Kraus, A.E., Kraus, E.I., Shabalin, I.I. Reactor 3D Software Performance on Penetration and Perforation Problems. In: Orlov, M.Y., Visakh P. M. (eds) Behavior of Materials under Impact, Explosion, High Pressures and Dynamic Strain Rates. *Advanced Structured Materials*, Vol. 176. Springer, Cham, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-17073-7_6
18. Kraus E.I., Melnikov A.Y., Fomin V.M., Shabalin I.I. Penetration of Steel Projectiles through Finite-Thickness Ice Targets. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, Vol. 60, no. 3, pp. 526–532. DOI: 10.1134/S0021894419030155
19. Fedorov M.Yu., Kraus E.I., Fomin V.M., Shabalin I.I. Modelirovanie udarnykh vozdeystviy na konstruktsiyu v probleme obespecheniya bezopasnosti kosmicheskikh yaeu (Modeling of Impact Effects on the Structure in the Problem of Ensuring the Safety of Space Nuclear Power Plants). *Vestnik Mosk. aviats. in-ta*, 2009, Vol. 16, no. 3, pp. 49–53. (in Russ.).
20. Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti* (Theory of Elasticity). Leningrad: Sudpromgiz Publ., 1958, 370 p. (in Russ.).
21. Nikolaevskii V.N. Hydrodynamic Analysis of Shock Adiabats of Heterogeneous Mixtures of Substances. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1969, no. 10, pp. 406–411. DOI: 10.1007/BF00916170
22. Dremine A.N., Karpukhin I.A. Metod opredeleniya udarnykh adiabat dispersnykh veshchestv (Method for Determining the Shock Adiabats of Dispersed Substances). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1960, Vol. 1, no. 3, pp. 184–188. (in Russ.).
23. Kraus E.I., Fomin V.M., Shabalin I.I. Uchet elektronnykh sostavlyayushchikh v uravnenii sostoyaniya pri raschete udarnykh voln v smesi metallov (Accounting for Electronic Components in the Equation of State when Calculating Shock Waves in a Mixture of Metals). *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2001, no. 9, pp. 78–84. (in Russ.).

24. Kraus A.E., Buzyurkin A.E., Shabalin I.I., Kraus E.I. Identification of the Spallation Properties and Spallation Threshold of Heterogeneous Materials in Dynamic Processes. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2024, Vol. 27, no. 1, pp. 64–80. (in Russ.). DOI: 10.55652/1683-805X_2024_27_1_64-80

25. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. Stoykost' keramik k udaru v chislennom eksperimente (Impact Resistance of Ceramics in a Numerical Experiment). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2020, Vol. 61, no. 5, pp. 190–198. DOI: 10.15372/PMTF20200520

26. Buzyurkin A.E., Kraus A.E., Kraus E.I., Fomin V.M., Shabalin I.I. Modeling the Response of Additively-Manufactured Heterogeneous Metal-ceramic Specimens to Dynamic Impact. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2024, Vol. 27, no. 5, pp. 34–50. DOI: 10.55652/1683-805X_2024_27_5_34-50

27. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. Simulation of a Group Impact on a Heterogeneous Target of Finite Thickness. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2021, Vol. 14, no. 6, pp. 700–711. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-6-700-711

28. Fomin V.M., Golyshev A.A., Malikov A.G., Filippov A.A., Shikalov V.S., Yadrenkin M.A., Orishich A.M. Eksperimental'noe issledovanie vliyaniya lazernoy obrabotki na soprotivlenie metallo-keramicheskogo pokrytiya k vysokoskorostnomu soudareniyu (Experimental Study of the Effect of Laser Treatment on the Resistance of a Metal-Ceramic Coating to High-Speed Impact). *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2022, Vol. 95, no. 7, pp. 1821–1827. (in Russ.).

29. Zukas D.A., Nikolas T., Swift X.F., Greshchuk L.B., Kurran D.R. *Dinamika udara* (Impact Dynamics), Moscow, Mir, 1985, 296 p. (in Russ.).

30. Vitman F.F., Zlatin N.A. O protsesse soudareniya deformiruemykh tel i ego modelirovani. 1. Sostoyanie i teoriya voprosa (On the Process of Collision of Deformable Bodies and its Modeling. 1. The State and Theory of the Issue). *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1963, Vol. 33, no. 6, pp. 982–989. (in Russ.).

31. Belyakov L.V., Vitman F.F., Zlatin N.A. O protsesse soudareniya deformiruemykh tel i ego modelirovani. 2. O modelirovani udara shara po poluprostranstvu (On the Process of Collision of Deformable Bodies and its Modeling. 2. Modeling the Impact of a Ball in a Half-Space). *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1963, Vol. 33, no. 9, pp. 900–995.

32. Zlatin N.A., Krasil'shchikov A.P., Mishin G.I., Popov N.N. *Ballisticheskie ustanovki i ikh primeneniye v eksperimental'nykh issledovaniyakh* (Ballistic Installations and their Application in Experimental Research). Moscow, Nauka Publ., 1974, 344 p. (in Russ.).

Received March 13, 2025

Information about the author

Kraus Aleksandr Evgen'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: akraus@itam.nsc.ru.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Ю.С. Найштут, В.А. Грачев

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: neustadt99@mail.ru

Аннотация. Оценивается время работы вязко-упругопластической конструкции до момента возможного разрушения в процессе длительной эксплуатации под заданной изменяющейся квазистатической нагрузкой. Прогнозирование разрушения производится после значительного срока безаварийной службы конструкции, когда в материале имеются сравнительно высокие напряжения и деформации. Материал подчиняется условию текучести Надаи–Шлейхера, в котором постоянные тензоры структуры замещены тензорами накопления повреждений, являющимися гладкими функциями от неупругих деформаций (пластичности и ползучести). Формулируется механическая модель прочностного расчета в рамках механики сплошной среды при следующих предположениях: режим вязкой работы (ползучести) считается установившимся, пластическая часть тензора деформации нормальна к поверхности нагружения, а упругая часть деформаций следует закону Гука. Математическая проблема первоначально формулируется в пространстве ограниченных деформаций, изученном школой Лионса. Это пространство естественным образом погружается в пространство обобщенных функций Соболева. Здесь методы вариационных неравенств позволяют доказать существование обобщенных решений поставленной задачи. В ходе доказательства удается установить время, когда вязко-упругопластическая конструкция разрушается. В этот момент коэффициент запаса против пластического разрушения (неограниченного течения) становится меньше единицы. Существенно, что предлагаемый алгоритм расчета может быть численно реализован.

Ключевые слова: вязко-упругопластичный материал; прогнозирование разрушения; условие текучести Надаи–Шлейхера; тензор накопления повреждений; вариационные неравенства; пространство Соболева.

Введение

После продолжительной работы несущих элементов из вязкого упругопластического материала часто возникает следующая задача: требуется определить возможное время безаварийной службы существующей конструкции, если известна история будущего нагружения. В настоящее время при анализе разрушения вязких упругопластических систем (упругопластических конструкций, подверженных ползучести) выделяют два типа исчерпания несущей способности [1]. Первый тип – вязкое разрушение при невысоких напряжениях и значительной деформации. Для описания явления используется несколько определяющих соотношений, связывающих тензор напряжения σ_{ij} и тензор скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$. Рассмотрим теорию течения, где имеет место равенство

$$H = 2\psi T, \quad T = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}, \quad H = \sqrt{2\dot{\epsilon}'_{ij}\dot{\epsilon}'_{ij}}. \quad (1)$$

В формулах (1) точка над тензором означает дифференцирование по времени, а штрих в верхнем индексе – использование девиатора. Функция ψ зависит от тензора напряжений σ_{ij} . Равенство (1) можно разрешить относительно T :

$$T = g(H)H. \quad (2)$$

На основе экспериментов обычно принимают степенную зависимость

$$g(H) = BH^{\mu-1}. \quad (3)$$

Число $m = 1/\mu$ для металлов содержится в интервале между 10 и 12. Можно проинтегрировать определяющие уравнения

$$\sigma'_{ij} = 2g(H)\varepsilon'_{ij} \quad (4)$$

в предположении несжимаемости скоростей деформации при ползучести и текучести. Результаты интегрирования (4) многих частных задач показывают, что для некоторых точек существует момент времени t^* , когда перемещения становятся бесконечными. Этот момент называют временем вязкого разрушения. Вязкое разрушение не связано с уровнем внутренних напряжений, оно равносильно тому, что в качестве критерия разрушения принимаются недопустимые перемещения характерных точек.

Кроме вязких разрушений в изучаемых конструкциях наблюдаются внезапные (хрупкие) разрушения, фиксируемые при действии длительных переменных (циклических) нагрузок. Задача, сформулированная в начале статьи, относится к этому типу. Другая часто встречающаяся задача связана с прочностью деталей, испытывающих ползучесть (элементы турбин, двигателей, разрушение которых сопровождается малыми деформациями). Хрупкие разрушения связаны с изменением в процессе эксплуатации механических свойств материала конструкции. Накапливаются дефекты: разрыхления, поры, трещины, которые в основном зависят от характера внутренних напряжений. В настоящей работе задача изучается в квазистатическом приближении (силы инерции не учитываются), режим вязкого деформирования принимается установившимся. В этих условиях уровень накопления дефектов в точке x сплошной среды характеризуют сплошностью $\psi(x)$ [1]. В начальный момент деформирования она принимается равной единице, а в момент разрушения $\psi(x) = 0$. Используется также функция поврежденности Работнова [2] $\omega(x) = 1 - \psi(x)$. Постулируется кинетическое уравнение поврежденности

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, \lambda_1 \dots \lambda_n). \quad (5)$$

Функция F зависит от сплошности $\psi(x)$ и параметров $\lambda_1 \dots \lambda_n$, характерных для конкретной задачи и определяемых экспериментально. В число параметров входят тензор напряжений, температура, время, непрерывные функции, зависящие от ε'_{ij} . Накопление повреждений в отдельных точках приводит к появлению фронтов разрушения – поверхностей Σ , отделяющих разрушенные зоны с $\psi(x) = 0$ от неразрушенных. Изучается движение фронта разрушения по координате u , нормальной к фронту Σ по кинетическому уравнению

$$\frac{d\psi_{\Sigma}}{dt} + \frac{\partial \psi_{\Sigma}}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0. \quad (6)$$

Здесь функция $\psi(t)$ принимается по уравнению (5) в точках фронта Σ . Движение фронта приводит к полному разрушению конструкции, которая преобразуется в момент t^* из односвязного тела в несколько разделенных фронтом Σ частей. Число t^* называют временем хрупкого разрушения конструкции.

Уравнения (5), (6) решены для большого числа технически важных задач, функции $F(\psi, \lambda_1 \dots \lambda_n)$ получили серьезную экспериментально-теоретическую поддержку [3, 4].

Следует сказать, что в задаче прогноза разрушения длительно эксплуатируемой конструкции приведенные выше результаты трудно практически использовать, так как время t^* определяется всей историей нагружения, начиная с отсутствия поврежденности (которая часто неизвестна). Отсутствуют на момент прогноза сведения о коэффициенте запаса несущей способности от пластического разрушения, так как расчетные формулы не содержат свойств поверхности текучести (нагружения). Поэтому представляется целесообразным переформулировать рассматриваемую задачу в традиционных для теории пластичности терминах, поскольку при такой постановке найдены эффективные способы для реализации численных расчетов.

Механическая формулировка задачи о длительной прочности идеального вязко-упругопластического тела под действием нагрузок, вызывающих накопление повреждений

Рассмотрим трехмерное тело D , ограниченное поверхностью $S = S_u + S_p$. На части поверхности S_u отсутствуют перемещения, а на S_p действуют силы X_i . Вектор перемещений в любой точке $x \in D$ обозначим u_i , а действующую объемную силу – f_i . Время действия нагрузки $[0, T]$. Напряжения σ_{ij} в теле D удовлетворяют соотношениям (7) (критерий Надаи–Шлейхера)

$$\Phi(\sigma_{ij}) = c_{ijkl}(\lambda)\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' - 2k^2 \leq 0. \quad (7)$$

Тензор c_{ijkl} – непрерывная функция, зависящая от параметра деформирования λ , которая назначается на основе экспериментального изучения материала тела D . Здесь, как и во введении, штрих в верхнем индексе обозначает девиатор тензора.

