УДК 621.311.018 DOI: 10.14529/power180104

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ ПРИ АНАЛИЗЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ

П.Л. Воронов

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия,
ООО НПП «ЭКРА», г. Чебоксары, Россия

Тензорно-топологический метод Крона, развиваемый многими отечественными и зарубежными исследователями, открывает широкие возможности для решения прикладных задач в сложных электроэнергетических системах с помощью тензорного анализа и диакоптики. Его применение к анализу и расчету несимметричных и сложных видов повреждений, возникающих в системах электроснабжения (СЭС), имеет свои особенности, обусловленные необходимостью преобразований переменных (систем координат). Помимо задач определения матриц преобразования и уравнений связи появляются проблемы объединения отдельных частей системы, которые представлены в различных координатах. Затруднения возникают вследствие необходимости преобразования этих матриц при построении схем замещения.

В предлагаемой статье на простейших примерах рассмотрены некоторые особенности совместного применения матриц преобразования координат, матриц соединения и уравнений связи, а также их различения при моделировании и анализе несимметричных повреждений в СЭС.

Ключевые слова: несимметричные повреждения, матрицы преобразования, симметричные составляющие, схемы замещения последовательностей, уравнения связи.

Введение

Физическая структура реальных сложноразветвленных электрических сетей и взаимосвязанных машин систем электроснабжения (СЭС) является исключительно сложной системой как с точки зрения описания ее динамических свойств посредством уравнений электромагнитного поля, так и с помощью сетевых моделей и эквивалентных электрических схем замещения. Поэтому все более настоятельным является привлечение для анализа установившихся и переходных режимов СЭС тензорно-топологического метода [1–5], который в настоящее время с развитием и совершенствованием программно-вычислительных комплексов становится по преимуществу средством инженерных расчетов.

В зависимости от целей анализа при расчетах на ЭВМ, как правило, используется исходная информация в виде заданных параметров системы и режима, а также топологической структуры или схемы замещения. Часто параметры разных элементов СЭС задаются в различных системах координат (A, B, C; d, q, 0; 1, 2, 0; f, b, 0 и т. д.) [6–8], поэтому при конкретных расчетах нередко приходится проводить предварительные преобразования параметров, например, к одной системе координат. Между тем даже при простом переходе от фазных переменных к симметричным составляющим и, наоборот, необходимо преобразовывать каждый элемент трехфазной цепи в отдельности. Применение метода преобразования координат к отдельным элементам СЭС и к анализу электрических сетей с распределенными источниками энергии подробно проиллюстрировано в статье [9].

Общая теория расчетов трехфазных систем при несимметричных и сложных видах повреждений дана в [10–12]. Она базируется на применении метода симметричных составляющих и построении комплексных схем замещения с промежуточными трансформаторами. В [12–16] представлены различные модификации методов анализа несимметричных и неполнофазных режимов в базисах, симметричных составляющих и в фазных координатах. В [17, 18] развит метод расчета несимметричных повреждений на основе тензорной методологии Крона, сочетающий в себе два преобразования: соединение схем последовательностей и учета следствий из граничных условий, соответствующих конкретным видам несимметрии.

Тензоры и матрицы преобразования электрических систем

Первым шагом в развитии тензорно-топологического метода анализа электрических систем стало применение матриц и многомерных векторов. Тензоры всегда рассматривались как инвариантные объекты относительно преобразования координат, выражаемые через свои компоненты в форме матриц и векторы базиса, соответствовавшие координатным системам, в которых эти компоненты определялись. Системы координат, вводимые произвольно исследователями, устанавливают соответствие между числами и топологическими (геометрическими) пространствами. В каждой точке такого пространства в зависимости от его размерности имеют место координатные линии. Эти линии выбираются по усмотрению, но не связаны непосредственно с характеристиками изучаемого физического явления. Однако важно, что законы изменения физических процессов, рассматриваемые исследователем относительно этого произвольного выбора систем координат, всегда инвариантны. Данное обстоятельство накладывает существенные ограничения на формулы преобразования тензорных величин при изменении систем координат. Матричный анализ и формулы (законы) преобразования переменных (тензоров) нашли в настоящее время широкое применение в прикладной электротехнике, но все же до сих пор наблюдается оппозиция слову «тензор». Это объясняется не только тем, что при анализе электрических сетей оперируют лишь тензорами 0, 1, 2 рангов, компоненты которых выражаются числами и матрицами первого и второго порядка, но и представлениями, что топологическая структура возбужденной электрической цепи должна быть непременно идентична ее ориентированному графу (структуре алгебраической топологии). На самом же деле она таковой не является, поскольку матрицы соединения и матрицы преобразования координат кардинально отличаются от матриц инциденций графа цепи. Матрицы инциденций связывают разно-мерные пространства и автоматически удовлетворяют теореме Стокса, а не законам Кирхгофа. Конечно, сами по себе матрицы не имеют физического смысла в отличие от векторов (тензоров), представляющих собой объективную, предметную и измеряемую сущность, обладающую множеством групп, составляющих в бессчетном числе систем координат. Каждый элемент из этих групп может быть записан в форме матрицы, но она лишь столбец, таблица, многомерный куб чисел или составляющих тензора в определенной системе координат.

