

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ

**В.П. Метельков**

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,  
г. Екатеринбург

Получено обобщенное математическое описание термодинамической модели электрической машины на основе тепловых схем для произвольного количества узлов и охлаждающих сред, учитывающее влияние температуры узлов на величину греющих потерь, выделяющихся в этих узлах. Показано, что введение учета зависимости мощности потерь в узлах термодинамической модели от температуры этих узлов из-за температурной зависимости сопротивлений обмоток не изменяет свойство линейности модели. Аналитически доказано, что при отсутствии зависимости мощности потерь в узлах термодинамической модели от температуры этих узлов изменение во времени свободных составляющих термодинамических процессов в этой модели всегда имеет аperiодический затухающий характер, однако при наличии температурной зависимости мощности потерь это положение не всегда справедливо. Аналитически определены условия, при которых в случае наличия температурной зависимости мощности потерь происходит неограниченное увеличение температуры элементов электрической машины без выхода на установившийся уровень.

*Ключевые слова:* термодинамическая модель, электрический двигатель, тепловая схема, дифференциальные уравнения, собственные числа.

## Введение

В настоящее время в экономике России используются десятки миллионов электродвигателей. В большинстве промышленных установок с электроприводом мощность двигателей завышена на 20–40 %, что говорит о существовании возможностей для снижения стоимости электропривода и потребления электроэнергии им за счет более рационального выбора мощности двигателей [1]. С учетом того факта, что классические косвенные методы оценки теплового состояния двигателей не всегда дают адекватный результат [2], возрастает роль численных методов расчета на основе термодинамических моделей (ТДМ). Значение математического моделирования для оценки теплового состояния двигателей повышается также из-за того, что функционирование механической части электропривода может иметь свои особенности, которые часто затруднительно учесть аналитически [3, 4].

Существует два подхода к численному моделированию тепловых процессов в электрических машинах – моделирование на основе тепловых схем (ТС) с сосредоточенными параметрами и на основе использования пространственно-временной дискретизации объекта исследования (FEM- и CFD-моделирование). При всех преимуществах FEM и CFD, в задачах термодинамического моделирования электрических машин, эти подходы часто требуют построения трехмерных моделей [5, 6], что обуславливает очень высокие требования к вычислительным ресурсам и длительное время решения таких задач. Термодинамические модели на основе ТС с сосредоточенными параметрами

предъявляют значительно меньшие требования к вычислительным ресурсам, обеспечивают сравнительно быстрый расчет, что позволяет использовать их при решении задач, связанных с перебором значительного количества вариантов, например при анализе чувствительности модели к изменениям параметров [5, 7, 8]. Также ТДМ на основе ТС позволяют, в некоторых случаях, провести исследования аналитическим путем с целью выяснения влияния особенностей модели на температуру элементов машины в установившихся и переходных режимах. Это обуславливает актуальность создания и исследования таких ТДМ электрических машин.

В настоящей работе ставится задача получения математического описания обобщенной термодинамической модели электродвигателя на основе метода тепловых схем и исследования некоторых свойств и особенностей функционирования этой модели.

## 1. Математическое описание термодинамической модели

В литературе приводятся различные формы математического описания моделей электрических машин, пригодные для исследования термодинамических процессов и/или установившегося теплового режима. Так, в [9] рассматривается термодинамическое уравнение для одной греющейся массы, в [10, 11] рассматриваются ТС с несколькими узлами с точки зрения исследования установившегося теплового режима. В [12, 13] получено математическое описание термодинамических процессов для системы, состоящей из двух и трех

греющихся масс, а в [14] предложена система уравнений для расчета тепловых переходных процессов, состоящая из восьми уравнений для статора и семи – для ротора электрической машины. В [15–18] дано математическое описание термодинамических процессов в виде дифференциального уравнения в матричной форме для произвольного количества греющихся масс. Однако во всех упомянутых случаях математическое описание получено для одной температуры охлаждающей среды. В то же время существуют электрические двигатели с использованием жидкостного охлаждения, например асинхронные короткозамкнутые взрывозащищенные двигатели серии ЭКВ [19], в которых применяется способ охлаждения двигателя ICW37 – водяное охлаждение корпуса. Выпускаются с водяным охлаждением также тяговые электродвигатели. Некоторые крупные двигатели выпускаются с двумя контурами охлаждения – водяным и воздушным. Например, высоковольтные двигатели АЗ-3000-10-1000УХЛ4, АСЗ-3150-10-375УХЛ4, АНЗ2-18-66-12Т3 со степенью защиты IP44 имеют воздушно-водяное охлаждение ICW37A97 и ICW37A91, двигатели серии АЗМ и АЗМС (IP44) используют способ охлаждения ICW37A71 [20]. В подобных случаях возникает вопрос о необходимости учета в математическом описании не единственной температуры охлаждающей среды.