В любой момент времени t существует тензор напряжений σ_{ij}^* , уравнивающий силы X_i , f_i и лежащий внутри поверхности (7), то есть выполнено равенство

$$\int_{S_p} X_i u_i dS_p + \int_D f_i u_i dx = \int_D \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dx \quad (8)$$

с произвольным кинематически допустимым (равным нулю на поверхности S_u) вектором u_i . Здесь dx – дифференциал объема тела D , dS_p – дифференциал поверхности, $\varepsilon_{ij} = (u_{ij} + u_{ji})/2$ – тензор деформации, отвечающий u_i . Запятая означает ковариантное дифференцирование.

Для обозначения частной производной по времени над тензором ставится точка, так что скорость точек $v_i = \dot{u}_i$. Скорость деформаций, как обычно, представим в виде суммы трех тензоров (упругости, пластичности, ползучести)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}' = \dot{\varepsilon}_{ij}'^e + \dot{\varepsilon}_{ij}'^p + \dot{\varepsilon}_{ij}'^{cr} \quad (9)$$

Связь введенных девиаторов с девиаторами напряжений такова [1, 5]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}'^e = E_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \dot{\varepsilon}_{ij}'^p = \lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \dot{\varepsilon}_{ij}'^{cr} = M_{ij}(\sigma_{kl}) \quad (10)$$

В (10) E_{ijkl} – тензор модулей упругости, $\lambda_0 > 0$, если точка $x \in D$ лежит на поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$; если точка $x \in D$ не лежит на поверхности, то $\lambda_0 = 0$. Оператор M_{ij} монотонного типа [6], то есть

$$\int_D (M_{ij}(\sigma_{kl}) - M_{ij}(\tau_{ij}))(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) dx > 0. \quad (11)$$

В частности, все операторы установившейся теории ползучести, включая полиномиальный оператор (3), являются монотонными. В шаровую часть тензора ε_{ij} входит только упругая составляющая $\dot{\varepsilon}_{ii} = k_0 \dot{\sigma}_{ii}$ с постоянной k_0 .

Задача расчета вязко-упругопластического тела состоит в определении вектора перемещений u_i и тензора напряжений σ_{ij} , которые в течение времени T удовлетворяют соотношениям (7)–(10), если в начальный момент $t = 0$ известно распределение напряжений во всем теле, а перемещения u_i считаются отсутствующими. В следующем разделе приводятся математически точные условия, при которых поставленная задача имеет решение.

Существование обобщенных решений квазистатической задачи расчета вязко-упругопластических тел

Поиск возможных перемещений удобно первоначально проводить в пространстве ограниченных деформаций $BD(D)$, подробно изученном в работах [7, 8].

По определению,

$$BD(D) = \{f / f = \{f_i\}, f_i \in L^1(D), \varepsilon_{ij}(f) = \frac{1}{2}(f_{i,j} + f_{j,i}) \in M^1(D), i, j = 1, 2, 3\}, \quad (12)$$

является нереплексивным пространством с нормой $\|f\|_{BD(D)} = \sum_{i=1}^3 [f_i]_1 + \sum_{i,j=1}^3 \|\varepsilon_{ij}(f)\|_{M^1(D)}$, при этом $M^1(D)$ означает меру в области D .

Но нереплексивность $BD(D)$ может породить бесконечные напряжения, которые механически недопустимы. Нужна расширенная постановка задачи, которая производится путем размещения $BD(D)$ внутри пространства обобщенных функций.

Если обозначить пространство функций (распределений) Соболева с обобщенными производными $W^{1,1}(D)$, то имеет место включение $W^{1,1}(D) \subset BD(D)$. Любая обобщенная функция f , для которой ε_{ij} принадлежит $M^1(D)$, является элементом пространства $[L^{n/(n+1)}(D)]^n$. Вложение $BD(D) \subset [L^p(D)]^n$ непрерывно при $p = n/(n-1)$ и компактно при $1 < p < n/(n-1)$. Таким образом, любая ограниченная в $BD(D)$ последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся в $L^p(D)$. Отмеченное свойство существенно используется в дальнейших доказательствах, которые приведем, следуя [9]. Введем общепринятые определения. Обозначим через $L^p(0T, X)$ пространство измеримых функций из $[0, T]$ в X , таких, что

$$\|f(t)\|_X \in L^p(0T), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (13)$$

Относительно нормы

$$\|f\|_{L^p(0T, X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad (14)$$

$L^p(0T, X)$ является B -пространством для $1 \leq p < \infty$. При $p = \infty$ оно становится B -пространством относительно нормы

$$\|f\|_{L^\infty(0T, X)} = \operatorname{ess\,sup}_{(0,T)} \|f(t)\|_X. \quad (15)$$

Если X – гильбертово пространство, то $L^2(0T, X)$ становится гильбертовым пространством, если его наделить скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_{L^2(0T, X)} = \int_0^T (f_1(t), f_2(t))_X dt. \quad (16)$$

Если X – рефлексивное B -пространство, то $L^p(0T, X)$ при $1 < p < \infty$ также рефлексивно, а сопряженное к нему может быть отождествлено с $L^r(0T, X')$, где r – сопряженный показатель с p . Если X – нереплексивно, то сопряженным к нему служит $L^r_w(0T, X')$. Здесь индекс w указывает, что $L^r_w(0T, X')$ состоит из таких слабо измеримых функций f , что

$$\|f\|_{L^r(0T, X')} < \infty.$$

Определим множества

$$\begin{aligned} E_0 &= \{ \tau_{ij} / \tau_{ij} \in H = (\tau_{ij}, \tau_{ij}) = \int_D \tau_{ij} \tau_{ij} dx, \tau_{ij,j} \in L^3(D), \tau_{ij} n_j = 0 \text{ on } S_p, i, j = 1, 2, 3 \}, \\ U_0 &= \{ u / u_i \in [L^2(D)]^3, \varepsilon_{ij}(u_i) \in H, u_i = 0 \text{ on } S_u, i, j = 1, 2, 3 \}; \\ P(t) &= \{ \tau_{ij} / \tau_{ij} \in H, \tau_{ij}(x) \in K(x, t) \text{ in } D \}. \end{aligned} \quad (17)$$

В последней формуле $K(x, t)$ означает множество напряжений, расположенных внутри замкнутой поверхности $\Phi(\tau_{ij}) = 2k^2$.

Назначим тензор c_{ijkl} , следуя работам [10, 11]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(t) &= c_{ijkl}^0 + \Delta_{ijkl}^t, \quad \Delta_{ijkl}^t = b_{ijkl} \int_0^t d\lambda, \quad d\lambda = d\varepsilon^{/ne} = d\varepsilon^{/p} + d\varepsilon^{/cr}, \\ d\varepsilon^{/p} &= \sqrt{d\varepsilon_{ij}^{/p} d\varepsilon_{ij}^{/p}}, \quad d\varepsilon^{/cr} = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^{/cr} d\varepsilon_{ij}^{/cr}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Численные значения компонент тензора b_{ijkl} определяются экспериментально на образцах из материала, подчиняющегося критерию текучести $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ при разных величинах напряжений. Тензор b_{ijkl} естественно назвать тензором накопления повреждений. Подсчитаем коэффициент запаса от пластического разрушения k^* во время $[0, T]$ на основе кинематической теоремы по возможным путям пластической деформации со скоростями $v_i(x)$.

$$k^* = \inf_{v_i} \frac{D \int \Gamma(\varepsilon_{ij}) dx}{\int_D \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dx}. \quad (19)$$

Диссипативная функция $\Gamma(\varepsilon_{ij})$ является преобразованием Лежандра функции $\Phi(\sigma_{ij})$. Равенство $k^* = 1$ означает разрушение тела D , а t^* – время, предшествующее аварии.

Сформулируем задачу упругопластического расчета на конечном интервале $[0, T]$ в ослабленной вариационной форме. Предположим, что внешняя нагрузка и начальные напряжения таковы:

$$f_i \in W^{1,\infty}(0T, [L^3(D)]^3), \quad \sigma_{ij}(0) \in P(0) \cap E_0.$$

Требуется найти σ_{ij} из $P(t) \cap E_0$ и u_i из $BD(D)$, чтобы выполнялись соотношения

$$\left((E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} + M_{ij}(\sigma_{kl}) \dot{\sigma}_{ij}), (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \right) + \int_D u_i (\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) dx \geq 0, \quad \forall \tau_{ij} \in P(t) \cap E_0, \quad (20)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) \text{ if } t = 0, \quad k^* > 1.$$

Доказательство существования обобщенных решений системы (20) осуществляется аналогично построениям Пеано по обоснованию метода ломаных Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений [12]. Разобьем интервал интегрирования по времени на n частей:

$$\Delta t = T/n, \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Приняв в интервале $[t_0, t_1]$ напряжения неизменными по сравнению с моментом t_0 , вычислим по (20) во всех точках области величины скоростей деформаций и напряжений. Вычисление возможно, так как в работе [13] доказано, что задача (20) равносильна нахождению седловой точки функции Лагранжа

$$L(\sigma_{ij}, v_i) = \frac{1}{2} \int_M (E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + M_{ij}(\sigma_{kl}) \dot{\sigma}_{ij}) dm + \int_M (\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i) v_i dm, \quad M = D \times [0, t] \quad (21)$$

В книге [6] доказывается существование седловой точки этого оператора, так как (21) является положительно определенным квадратичным функционалом в силу монотонности оператора M_{ij} . В момент t_1 примем

$$\sigma_{ij}(t_1) = \sigma_{ij}(t_0) + \Delta t \dot{\sigma}_{ij}(t_0), \quad u_i(t_1) = u_i(t_0) + \Delta t v_i(t_0). \quad (22)$$

Формулы (18), (19), (22) позволяют найти тензор $c_{ijkl}(t_1)$ и величину $k^*(t_1)$ в момент t_1 . Если $k^*(t_1) > 1$, то можно сделать расчет на отрезке времени $[t_1, t_2]$ по аналогии с предыдущим, найти напряжения и перемещения при $t = t_2$. В случае $k^*(t_2) > 1$ следует продолжать вычисления до момента t_n , когда число $k^*(t_n)$ станет меньше единицы. Затем нужно разбить интервал времени $[0, T]$ на большее число отрезков $N^\wedge > N$ и продолжать предыдущие расчеты до тех пор, пока для чисел $k^*(t_{N^\wedge})$ не выполнится условие

$$|k^*(t_{N^\wedge}) - k^*(t_{N^\wedge-1})| \leq \varepsilon^* \quad (23)$$

Здесь ε^* – заданное малое число. Доказывается на основе теорем вложения Соболева и свойств монотонных операторов [9, 14], что предельные значения искомых функций при бесконечном возрастании N^\wedge существуют и обладают свойством

$$\sigma_{ij} \in L^\infty(0T, H), \quad \dot{\sigma}_{ij} \in L^2(0T, H), \quad u_i \in L_w^2(0T, BD(D)). \quad (24)$$

Индекс w в формуле (24) означает, что перемещения u_i удовлетворяют уравнениям (20) в смысле слабой* сходимости. Справедливо также предельное соотношение (25)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} t_N = t^*. \quad (25)$$

Число t^* следует принять за время разрушения вязко-упругопластической конструкции.

Заключение

В работе установлена теоретическая возможность прогноза времени разрушения в задачах установившейся вязко-упругопластичности (ползучести) конструкций, материал которых удовлетворяет условию текучести Надаи–Шлейхера. Решение использует достижения математической теории вариационных неравенств. Существенно, что в настоящее время численный анализ предлагаемой постановки задачи возможен, так как соответствующие алгоритмы найдены [15, 16]. Поэтому представляет интерес проведение экспериментальных работ по определению введенного в настоящей статье тензора накопления повреждений b_{ijkl} для различных материалов.