Любой процесс или движение определяется посредством выделяемой системы координат, но движение среды подчиняется определенным законам, причем для практики вполне достаточно знать только некоторые средние, суммарные или глобальные характеристики его, описываемые тензорными инвариантными уравнениями с переменными, принимающими обобщенные значения, например, переменными Лагранжа. Эти переменные представляют сопутствующую систему координат. Напомним, что в уравнениях Лагранжа – Максвелла электрические токи рассматриваются как обобщенные скорости, а в качестве соответствующих переменных или координат принимаются количества электрических зарядов в данный момент времени, причем эти обобщенные координаты не входят в уравнения Максвелла в явной форме. Между тем определение вектора только его компонентами является недостаточным, даже если подчеркивается, что они преобразуются при замене системы координат по определенным правилам. Приводя их значения в форме матриц, надо указывать и базис, в котором они заданы. Векторы базиса в геометрическом смысле направлены по касательным к координатным линиям. Они могут тоже изменяться при замене координат посредством соответствующих матриц преобразования. Например, если заданы две системы координат X^1, X^2 и Y^1, Y^2 на плоскости, причем существует соответствие $X^i = X^i(Y^1, Y^2)$, то выполняется равенство $\partial X^i / \partial Y^j = C^i_{\bullet j}$, причем индекс i соответствует строке, а j – столбцу матрицы $C^i_{\bullet j}$. Взаимно обратной к ней будет матрица $\partial Y^j / \partial X^k = A^j_{\bullet k}$, а произведение этих матриц является единичной матрицей $\delta^i_{\bullet k}$, называемой символом Кронекера. Заметим, что обозначения с помощью индексов и точек, показывающих порядок следования индексов, существенно облегчают выполнение операций с тензорами, позволяют избежать ошибок при преобразованиях и решении тензорных уравнений. Они также указывают ранг тензора и степень его ковариантности или контравариантности. В прямой нотации используется обычная запись $[C]$, $[A]$. Из определения вектора (тензора первого ранга) следует, что скорость или электрический ток – это контравариантные тензоры (у них верхние индексы), а вектор-градиент скалярной функции или электрическое напряжение – это ковариантные тензоры (у них нижние индексы). Скаляр – это тензор нулевого ранга, характеризующийся числом. Скаляром является мощность электрической сети. Помимо этих величин, связанных с возбужденной электрической сетью, инвариантными объектами относительно преобразования систем координат являются также тензоры второго ранга: полное (кажущееся) сопротивление или импеданс $[Z_{ij}]$ и проводимость или адмиттанс $[Y^{ji}]$ сети, представляемые в различных системах координат матрицами второго порядка. Для определения их компонент при смене системы координат требуется уже две матрицы преобразования: $[Z'] = [C_t][Z][C]$, $[Y'] = [A_t][Y][A]$. Количество матриц, необходимых для преобразования тензора, равно его рангу или валентности.

В общем случае вся совокупность матриц преобразования, являющихся ключом к тензорному анализу, обладает свойством группы $[C] = [C_1][C_2][C_3]\ldots$, но каждая отдельная из них представляет собой смешанный тензор второго ранга, у которого один индекс ковариантный, а второй – контравариантный. Он выражает отношение между новыми и старыми переменными и имеет особый закон (формулу) преобразования. Его преобразование осуществляется с помощью трех матриц. Например, если для токов заданы соотношения: $[i^2] = [C^2_{\bullet 1}][i^1]$, $[i^2] = [C^2_{\bullet 3}][i^3]$, $[i^1] = [C^1_{\bullet 4}][i^4]$, то из них можно найти путем последовательных подстановок и преобразований матрицу $[C^{3}_{\bullet 4}]$, преобразующую токи $[i^{3}]$ в $[i^{4}]$. Она имеет вид: $[C^{3}_{\bullet 4}] = [C^{2}_{\bullet 3}]^{-1}[C^{2}_{\bullet 1}][C^{1}_{\bullet 4}]$. Следовательно, полную совокупность всех матриц преобразования можно обоснованно называть тензором, поскольку каждый тензорный или геометрический объект объединяется с целой группой матриц преобразования, причем каждая новая система координат, в которой исследуется объект, характеризуется своей собственной матрицей преобразования.

Таким образом, если известно уравнение состояния физической системы в матричной форме, то оно будет таким же и для других систем той же физической природы, но только при условии существования группы матриц преобразования и замене всех величин в этом уравнении тензорами. В тензорных уравнениях, являющихся инвариантом относительно определенной группы матриц преобразования, важно всегда одновременно рассматривать три понятия: преобразование, инвариантность и группа преобразований. Исходя из этих представлений, можно ассоциировать все стационарные электрические сети как производные от некоторой исходной или «элементарной» (примитивной) сети и реализовать на основе простейших алгоритмов процесс составления их уравнений и решения по частям с помощью соответствующих матриц преобразования, элементами которых являются только значения 0, 1, –1.

Особенности матриц соединения и преобразования координат

Во многих случаях аналитического и численного решения на ЭВМ сложно-замкнутых электрических сетей приходится сталкиваться с рядом специфических особенностей при замене координат. Дело в том, что матрица преобразования $\partial X^{i} / \partial Y^{j} = C^{i}_{\bullet j}$, являющаяся матрицей соединения отдельных ветвей и частей (подсистем) в результирующую систему, часто оказывается сингулярной (вырожденной и не имеющей обратной матрицы). Но поскольку переход от «элементарной» все-контурной сети, представляющей собой в простейшем случае отдельные ветви, замкнутые на себя, не требует применения обратных матриц, то возникает вопрос о правомерности отнесения таких преобразований к тензорным. Суть вопроса состоит в том, что в тензорном анализе используются несингулярные матрицы, а операции замыкания, размыкания и соединения, например, ветвей для получения множества сетей, состоящих из одной и той же их совокупности, но связанных различным образом, до работ Крона не рассматривались как преобразования координат. Однако несингулярная матрица для любой из образованного таким путем счетного множества сетей на самом деле всегда существует, если принять во внимание, что все электрические сети являются ортогональными сетями [19]. В принципе любая из этого множества сеть может быть принята за «элементарную», а переход от ее токов, напряжений и сопротивлений к другой сети может быть выполнен по формулам:

$$
\begin{aligned}
&[i^{э}] = [C^{э}_{\bullet к}][i^{к}],\\
&[u_{к}] = [C^{\bullet э}_{к}][u_{э}], \qquad (1)\\
&[Z_{кк}] = [C^{\bullet э}_{к}][Z_{ээ}][C^{э}_{\bullet к}].
\end{aligned}
$$

С практической точки зрения и удобства составления матриц преобразования и вычислений рекомендуется применять, как правило, в качестве исходной «элементарной» сети все-контурную цепь. Тогда матрица соединения $[C^{э}_{\bullet к}]$ при переходе от параметров «элементарной» сети к новой сети с меньшим числом контуров выполняет помимо функции соединения ветвей еще и функцию наложения ограничений на новую сеть, изменяя ее степень свободы. В таком преобразовании она представляет собой лишь часть, относящуюся к замкнутым путям (контурам) токов, несингулярной матрицы ортогональной сети.