Также в некоторых случаях приходим к ТС с несколькими температурами охлаждающей среды и при необходимости учета постепенного повышения температуры охлаждающего потока внутри машины, как при аксиальной, так и при радиальной системе вентиляции [21, 22], что актуально для крупных машин как защищенного, так и закрытого исполнения. В [22] получены уравнения теплового баланса электродвигателя для произвольного количества температур охлаждающей среды, но эти уравнения приведены в форме, пригодной лишь для исследования установившегося режима.

Получим обобщенное математическое описание термодинамических процессов в электрическом двигателе для произвольного количества греющихся элементов (узлов ТДМ) при произвольном количестве охлаждающих сред. Обозначим количество узлов модели –  $n$ , а количество охлаждающих сред –  $m$ .

Рассмотрим тепловой баланс для  $i$ -го узла. Количество тепла, выделяющееся за элементарный промежуток времени  $dt$  в  $i$ -м узле, определяется суммарной мощностью потерь ( $\Delta P_i$ ) в нем:

$$Q_{1i} = \Delta P_i. \quad (1)$$

Количество тепла, отданное  $i$ -м узлом другим узлам, определяется разностью их температур:

$$Q_{2i} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n (\theta_i - \theta_j) \lambda_{ij} dt, \quad (2)$$

где  $j$  – номер узла, с которым происходит тепло-

обмен,  $j \in \{1, n\}$ ,  $j \neq i$ ;  $\theta_i$  и  $\theta_j$  – температуры узлов, между которыми происходит теплообмен;  $\lambda_{ij}$  – тепловая проводимость между узлами  $i$  и  $j$ .

Количество тепла, отданное  $i$ -м узлом в охлаждающую среду:

$$Q_{3i} = \sum_{k=1}^m (\theta_i - \theta_{ok}) \lambda_{oik} dt, \quad (3)$$

где  $k$  – номер охлаждающей среды;  $\theta_{ok}$  – температура  $k$ -й охлаждающей среды;  $\lambda_{oik}$  – тепловая проводимость между  $i$ -м узлом и  $k$ -й охлаждающей средой.

Количество тепла, затраченное на изменение температуры  $i$ -го узла, определяется его теплоемкостью  $C_i$ :

$$Q_{4i} = C_i d\theta_i. \quad (4)$$

Уравнение теплового баланса

$$Q_{1i} = Q_{2i} + Q_{3i} + Q_{4i},$$

с учетом (1)–(4), получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры  $i$ -го узла:

$$\Delta P_i = C_i \frac{d\theta_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n (\theta_i - \theta_j) \lambda_{ij} + \sum_{k=1}^m (\theta_i - \theta_{ok}) \lambda_{oik}. \quad (5)$$

После преобразований из (5) можно записать:

$$C_i \frac{d\theta_i}{dt} = \Delta P_i - \theta_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \lambda_{ij} + \sum_{k=1}^m \lambda_{oik} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_j \lambda_{ij} + \sum_{k=1}^m \theta_{ok} \lambda_{oik}. \quad (6)$$

Учтем влияние температуры узлов термодинамической модели на мощность греющих потерь в них. Для потерь в обмотках машины используем известную линейную зависимость сопротивления от температуры. Температурная зависимость других видов потерь может быть приведена к линейному виду путем линеаризации в пределах актуального диапазона изменения температуры этих узлов. При объединении нескольких элементов конструкции электрической машины в один узел ТДМ в нем может оказаться более одного источника греющих потерь, каждый из которых имеет свою зависимость мощности потерь от температуры. Поэтому представим суммарную мощность потерь в  $i$ -м узле следующим образом:

$$\Delta P_i = \sum_{l=1}^s \Delta P_{st.i(l)} [1 + k_{\theta i(l)} (\theta_i - \theta_{st.i(l)})], \quad (7)$$

где  $s$  – количество источников потерь в  $i$ -м узле;  $\Delta P_{st.i(l)}$  – мощность потерь в  $l$ -м источнике  $i$ -го узла;  $k_{\theta i(l)}$  – температурный коэффициент для  $l$ -го источника потерь в  $i$ -м узле;  $\theta_{st.i(l)}$  – температура для  $l$ -го источника потерь в  $i$ -м узле, относительно которой рассчитывается мощность этого источника.

Для тех узлов, где нет зависимости мощности потерь от температуры, принимаем  $k_{\theta i(l)} = 0$ .

Запишем (6) с учетом (7):

$$C_i \frac{d\theta_i}{dt} = \Delta P_i' - \theta_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \lambda_{ij} + \sum_{k=1}^m \lambda_{oik} - \sum_{l=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_j \lambda_{ij}, \quad (8)$$

где  $\Delta P_i' = \Delta P_{st.i(l)} [1 - k_{\theta i(l)} \theta_{st.i(l)}] + \sum_{k=1}^m \theta_{ok} \lambda_{oik}$ .