Литература

1. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 311 с.
2. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 2014. – 752 с.
3. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении: справочник / Д.А. Гохфельд, Л.Б. Гецов, К.М. Кононов и др. – Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 1996. – 408 с.
4. Локощенко, А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов: монография / А.М. Локощенко. – М.: Изд-во МГИУ, 2007. – 263 с.
5. Naumenko, K. Modeling of Creep for Structural Analysis / K. Naumenko, H. Altenbach. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – 220 p.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. Suquet, P.M. Un Espace Fonctionnel Pour les Equations de la Plasticite / P.M. Suquet // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques. – 1979. – Vol. 1, no. 1. – P. 77–87.
8. Jiusti, E. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation / E. Jiusti // Boston, MA.: Birkhäuser, 1984. – 240 p.
9. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения / П. Панагиотопулос. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
10. Новожилов, В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1990. – 222 с.
11. Neustadt, Y.S. Nonfailure Operating Time of Ideal Elastoplastic Structures under Close-to-Ultimate Loads / Y.S. Neustadt, V.A. Grachev // *Z. Angew. Math. Phys.* – 2025. – Vol. 76. – Article no. 35.
12. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 295 с.
13. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.
14. Temam, R. Mathematical Problems in Plasticity / R. Temam. – Mineola, New York: Courier Dover Publications, 2018. – 384 p.
15. Glowinski, R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems / R. Glowinski. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 493 p.
16. Репин, С.В. Математические методы в нелинейных задачах механики сплошных сред / С.В. Репин, М.Е. Фролов. – СПб.: Изд-во политехнического ун-та, 2008. – 71 с.

Поступила в редакцию 20 ноября 2025 г.

Сведения об авторах

Найштут Юрий Семенович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Металлические и деревянные конструкции», Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация, e-mail: neustadt99@mail.ru.

Грачев Владимир Алексеевич – доцент кафедры «Металлические и деревянные конструкции», Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация, e-mail: grach_va@rambler.ru.

PREDICTING THE FAILURE OF VISCOELASTIC-PLASTIC STRUCTURES DURING LONG-TERM OPERATION

Yu.S. Nayshtut, V.A. Grachev

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: neustadt99@mail.ru

Abstract. This article evaluates the service life of a viscoelastic-plastic structure before potential failure during long-term operation under a given variable quasi-static load. Failures are predicted after a significant period of trouble-free service, when the material experiences relatively high stresses and strains. The material is subject to the Nadai–Schleicher yield condition, where constant structural tensors are replaced by damage accumulation tensors that are smooth functions of inelastic strains (plasticity and creep). A mechanical model for strength analysis is formulated within the framework of continuum mechanics under the following assumptions: viscous performance (creep) conditions are considered steady-state, the plastic part of the strain tensor is normal to the loading surface, and the elastic part of the strain follows Hooke's law. The mathematical problem is initially formulated in the space of bounded deformations studied by the Lions school. This space naturally integrates into the space of generalized Sobolev functions. Using methods of variational inequalities, we can prove the existence of generalized solutions to the problem. During the proof, we can determine the time at which the viscoelastoplastic structure fails. At this point in time, the factor of safety against plastic failure (unbounded flow) becomes less than one. Importantly, the proposed calculation algorithm can be implemented numerically.

Keywords: viscoelastoplastic material; failure prediction; Nadai-Schleicher yield condition; damage accumulation tensor; variational inequalities; Sobolev space.

References

1. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* (Fundamentals of Destruction Mechanics). Moscow, Nauka Publ., 1974, 311 p. (in Russ.).
2. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsiy* (Creep of Structural Elements). Moscow, Nauka Publ. 2014, 752 p. (in Russ.).
3. Gokhfel'd D.A., Getsov L.B., Kononov K.M., Kul'chikhin E.T., Rebyakov Yu.N., Sadakov O.S., Timashev S.A., Chepur'skiy V.N. *Mekhanicheskie svoystva staley i splavov pri nestatsionarnom nagruzhении: spravochnik* (Mechanical properties of steels and alloys under unsteady loading: A reference book) Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 1996, 408 p. (in Russ.).
4. Lokoshchenko A.M. *Modelirovanie protsessa polzuchesti i dlitel'noy prochnosti metallov* (Modeling of the Process of Creep and Long-Term Strength of Metals: Monograph), Moscow: MGIU Publ., 2007, 263 p. (in Russ.).
5. Naumenko K., Altenbach H. *Modeling of Creep for Structural Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, 220 p. DOI: 10.1007/978-3-540-70839-1
6. Lions J.-L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).
7. Suquet P.M. Un Espace Fonctionnel Pour les Equations de la Plasticite. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, 1979, Serie 5, Vol. 1, no. 1, pp. 77–87. DOI: 10.5802/afst.531
8. Jiusti E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Boston, MA.: Birkhäuser, 1984, 240 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9486-0
9. Panagiotopoulos P. *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya* (Inequalities in Mechanics and their Applications). Moscow, Mir Publ., 1989, 492 p. (in Russ.).
10. Novozhilov, V.V. *Mikronapryazheniya v konstruktsionnykh materialakh* (Micro Stresses in Structural Materials). Leningrad, Mashinostroenie, Leningradskoe otdelenie, Publ., 1990, 222 c. (in Russ.).

11. Neustadt Y.S., Grachev V.A. Nonfailure Operating Time of Ideal Elastoplastic Structures under Close-to-Ultimate Loads. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2025, Vol. 76, 35. DOI:10.1007/s00033-024-02410-9
12. Petrovskiy I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Lectures on the Theory of ordinary Differential Equations). Moscow, MGU Publ., 1984, 295 p. (in Russ.).
13. Eklund I., Temam R. *Vypuklyy analiz i variatsionnye problemy* (Convex Analysis and Variational Problems). Moscow, Mir Publ., 1979, 399 p. (in Russ.).
14. Temam R. *Mathematical Problems in Plasticity*. Mineola, New York: Courier Dover Publications, 2018, 384 p.
15. Glowinski R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, 493 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12613-4
16. Repin S.V., Frolov M.E. *Matematicheskie metody v nelineynykh zadachakh mekhaniki sploshnykh sred* (Mathematical Methods in Nonlinear Continuum Mechanics Problems), Saint Petersburg, Izd-vo politekhnicheskogo un-ta Publ., 2008, 71 p. (in Russ.).

Received November 20, 2025

Information about the authors

Nayshtut Yuriy Semenovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Metal and Wooden Structures Department, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation, e-mail: neustadt99@mail.ru.

Grachev Vladimir Alekseevich is Associate Professor, Metal and Wooden Structures Department, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation, e-mail: grach_va@rambler.ru.

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА УГОЛЬНЫЕ ПЛАСТЫ

И.Е. Шиповский

Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова РАН,
г. Москва, Российская Федерация
E-mail: iv_ev@mail.ru

Аннотация. Представлен гибридный метод моделирования, объединяющий метод сглаженных частиц (SPH) и метод конечных элементов (FEM) для исследования динамических геомеханических процессов: взрывного разрушения, газодинамических выбросов и гравитационных смещений. Показана эффективность модели при моделировании больших деформаций геосреды и анализе возбуждения энергетического состояния газонасыщенных угольных пластов. Выделены два этапа разрушения: динамическое разрушение под воздействием волн напряжения и квазистатическое – под воздействием десорбированных газов и детонационных продуктов. Учитывается влияние горизонтальной составляющей напряжения на эффективность взрывов. Внедрена концепция брахистохроны – кривой быстрого спуска, – численно самоорганизующейся при моделировании гравитационных сдвигов без априорного задания концентраторов. Модель позволяет прогнозировать потенциальные поверхности обрушения, устойчивость склонов карьеров и хвостохранилищ, а также оптимизировать параметры взрывных работ. Приведены результаты численного моделирования, обсуждены практические рекомендации по оптимизации буровзрывных работ. Работа подтверждена верификацией и может применяться в инженерной практике.

Ключевые слова: модифицированный метод сглаженных частиц (SPH); гибридная расчетная модель; выбросы угля и газа; брахистохрона.

Введение

Решение задач прогнозирования и управления динамическими явлениями в газонасыщенных угольных пластах требует применения эффективных численных методов, способных учитывать сложное взаимодействие механических, газодинамических и геометрических факторов. Классические сеточные методы (МКЭ) не обеспечивают достаточной точности при моделировании процессов с большими деформациями и разрушениями. Метод сглаженных частиц (SPH) [1] в силу своей бессеточной природы обеспечивает возможность корректного описания больших деформаций геосреды разрушения, разделения материала, сдвигов и последующего переноса вещества, что особенно важно при рассмотрении процессов взрыва, выброса угля и газа, а также гравитационного сдвига.

В работе реализован подход, объединяющий SPH с возможностями сеточного метода конечных элементов (FEM), что позволило повысить точность моделирования в зонах контактов, на границах расчётной области и при учёте граничных условий. Численная модель верифицирована на экспериментальных данных и полевых наблюдениях, демонстрируя высокий уровень адекватности.

1. Упругопластическая геомеханическая модель с повреждениями. Уравнения механики сплошной среды

Математическая модель основана на гиперболической квазилинейной системе уравнений механики сплошной среды [2–4]:

$$\rho \dot{v} + \rho \nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

$$\rho \cdot dv / dt = \nabla \cdot \sigma + \rho g, \quad (2)$$

$$\rho \cdot dE / dt = \sigma : \nabla v - \nabla \cdot q + r, \quad (3)$$

где ρ – плотность, v – вектор скорости, σ – тензор напряжений, E – полная энергия, g – ускорение свободного падения, q – вектор теплового потока, r – источник энергии.

Кинематические соотношения. Скорость деформации определяется как

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i). \quad (4)$$

Общий тензор деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (5)$$

Упругий закон с повреждениями. Обобщенный закон Гука с учетом повреждения D :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (1-D) * \varepsilon_{kl}^e, \quad (6)$$

где C_{ijkl} – символ Кристоффеля.

В физико-математическом смысле C_{ijkl} характеризует реакцию материала на произвольные деформации: его компоненты описывают отношения «напряжение–деформация» в различных направлениях и плоскостях.

Критерий текучести Друкера–Прагера–Николаевского. Для описания нелинейного поведения материала используется критерий текучести, основанный на модифицированной модели Друкера–Прагера [2] с добавлением механизма накопления повреждений по Николаевскому [3, 4]. Поверхность текучести при этом

$$(\sigma, D) = \sqrt{J_2} + \alpha \cdot I_1 - k(D) \leq 0, \quad (7)$$

где $J^2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$ – второй инвариант тензора напряжений, $I_1 = \text{tr}(\sigma_{ij})$ – первый инвариант тензора напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений, α – параметр внутреннего трения, $k(D) = k_0(1-D)$ – функция прочности, зависящая от накопленного повреждения D .

Неассоциированный закон пластического течения. Пластическая часть тензора деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \partial g(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}, \text{ при } G \neq f. \quad (8)$$

Пример потенциала пластического течения:

$$G(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} + \beta I_1, \text{ где } \beta \neq \alpha, \quad (9)$$

где G – функция пластического потенциала, отличающаяся от функции текучести f , что учитывает неассоциированный характер течения.

Эволюция повреждений. Повреждение D накапливается по закону:

$$\dot{D} = \gamma \sqrt{2/3 \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}, \quad (10)$$

где γ – коэффициент повреждаемости.

Реализация гибридной схемы SPH–FEM. На этапе моделирования используется SPH-дискретизация [1], обеспечивающая устойчивость при больших деформациях и разрушениях. На участках, где необходима точная аппроксимация границ, вводится сеточная дискретизация FEM.

Аппроксимации сглаживания для SPH-частиц определяются формулой

$$A(r) \approx \Sigma (m_b / \rho_b) A_b W(r - r_b, h), \quad (11)$$

где A_b – значение переменной для частицы b , W – сглаживающая функция (ядро), h – радиус сглаживания, m_b , ρ_b – масса и плотность частицы b .

Взаимодействие между FEM и SPH областями реализуется через переходные узлы с контролем градиентов и контактных усилий, что обеспечивает непрерывность деформационного поля.