Одновременно с матрицами соединения при анализе повреждений в СЭС применяются и матрицы, с помощью которых непосредственно осуществляется замена переменных (координат). Чаще всего для трехфазных сетей используются матрицы преобразования от фазных координат к симметричным составляющим 1, 2, 0 и от вращающейся системы действительных координат d, q, 0 к комплексным составляющим (прямым и инверсным координатам) вращающегося поля f, b, 0. Эти матрицы при соблюдении условия инвариантности мощности имеют вид:

$$
[C^{0,1,2}_{A,B,C}] = \begin{array}{c|c|c|c|}
 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
A & 1 & 1 & 1 \\ \hline
B & 1 & a^{2} & a \\ \hline
C & 1 & a & a^{2} \\ \hline
\end{array} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},
$$

$$
[C^{0,f,b}_{0,d,q}] = \begin{array}{c|c|c|c|}
 & 0 & f & b \\ \hline
0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline
d & 0 & 1 & j \\ \hline
q & 0 & 1 & -j \\ \hline
\end{array} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.
$$

Они, преобразуя параметры сети, принципиально отличаются от матриц соединения, содержащих в себе скрытую и полезную информацию о топологических свойствах и поведении сети. Эта информация в зашифрованном виде выражает собой законы Кирхгофа. И хотя сами матрицы соединения не входят непосредственно в уравнения состояния сети, они в отличие от параметров системы и параметров режима (тока, напряжения мощности, частоты и т. д.) характеризуют топологию сети и определяют координатные линии, вдоль которых изменяются переменные. Матрицы же преобразования координат, не затрагивая конфигурацию (соединение ветвей) сетей, преобразуют только параметры режима, например, токи одной совокупности переменных в токи другой совокупности переменных или координат. Заметим, что их элементы могут быть комплексными числами, поэтому при выполнении преобразований транспонированная матрица $[C^{0,1,2}_{A,B,C}]^*_t$ принимается комплексно-сопряженной, причем она равна обратной матрице $[C^{0,1,2}_{A,B,C}]^{-1}$. Группы матриц преобразования, если они имеют в качестве своих компонент только целые числа в алгебраической топологии, называются группами Бетти. Но помимо таких групп преобразований в расчетах электрических сетей и особенно машин используются группы, в которых $[C]$ являются функциями переменных (координат). Примером такого преобразования является переход от фазных переменных к переменным в координатных осях d, q, 0, жестко связанных с ротором машины, и к синхронно вращающимся осям d_s, q_s, 0. Процедуры такого вида преобразований для электромеханических систем разработаны на основе тензорной теории анализа обобщенных («элементарных») машин разных типов. Уравнения идеализированных обобщенных машин в различных системах координат подробно представлены и проанализированы в [20]. Заметим, что тензорный метод не уменьшает количество вычислений, но экономит время благодаря применению специальных алгоритмов и приемов, стандартизирующих и автоматизирующих процесс анализа режимов СЭС на ЭВМ, исключает необходимость изобретения новых методов для решения появляющихся сложных задач. Преимущества его особенно наглядно проявляются при анализе сложно-замкнутых сетей, содержащих электрические машины. Поскольку физические процессы в обобщенных машинах описываются с помощью эквивалентных параметров относительно их электрических и механических зажимов на основе фундаментальных предположений, то они могут быть представлены совокупностью движущихся линейных электрических сетей с сосредоточенными параметрами. В таком виде обобщенная машина отличается от «элементарной» неподвижной сети только в отношении расположения ее обмоток (токовых слоев) по двум взаимно перпендикулярным осям и в отношении их пространственного перемещения относительно друг друга. Но поскольку при таком расположении обмоток взаимный импеданс имеет место только между обмотками по одной оси, то модель такой машины можно представить в виде двух отдельных многообмоточных трансформаторов, расположенных ортогонально. Данная модель вполне допустима при определении токов короткого замыкания (КЗ) и расчета других видов повреждений для начального и произвольного момента времени при условии введения расчетных ЭДС E''_q, E'_q, E_t, определяемых из векторных диаграмм для соответствующих режимов работы машин. Для исследования режима качаний и переходных процессов при несимметричных повреждениях целесообразнее всего использовать координаты f, b, 0 [18].

Примеры использования различных матриц преобразования и соотношения между ними

Проиллюстрируем на простейших примерах особенности использования различных матриц преобразования и соотношений между ними при расчетах несимметричных повреждений в СЭС.

На рис. 1 приведена трехфазная схема замещения сети с несимметричной нагрузкой (в общем случае пусть $Z_{DD} \neq Z_{FF} \neq Z_{GG}$) или сети с компенсированной нейтралью, широко используемой в качестве модели для исследования режима замыкания одной фазы на землю, когда под этими сопротивлениями можно понимать емкости фаз относительно земли $Z_C = 1/\omega C$.