Как видим из (8), введение учета зависимости мощностей потерь в узлах модели от температуры при линейной связи этих величин не нарушает линейность дифференциального уравнения для  $i$ -го узла (здесь и далее принимаем допущение об отсутствии температурной зависимости теплоемкостей и тепловых проводимостей). Это дает возможность записать (8) в векторно-матричной форме, для чего введем следующие обозначения:  $\Delta P'$  – матрица-столбец мощностей потерь в узлах модели размерностью  $n \times 1$ ;  $\theta$  – матрица-столбец температур узлов размерностью  $n \times 1$ ;  $C$  – диагональная матрица теплоемкостей узлов размерностью  $n \times n$ ;  $\Lambda$  – симметричная ( $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ ) общая матрица тепловых проводимостей размерностью  $n \times n$ .

$$\Delta P' = \begin{bmatrix} \Delta P'_1 \\ \Delta P'_2 \\ \dots \\ \Delta P'_n \end{bmatrix}; \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix};$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & -\lambda_{nn} \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы в матрице проводимостей  $\Lambda$  определяются следующим выражением:

$$\lambda_{ii} = \sum_{k=1}^m \lambda_{oik} + \sum_{(j \neq i)}^n \lambda_{ij} - \sum_{l=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)}. \quad (9)$$

С учетом введенных обозначений уравнение (8) в векторно-матричной форме запишем следующим образом:

$$C \frac{d\theta}{dt} = \Delta P' + \Lambda \theta. \quad (10)$$

Уравнению (10) соответствует векторно-матричная структурная схема, показанная на рис. 1.

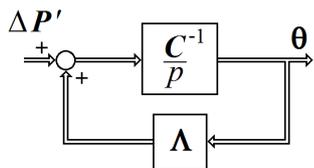


Рис. 1. Структурная схема термодинамической модели двигателя при произвольном количестве базовых температур

## 2. Исследование решения уравнения термодинамической модели

Исследуем свойства решения уравнения (10) в случае, когда привод работает при неизменных параметрах внешней среды, при постоянстве нагрузки и скорости. При этих условиях мощность потерь в узлах модели будет зависеть только от температуры этих узлов. Для выяснения характера процессов в рассматриваемой ТДМ представим уравнение (10) в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = A\theta + F, \quad (11)$$

где  $A = C^{-1}\Lambda$ ;  $F = C^{-1}\Delta P'$ .

Запишем общее решение уравнения (11) [23, 24]:

$$\theta = e^{At}\theta_{initial} + \int_0^t G(t-s)F(s)ds, \quad (12)$$

где  $\theta_{initial}$  – вектор начальных температур узлов модели;  $G(t-s) = e^{A(t-s)}$  – матрица Грина размерностью  $n \times n$ .

Взяв интеграл в уравнении (12), получим:

$$\theta = (E - e^{At})\theta_{steady} + e^{At}\theta_{initial}, \quad (13)$$

где  $\theta_{steady} = -A^{-1}F = -\Lambda^{-1}\Delta P'$  – вектор установившихся значений температур,  $E$  – единичная диагональная матрица размерностью  $n \times n$ .

Характер изменения во времени температуры узлов будет определяться характером изменения свободных составляющих решения уравнения (11), так как вектор внешних воздействий на систему в рассматриваемом случае постоянен (изменение мощности потерь из-за изменения температуры учтено в диагональных элементах матрицы  $A$ ). Это означает, что вид процессов будет определяться характером и знаком собственных чисел матрицы  $A$  [23]. Из практики известно, что свободные составляющие термодинамических переходных процессов в электрических машинах носят апериодический затухающий характер. Выясним, всегда ли справедливо это утверждение. Свободные составляющие переходных процессов могут иметь указанный характер только в том случае, когда все собственные числа матрицы системы являются вещественными и отрицательными.

Сформулируем теорему:

*Матрица  $A = C^{-1}\Lambda$ , где  $C$  и  $\Lambda$  – симметричные матрицы порядка  $n$ , имеет вещественные собственные числа  $\chi_{(A)}$ .*

Симметричные матрицы имеют вещественные собственные числа, однако матрица  $A$ , являясь произведением двух симметричных матриц  $C^{-1}$  и  $\Lambda$ , не обязательно сама должна быть симметричной, поэтому неочевидно, что ее собственные числа вещественные. Докажем эту теорему, опираясь на подход, предложенный Ф.Р. Гантмахером [24]. Введем вспомогательную матрицу

$$V = \sqrt{C} \quad (14)$$

в смысле  $V \cdot V = C$  и  $V \cdot V^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная диагональная матрица.

