

ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ НА АМПЛИТУДЫ ТОКА И МОМЕНТА СИНХРОННЫХ МАШИН

И.П. Попов

Курганский государственный университет, г. Курган, Россия

Состояние вопроса. Амплитуда ЭДС обмотки вращающейся электрической машины зависит от частоты, в связи с чем может возникнуть интуитивное предположение, что амплитуды тока и вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины (амплитуды напряжения и вращающего момента для емкостной машины) также зависят от частоты. *Методы исследования.* В настоящей работе применяются методы математического моделирования. *Результаты.* Справедливы следующие теоремы. Теорема 1. Амплитуда тока в индуктивной нагрузке индуктивной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения. Теорема 2. Амплитуда вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой не зависит от частоты вращения. Теорема 3. Амплитуда напряжения на емкостной нагрузке емкостной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения. Теорема 4. Амплитуда вращающего момента для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой не зависит от частоты вращения. *Выводы.* Вопреки возможному интуитивному предположению, для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой амплитуды тока и вращающего момента от частоты вращения не зависят. При другом характере нагрузки – зависят. Для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой амплитуды напряжения и вращающего момента от частоты вращения не зависят.

Ключевые слова: синхронная машина, индуктивная нагрузка, ток, момент, амплитуда.

Введение

Представляет интерес поведение синхронных электрических машин при различном характере нагрузки. Для индуктивной синхронной электрической машины – это зависимость амплитуды тока и вращающего момента от нагрузки, для емкостной синхронной электрической машины – это зависимость амплитуды напряжения и вращающего момента.

Анализ состояния вопроса. Потокосцепление обмотки вращающейся электрической машины равно

$$\psi = \Psi_m \cos \omega t.$$

ЭДС обмотки определяется выражением

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = \omega \Psi_m \sin \omega t.$$

Амплитуда ЭДС

$$E_m = \omega \Psi_m$$

зависит от частоты, в связи с чем может возникнуть интуитивное предположение, что амплитуды тока и вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины [1–3] (амплитуды напряжения и вращающего момента для емкостной машины) также зависят от частоты. В действительности это происходит не всегда. Существенную роль в этом играет характер нагрузки электрической машины.

Цель исследования – показать, при каком характере нагрузки параметры синхронной электрической машины не зависят от частоты.

Задачи работы – получить доказательные на уровне теорем результаты.

Актуальность исследования обусловлена широким распространением синхронных электрических машин, используемых, в частности, в качестве генераторов.

Ток и момент индуктивной синхронной электрической машины при индуктивной нагрузке

Пусть нагрузкой фазы индуктивной синхронной электрической машины [4–6] является катушка индуктивности. Далее суммарная индуктивность катушки и обмотки машины обозначается L . Число витков обмотки – n . Длина активной части витка – l . Индукция магнитного поля в рабочем зазоре – B . Угол поворота ротора – φ . Частота вращения – $\omega = d\varphi/dt$. Ток – i . Число полюсов – два. Диаметр ротора – D_r . Активные электрические и механические потери не учитываются.

Для синхронной машины [7–10] с индуктивной нагрузкой справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Амплитуда тока в индуктивной нагрузке индуктивной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения.

Доказательство.

ЭДС одного витка обмотки в соответствии с законом электромагнитной индукции равна

$$e_1 = -Blv \sin \varphi.$$

Для n витков

$$e_n = -Blnv \sin \varphi .$$

Скорость v равна

$$v = \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} .$$

Таким образом, ЭДС идеализированной синхронной машины равна

$$e = -Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi .$$

При индуктивной нагрузке

$$u_L = -L \frac{di}{dt} .$$

В соответствии с законом Кирхгофа

$$e = u_L .$$

Или

$$Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = L \frac{di}{dt} . \quad (1)$$

Интегрирование этого выражения дает

$$i = -\frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2} \cos \varphi + I_0 = -I_m \cos \varphi + I_0 .$$

Начальный ток I_0 можно положить равным нулю.

Амплитуда тока

$$I_m = \frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2}$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Лемма. Момент синхронной электрической машины при реактивной нагрузке не равен нулю.

Доказательство. При реактивной нагрузке развивается реактивная мощность

$$q = ui = U \sin \omega t \cdot I \sin \left(\omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \frac{1}{2} UI \sin 2\omega t .$$

Она не равна нулю.