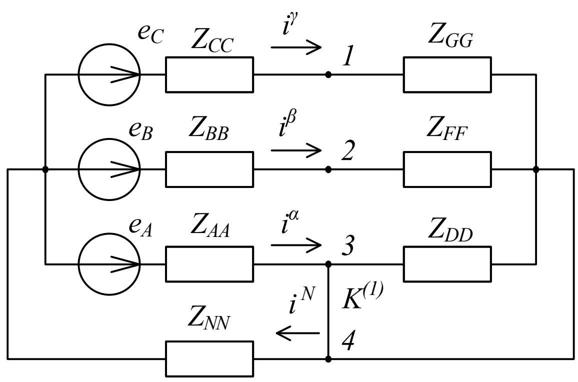

Рис. 1. Трехфазная схема замещения сети с однофазным замыканием

При известных параметрах 7 ветвей, обозначенных латинскими буквами, и ЭДС нетрудно в отсутствие замыкания $\text{К}^{(1)}$ (обозначенного пунктирной линией) составить ее уравнения для трех независимых замкнутых контуров α, β, γ, выполнив преобразование от «элементарной» сети с помощью матрицы соединения

$$[C^{\bullet\text{э}}_{\text{к}}]_t = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} & A & B & C & D & F & G & N \\ \hline \alpha & 1 & & & 1 & & & 1 \\ \hline \beta & & 1 & & & 1 & & 1 \\ \hline \gamma & & & 1 & & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

и формул преобразования (1). Представим эти уравнения в базисе фазных переменных в матричной форме:

$$\begin{array}{|c|}\hline e_\alpha \\ \hline e_\beta \\ \hline e_\gamma \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline Z_{AA}+Z_{DD}+Z_{NN} & Z_{NN} & Z_{NN} \\ \hline Z_{NN} & Z_{BB}+Z_{FF}+Z_{NN} & Z_{NN} \\ \hline Z_{NN} & Z_{NN} & Z_{CC}+Z_{GG}+Z_{NN} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline i^\alpha \\ \hline i^\beta \\ \hline i^\gamma \\ \hline \end{array}.$$

Решив их относительно контурных токов, можно затем определить и токи во всех ветвях. Конечно, для такой простой сети эти уравнения можно было бы записать и непосредственно, используя правила составления контурных матриц. Однако для сложно-разветвленных сетей с взаимоиндукцией между ветвями справиться с такой задачей без ошибок крайне затруднительно. Соединение ветвей этой схемы в многоконтурную сеть можно осуществить и с помощью уравнений связи $[M]\cdot[i]=0$. Под уравнениями связи понимают соотношения между переменными, например, между токами в узле. Тогда $[M]$ – матрица алгебраического отображения сети или узловая матрица соединений (на рис. 1 узлы связи обозначены цифрами). Для рассматриваемой сети эта матрица имеет вид:

$$[M]= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & A & B & C & D & F & G & N \\ \hline
1 & 1 & & & -1 & & & \\ \hline
2 & & 1 & & & -1 & & \\ \hline
3 & & & 1 & & & -1 & \\ \hline
4 & 1 & 1 & 1 & & & & -1 \\ \hline
\end{array}. \qquad (3)$$

Поскольку матрицы $[C^{э}_{\bullet к}]$ и $[M]$ выполняют одну и ту же функцию соединения ветвей, то должно существовать определенное соотношение между ними. В [21] такое соотношение было получено в форме двух уравнений: $[M]=[M_д M_c]$, $[C^{\bullet э}_{к}]=[-M_{ct}(M_д^{-1})_t\,|\,1]$. В этих уравнениях подматрица $[M_д]$ – неособенная матрица некоторого дерева графа исследуемой схемы замещения, а $[M_c]$ – подматрица, соответствующая хордам этого же графа. Между тем искомое соотношение между матрицами $[C^{э}_{\bullet к}]$ и $[M]$ можно найти существенно проще, не прибегая к теории графов. Для этого достаточно приравнять независимые контурные токи токам фаз $i^\alpha=i^A, i^\beta=i^B, i^\gamma=i^C$ и дополнить эти три независимых уравнения еще тремя зависимыми: $i^\alpha=i^D, i^\beta=i^F, i^\gamma=i^N-i^\alpha-i^\beta$. Из полученных шести уравнений и определяется матрица (2), а также соотношение между матрицами (2) и (3).

Однако в практических расчетах, как правило, требуется обратный переход от уравнений $[i^э]=[C^{э}_{\bullet к}][i^к]$ к уравнениям связи $[M]\cdot[i]=0$. В этом случае проще всего взять транспонированную матрицу (2) и представить ее посредствам перестановки строк в виде сложной матрицы, разделив её координатные оси на относящиеся к независимым и зависимым контурам (k', k'') и образующим их ветвям (b', b''). Вычитая из нее затем единичную квадратную матрицу, находим

$$[C^{\bullet э}_{к}]_t-[1]= \begin{array}{c|c|c|}
 & k' & k'' \\ \hline
b' & 1 & 0 \\ \hline
b'' & C' & 0 \\ \hline
\end{array} - \begin{array}{c|c|c|}
 & k' & k'' \\ \hline
b' & 1 & 0 \\ \hline
b'' & 0 & 1 \\ \hline
\end{array} = \begin{array}{c|c|c|}
 & k' & k'' \\ \hline
b' & 0 & 0 \\ \hline
b'' & C' & -1 \\ \hline
\end{array}. \qquad (4)$$

После исключения нулевых строк матрицы (4) получаем соотношение $[C'\,|\,1]=[M]$, которое нетрудно проверить. Его удобно использовать при анализе несимметричных повреждений.

Обратимся вновь к схеме (см. рис. 1) и при замыкании фазы на землю выполним ее расчет, воспользовавшись методом симметричных составляющих. Предположим, что ЭДС и сопротивления генератора уже заданы в системе симметричных составляющих, а сопротивления емкостной нагрузки Z_C и сопротивление Z_{NN} в нейтрали даны в фазных координатах. При переходе к симметричным составляющим помимо исходной (индекс «к») и «элементарной» (индекс «э») сетей будут вводиться еще две: «элементарная» сеть последовательностей (индекс «п») для отдельных элементов исходной трехфазной сети, преобразованных к симметричным составляющим посредством матрицы $[C^{0,1,2}_{A,B,C}]$, и комплексная схема замещения (индекс «s»), определяемая обычно следствиями из граничных условий для различных повреждений. Между токами любой пары данных сетей имеют место соотношения вида:

$[i^э]=[C^{э}_{\bullet к}][i^к]$, $[i^э]=[C^{э}_{\bullet п}][i^п]$, $[i^к]=[C^{к}_{\bullet s}][i^s]$, $[i^п]=[C^{п}_{\bullet s}][i^s]$.