Правомерность использования (14) в данном случае следует из того, что для положительно определенной матрицы  $C$  существует положительно определенная матрица  $\sqrt{C}$ , такая, что  $(\sqrt{C})^2 = C$  [25]. Из физического смысла ясно, что матрица  $C$  положительно определена, так как ее диагональные элементы определяются теплоемкостями. Также отметим, что если  $\chi_{(C)}$  – собственные числа матрицы  $C$ , то собственными числами матрицы  $\sqrt{C}$  будут числа  $\sqrt{\chi_{(C)}}$  [25]. Поскольку матрица  $C$  диагональная, ее собственные числа равны ее диагональным элементам, которые ненулевые. Это зна-

чит, что матрица  $C$  невырожденная, но тогда и  $\sqrt{C}$  будет невырожденная, так как все  $\sqrt{\chi_{(C)}} \neq 0$ . Поэтому для матрицы  $V$  существует и обратная матрица  $V^{-1}$ . С учетом (14) и перечисленных выше обстоятельств,  $A = C^{-1}\Lambda$  можем записать в виде

$$A = (\sqrt{C})^{-1}(\sqrt{C})^{-1}\Lambda(\sqrt{C})^{-1}\sqrt{C}, \quad (15)$$

то есть

$$A = V^{-1}SV, \quad (16)$$

где

$$S = V^{-1}\Lambda V^{-1}. \quad (17)$$

Для диагональной матрицы  $V$  (поскольку  $C$  диагональная) и симметричной матрицы  $\Lambda$ , матрица  $S$  также является симметричной матрицей. Поскольку  $S$  вещественная и симметричная, то она имеет вещественные собственные числа [23]. Выражение (16) показывает, что матрицы  $A$  и  $S$  связаны преобразованием подобия. Матрицы, обладающие свойством подобия, имеют один и тот же спектр собственных чисел [25], откуда следует вещественность собственных чисел матрицы  $A$ . Теорема доказана.

Исследуем вопрос о знаке собственных чисел матрицы  $A$ . Рассмотрим сначала процессы в ТДМ без учета зависимости мощности потерь в узлах от температуры. При  $k_{\theta i} = 0$  модуль каждого диагонального элемента матрицы тепловых проводимостей  $\Lambda$  в соответствии с (9) равен:

$$|\lambda_{ii}| = \sum_{k=1}^m \lambda_{oik} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (18)$$

Из (18) следует, что для матрицы  $\Lambda$  выполняется условие диагонального преобладания по строкам. Учитывая, что все элементы в каждой строке матрицы  $A$  получены делением элементов соответствующей строки матрицы  $\Lambda$  на одно и то же значение теплоемкости ( $a_{ij} = \lambda_{ij}/C_i$ ), для элементов матрицы  $A$  также выполняется условие диагонального преобладания по строкам:

$$|a_{ii}| = \sum_{k=1}^m a_{oik} + \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (19)$$

В соответствии с теоремой Гершгорина [24], каждое собственное число матрицы  $A$  всегда расположено в области локализации (в круге Гершгорина), определяемой соотношением:

$$|a_{ii} - \chi| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (20)$$

Перепишем соотношение (20) с учетом знака диагональных элементов  $a_{ii}$  следующим образом:

$$\left| \chi + \sum_{k=1}^m a_{oik} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (21)$$

Поскольку  $\sum_{k=1}^m a_{oik} > 0$  и  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$ , ясно,

что условие (21) может выполняться только при отрицательных значениях  $\chi_{(A)k}$ . Причем должно быть

$$\chi_{(A)} \leq -\sum_{k=1}^m C_i^{-1} \lambda_{oik}. \quad (22)$$

Таким образом, доказано, что при отсутствии зависимости мощности потерь в узлах ТДМ от температуры этих узлов, изменение во време-

ни свободных составляющих термодинамических процессов в этой модели всегда имеет аperiодический затухающий характер.

Отметим, что сформулированное выше положение относится не только к термодинамическим процессам в электрических машинах, но имеет и более общий характер. Оно справедливо для любых термодинамических систем с симметричными матрицами тепловых проводимостей. Иногда в тепловых схемах электрических машин используют однонаправленные тепловые проводимости, например, в тепловых схемах двигателей защищенного исполнения [22]. Однако такие тепловые проводимости определяют перетоки тепла по направлению к охлаждающим средам и поэтому входят только в диагональные элементы матрицы  $\Lambda$ , не изменяя ее симметричного характера.