Механическая мощность равна

$$p = \mu \omega .$$

В соответствии с законом сохранения энергии механическая мощность равна электрической мощности. Из этого следует формула для момента

$$\mu = \frac{p}{\omega} = \frac{q}{\omega} = \pm \frac{UI}{2\omega} \sin 2\omega t .$$

Так же как и реактивная мощность, момент не равен нулю.

Лемма доказана.

Замечание 1. Речь не идет о среднем значении момента за период колебаний.

Замечание 2. Из леммы необходимо следует, что механическая мощность, развиваемая машиной, также не равна нулю.

Теорема 2. Амплитуда вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Доказательство. При указанных допущениях вращающий момент в соответствии с законом Ампера (применительно к вращающейся машине) равен

$$\begin{aligned} \mu &= Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Bln \frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2} \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= -\frac{(Bln)^2}{L} \frac{D_r^2}{8} \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \frac{(Bln)^2}{L} \frac{D_r^2}{8}$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Правомерен вопрос: а как обстоит дело при другом характере нагрузки синхронной электрической машины [11–14]?

Ток и момент при другом характере нагрузки

При активной нагрузке аналог уравнения (1) имеет вид

$$Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = Ri .$$

Амплитуда тока

$$I_m = \frac{Bln}{R} \frac{D_r}{2} \omega$$

от частоты вращения ω зависит (линейно).

Вращающий момент равен

$$\begin{aligned} \mu &= Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = Bln \frac{Bln}{R} \frac{D_r}{2} \omega \sin \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= \frac{(Bln)^2}{R} \frac{D_r^2}{8} \omega \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \frac{(Bln)^2}{R} \frac{D_r^2}{8} \omega$$

от частоты вращения ω зависит (линейно).

При емкостной нагрузке [20] аналог уравнения (1) имеет вид

$$Bln \frac{D_r}{2} \omega \sin \omega t = \frac{1}{C} \int_0^t idt .$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$i = BlnC \frac{D_r}{2} \omega^2 \cos \omega t .$$

Амплитуда тока

$$I_m = BlnC \frac{D_r}{2} \omega^2$$

от частоты вращения ω зависит (квадратично).

Вращающий момент равен

$$\begin{aligned} \mu &= Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = BlnBlnC \frac{D_r}{2} \omega^2 \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= (Bln)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^2 \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = (Bl_n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^2$$

от частоты вращения ω зависит (квадратично).

Зависимость мощности от характера нагрузки

Для индуктивной нагрузки синхронной машины [15–18] реактивная электрическая мощность равна

$$Q = I^2 X_L = I^2 \omega L = \frac{(Bl_n)^2 D_r^2}{L} \omega. \quad (2)$$

Здесь I – действующее значение тока.

Механическая мощность равна

$$Q_M = M\omega = \frac{(Bl_n)^2 D_r^2}{L} \omega. \quad (3)$$

Разумеется, (2) и (3) совпали.

Мощность линейно зависит от частоты.

Для резистивной нагрузки активная электрическая мощность равна

$$P = I^2 R = \frac{(Bl_n)^2 D_r^2}{R} \omega^2. \quad (4)$$

Механическая мощность равна

$$P_M = M\omega = \frac{(Bl_n)^2 D_r^2}{R} \omega. \quad (5)$$

Разумеется, (4) и (5) совпали.

Мощность квадратично зависит от частоты.

Для емкостной нагрузки [19] реактивная электрическая мощность равна

$$Q = I^2 X_C = I^2 \frac{1}{\omega C} = (Bl_n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^3. \quad (6)$$

Механическая мощность равна

$$Q_C = M\omega = (Bl_n)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^3. \quad (7)$$

Разумеется, (6) и (7) совпали.

Мощность кубично зависит от частоты.

Напряжение и момент емкостной синхронной электрической машины при емкостной нагрузке

Дуальным аналогом индуктивной синхронной электрической машины является емкостная синхронная электрическая машина [20].

В соответствии с законом магнитоэлектрической индукции (дуальный аналог закона электромагнитной индукции) ток равен

$$i = Dbv, \quad (8)$$

где D – электрическая индукция (электрическое смещение) в рабочем зазоре, b – ширина электрода, v – линейная скорость.