Следовательно, матрица преобразования $[C^{п}_{\bullet s}]$ с учетом формулы преобразования для $[C^{3}_{\bullet 4}]$, приведенной выше, тогда будет $[C^{п}_{\bullet s}]=[C^{э}_{\bullet п}]^{-1}[C^{э}_{\bullet к}][C^{к}_{\bullet s}]$. Это преобразование выполнимо, поскольку матрица

$[C^{\text{э}}_{\bullet\text{п}}]$ несингулярная и имеет обратную. Она состоит из стольких матриц $[C^{0,1,2}_{A,B,C}]$, сколько трехфазных элементов содержится в исходной сети. Зная эту матрицу, можно без каких-либо затруднений определить по формулам (1) уравнения комплексной схемы замещения в симметричных составляющих. Для этого необходимо сначала найти преобразованные к симметричным составляющим соответствующие матрицы каждого из элементов «элементарной» сети последовательностей. Тогда полная матрица сопротивлений этой сети в симметричных составляющих

$$[Z_{\text{пп}}]=\frac{1}{3}\cdot\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1' & 2' & 0' & 0'' & 1'' & 2'' & 0''' \\ \hline
1' & 3Z_{1G} & & & & & & \\ \hline
2' & & 3Z_{2G} & & & & & \\ \hline
0' & & & 3Z_{0G} & & & & \\ \hline
0'' & & & & 2Z_C & -Z_C & -Z_C & \\ \hline
1'' & & & & -Z_C & 2Z_C & -Z_C & \\ \hline
2'' & & & & -Z_C & -Z_C & 2Z_C & \\ \hline
0''' & & & & & & & 9Z_N \\ \hline
\end{array}\,.$$

Следовательно, для рассматриваемого примера матрица преобразования имеет вид

$$[C^{\text{э}}_{\bullet\text{п}}]=\frac{1}{3}\cdot\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 0' & 1' & 2' & 0'' & 1'' & 2'' & 0''' \\ \hline
A & 1 & 1 & 1 & & & & \\ \hline
B & 1 & a^2 & a & & & & \\ \hline
C & 1 & a & a^2 & & & & \\ \hline
D & & & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline
F & & & & 1 & a^2 & a & \\ \hline
G & & & & 1 & a & a^2 & \\ \hline
N & & & & & & & 3 \\ \hline
\end{array}\,. \tag{5}$$

Чтобы совершить теперь переход к матрице $[C^{\text{п}}_{\bullet s}]$, нужно найти матрицу $[C^{\text{к}}_{\bullet s}]$. Однако ее можно определить только с помощью пока неизвестной комплексной схемы замещения. Поэтому на этом шаге целесообразно прибегнуть к уравнениям связи. Поскольку при этом осуществляется переход к токам комплексной схемы замещения в симметричных составляющих, то уравнение связи видоизменяется на уравнение

$$[M][C^{\text{э}}_{\bullet\text{п}}][i']=[M'][i']=0\,.$$

Оно в развернутой форме с учетом (4) и разделения матрицы (5) на четыре (отмеченные в (5) жирными линиями) подматрицы $[D_j]$, которые соответствуют независимым и зависимым токам i'_1 и i'_2, приобретает вид:

$$[M'][i']=\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline C' & -1 \\ \hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|c|}\hline D_1 & D_2 \\ \hline D_3 & D_4 \\ \hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline i'_1 \\ \hline i'_2 \\ \hline\end{array}=0\,.$$

Решая это уравнение относительно зависимых токов, находим

$$i'_2=-(C'D_2-D_4)^{-1}(C'D_1-D_3)i'_1=C''i'_1\,. \tag{6}$$

Таким образом, с учетом формы записи транспонированной матрицы (2) представим и получаемую из (6) матрицу $[C^{\text{п}}_{\bullet s}]$ тоже в виде транспонированной

$$[C^{\text{п}}_{\bullet s}]_t=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & C'' \\ \hline\end{array}=\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1' & 2' & 0' & 0'' & 1'' & 2'' & 0''' \\ \hline
1' & 1 & & & & -1 & & \\ \hline
2' & & 1 & & & & -1 & \\ \hline
0' & & & 1 & -1 & & & -1 \\ \hline
\end{array}\,.$$

Тогда матрица сопротивлений, вычисленная по формуле преобразования $[Z_{ss}]=[C^{\bullet\text{п}}_{c}]_t[Z_{\text{пп}}][C^{\text{п}}_{\bullet c}]$, и контурные уравнения искомой комплексной схемы, представятся в виде

$$
\begin{array}{c|c}
1 & E_{1G} \\
2 & 0 \\
0 & 0
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
1 & Z_{1G}+\dfrac{2}{3}Z_C & -\dfrac{Z_C}{3} & -\dfrac{Z_C}{3} \\
2 & -\dfrac{Z_C}{3} & Z_{2G}+\dfrac{2}{3}Z_C & -\dfrac{Z_C}{3} \\
0 & -\dfrac{Z_C}{3} & -\dfrac{Z_C}{3} & Z_{0G}+\dfrac{2}{3}Z_C+3Z_N
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c|c}
1 & I'_1 \\
2 & I'_2 \\
0 & I'_0
\end{array}. \qquad (7)
$$

Данной системе уравнений соответствует схема замещения, показанная на рис. 2.