2. Механизм разрушения угольного пласта под воздействием взрывной нагрузки

Развитие разрушения газонасыщенных угольных пластов в условиях взрывного воздействия представляет собой сложный двухэтапный процесс, включающий динамическую и квазистатическую фазы [5]. Численные исследования, выполненные с использованием модифицированной SPH–FEM-модели, показали, что начальный этап обусловлен действием короткоимпульсных волн напряжений, формируемых в результате взрыва.

Динамическое разрушение. На первом этапе инициируется волновой фронт, распространяющийся в породе со скоростью звука. В зонах высоких градиентов напряжений происходит локализация деформаций, превышающих предел текучести. Формируются зоны растяжения и сдвига, в которых начинается накопление пластических деформаций и повреждений.

При выполнении критерия текучести (7) реализуется переход материала в неупругую фазу с ростом повреждений. На этом этапе преобладает эффект механического разрушения за счёт действия внешних нагрузок.

Квазистатическое разрушение. В газонасыщенной геосреде значительная часть газа содержится не только в порах, но и находится в связанном (адсорбированном) состоянии на поверхности частиц породы. В результате релаксации волновой нагрузки формируется зона формирования пониженного давления – зона разрушения породы. После первичного быстротекущего релаксационного этапа наступает вторая фаза, когда начинает доминировать газодинамический компонент:

Продукты детонации и высвобождающиеся (десорбированные) газы начинают расширяться и выводиться из разрушенного газонасыщенного пласта.

Процесс фильтрации этих газов в зону разрушения хорошо описывается законом Дарси.

В общем виде закон Дарси для однородного изотропного пласта в дифференциальной форме выражается следующим уравнением:

$$q = -k / \mu \nabla P, \quad (12)$$

где q – вектор фильтрационного расхода (объем газа, проходящий через единичную площадь за единицу времени); k – коэффициент проницаемости породы; μ – динамическая вязкость газа; ∇P – градиент давления.

В результате волнового или детонационного воздействия на газонасыщенный пласт начинается процесс интенсивной десорбции. После первичного выброса продуктов детонации дальнейшее выделение газа и его продвижение к зоне разрушения происходит согласно закону Дарси.

Этот процесс сопровождается:

- дополнительным ростом порового давления;
- расширением уже сформированных микротрещин;
- активной сорбцией/десорбцией метана;
- возможным формированием вторичных сейсмических микрособытий.

Таким образом, происходит подготовка необходимых условий возникновения опасного геодинамического явления за счет накопления повреждений и развития трещин с возможным последующим выбросом газоугольной смеси, что типично для выбросоопасных пластов.

Модельная интерпретация. Используемая модель позволяет идентифицировать критические зоны до наступления катастрофического разрушения. Это возможно за счёт:

- слежения за локальными пиками параметра D ;
- анализа скорости нарастания пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_i^P$.

Результаты моделирования дают основания полагать, что своевременное возбуждение пластов в контролируемых условиях (например, при управляемых взрывах) может быть использовано как элемент превентивной безопасности при подземных работах.

3. Возбуждение энергетического состояния и условия выброса

Физическая суть возбуждения. Газонасыщенные угольные пласты находятся в метастабильном состоянии, обусловленном одновременно высоким внутренним давлением сорбированного метана и удерживающими напряжениями массива. В таком состоянии даже незначительное внешнее возмущение может привести к лавинообразному высвобождению накопленной энергии и переходу системы к неустойчивому режиму.

Под возбуждением энергетического состояния понимается комплекс процессов, при которых в результате внешнего воздействия (например, взрыва, бурения или обрушения) происходит:

- перераспределение напряжений;
- резкое локальное снижение несущей способности породы;
- увеличение газонасыщенности в локальных зонах (десорбция).

Численная идентификация возбуждения. В рамках реализованной SPH-FEM-модели [6, 7] возбуждение энергетического состояния проявляется в:

- росте параметра поврежденности D выше критического значения $D_{pk} \approx 0,7$;
- локальной активации пластических деформаций ε_{ij}^p в сопряженных зонах.

Условия реализации выброса. Для возникновения выброса должны одновременно выполняться следующие условия:

- 1) достаточный энергетический потенциал пласта:

$$E_{\text{coal}} = E_{\text{gas}} + E_{\text{elastic}} > E_{\text{diss}}, \quad (13)$$

где E_{gas} – энергия десорбированного газа; E_{elastic} – накопленная упругая энергия; E_{diss} – энергия, необходимая для разрушения массива и преодоления трения;

- 2) наличие дефектных зон или концентраторов напряжений;
- 3) импульсное возбуждение внешним фактором (рис. 1, а);
- 4) переход материала в режим неустойчивого разрушения (рис. 1, б).

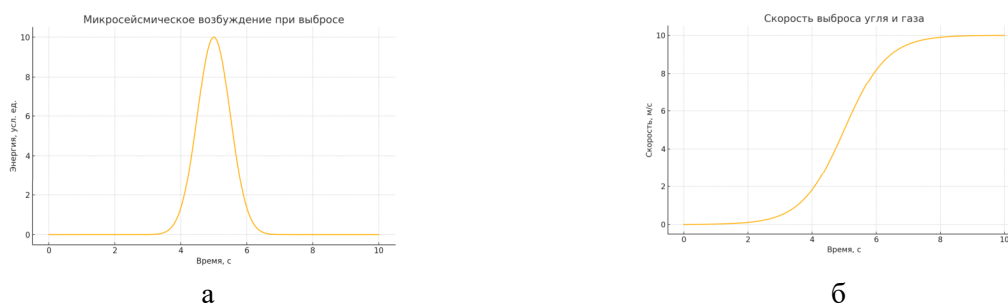


Рис. 1. Подготовка выброса

Практические аспекты диагностики. На практике идентификация условий возбуждения осуществляется по совокупности:

- анализа распределения параметра повреждений (рис. 2, а);
- регистрации микросейсмических событий (рис. 2, б);
- отслеживания газовыделения и давления в буровых скважинах (рис. 2, в).

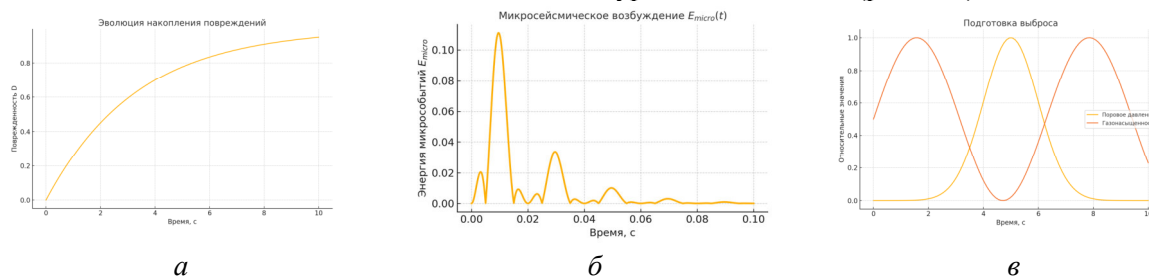


Рис. 2. Осуществление условий возбуждения

На рис. 3 представлены результаты расчета проявления внезапного выброса угля и газа в выработку.

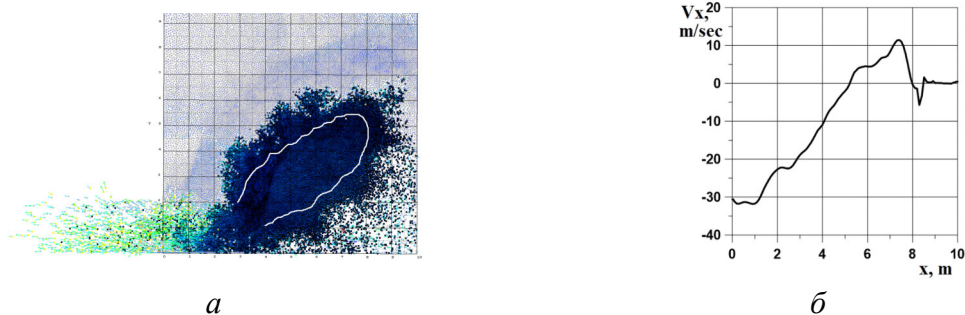


Рис. 3. Карта вероятности выброса: а – расчетная картина выброса в полость выработки активированного взрывными работами газонасыщенного угольного пласта, склонного к опасным геодинамическим явлениям; б – распределение горизонтальной скорости потока выброса газоугольной массы в выработку

Результаты моделирования позволяют формировать карты вероятности выброса (рис. 3), которые включаются в системы прогноза и обеспечения безопасности при разработке выбросоопасных угольных пластов.

4. Влияние напряжённого состояния и оптимизация параметров буровзрывных работ

Эффективность взрывных работ в условиях подземной разработки угольных месторождений определяется не только характеристиками заряда, но и напряжённым состоянием массива. Пренебрежение природным полем напряжений может привести к неоптимальному использованию энергии взрыва и увеличению риска неконтролируемых выбросов.

Многочисленные полевые исследования и численное моделирование [8, 9] подтверждают, что горизонтальная составляющая естественного напряжённого состояния σ_H играет критическую роль в перераспределении энергии взрыва. При высоком уровне горизонтального сжатия ($\sigma_H \gg \sigma_V$) наблюдается ограничение распространения трещин в вертикальном направлении (σ_V) и усиление разрушения в плоскости пласта.

Рис. 4 представляет результаты численного моделирования действия продуктов детонации (ПД) скважинных зарядов при горных работах и влияние горного давления на характер разрушений.

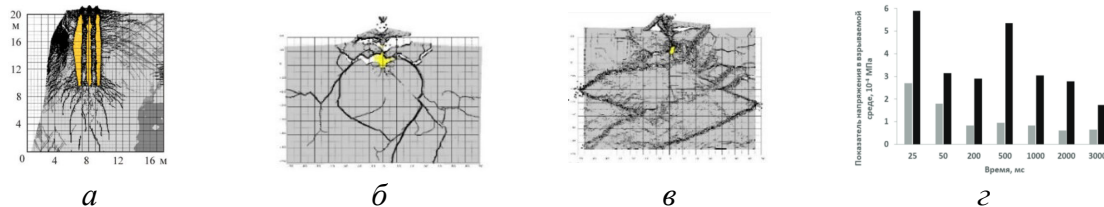


Рис. 4. Численное моделирование действия ПД: а – последствия взрывного воздействия на массив при одновременном инициировании скважинных зарядов; б – локализация трещин при отсутствии внешнего давления; в – при воздействии внешнего давления и энергии взрыва; г – показатель напряженности массива пород под воздействием энергии взрыва при отсутствии внешнего давления (1) и его наличии (2) [8, 9]

Параметр влияния горизонтальных напряжений можно охарактеризовать коэффициентом напряжённого состояния:

$$K = \sigma_H / \sigma_V . \quad (14)$$

При $K > 1,5$ происходит перераспределение энергии взрыва преимущественно в плоскости слоя, способствуя более широкому развитию зоны разрушения. Это следует учитывать при проектировании сетки скважин и дозировании зарядов.

Результаты численного моделирования показали, что при одинаковой суммарной энергоёмкости заряда изменение расстояний между зарядными скважинами и глубины их закладки может существенно повлиять на структуру повреждений и границы зоны разрушения.

Для оптимизации используются следующие критерии: максимальная ширина разрушенной зоны, минимальное вторичное уплотнение массива, предотвращение коалесценции трещин, ведущей к выбросам.

Оптимальное расстояние между зарядными скважинами L_{opt} зависит от мощности заряда Q , глубины заложения и коэффициента напряжённого состояния:

$$L_{opt} = C \cdot Q^{1/3} \cdot (\sigma_V / \sigma_H)^\alpha , \quad (15)$$

где C, α – эмпирические коэффициенты, определяемые по результатам моделирования и полевых испытаний.

С учётом результатов анализа предложены следующие рекомендации: при наличии выраженной горизонтальной компоненты напряжения использовать направленные заряды с преференциальным разрушением в плоскости пласта; регулировать глубину заложения зарядов в зависимости от положения нейтральной зоны напряжений; проводить предварительный расчёт распределения трещин на основе SPH-моделирования для уточнения схемы расположения скважин.