Выражение (8) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= Db \frac{dx}{dt}, \\ dq &= Db dx, \end{aligned}$$

$$\int_0^q dq = Db \int_0^x dx,$$

$$q = Dbx.$$

С учетом последнего уравнения сила, действующая на электрод, равна

$$F = qE = q \frac{u}{x} = Db u. \quad (9)$$

Это дуальный аналог закона Ампера для электрического (магнитоэлектрического) взаимодействия. Здесь E – напряженность электрического поля, u – напряжение. Электрический ток равен

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (10)$$

Замечание. Формулы (8) и (9) могут быть получены из их электромагнитных аналогов путем простой дуально-инверсной замены величин $e \rightarrow i$, $B \rightarrow D$, $l \rightarrow b$, $i \rightarrow u$.

Теорема 3. Амплитуда напряжения на емкостной нагрузке емкостной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения.

Доказательство. Для вращательной машины уравнение для тока с учетом (8) и (10) имеет вид

$$Db \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = C \frac{du}{dt}.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$u = -\frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \cos \varphi + U_0 = -U_m \cos \varphi + U_0. \quad (11)$$

Амплитуда напряжения

$$U_m = \frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \quad (12)$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Теорема 4. Амплитуда вращающего момента для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Доказательство. Вращающий момент в соответствии с (9), (11) и (12) применительно к вращающейся машине равен

$$\begin{aligned} \mu &= Db u \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Db U_m \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= -Db \frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -\frac{D^2 b^2 D_r^2}{C} \frac{d\varphi}{8} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \frac{D^2 b^2 D_r^2}{C} \frac{d\varphi}{8}$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, вопреки возможному интуитивному предположению, для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной

нагрузкой амплитуды тока и вращающего момента от частоты вращения не зависят.

При другом характере нагрузки – зависят.

Для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой амплитуды на-

пряжения и вращающего момента от частоты вращения не зависят.

Полученные результаты рекомендуется использовать при проектировании электрических систем.

Литература/References

1. Bianchi N., Bolognani S., Bon D., Dai Pre M. Rotor Flux-Barrier Design for Torque Ripple Reduction in Synchronous Reluctance and PM-Assisted Synchronous Reluctance Motors. *IEEE Trans. on Ind. Appl.*, 2009, vol. 45, no. 3, pp. 921–928. DOI: 10.1109/TIA.2009.2018960
2. Boglietti A., Cavagnino A., Pastorelli M., Vagati A. Experimental Comparison of Induction and Synchronous Reluctance Motors Performance. *Conference Record of the 2005 Industry Applications Conference, Fortieth IAS Annual Meeting*, 2005, vol. 1, pp. 474–479. DOI: 10.1109/IAS.2005.1518350
3. Bomela X.B., Kamper M.J. Effect of Stator Chording and Rotor Skewing on Performance of Reluctance Synchronous Machine. *IEEE Trans. on Ind. Appl.*, 2002, no. 1, pp. 91–100. DOI: 10.1109/28.980362
4. Oprea C., Dziechciarz A., Martis C. Comparative Analysis of Different Synchronous Reluctance Motor Topologies. *International Conference on Environment and Electrical Engineering*, 2015. DOI: 10.1109/EEEIC.2015.7165463
5. Fratta A., Troglia G.P., Vagati A., Villata F. Torque Ripple Evaluation of High-Performance Synchronous Reluctance Machines. *IEEE Trans. Ind. Appl. Mag.*, 1995, vol. 1, no. 4, pp. 14–22. DOI: 10.1109/2943.392459
6. Haataja J.A. *Comparative Performance Study of Four Pole Induction Motors and Synchronous Reluctance Motor in Variable Speed Drives*. Lappeenranta University of Technology, 2003. 138 p.
7. Ho Lee J., Lee K., Hyun Cho Y., Won Yun T. Characteristics Analysis and Optimum Design of Anisotropy Rotor Synchronous Reluctance Motor Using Coupled Finite Element Method and Response Surface Methodology. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2009, vol. 45, pp. 4696–4699. DOI: 10.1109/TMAG.2009.2024877
8. Hofmann H., Sanders S.R. High-Speed Synchronous Reluctance Machine with Minimized Rotor Loss. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 531–539. DOI: 10.1109/28.833771
9. Hortman M.B. Implementation and Evaluation of a Full-Order Observer for a Synchronous Reluctance Motor. *Thesis, School of Electrical and Computer Engineering Georgia Institute of Technology*, 2004. 63 p.
10. Hossein A., Abolfazl V. Rotor Geometry Parameter Optimization of Synchronous Reluctance Motor Using Taguchi Method. *Przeegląd Elektrotechniczny*, 2013, pp. 197–201.
11. Hudak P., Hrabovcova V., Rafajdus P. Geometrical Dimension Influence of Multi-Barrier Rotor on Reluctance Synchronous Motor Performances. *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion SPEEDAM*, 2006, pp. 346–351. DOI: 10.1109/SPEEDAM.2006.1649796
12. Kolehmainen J. Synchronous Reluctance Motor with Form Blocked Rotor. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2010, pp. 450–456. DOI: 10.1109/TEC.2009.2038579
13. Haataja J. *A Comparative Performance Study of Four-Pole Induction Motors and Synchronous Reluctance Motors in Variable Speed Drives*. Lappeenranta, 2003.
14. Kamper M.J., Van der Merwe F.S., Williamson S. Direct Finite Element Design Optimization of the Cageless Reluctance Synchronous Machine. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 1996, vol. 11, no. 3, pp. 547–555. DOI: 10.1109/60.537006
15. Lipo T.A. Synchronous Reluctance Machine, a Viable Alternative for AC Drives. *E.M.P.S.*, 1991, vol. 19, pp. 659–671. DOI: 10.1080/07313569108909556
16. Lipo T.A., Vagati A., Malesani L., Fukao T. Synchronous Reluctance Motors and Drives. A New Alternative. *IEEE IAS Annual Meeting, Tutorial Course, Electric Machines Committee*, 1992, pp. 29–33. DOI: 10.1109/IAS.1992.244463
17. Moghaddam R.R. Synchronous Reluctance Machine (SynRM) Design. *Thesis in Power Electrical Engineering, Royal Institute of Technology*, 2007. 103 p.
18. Moghaddam R.R., Magnussen F., Sadarangani Ch. Theoretical and Experimental Reevaluation of Synchronous Reluctance Machine. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, vol. 57, no. 1, pp. 6–13. DOI: 10.1109/TIE.2009.2025286
19. Попов И.П. Емкостно-инертное устройство. Известия Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». 2015. Т. 2. С. 43–45. [Popov I.P. [Capacitive Inert Device]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo ehlektrotekhnicheskogo universiteta "LEHTI"* [News of St. Petersburg State Electrotechnical University "LETI"], 2015, vol. 2, pp. 43–45.]
20. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в электрических системах с однородными реактивными элементами. *Электричество*. 2013. № 1. С. 57–59. [Popov I.P. [Free Harmonic Oscillations in Electrical Systems with Homogeneous Reactive Elements]. *Ehlektrichestvo* [Electricity], 2013, no. 1, pp. 57–59.]