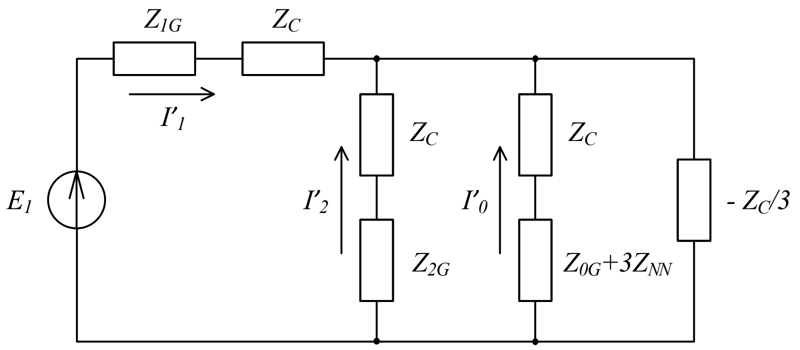

Рис. 2. Схема замещения, соответствующая уравнениям (7)

Заметим, что она совпадает с аналогичной схемой, построенной для случая однократной продольной несимметрии, когда сопротивления Z_C имеют место лишь в двух фазах. Конечно, можно было бы получить и другую комплексную схему (рис. 3), представив матрицу $Z_{\text{пп}}$ в измененном виде.

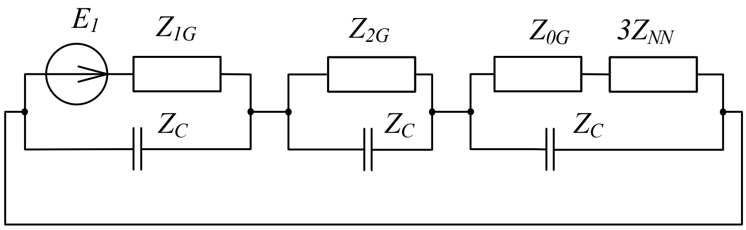

Рис. 3. Комплексная схема при замыкании одной фазы на землю

В качестве второго примера, наглядно иллюстрирующего суть совместного использования матриц преобразования координат, матриц соединения и уравнений связи, рассмотрим расчет сложного вида повреждения в трехфазной сети, представленной на рис. 4.

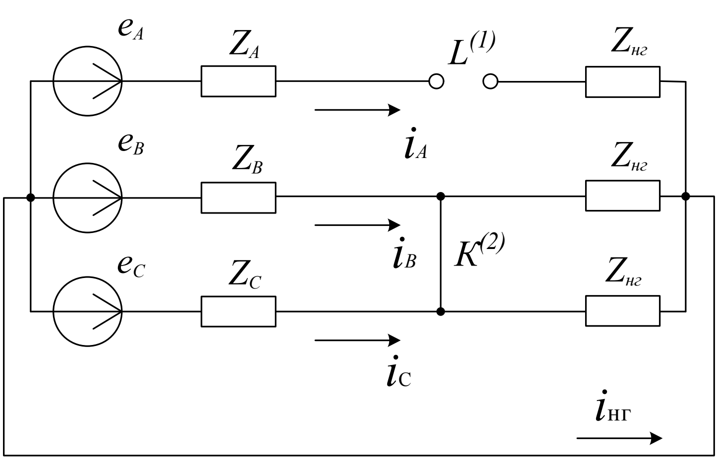

Рис. 4. Схема сети с двумя повреждениями

Пусть генератор, питающий нагрузку, задан параметрами прямой, обратной и нулевой последовательностей Z_1, Z_2, Z_0, нагрузка – действительными сопротивлениями фаз $Z_{НГ}$, а несимметрия вызывается одновременными повреждениями: разрывом фазы A ($L^{(1)}$) и двухфазным КЗ между фазами B и C ($К^{(2)}$). Требуется в аналитической форме определить матрицу решения, с помощью которой можно затем вычислить токи при любых действительных параметрах системы и значениях ЭДС генератора.

Обратимся вновь к тензорному методу, в котором ключевую роль играют матрицы преобразования. Обозначим матрицу перехода к симметричным составляющим через $[C_S]$, а матрицу соединения, характеризующую связи между элементами, через $[C_C]$. Поскольку параметры генератора заданы в симметричных составляющих, а решение надо найти в базисе действительных фазных координат, то сначала преобразуем матрицы сопротивлений и ЭДС генератора к фазным переменным с помощью матрицы $[C_S]$:

$$[Z_{GS}]=\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & Z_0 & & \\ \hline
1 & & Z_1 & \\ \hline
2 & & & Z_2 \\ \hline
\end{array},\quad [e_{GS}]=\begin{array}{|c|c|c|}
0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & E_1 & 0 \\ \hline
\end{array},\quad [C_S]=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
A & 1 & 1 & 1 \\ \hline
B & 1 & a^2 & a \\ \hline
C & 1 & a & a^2 \\ \hline
\end{array}$$

к фазным переменным с помощью матрицы $[C_S]$ по формулам:

$$[Z_G]=[C_S]_t^*[Z_{GS}][C_S],\ [e_G]=[C_S]_t^*[e_{GS}].$$

В результате получаем:

$$[Z_G]=\frac{1}{3}\cdot\begin{array}{c|c|c|c|}
 & A & B & C \\ \hline
A & Z_0+Z_1+Z_2 & Z_0+a^2Z_1+aZ_2 & Z_0+aZ_1+a^2Z_2 \\ \hline
B & Z_0+aZ_1+a^2Z_2 & Z_0+Z_1+Z_2 & Z_0+a^2Z_1+aZ_2 \\ \hline
C & Z_0+a^2Z_1+aZ_2 & Z_0+a^2Z_1+aZ_2 & Z_0+Z_1+Z_2 \\ \hline
\end{array};$$

$$[e_G]=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{array}{|c|c|c|}
A & B & C \\ \hline
E_1 & aE_1 & a^2E_1 \\ \hline
\end{array}.$$