Таким образом, учёт напряжённого состояния массива позволяет существенно повысить эффективность взрывных работ, снизить риск выбросов и сократить объём неконтролируемого разрушения.

5. Моделирование гравитационного сдвига и обрушения откосов и бортов карьеров на основе численного формирования кривой сдвига в виде брахистохроны

Гравитационные сдвиги и обрушения склонов карьеров, уступов и бортов являются одной из наиболее опасных форм разрушения в горной практике. Традиционные подходы к оценке таких процессов опираются на предположение о наличии априорно заданных поверхностей скольжения, как правило, в виде дуги окружности или плоскости. Однако это ограничивает возможности прогнозирования в условиях неоднородной геосреды и сложного напряжённого состояния.

Для преодоления указанных ограничений в настоящем исследовании предложено [10] использовать геометрически обоснованную поверхность скольжения в форме брахистохроны – кривой наибыстрейшего спуска, которая наиболее точно, как показали расчеты (рис. 5), соответствует характерному сечению поверхности сдвига горной массы при нарушении устойчивости склонов и бортов карьеров. Концепция заимствована из вариационной механики и опирается на принцип Ферма траектория движения массы под действием силы тяжести между двумя заданными точками такая, при которой время движения минимально, является брахистохроной.

Параметрические уравнения брахистохроны в прямоугольной системе координат имеют вид (рис. 5, а):

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta), y(\theta) = a(1 - \cos \theta), \theta \in [0, \theta_{\max}], \quad (16)$$

где a – параметр, определяющий масштаб кривой; θ – параметр траектории; θ_{\max} – угол, задающий конечную точку спуска.

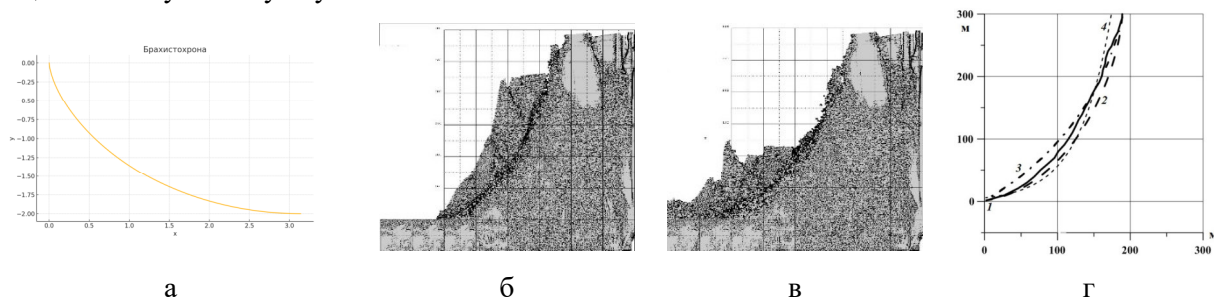


Рис. 5. Кривая сдвижения горной массы, полученная SPH расчетом: а – вид брахистохроны (г-сплошная); приближение линии сдвижения (б, в) аналитическими функциями (г): 1 – оцифровка сформировавшейся при компьютерном моделировании линии сдвижения горной массы; 2 – брахистохрона; 3 – дуга окружности; 4 – экспонента

В контексте геомеханических задач брахистохрона рассматривается как потенциальная поверхность разрушения, которая возникает не в силу геометрических предпосылок, а как следствие минимального времени деформационного перехода геомассива в неустойчивое состояние.

Преимуществами такого подхода являются: отсутствие необходимости в априорном задании концентраторов напряжений; возможность описания траектории разрушения в неоднородных и анизотропных массивах; формализованная связь с напряжённым состоянием, силами тяжести и геометрией откоса.

В модели реализован расчёт гравитационного сдвига с использованием поверхности брахистохроны как подвижной границы разрушения. При этом учитывается перераспределение веса массива, изменение напряжённого состояния и накопление повреждений. В результате моделирования получена динамика откольного сдвига, соответствующая наблюдаемым обрушениям в карьерах глубиной 120–250 м [10, 11].

При этом наиболее важные результаты включают: формирование зоны скольжения вдоль поверхности, близкой к брахистохроне; смещение центра масс срезаемого блока; образование зон интенсивного растяжения в нижней части уступа.

Заключение

В статье представлена гибридная численная методика моделирования динамических геомеханических процессов в угольных пластах, основанная на сочетании метода сглаженных частиц (SPH) и метода конечных элементов (FEM). Разработанная модель позволяет адекватно описывать поведение газонасыщенной среды при взрывном воздействии, включая:

- формирование первичных и вторичных зон разрушения;
- возбуждение энергетического состояния угольного пласта;

- моделирование динамических выбросов угля и газа;
- учёт влияния напряжённого состояния массива на эффективность взрывных работ;
- построение моделей гравитационного сдвига на основе брахистохроны.

Ключевым результатом является подтверждение роли волновых процессов в инициации разрушения и определение условий перехода к выбросоопасному состоянию. Методика позволяет не только моделировать большие реальные деформации геосреды, предсказывать развитие разрушений, но и оптимизировать параметры зарядов и конфигурацию взрывных сеток с учётом природного напряжённого поля.

Математическая постановка на базе уравнений сплошной среды, дополненная неассоциированным законом пластического течения и механизмом накопления повреждений, обеспечила высокую точность численного моделирования и возможность практического применения при проектировании горных работ в сложных геотехнических ситуациях с большими деформациями геосреды.

Работа выполнена в ИПКОН РАН в рамках научно-исследовательских программ по темам FMMS-2024-0007; FMMS-2024-0008.

Литература

1. Шиповский, И.Е. Расчет хрупкого разрушения горной породы с использованием бессеточного метода / И.Е. Шиповский. – Научный вестник НГУ. – 2015. – Вып. 1(145). – С. 76–82.
2. Drucker, D.C. Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design / D.C. Drucker, W. Prager // Quarterly of Applied Mathematics. – 1952. – Vol. 10. – P. 157–165.
3. Nikolaevsky, V.N. Constitutive Equations of Plastic Flow of Deforming Granular Materials / V.N. Nikolaevsky // Prikl. Math and Mekh. – 1971. – Vol. 35. – P. 1070–1082.
4. Stefanov, Y.P. Numerical Modeling of Deformation and Failure of Sandstone Specimens / Y.P. Stefanov // Journal of Mining Science. – 2008. – Vol. 44. – P. 64–72.
5. Одинцев, В.Н. Моделирование влияния взрывного воздействия на газодинамическое состояние пачки выбросоопасного угля / В.Н. Одинцев, И.Е. Шиповский // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2019. – № 4. – С. 46–57.
6. Трофимов, В.А. Численное моделирование внезапного выброса угля и газа / В.А. Трофимов, И.Е. Шиповский // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов, СПб, 21–25 августа 2023 года. – СПб: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2023. – С. 750–752.
7. Modeling of Rockburst during Underground Blasting Working of Coal Seam / I.E. Shipovskii, V.A. Trofimov, I.N. Lapikov, F.S. Belousov // AIP conference proceedings: Numerical Methods for Solving Problems in the Theory of Elasticity and Plasticity (EPPS 2021), Krasnoyarsk, 05–09 июля 2021 года. Vol. 2448. – Krasnoyarsk, 2021. – P. 020022.
8. Ефремовцев, Н.Н. К вопросу оценки методом сглаженных частиц влияния на дробящее действие взрыва внешнего давления и трещиноватости массива / Н.Н. Ефремовцев, И.Е. Шиповский // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 12-2. – С. 170–182.
9. Trofimov, V.A. Features and Some Results of the SPH Method Application for Assessing the Factors of Explosion Action / V.A. Trofimov, N.N. Efremovtsev, I.E. Shipovskii // Russ. Phys. J. – 2024. – Vol. 67, no. 9. – P. 1428–1433.
10. Numerical Approach to Computer Simulation of Landslide Events / I.E. Shipovskii, V.A. Trofimov, O.N. Malinnikova, W.J. Xu // AIP Conf Proc. – 2019. – Vol. 2167, Iss. 1. – 020329.
11. Моделирование влияния пульпообразных масс в толще отвала на динамику развития оползневых зон / В.Н. Захаров, О.Н. Малинникова, В.А. Трофимов, И.Е. Шиповский // Известия ТулГУ. Науки о Земле. – 2020. – Вып. 1. – С. 359–375.

Поступила в редакцию 19 сентября 2025 г.

Сведения об авторе

Шиповский Иван Евгеньевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: iv_ev@mail.ru.

**A HYBRID MODEL OF LARGE DEFORMATIONS UNDER DYNAMIC IMPACT
ON COAL SEAMS****I.E. Shipovskii***Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
E-mail: iv_ev@mail.ru*

Abstract. This article presents a hybrid modeling approach combining the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method with the Finite Element Method (FEM) to investigate dynamic geomechanical processes, including explosive fracturing, gas-dynamic outbursts, and gravity-induced displacements. The model is shown to be highly efficient in simulating large-scale deformations of rock masses and analyzing energy-state activation in gas-saturated coal seams. The authors identify two distinct failure phases, including dynamic fracturing caused by stress wave propagation and quasi-static damage driven by desorbed gases and detonation products. They also consider the influence of the horizontal stress component on explosion efficiency and introduce the concept of a brachistochrone – the curve of fastest descent – as a deformation trajectory in gravitational shifts. It allows predicting failure surfaces without predefined stress concentrators. The model predicts collapse zones and slope stability in open-pit mines and tailings dams, as well as optimizes blasting parameters. Numerical modeling results are discussed along with practical recommendations for drilling and blasting optimization. The methodology has been verified and is suitable for engineering applications.

Keywords: Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method; geomechanics; outburst; coal seam; failure; brachistochrone.

References

1. Shipovskii I.E. Raschet khрупkogo razrusheniya gornoy porody s ispol'zovaniem bessetochnogo metoda (Calculation of Brittle Fracture of Rock using a Grid-Free Method). *Nauchnyy vestnik NGU*, 2015, Iss. 1(145), pp. 76–82. (in Russ.).
2. Drucker D.C., Prager W. Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952, Vol. 10, pp. 157–165.
3. Nikolaevsky V.N. Constitutive Equations for Plastic Deformation of Granular media. *Prikl. Math and Mekh.*, 1971, Vol. 35, pp. 1070–1082.
4. Stefanov Y.P. Numerical Modeling of Deformation and Failure of Sandstone Specimens. *Journal of Mining Science*, 2008, Vol. 44, pp. 64–72. DOI: 10.1007/s10913-008-0006-1
5. Odintsev V.N., Shipovskii I.E. Modelirovanie vliyaniya vzryvnogo vozdeystviya na gazo-dinamicheskoe sostoyanie pachki vybrosopasnogo uglya (Modeling of the Impact of an Explosive Impact on the Gas-Dynamic State of a Pack of Explosive Coal). *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2019, no. 4, pp. 46–57. DOI: 10.15372/FTPRPI20190406
6. Trofimov V.A., Shipovskii I.E. Chislennoe modelirovanie vnezapnogo vybrosa uglya i gaza (Numerical Simulation of Sudden Emission of Coal and Gas). *XIII Vserossiyskiy S"ezd po teoreticheskoy i prikladnoy mekhanike: Sbornik tezisev dokladov. V 4-kh tomakh, Sankt-Peterburg, 21–25 avgusta 2023 goda* (XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics: Collection of abstracts. In 4 volumes, St. Petersburg, August 21–25, 2023). St. Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2023, pp. 750–752. (in Russ.).
7. Shipovskii I.E., Trofimov V.A., Lapikov I.N., Belousov F.S. Modeling of Rockburst during Underground Blasting Working of Coal Seam. *Proc. AIP conference "Numerical Methods for Solving Problems in the Theory of Elasticity and Plasticity" (EPPS 2021)*, Krasnoyarsk, July 5–9, 2021. Vol. 2448, Krasnoyarsk, 2021, p. 020022. DOI 10.1063/5.0073302.

8. Efremovtsev N. N., Shipovskii I. E. To Issue of Evaluation of the Influence of External Pressure and Broken Condition of a Massif on the Blast Shattering Effect by the Smoothed Particle Hydrodynamics Method. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.*, 2023, no. 12-1, pp. 170–182. (in Russ.). DOI: 10.25018/0236_1493_2023_122_0_170.