### 3. Влияние температурного изменения сопротивлений обмоток на свойства модели

Теперь рассмотрим свойства системы с учетом зависимости мощности потерь в узлах от температуры. В этом случае модуль каждого диагонального элемента матрицы  $\Lambda$  в соответствии с (9) определяется следующим образом:

$$|\lambda_{ii}| = \left| \sum_{k=1}^m \lambda_{oik} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} - \sum_{i=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)} \right|. \quad (23)$$

С учетом (23) запишем выражение для матрицы  $A$ , определяющее область локализации ее собственных чисел:

$$\left| \chi + \sum_{k=1}^m a_{oik} + \sum_{j=1}^n a_{ij} - C_i^{-1} \sum_{i=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)} \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (24)$$

Анализ неравенства (24) показывает, что при  $\sum_{i=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)} \neq 0$  оно может выполняться как при отрицательных, так и при положительных значениях  $\chi_{(A)}$  (включая и  $\chi_{(A)} = 0$ ). В любом случае для этого должно выполняться неравенство

$$\chi_{(A)} \leq C_i^{-1} \left( \sum_{i=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)} - \sum_{k=1}^m \lambda_{oik} \right). \quad (25)$$

Из (25) видно, что при  $\sum_{i=1}^s \Delta P_{st.i(l)} k_{\theta i(l)} > \sum_{k=1}^m \lambda_{oik}$  может оказаться, что  $\chi_{(A)} > 0$ . Это соответствует ситуации неограниченного увеличения температуры  $i$ -го узла без выхода на установившийся уровень.

В таблице приведены значения собственных чисел матрицы  $A = C^{-1}\Lambda$  для 6-массовой ТДМ двигателя 4A100L4 (модель включает в качестве своих узлов обмотку статора с разделением на лобовые и пазовую части, сталь статора, внутренний воздух, ротор и корпус). Обозначено:  $M/M_N$  – относительная величина момента двигателя. Учитывалось влияние изменения температуры на мощность потерь в обмотках статора и ротора.

На рис. 2 и 3 показаны графики изменения превышения температуры ( $\tau$ ) лобовых частей об-

## Величины собственных чисел матрицы $A$

Двигатель 4A100L4					
$M/M_N$	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$\chi_{(A)k} \cdot 100, 1/c$	-361,7809	-361,7808	-361,7807	-361,7805	-361,7802
	-10,2185	-10,1960	-10,1285	-10,0160	-9,8586
	-2,5035	-2,4870	-2,4383	-2,3600	-2,2567
	-1,0839	-1,0786	-1,0621	-1,0327	-0,9878
	-0,0594	-0,0554	-0,0427	-0,0196	+0,0165
	-0,2781	-0,2729	-0,2578	-0,2334	-0,2005

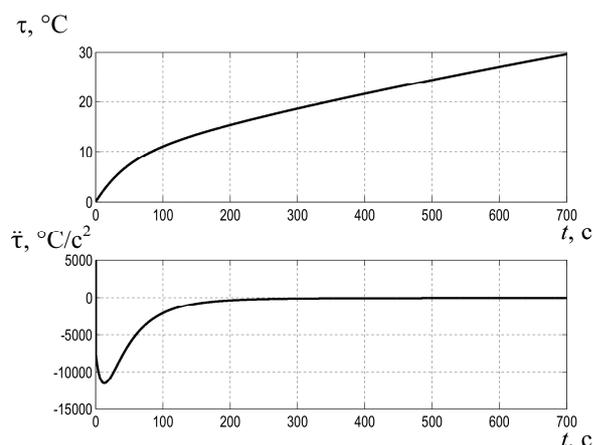


Рис. 2. Графики  $\tau(t)$  и  $\ddot{\tau}(t)$  при  $M/M_N = 1,0$

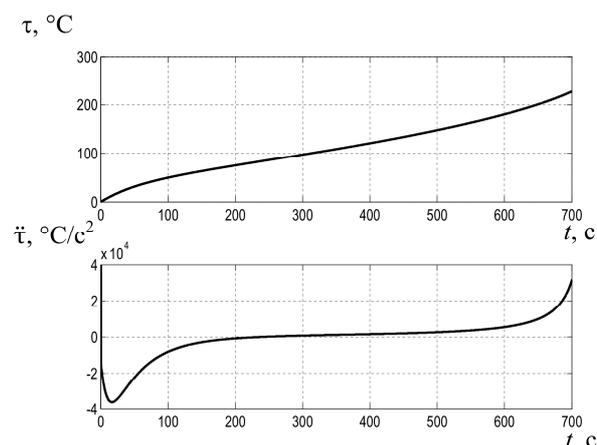


Рис. 3. Графики  $\tau(t)$  и  $\ddot{\tau}(t)$  при  $M/M_N = 2,0$

мотки статора двигателя 4A100L4 и второй производной этой величины ( $\ddot{\tau}$ ) при разных величинах нагрузки. Рис. 2 соответствует ситуации, когда все собственные числа матрицы  $A$  отрицательны, а рис. 3 – ситуации, при которой одно из собственных чисел имеет положительное значение (см. таблицу) и процесс нагрева двигателя приобретает характер «теплового саморазгона», о чем свидетельствует переход графика второй производной в положительную область.

### Выводы

1. Получено обобщенное математическое описание ТДМ электрической машины для произвольного количества узлов и охлаждающих сред, учитывающее влияние температуры узлов на величину греющих потерь, выделяющихся в этих узлах.