Попов Игорь Павлович, старший преподаватель, Курганский государственный университет, г. Курган; ip.popov@yandex.ru.

Поступила в редакцию 29 октября 2018 г.

DOI: 10.14529/power190112

HOW ROTATIONAL SPEED AFFECTS AND CURRENT AND TORQUE AMPLITUDES IN SYNCHRONOUS MACHINES

I.P. Popov, ip.popov@yandex.ru

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

State of the art. The magnitude of winding EMF in a rotary electric machine depends on the rotational speed, which gives rise to an intuitive assumption that the current and torque amplitudes for an inductive synchronous electric machine (or voltage and torque amplitudes for a capacitive machine) will too. *Research methods.* This research uses mathematical modeling. *Results.* The following theorems hold true. Theorem 1. The current amplitude in the inductive load of an inductive synchronous electric machine does not depend on the rotational speed. Theorem 2. The torque amplitude for an inductive synchronous electric machine with an inductive load does not depend on the rotational speed. Theorem 3. The voltage amplitude for the capacitive load of a capacitive synchronous electric machine does not depend on the rotational speed. Theorem 4. The amplitude and torque for a capacitive synchronous electric machine with a capacitive load does not depend on the rotational speed. *Conclusions.* Contrary to a possible intuitive assumption, the current and torque amplitudes in an inductive synchronous electric machine with an inductive load do not depend on the rotational speed. With another load type, they do. For a capacitive synchronous electric machine with a capacitive load, the voltage and torque amplitude do not depend on the rotational speed.

Keywords: synchronous machine, inductive load, current, torque, amplitude.

Received 29 October 2018

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Попов, И.П. Влияние частоты на амплитуды тока и момента синхронных машин / И.П. Попов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 102–106. DOI: 10.14529/power190112

FOR CITATION

Popov I.P. How Rotational Speed Affects and Current and Torque Amplitudes in Synchronous Machines. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 102–106. (in Russ.) DOI: 10.14529/power190112