Чтобы найти теперь матрицы сопротивлений и ЭДС в связанной (исходной) системе с повреждениями в действительных фазных координатах, необходимо воспользоваться уравнениями связи для токов и матрицей преобразования $[C]$. Выбрав в качестве независимых токов токи фазы B и нагрузки: $i'_B=i_B$; $i'_{НГ}=i_{НГ}$, определяем через них зависимые токи: $i'_A=0$, $i'_C=-i'_B-i'_{НГ}$ и находим матрицу соединения в виде

$$[C]_t=\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & A & B & C & НГ \\ \hline
B' & & 1 & -1 & \\ \hline
НГ' & & & -1 & 1 \\ \hline
\end{array}.$$

Сложив матрицы сопротивлений генератора и нагрузки и выполнив операции умножения с помощью матрицы соединения согласно формулам преобразования, приведенным выше, после ряда упрощений находим искомые матрицы сопротивлений и ЭДС всей цепи в фазной системе координат относительно независимых токов в виде:

$$[Z]=\frac{1}{3}\cdot\begin{array}{c|c|c|}
 & B' & НГ' \\ \hline
B' & 3(Z_1+Z_2) & Z_1(1-a^2)+Z_2(1-a) \\ \hline
НГ' & Z_1(1-a)+Z_2(1-a^2) & Z_0+Z_1+Z_2+3Z_{НГ} \\ \hline
\end{array};$$

$$[e]=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{array}{|c|c|}
B' & НГ' \\ \hline
a(1-a)E_1 & -a^2E_1 \\ \hline
\end{array}.$$

Выводы

1. Совместное использование уравнений связи матриц соединения и преобразования координат расширяет возможности метода симметричных составляющих для расчета несимметричных повреждений.

2. Изложенная методика расчетов позволяет находить комплексные схемы замещения для различных видов несимметрии в электрических системах.

3. Она эффективно сочетается с методом расчета сложных систем и схем отдельных последовательностей по частям.

Литература

1. Крон, Г. Тензорный анализ сетей / Г. Крон. – М.: Сов. радио, 1978. – 720 с.

2. Happ, H.H. Foundations of tensor network theory / H.H. Happ // Journal of the Franklin Institute. – 1968. – Vol. 286, no. 6. – P. 561–564. DOI: 10.1016/0016-0032(68)90392-X

3. Петров, А.Е. Тензорный метод двойственных сетей / А.Е. Петров. – М.: ООО ЦИТиП, 2007. – 602 с.

4. Сохор, Ю.Н. Тензорный анализ сетей и диакоптика в инженерных расчетах / Ю.Н. Сохор. – М.: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 200 с.

5. Amari, S. Topological foundations of Kron's Tearing of electrical networks / S Amari // RAAG Memoirs. – 1962. – Vol. 3. – P. 322–350.

6. Park, R.H. Two-reaction theory of synchronous machines. Part II / R.H. Park // Trans. AIEE. – 1933. – Vol. 52. – P. 352–354. DOI: 10.1109/T-AIEE.1933.5056309

7. Clarke, E. Circuit analysis of A-C power systems / E. Clarke, J. Wiley. – New York, 1943. – Vol. 1. – 540 p.

8. Ky, Y.H. Transient analysis of rotating machines and stationary networks by means of rotating reference frames. Part I / Y.H. Ky // Trans. AIEE. – 1951. – Vol. 70. – P. 943–957. DOI: 10.1109/T-AIEE.1951.5060505

9. Воронов, П.Л. Применение метода преобразования координат к анализу электрических сетей с распределенными источниками энергии / П.Л. Воронов, В.А. Щедрин // Региональная энергетика и электротехника: проблемы и решения: сб. науч. тр. – 2015. – Вып. XI. – С. 42–65.

10. Ульянов, С.А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах / С.А. Ульянов. – М.: Энергия, 1964. – 704 с.

11. Han, Z.X. Generalized Method of Analysis of Simultaneous Faults in Electric Power Systems / Z.X. Han // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1982. – Vol. 101, no. 10. – P. 3933–3942. DOI: 10.1109/TPAS.1982.317045

12. Лосев, С.Б. Вычисление электрических величин в несимметричных режимах электрических систем / С.Б. Лосев, А.Б. Чернин. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 528 с.

13. Авербух, А.М. Примеры расчетов неполнофазных режимов и коротких замыканий / А.М. Авербух. – Л.: Энергия, 1979. – 184 с.

14. Лямец, Ю.Я. Эквивалентирование многопроводных систем при замыканиях и обрывах части проводов / Ю.Я. Лямец, Д.Г. Еремеев, Г.С. Нудельман // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 17–27.

15. Anderson, P.M. Analysis of Faulted Power Systems / P.M. Anderson. – Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 1973. – 513 p.

16. Anderson, P.M. Analysis of Simultaneous Faults by Two-Port Network Theory / P.M. Anderson // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1971. – Vol. 90, no. 5. – pp. 2199–2205. DOI: 10.1109/TPAS.1971.293041

17. Lewis, W.E. Matrix Methods for the Evaluation of Simultaneous Faults in Three-phase Systems / W.E. Lewis, J.H. Banks // Institution Monograph. – 1955. – pp. 231–243.

18. Воронов, П.Л. Расчет по частям трехфазных сетей при несимметричных и сложных видах повреждений / П.Л. Воронов // Вестник Чувашского университета. – 2017. – № 1. – С. 76–87.

19. Kron, G. Diacoptics: The Piecewise Solution of Large-Scale Systems / G. Kron. – London, MacDonald, 1965. – 166 p.

20. Уайт, Д. Электромеханическое преобразование энергии / Д. Уайт, Г. Вудсон. – М.: Энергия, 1964. – 537 с.

21. Ионкина, П.А. Теоретические основы электротехники / П.А. Ионкина. – М.: Высшая школа, 1976. – Т. 1. – 544 с.

Воронов Павел Леонидович, аспирант кафедры электроснабжения промышленных предприятий им. А.А. Федорова, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова; инженер отдела разработки станционного оборудования, ООО НПП «ЭКРА», г. Чебоксары; plv911@mail.ru.

Поступила в редакцию 26 ноября 2017 г.