2. Показано, что введение учета зависимости мощности потерь в узлах ТДМ от температуры этих узлов при линейной (или линеаризованной) связи этих величин не изменяет свойство линейности модели.

3. Аналитически доказано, что при отсутствии зависимости мощности потерь в узлах ТДМ от температуры этих узлов изменение во времени свободных составляющих термодинамических процессов в этой модели всегда имеет аperiодический затухающий характер, однако при наличии температурной зависимости мощности потерь это положение не всегда справедливо. Аналитически определены условия, при которых в случае нали-

чия температурной зависимости мощности потерь происходит неограниченное увеличение температуры элементов электрической машины без выхода на установившийся уровень.

### Литература

1. Онищенко, Г.Б. Проблемы и перспективы развития электропривода / Г.Б. Онищенко, М.Г. Юньков // Труды VIII Международной (XIX Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2014: в 2 т. Т. 1. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2014. – С. 5–9.
2. Зюзев, А.М. К оценке теплового состояния асинхронного двигателя в повторно-кратковременном режиме / А.М. Зюзев, В.П. Метельков // Электротехника. – 2014. – № 9. – С. 19–23. DOI: 10.3103/S1068371214090090
3. Программный комплекс для исследования эксплуатационных режимов электроприводов буровых установок / А.М. Зюзев, В.М. Липанов, В.П. Метельков и др. // Электротехника. – 2003. – № 7. – С. 25–31.
4. Зюзев, А.М. Математическая модель спуско-подъемного агрегата буровой установки / А.М. Зюзев, В.П. Метельков, В.Н. Радченко // Изв. вузов. Горный журнал. – 2003. – № 5. – С. 22–30.
5. Boglietti, A. TEFC Induction Motors Thermal Models: A Parameter Sensitivity Analysis / A. Boglietti, A. Cavagnino, D.A. Staton // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2005. – Vol. 41, issue 3. – pp. 756–763. DOI: 10.1109/TIA.2005.847311

6. Chin, Y.K. *Transient Thermal Analysis using both Lumped-Circuit Approach and Finite Element Method of a Permanent Magnet Traction Motor* / Y.K. Chin, D.A. Staton. // *IEEE Africon*. – Gaborone, Botswana, 2004. – pp. 1027–1035. DOI: 10.1109/AFRICON.2004.1406847

7. *Evolution and Modern Approaches for Thermal Analysis of electrical machines* / A. Boglietti, A. Cavagnino, D. Staton et al. // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2009. – Vol. 56, no. 3. – pp. 871–882. DOI: 10.1109/TIE.2008.2011622

8. Tang, W.H. *A Simplified Transformer Thermal Model Based on Thermal-Electric Analogy* / W.H. Tang, Q.H. Wu, Z.J. Richardson // *IEEE Transactions on Power Delivery*. – 2004. – Vol. 19, no. 3. – pp. 1112–1119. DOI: 10.1109/TPWRD.2003.822968

9. Копылов, И.П. *Проектирование электрических машин* / Б.К. Клоков, В.П. Морозкин, Б.Ф. Токарев. – М.: Высш. шк., 2005. – 767 с.

10. Филиппов, И.Ф. *Теплообмен в электрических машинах* / И.Ф. Филиппов. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 256 с.

11. Гольдберг, О.Д. *Проектирование электрических машин* / О.Д. Гольдберг, И.С. Свириденко. – М.: Высш. шк., 2006. – 430 с.

12. Федоров, М.М. *Динамические тепловые модели узлов электрических машин* / М.М. Федоров // *Электромашинобудування та електрообладнання: Міжвід. наук.-техн. зб.* – 1999. – Вип. 53. – С. 70–73.

13. *Электромеханические и тепловые режимы асинхронных двигателей в системах частотного управления* / Р.Т. Шрейнер, А.В. Костылев, В.К. Криволяз, С.И. Шилин. – Екатеринбург: ГОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2008. – 361 с.

14. *Расчетно-теоретическое определение изменения теплового состояния обдуваемых асинхронных двигателей в режиме короткого замыкания и после него* / А.Н. Бурковский, О.И. Пилипенко, О.А. Рыбалко, А.А. Мельник // *Взрывозащищенное электрооборудование: сб. науч. тр. УкрНИИВЭ*. – Донецк, 2007. – С. 183–193.

15. Воробьев, В.А. *Нагревание и тепловая защита асинхронных двигателей средней мощности*

*при периодической нагрузке: дис. ... канд. техн. наук.* – Свердловск, 1982. – 181 с.

16. Петрушин, В.С. *Тепловые расчеты нестационарных режимов работы асинхронных двигателей регулируемых электроприводов* / В.С. Петрушин, А.М. Якимец, В.Л. Кобрин // *Электротехніка і електромеханіка*. – 2003. – № 4. – С. 65–68.