9. Trofimov V.A., Efremovtsev N.N., Shipovskii I.E. Features and Some Results of the SPH Method Application for Assessing the Factors of Explosion Action. *Russ Phys J*, 2024, Vol. 67, no. 9, pp. 1428–1433. DOI: 10.1007/s11182-024-03264-4

10. Shipovskii I.E., Trofimov V.A., Malinnikova O.N., Xu W.J. Numerical Approach to Computer Simulation of Landslide Events. *AIP Conf Proc.*, 2019, Vol. 2167, Iss. 1, 020329. DOI: 10.1063/1.5132196.

11. Zakharov V.N., Malinnikova O.N., Trofimov V.A., Shipovskii I.E. Modeling the Influence of Pulp Masses in Dump Massif on the Dynamics of Landslide Zones Development. *Izv. Tul. gos. un-ta. Nauki o Zemle*, 2020, Iss. 1, pp. 359–375. (in Russ.). DOI: 10.46689/2218-5194-2020-1-1-359-375.

Received September 19, 2025

Information about the author

Shipovskii Ivan Evgen'evich is Cand. Sc. (Engineering), Senior Staff Scientist, Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: iv_ev@mail.ru.

SURFACE PLASMON POLARITONS EXCITATION IN 2D GOLD-BASED NANORESONATORS OF VARIOUS GEOMETRIES BY A POINT SOURCE

M.A. Zagrebina^{1,2}

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

² Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: zagrebinama@susu.ru

Abstract. This paper numerically examines the excitation of surface plasmon polaritons (SPPs) in two-dimensional nanoresonators. The SPPs wave field is defined as a 2D array of coupled, recursive digital filters interacting with a point radiation source. Within the discrete model, we analyze SPP distributions in elliptical nanoresonators, which are regions confined on the gold surface at the metal-dielectric interface.

The dynamics of metal conduction electrons are taken into account using coupled equations for the electric field and polarization. The composition of the resonant field is determined by a two-dimensional Fourier-Bessel transform. The results show that the excited mode structure and field amplitude depend on the nanoresonator geometry and the position of the center or edge point of the source. We identified the optimal source placement for exciting fundamental or higher-order modes in different geometries. The findings are crucial for designing plasmonic devices with tailored near-field distributions.

Keywords: plasmonics; surface plasmon polaritons; nanoresonators; Fourier-Bessel transform.

Introduction

Surface plasmon polaritons are electromagnetic oscillations in the optical frequency range that propagate in a thin layer at the metal-dielectric interface. They emerge as the coupled oscillations of the electromagnetic field in the dielectric and the electron plasma in the metal with a negative real part of dielectric function [1]. Since the first mathematical description by Arnold Sommerfeld in 1899 [2] and the first experimental SPPs observation by Robert Wood in 1902 [3], SPPs have attracted continuous scientific interest. The Maxwell's equation solution for a single interface, submitted by Zenneck and Sommerfeld [4, 5], fully applies to the description of SPPs. Later, Ritchie carried detailed studies of SPPs in thin metal films [6], and in 1968 Kretschmann and Raether introduced a general method for exciting SPPs with visible light using prism coupling [7].

The SPPs ability to strongly localize electromagnetic radiation (in subwavelength scales) opens up wide opportunities' applications. The structures which provide SPPs propagation are used in highly sensitive biosensors [8], in plasmonic waveguides for high-speed data transfer [9], and in spasers (plasmonic nanolasers) [10]. Despite the advantages, ohmic losses in metals limit SPP propagation and there's occurs the search for new materials and optimized geometries.

In this work, we focus on the SPPs excitation in 2D nanostructures defined at the gold-glass interface on metal surface. We investigate how the resonator geometry and the position of a point excitation source influence the resulting SPP wave field and its mode composition. The discrete model parameters (we employ a model based on coupled digital filters [11–13]) are derived from the SPP dispersion relation for a gold-glass interface at a wavelength of 1,5 μm .

The wave field of surface plasmons in a two-dimensional nanoresonator is modeled by a discrete way, where the wave field is displayed as a coupled recursive digital filter (second-order oscillators) grid. The dynamics of the field is determined by finite difference equations with selected parameters for matching with the physical system, a gold-glass interface at a wavelength of 1,5 μm . While modeling the field in rectangular resonators we used zero-derivative (Neumann) boundary conditions to simulate

an impedance mismatch at the edges, effectively confining the field. For circular and elliptical resonators, the grid nodes outside the shape are set to zero (Dirichlet condition), and the calculations is performed only for inner points defined by a mask.

The results demonstrate a dependence between the excited mode structure and SPPs wave field amplitude on the resonator geometry, the center or edge point source position. We have identified optimal source placement for exciting fundamental or higher-order modes in different geometries. These findings are crucial for designing plasmonic devices with customized near-field distributions.

Discrete Model of the SPP Wave Field

The SPP wave field in a 2D nanoresonator is modeled using a discrete approach, where the continuous field is represented by a coupled recursive digital filter (second-order oscillators) two-dimensional grid. The wave field state at the grid node $(x; y)$ at discrete time t is defined by $u(x; y; t+1)$. The dynamics are governed by the finite-difference equations [11–13]:

$$u(x, y, t+1) = a_1 u(x, y, t) - a_2 u(x, y, t-1) + bW(t, x \pm 1, y \pm 1) + gF(x, y, t), \quad (1)$$

where the coupling to nearest nodes is

$$W(t, x \pm 1, y \pm 1) = u(x-1, y, t) + u(x+1, y, t) + u(x, y-1, t) + u(x, y+1, t). \quad (2)$$

Sign g in (1) is the coupling coefficient between the wave field and the point source.

The function $F(x, y, t) = \delta(x-x_0)(y-y_0)z(t)$ defines the action of the radiation point source located at (x_0, y_0) . The source's dynamics modeling as a classical nonlinear oscillator with dissipation, function $z(t)$ is described by a discrete version of the Van der Pol equation [14]:

$$z(t+1) = d_1(z)z(t) - d_2(z)z(t-1) + g\Delta u(x_0, y_0, t), \quad (3)$$

where $\Delta u(x_0, y_0, t) = u(x_0, y_0, t) - u(x_0, y_0, t-1)$.

The coefficients a_1, a_2 and b set the relation between physical phase velocity v and attenuation decrement γ and the model:

$$a_1 = 2(2v^2 - 1)e^{-\gamma}, \quad a_2 = e^{-2\gamma}, \quad b = v^2 e^{-\gamma}. \quad (4)$$

The nondimensional phase velocity v must be less than $1/\sqrt{2}$ for numerical stability.

The model parameters are selected to match the physical system: a gold-glass interface (dielectric constant of glass $\varepsilon_2 = 4$). For a wavelength of $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ in vacuum the frequency is $\omega \sim 10^{15}$ Hz.

Taking into account the Drude model (metal plasma frequency $\omega_p = 1,39 \cdot 10^{16}$, $\eta = 1,075 \cdot 10^{14}$) [15], we calculated the gold dielectric function at this wavelength, $\varepsilon_1 = -190 + 19i$, so $|\varepsilon_1| = 191$. From the SPP dispersion relation on a single interface:

$$k_{SPP} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}, \quad (5)$$

the SPP phase velocity real part is calculated to be $\text{Re}(v_{ph}) \approx 0,5$.

The grid step Δr of digital filters in a discrete model of a two-dimensional wave field in a nanoresonator is 1 nm in order of magnitude, and the characteristic time step Δt follows from $v_{ph} = v(\Delta r/\Delta t)$ is $\Delta t \sim \Delta r/c \sim 10^{-18}$ s [16].

To account the dynamics of conduction electrons, the model is related to the macroscopic polarization P equations obtained from the equation of electrons motion in the plasma layer of a metal. The discretization of the wave equation for the electric field E and the polarization equation leads to the creation of a coupled system:

$$\frac{P[k+2] + P[k] - 2P[k+1]}{\Delta t^2} + \eta \frac{P[k+2] - P[k+1]}{\Delta t} = -\frac{e^2 n}{m} E_{i,j}[k]; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_{i,j}[k+2] + E_{i,j}[k] - 2E_{i,j}[k+1]}{\Delta t^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{E_{i+2,j}[k] + E_{i,j+2}[k] - 2E_{i+1,j}[k] - E_{i,j+1}[k] + 2E_{i,j}[k]}{\Delta r^2} = \\ & = \mu_0 \frac{P_{i,j}[k+2] + P_{i,j}[k] - 2P_{i,j}[k+1]}{\Delta t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{P_{i+1,j+1}[k] - P_{i,j+1}[k] - P_{i+1,j}[k] + P_{i,j}[k]}{\Delta r^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

This system (1), (6), (7) forms the complete basis for our numerical simulation. However, for the primary analysis of the mode excitation and field distribution presented in this paper, the basic model (1)–(4) with the parameters obtained above is sufficient, since it reflects the basic dynamics of the waves. The full system is used to verify the correctness of the simplified approach.

Results and Discussion

Let us consider the SPP excitation taking into account the dynamics of metal conduction electrons in a nanoresonator defined as a limited nanostructure on the metal surface at the metal-dielectric interface (Fig. 1). A circle of radius $R = 16$ nm is limited on the metal surface, in which the wave field distributions are considered, and a point source of electromagnetic radiation is located near the interface, exciting SPP.

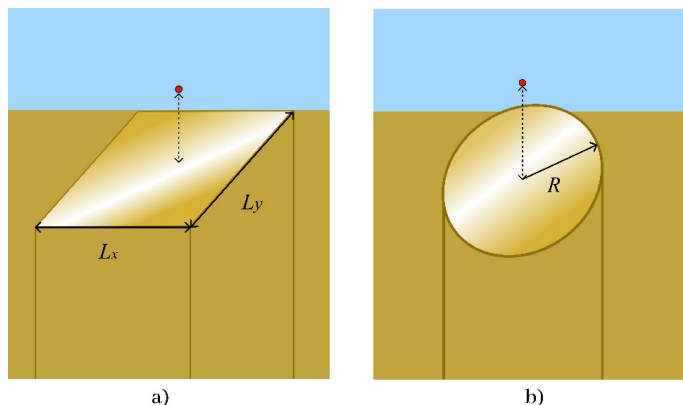


Fig. 1. Nanoresonator scheme of a limited nanostructure on the gold surface at the metal-dielectric interface

First, we consider a rectangular resonator limited on the gold surface with dimensions $L_x = 32$ nm, $L_y = 32$ nm. Fig. 2 shows the steady-state field distribution with the point source located at the center and the left edge. When the position of the point source in the square nanoresonator changes, the wave field is more efficiently excited, and the amplitude of the excited modes increases.