DOI: 10.14529/power180104

ON USING TRASFORMATION MATRICES AND CONSTRAINT EQUATIONS FOR ANALYSIS OF NON-SYMMETRIC FAULTS

P.L. Voronov, *plv911@mail.ru*
I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation,
EKRA Research and Production Enterprise Ltd, Cheboksary, Russian Federation

Kron's tensor-topological method being advanced by many Russian and foreign researchers opens wide opportunities for solving applied problems in complex electric power systems by means of tensor analysis and diakoptics. Its application to the analysis and calculation of asymmetric and complex types of faults occurring in power supply systems has its own peculiarities which are due to the need for transformations of variables (coordinate systems). In addition to the problems of defining transformation matrices and constraint equations, there are problems of combining individual parts of the system represented in different coordinates. Difficulties arise from the need to transform these matrices when constructing equivalent circuits.

The paper discusses simplest examples to show some features of how coordinate transformation matrices, coupling matrices and constraint equations can be jointly applied, as well as how they can be differentiated when modeling and analyzing non-symmetric faults in power supply systems.

Keywords: non-symmetric faults, transformation matrices, symmetric components, sequence equivalent circuits, coupling equations.

References

1. Kron G. *Tenzornyy analiz setey* [Tensor Analysis of Networks]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1978. 720 p.
2. Happ H.H. Foundations of Tensor Network Theory. *Journal of the Franklin Institute*, 1968, vol. 286, no. 6, pp. 561–564. DOI: 10.1016/0016-0032(68)90392-X
3. Petrov A.E. *Tenzornyy metod dvoystvennykh setey* [Tensor Method of Dual Networks]. Moscow, TsITiP Publ., 2007. 602 p.
4. Sohor Ju.N. *Tenzornyy analiz setey i diakoptika v inzhenernykh raschetakh* [Tensor Analysis of Networks and Diakoptics in Engineering Calculations]. Moscow, Lambert Academic Publishing, 2012. 200 p.
5. Amari S. Topological Foundations of Kron's Tearing of Electrical Networks. *RAAG Memoirs*, 1962, vol. 3, pp. 322–350.
6. Park R.H. Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. Part II. *Trans. AIEE*, 1933, vol. 52, pp. 352–354. DOI: 10.1109/T-AIEE.1933.5056309
7. Clarke E., Wiley J. Circuit Analysis of A-C Power Systems. *New York*, 1943, vol. 1. 540 p.
8. Ky Y.H. Transient Analysis of Rotating Machines and Stationary Networks by Means of Rotating Reference Frames. Part I. *Trans. AIEE*, 1951, vol. 70, pp. 943–957. DOI: 10.1109/T-AIEE.1951.5060505
9. Voronov P.L., Shchedrin V.A. [Application of the Coordinate Transformation Method to the Analysis of Electrical Networks with Distributed Sources of Energy]. *Regional'naya energetika i elektrotekhnika: problemy i resheniya: sb. nauch. tr.* [Regional Power Engineering and Electrical Engineering: Problems and Solutions: a Collection of Sci. Papers], 2015, iss. XI, pp. 42–65. (in Russ.)
10. Ul'yanov S.A. *Elektromagnitnye perekhodnye protsessy v elektricheskikh sistemakh* [Electromagnetic Transients in Electrical Systems]. Moscow, Energiya Publ., 1964. 704 p.
11. Han Z.X. Generalized Method of Analysis of Simultaneous Faults in Electric Power Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 101, no. 10, pp. 3933–3942. DOI: 10.1109/TPAS.1982.317045
12. Losev S.B., Chernin A.B. *Vychislenie elektricheskikh velichin v nesimmetrichnykh rezhimakh elektricheskikh sistem* [Calculation of Electrical Values in Nonsymmetric States of Electrical Systems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 528 p.
13. Averbuh A.M. *Primery raschetov nepolnofaznykh rezhimov i korotkikh zamykaniy* [Examples of Calculating Incomplete Phase States and Short Circuits]. Leningrad, Energiya Publ., 1979. 184 p.
14. Lyamets, Yu.Ya., Eremeev D.G., Nudel'man G.S. [Equivalence of Multi-Wire Systems in the Case of Short-Circuits and Partial Wire Breakage]. *Elektrichestvo* [Electricity], 2003, no. 11, pp. 17–27. (in Russ.)
15. Anderson P.M. *Analysis of Faulted Power Systems*. Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 1973. 513 p.
16. Anderson P.M. Analysis of Simultaneous Faults by Two-Port Network Theory. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1971, vol. 90, no. 5, pp. 2199–2205. DOI: 10.1109/TPAS.1971.293041

17. Lewis W.E., Banks J.H. Matrix Methods for the Evaluation of Simultaneous Faults in Three-Phase Systems. *Institution Monograph*, 1955. pp. 231–243.

18. Voronov P.L. [Piecewise Calculation of Three-Phase Networks with Asymmetric and Complex Types of Damage]. *Bulletin of the Chuvash University*, 2017, iss. 1, pp. 76–87. (in Russ.)

19. Kron G. *Diacoptics: The Piecewise Solution of Large-Scale Systems*. London, MacDonald, 1965. 166 p.

20. White D., Woodson G. *Elektromekhanicheskoe preobrazovanie energii* [Electromechanical Energy Conversion]. Moscow, Energiya Publ., 1964. 537 p.

21. Ionkina P.A. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki* [Theoretical Foundations of Electrical Engineering]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1976, vol. 1. 544 p.

Received 26 November 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Воронов, П.Л. Особенности применения матриц преобразования и уравнений связи при анализе несимметричных повреждений / П.Л. Воронов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». – 2018. – Т. 18, № 1. – С. 27–37. DOI: 10.14529/power180104

FOR CITATION

Voronov P.L. On Using Trasformation Matrices and Constraint Equations for Analysis of Non-Symmetric Faults. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 27–37. (in Russ.) DOI: 10.14529/power180104