17. Петрушин, В.С. *Особенности тепловых расчетов неустановившихся режимов работы регулируемых асинхронных двигателей* / В.С. Петрушин, А.М. Якимец, О.В. Каленик. // *Электромашинобудування та електрообладнання: міжвід. наук.-техн. зб.* – 2008. – Вип. 71. – С. 47–51.

18. Вареник, Е.А. *Тепловые переходные процессы в элементах конструкции асинхронных двигателей при неподвижном роторе* / Е.А. Вареник, М.М. Федоров, В.Е. Михайлов // *Взрывозащищенное электрооборудование: сб. науч. тр. УкрНИИВЭ*. – Донецк, 2009. – С. 146–154.

19. Савин, Б.В. *Исследования и разработки взрывозащищенных асинхронных двигателей мощностью 0,25–2000 кВт* / Б.В. Савин, И.Г. Ширнин // *Электротехническая промышленность. Сер. Электрические машины*. – 1977. – № 10 (80). – С. 7–8.

20. *Продукция ООО «ПО «Ленинградский электромашиностроительный завод»*. Технический каталог [Диск]. – Русэлпром, 2009. – 160 с.

21. Борисенко, А.И. *Охлаждение промышленных электрических машин* / А.И. Борисенко, О.Н. Костииков, А.И. Яковлев – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 296 с.

22. Сипайлов, Г.А. *Тепловые гидравлические и аэродинамические расчеты в электрических машинах* / Г.А. Сипайлов, Д.И. Санников, В.А. Жадан. – М.: Высш. шк., 1989. – 239 с.

23. Корн, Г. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

24. Гантмахер, Ф.Р. *Теория матриц* / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

25. Ланкастер, П. *Теория матриц* / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1973. – 280 с.

**Метельков Владимир Павлович**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург; v.p.metelkov@urfu.ru.

*Поступила в редакцию 4 мая 2016 г.*

## THEORETICAL ASPECTS OF DEVELOPING THERMODYNAMIC MODELS OF ELECTRIC MOTORS

V.P. Metelkov, v.p.metelkov@urfu.ru

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation

The paper provides a generalized mathematical description of the thermodynamic model for an electrical machine, which is based on thermal circuits for any number of nodes and cooling media. This description considers an influence of temperature of nodes on the thermal losses at these nodes. Considering the dependence of power losses in the nodes of the thermodynamic model on the temperature of these nodes due to temperature dependency of winding resistance does not change the model linearity. The analysis proves that if there is no dependence of the power losses in the nodes of the thermodynamic model on the temperature of these nodes, in-time change of transient components of thermodynamic processes of this model is always of an acyclic damped nature. However, if there is a temperature dependence of the power losses, this provision is not always relevant. The authors have analytically defined the conditions of non-limited temperature rise of electric machine components without switch to steady-state mode (provided there is a temperature dependence of the power losses).

*Keywords: thermodynamic model, electric motor, thermal circuit, differential equations, eigenvalues.*

### References

1. Onishchenko G.B., Yunkov M.G. [Power Drive Systems Development Problems and Prospects]. *Trudy VIII Mezhdunarodnoy (XIX Vserossiyskoy) konferentsii po avtomatizirovannomu elektroprivodu* [Proc. of the VIII Int. (XIX All-Russian) Conf. on the Automatic Electric Drive]. Saransk, 2014, vol. 1, pp. 5–9.
2. Zyuzev A.M., Metelkov V.P. Toward the Evaluation of the Thermal State of an Induction Motor in the Recursive Short\_Term Mode. *Russian Electrical Engineering*, 2014, vol. 85, no. 9, pp. 554–558. DOI: 10.3103/S1068371214090090
3. Zyuzev A.M., Lipanov V.M., Metelkov V.P., Polyakov V.N., Popov A.S., Shut'ko V.F. The Software Package for the Study of Operating Modes of Electric Drives for Drilling Rigs. *Russian Electrical Engineering*, 2003, no. 7, pp. 25–31.
4. Zyuzev A.M., Metelkov V.P., Radchenko V.N. Mathematical Model of Lowering and Lifting Unit for Drilling Rig, *Izvestiya vuzov. Gornyy zhurnal* [Proceedings of the universities. Mining Journal], 2003, no. 5, pp. 22–30.
5. Boglietti A., Cavagnino A., Staton D.A. TEFC Induction Motors Thermal Models: A Parameter Sensitivity Analysis. *IEEE Transactions on Industry Applications*, May-June 2005, vol. 41, issue 3, pp. 756–763. DOI:10.1109/TIA.2005.847311
6. Chin Y.K., Staton D.A. Transient Thermal Analysis Using Both Lumped-Circuit Approach and Finite Element Method of a Permanent Magnet Traction Motor. *IEEE Africon*, Gaborone, Botswana, September 2004, pp. 1027–1035. DOI: 10.1109/AFRICON.2004.1406847
7. Boglietti A., Cavagnino A., Staton D., Shanel M., Mueller M., Mejuto C. Evolution and Modern Approaches for Thermal Analysis of Electrical Machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, March 2009, vol. 56, no. 3, pp. 871–882. DOI: 10.1109/TIE.2008.2011622
8. Tang W.H., Wu Q.H., Richardson Z.J. A Simplified Transformer Thermal Model Based on Thermal-Electric Analogy. *IEEE Transactions on Power Delivery*, July 2004, vol. 19, no. 3, pp. 1112–1119. DOI: 10.1109/TPWRD.2003.822968
9. Kopylov I.P., Klovov B.K., Morozkin V.P., Tokarev B.F. *Proektirovanie elektricheskikh mashin* [Design of Electrical Machine]. Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 2005. 767 p.
10. Filippov I.F. *Teploobmen v elektricheskikh mashinakh* [Heat Transfer in Electrical Machines]. Leningrad, Energoatomizdat, 1986. 256 p.
11. Goldberg O.D., Sviridenko I.S. *Proektirovanie elektricheskikh mashin* [Design of Electrical Machine] Moscow, Vyssh. Shk., 2006. 430 p.
12. Fedorov M.M. [Dynamic Models of Thermal Units of Electrical Machines]. *Electrical Machinery and Electrical Equipment: Collection of Scientific Papers*, 1999, issue 53, pp. 70–73.
13. Shreiner R.T., Kostylev A.V., Krivoviyaz V.K., Shilin S.I. *Elektromekhanicheskie i teplovye rezhimy asinkhronnykh dvigateley v sistemakh chastotnogo upravleniya* [Electromechanical and Heat Modes of Induction Motors in Frequency Control Systems]. Ekaterinburg, Russian State Professional Pedagogical University Press, 2008. 361 p.