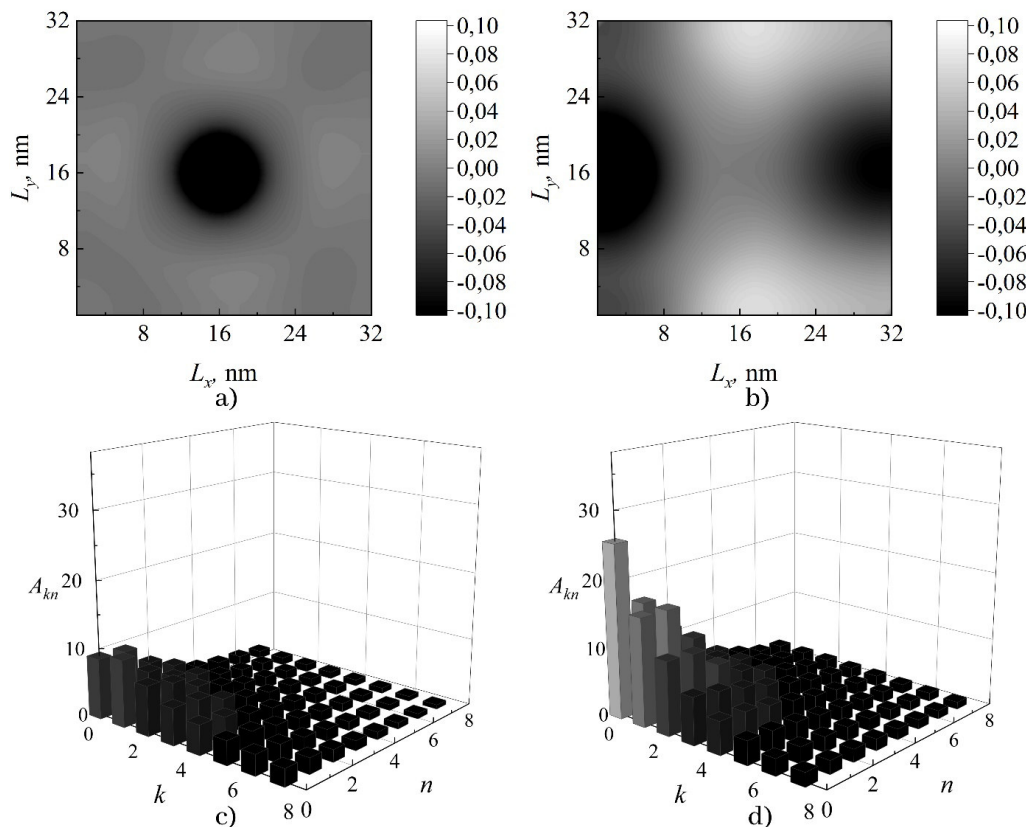


Fig. 2. the wave field in the nanoresonator $L_x = 32$ nm, $L_y = 32$ nm, $g = 0,2$, point source placed in a) center, b) left; the amplitudes of the excited modes, point source placed in c) center, d) left

Thus, with a small coupling coefficient of the wave field with a point radiation source, when taking into account the dynamics of electron polarization, a uniform component of the field is observed, and when the oscillator is shifted to the center of the membrane, an increase in the amplitude of the resonant field is observed. With an increase in the coupling coefficient g , the amplitude increases significantly, it can be noted that when the source is located in the center of the structure, the increase is more significant, and with an increase in this coefficient, higher-order modes are excited (Fig. 3).

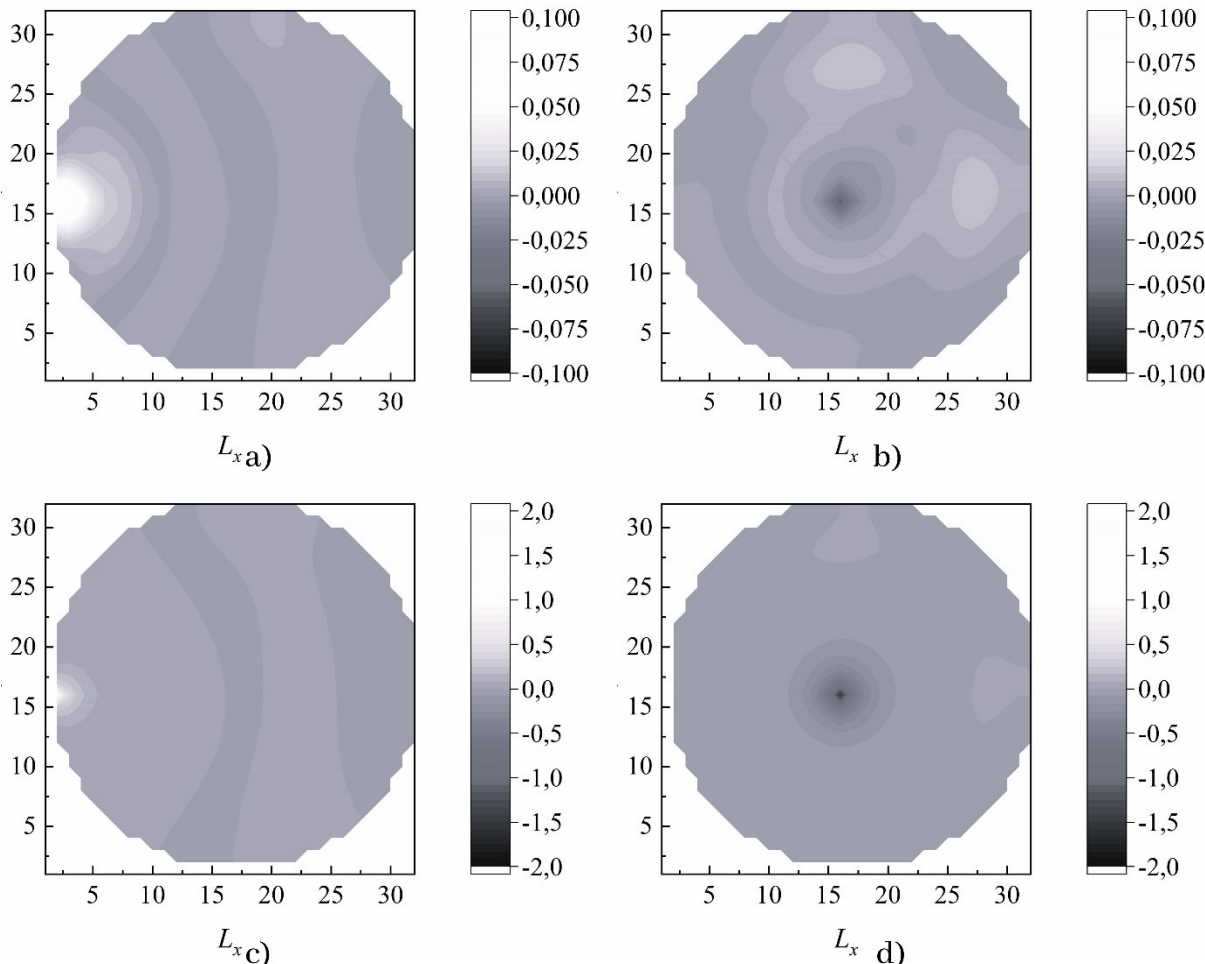


Fig. 3. The wave field in the membrane $R = 16$ nm, coupling coefficient $g = 0,1$, point source placed in a) left, b) center; coupling coefficient $g = 0,2$, c) left; d) center

Let us perform the Fourier–Bessel transformation (in polar coordinates) of the resonant field in a circular nanoresonator and obtain a set of coefficients representing the amplitudes of the excited modes with indices (m, n) , m – radial components, and n – azimuthal components.

$$\hat{u}_{mn} = \int_0^{\infty} u(r) J_m\left(\frac{r}{R}\right) \sin(n\varphi) r dr, \tag{8}$$

where $J_m(r/R)$ is a Bessel function of the first kind of order m describing the radial distribution of the field, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arcsin(y/r)$.

The figure shows the amplitudes of the excited modes of the wave field in the structure $R = 16$ nm, the point radiation source is located in the center of the structure and at its edge. As noted above, with the central location of the source, the amplitude of the excited modes is an order of magnitude greater than the same values with the marginal location of the source. At $g = 0,1$, zero- and first-order modes predominate, and as this coefficient increases, the number of azimuthally excited modes increases.

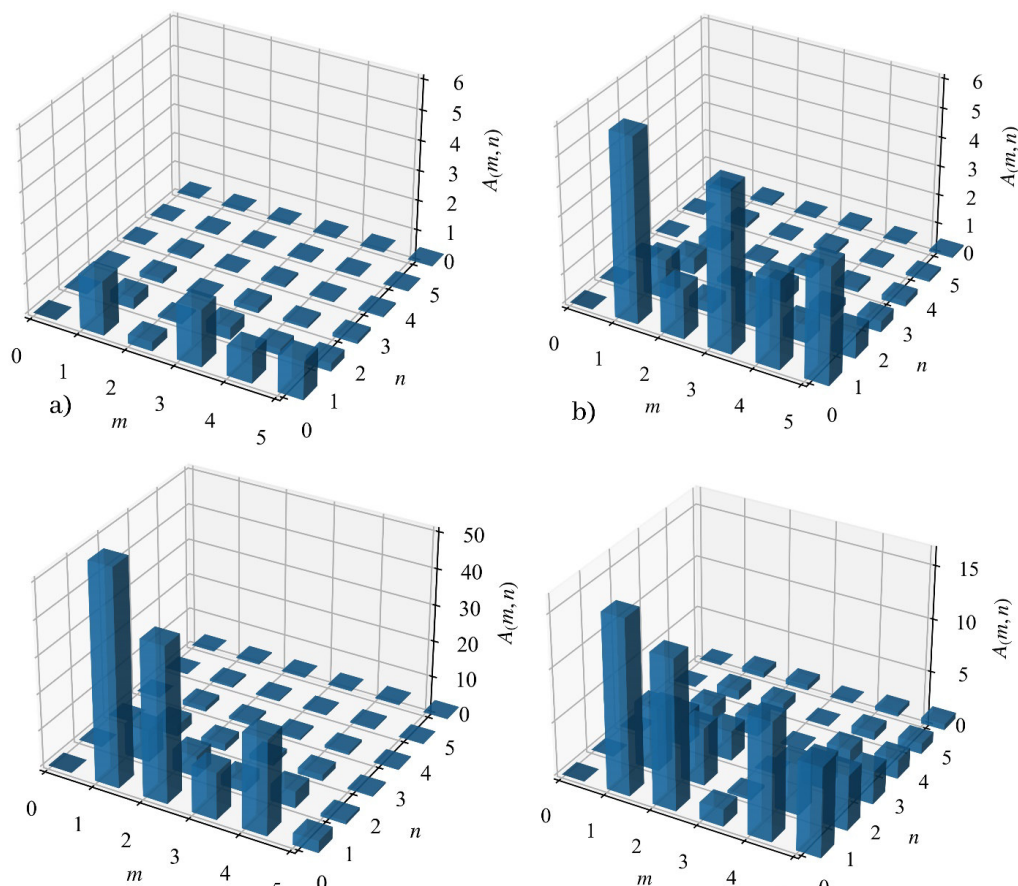


Fig. 4. The excited modes amplitudes with indices $(m; n)$, the wave field in the structure $R = 16$ nm, coupling coefficient $g = 0, 1$, point source placed in a) left; b) center; coupling coefficient $g = 0.2$, c) left; d) center

Discussion and Conclusion

In this paper, based on a recursive two-dimensional domain model, the distributions of the wave field of surface plasmon polaritons in metal nanoresonators of various shapes are analyzed, taking into account the purely two-dimensional nature of these surface waves and the dynamics of electrons in the metal plasma layer. A discrete model of a two-dimensional domain is a lattice of coupled second-order recursive filters interacting with a point source of electromagnetic radiation, which is a classical nonlinear oscillator with dissipation (for small nonlinear source parameters in a discrete modification of the Van der Pol equation).

The step of the digital filter grid in the model was adopted in the order of 1 nm, and the characteristic time in the system was adopted.

1. When simulating the excitation of SPT in rectangular metal nanoresonators, it is shown that the most advantageous location of a point radiation source for exciting a nanoresonator in a single-mode is the edge of the nanostructure.

2. When modeling the excitation of an IFR in ellipsoidal structures with central symmetry, it is shown that the most advantageous location of a point radiation source for exciting a nanoresonator in a single-mode is the central location of the source.

3. To identify the mode composition of the resonant field in a circular structure, the Fourier-Bessel transformation was performed, and it was shown that modes with low radial and azimuthal indices predominate in the structure.

The obtained research results can be useful in the design of plasmonic nanoresonators of various geometries. (rectangular, axisymmetric) and other devices that support the propagation of surface plasmon polaritons (waveguides, sensors, etc.), ensuring effective excitation of target modes due to the optimal location of the electromagnetic radiation source.

The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (№ 075-00188-26-00).

References

1. Maier S.A. *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. Springer, 2007, 224 p. DOI: 10.1007/0-387-37825-1.
2. Sommerfeld A. Ueber die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes. *Ann. Phys.*, 1899, Vol. 303, Iss. 2, pp. 233–290. DOI: 10.1002/andp.18993030202
3. Wood R.W. On a Remarkable Case of Uneven Distribution of Light in a Diffraction Grating Spectrum. *Proceedings of the Physical Society of London*, 1902, Vol. 18, no. 1, pp. 269–275. DOI: 10.1088/1478-7814/18/1/325
4. Zenneck J. Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie. *Ann. Phys.*, 1907, Vol. 328, no. 10, pp. 846–866. DOI: 10.1002/andp.19073281003
5. Sommerfeld A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. *Ann. Phys.*, 1909, Vol. 333, Iss. 4, pp. 665–736. DOI: 10.1002/andp.19093330402
6. Ritchie R.H. Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films. *Phys. Rev.*, 1957, Vol. 106, Iss. 5, pp. 874–881. DOI: 10.1103/PhysRev.106.874
7. Kretschmann E., Raether H. Notizen: Radiative Decay of Non Radiative Surface Plasmons Excited by Light. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 1968, vol. 23, no. 12, pp. 2135–2136. DOI: 10.1515/znA-1968-1247
8. Mamichev D.A., Kuznetsov I.A., Maslova N.B., Zhanaveskin M.L. Optical Sensors based on Surface Plasmon Resonance for High-sensitive Biochemical Analysis. *Molekulyarnaya meditsina* (Molecular Medicine), 2012, no. 6, pp. 16–22. (in Russ.).
9. Fedyanin D.Yu., Krasavin A.V., Arsenin A.V., Zayats A.V. Surface Plasmon Polariton Amplification upon Electrical Injection in Highly Integrated Plasmonic Circuits. *Nano Letters*. 2012. Vol. 12, no. 5. P. 2459–2463. DOI: 10.1021/nl300540x
10. Andrianov E.S., Vinogradov A.P., Dorofeenko A.V., Zyblovskiy A.A., Lisyanskiy A.A., Pukhov A.A. *Quantum Nanoplasmonics*. Intellect Publishing House, 2015, 367 p. (in Russ.).
11. Kornienko V.N., Privezentsev A.P. Features of the Multimode Self-consistent Dynamics of an Ensemble of Self-Oscillators and the Field in a Rectangular Region. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2013, Vol. 58, no. 7, pp. 703–710. DOI: 10.1134/S1064226913060089
12. Kornienko V.N., Privezentsev A.P. Vozbuzhdenie voln krugloy membrany ansablem avto-generatorov (Excitation of Waves in a Circular Membrane by an Ensemble of Auto-Oscillators). *Radiotekhnika i elektronika*, 2010, Vol. 55, no. 3, pp. 362–368. (in Russ.).
13. Kornienko V.N., Privezentsev A.P. Formirovanie prostranstvenno-vremennykh struktur v sisteme aktivnaya sreda – volnovoe pole v oblasti s poluprozrachnoy granitsey (Formation of Spatiotemporal Structures in the Active Medium–Wave Field System in a Region with a Translucent Boundary). *Radiotekhnika i elektronika*, 2011, vol. 56, no. 4, pp. 417–422.
14. Zaitsev V.V. The Discrete Van Der Pol Oscillator: Finite Differences and Slow Amplitudes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, Vol. 25, no. 6, pp. 70–78. (in Russ.). DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78
15. Drude, P. Zur Elektronentheorie der Metalle. *Annalen der Physik*, 1900, Vol. 306, no. 3, pp. 566–613. DOI: 10.1002/andp.19003060312
16. Bychkov I.V., Kuzmin D.A., Zagrebina M.A. Modeling of Surface Plasmon Polariton Excitation in a Rectangular Gold-Based Nanoresonator. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2023, Vol. 15, no. 3, pp. 79–88. DOI: 10.14529/mmph230309

Received March 17, 2026

Information about the author

Zagrebina Marina Antonovna is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, Assistant, Physics of Nanoscale Systems Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; Laboratory Research Assistant, Department of Radiophysics and Electronics, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zagrebinama@susu.ru.

УДК 535.016, 535.137

DOI: 10.14529/mmph260210

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНОВ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ДВУМЕРНЫХ НАНОРЕЗОНАТОРАХ НА ОСНОВЕ ЗОЛОТА РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ**М.А. Загребина^{1,2}**¹ Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация² Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zagrebina@susu.ru

Аннотация. В данной работе представлено численное исследование возбуждения поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) в двумерных нанорезонаторах. Волновое поле ППП определяется как двумерная сетка связанных рекурсивных цифровых фильтров, взаимодействующих с точечным источником излучения. В рамках дискретной модели проанализировано распределение ППП в эллиптических нанорезонаторах, которые представляют собой области, ограниченные на поверхности золота на границе раздела металл–диэлектрик.

Динамика электронов проводимости металла учитывается с помощью связанных уравнений для электрического поля и поляризации. Состав резонансного поля определяется с помощью двумерного преобразования Фурье–Бесселя. Результаты демонстрируют зависимость структуры возбуждаемых мод и амплитуды поля от геометрии нанорезонатора и положения центра или краевой точки источника. Определено оптимальное расположение источника для возбуждения основных мод или мод более высокого порядка в различных геометриях. Полученные результаты имеют решающее значение для разработки плазмонных устройств с индивидуальным распределением ближнего поля.

Ключевые слова: плазмоника; поверхностные плазмон-поляритоны; нанорезонаторы; преобразование Фурье–Бесселя.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ 075-00188-26-00).

Литература

1. Майер, С.А. Плазмоника: теория и приложения / С.А. Майер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 277 с.
2. Sommerfeld, A. Ueber die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes / A. Sommerfeld // Ann. Phys. – 1899. – Vol. 303, Iss. 2. – P. 233–290.
3. Wood, R.W. On a Remarkable Case of Uneven Distribution of Light in a Diffraction Grating Spectrum / R.W. Wood // Proceedings of the Physical Society of London. – 1902. – Vol. 18, no. 1. – P. 269–275.
4. Zenneck, J. Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie / J. Zenneck // Ann. Phys. – 1907. – Vol. 328, no. 10. – P. 846–866.
5. Sommerfeld A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie / A. Sommerfeld // Ann. Phys. – 1909. – Vol. 333, Iss. 4. – P. 665–736.
6. Ritchie, R.H. Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films / R.H. Ritchie // Phys. Rev. – 1957. – Vol. 106, Iss. 5. – P. 874–881.
7. Kretschmann, E. Notizen: Radiative Decay of Non Radiative Surface Plasmons Excited by Light / E. Kretschmann, H. Raether // Zeitschrift für Naturforschung A. – 1968. – Vol. 23, no. 12. – P. 2135–2136.

8. Оптические сенсоры на основе поверхностного плазмонного резонанса для высокочувствительного биохимического анализа / Д.А. Мамичев, И.А. Кузнецов, Н.Е. Маслова, М.Л. Занаевский // Молекулярная медицина. – 2012. – № 6. – С. 16–22.
9. Surface Plasmon Polariton Amplification upon Electrical Injection in Highly Integrated Plasmonic Circuits / D.Yu. Fedyanin, A.V. Krasavin, A.V. Arsenin, A.V. Zayats / Nano Letters. – 2012. – Vol. 12, no. 5. – P. 2459–2463.
10. Квантовая наноплазмоника: учебное пособие для студентов старших курсов / Е.С. Андрианов, А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев и др. – Долгопрудный: Интеллект, 2015. – 367 с.
11. Корниенко, В.Н. Особенности многоволновой самосогласованной динамики ансамбля автогенераторов и поля в прямоугольной области / В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. – 2013. – Т. 58, № 7. – С. 691–698.
12. Корниенко, В.Н. Возбуждение волн круглой мембраны ансамблем автогенераторов / В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55, № 3. – С. 362–368.
13. Корниенко, В.Н. Формирование пространственно-временных структур в системе активная среда – волновое поле в области с полупрозрачной границей / В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 4. – С. 417–422.
14. Зайцев, В.В. Дискретный осциллятор ван дер Поля: конечные разности и медленные амплитуды / В.В. Зайцев // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2017. – Т. 25, № 6. – С. 70–78.
15. Drude, P. Zur Elektronentheorie der Metalle / P. Drude // Annalen der Physik. 1900. – Vol. 306, no. 3. – P. 566–613.
16. Бычков, И.В. Моделирование возбуждения поверхностных плазмон-поляритонов в прямоугольном нанорезонаторе на основе золота / И.В. Бычков, Д.А. Кузьмин, М.А. Загребина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 79–88.

Поступила в редакцию 17 марта 2026 г.

Сведения об авторах

Загребина Марина Антоновна – аспирант, кафедра уравнений математической физики, ассистент, кафедра физики наноразмерных систем, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация; лаборант-исследователь, кафедра радиофизики и электроники, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zagrebinama@susu.ru.

ТРЕБОВАНИЯ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЬИ

1. Публикуются оригинальные работы, содержащие существенные научные результаты, не опубликованные в других изданиях, прошедшие этап научной экспертизы и соответствующие требованиям к подготовке рукописей.

2. В редколлегию предоставляется электронная (документ MS Word 2003) версия работы объемом не более 6 страниц, экспертное заключение о возможности опубликования работы в открытой печати, сведения об авторах (Ф.И.О., место работы, звание и должность для всех авторов работы), контактная информация ответственного за подготовку рукописи.

3. Структура статьи: УДК, название (не более 12–15 слов), список авторов, аннотация (150–250 слов), список ключевых слов, текст работы, литература (в порядке цитирования, в скобках, если это возможно, дается ссылка на оригинал переводной книги или статьи из журнала, переводящегося на английский язык). После текста работы следует название, расширенная аннотация (реферат статьи) объемом до 1800 знаков с пробелами, список ключевых слов и сведения об авторах на английском языке.

4. Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее – 23, нижнее – 23, внутри – 22, снаружи – 25 мм. Шрифт – Times New Roman 11 pt, масштаб 100 %, интервал – обычный, без смещения и анимации. Отступ красной строки 0,7 см, интервал между абзацами 0 пт, межстрочный интервал – одинарный.

5. Формулы. Стиль математический (цифры, функции и текст – прямой шрифт, переменные – курсив), основной шрифт – Times New Roman 11 pt, показатели степени 71 % и 58 %. Выключенные формулы должны быть выровнены по центру.

6. Рисунки все черно-белые. Желательно предоставить рисунки и в виде отдельных файлов.

7. Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник ЮУрГУ» серии «Математика. Механика. Физика»:

Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, Южно-Уральский государственный университет, Институт естественных и точных наук, кафедра математического и компьютерного моделирования, главному редактору профессору Загребиной Софье Александровне. [Prof. Zagrebina Sophiya Aleksandrovna, Mathematical and Computer Modeling Department, SUSU, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080].

8. Адрес электронной почты: mmph@susu.ru

9. Полную версию правил подготовки рукописей и пример оформления можно загрузить с сайта журнала: см. <http://vestnik.susu.ru/mmph>.

10. Журнал распространяется по подписке. Электронная версия: см. www.elibrary.ru, <http://vestnik.susu.ru/mmph>, <http://вестник.юургу.рф/mmph>.

11. Плата с аспирантов за публикацию не взимается.

СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ

Журнал основан в 2009 году. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-57362 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Учредитель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Главный редактор журнала – д.ф.-м.н., проф. С.А. Загребина.

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки); 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки); 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (технические и физико-математические науки); 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки); 1.3.6. Оптика (физико-математические науки); 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки); 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Рецензируемые научные издания, входящие в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по следующим отраслям и группам специальностей: 01.01.00 – Математика, 01.02.00 – Механика, 01.04.00 – Физика, 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНТИ. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международных справочных системах по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory», «Zentralblatt MATH», «Russian Science Citation Index on Web of Science».

Подписной индекс 29211 в объединенном каталоге «Пресса России», E29211 в Интернет-каталоге агентства «Книга-Сервис».

Периодичность выхода – 4 номера в год.

Адрес редакции: 454080, г. Челябинск, ул. С. Кривой, 79, Издательский центр ЮУрГУ, каб. 2.

Адрес издателя: 454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.

ВЕСТНИК
ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия
«МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ФИЗИКА»
Том 18, № 2
2026

16+

Редактор *С.И. Уварова*
Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 29.04.2026. Дата выхода в свет 07.05.2026.

Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,16.

Тираж 500 экз. Заказ 73/112. Цена свободная.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.