14. Burkovskiy A.N., Pilipenko O.I., Rybalko O.A., Melnik A.A. Computational and Theoretical Determination of the Change of the Thermal State Windswept Asynchronous Motors in Short Circuit Mode and After. *Explosion-proof Electrical Equipment: Collection of Scientific Papers UkrNIIVE*. Donetsk, 2007, pp.183–193.
15. Vorobyov V.A. *Nagrevanie i teplovaya zashchita asinkhronnykh dvigateley sredney moshchnosti pri periodicheskoy nagruzke: dis. ... cand. tekhn. nauk* [Heating and Thermal Protection of Asynchronous Motors of Average Power Under Periodic Load: Tesis for a Cand.'s Degree]. Sverdlovsk, 1982. 181 p.
16. Petrushin V.S., Yakimets A.M., Kobrin V.L. Calculation of Thermal Non-stationary Modes of Operation of Asynchronous Motors for Variable Speed Drives, *Electrotechnics and Electrical Engineering*, 2003, no. 4, pp. 65–68.
17. Petrushin V.S., Yakimets A.M., Kalenik O.V. Features Thermal Calculations of Transient Modes, of Regulated Asynchronous Motors. *Electrical Machinery and Electrical Equipment: Collection of Scientific Papers*, 2008, issue 71, pp. 47–51.
18. Varenik E.A., Fedorov M.M., Mikhailov V.E. [Thermal Transients in Structural Elements of Induction-Motors with a Fixed Rotor]. *Explosion-proof Electrical Equipment: Collection of Scientific Papers UkrNIIVE*. Donetsk, 2009, pp.146–154.
19. Savin B.V., Shirnin I.G. Савин, Б.В. Research and Development of Explosion-proof Asynchronous Motors 0,25–2000 kW. *Electrotechnical Industry. A Series of Electrical Machines*, 1977, no. 10 (80), pp. 7–8.
20. Production of “Leningrad Electric Machine Plant”. Technical Catalog. Ruselprom, 2009. 160 p. [Disk].
21. Borisenko A.I., Kostikov O.N., Yakovlev A.I. *Okhlazhdenie promyshlennykh elektricheskikh mashin* [Cooling of Industrial Electric Machines]. Moscow, Energoatomizdat, 1983. 296 p.
22. Sipaylov G.A., Sannikov D.I., Zhadan V.A. *Teplovye, gidravlicheskie i aerodinamicheskie raschety v elektricheskikh mashinakh* [Thermal, Hydraulic and Aerodynamic Computations in Electrical Machines]. Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 1989. 239 p.
23. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Moscow, Nauka, 1984. 832 p.
24. Gantmaher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka, 1966. 576 p.
25. Lankaster P. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka, 1973. 280 p.

Received 4 May 2016

---

#### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Метельков, В.П. Теоретические аспекты построения термодинамических моделей электродвигателей / В.П. Метельков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 82–89. DOI: 10.14529/power160211

#### FOR CITATION

Metelkov V.P. Theoretical Aspects of Developing Thermodynamic Models of Electric Motors. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 82–89. (in Russ.) DOI: 10.14529/power160211

---